

# 國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

以「固定一邊找第三點」概念於國中三角形全等  
性質教學之研究

A Study of Teaching Congruence Properties of Triangles by  
" Finding the Third Point for a Given Side "

研 究 生：蔡淑貞

指 導 教 授：陳明璋 博士

黃大原 博士

中 華 民 國 一 百 零 二 年 八 月

以「固定一邊找第三點」概念於國中三角形全等  
性質教學之研究

A Study of Teaching Congruence Properties of Triangles by

" Finding the Third Point for a Given Side "

研究生：蔡淑貞 Student：Shu-Chen Tsai

指導教授：黃大原 Advisor：Tay-Yuan Huang  
陳明璋 Ming-Jang Chen

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

August 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年八月

# 以「固定一邊找第三點」概念於國中三角形全等性質教學之研究

學生：蔡淑貞

指導教授：黃大原博士、陳明璋博士

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

## 中文摘要

本研究以「固定一邊找第三點」對照「尺規作圖」之教學脈絡，旨在探討這兩種教學脈絡在「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」等五種判斷兩個三角形全等性質的教學中，對於學生的學習表現以及認知負荷感受的影響。本實驗採用準實驗研究法，以新竹市某國中八年級四個常態班共120位學生為研究對象，實驗組之教學脈絡為「固定一邊找第三點」，對照組之教學脈絡為「尺規作圖」。以二因子變異數進行實驗數據分析，自變項為教學脈絡與成就水準，依變項為後測表現、延後測表現與認知負荷感受，後測與延後測均區分為總分、基本知識、理解概念與應用說明四個部分進行分析；以認知負荷量表之花費心力檢測認知負荷感受；另以學習效率與學習投入分數綜合判斷學習情形，以及對於高成就水準學生是否發生專業知識反轉效應。研究結果顯示：(1) 以「固定一邊找第三點」的教學脈絡對後測表現在總分、理解概念與應用說明有達到顯著；成就水準變項對後測表現在總分、基本知識、理解概念與應用說明均達到顯著。(2) 綜合學習效率與學習投入分數判斷學習情況，實驗組為高投入高效率，對照組為低投入低效率，兩組教材對於高成就水準學生均未產生專業知識反轉效應。

關鍵字：三角形全等、認知負荷、多媒體學習

# A Study of Teaching Congruence Properties of Triangles by

## " Finding the Third Point for a Given Side "

Student : Shu-Chen Tsai    Advisor : Tay-Yuan Huang, Ming-Jang Chen

Degree Program of E-Learning

National Chiao Tung University

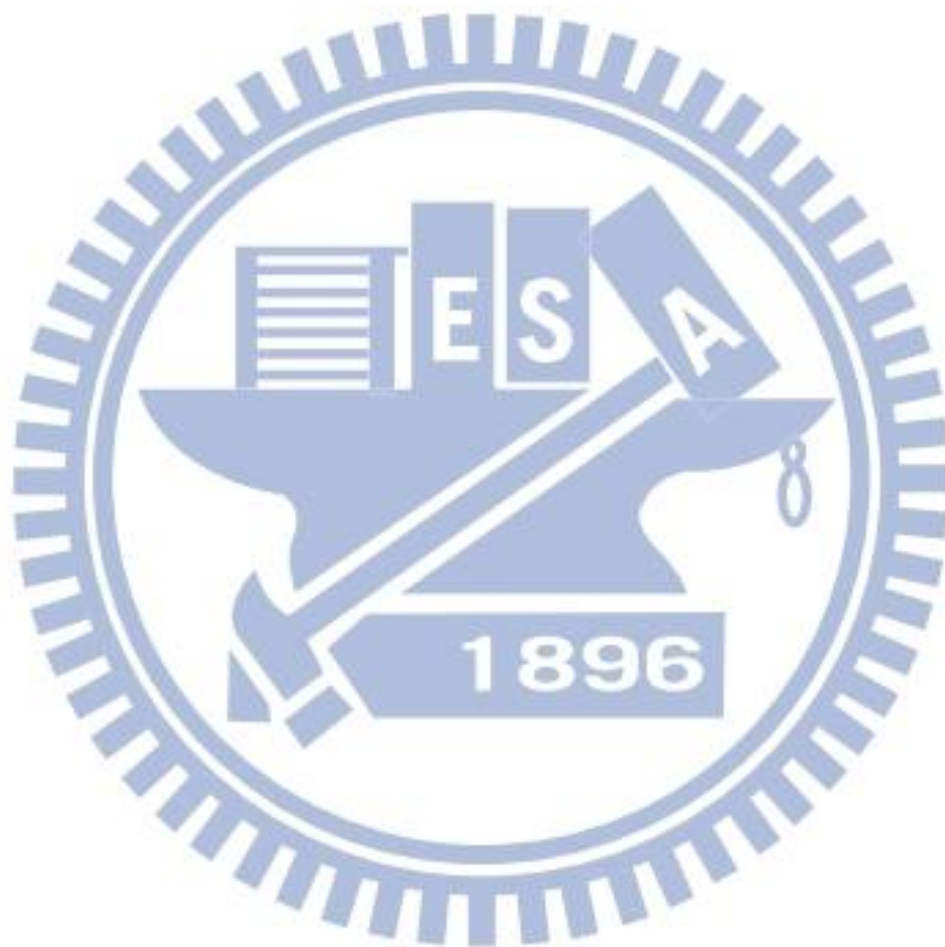
### Abstract

This study compares two teaching contexts – " Finding the Third Point for a Given Side " and " Ruler" – to investigate their effects on students' learning achievement and perceptions of cognitive load in "SSS", "ASA", "AAS", "SAS "and" RHS " two triangles congruent determine the nature of teaching. Quasi-experimental in design, this study involves 120 participants from 4 8<sup>th</sup>-grade classes in a junior high school in Hsinchu city. The teaching context of the experimental group was based on " Finding the Third Point for a Given Side " while students in the control group were " Ruler " teaching context. The result was analyzed through two-way ANOVA, with teaching context and achievement level being independent variables and scores in post-test and delayed post-test and cognitive load being the dependent variables. Scores in both post-test and delayed post-test were analyzed as four individual parts, including total scores, the basic knowledge, understanding of concepts, and application of concepts. The participants' perceptions of cognitive load were measured through cognitive load measurement, while scores of instructional efficiency and instructional involvement were used to synthetically determine their learning achievement and whether the expertise reversal effect had been observed in the high achievers. The results showed that: (1) Total scores, understanding and application of concepts are found to be significant in the post test in the " Finding the Third Point for a Given Side " teaching context; the variable of achievement level had on scores in post test was found to be significant in total scores, basic knowledge, understanding and application of the concept. (2) Judging from the synthesis of instructional efficiency and



instructional involvement score, participants in the experimental group belonged to learners of high involvement high achievement learning style while participants in the control group were described as learners of low involvement and low achievement learning style. Neither teaching materials led to the expertise reversal effect in high achievers.

Keywords: triangles congruent, cognitive load, multimedia learning



## 誌謝

三年前一個單純的念頭，希望能在教書 15 年後，再回校園重拾學生身份。三年後終於能走出交大實現自己的夢想。一路走來雖然很辛苦，生病期間也曾多次想放棄，還好有許多人的鼓勵，才能有現在的收穫！

首先最要感謝的是耐心指導我的教授陳明璋博士，不斷的鼓勵我不要放棄、要我堅持下去，終於完成論文。

也感謝黃大原教授、袁媛教授、李俊儀教授、莊榮宏教授能在口試時給予寶貴的意見，讓論文更加完整。

當然還有振順學長、敏惠、依萍、淑媛、世易、玫琪、建巖、駿碩、淳宇，與學弟士立、天行、昭吉、蕙璐、威鈞和雅婷，謝謝有你們的陪伴與協助。

感謝淑敏姐姐在英文摘要上協助翻譯。感謝我的家人，總是在精神上支持我。最後謝謝自己已經努力的熬過所有的苦痛與磨練，我終於畢業了！

淑貞 2013.09.09

# 目次

中文摘要.....	i
Abstract.....	ii
誌謝.....	iv
目次.....	v
表次.....	viii
圖次.....	x
第一章 緒論.....	1
1-1 研究背景與動機.....	1
1-2 研究目的.....	2
1-3 研究問題.....	2
1-4 研究範圍與限制.....	3
1-5 名詞解釋.....	3
第二章 文獻探討.....	5
2-1 認知負荷理論.....	5
2-1-1 自然訊息處理系統與人類認知架構.....	5
2-1-2 認知負荷類型.....	7
2-1-3 認知負荷理論的教學設計原則.....	9
2-1-4 專知識反轉效應.....	11
2-1-5 認知負荷理論對本研究的影響.....	14
2-2 多媒體學習理論.....	15
2-2-1 多媒體學習理論的基本假設.....	15
2-2-2 多媒體學習理論的認知負荷.....	17
2-2-3 多媒體學習理論的教學設計原則.....	17

2-2-4	多媒體學習理論對本研究之影響.....	19
2-3	注意力與視覺搜尋.....	19
2-3-1	選擇性注意力.....	19
2-3-2	視覺搜尋.....	21
2-3-3	特徵整合理論.....	22
2-3-4	注意力與視覺搜尋對本研究之影響.....	23
2-4	幾何教學.....	23
2-4-1	幾何圖形的認知理解.....	24
2-4-2	數學符號表徵的轉化.....	24
2-4-3	從表徵轉化看學習數學的困難.....	26
2-5	三角形的全等性質.....	27
2-5-1	九年一貫課程綱要中的三角形全等性質.....	27
2-5-2	三角形全等性質相關研究.....	29
第三章	研究方法.....	31
3-1	研究流程.....	31
3-1-1	準備階段.....	32
3-1-2	實驗階段.....	32
3-1-3	分析階段.....	32
3-2	研究設計.....	32
3-2-1	研究方法.....	32
3-2-2	研究變項與假設.....	33
3-2-3	實驗流程.....	34
3-3	研究對象.....	35
3-4	研究工具.....	36
3-4-1	實驗教材.....	36

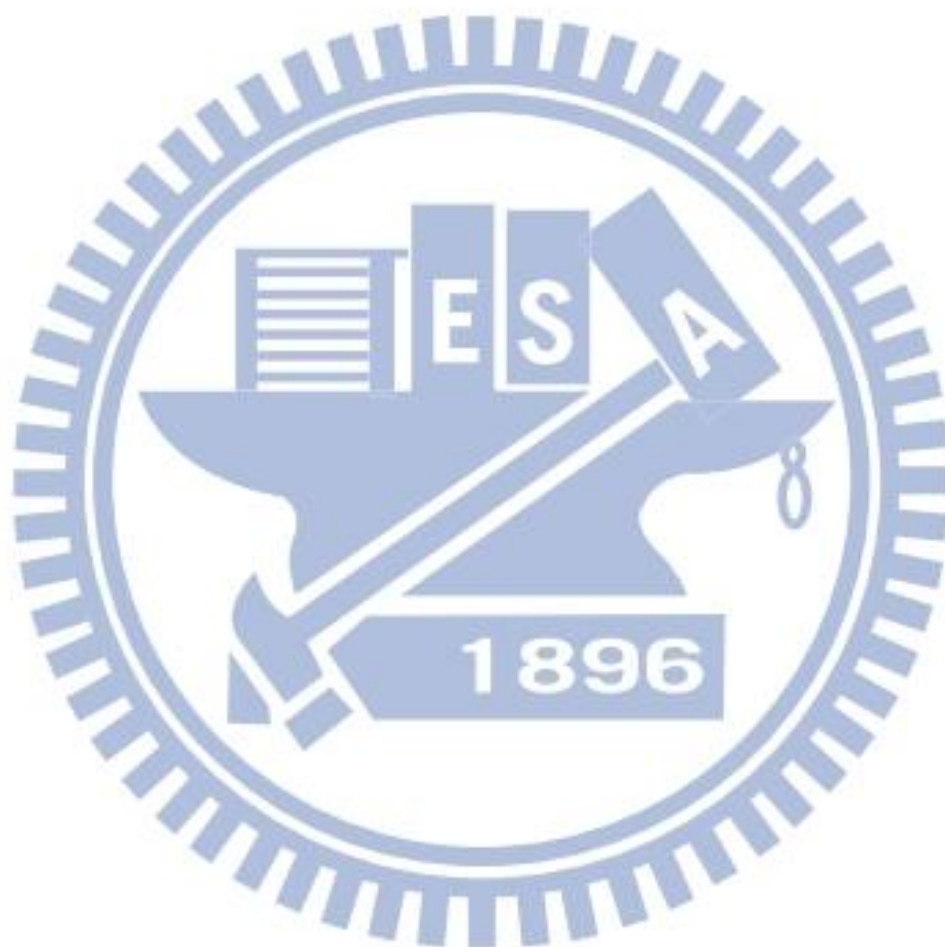


3-4-2 前測試卷.....	41
3-4-3 後測試卷.....	42
3-4-4 延後測試卷.....	42
3-4-5 認知負荷量表.....	42
3-5 資料分析.....	43
第四章 結果分析與討論.....	45
4-1 後測及延後測表現分析.....	45
4-2 認知負荷分析.....	64
4-3 學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應分析.....	66
4-3-1 整體學生之分析.....	66
4-3-2 各學習成就學生之分析.....	67
第五章 結論與建議.....	69
5-1 研究結論.....	69
5-2 建議.....	70
5-2-1 對於教學之建議.....	70
5-2-2 對於未來研究之建議.....	71
參考文獻.....	73
1. 中文文獻.....	73
2. 英文文獻.....	75
附錄一 前測試卷.....	77
附錄二 後測試卷.....	79
附錄三 延後測試卷.....	81
附錄四 實驗組教材.....	83

## 表次

表 1	認知負荷理論的十五項教學效應.....	9
表 2	多媒體的設計原則.....	18
表 3	教學實驗流程表.....	34
表 4	研究對象班級人數及上學期數學科定期評量成績表.....	35
表 5	受試學生高、低學習成就人數分配表.....	35
表 6	兩組學生上學期數學科定期評量平均獨立樣本 $t$ 檢定摘要表.....	35
表 7	兩組學生前測平均獨立樣本 $t$ 檢定摘要表.....	36
表 8	實驗組 SSS 全等性質教材.....	37
表 9	對照組 SSS 全等性質教材.....	40
表 10	後測及延後測描述性統計摘要表.....	46
表 11	教學脈絡與成就水準在後測總分之平均數摘要表.....	47
表 12	教學脈絡與成就水準在後測總分之二因子變異數分析摘要表.....	47
表 13	教學脈絡與成就水準在延後測總分之平均數摘要表.....	49
表 14	教學脈絡與成就水準在延後測總分之二因子變異數分析摘要表.....	49
表 15	教學脈絡與成就水準在後測基本知識之平均數摘要表.....	51
表 16	教學脈絡與成就水準在後測基本知識之二因子變異數分析摘要表.....	51
表 17	教學脈絡與成就水準在延後測基本知識之平均數摘要表.....	53
表 18	教學脈絡與成就水準在延後測基本知識之二因子變異數分析摘要表.....	53
表 19	教學脈絡與成就水準在後測理解概念之平均數摘要表.....	55
表 20	教學脈絡與成就水準在後測理解概念之二因子變異數分析摘要表.....	55
表 21	教學脈絡與成就水準在延後測理解概念之平均數摘要表.....	57
表 22	教學脈絡與成就水準在延後測理解概念之二因子變異數分析摘要表.....	57
表 23	教學脈絡與成就水準在後測應用說明之平均數摘要表.....	59
表 24	教學脈絡與成就水準在後測應用說明之二因子變異數分析摘要表.....	59

表 25 教學脈絡與成就水準在延後測應用說明之平均數摘要表.....	61
表 26 教學脈絡與成就水準在延後測應用說明之二因子變異數分析摘要表.	61
表 27 教學脈絡與成就水準在花費心力之平均數摘要表.....	64
表 28 教學脈絡與成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表.....	65
表 29 兩組學生之學習效率與投入分數.....	66
表 30 不同學習成就之學習效率與投入分數.....	67



# 圖次

圖 1	學習效率圖.....	12
圖 2	學習投入分數圖.....	13
圖 3	綜合學習效率與學習投入分數圖.....	14
圖 4	多媒體學習理論的認知模型.....	15
圖 5	雙碼理論.....	15
圖 6	聽覺通道處理過程.....	16
圖 7	視覺通道處理過程.....	16
圖 8	早期選擇理論處理流程.....	20
圖 9	晚期選擇理論處理流程.....	20
圖 10	序列搜尋和結合搜尋.....	21
圖 11	平行搜尋和特徵搜尋.....	22
圖 12	刺激數目與反應時間的關係.....	22
圖 13	特徵整合理論.....	23
圖 14	幾何視覺轉化—重新配置原圖.....	25
圖 15	表徵轉換—代數表徵轉圖形表徵.....	26
圖 16	表徵轉換—自然語言轉數學語言.....	26
圖 17	視覺理的第一步—子圖需被辨別.....	27
圖 18	研究流程.....	31
圖 19	教材內容之目錄.....	37
圖 20	學生後測及延後測平均分數折線圖.....	63
圖 21	兩組學生學習效率與投入分數之視覺化圖像.....	66
圖 22	不同學習成就之學習效率與投入分數視覺化圖像.....	68



# 第一章 緒論

本章共有五節，分別說明研究背景與動機、研究目的、研究問題、研究範圍與限制、名詞解釋。

## 1-1 研究背景與動機

三角形的全等性質在整個國中幾何課程的教學來說，非常的重要。尤其在此課程後面，特殊四邊形的幾何證明都需要用到三角形的全等性質來說明。學生在此之前已學過的三角形性質包含三角形的內外角和與畢氏定理，要等到學完三角形的全等性質教材後，才足以應付往後幾何性質的證明與推論。

確實有研究指出，在國中七、八年級的數學課程內容，學生的答題表現最差的在於利用特殊三角形的性質，找出三角形全等的條件，證明出題目所要求的邊或角(謝易達，2013)。更在探討三角形的全等錯誤類型之研究中，資料分析學生產生錯誤類型的根源大多是未能完全理解五種全等性質的源由(黃昭智，2010)。

有鑒於此研究者發現在教科書與網路上有關的三角形全等性質的教材或多媒體教學資源，它們常見的教學脈絡為先教尺規作圖步驟，然後說明所畫出的圖形即為所要求的唯一的三角形圖形，用來告知學生三角形的全等性質有五種，如果教師只是按照教科書的教學脈絡進行教學，容易造成學生不清楚每個作圖步驟所代表的幾何意義，因此多數學生只好死背五種全等性質，對於成就水準較低的學生來說，尺規作圖步驟就是沈重的負荷；甚至對少數中高程度的學生也無法清楚分辨其性質，當然在證明的應用上就無法理解，舉一反三。如果這樣的課程安排使用尺規作圖步驟的教學脈絡對於學生的負擔過重，是否有不同的教材設計能用不同的教學脈絡帶給學生更好的學習成效。

我們都知道三角形有三個頂點與三個邊，而三定點就能決定唯一的三角形。試著觀察五種全等性質「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」，從符號來看「S」代表邊，「A」代表角，然而五種全等性質皆與邊長「S」有關，只要有一個邊長就有兩個端點，也就是說有了一個固定邊之後只要能找出第三點的位置，則這個三角形就是唯一的三角形了。

本研究嘗試透過數位教材設計不同的教學脈絡從邊長「S」去引導學生觀察形成唯一三角形的成因，進而認識五種全等性質。依照多媒體學習認知理論 (Cognitive Theory of Multimedia Learning)、認知負荷理論(Cognitive Load Theory)、Duval 的幾何理解理論、以及視覺搜尋(Visual search)等相關理論，運用國立交通大學陳明璋博士所開發的 AMA (Activate Mind Attention) 軟體呈現多媒體教材，配合教師的口語引導學生搜尋訊息，進行選取(selection)與組織(organization)訊息，降低認知負荷，避免不必要的注意力分散，使學生能專注在教材內容。進而引導學生進行思考。實驗教材內容包含三角形性質中的全等性質「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」，以「固定一邊找第三點」為概念之教學脈絡，引導學生學習「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」等五種判斷兩個三角形全等性質，期望能產生更好的學習成效，協助學生分辨五種性質，而不再只是死背五個全等性質。

## 1-2 研究目的

本研究欲探討教學脈絡（以固定一邊找第三點為概念 vs 以課本常用之尺規作圖）與不同成就水準的學生（高 vs 低）在學習表現與認知負荷方面的影響。另外，透過學習效率與學習投入分數，觀察對於高成就水準學生是否產生專業知識反轉效應。

## 1-3 研究問題

本研究之研究問題如下：

1. 不同教學脈絡與不同成就水準對於後測的交互作用是否顯著？
2. 不同教學脈絡與不同成就水準對於延後測的交互作用是否顯著？
3. 不同教學脈絡與不同成就水準對於認知負荷的交互作用是否顯著？
4. 對於高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應？

## 1-4 研究範圍與限制

### 1. 研究範圍

本研究發展的教材內容以九年一貫八年級課本南一版為主，以三角形性質中的全等性質「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」為研究範圍。

### 2. 主題限制

本研究僅針對三角形的全等性質中的「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」討論，因此對於不同的數學教學主題仍需設計不同的實驗與教材加以印證，無法類推至其它單元。

### 3. 母群體限制

本研究受限於人力、物力、時間等因素，僅能以研究者服務學校之國中八年級學生四個班做為施測母群體，因為樣本為便利抽樣且樣本數有限，因此研究結果無法推論至與本研究樣本差異過大之背景學生。

### 4. 施測時間限制

為配合各班級上課狀況，受測班級的教學與施測時間點無法一致，可能會間接影響研究結果的誤差。

## 1-5 名詞解釋

### 1. 三角形的全等

本研究的三角形全等性質包含「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」與「RHS」等五種三角形全等判別方法。

### 2. 成就水準

成就水準是指學生經過學習後所獲得的知識。本研究的數學學習成就係指學生在數學學習測驗上的得分。

### 3. 專業知識反轉效應(Expertise Reversal Effect)

專業知識反轉效應(Expertise Reversal Effect)是指某一種教學設計方式對於新手是有效的，對於高先備知識者則會失去效力甚至有負面的結果(Kalyuga, 2009)。因此有益於初學者的教材，可能對專家學習者而言卻無太大助益。而在此研究中，專家定義為高成就水準的學生。

### 4. 以「尺規作圖」為教學脈絡的教學

尺規作圖為「只利用直尺（沒有刻度）及圓規製作圖形之方法」作圖說明五種判別三角形全等性質。

### 5. 以「固定一邊找第三點」為教學脈絡的教學

先分析只要有三定點就能畫出唯一的三角形。發現只要先固定一邊就有兩端點產生，只要再找出最關鍵第三點即可得到唯一的三角形。藉以說明五種判別三角形全等性質。





## 第二章 文獻探討

### 2-1 認知負荷理論

Sweller 等人所著的 Cognitive Load Theory(Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011) 一書中所述，認知負荷理論是一種在生物演化框架下，基於人類認知架構發展而來的教學設計理論。根據認知負荷理論，至今已經產生許多認知負荷效應，提供了許多教學設計建議，這些效應將於後文統整說明。

認知負荷理論的四個假設(Sweller, Merrienboer, & Paas, 1998)：

1. 工作記憶區有限。

工作記憶區的容量平均只能儲存  $7\pm 2$  個元素(Elements)，但真正進行操作處理的，只有 20.4 個元素，且訊息如果沒有經過處理，如複誦、精緻化等策略，大約 20 秒後就消失(Van Merrienboer & Sweller, 2005)。

2. 長期記憶區無限。

訊息經過處理後會進入長期記憶區(Long Term Memory)，長期記憶區儲存著大量的、互動複雜的知識和程序性技能，其容量是無限的，同時也是永久的。

3. 知識和技能是以基模 (schema) 形式儲存於長期記憶區。

人類的基模發展模式是由簡單到複雜的建構過程來處理知識及訊息，以基模的形式將知識存在長期記憶中。

4. 基模運作自動化是建構基模的重要過程。

基模運作自動化後，可以節省許多工作記憶運作的認知資源，進而降低工作記憶的認知負荷(Sweller,1988)。

#### 2-1-1 自然訊息處理系統與人類認知架構

認知負荷理論認為人類認知系統類比為生物演化系統，遵循著自然訊息處理

原則(Sweller, et al., 2011)：

1. 資訊儲存原則 (the information store principle)

所有訊息必定儲存在一個容量無限的訊息儲存庫之中。在人類認知系統中，長期記憶扮演訊息儲存庫的角色，教學的主要目標是將知識累積儲存在長期記憶中。

2. 借用與重組原則 (the borrowing and reorganizing principle)

學習新知識是由他人的訊息儲存庫借用而來，大多會與自身長期記憶儲存庫中的相關訊息重整，形成新訊息再回存於訊息儲存庫中。而整合的過程具有隨機性，有時會產生迷思概念。

3. 隨機生成原則 (the randomness as genesis principle)

在人類認知系統中，當要解決問題時，如果缺乏可用的知識，則隨機產生可能的解決方案，在工作記憶中執行，然後檢測是否有效，有效則儲存以備未來再利用，無效則丟棄，重複上述步驟直到問題解決。

4. 改變狹隘限制性原則 (the narrow limits of change principle)

在人類認知系統中，隨機生成與測試程序是在工作記憶中進行，而工作記憶處理訊息元素的容量與持續時間有限，因此同時在工作記憶中處理的元素數量必須受到限制，以免認知資源超載。

5. 環境組織與連結原則 (the environmental organizing and link principle)

自然訊息處理系統最後是要在環境中適當的運作。透過環境組織與連結原則，運用訊息儲存庫中的訊息，以應對環境中的各種狀況與問題。在人類認知系統中，在工作記憶中處理提取自長期記憶的知識基模，以管理人類在環境中的各種活動與問題解決。而工作記憶處理來自長期記憶的熟悉訊息時，則容量與持續時間是不受限制的。

以上五個原則在人類認知系統中，透過訊息儲存原則將知識基模儲存於長期記憶；透過借用與重組原則與隨機生成原則獲取新知識基模；透過改變狹隘限制性原則與環境組織與連結原則，應用長期記憶中的知識基模，以應對環境中的各種狀況與問題處理。

教學的主要目的在於增加長期記憶中的知識基模，如果長期記憶沒有變化，則意味著沒有學習發生。從人類認知架構的角度，學習的目的是增加環境組織與連結原則的效益，而此原則必須在長期記憶中有大量可用知識基模才有作用。增加知識基模的最有效方式為透過借用與重組原則，此為教學應該強調的。如果沒有可借用的來源，則透過隨機成因原則創造，但因為狹隘限制性原則，工作記憶處理陌生的新訊息時是有限制的，因此創造新訊息的過程通常是緩慢的。無論透過借用與重組原則或隨機生成原則獲得新訊息，皆受限於工作記憶的限制。

## 2-1-2 認知負荷類型

根據 Cognitive Load Theory，學習者必須在工作記憶中處理教學訊息，這些工作記憶的負荷即為認知負荷，其類型如下(Sweller, et al., 2011)：

### 1. 內在認知負荷 (Intrinsic Cognitive Load)

內在認知負荷一種來自於學習內容本身的內在結構(教材、先備知識)，與教學程序無關。另一種是增生認知負荷(Germane Cognitive Load)，是用於處理與學習內容有關的訊息時額外產生的工作記憶資源需求，同樣產生一種內在認知負荷。用於處理內在認知負荷的認知資源稱為增生資源 (germane resources)。

### 2. 外在認知負荷 (Extraneous Cognitive Load)

外在認知負荷來自於教材呈現方式或學習者參與的教學活動，這種



負荷是由所用的教學程序產生，在許多情況下是多餘的，應該盡量排除。用於處理外在認知負荷的認知資源稱為外在資源（extraneous resources）。

學習材料的認知負荷總量由內在認知負荷與外在認知負荷累加而得。工作記憶資源是有限的，一旦認知負荷總量超過可用的工作記憶資源，將不利於學習，甚至導致無法學習。教學設計應該盡可能減少外在認知負荷，盡量提供工作記憶資源用以處理與學習有關的內在認知負荷。

學習內容本身的複雜性即內容元素的交互性，決定了內在認知負荷。在低元素交互性的情況下，元素之間的關連程度不強，內在認知負荷較低；反之，在高元素交互性的情況下，元素之間的關連程度較高，內在認知負荷也較高。學習者本身的先備知識水準較高時，因為基模的作用，原本是獨立的數個元素可以視為一個單一元素，內在認知負荷因此降低。

高內在認知負荷的學習內容通常較難，但低內在認知負荷的學習內容並不代表較簡單，如果內容元素交互性較低，但需處理大量元素時，仍可能超過工作記憶負荷。當學習內容是高元素交互性時，若相關交互作用的訊息元素可以全部在工作記憶中處理時，則訊息可以被理解。而理解有助於創造更高階的知識基模。

外在認知負荷可以透過改變教學程序而降低。若教學程序要求同時處理的訊息元素少，則外在認知負荷較低；相反的，若教學程序要求同時處理的訊息元素較多，則外在認知負荷較高。

認知負荷理論的目標主要是設計降低外在認知負荷的教學程序，對於內在認知負荷則是要充分運用、妥善管理，並非總是降低，但全部的認知負荷仍不能超過工作記憶的限制。



## 2-1-3 認知負荷理論的教學設計原則

Sweller 等人(1998)的認知負荷理論，其主要目標在於引導教學的設計。教師有責任在設計教材時，應減低教材的負荷量，有效的展演教學教材。Sweller 等人(1998)於 2010 整理增修後，提出十四項教學設計原理，2011 年再新增一項原則，共十五項分述如表 1。(Sweller, et al., 2011)

表 1 認知負荷理論的十五項教學效應

教學效應	內涵
1. 開放目標效應 (Goal Free Effect)	教學應採開放目標的方式，以沒有明確目標的問題取代有明確目標的問題，讓學生不受目標限制的自由思考，可以多重的表達自己的思考過程，啟發創造力，不但能降低外在認知負荷，基模的建構也更有效，學習者產生較好的學習成效時，即產生了開放目標效應。
2. 示例效應 (Worked Example Effect)	在教學時，提供了一個問題的逐步解題示範供學習者參考，只要跟著例子循序解決問題，這些例子可以幫助學習者建立解題的基模，有助於學生理解問題、建構完整的解題基模，可以降低外在認知負荷，以減少學習者面對問題與解題時產生的認知負荷。
3. 完成問題效應 (Completion Problem Effect)	在進行學習時只呈現例子一半的解法，保留部分關鍵的解題步驟，如此可以促使學習者對示例做較仔細的研讀，讓學習者深入思考問題並注意關鍵訊息，有助於基模建構。
4. 分散注意力效應 (Split Attention Effect)	當學習者面對多重訊息在分散的位置(例:圖形和文字解說分開)或出現時間不一致，則會導致增加外在認知負荷，學習者需花費心力將不同來源的資訊整合起來。
5. 冗餘效應 (Redundancy Effect)	學習者接受到多餘且不必要的訊息，會出現冗餘效應，圖片與文字以不同形式的相同訊息在空間或時間上同時出現，此一現象不但不能加強學習效果，反而會造成認知負荷。
6. 專業知識反轉效應 (Expertise Reversal Effect)	專業知識反轉效應是指某一種教學設計方式對於新手是有效的，對於高先備知識者則會失去效力甚至有負面的結果(Kalyuga, 2007)。因此有益於初學者的教材，可能對專家學習者而言卻無太大助益。

7. 引導漸減效應 (Guidance Fading Effect)	隨著學習者專業知識的增加，這些內在的交互元素已成為長期記憶的一部分，應逐步抽離這些交互作用元素，使學習者自行完整的解決問題，以免造成專業知識反轉效應。
8. 隔離互動元素效應 (Isolated Interacting Elements Effect)	隔離互動元素效應(Isolated Interacting Elements Effect)受到教學教材的內在認知負荷影響而非外在認知負荷影響。如果教材含有許多高交互作用元素，有限容量的工作記憶區要處理大量的訊息，就會造成認知負荷。因此，將高交互作用元素獨立處理轉變為低交互作用，讓工作記憶區的工作量不超載的情況下，降低學習者的認知負荷並促進學習成效。
9 整體模組效應 (Molar Modular Effect)	將複雜的高互動元素分割成有意義的獨立元素，由此降低內在認知負荷，增加學習成效。整體模組效應和隔離互動元素效應之間主要的不同點，在隔離互動元素效應中，訊息是由獨立元素所呈現的，而在整體模組效應中，訊息的呈現是由於到每個獨立元素之間的互動情形而決定。
10 變化效應 (Variability Effect)	變化效應也是由於內在認知負荷中的元素之間的交互作用產生的效應，利用示例(Worked Example)來進行不同的教學，一為相似於示例的問題，另一為經過轉換過的問題，結果顯示經過轉換過的問題，表面上看來增加問題的變化應該會造成更大的認知負荷，但是事實上卻是有助於學習。
11 元素交互作用效應 (Element Interactivity Effect)	當教學內容本身元素之間的交互作用是低的，其內在認知負荷就是低的，也就是教學內容是簡單的，即使教材設計不良，也不會影響學習，因此當教學者面對元素交互作用高的教材內容時，也就是教學內容本身困難度高、內在認知負荷較高時，教學者更應在費心設計教材，以降低外在認知負荷。
12 想像效應 (Imagination Effect)	教學者可以要求學習者運用「想像」來進行一個過程或概念，會比要求學習者「研讀」同樣過程和概念的學習效果更好。
13 自我解釋效應 (Self-explanation Effect)	教學者在進行教學時可利用引導的方式引導學習者自行解釋一個新的概念，可促使學習者將相關基模提至工作記憶區進行處理，以降低負荷。
14. 形式效應	形式效應中提到教材同時含有圖像與文字的情形下，文字

(Modality Effect)	採用「口語文字」會比採用「書面文字」有更好的效果 (Mousavi, Low, & Sweller, 1995)。
15. 瞬間轉換效應 (Transient Information Effect)	本來形式效應中提到教材同時含有圖像與文字的情形下，文字採用「口語文字」會比採用「書面文字」有更好的效果假如聽覺訊息是長時間、複雜的而且是陌生的，就會產生瞬間轉換效應。例如遇到口語與文字的轉換，就像是兩個子句互換，用寫的不需要太多記憶，如果用口語互換的就需要很多的記憶及時間來處理，這就叫瞬間轉換效應。

資料來源：整理自 Sweller et al., (1998); Sweller, (2010); Wayne L., Sweller J. (2011)

## 2-1-4 專業知識反轉效應

一般人認為對新手有效的教學程序對於專家學習者也會有效，但從認知負荷的理論考量與實驗證據顯示，對於新手是必要的訊息，對於專家學習者可能是多餘的，要求專家學習者處理這些訊息將消耗額外不必要的認知資源、增加外在認知負荷，甚至可能會有負面影響。當訊息對於新手是必要的，但對於專家學習者則是多餘時，即產生了專業知識反轉效應。此效應依賴於冗餘效應，也受到學習者專業知識水準的影響。

隨著教學活動進行，學習者的專業知識水準逐漸提高，教學活動中的指引與訊息或活動必須適時的調整。例如在教學初期，圖表整合額外的文字訊息是必要的，因為新手還沒有單獨理解圖表訊息的能力，隨著學習者的專業知識水準逐漸提高，初期必要的額外文字訊息可能變成多餘的，應該配合學習者的專業知識成長而逐漸抽離。

是否發生專業知識反轉效應，可以透過學習效率 (Instructional Efficiency) 與學習投入分數 (Instructional involvement score) 觀察。Paas 與 Merriënboer (1993) (Paas & Merriënboer, 1993) (Paas & Merriënboer, 1993) 認為考量學習過程的認知成本是重要的，因此提出了一種視覺化的學習效率公式與效率圖 (Efficiency Graph)，作為評估學習效率的方式。



$$\text{學習效率 (E) 的計算公式 (1) 如：} E = \frac{Z_p - Z_c}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\left( Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} \quad ; Z_p = \text{學習成就表現 } Z \text{ 分數} \quad ; Z_c = \text{認知負荷 } Z \text{ 分數} \right)$$

若以  $Z_c$  為橫坐標， $Z_p$  為縱坐標，便能在直角坐標平面上標出該點位置，學習效率圖如圖 1 所示(Paas, 2003)。

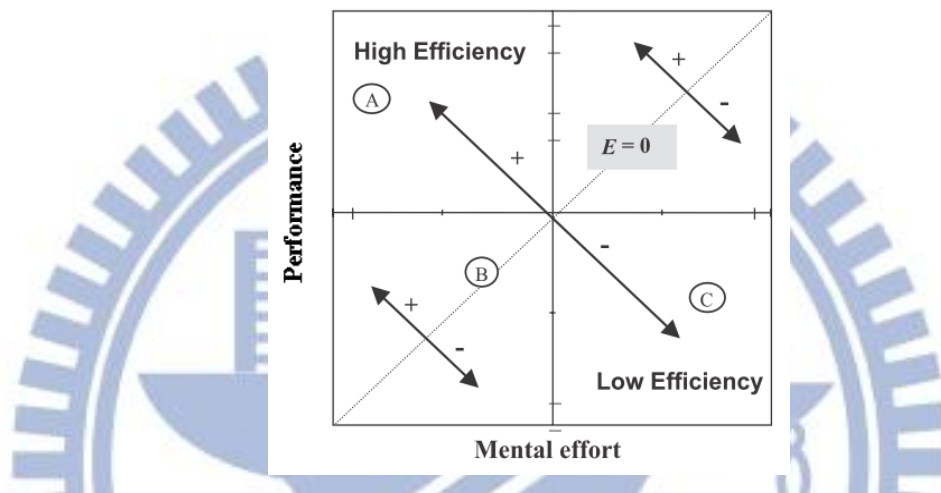


圖 1 學習效率圖

資料來源：“Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory.” by F. Paas, J. E. Tuovinen, H. Tabbers & P. W. M. Gerven, 2003, *Educational psychologist*, 38(1), p.68

圖上三個區域代表意義如下：

- 1、A 區：代表高學習效率 (High Efficiency)，學習表現高而認知負荷低，此時  $E > 0$ ，即  $Z_p > Z_c$ 。
- 2、B 區：代表中學習效率，學習表現與認知負荷相當，此時  $E = 0$ ，即  $Z_p = Z_c$ 。
- 3、C 區：代表低學習效率 (Low Efficiency)，學習表現低而認知負荷高，此時  $E < 0$ ，即  $Z_p < Z_c$ 。

對於高學習成就學生，若發生專業知識反轉效應，則會因為外在認知負荷增加而降低其學習效率。因此可以藉由學習效率觀察是否產生專業知識反轉效應



(Clark et al., 2006) (Clark, Nguyen, & Sweller, 2006) (Clark, Nguyen, & Sweller, 2006)

動機往往決定了學習者在學習過程中的投入程度，當學習者的動機越強，願意投入的心智努力就越多，因此越容易有好的學習表現。基於動機、心智努力與學習表現是正相關的假設，Paas 等人(2005)提出了學習投入分數 (Instructional involvement score)，其計算公式 (2) 如下：

$$I = \frac{Z_p + Z_c}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

(  $Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$  ;  $Z_p =$  學習成就表現 Z 分數 ;  $Z_c =$  認知負荷 Z 分數 )

與學習效率圖的繪製方式相同，學習投入分數圖如圖 2，以直線  $I = 0$  為界，直線右上方區域表示高投入區域，直線左下方區域表示低投入區域，可以藉此了解學生的學習投入情形。對於高學習成就學生，若發生專業知識反轉效應，則其投入情形會較差，因此投入分數也可用來觀察是否發生專業知識反轉效應。

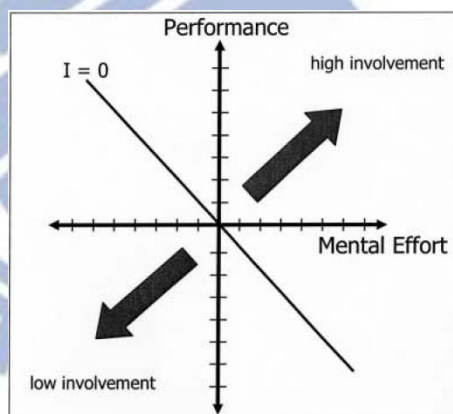


圖 2 學習投入分數圖

資料來源：” A motivational perspective on the relation between mental effort and performance : Optimizing learner involvement in instruction.” by F. Paas, J. E. Tuovinen, J. J. G. van Merriënboer, & A. Aubteen Darabi, 2005, *Educational Technology Research and Development*, 53(3), p.29

由於學習效率圖與學習投入分數圖繪製所需的數據與兩坐標軸均相同，因此

把兩個圖形重疊，如圖 3，即可同時觀察實驗對象之學習效率與學習投入分數，藉此瞭解實驗對象於該學習單元之學習狀況，以及觀察是否發生專業知識反轉效應。

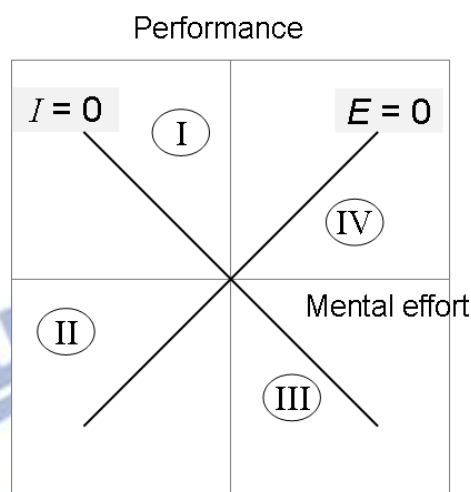


圖 3 綜合學習效率與學習投入分數圖

上圖中直線  $I = 0$  與直線  $E = 0$  互相垂直，若以直線  $E = 0$  為橫軸，以直線  $I = 0$  為縱軸，可將坐標平面分為四個象限。第一象限代表高效率高投入區域，為最理想的學習狀況；第二象限代表高效率低投入區域；第三象限代表低效率低投入區域，為最不理想的學習狀況；第四象限代表低效率高投入區域 (Kalyuga, 2009)。

## 2-1-5 認知負荷理論對本研究的影響

本研究之教材設計根據形式效應，將敘述性文字改為口語呈現；根據冗餘效應，在畫面上去除與口語重複的敘述性文字；根據分散注意力效應，將相關視覺訊息的呈現在空間上盡量接近，與口語對應的畫面元素在呈現時間上接近；在實驗組教材的教學脈絡上，根據整體模組效應，以固定一邊找第三點為策略，降低元素交互性與認知負荷。

## 2-2 多媒體學習理論

Mayer 將多媒體(multimedia)定義為以文字(words)和圖像(pictures) 呈現材料，其中「文字」包括靜態文字和語音文字，「圖像」包括靜態圖像和動畫 (Mayer, 2006)。Mayer(2009)將多媒體學習聚焦於使用文字和圖像兩種形式，更精確的說，多媒體學習是雙編碼(dual-code)或雙通道(dual-channel)學習。

因此 Mayer 等人提出了多媒體學習理論的認知模型，如圖 4。

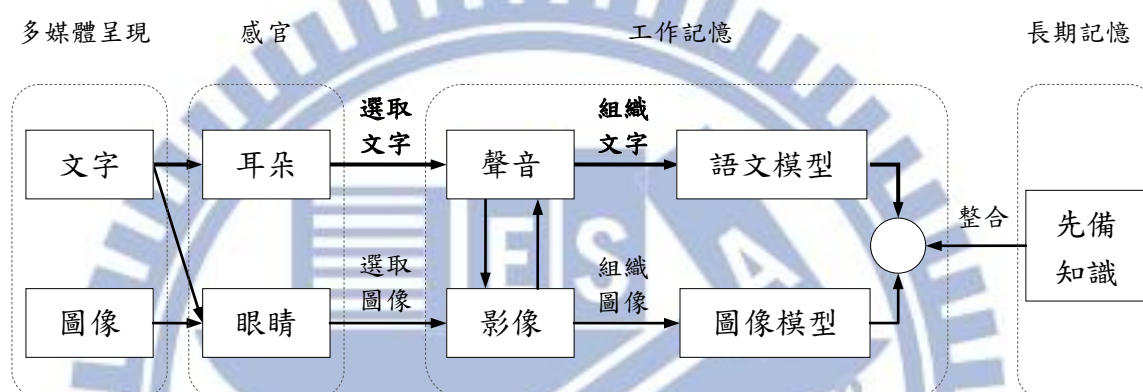


圖 4 多媒體學習理論的認知模型(Mayer, 2005)

### 2-2-1 多媒體學習理論的基本假設

在多媒體學習理論下，有三個基本假設：

#### 1、雙通道 (Dual channels)

Mayer 以 Paivio(1986)的雙碼理論(Dual Coding Theory)為基礎提出多媒體學習雙通道(Dual Channels)理論，認為人類視覺及聽覺訊息的兩個通道是獨立分開的，就是說訊息可以使用文字或是圖像的形式進入聽覺或視覺通道。

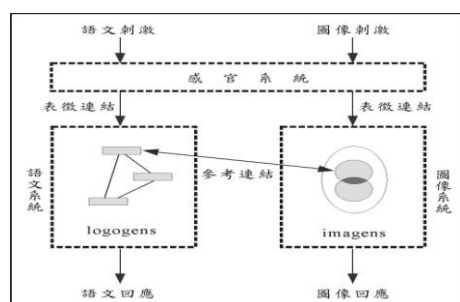


圖 5 雙碼理論(Pavio, 1986)

當訊息以聲音的形式展演則由耳朵接收，進入聽覺通道處理，如圖 6

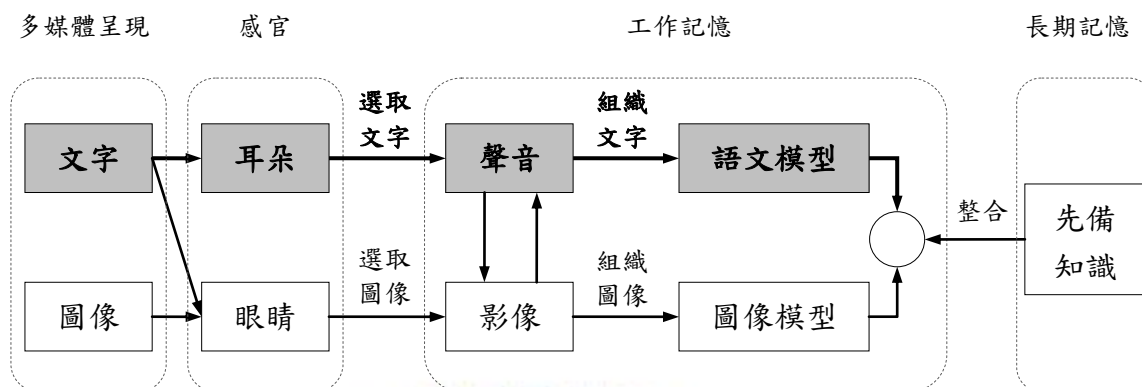


圖 6 聽覺通道處理過程

資料來源：修改自 R. E. Mayer (2009) . *Multimedia Learning* (2nd ed.) (p.64), New York: Cambridge University Press.

若訊息以圖像的方式展演則由眼睛接收，進入視覺通道處理，如圖 7

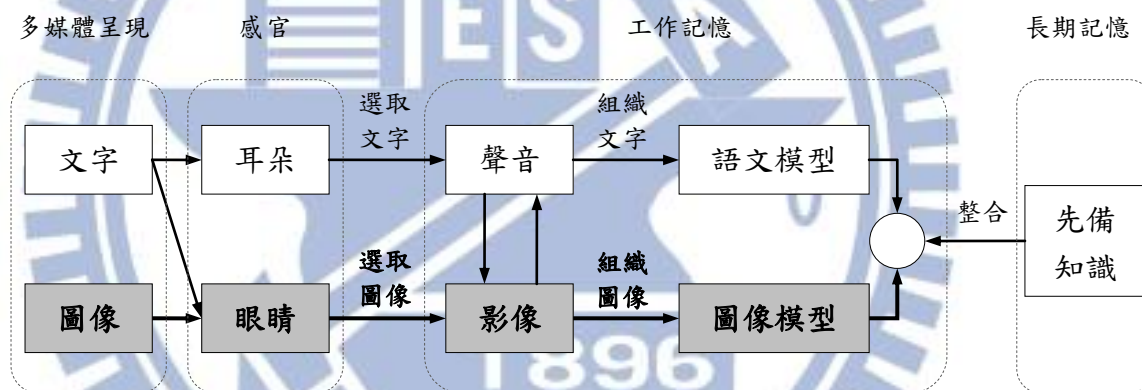


圖 7 視覺通道處理過程

資料來源：修改自 R. E. Mayer (2009) . *Multimedia Learning* (2nd ed.) (p.64), New York: Cambridge University Press.

## 2、有限容量 (Limited capacity)

Mayer 認為每個通道同時處理的訊息量是有限制的，因為工作記憶的容量有限，所以限制了可以同時處理的訊息量。因此教材設計應避免將注意力投注在不相關的訊息，造成無效益的認知程序。

## 3、主動處理 (Active processing)

面對訊息，人們會主動的進行認知處理，處理過程包含注意訊息、組織選取的訊息、將訊息與過去經驗及既有的知識基模進行整合來進行主動學習。



## 2-2-2 多媒體學習理論的認知負荷

Mayer (2009) 根據多媒體學習的認知理論和 Sweller 的認知負荷理論，認為在學習的過程中有三種認知的處理方式，皆會佔用有限的認知資源，即為多媒體學習理論的三種認知負荷：(R. E. Mayer, 2009)。

### 1、 外在的認知處理 (Extraneous Cognitive Processing)

學習過程中與學習目標無關的認知處理，源於教學設計不良，如相關的圖文分隔過遠，因此造成視覺搜尋的負擔。如果外在的認知處理佔用過多認知資源，則真正可用於學習的認知資源可能無法滿足學習的認知處理的需要，因而造成學習成效不佳，反應出較差的記憶與遷移表現。

### 2、 本體的認知處理 (Essential Cognitive Processing)

是指選取學習內容的訊息到工作記憶的認知處理，會受到學習內容本身的複雜性影響。如果學習者在學習過程中只專注於本體的認知處理，則表現出來的可能是偏向死背的學習，所以記憶表現較佳，但遷移表現可能較差。

### 3、 衍生的認知處理 (Generative Cognitive Processing)

指的是在組織與整合訊息時，藉由其他方式的認知處理，讓學習者更瞭解學習內容的意義，例如提供適當情境以提高學習動機。若學習者能夠專注在本體與衍生的認知處理，則很可能產生有意義的學習，表現出來的是較佳的記憶與遷移表現。

## 2-2-3 多媒體學習理論的教學設計原則

上述三種認知處理皆會佔用有限的認知資源，對於學習產生的影響各有不同，因此 Mayer 提出了十二個多媒體教材的設計原則，以減少外在的認知處理、管理本體的認知處理以及增加衍生的認知處理。如表 2。

### 1. 減少外在認知處理的五個設計原則：

連貫原則、信號原則、重複原則、空間接近原則、時間接近原則。

2. 管理本體認知處理的三個設計原則：

分割原則，預先訓練原則，形式原則。

3. 增加衍生認知處理的四個設計原則：

多媒體原則、個人化原則、聲音原則、圖像原則。

表 2 多媒體的設計原則

設計原則	說明
多媒體原則 Multimedia Principle	教材設計採用文字與圖像並用的學習效果會比只有用文字好。
連貫原則 Coherence Principle	與主題不相關的文字、圖像或聲音若能加以排除，學習效果較好。
信號原則 Signaling Principle	多媒體教材，若含有可強調教材內容組織結構與重點的提示，學習效果比較好。
累贅原則 Redundancy Principle	學習者在具有動畫與口述文字的教材比具有動畫、口述文字與字幕的教材的學習效果較好。
空間接近原則 Spatial Contiguity Principle	相關文字與圖像在畫面中位置接近會比位置遠離能得到更好的學習效果
時間接近原則 Temporal Contiguity Principle	相關的文字與圖像可以同時呈現比先後呈現的效果好。
分割原則 Segmentation Principle	當多媒體教材被分割成數個小段落，並且能讓使用者自己控制段落的呈現，會比連續播放的方式，學習效果較佳。
事先訓練原則 Pre-training Principle	學習者若能夠事先知道主要概念的名字和特徵，學習效果較佳。
形式原則 Modality Principle	文字訊息以口述的方式呈現會比印刷文字有更好的效果。
個人差異原則 Individual Difference Principle	多媒體學習設計效果對先備知識較少的學習者影響較大，對先備知識較多的學習者影響較小；並且，對心像能力較佳者影響較大，對心像能力較差者影響較小。

資料來源：整理自 R. E. Mayer (2009)

## 2-2-4 多媒體學習理論對本研究之影響

本研究之實驗組與對照組教材設計上，根據連貫原則，去除與教學內容無關的素材；根據信號原則，運用信號引導學生的注意力至必要訊息，降低視覺搜尋的負擔；對應之元素在空間與時間上接近，符合空間接近與時間接近原則；敘述性文字以口語呈現，符合形式原則與聲音原則。

## 2-3 注意力與視覺搜尋

視覺的輸入凌駕所有的感官，若輸入越能視覺化，則以後的再認和回憶會越好(Medina、洪蘭(譯)，2009)。注意力(Attention)是影響學習的重要關鍵。教學者如何讓學生在教材設計中注意到當下最關鍵的訊息，才有機會進一步在腦中處理學習，這樣的教材對學生學習成效才有影響。我們從注意力來看視覺搜尋。

### 2-3-1 選擇性注意力

我們眼觀四方、耳聽八方接到大量訊息，我們個體內處理這些訊息的資源有限，我們只能從獲得的感官訊息中注意到其中一部份。少數訊息做更進一步處理，其他僅作粗略處理或不處理，這種取舍的機制即為選擇性注意力(李仁豪、葉素玲，2004、2005)。

選擇性注意力相關理論主要有早期選擇理論、晚期選擇理論與折衷的濾器減弱理論，分述如下：

#### 1. 早期選擇理論

(Broadbent, 1958)認為注意力容量有限，需經由過濾器來篩選訊息，所有感官刺激必須先經過一個濾器才能進入知覺系統分析，未通過得過濾器的刺激即被捨棄不處理，如圖 8。圖中粗箭頭代表注意力作用的階段。



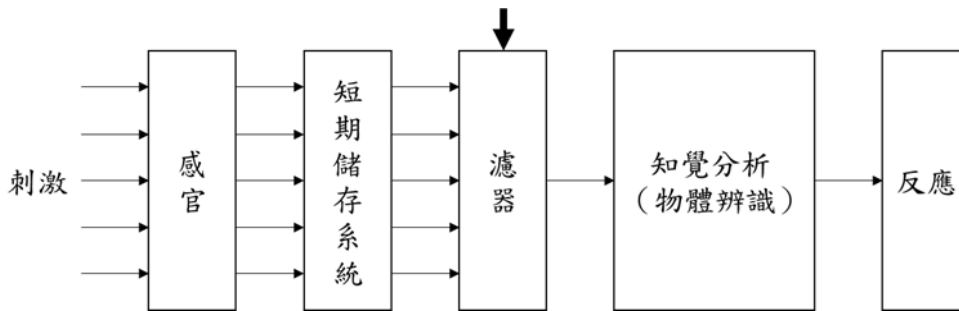


圖 8 早期選擇理論處理流程

資料來源：修改自葉素玲(1999)。視覺空間注意力，載於李江山（主編），視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統（頁 296）。台北市：遠流。

## 2. 晚期選擇理論

Deutsch, J. A 與 Deutsch, D. (Deutsch & Deutsch, 1963) (Deutsch & Deutsch, 1963)認為注意力容量無限，所有感官刺激都會進入知覺分析歷程，由知覺系統進重要性評估，以決定反應最重要的訊息，不重要的訊息很快被忘掉。如圖 9，圖中粗箭頭代表注意力作用的階段。



圖 9 晚期選擇理論處理流程

資料來源：修改自葉素玲(1999)。視覺空間注意力，載於李江山（主編），視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統（頁 296）。台北市：遠流。

## 3. 濾器減弱理論

(Treisman, 1964) 認為多重刺激都會經過過濾器來篩選訊息。刺激强度高於門檻值才能通過過濾器，進入知覺分析歷程。而各管道的敏感度決定了其門檻值，越敏感者其門檻值越低，越容易讓刺激進入。敏感度又受注意力程度的影響，注意力所在的管道最敏感，其餘管道的敏感度因缺乏注意力而下



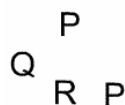
降。標準值(Criterion)也會影響偵測，標準值越低，即刺激強度雖不高仍然容易被偵測到，例如與個人有關的訊息，其標準值是較低的。

濾器減弱理論相當於結合了早期選擇與晚期選擇理論的精神，為兩階段的選擇歷程。第一階段決定刺激通過後的強度，第二階段決定可達反應標準，只有通過兩階段的刺激才能引起反應。

## 2-3-2 視覺搜尋

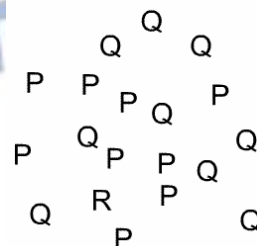
所謂視覺搜尋 (visual search) 作業，指在一群文字、數字或圖形中搜尋特定之目標物。通常目標物只有一個，呈現在數目不等的非目標物 (干擾物) 之間。若目標物與非目標物之差別需要注意力序列地逐一掃描每一物體才能偵測出差別，則非目標物數量越多，搜尋到目標物所須之時間越長，因此反應時間與刺激總數之函數必定為一斜率大於零之直線，如此稱為「序列搜尋 (serial search)」，如圖10-a 所示 (葉士豪，2005，頁14)。

要找出目標物R 則必須一一進行P、Q 之間的比對，而P 與R 所相差的特徵斜線，剛好又是Q 所具備的特徵，因此需要將兩種特徵以注意力連結 (又稱為結合搜尋「conjunction search」)，如圖10-b所示。如此作業自然較為困難，所需時間也會隨刺激物數量增加而增加 (葉士豪，2005，頁14)。



P  
Q R P

圖 10-a 序列搜尋



P P P Q P  
P Q P P Q  
Q R P P Q  
Q P P P Q  
P P P P Q

圖 10-b 結合搜尋

資料來源：葉士豪，陳一平(2005)。作業範圍大小對視覺注意力之影響。頁14。

反之，若目標物與非目標物之差別在前注意階段便可看出，則此函數則會為一斜率等於或近似於零之直線，意即非目標物數量多寡並不會影響反應時間的

快慢，如此稱為「平行搜尋 (parallel search)」。下圖11-b 中刺激物數量雖較圖11-a 多，但仍不會影響反應時間，如此只差一種基本特徵的搜尋作業又稱為特徵搜尋「feature search」 (葉士豪，2005，頁14)。



圖 11-a 平行搜尋

圖 11-b 特徵搜尋

資料來源：葉士豪，陳一平(2005)。作業範圍大小對視覺注意力之影響。頁14。

因為「資源有限」之理論，視覺系統無法同時處理大量進入的資訊，導致在序列搜尋狀況下，刺激物數量越多則所需反應時間越長；而在平行搜尋狀況下，反應時間並不會受到刺激物數量的影響；進而造成兩者之間的差異 (葉士豪，2005，頁 14)。故序列與平行搜尋的函數斜率示意圖可以下圖 12-a 與圖 12-b 所示 (葉素玲，1999)。

視覺基本特徵並不多，主要有四種：線段走向、顏色、大小 (粗細、長度、空間頻率等)、運動 (速率、方向)。

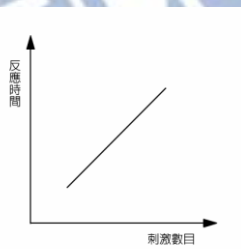


圖12-a

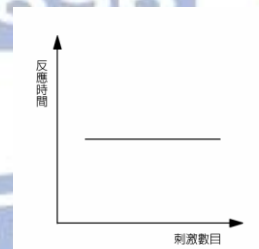


圖12-b

圖 12 刺激數目與反應時間的關係

資料來源：葉士豪，陳一平(2005)。作業範圍大小對視覺注意力之影響。頁15。

### 2-3-3 特徵整合理論

Treisman 於 1980 年代提出特徵整合理論 (Feature Integration Theory)，認為在前注意力階段時，所有的刺激被自動登錄在特徵圖 (Feature Map) 上，當注意力投注在某個位置時，此時為注意階段，將該位置上的所有特徵整合起來，

而形成一個完整的物體表徵(陳一平, 2011), 如圖 13 所示。

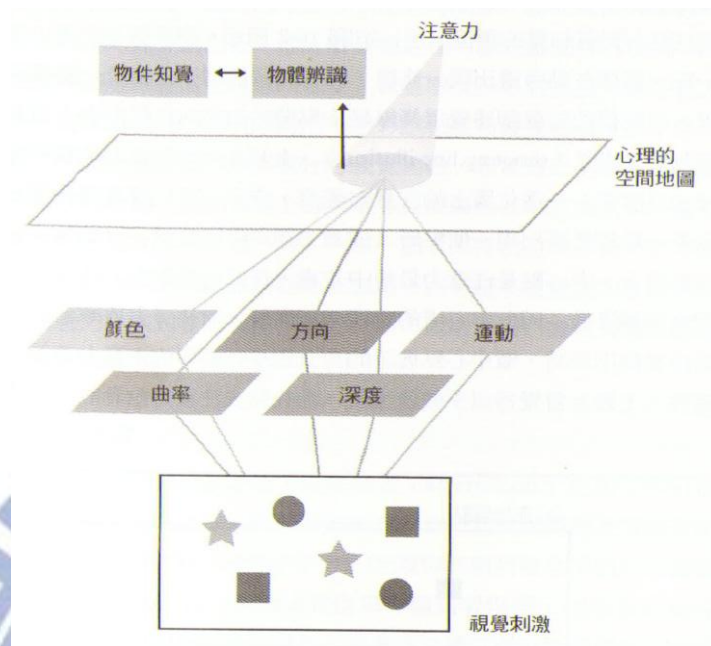


圖 13 特徵整合理論

資料來源：“視覺心理學”，陳一平著，2011，頁 211。

## 2-3-4 注意力與視覺搜尋對本研究之影響

注意力在認知能力中扮演著不可或缺的角色，此項能力將影響其他基本認知能力的習得與發展，甚至影響後設認知能力的執行。注意力對於學習過程中的工作記憶也會有所影響。工作記憶是指在心理保存訊息的容量，所保存的訊息可用於引導一個人目前或接下來的行動。訊息過多或缺乏醒目重點之設計將使觀察者的注意力無所適從(陳一平, 2011)。幾何教材中如何讓學生能即時辨識出教師當下提及的圖形、文字，對於學生的學習是相當重要的。本研究的教材中，配合教師的口語運用了顏色、標記等信號，將學生的注意力引導到當下畫面中的關鍵處。預期如此將可有效減少視覺搜尋上的負擔，有助於課程進行中師生間的溝通以及學生的學習成效。



## 2-4 幾何教學

### 2-4-1 幾何圖形的認知理解

Duval 認為每個人學習幾何的認知理解方式不一定相同，因此提出四種幾何圖形的認知理解類型：

#### 1. 知覺的理解 (Perceptual apprehension)

指個體初看見幾何圖形時的各種感覺與認知，例如圖形中的子圖、元件、形狀、大小、方向、表徵等，並將這些訊息整合成一個整體性的心像。而心像可能與所看到的圖形相異，原因在於除視覺所見之外，整個辨識的過程包含了與既有基模、知識的交互作用，所以設計不當的訊息容易造成誤解（黃建欽，2009）。

#### 2. 循序的理解 (Sequential apprehension)

當需要作圖或描述圖形結構時，就需要循序的理解。圖形的構成是有順序的，學生對圖形的認知並非憑藉知覺的規則和提示，而是繪圖工具（例如：尺、圓規等）的限制與數學性質。學生必需透過數學知識經驗及瞭解數繪圖工具的使用方法與限制，才能依序完整繪出圖形。

#### 3. 論述的理解 (Discursive apprehension)

是指個人能使用語言或文字表徵描述圖形的性質，進行推理活動。沒有命名或假設的圖形是模糊的表徵，並非每個人都能看到相同的性質或有相同的解讀，而個人對圖形的論述能力愈好，代表對圖形的理解程度愈高。

#### 4. 操作的理解 (Operative apprehension)

操作性理解是個體將實體圖像及心像進行互相轉換的認知歷程，可在心理或實體世界中作轉換（Duval, 2002）。轉換後的圖像，其知覺辨識與原來的圖像不同，例如圖像的轉換可以是分解、重組、放大、縮小、鏡射、平移、旋轉等等，這個過程在啟發中相當重要。

Duval (1998) 提出在進行幾何學習活動時，所經歷的認知歷程有三種，說明如下：

#### 1. 視覺化 (Visualization)

視覺化過程是關於空間表徵的認知歷程，包含簡略概要地看過、主觀的視察與確認、圖形的說明、複雜圖形的啟發及探索。



## 2. 建構 (Construction)

藉由工具完成建構過程，根據觀察結果操作繪圖工具（例如尺規、幾何軟體）進行建構、再製、重組的歷程，能幫忙建構所呈現的數學物件。

## 3. 推理 (Reasoning)

與增長知識的推論過程、演繹證明、解釋有關。

這三個歷程彼此間關係密切又可獨立執行，也有可能互相配合才能處理幾何題目，在認知上三者間的合作對於幾何方面的精熟是必須的。

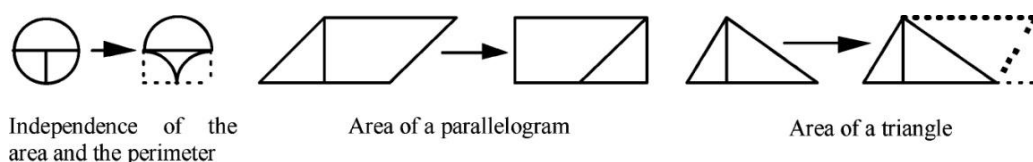
## 2-4-2 數學符號表徵的轉化

Piaget 認為表徵可以是個人的看法、迷思或概念，透過個人言辭或圖式的產物而獲得，表徵也是深層心智結構運作的表面結果（引自 Duval, 2006, p.104）。表徵也是標誌和其複雜的關聯，根據規則所產生，並允許描述一個系統、一個過程、或一組現象 (Duval, 2006)。符號和符號表徵的轉化是數學活動的中心，從一個表徵改變到另一個表徵系統的能力，往往是學習進步和問題解決的關鍵。

Duval 提出在數學活動的範圍內從本質上來講，符號表徵的轉化有兩種完全不同的類型：

### 1. 處理 (Treatment)

主要於符號學的轉化。在進行數字運算的程序時，同一個數字的小數標記及分數標記，演算法是不同的，例如  $0.20 + 0.25$  及  $1/5 + 1/4$ ，但人們在計算時可能會改變標記系統以執行「處理」。在幾何中，「處理」常是純粹的形狀視覺轉化，透過重新配置原圖的操作，猶如益智遊戲的拼圖，如圖 14 所示的翻轉、切割位移、複製翻轉等，不需依賴任何數學屬性，可以直觀地視覺操作，並直觀地解釋某些數學結果。



Independence of the area and the perimeter

Area of a parallelogram

Area of a triangle

圖 14 幾何視覺轉化—重新配置原圖

資料來源：” A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics,” by R. Duval, 2006, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.112. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

## 2. 轉換 (Conversion)

比「處理」更為複雜的表徵轉化，首先需要在兩個內容相異的表徵之間，去識別相同的代表物件。例如將一個方程式的代數標記轉換到圖形表徵，或將自然語言陳述的關係轉換到標記使用的文字，如圖 15 及圖 16。

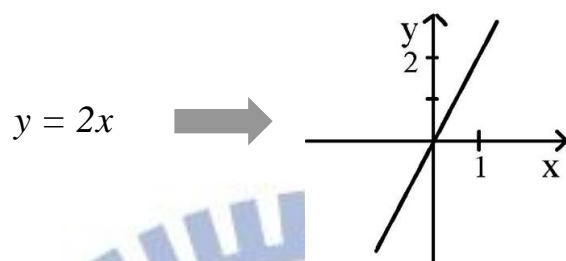


圖 15 表徵轉換—代數表徵轉圖形表徵

資料來源：修改自” A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics,” by R. Duval, 2006, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.113. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

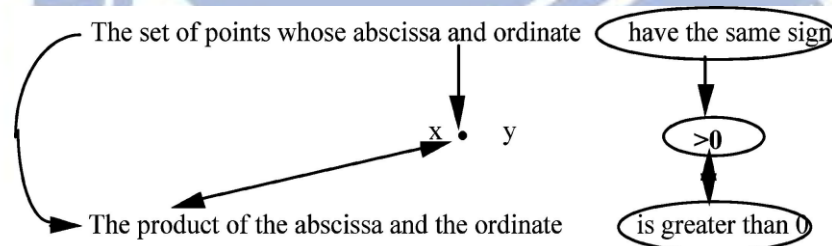


圖 16 表徵轉換—自然語言轉數學語言

資料來源：” A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics,” by R. Duval, 2006, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.113. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

### 2-4-3 從表徵轉化看學習數學的困難

學生在學習數學常發生符號表徵轉化的困難，造成無法理解課程內容，以下分述兩種轉化類型的迷思：

#### 1. 處理 (Treatment) 的複雜性

當專注在視覺化時，視覺處理的第一步是子圖需要被辨別，學習者是否能比較藉重新配置而得的某些可能的子圖，及在原圖快速辨別他們

的能力。如圖 17，比較圖中上層梯形裡兩個灰色的三角形面積，解題關鍵在是否能看到梯形圖中下層的兩個大灰色三角形，或看到其他的子圖。

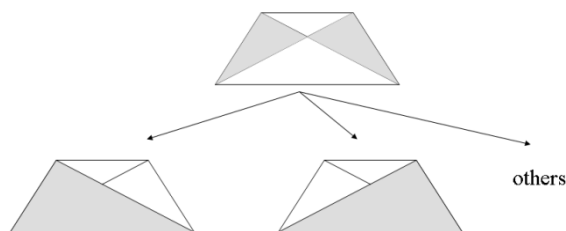


圖 17 視覺處理的第一步—子圖需要被辨別

資料來源：修改自” A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics,” by R. Duval, 2006, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.117. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

## 2. 表徵的轉換 (Conversion)

表徵的轉換容易限制學生運用已知的知識能力及在數學上獲取新知識的能力，這也阻礙了理解的進步和學習 (Duval, 2006)。例如：甲的錢是乙的兩倍少 30 元、9 是  $3x+5$  的正平方根，當學生在做這類型的題目時，無論數學內容為何，將簡單的「轉換」文字問題的詞成為符號表達，所遇到的障礙，往往是無法克服的差距。

本研究教材為三角形全等性質，教學內容中會將圖像的表徵轉成代數的表徵，圖與文字間有密切的相關性，整個過程以圖為中心，以圖像引導文字，產生幾何意義。

## 2-5 三角形的全等性質

### 2-5-1 九年一貫課程綱要中的三角形全等

教育部九年一貫數學學習領域的課程綱要，是由下列四個原則界定(教育部，2009a)：



1. 參考施行有年且有穩定基礎的傳統教材。
2. 採用國際間數學課程必備的核心題材。
3. 考慮數學作為科學工具性的特質。
4. 現有學生能夠有效學習數學的一般能力。

數學學習領域將九年國民教育分為四個階段，分別為：

1. 第一階段：國小一至二年級。
2. 第二階段：國小三至四年級。
3. 第三階段：國小五至六年級。
4. 第四階段：國中七至九年級。

三角形全等性質屬於八年級下學期的課程，根據教育部 100 學年度實施之 97 年國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要中(教育部，2009a)關於三角形全等性質的能力指標如下：

S-4-9 能理解三角形的全等定理，並應用於理解和推理。

能力指標是依照主題與階段的學習能力而訂定，因多數指標需採分年教學方能達成教學目標，因此課程綱要中依據能力指標演繹出更細緻的分年細目及詮釋，以明確掌握分年教學的目標(教育部，2009a)。其中八年級與三角形全等性質有關的分年細目如下：

8-s-07 能理解三角形全等性質。

其中分年細目 8-s-07 的詮釋說明整理如下：

- (1) 如果兩個平面圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全重疊在一起，他們就是兩個形狀與大小都相同的圖形，我們稱他們是兩個全等圖形。
- (2) 如果兩個三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  可以完全重疊在一起，我們就稱  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  為兩個全等三角形，記為  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。
- (3) 如果兩個三角形可以完全重疊在一起，重疊在一起的頂點稱為對應點，重疊在一起的邊稱為對應邊，重疊在一起的角稱為對應角。



- (4) 一般而言，符號 $\triangle ABC = \triangle DEF$  不一定表示 A, B, C 的對應點分別為 D, E, F。
- (5) 能理解兩多邊形全等，則其對應邊、對應角相等。反過來，若對應邊、對應角相等，則兩多邊形全等。
- (6) 能理解 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質。
- (7) 能以三角形的全等性質作簡單幾何推理。

## 2-5-2 三角形全等的相關研究

黃昭智(2010)探討三角形的全等錯誤類型之研究——以國中三年級學生為例，施測樣本為彰化縣四所國中共 340 人，從中抽取 13 人面談，具有代表性錯誤的受試者；其研究結果發現 23 種主要錯誤類型，歸納出四大類：1、定義認知方面的錯誤(6 種)；2、混淆相似概念的錯誤(9 種)；3、猜測或無根據的推論(3 種)；4、粗心疏忽的錯誤(5 種)；另外造成錯誤類型的原因可分為七點：1、對定義及公式的概念不清；2、先備知識的不足；3、學習經驗之間的互相干擾；4、由題目敘述或圖形進行猜測或無據推論；5、解題的細心程度不夠；6、計算能力不足或計算上的粗心大意；7、學習者缺乏信心與意願。

謝易達(2013) 探討新北市九年級的學生在七、八年級的數學課程內容上，有哪些解題上的差異。實驗設計 15 題計算題，並隨機抽樣新北市五所學校九年級學生進行施測，經統計答題結果並輸入統計軟體 TESTER for Windows 2.0 版與 SPSS 15.0 中文版，得出結論歸納中與三角形全等相關的有：在國中七、八年級的數學課程內容，學生的答題表現最差的課程為利用特殊三角形的性質，找出三角形全等的條件，證明出題目所要求的邊或角，還有同樣都是幾何的題目，學生們對勾股定理的答題表現，會比利用特殊三角形的性質求角度，以及利用三角形全等求邊或角這兩種題目，表現得更好。

李春生(2005) 探討以「GSP 電腦輔助教學」與「傳統講述式教學」兩種不同的教學法，在學習三角形全等單元成效之研究。發現在兩組學生，在數學學

習成就上，有顯著的差異，但在數學學習態度上，並沒有顯著的差異。再者而中分群與低分群學生在數學學習成就上，有顯著的差異，且實驗組中分群與低分群學生，在「與同學互動」方面，是明顯優於對照組中分群與低分群學生。

李佑宗(2009)三角形的全等性質的先導概念。覺得課本直接以尺規作圖說明三角形的全等有些唐突，忽略掉單一三角形本身的結構問題，所以在正式介紹三角形的全等性質之前先加強此部份的概念，將有助於學生日後的學習及概念上的加深。在教學的後半段部份，也就是例題講解部份，學生普遍缺乏空間概念，例如大部分例題所給予的兩個三角形在擺放的角度上不會相同，一定要利用自身的空間概念將一個三角形固定不變，另一個三角形轉換成可對應到另一三角形的角度，可是有不少的學生在這方面缺乏概念，導致全等性質判斷錯誤。所以日後教師在教學上可以單獨加強三角形旋轉與翻轉的概念，將有助於學生學習。

從文獻中可以發現學生學習「三角形全等性質」單元，學生學習時易混淆、概念不甚清楚，且只會計算，而大多數老師常用課本的方法尺規作圖來說明兩個三角形的全等，效果並不理想；隨著資訊的進步，如今可以電腦軟體來作輔助教學將教材作標準、精緻的呈現，觀察五種全等性質「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」以及「RHS」皆與邊長「S」有關，可以嘗試透過設計相關的數位教材從邊長「S」引導學生觀察形成唯一三角形的成因，只要有三定點就能畫出唯一三角形，藉以說明五種三角形的全等性質。故選取本單元為研究單元，希望對學生有所助益。

# 第三章 研究方法

本章共分五節，包含：研究流程、研究設計、研究對象、研究工具、資料分析。

## 3-1 研究流程

本研究之流程分為準備、實驗、分析三個階段部份，研究流程如圖 18。

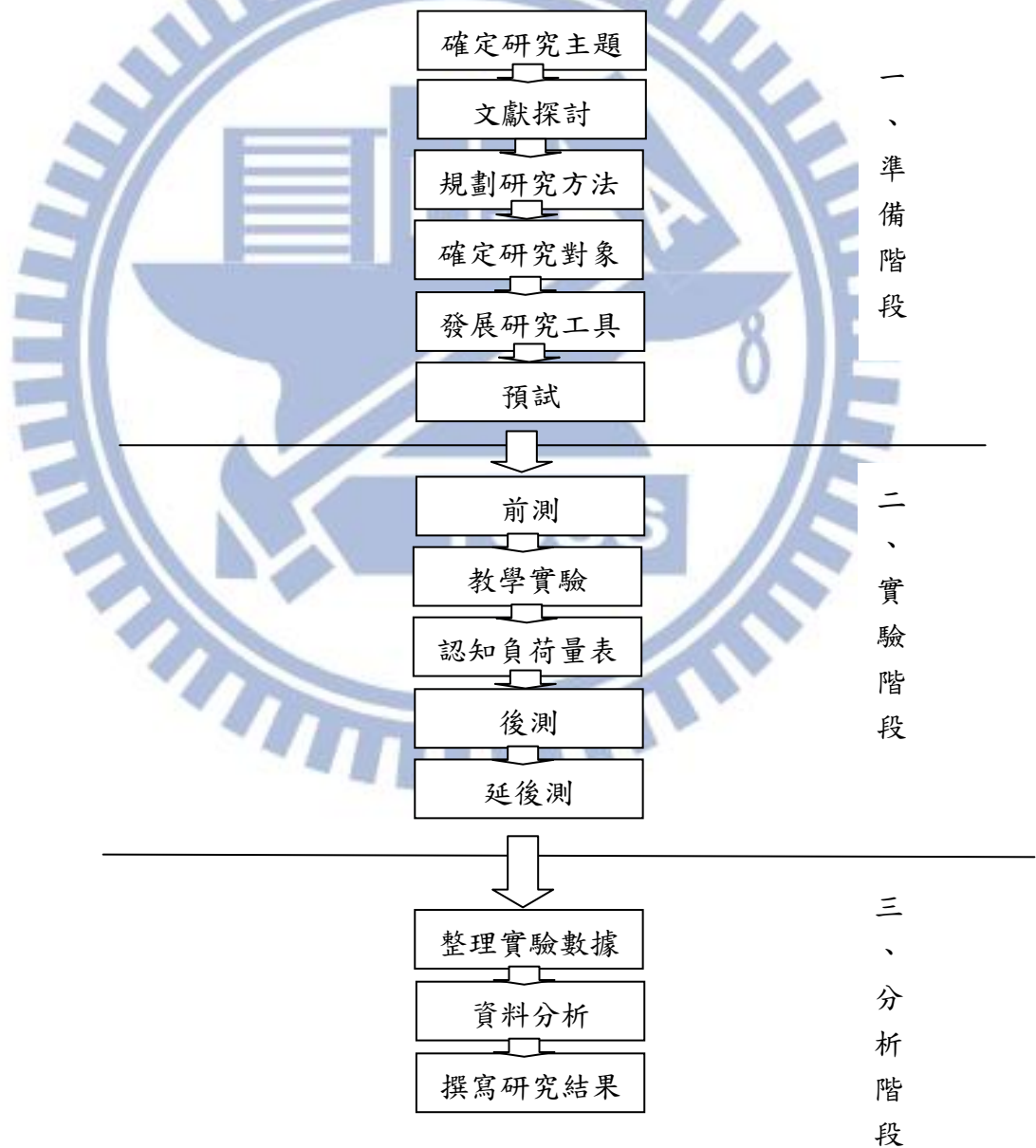


圖 18 研究流程

### 3-1-1 準備階段

以新竹市某國中八年級四個常態班為研究對象，分為實驗組與對照組各兩個班。將上學期三次段考之數學科平均分數及前測成績，利用獨立樣本  $t$  檢定，確定兩組成績無顯著差異。

實驗教材之編製則依據多媒體學習理論、認知負荷理論、視覺搜尋、幾何教學設計實驗教材。另以同校的兩個九年級常態班學生進行試題預試，並根據預試結果修正測驗內容。

### 3-1-2 實驗階段

於教學實驗前對實驗組與對照組進行前測，以了解研究對象的起點程度。接著以研究者編制之實驗教材進行教學實驗。於教學實驗後，請研究對象依據自身上課感受填寫認知負荷量表與回饋單，以了解研究對象的上課感受。之後進行後測，以了解研究對象的學習成效，並於教學實驗結束一個月後實施延後測，延後測試卷內容與後測試卷大致相同，以了解研究對象之學習延續情形。

### 3-1-3 分析階段

整理與分析實驗所得之數據資料，以驗證假設並撰寫研究結果。

## 3-2 研究設計

### 3-2-1 研究方法

本研究旨在研究不同的教學脈絡，對於學生學習三角形全等性質單元的後測、延後測以及上課感受是否有所影響。本研究採用準實驗研究設計，以課堂授課為主，盡可能減少其它干擾因素。



## 3-2-2 研究變項與假設

### 1. 研究變項

(1) 自變項: 包含教學脈絡與成就水準，分述如下：

#### ① 教學脈絡

實驗組與對照組之主要教學內容皆為三角形全等性質，但教學脈絡不同，實驗組教材以固定一邊找第三點概念為教學脈絡，對照組教材則以尺規作圖概念為教學脈絡。

#### ② 成就水準

實驗組與對照組分別依照上學期三次段考數學科成績，分為高成就水準（前 50%）與低成就水準（後 50%）。

(2) 依變項: 包含後測、延後測與認知負荷感受，分述如下：

#### ① 後測

在教學實驗結束之後，使用後測試卷檢視兩組研究對象的後測成績，藉以評估學習成效。

#### ② 延後測

延後測於教學實驗結束一個月後實施，藉以觀察兩組研究對象的學習延續情形。

#### ③ 認知負荷感受

在教學實驗結束之後，填寫認知負荷量表與回饋單，藉由量表與回饋單了解兩組研究對象感受到的認知負荷程度，以及上課感受情形。

(3) 控制變項: 包含授課教師、授課環境、教學單元與測驗問卷，分述如下：

#### ① 授課教師

授課教師皆為研究者本人，研究者為研究班級的數學科授課教師，對於研究者的授課風格與表達方式皆已熟悉。

#### ② 授課環境

授課地點均在教室進行，授課環境條件一致。

### ③ 教學單元

兩組之主要教學單元與授課時間均相同，研究對象為八年級學生，而教材內容為八年級下學期的內容。

### ④ 測驗問卷

兩組研究對象的前測試卷、認知負荷量表與回饋單、後測試卷以及延後測試卷，內容、施測時間長度與計分標準皆相同。

## 2. 研究假設

本研究之假設如下：

假設 1：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測表現有顯著的交互作用。

假設 2：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測表現有顯著的交互作用。

假設 3：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的認知負荷感受有顯著的交互作用。

除了以上假設之外，本研究將探討對於高成就水準學生是否產生專業知識反轉效應。

## 3-2-3 實驗流程

本研究之實驗步驟、內容與時間分配如表 3：

表 3 教學實驗流程表

	步驟	內容	時間
階段 I	A	前測	10 分鐘
	B	課程教學實驗	80 分鐘
	C	認知負荷量表問卷與回饋單	10 分鐘
	D	階段學習成就測驗（後測）	40 分鐘
階段 II	E	延後測	40 分鐘

### 3-3 研究對象

本研究採用準實驗研究法，從新竹市某國中八年級班級中，依便利取樣方式取樣四個常態班級為研究對象，但排除資源生。依據上學期三次定期評量數學平均成績，將前 50 % 設定為高成就水準學生，後 50 % 設定為低成就水準學生。三次定期評量數學成績如表 4，人數分配如表 5。

表 4 研究對象班級人數及上學期數學科定期評量成績表

班級	人數	定期評量			平均	組別
		一	二	三		
A 班	31	78.74	71.77	73.03	74.52	實驗組
B 班	29	86.20	79.72	77.41	81.11	實驗組
C 班	29	79.21	71.52	70.82	73.83	對照組
D 班	31	83.13	77.13	77.81	79.36	對照組

表 5 受試學生高、低學習成就人數分配表

組別	班級	高成就	低成就	總計
實驗組	A 班、B 班	30	30	60
對照組	C 班、D 班	30	30	60
	總計	60	60	120

利用獨立樣本  $t$  檢定，檢驗實驗組與對照組上學期三次定期評量數學成績，兩樣本的平均數分別為 77.73 和 76.63，變異數相等的 Levene 檢定未達顯著 ( $F = 0.277, p = .600$ )，即表示兩組成績的離散情形無顯著差別。由假設變異數相等，其  $t$  值 = 0.302、 $df = 118$ 、 $p = .763 > .05$ ，檢驗結果未達顯著，因此兩組的程度可視為相當，檢定資料摘要如表 6。

表 6 兩組學生上學期數學科定期評量平均獨立樣本  $t$  檢定摘要表

變項	實驗組 ( $n = 60$ )		對照組 ( $n = 60$ )		$t(118)$	$p$
	$M$	$SD$	$M$	$SD$		
定期評量平均	77.73	19.28	76.63	20.62	0.302	.763

利用獨立樣本  $t$  檢定，檢驗兩組前測成績，前測總分為 25 分，兩組前測平均分別為 13.30 和 14.82，變異數相等的 Levene 檢定未達顯著 ( $F = 0.035, p = .852$ )，即表示兩組前測成績的離散情形無顯著差別。由假設變異數相等，其  $t$  值 = -1.371、 $df = 118$ 、 $p = .173 > .05$ ，檢驗結果未達顯著，因此兩組的程度可視為相當，檢定資料摘要如表 7。

表 7 兩組學生前測平均獨立樣本  $t$  檢定摘要表

變項	實驗組 ( $n = 60$ )		對照組 ( $n = 60$ )		$t(118)$	$p$
	$M$	$SD$	$M$	$SD$		
前測 總分(25分)	13.30	6.00	14.82	6.12	-1.371	.173

綜合以上所述，利用獨立樣本  $t$  檢定檢驗兩組學生的上學期三次數學定期評量以及前測成績，檢驗結果均未達顯著，可視為兩組學生程度相當。

### 3-4 研究工具

本研究所用之研究工具有實驗教材、前測試卷、後測試卷、延後測試卷、認知負荷量表與回饋單共五項，分述如下：

#### 3-4-1 實驗教材

本研究使用之教材均為自製教材，教材主要內容為「三角形全等性質」，包含「SSS」、「ASA」、「AAS」、「SAS」與「RHS」等五個判斷三角形全等性質。製作平台為 PowerPoint 2003 搭配 AMA 外掛增益集，教材設計及課堂上的展演運用了視覺搜尋、認知負荷理論教學設計原則、多媒體學習設計原則以及幾何學習原理以安排教材內容元素。實驗組與對照組之教材均以步驟化方式編製，盡量減少動畫的使用，過程中不斷與指導教授以及數位平均任教十年以上之數學教師討論編修而成。

實驗組與對照組教材均使用雙通道模式呈現，畫面上敘述性文字盡量減少，只保留重要文字訊息，敘述性文字盡量以口語方式呈現；畫面中凸顯當下希望學



生注意的主要訊息，同時其它次要訊息採取淡化而非隱藏，可以有效引導學生的注意力，並且在必要時仍可以看見整體訊息。各種符號、標示與訊息採用「空間接近原則」，盡量接近對應元素，以減少視覺搜尋負擔，亦可避免分散注意力。

兩組教材中較簡單的部分內容，如先備知識中全等符號與對應點、對應邊、對應角等的基本概念介紹，內容均相同，只針對五種全等性質的教學脈絡產生差異性，如圖 19。

三角形的全等性質 - 目錄			三角形的全等性質 - 目錄		
認識三角形	全等三角形	如何做出 唯一的三角形	認識三角形	全等三角形	符號意義
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一 邊一角 SAS、RHS	SSS 尺規作圖	ASA、AAS 尺規作圖	SAS、RHS 尺規作圖
全等三角形的判別方法			全等三角形的判別方法		

圖 19 教材內容之目錄

以下以「SSS」全等性質之教學教材為例，說明實驗組與對照組教材之差異，如表 8 與表 9，實驗組完整教材畫面請見附錄五。

表 8 實驗組 SSS 全等性質教材

階 段	畫面
引 導 階 段	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p style="text-align: center;">唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">條件區</div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px;">已知一邊線段AC</div> </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>A ————— B</p> <p>B ————— C</p> <p>A ————— C</p> </div> <div style="margin-top: 20px; text-align: center;"> <p>A ————— C</p> </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p style="text-align: center;">唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">條件區</div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px;">已知一邊線段AC B 點在哪?</div> </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>A ————— B</p> <p>B ————— C</p> <p>A ————— C</p> </div> <div style="margin-top: 20px; text-align: center;"> <p>A ————— C</p> </div> </div> </div>

說  
明

引導學生一線段即有兩個端點的觀察，形成三角形需要三個頂點，  
找到第三點即為教學目標圖形，且為形成唯一三角形的關鍵點。

討  
論  
階  
段

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

以 A 為圓心，AB 為半徑畫弧  
B 點在哪？

70

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

以 A 為圓心，AB 為半徑畫弧  
B 點在哪？

71

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

以 C 為圓心，BC 為半徑畫弧  
B 點在哪？

72

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

以 C 為圓心，BC 為半徑畫弧  
B 點在哪？

73

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

兩弧交於第三點

74

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

B 點位置在哪裡？

75

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

B 點位置在哪裡？

76

唯一的三角形 - 3 個邊 (SSS)

條件區

A — B  
B — C  
A — C

可以做出唯一的三角形

77

說  
明

提問並討論引導找出第三點關鍵，  
有了三定點即能完成唯一的三角形。

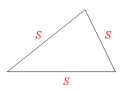
結  
論  
階  
段

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為



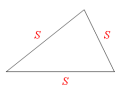
78

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為 SSS  
(三邊)



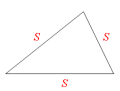
79

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為 SSS  
(三邊)



SSS全等性質：  
若兩個三角形的三個邊分別對應相等，  
則這兩個三角形全等。

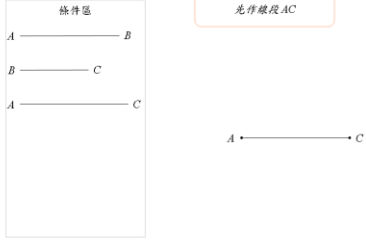
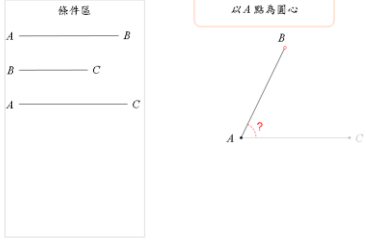
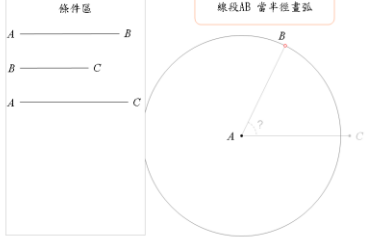
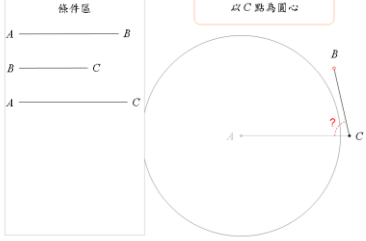
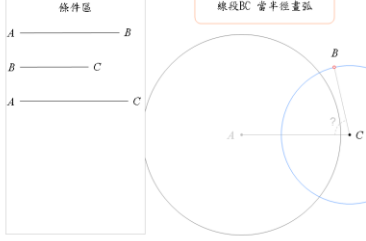
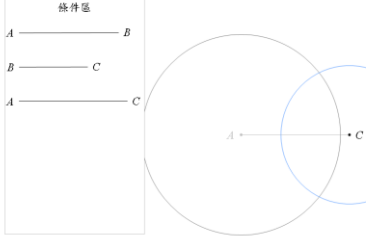
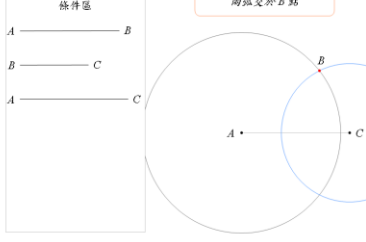
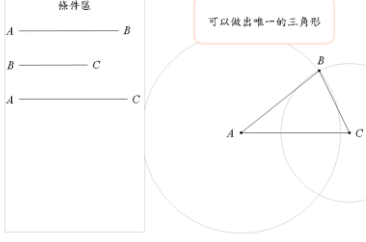
80

說 依照引導出的唯一三角形標示符號意義 SSS。

明 給與判斷兩個三角形能全等之性質 SSS。



表 9 對照組 SSS 全等性質教材

階段	畫面	
作圖階段	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>先作線段 AC</p>  <p>58</p>	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>以 A 點為圓心</p>  <p>59</p>
	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>線段 AB 為半徑畫弧</p>  <p>60</p>	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>以 C 點為圓心</p>  <p>61</p>
	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>線段 BC 為半徑畫弧</p>  <p>62</p>	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p>  <p>63</p>
	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>兩弧交於 B 點</p>  <p>64</p>	<p>唯一的三角形 - SSS 尺規作圖</p> <p>條件區</p> <p>可以做出唯一的三角形</p>  <p>65</p>

說明

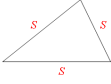
直接講述作圖步驟，並依序作圖。

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為



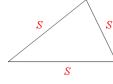
78

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為 SSS  
(三邊)



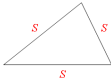
79

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

條件區

A ————— B  
B ————— C  
A ————— C

以符號表示為 SSS  
(三邊)



SSS全等性質：  
若兩個三角形的三個邊分別對應相等，  
則這兩個三角形全等。

80

說明 標示符號 SSS。

給與判斷兩個三角形能全等之性質 SSS。

### 3-4-2 前測試卷

前測目的為在教學實驗前再確認實驗組與對照組的起始程度是否一致。前測試卷共 5 題，每題 5 分，總分 25 分。第 1、2 題為先備知識，第 3 題至 5 題為三角形全等概念題。前測試卷及計分標準如附錄一。

#### (1) 鑑別度、難易度與信度

一份試題的題目難度最好介於 0.2 與 0.8 之間，平均難度最好是 0.5；鑑別度最好在 0.3 以上且越大越好(吳明隆、涂金堂，2012)。前測試卷各題難度均在 0.2 以上、鑑別度均在 0.6 以上，平均難度為 0.65、平均鑑別度為 0.70，信度 Cronbach's Alpha 值為 0.806

#### (2) 效度

試卷效度採專家效度。敦請指導教授及五位平均教學年資 10 年以上之數學

科教師審閱提供編修建議，具專家效度。

### 3-4-3 後測試卷

在教學實驗之後用後測試卷了解學生的學習成效。後測試卷共 13 題。分知識 5 題、理解 5 題、應用 3 題。後測試卷及評分標準如附錄二，總分為 54 分。

#### (1) 鑑別度、難易度與信度

後測試卷各題難度均在 0.2 以上、鑑別度均在 0.4 以上，平均難度為 0.55、平均鑑別度為 0.54，信度 Cronbach's Alpha 值為 0.817。

#### (2) 效度

試卷效度採專家效度。敦請指導教授及五位平均教學年資 10 年以上之數學科教師審閱提供編修建議，具專家效度。

### 3-4-4 延後測試卷

延後測於教學實驗後一個月進行，用以了解學習延續情形，試卷及計分標準與後測試卷內容相同，只做位置排列的更動。

### 3-4-5 認知負荷量表

有關認知負荷的測量，不易藉由標準化的測量方式獲得。Paas(1992)提出一種認知負荷的主觀測量，使用九分制的李克特量表，要求學習者進行自我評價。主觀評價量表，被證實是最敏感的測量工具，可用來區分不同教學程序產生的認知負荷，且已被廣泛使用(Sweller, et al., 2011)。本研究以「你覺得要理解這單元的內容，在精神上有多費力？」(簡稱「花費心力」)檢測認知負荷感受，數字越小代表感受到的認知負荷越低。

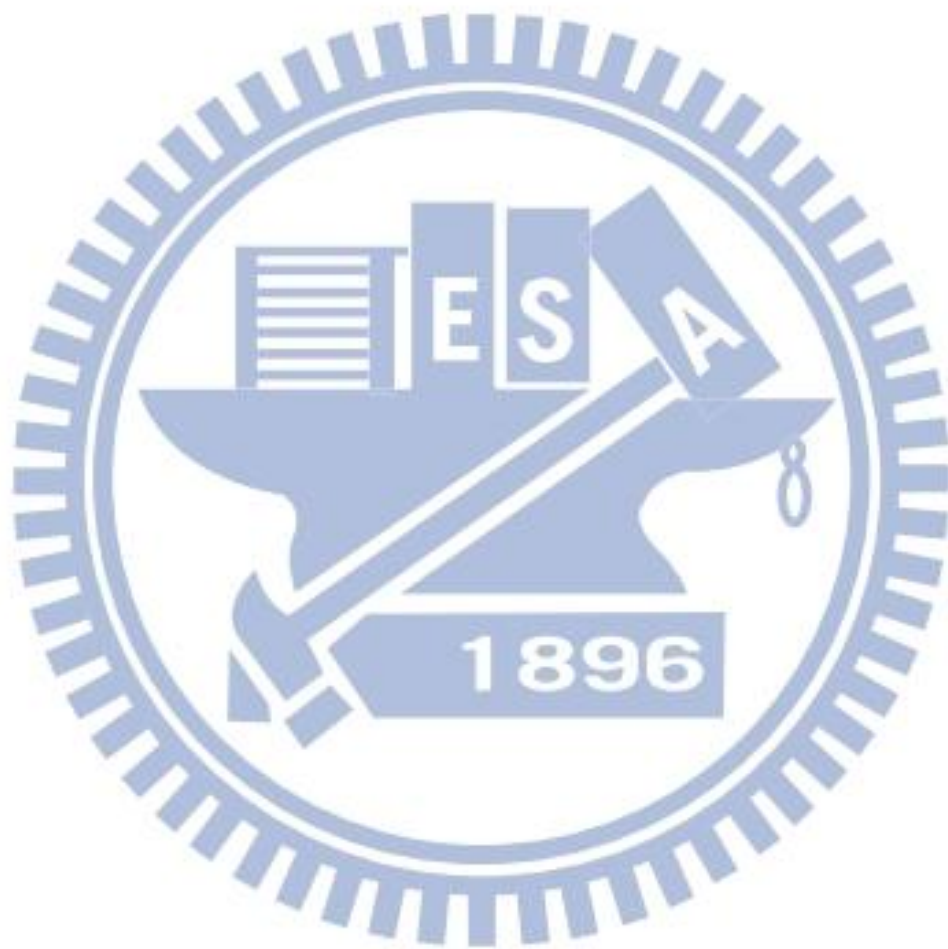


### 3-5 資料分析

本研究使用 PASW 18 進行資料分析，接受或拒絕虛無假設的顯著水準  $\alpha$  值皆設為 .05。分析之資料包含研究對象上學期數學科定期評量成績、前測成績、後測成績、延後測成績與認知負荷量表之花費心力。

- 1、以獨立樣本  $t$  檢定檢驗上學期數學科定期評量及前測成績，確定實驗組與對照組兩組程度是否相同。
- 2、以二因子變異數分析檢驗不同教學脈絡與不同成就水準對於學生在後測及延後測成績之交互作用是否顯著。
- 3、以二因子變異數分析檢驗不同教學脈絡與不同成就水準對於學生的認知負荷之交互作用是否顯著。





## 第四章 研究結果與討論

本章對教學實驗後收集之後測、延後測及認知負荷量表等資料進行分析及討論，並據以檢驗本研究之各項假設。

本章內容共分四節，第一節為後測、延後測表現之分析，第二節為認知負荷之分析，以認知負荷量表之花費心力進行分析，第三節為學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應。

### 4-1 後測及延後測表現分析

本研究藉由後測瞭解教學實驗後，學生的學習成效；以延後測瞭解教學實驗一段時間之後，學習的延續情形。以下針對兩組學生之後測表現與延後測表現進行分析；另後測與延後測表現分別針對總分、知識、理解以及應用進行分析。

檢驗之假設如下：

假設 1：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測表現有顯著的交互作用。

假設 2：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測表現有顯著的交互作用。

以下先將兩組整體學生後測、延後測成績之描述性統計摘要如表 10。

表 10 後測及延後測描述性統計摘要表

	組別	人數	平均數	標準差
後 測總分(54)	實驗組	60	39.38	10.371
	對照組	60	34.90	11.743
延後測總分(54)	實驗組	60	41.77	10.636
	對照組	60	39.53	11.218
後 測基本知識(21)	實驗組	60	18.45	3.412
	對照組	60	17.32	4.641
延後測基本知識(21)	實驗組	60	19.08	3.600
	對照組	60	18.08	4.014
後 測理解概念(21)	實驗組	60	14.83	5.286
	對照組	60	13.02	6.072
延後測理解概念(21)	實驗組	60	15.27	4.811
	對照組	60	14.50	5.534
後 測應用說明(12)	實驗組	60	6.10	3.052
	對照組	60	4.57	3.228
延後測應用說明(12)	實驗組	60	7.42	3.757
	對照組	60	6.95	3.510

註：括弧內數字為該項目之總分

### 1. 後測總分

假設 1-1：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測總分有顯著的交互作用。

考驗假設 1-1 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測總分表現沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，後測總分為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的後測總分平均數摘要表如表 11，二因子變異數分析摘要表如表 12。



表 11 教學脈絡與成就水準在後測總分之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	46.50 (30)	32.27 (30)	39.38 (60)
	對照組 (60)	41.97 (30)	27.83 (30)	34.90 (60)
邊緣平均數		44.23 (60)	30.05 (60)	37.14 (120)

註：括號內數字為人數，後測總分共 54 分。

從後測總分之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在後測總分表現上實驗組的邊緣平均數 39.38 分高於對照組的邊緣平均數 34.90 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 44.23 分高於低成就邊緣平均數 30.05 分。

表 12 教學脈絡與成就水準在後測總分之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	603.008	1	603.008	8.281**	0.067
成就水準	6035.008	1	6035.008	82.882***	0.417
教學脈絡 * 成就水準	.075	1	.075	0.001	0.000
誤差	8446.500	116	72.815		
總數	15084.592	119			

註：\*\* $p < .01$  , \*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

(1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在「後測總分」的交互作用未達顯著水準

( $F = 0.001$  ,  $p = .974 > .05$ )。

- (2) 教學脈絡變項對後測總分影響的主要效果達到顯著( $F = 8.281, p = .005 < .05$ ), 在排除成就水準變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測總分的影響, 教學脈絡變項可以解釋後測總分的 6.7 % 的變異量 ( $\eta^2 = .067$ ), 為中度關連強度。從邊緣平均數發現, 實驗組 ( $M = 39.38$ ) 顯著優於對照組 ( $M = 34.90$ )。
- (3) 「成就水準」變項對「後測總分」影響的主要效果達到顯著( $F = 82.882, p = .000 < .05$ ), 在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測總分的影響, 成就水準變項可以解釋後測總分的 41.7 % 的變異量 ( $\eta^2 = .417$ ), 為高度關連強度。從邊緣平均數發現, 高成就水準組 ( $M = 44.23$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 30.05$ )。成就水準代表數學能力, 即高成就水準的學生在學習成效上自然會比低成就水準的學生較好, 即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述, 假設考驗的結果如下:

假設 1-1: 接受  $H_0$ , 假設 1-1 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測總分表現沒有顯著的交互作用。

## 2. 延後測總分

假設 2-1: 不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測總分有顯著的交互作用。

考驗假設 2-1 的虛無假設  $H_0$ : 不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測總分沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項, 延後測總分為依變項進行二因子變異數分析, 兩組學生的延後測總分平均數摘要表如表 13, 二因子變異數分析摘要表如表 14。

表 13 教學脈絡與成就水準在延後測總分之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	48.10 (30)	35.43 (30)	41.77 (60)
	對照組 (60)	47.17 (30)	31.90 (30)	39.53 (60)
邊緣平均數		47.63 (60)	33.67 (60)	40.65 (120)

註：括號內數字為人數，延後測總分共 54 分。

從延後測總分之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在延後測總分表現上實驗組的邊緣平均數 41.77 分高於對照組的邊緣平均數 39.53 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 47.63 分高於低成就邊緣平均數 33.67 分。

表 14 教學脈絡與成就水準在延後測總分之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	149.633	1	149.633	2.118	0.018
成就水準	5852.033	1	5852.033	82.816***	0.417
教學脈絡 * 成就水準	50.700	1	50.700	0.717	0.006
誤差	8196.933	116	70.633		
總數	14249.300	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

(1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在延後測總分的交互作用未達顯著水準

( $F = 0.717, p = .399 > .05$ )。

- (2) 教學脈絡變項對延後測總分影響的主要效果未達到顯著水準 ( $F = 2.118, p = .148 > .05$ )。
- (3) 成就水準變項對延後測總分影響的主要效果達到顯著 ( $F = 82.816, p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對延後測總分的影響，成就水準變項可以解釋延後測總分的 41.7 % 的變異量 ( $\eta^2 = .417$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 47.63$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 33.67$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水準的學生較好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-1：接受  $H_0$ ，假設 2-1 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測總分沒有顯著的交互作用。

### 3. 後測基本知識

假設 1-2：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測基本知識有顯著的交互作用。

考驗假設 1-2 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測基本知識沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，後測基本知識為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的後測基本知識平均數摘要表整理如表 15，二因子變異數分析摘要表如表 16。



表 15 教學脈絡與成就水準在後測基本知識之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	20.37 (30)	16.53 (30)	18.45 (60)
	對照組 (60)	19.70 (30)	14.93 (30)	17.32 (60)
邊緣平均數		20.03 (60)	15.73 (60)	17.88 (120)

註：括號內數字為人數，後測基本知識共 21 分。

從後測基本知識之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在後測基本知識表現上實驗組的邊緣平均數 18.45 分高於對照組的邊緣平均數 17.32 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 20.03 分高於低成就邊緣平均數 15.73 分。

表 16 教學脈絡與成就水準在後測基本知識之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	38.533	1	38.533	3.201	0.027
成就水準	554.700	1	554.700	46.073***	0.284
教學脈絡 * 成就水準	6.533	1	6.533	0.543	0.005
誤差	1396.600	116	12.040		
總數	1996.367	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在後測基本知識的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.543, p = .463 > .05$ )。

- (2) 教學脈絡變項對後測基本知識影響的主要效果未達到顯著水準 ( $F = 3.201, p = .076 > .05$ )。其原因可能是在實驗組與對照組的教學教材皆依多媒體學習理論的教學設計原則進行教材設計之下，皆已經降低外在認知負荷，故未能在基本知識上產生顯著差異。
- (3) 成就水準變項對後測基本知識影響的主要效果達到顯著 ( $F = 46.073, p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測基本知識的影響，成就水準變項可以解釋後測基本知識的 28.4 % 的變異量 ( $\eta^2 = .284$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 20.03$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 15.73$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習成效上自然會比低成就水準的學生較好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 1-2：接受  $H_0$ ，假設 1-2 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測基本知識沒有顯著的交互作用。

#### 4. 延後測基本知識

假設 2-2：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測基本知識有顯著的交互作用。

考驗假設 2-2 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測基本知識沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，延後測基本知識為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的延後測基本知識平均數摘要表整理如表 17，二因子變異數分析摘要表如表 18。

表 17 教學脈絡與成就水準在延後測基本知識之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	20.37 (30)	17.80 (30)	19.08 (60)
	對照組 (60)	20.37 (30)	15.80 (30)	18.08 (60)
邊緣平均數		20.37 (60)	16.80 (60)	18.58 (60)

註：括號內數字為人數，延後測共 21 分。

從延後測基本知識之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在延後測基本知識表現上實驗組的邊緣平均數 19.08 分高於對照組的邊緣平均數 18.08 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 20.37 分高於低成就邊緣平均數 16.80 分。

表 18 教學脈絡與成就水準在延後測基本知識之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	30.000	1	30.000	2.670	0.022
成就水準	381.633	1	381.633	33.961***	0.226
教學脈絡 * 成就水準	30.000	1	30.000	2.670	0.022
誤差	1303.533	116	11.237		
總數	1745.167	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在延後測基本知識的交互作用未達顯著水準 ( $F = 2.670, p = .105 > .05$ )。

(2) 教學脈絡變項對延後測基本知識影響的主要效果未達顯著

( $F = 2.670, p = .105 > .05$ )。

(3) 成就水準變項對延後測基本知識影響的主要效果達到顯著 ( $F = 33.961,$

$p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對

延後測基本知識的影響，成就水準變項可以解釋延後測基本知識的 22.6%

的變異量 ( $\eta^2 = .226$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水

準組 ( $M = 20.37$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 16.80$ )。成就水準代

表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水

準的學生好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-2：接受  $H_0$ ，假設 2-2 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學

生的延後測基本知識沒有顯著的交互作用。

## 5. 後測理解概念

假設 1-3：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測理解概念有顯著的交互作用。

考驗假設 1-3 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測理解概念沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，後測理解概念為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的後測理解概念平均數摘要表整理如表 19，二因子變異數分析摘要表如表 20。



表 19 教學脈絡與成就水準在後測理解概念之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	18.43 (30)	11.23 (30)	14.83 (60)
	對照組 (60)	15.90 (30)	10.13 (30)	13.02 (60)
邊緣平均數		17.17 (60)	10.68 (60)	13.93 (120)

註：括號內數字為人數，後測理解概念共 21 分。

從後測理解概念之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在後測理解概念表現上實驗組的邊緣平均數 14.83 分高於對照組的邊緣平均數 13.02 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 17.17 分高於低成就邊緣平均數 10.68 分。

表 20 教學脈絡與成就水準在後測理解概念之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	99.008	1	99.008	4.509*	0.037
成就水準	1261.008	1	1261.008	57.433***	0.331
教學脈絡 * 成就水準	15.408	1	15.408	0.702	0.006
誤差	2546.900	116	21.956		
總數	3922.325	119			

註：\* $p < .05$ , \*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在後測理解概念的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.702$ ,  $p = .404 > .05$ )。

- (2) 教學脈絡變項對後測理解概念影響的主要效果達顯著 ( $F = 4.509$ ,  $p = .036 < .05$ )，在排除成就水準變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測理解概念的影響，教學脈絡變項可以解釋後測理解概念的 3.7% 的變異量 ( $\eta^2 = .037$ )，為低度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組 ( $M = 14.83$ ) 顯著優於對照組 ( $M = 13.02$ )。
- (3) 成就水準變項對後測理解概念影響的主要效果達顯著 ( $F = 57.433$ ,  $p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測理解概念的影響，成就水準變項可以解釋後測理解概念的 33.1% 的變異量 ( $\eta^2 = .331$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 17.17$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 10.68$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水準的學生好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 1-3：接受  $H_0$ ，假設 1-3 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測理解概念沒有顯著的交互作用。

## 6. 延後測理解概念

假設 2-3：不同教學脈絡與成就水準對學生的延後測理解概念有顯著的交互作用。

考驗假設 2-3 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測理解概念沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，延後測理解概念為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的延後測理解概念平均數摘要表整理如表 21，二因子變異數分析摘要表如表 22。

表 21 教學脈絡與成就水準在延後測理解概念之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	18.33 (30)	12.20 (30)	15.27 (60)
	對照組 (60)	17.83 (30)	11.17 (30)	14.50 (60)
邊緣平均數		18.08 (60)	11.68 (60)	14.88 (120)

註：括號內數字為人數，延後測理解概念共 21 分。

從延後測理解概念之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在延後測理解概念表現上實驗組的邊緣平均數 15.27 分高於對照組的邊緣平均數 14.50 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 18.08 分高於低成就邊緣平均數 11.68 分。

表 22 教學脈絡與成就水準在延後測理解概念之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	17.633	1	17.633	1.053	0.009
成就水準	1228.800	1	1228.800	73.407***	0.388
教學脈絡 * 成就水準	2.133	1	2.133	0.127	0.001
誤差	1941.800	116	16.740		
總數	3190.367	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在延後測理解概念的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.127, p = .722 > .05$ )。
- (2) 教學脈絡變項對延後測理解概念影響的主要效果未達顯著 ( $F = 1.053,$



$p = .307 > .05$ )。

- (3) 成就水準變項對延後測理解概念影響的主要效果達顯著 ( $F = 73.407$ ,  $p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對延後測總分的影響，成就水準變項可以解釋延後測總分的 38.8 % 的變異量 ( $\eta^2 = .388$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 18.08$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 11.68$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水準的學生好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-3：接受  $H_0$ ，假設 2-3 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測理解概念沒有顯著的交互作用。

## 7. 後測應用說明

假設 1-4：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測應用說明有顯著的交互作用。

考驗假設 1-4 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測應用說明沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，後測應用說明為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的後測應用說明平均數摘要表整理如表 23，二因子變異數分析摘要表如表 24。



表 23 教學脈絡與成就水準在後測應用說明之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	7.70 (30)	4.50 (30)	6.10 (60)
	對照組 (60)	6.37 (30)	2.77 (30)	4.57 (60)
邊緣平均數		7.03 (60)	3.63 (60)	5.33 (120)

註：括號內數字為人數，後測應用說明共 12 分。

從後測應用說明之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在後測應用說明表現上實驗組的邊緣平均數 6.10 分高於對照組的邊緣平均數 4.57 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 7.03 分高於低成就邊緣平均數 3.63 分。

表 24 教學脈絡與成就水準在後測應用說明之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	70.533	1	70.533	10.025**	0.080
成就水準	346.800	1	346.800	49.292***	0.298
教學脈絡 * 成就水準	1.200	1	1.200	0.171	0.001
誤差	816.133	116	7.036		
總數	1234.667	119			

註：\*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在後測應用說明的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.171, p = .680 > .05$ )。

- (2) 教學脈絡變項對後測應用說明影響的主要效果達顯著 ( $F = 10.025, p = .002 < .05$ )，在排除成就水準變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測應用說明的影響，教學脈絡變項可以解釋後測應用說明的 8.0% 的變異量 ( $\eta^2 = .080$ )，為中度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組 ( $M = 6.10$ ) 顯著優於對照組 ( $M = 4.27$ )。
- (3) 成就水準變項對後測應用說明影響的主要效果達顯著 ( $F = 49.292, p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對後測應用說明的影響，成就水準變項可以解釋後測應用說明的 29.8% 的變異量 ( $\eta^2 = .298$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 7.03$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 3.63$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水準的學生好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 1-4：接受  $H_0$ ，假設 1-4 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測應用說明沒有顯著的交互作用。

## 8. 延後測應用說明

假設 2-4：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測應用說明有顯著的交互作用。

考驗假設 2-4 的虛無假設  $H_0$ ：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測應用說明沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，延後測應用說明為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的延後測應用說明平均數摘要表整理如表 25，二因子變異數分析摘要表如表 26。

表 25 教學脈絡與成就水準在延後測應用說明之平均數摘要表

A 因子 \ B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
教學脈絡	實驗組 (60)	9.40 (30)	5.43 (30)	7.42 (60)
	對照組 (60)	8.97 (30)	4.93 (30)	6.95 (60)
邊緣平均數		9.18 (60)	5.18 (60)	7.18 (120)

註：括號內數字為人數，延後測應用說明共 12 分。

從延後測應用說明之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在延後測應用說明表現上實驗組的邊緣平均數 7.42 分高於對照組的邊緣平均數 6.95 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 9.18 分高於低成就邊緣平均數 5.18 分。

表 26 教學脈絡與成就水準在延後測應用說明之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	6.533	1	6.533	0.702	0.006
成就水準	480.000	1	480.000	51.584***	0.308
教學脈絡 * 成就水準	.033	1	.033	0.004	0.000
誤差	1079.400	116	9.305		
總數	1565.967	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在延後測應用說明的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.004$ ,  $p = .952 > .05$ )。



(2) 教學脈絡變項對延後測應用說明影響的主要效果未達顯著 ( $F = 0.702$ ,  $p = .404 > .05$ )。

(3) 成就水準變項對延後測應用說明影響的主要效果達顯著 ( $F = 51.584$ ,  $p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對延後測應用說明的影響，學習成就變項可以解釋延後測應用說明的 30.8% 的變異量 ( $\eta^2 = .308$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 9.18$ ) 顯著優於低成就水準組 ( $M = 5.18$ )。成就水準代表數學能力，即高成就水準的學生在學習的延續情形自然會比低成就水準的學生好，即使達到顯著水準也可視為自然現象。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-4：接受  $H_0$ ，假設 2-4 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測應用說明沒有顯著的交互作用。

歸納整體學生後測與延後測表現結果如下：

	後測			延後測		
	交互作用	教學脈絡	成就水準	交互作用	教學脈絡	成就水準
總分	X	◎	◎	X	X	◎
基本知識	X	X	◎	X	X	◎
理解概念	X	◎	◎	X	X	◎
應用說明	X	◎	◎	X	X	◎

X: 未達顯著， ◎: 達到顯著

從後測分析中推論基本知識未達顯著的原因可能是在教材設計上，兩組教材設計都已降低外在認知負荷，所以表現的都很好而未達顯著。但是理解概念與應用說明在以固定一邊找第三點概念的教學脈絡下，明顯有較好的表現。



本研究將兩組學生於後測及延後測之平均分數繪製成折線圖，如圖 20。

整體而言，實驗組的分數表現均高於對照組的分數表現。

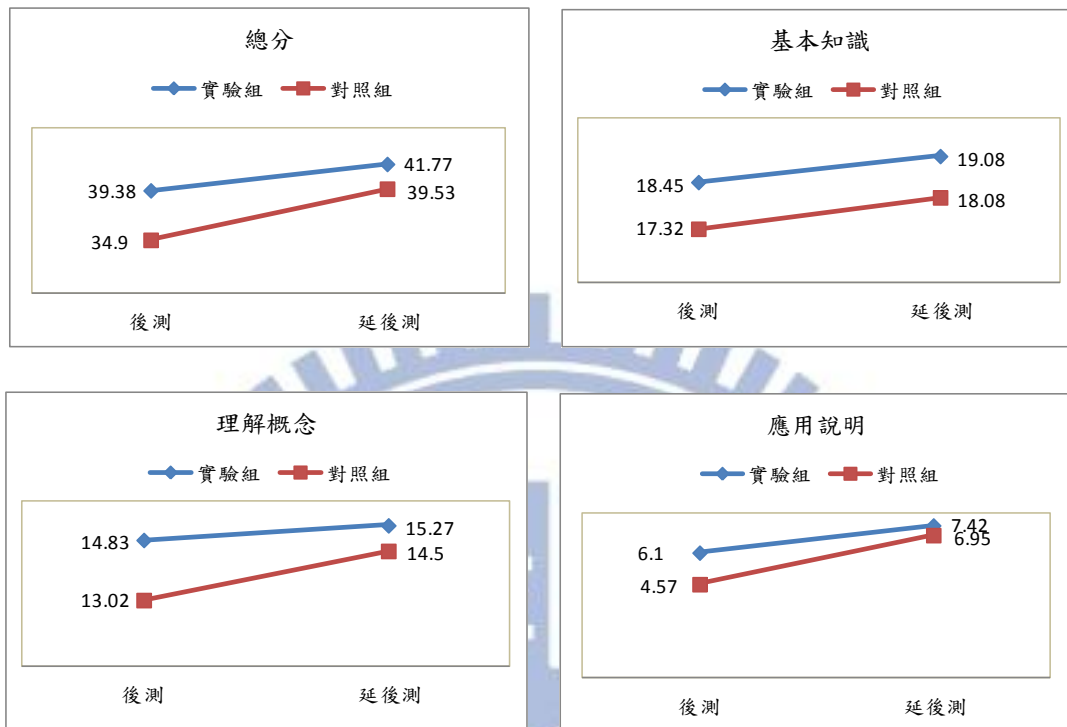


圖 20 學生後測及延後測平均分數折線圖

綜上所述，對兩組學生而言：

1. 假設 1 不成立，即不同教學脈絡與不同成就水準對學生的後測表現沒有顯著的交互作用。
2. 假設 2 不成立，即不同教學脈絡與不同成就水準對學生的延後測表現沒有顯著的交互作用。

從研究中發現延後測分數高於後測，分析主要原因可能是：本實驗的班級學生雖然是常態編班，但從定期評量成績偏高，可以推論可能由於學校所屬區域為家長社經背景較高之學區，學生程度偏高，自我要求也較高，而實驗的延後測時間已接近學校課程進度，有可能產生教學干擾，造成延後測成績高於後測，而且延後測的總分、基本知識、理解概念、應用說明都可能因此未達顯著表現。

## 4-2 認知負荷分析

本研究藉由認知負荷量表之花費心力檢測研究對象的認知負荷感受，數據越小代表認知負荷越低。

檢驗之假設如下：

假設 3：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的認知負荷感受有顯著的交互作用。

考驗假設 3 的虛無假設 H0：不同教學脈絡與不同成就水準對學生的認知負荷感受沒有顯著的交互作用。

以教學脈絡與成就水準為自變項，花費心力為依變項進行二因子變異數分析，將兩組學生的花費心力平均數摘要表整理如表 27，二因子變異數分析摘要表如表 28。

表 27 教學脈絡與成就水準在花費心力之平均數摘要表

B 因子		成就水準		邊緣平均數
		高成就 (60)	低成就 (60)	
A 因子	實驗組 (60)	2.90 (30)	3.60 (30)	3.25 (60)
	對照組 (60)	3.23 (30)	3.80 (30)	3.52 (60)
邊緣平均數		3.07 (60)	3.70 (60)	3.38 (120)

註：括號內數字為人數。

從花費心力之平均數摘要表中得知不同的教學脈絡在花費心力表現上實驗組的邊緣平均數 3.25 分低於對照組的邊緣平均數 3.52 分；在不同成就水準部分高成就邊緣平均數 3.07 分高於低成就邊緣平均數 3.70 分。

表 28 教學脈絡與成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	$\eta^2$
教學脈絡	2.133	1	2.133	3.434	0.029
成就水準	12.033	1	12.033	19.369***	0.143
教學脈絡 * 成就水準	.133	1	.133	0.215	0.002
誤差	72.067	116	.621		
總數	86.367	119			

註：\*\*\* $p < .001$

從二因子變異數分析摘要表中可以得知：

- (1) 教學脈絡與成就水準兩個變項在花費心力的交互作用未達顯著水準 ( $F = 0.215, p = .644 > .05$ )。
- (2) 教學脈絡變項對花費心力影響的主要效果未達顯著 ( $F = 3.434, p = .066 > .05$ )。成因可能是對照組教材也遵守多媒體理論設計的結果。
- (3) 成就水準變項對花費心力影響的主要效果達到顯著 ( $F = 19.369, p = .000 < .05$ )，在排除教學脈絡變項之主要效果與兩變項之交互作用對花費心力的影響，成就水準變項可以解釋花費心力的 14.3% 的變異量 ( $\eta^2 = .143$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高成就水準組 ( $M = 3.07$ ) 顯著低於低成就水準組 ( $M = 3.70$ )。高成就水準的學生在認知負荷感受上顯著低於低成就水準的學生。

綜上所述，假設考驗的結果如下：

假設 3：接受  $H_0$ ，假設 3 不成立。不同教學脈絡與不同成就水準對學生的花費心力沒有顯著的交互作用。

### 4-3 學習效率與投入分數暨專業知識反轉效應分析

本節將綜合第二章認知負荷理論中用於觀察專業知識反轉效應的學習效率 ( $E$ ) 與學習投入分數 ( $I$ )，判斷本研究使用之教材對於高成就水準學生是否產生專業知識反轉效應。以下分析將後測總分轉換為  $Z$  分數  $Z_p$ ，將認知負荷量表中之花費心力轉換為  $Z$  分數  $Z_c$ ，分別就整體學生、高成就水準學生與低成就水準學生進行學習效率、學習投入分數與專業知識反轉效應之探討。

#### 4-3-1 整體學生之分析

就兩組學生而言，實驗組的學習效率高於對照組，實驗組的學習投入分數也高於對照組，數據整理如表 29。綜合學習效率與學習投入分數來看，實驗組屬於高效率高投入，對照組為低效率低投入，視覺化圖像如圖 21。

表 29 兩組學生之學習效率與投入分數

	$Z_p(Y)$	$Z_c(X)$	$E$	$I$
實驗組	0.20	-0.16	0.25	0.03
對照組	-0.20	0.16	-0.25	-0.03

註： $Z_p$  = 後測  $Z$  分數， $Z_c$  = 花費心力  $Z$  分數， $E$  = 學習效率， $I$  = 投入分數

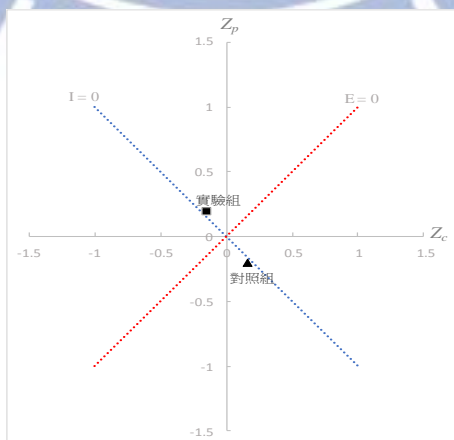


圖 21 兩組學生學習效率與投入分數之視覺化圖像



## 4-3-2 各學習成就學生之分析

在兩組各學習成就部分，數據整理如表 30，視覺化圖像如圖 22。

### 1. 學習效率方面

在高成就水準部分，實驗組(0.99)高於對照組(0.43)；在低成就水準部分，實驗組(-0.49)高於對照組(-0.93)。學習效率由大到小依序為：實驗組高成就(0.99)、對照組高成就(0.43)、實驗組低成就(-0.49)、對照組低成就(-0.93)，高成就水準學生的學習效率均高於低成就水準學生。因此就學習效率而言，判斷無專業知識反轉效應發生。

### 2. 學習投入分數方面

在高成就水準部分，實驗組(0.19)高於對照組(0.18)；在低成就水準部分，實驗組(-0.13)高於對照組(-0.24)。學習投入分數由大到小依序為：實驗組高成就(0.19)、對照組高成就(0.18)、實驗組低成就(-0.13)、對照組低成就(-0.24)，高成就水準學生的學習投入分數均高於低成就水準學生。因此就學習投入分數而言，判斷無專業知識反轉效應發生。

表 30 不同成就水準之學習效率與投入分數

	$Z_p(Y)$	$Z_c(X)$	$E$	$I$
實驗組高成就	0.83	-0.57	0.99	0.19
對照組高成就	0.43	-0.18	0.43	0.18
實驗組低成就	-0.43	0.25	-0.49	-0.13
對照組低成就	-0.83	0.49	-0.93	-0.24

註： $Z_p$ =後測 Z 分數， $Z_c$ =花費心力 Z 分數， $E$ =學習效率， $I$ =投入分數

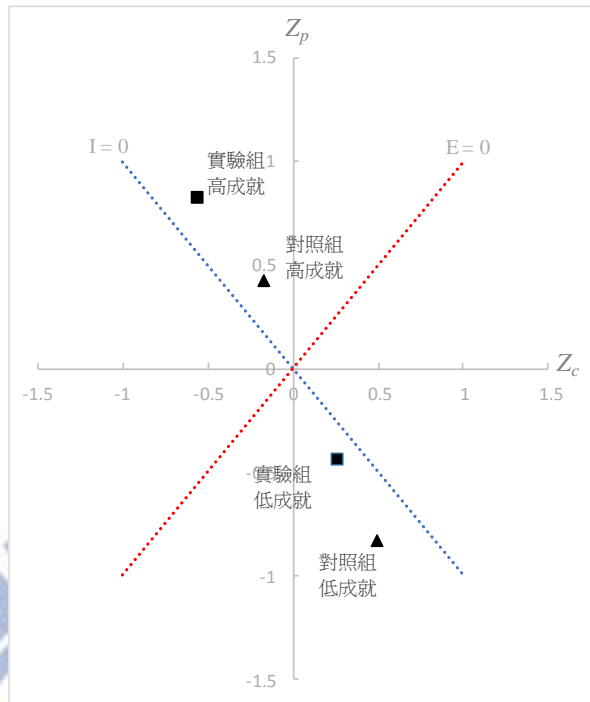


圖 22 不同成就水準之學習效率與投入分數視覺化圖像

綜合學習效率與學習投入分數，由視覺化圖像得知實驗組高成就與對照組高成就均屬於高效率高投入，實驗組低成就與對照組低成就均屬於低效率低投入。不論是實驗組或對照組，本研究之教材對於高成就水準學生並未產生專業知識反轉效應。

## 第五章 結論與建議

本研究以八年級的三角形全等性質為主題，採用準實驗研究法，於八年級四個常態班進行教學實驗，探討兩種不同教學脈絡對後測、延後測與認知負荷感受之影響。以下根據實驗結果與分析，歸納研究結論與建議，作為未來研究之參考。

### 5-1 研究結論

本研究實驗組教材為以固定一邊找第三點之教學脈絡，對照組教材為以尺規作圖為教學脈絡。分析其後測、延後測表現以及認知負荷感受，其中後測及延後測皆區分為總分、基本知識、理解概念與應用說明等部分進行分析；以認知負荷量表之花費心力分析認知負荷感受；以後測總分及認知負荷量表之花費心力計算學習效率與學習投入分數，綜合判斷學生的學習情形，以及對於高成就水準學生是否產生專家知識反轉效應。歸納結論如下：

#### 1. 後測表現：

- (1) 以固定一邊找第三點為概念的教學法在總分表現上優於以課本常用之尺規作圖教學法；
- (2) 以固定一邊找第三點為概念的教學法在理解概念表現上優於以課本常用之尺規作圖教學法；
- (3) 以固定一邊找第三點為概念的教學法在應用說明表現上優於以課本常用之尺規作圖教學法；
- (4) 成就水準之主要效果於後測總分、基本知識、理解概念與應用說明皆優於以課本常用之尺規作圖教學法。

#### 2. 延後測表現：

- (1) 以固定一邊找第三點為概念的教學法在延後測的總分、基本知識、理解概念與應用說明皆沒有達顯著差異。

(2) 成就水準之主要效果於後測總分、基本知識、理解概念與應用說明達到顯著差異。

3. 認知負荷感受：

(1) 以固定一邊找第三點為概念的教學法在認知負荷感受上未達顯著差異。

(2) 成就水準對於認知負荷感受之主要效果達到顯著差異。

4. 學習效率與學習投入分數暨專家知識反轉效應：

根據後測總分與認知負荷量表之花費心力得到的學習效率與學習投入分數綜合判斷，在學習情形部份，實驗組為高投入高效率，對照組為低投入低效率；不論是實驗組或對照組之教材，對於高成就水準學生而言，皆未產生專業知識反轉效應。

研究結果從後測表現發現以固定一邊找第三點之教學脈絡，有助於初學者對三角形全等性質之學習。運用尺規作圖之教學脈絡需要瞭解各個作圖步驟之意義，產生之內在認知負荷對於初學者學生而言可能難以負荷。以固定一邊找第三點為概念之教學脈絡只需要掌握找出關鍵第三點位置，就能形成唯一三角形的作圖，藉此能理解運用 SSS、ASA、AAS、SAS、RHS 當作兩個三角形全等的性質，所以以固定一邊找第三點之教學脈絡產生之內在認知負荷比較低，對於初學者學生而言較能負荷，較能瞭解三角形全等性質之意義。

## 5-2 建議

### 5-2-1 對於教學之建議

本節就本研究實驗之經驗提出以下建議：

1. 排除先備知識的準備

本研究用兩堂課的教學時間，先完成先備知識的教學，認識基本三角形、全等概念與符號等教學內容，再進入全等性質的教學，時間上較為冗長。建議可以完成先備知識的介紹後，將全等性質的教學課程做為



主要實驗教材內容。

## 2. 教材設計與教學

本研究教材以固定一邊找第三點之方法，在對照組教材也遵守多媒體理論教學設計之時，在未來設計此單元的教材時，需要更用心的思考如何逐步降低學生的內在認知負荷，以期達到更有效的教學效果。

## 3. 作為一般教學

以固定一邊找第三點之教學脈絡有助於學生理解三角形全等性質的概念，因此可以試著作為一般教學之教學脈絡。

# 5-2-2 對於未來研究之建議

## 1. 擴大研究樣本數

本研究之樣本侷限於新竹市某國中 120 位學生，建議未來可擴大至其他學校或其他縣市，並增加樣本數進行研究。

## 2. 增加質性分析

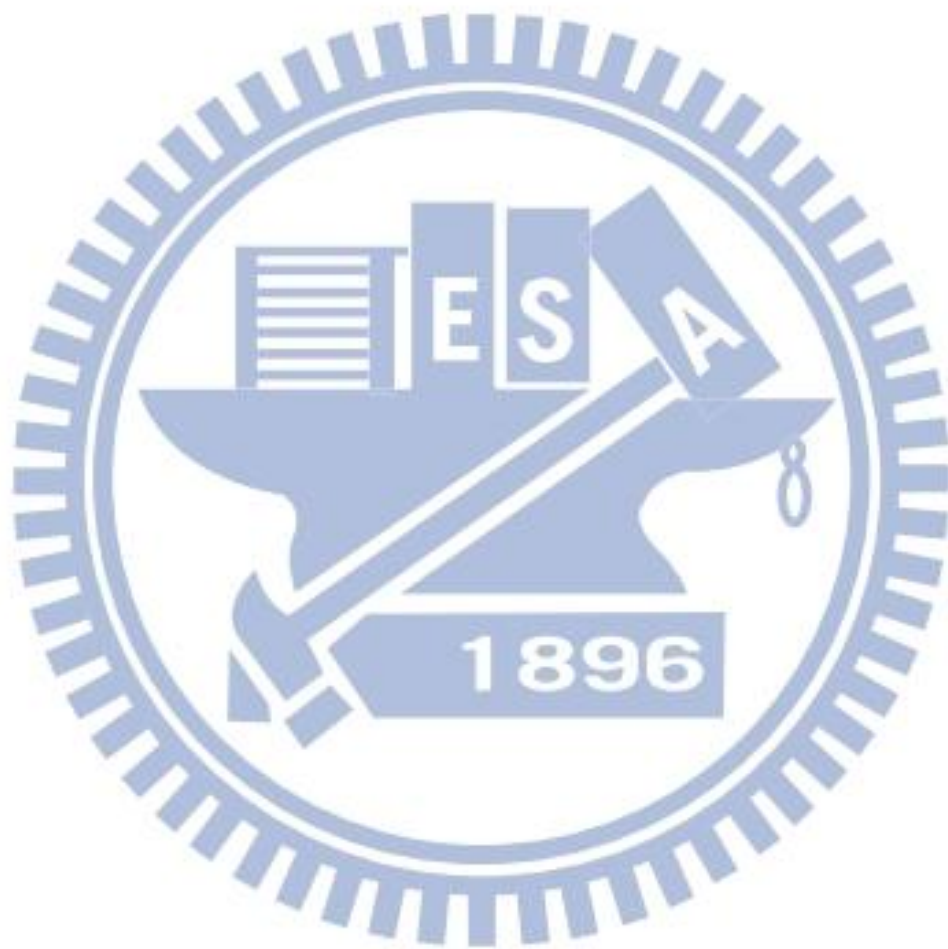
本研究僅包含量化數據之分析，填寫認知負荷量表，建議未來可增加質性訪談，進一步瞭解學生的學習狀況。

## 3. 教學實驗內容設計

本研究因時間限制，因此觀察、提問討論的時間稍嫌不足，且教學內容並未包含練習題目。由於三角形的全等性質從概念知識符號的瞭解，進入到做題目理解應用說明，符號之間所需的表徵轉換認知負荷較重，在教材設計上需給學生更多的思考時間。建議可以在教學時增加應用題之教學內容，使教學實驗之內容更為完整。

## 4. 施測的時間

教學實驗避開教學進度時間，去除實驗施測時的干擾因素。



# 參考文獻

## 1. 中文文獻

- 牛勇、秋香（譯）（2006）。**多媒體學習**（原作者：Mayer, R. E.）。北京：商務印書館。
- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報**，43，頁 291-314。
- 左台益、梁勇能（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報：科學教育類**，46（1，2），1-20。
- 吳明隆、涂金堂（2012）。**SPSS 與統計應用分析**。台北市：五南。
- 呂鳳琳（2010）。幾何證明不同文本呈現方式對學生認知負荷與閱讀理解影響之研究。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學。
- 李佑宗（2009）。南區跨縣市國中「關鍵教學暨 ICT 教學」工作坊 16。三角形的全等性質的先導概念。（頁 241-248），  
[mathseed.ntue.edu.tw/ict/98/16.pdf](http://mathseed.ntue.edu.tw/ict/98/16.pdf)。
- 洪蘭（譯）（2009）。**大腦當家—靈活用腦 12 守則，學習工作更上層樓**（原作者：Medina, J.）。台北市：遠流。
- 教育部（2009a）。**97 年國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要**。
- 教育部（2009b）。**建置中小學優質化均等數位教育環境計畫**。
- 陳一平（2011）。**視覺心理學**。台北市：雙葉書廊。
- 陳明璋（2008）。一個以授課為導向之數位教材設計及展演環境簡介—Activate Mind Attention (AMA)系統。**國民教育**，48:6 [民 97.08]，P.57-63。
- 陳澤明（譯）（1995）。**數學學習心理學**。九章出版社。（原著：Skemp, R. R. 1987）。
- 曾尹姿（2005）。**電腦媒體運用於國中幾何學習成效之研究—以三角形基本性質**

為例。碩士，慈濟大學，花蓮縣。

曾妙玲 (2008)。激發式動態呈現教學設計之研究—觸發模式有/無字幕之比較—以尺規作圖為例。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。

黃昭智 (2010)。探討三角形的全等錯誤類型之研究—以國中三年級學生為例。未出版之碩士論文，國立臺中教育大學。

黃陽明 (2008)。國中教師資訊融入數學教學現況及相關因素之探討。碩士，國立臺南大學，台南市。

楊凱琳 (2004)。建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式。博士，國立臺灣師範大學，台北市。

葉士豪 (2005)。作業範圍大小對視覺注意力之影響。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。

葉素玲 (1999)。視覺空間注意力。載於李江山 (主編)，**視覺與認知-視覺知覺與視覺運動系統**。(頁 291-323)。台北市：遠流。

廖真瑜 (2011)。多元表徵應用於二元一次聯立方程式文字題列式教學之研究。未出版之碩士論文，國立交通大學，新竹市。

謝易達 (2013)。新北市九年級學生數學解題能力差異之研究。未出版之碩士論文，國立政治大學。

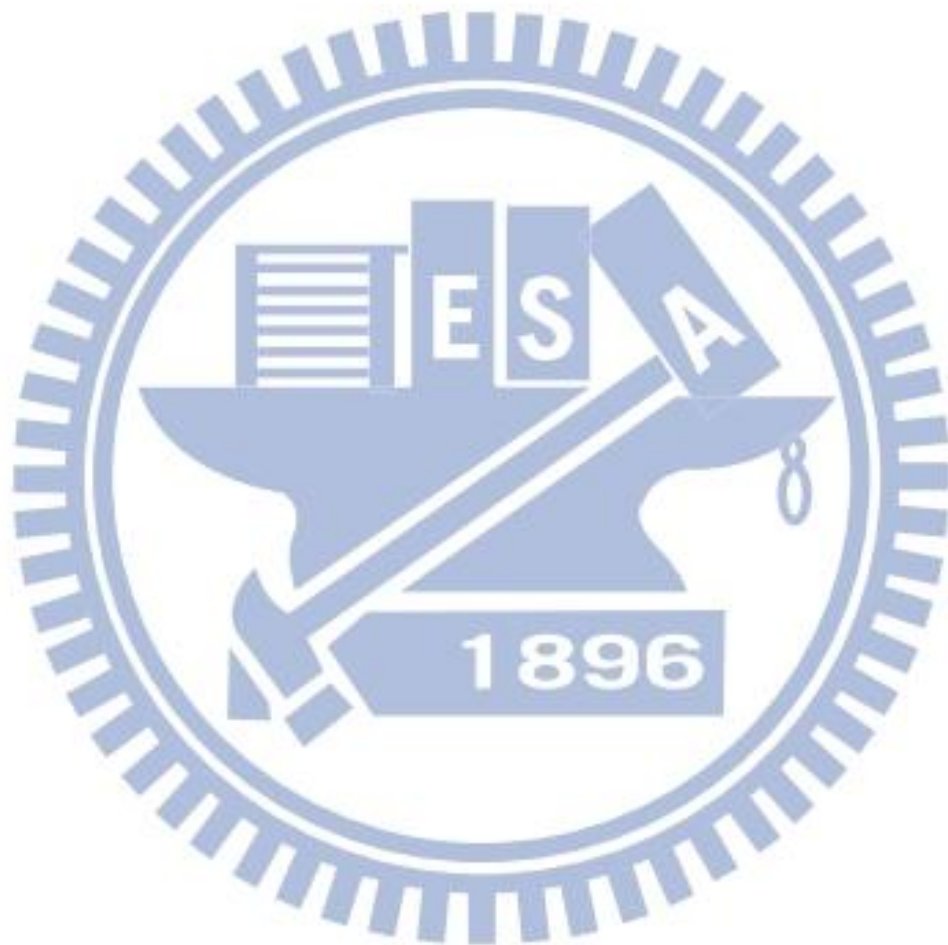


## 2. 英文文獻

- Broadbent, D. E. (1958). Perception and communication.
- Clark, R. C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2006). *Efficiency in Learning: Evidence-Based Guidelines to Manage Cognitive Load*. San Francisco: Pfeiffer.
- Deutsch, J. A., & Deutsch, D. (1963). Attention: Some Theoretical Considerations. *Psychological Review*, 70(1), 80-90. doi: 10.1037/h0039515
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Kalyuga, S. (2009). *Managing Cognitive Load in Adaptive Multimedia Learning* (Vol. Hershey, PA, USA): IGI Global.
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.
- Mousavi, S. Y., Low, R., & Sweller, J. (1995). Reducing Cognitive Load by Mixing Auditory and Visual Presentation Modes. *Journal of Educational Psychology*, 87(2), 319-334.
- Paas, F. G. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 429-434. doi: 10.1037/0022-0663.84.4.429
- Paas, F. G. W. C., & Merriënboer, J. J. G. V. (1993). The Efficiency of Instructional Conditions: An Approach to Combine Mental Effort and Performance Measures. *Human Factors*, 35(4), 737-743. doi: 10.1177/001872089303500412
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford, Oxford University Press.
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. New York: Springer.
- Sweller, J., Merriënboer, J. J. G. v., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. [Article]. *Educational Psychology Review*, 10(3),

251-296.

Treisman, A. M. (1964). Selective attention in man. *British Medical Bulletin*, 20(1),  
12-16.



## 附錄一 前測試卷

1. 已知  $\triangle DEF \cong \triangle PQR$ ，且  $D$ 、 $E$ 、 $F$  的對應點分別為  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 。  
 若  $\angle D = (x+7)^\circ$ ， $\angle F = 48^\circ$ ， $\angle Q = (2x-13)^\circ$ ，  
 則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

2. 如圖，已知  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且  $A$  與  $D$ ， $B$  與  $E$ ， $C$  與  $F$  分別為  
 對應點。若  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{EF} = 10$ ， $\angle E = 60^\circ$   
 求  $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$  與  $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)



3. 右圖  $\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$  中， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，  
 請完成下列空格以說明  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 。

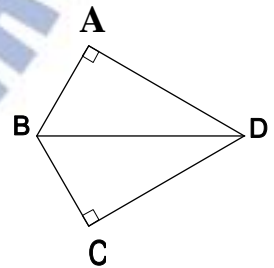
在  $\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$  中，因為

$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(1分)

$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(1分)

$\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$  (公用邊)，(1分)

所以由  $\underline{\hspace{2cm}}$  全等性質得知  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 。(2分)



4. 完成下列空格以說明 $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。

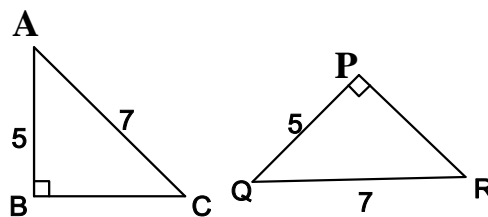
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle QPR$ 中，因為

$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(1分)

$\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(1分)

$\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(1分)

所以由 $\underline{\hspace{2cm}}$ 全等性質得知 $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。(2分)



5. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ，

若再加上下列哪一個條件，則這兩個三角形會全等？

(A)  $\angle A = \angle F$  (B)  $\angle C = \angle F$  (C)  $\angle C = \angle E$  (D)  $\angle B = \angle D$

答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

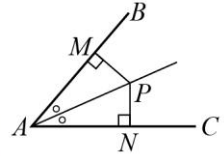


## 附錄二 後測測試卷

一、填充題：共 40 分（每題 4 分）

1. 根據下列何種性質不一定能使兩三角形全等？(A) *SAS* (B) *ASA* (C) *AAA*  
(D) *SSS* 答：\_\_\_\_\_

2. 如右圖，已知  $P$  點在  $\angle BAC$  的角平分線上，且  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PN} \perp \overline{AC}$ ，則可根據下列何種全等性質說明  $\triangle APM \cong \triangle APN$ ？



(A) *AAS* (B) *RHS* (C) *ASA* (D) *SAS* 答：\_\_\_\_\_

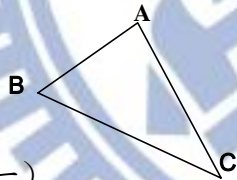
3. 下列各選項中的已知條件，哪一項無法畫出唯一的  $\triangle ABC$ ？ 答：\_\_\_\_\_

- (A)  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle A = 60^\circ$  (B)  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\angle C = 90^\circ$   
(C)  $\angle A = 20^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 3$  (D)  $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\overline{AC} = 8$

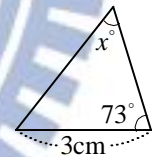
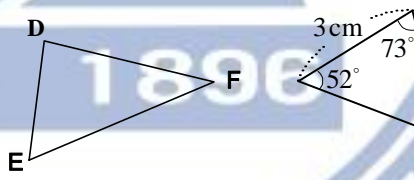
4. 如下圖(一)，已知  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且  $A$  與  $D$ ， $B$  與  $E$ ， $C$  與  $F$  分別為對應點。

若  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{EF} = 10$ ， $\angle E = 60^\circ$ ，

求  $\overline{BC} =$  \_\_\_\_\_， $\angle B =$  \_\_\_\_\_。



圖(一)



圖(二)

5. 已知右上圖(二)的兩個三角形全等，則  $x =$  \_\_\_\_\_。

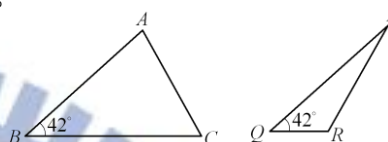
6.  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  中，已知  $\overline{AB} = \overline{DF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DE}$ ，則加入下列表格中

哪些條件可使  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ？**答**：\_\_\_\_\_。

甲： $\angle C = \angle E$	乙： $\angle A = \angle F$
丙： $\overline{BC} = \overline{FE}$	丁： $\angle A = \angle D$
戊： $\angle B = \angle F$	

7. 已知  $\triangle ABC$  中的  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\overline{AB}$ ，若要作一三角形與  $\triangle ABC$  全等，則可利用 \_\_\_\_\_ 全等性質。

8. 若  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ,  $A$  與  $D$ ,  $B$  與  $E$ ,  $C$  與  $F$  分別為對應點, 且  $\overline{AB} = 2x+5$ ,  $\overline{AC} = 12$ ,  $\overline{DE} = 13$ ,  $\overline{DF} = y+7$ , 則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 已知  $\triangle DEF \cong \triangle PQR$ , 且  $D$ 、 $E$ 、 $F$  的對應點分別為  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 。  
若  $\angle D = (x+7)^\circ$ ,  $\angle F = 48^\circ$ ,  $\angle Q = (2x-13)^\circ$ , 則  $\angle P = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 如右圖,  $\triangle ABC$  與  $\triangle PQR$  中, 已知  $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ,  $\overline{AC} = \overline{PR}$ ,  $\angle B = \angle Q = 42^\circ$ , 但兩三角形不全等, 則  $\angle C + \angle R = \underline{\hspace{2cm}}$  度。



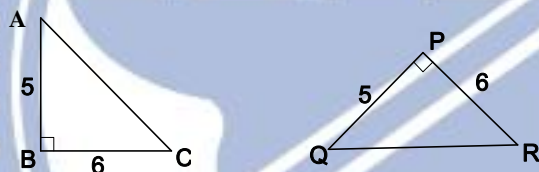
**二、非選題：共 14 分**

1. 完成下列空格以說明  $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。(5 分)

在  $\triangle ABC$  與  $\triangle QPR$  中,

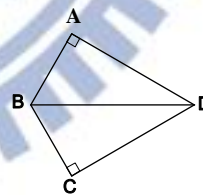
因為  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

所以由  $\underline{\hspace{2cm}}$  全等性質得知  $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。

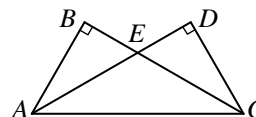


2. 右圖  $\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$  中,  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ,

試用 全等性質 說明  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 。(5 分)



3. 已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle ACD$  為兩個全等的直角三角形紙板, 今將其依下圖方式重疊, 試用 全等性質 說明  $\triangle ABE$  與  $\triangle CDE$  是否全等。(4 分)



### 附錄三 延後測試卷

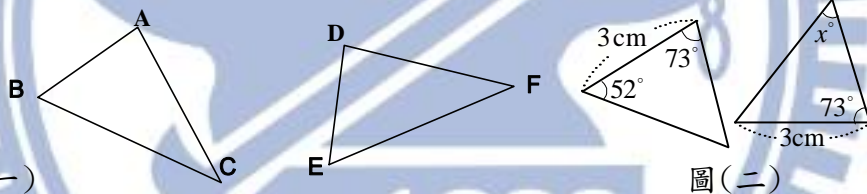
一、填充題：共 40 分（每題 4 分）

1. 若  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $A$  與  $D$ ， $B$  與  $E$ ， $C$  與  $F$  分別為對應點，且  $\overline{AB} = 2x + 5$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{DE} = 13$ ， $\overline{DF} = y + 7$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知  $\triangle ABC$  中的  $\angle A$ 、 $\angle B$  與  $\overline{AB}$ ，若要作一三角形與  $\triangle ABC$  全等，則可利用          全等性質。

3. 根據下列何種性質 不一定 能使兩三角形全等？(A)  $AAS$  (B)  $SSS$  (C)  $ASA$  (D)  $SSA$  答：        

4. 如下圖(一)，已知  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且  $A$  與  $D$ ， $B$  與  $E$ ， $C$  與  $F$  分別為對應點。若  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{EF} = 10$ ， $\angle E = 60^\circ$ ，求  $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



5. 已知右上圖(二)的兩個三角形全等，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6.  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  中，已知  $\overline{AB} = \overline{DF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DE}$ ，則加入下列表格中哪些條件可使  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ？答：        。

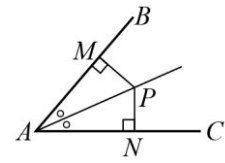
甲： $\angle C = \angle E$	丁： $\angle A = \angle F$
乙： $\overline{BC} = \overline{FE}$	戊： $\angle A = \angle D$
丙： $\angle B = \angle F$	

7. 下列各選項中的已知條件，哪一項無法畫出唯一的  $\triangle ABC$ ？ 答：        

- (A)  $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\overline{AC} = 8$       (B)  $\angle A = 20^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 3$   
 (C)  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\angle C = 90^\circ$       (D)  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle A = 60^\circ$

8. 如圖，已知  $P$  點在  $\angle BAC$  的角平分線上，且  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PN} \perp \overline{AC}$ ，則可根據下列何種全等性質說明  $\triangle APM \cong \triangle APN$ ？

(A) *RHS* (B) *AAS* (C) *ASA* (D) *SAS* 答：\_\_\_\_\_

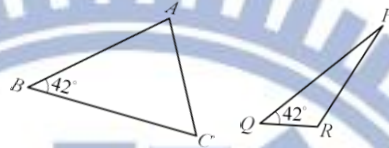


9. 已知  $\triangle DEF \cong \triangle PQR$ ，且  $D$ 、 $E$ 、 $F$  的對應點分別為  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 。

若  $\angle D = (x+7)^\circ$ ， $\angle F = 48^\circ$ ， $\angle Q = (2x-13)^\circ$ ，則  $\angle E =$  \_\_\_\_\_。

10. 如右圖， $\triangle ABC$  與  $\triangle PQR$  中，已知  $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ， $\overline{AC} = \overline{PR}$ ， $\angle B = \angle Q = 42^\circ$ ，

但兩三角形不全等，則  $\angle C$  與  $\angle R$  的關係為何？請簡答說明：\_\_\_\_\_



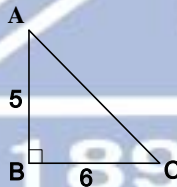
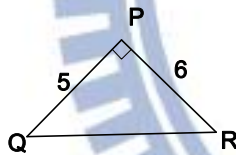
## 二、非選題：共 14 分 (5 分)

1. 完成下列空格以說明  $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。(5 分)

在  $\triangle ABC$  與  $\triangle QPR$  中，

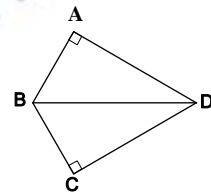
因為  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_， $\overline{BC} =$  \_\_\_\_\_， $\angle B =$  \_\_\_\_\_，

所以由 \_\_\_\_\_ 全等性質得知  $\triangle ABC \cong \triangle QPR$ 。

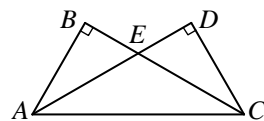


2. 右圖  $\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$  中， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，

試用 全等性質 說明  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 。(5 分)

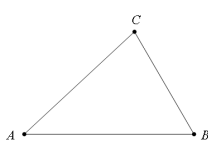
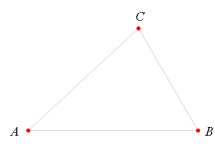
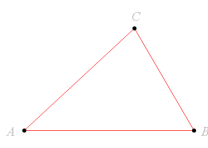
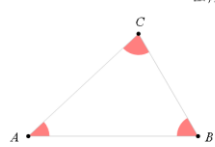
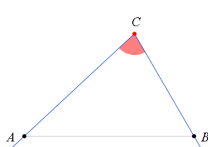


3. 已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle ACD$  為兩個全等的直角三角形紙板，今將其依右圖方式重疊，試用 全等性質 說明  $\triangle ABE$  與  $\triangle CDE$  是否全等。(4 分)



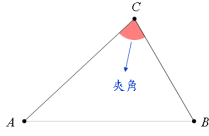


# 附錄四 實驗組教材

<p>三角形的全等性質 - 目錄</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>認識三角形</th> <th>全等三角形</th> <th>如何做出唯一的三角形</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>一邊+兩邊 SSS</td> <td>一邊+兩角 ASA、AAS</td> <td>一邊+一邊一角 SAS、RHS</td> </tr> </tbody> </table> <p>全等三角形的判別方法</p>	認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形	一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS	<p>認識三角形</p>  <p>U 2</p>
認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形					
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS					
<p>認識三角形</p>  <p>三角形有： 3個頂點 點A、點B、點C</p> <p>U 3</p>	<p>認識三角形</p>  <p>三角形有： 3個頂點 點A、點B、點C 3個邊 <math>\overline{AB}</math>、<math>\overline{BC}</math>、<math>\overline{AC}</math></p> <p>U 4</p>						
<p>認識三角形</p>  <p>三角形有： 3個頂點 點A、點B、點C 3個邊 <math>\overline{AB}</math>、<math>\overline{BC}</math>、<math>\overline{AC}</math> 3個角 <math>\angle A</math>、<math>\angle B</math>、<math>\angle C</math></p> <p>U 5</p>	<p>認識三角形</p>  <p>每個角(<math>\angle C</math>)有1個頂點(點C)和兩邊(<math>\overline{CA}</math>與<math>\overline{CB}</math>)</p> <p>U 6</p>						

### 認識三角形

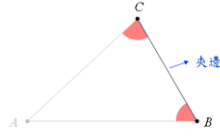
$\angle C$  為兩邊  $\overline{CA}$  與  $\overline{CB}$  的夾角



7

### 認識三角形

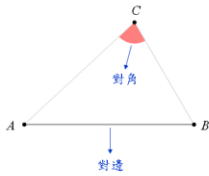
$\overline{BC}$  為兩角的夾邊



8

### 認識三角形

$\overline{AB}$  為  $\angle C$  的對邊  
 $\angle C$  為  $\overline{AB}$  的對角

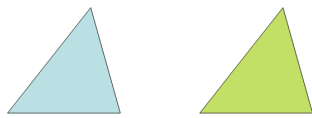


9

### 三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS
全等三角形的判別方法		

### 三角形



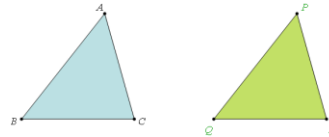
形狀、大小一樣的三角形稱為 全等三角形



12

### 如果兩個三角形 全等

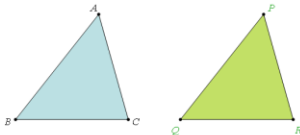
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後...



13

### 如果兩個三角形 全等

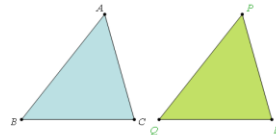
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後...



14

### 如果兩個三角形 全等

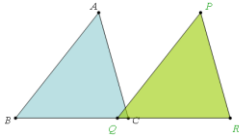
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後...



15

如果兩個三角形 **全等**

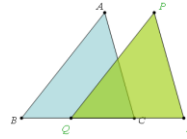
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



16

如果兩個三角形 **全等**

將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



17

如果兩個三角形 **全等**

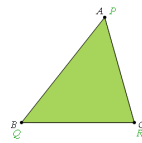
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



18

如果兩個三角形 **全等**

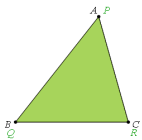
將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



19

如果兩個三角形 **全等**

將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



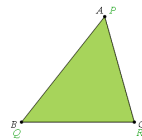
結果會 ?



20

如果兩個三角形 **全等**

將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



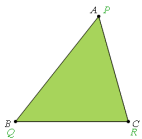
結果會 **完全重合**



21

如果兩個三角形 **全等**

將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



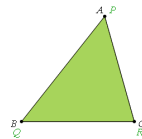
結果會 **完全重合**  
所以它們的 \_\_\_\_\_ 一樣 (相同)



22

如果兩個三角形 **全等**

將  $\triangle PQR$  往  $\triangle ABC$  平移後……



結果會 **完全重合**  
所以它們的 **形狀、大小** 一樣 (相同)

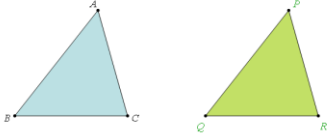


23

如果兩個三角形 **全等**

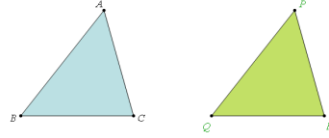
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

念法： $\triangle ABC$  **全等於**  $\triangle PQR$



24

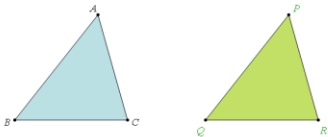
重合在一起的 **點** 是？



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

25

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

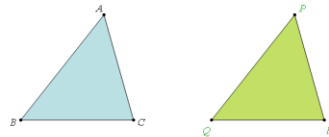


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

26

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

三組對應點：

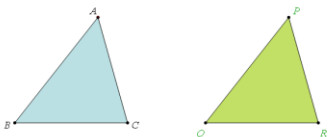


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

27

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

三組對應點：**點A和點P**

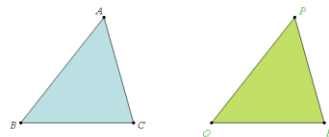


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

28

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

三組對應點：**點A和點P**  
**點B和點Q**

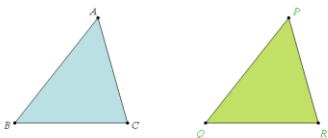


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

29

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

三組對應點：**點A和點P**  
**點B和點Q**  
**點C和點R**



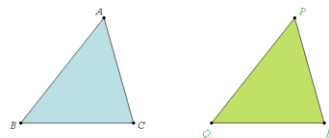
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

30

重合在一起的 **點** 是 **對應點**

三組對應點：**點A和點P**  
**點B和點Q**  
**點C和點R**

對應點會



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

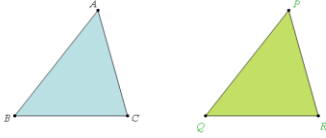
31



重合在一起的點是對應點

三組對應點：  
點A和點P  
點B和點Q  
點C和點R

對應點會重合

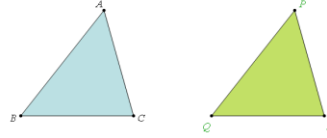


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



32

完全重合在一起的角是？



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

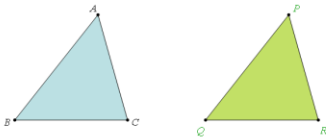


33

完全重合在一起的角是對應角

完全重合在一起的角是對應角

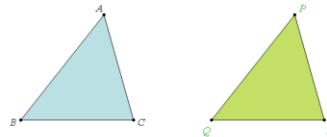
三組對應角：



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



34



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



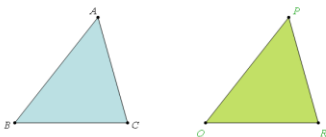
35

完全重合在一起的角是對應角

完全重合在一起的角是對應角

三組對應角： $\angle A$ 和 $\angle P$

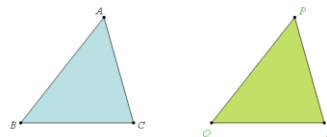
三組對應角： $\angle A$ 和 $\angle P$   
 $\angle B$ 和 $\angle Q$



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



36



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



37

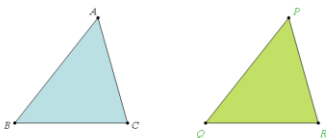
完全重合在一起的角是對應角

完全重合在一起的角是對應角

三組對應角： $\angle A$ 和 $\angle P$   
 $\angle B$ 和 $\angle Q$   
 $\angle C$ 和 $\angle R$

三組對應角： $\angle A$ 和 $\angle P$   
 $\angle B$ 和 $\angle Q$   
 $\angle C$ 和 $\angle R$

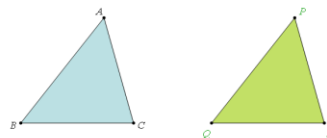
對應角會



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



38



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

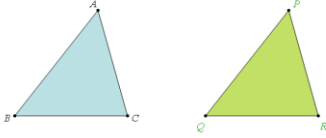


39

完全重合在一起的角是對應角

三組對應角： $\angle A$ 和 $\angle P$   
 $\angle B$ 和 $\angle Q$   
 $\angle C$ 和 $\angle R$

對應角會相等

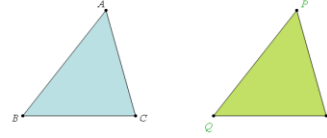


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



40

完全重合在一起的邊是？



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

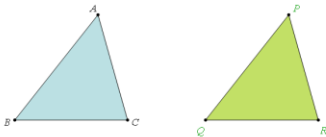


41

完全重合在一起的邊是對應邊

完全重合在一起的邊是對應邊

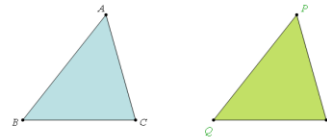
三組對應邊：



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



42



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



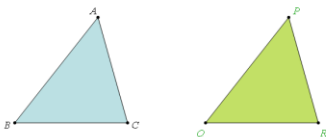
43

完全重合在一起的邊是對應邊

三組對應邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$

完全重合在一起的邊是對應邊

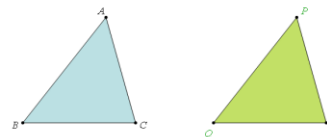
三組對應邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$   
 $\overline{BC}$ 和 $\overline{QR}$



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



44



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



45

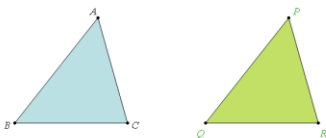
完全重合在一起的邊是對應邊

三組對應邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$   
 $\overline{BC}$ 和 $\overline{QR}$   
 $\overline{AC}$ 和 $\overline{PR}$

完全重合在一起的邊是對應邊

三組對應邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$   
 $\overline{BC}$ 和 $\overline{QR}$   
 $\overline{AC}$ 和 $\overline{PR}$

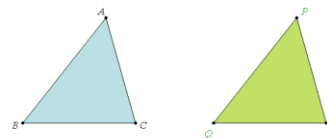
對應邊會...



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



46



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

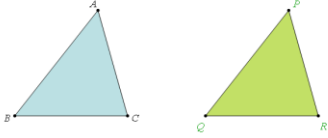


47

完全重合在一起的邊是**對應邊**

三組對應邊： $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$   
 $\overline{BC}$ 和 $\overline{QR}$   
 $\overline{AC}$ 和 $\overline{PR}$

對應邊會**等長**

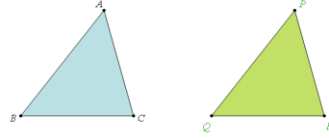


符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



48

所以全等三角形...



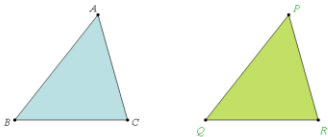
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



49

所以全等三角形...

1. 三組對應點會**重合**



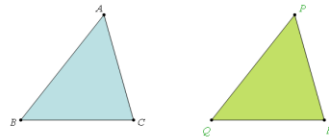
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



50

所以全等三角形...

1. 三組對應點會**重合**  
 2. 三組對應角會**相等**



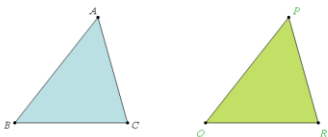
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



51

所以全等三角形...

1. 三組對應點會**重合**  
 2. 三組對應角會**相等**  
 3. 三組對應邊會**等長**



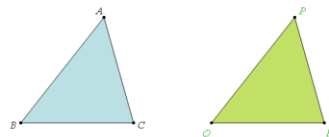
符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



52

所以全等三角形...

1. 三組對應點會**重合**  
 2. 三組對應角會**相等**  
 3. 三組對應邊會**等長**



符號表示： $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



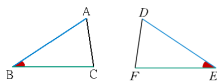
53

### 全等三角形

我們常用相同的**顏色**或**記號**來表示對應邊與對應角。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\angle B = \angle E$ 。



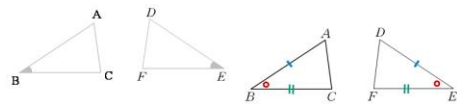
54

### 全等三角形

我們常用相同的**顏色**或**記號**來表示對應邊與對應角。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\angle B = \angle E$ ， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ 。



55

### 符號代表的意義

$S \Rightarrow$  邊 (Side)

$A \Rightarrow$  角 (Angle)

$R \Rightarrow$  直角 (Right angle)

$H \Rightarrow$  斜邊 (Hypotenuse)

### 三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS
全等三角形的判別方法		

### 如何做出唯一的三角形

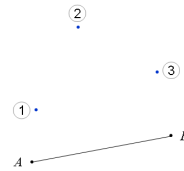
三角形  $ABC$  有 3 個頂點  
只確定 2 個頂點的位置  
能畫出唯一的三角形嗎?



58

### 如何做出唯一的三角形

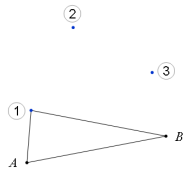
已知一邊線段  $AB$   
確定兩點位置  
能確定  $C$  點的位置嗎?



59

### 如何做出唯一的三角形

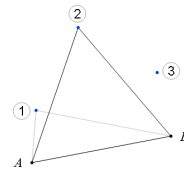
已知一邊線段  $AB$   
確定兩點位置  
能確定  $C$  點的位置嗎?



60

### 如何做出唯一的三角形

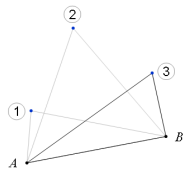
已知一邊線段  $AB$   
確定兩點位置  
能確定  $C$  點的位置嗎?



61

### 如何做出唯一的三角形

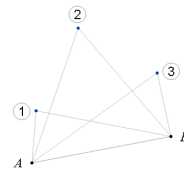
已知一邊線段  $AB$   
確定兩點位置  
能確定  $C$  點的位置嗎?



62

### 如何做出唯一的三角形

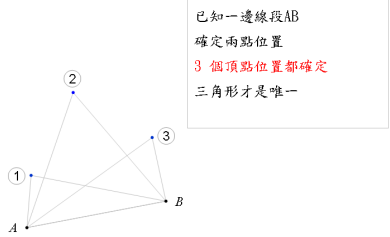
已知一邊線段  $AB$   
確定兩點位置  
若第三點  $C$  點位置  
**無法確定**  
則三角形不是唯一



63



### 如何做出唯一的三角形



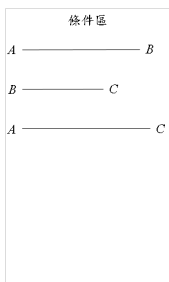
64

### 三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS
全等三角形的判別方法		

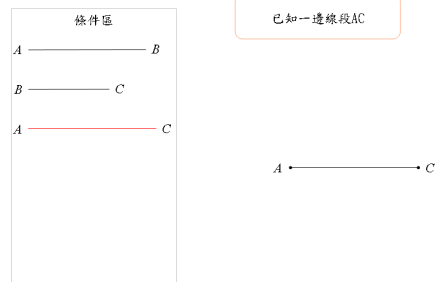
66

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)



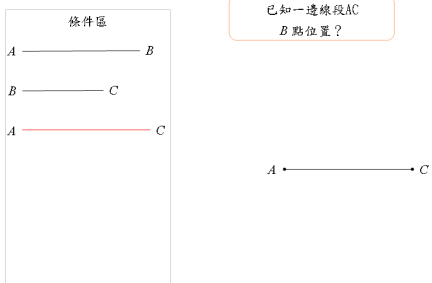
67

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)



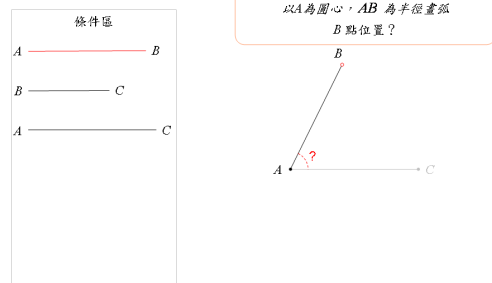
68

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)



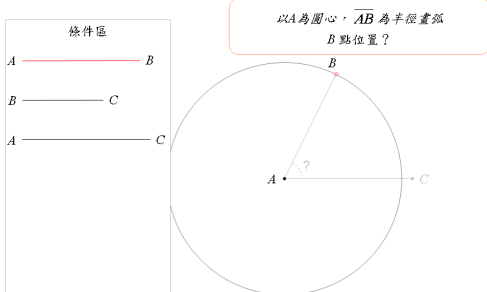
69

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)



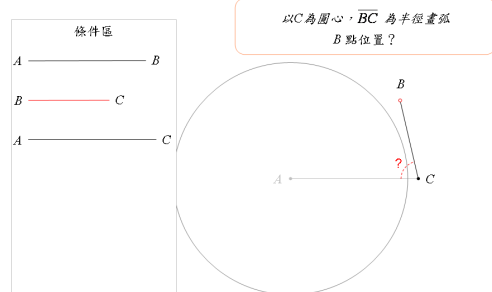
70

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)



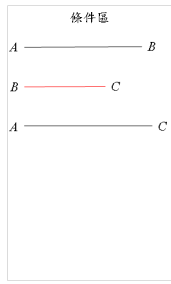
71

### 唯一的三角形 - 3個邊(SSS)

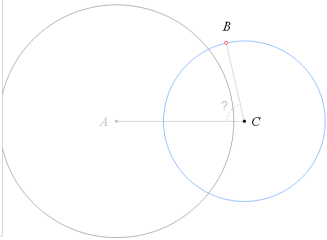


72

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

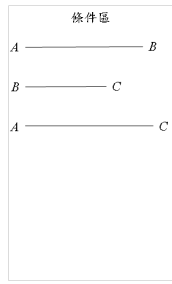


以C為圓心， $\overline{BC}$ 為半徑畫弧  
B點位置？

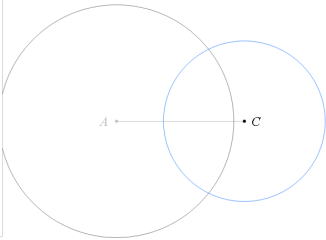


73

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

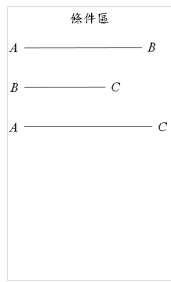


兩弧交於第三點

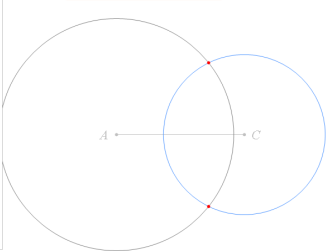


74

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

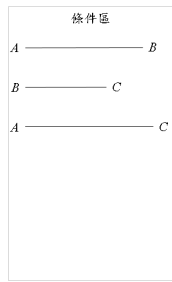


B點位置在哪裡？

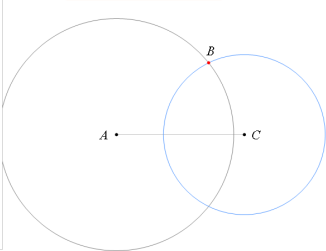


75

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

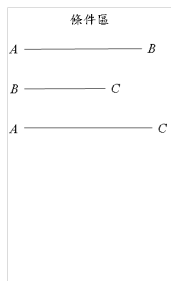


B點位置在哪裡？

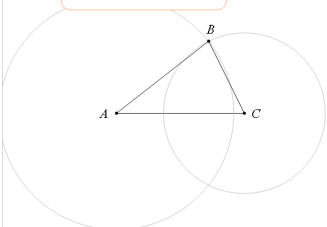


76

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

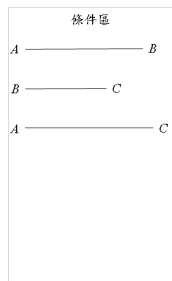


可以做出唯一的三角形

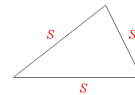


77

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

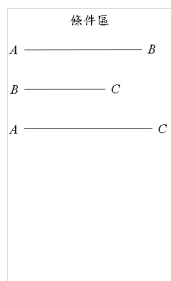


以符號表示為

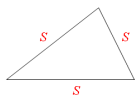


78

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)

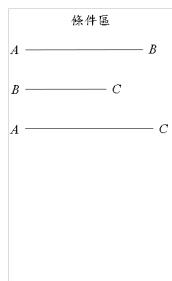


以符號表示為 SSS  
(三邊)

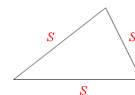


79

唯一的三角形 - 3 個邊(SSS)



以符號表示為 SSS  
(三邊)



SSS全等性質：

若兩個三角形的三個邊分別對應相等，  
則這兩個三角形全等。

80

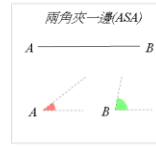
### 三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出一個唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS
全等三角形的判別方法		

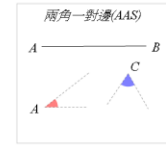


82

### 唯一的三角形 - 1個邊+2個角



$\angle A$ 、 $\angle B$  和 夾邊 AB (ASA)

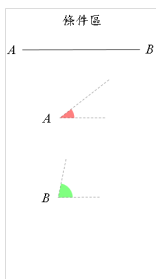


$\angle A$ 、 $\angle C$  和 對邊 AB (AAS)



83

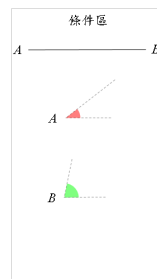
### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



1 邊  
2 角

84

### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



已知一邊線段 AB



1 邊  
2 角

85

### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



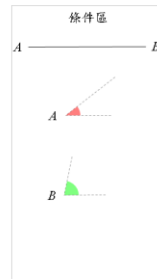
A、B 點位置已確定



1 邊  
2 角

86

### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



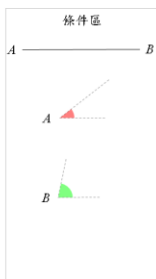
以 A 點為頂點作  $\angle A$



1 邊  
2 角

87

### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



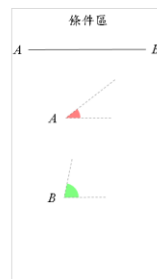
以 B 點為頂點作  $\angle B$



1 邊  
2 角

88

### 唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



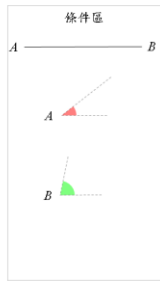
C 點在哪裡?



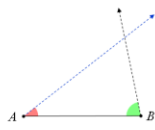
1 邊  
2 角

89

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



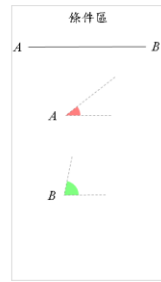
C 點在哪裡?



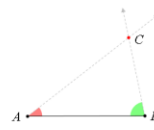
1 邊  
2 角

90

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



C 點在哪裡?



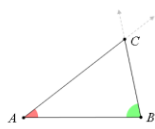
1 邊  
2 角

91

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



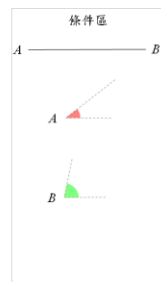
可以得到唯一的三角形



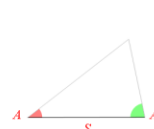
1 邊  
2 角

92

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



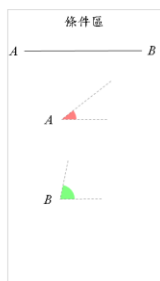
以符號表示為



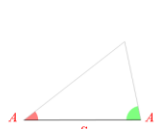
1 邊  
2 角

93

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



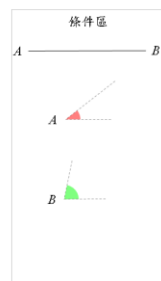
以符號表示為 ASA  
(兩角夾一邊)



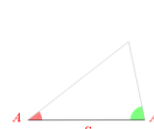
1 邊  
2 角

94

唯一的三角形 - 2角夾1邊 (ASA)



以符號表示為 ASA  
(兩角夾一邊)



ASA 全等性質:

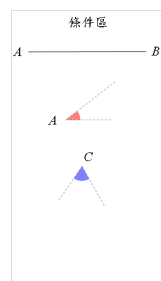
若兩個三角形的兩角及其夾邊分別對應相等, 則這兩個三角形全等



1 邊  
2 角

95

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



1 邊  
2 角

96

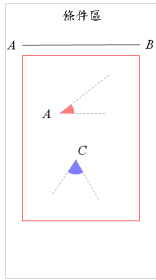


1 邊  
2 角

97



唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)

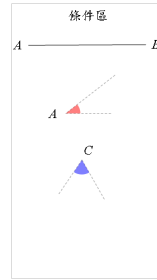


已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

1 邊  
2 角

98

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



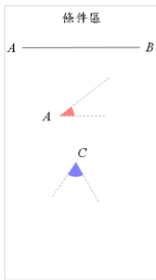
已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

畫一直線180度

1 邊  
2 角

99

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



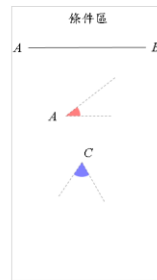
已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

畫一直線180度  
先作  $\angle A$

1 邊  
2 角

100

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



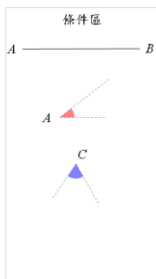
已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

畫一直線180度  
先作  $\angle A$  再作  $\angle C$

1 邊  
2 角

101

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



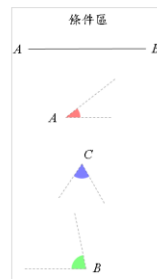
已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

求出第三角  $\angle B$

1 邊  
2 角

102

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



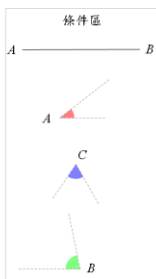
已知  $\angle A$  和  $\angle C$   
能利用三角形內角和180  
求出第三角  $\angle B$

求出第三角  $\angle B$

1 邊  
2 角

103

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



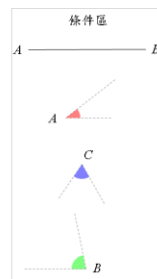
已知一邊線段AB



1 邊  
2 角

104

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



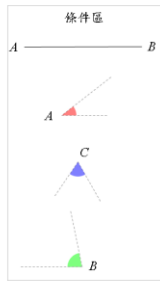
A、B 點位置已確定



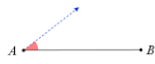
1 邊  
2 角

105

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



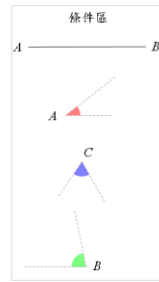
C點在哪裡?



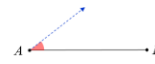
1邊  
2角

106

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



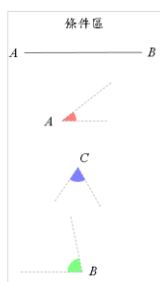
如何確定C點位置?  
從A點可以嗎?



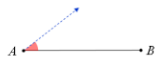
1邊  
2角

107

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



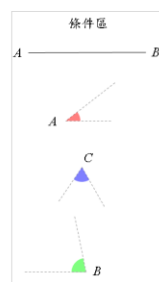
線段AC長度不確定  
C點在哪裡?



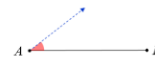
1邊  
2角

108

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



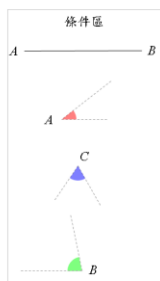
可以從B點  
確定C點位置嗎?



1邊  
2角

109

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



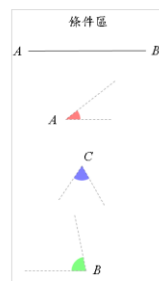
可以利用  $\angle B$   
(變成ASA)



1邊  
2角

110

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



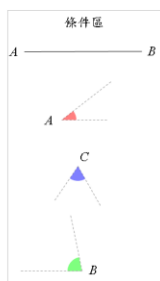
以A點、B點為頂點作  
 $\angle A$ 與 $\angle B$



1邊  
2角

111

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



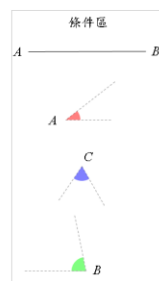
C點位置?



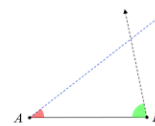
1邊  
2角

112

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



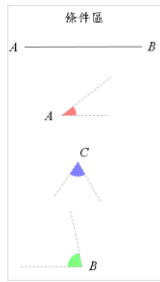
C點在哪裡?



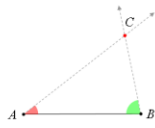
1邊  
2角

113

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)

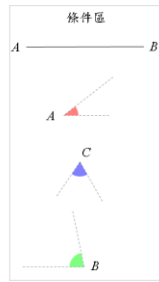


C點在哪裡?

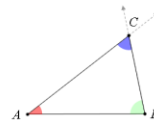


114

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)

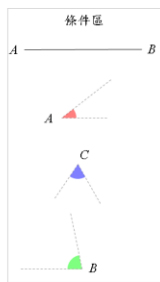


可以得到唯一的三角形

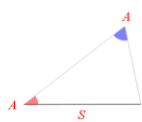


115

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)

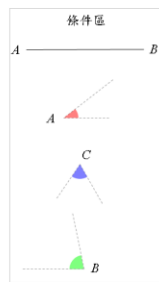


以符號表示為

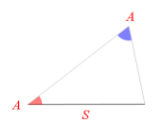


116

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)

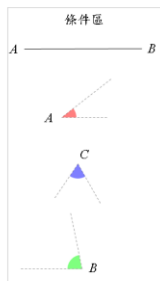


以符號表示為 **AAS**  
(兩角一對邊)

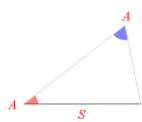


117

唯一的三角形 - 2角1對邊 (AAS)



以符號表示為 **AAS**  
(兩角一對邊)



**AAS全等性質:**  
若兩個三角形的兩個角和其中一個角的對邊分別對應相等, 則這兩個三角形全等



118

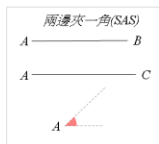
三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一側一角 <b>SAS、RHS</b>
全等三角形的判別方法		

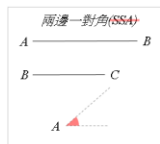
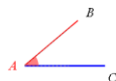


120

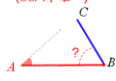
唯一的三角形 - 1個邊+1個邊1個角



邊AB、邊AC和夾角∠A (SAS)

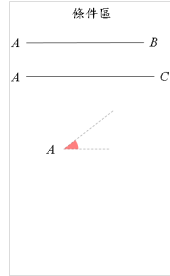


邊AB、邊BC和對角∠A (SSA不唯一)



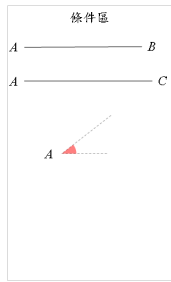
121

唯一的三角形 - 2邊夾1角 (SAS)



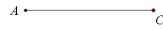
122

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



已知一邊線段 AC

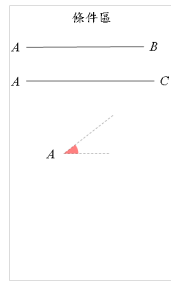
A、C 點位置已確定



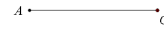
2 邊  
1 角

123

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



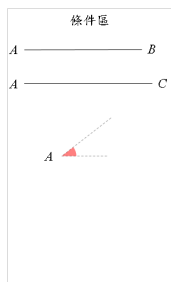
B 點在哪裡?



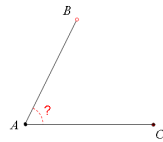
2 邊  
1 角

124

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



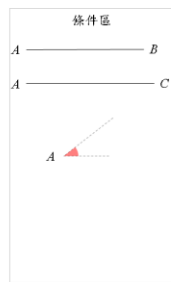
B 點在哪裡?



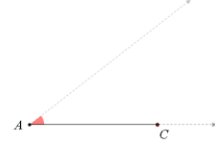
2 邊  
1 角

125

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



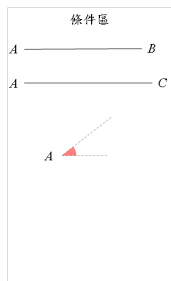
先以 A 點為頂點作  $\angle A$



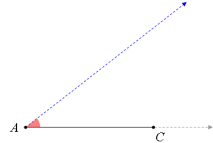
2 邊  
1 角

126

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



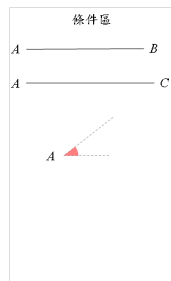
B 點在哪裡?



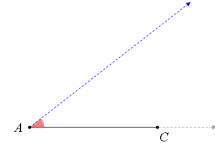
2 邊  
1 角

127

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



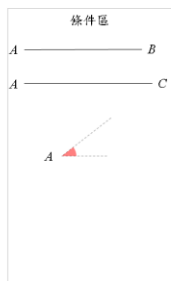
在  $\angle A$  的另一邊取線段 AB



2 邊  
1 角

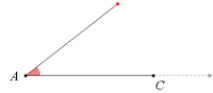
128

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



在  $\angle A$  的另一邊取線段 AB

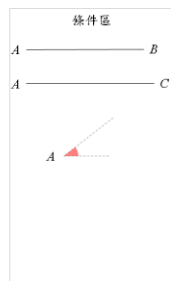
B 點在哪裡?



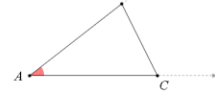
2 邊  
1 角

129

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



可以做出唯一的三角形

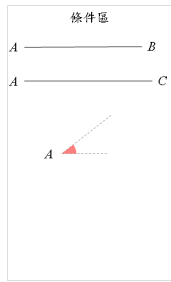


2 邊  
1 角

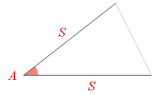
130



唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)

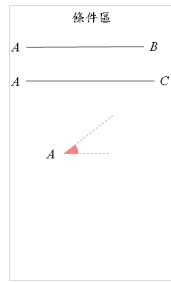


以符號表示為

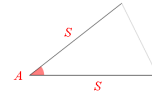


131

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)

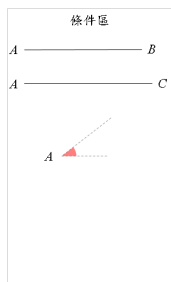


以符號表示為 SAS  
(兩邊一夾角)

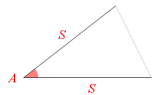


132

唯一的三角形 - 2 邊夾 1 角 (SAS)



以符號表示為 SAS  
(兩邊一夾角)



SAS 全等性質：  
若兩個三角形的兩邊及其夾角分別  
對應相等，則這兩個三角形全等

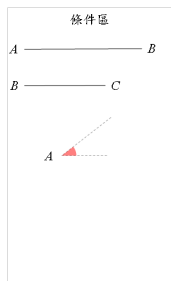


133



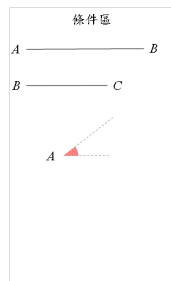
134

唯一的三角形? 2 邊 1 對角 (SSA 不唯一)



135

唯一的三角形? 2 邊 1 對角 (SSA 不唯一)



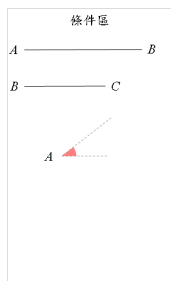
已知一邊線段 AB

A、B 點位置已確定

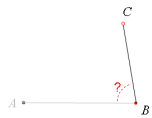


136

唯一的三角形? 2 邊 1 對角 (SSA 不唯一)

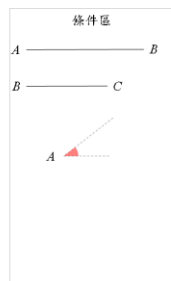


B、C 點長度 已知  
夾角 未知  
C 點在哪?

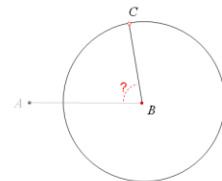


137

唯一的三角形? 2 邊 1 對角 (SSA 不唯一)

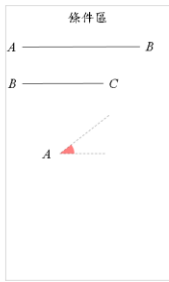


C 點在圓周上

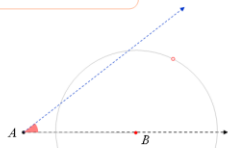


138

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



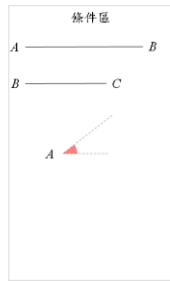
C點在圓周上  
再以A點為頂點作 $\angle A$



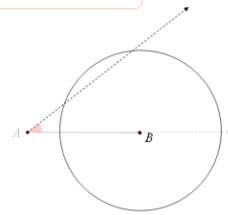
2邊  
1角

139

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



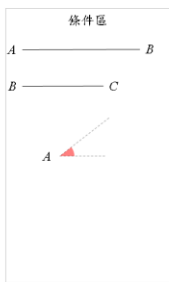
C點在哪?



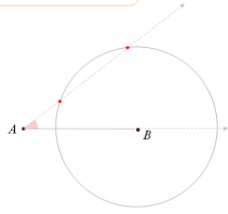
2邊  
1角

140

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



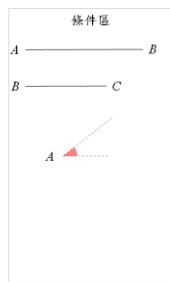
C點在哪?  
出現兩個交點



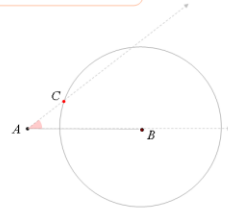
2邊  
1角

141

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



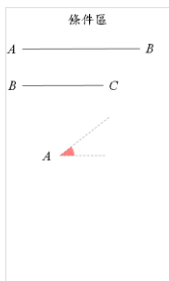
C點在哪?  
第一個交點



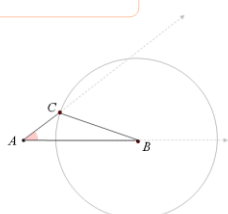
2邊  
1角

142

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



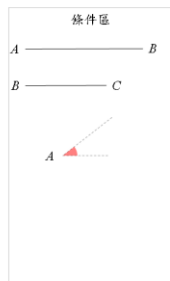
第一個 $\triangle ABC$



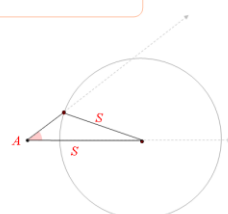
2邊  
1角

143

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



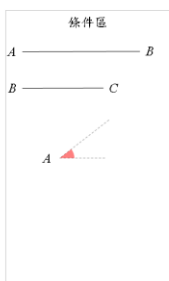
符號表示為SSA



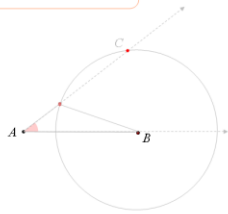
2邊  
1角

144

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



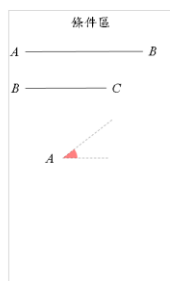
C點在哪?  
第二個交點



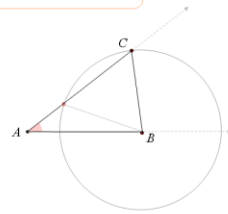
2邊  
1角

145

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



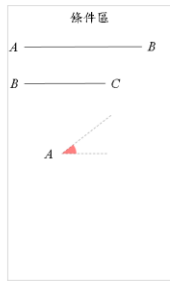
第二個 $\triangle ABC$



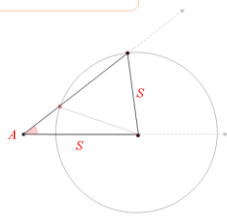
2邊  
1角

146

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



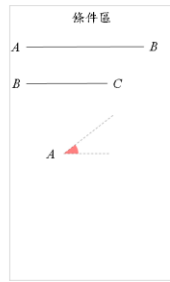
符號表示也為SSA



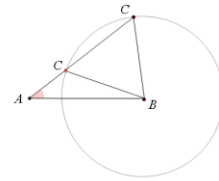
2邊  
1角

147

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



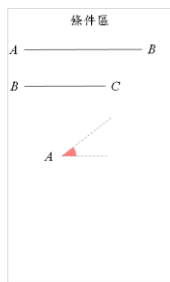
出現兩個交點  
三角形不是唯一



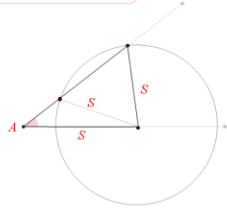
2邊  
1角

148

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



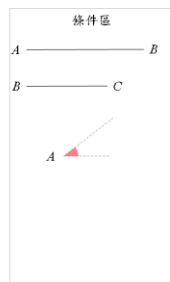
三角形不是唯一  
符號表示皆為SSA



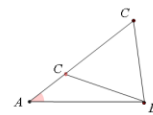
2邊  
1角

149

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



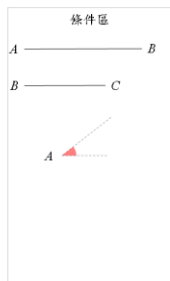
將圖形翻轉後



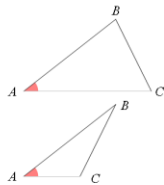
2邊  
1角

150

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



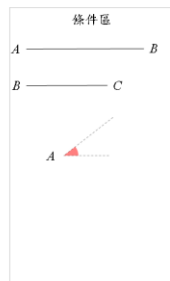
三角形不是唯一



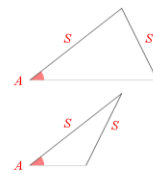
2邊  
1角

151

唯一的三角形? 2邊1對角 (SSA不唯一)



SSA  
不是全等性質



2邊  
1角

152

回顧

唯一三角形

SSS  
3邊

ASA  
2邊夾1角

AAS  
2角夾1邊

AAS  
2角1對邊

不一定唯一

SSA  
2邊1對角



153



154

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

155

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

156

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

157

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

158

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

159

### 回顧

唯一三角形				不一定唯一
SSS 3邊	ASA 2邊夾1角	AAS 2角夾1邊	AAS 2角1對邊	SSA 2邊1對角

160

### 唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

C ————— B

A ————— C

161

### 唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

C ————— B

A ————— C

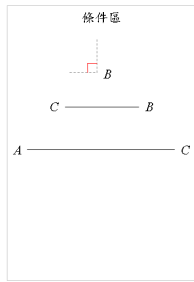
已知一邊線段BC  
B、C點位置已確定

A點在哪?

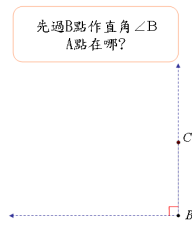
162



唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

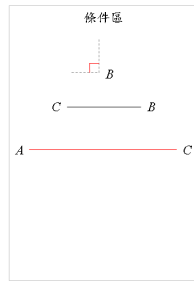


先過B點作直角 $\angle B$   
A點在哪?

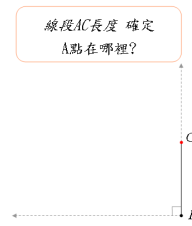


163

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

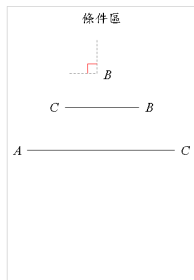


線段AC長度 確定  
A點在哪裡?

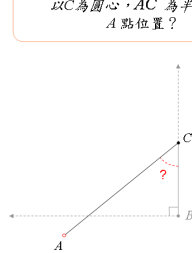


164

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

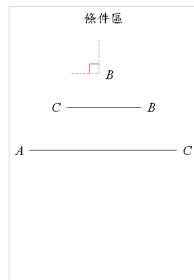


以C為圓心,  $\overline{AC}$  為半徑畫弧  
A點位置?

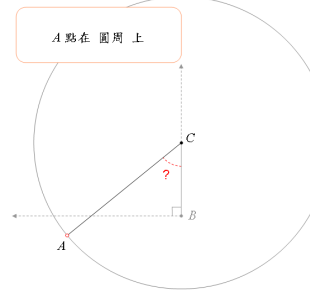


165

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

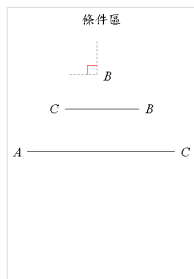


A點在圓周上

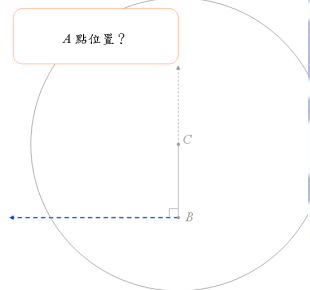


166

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

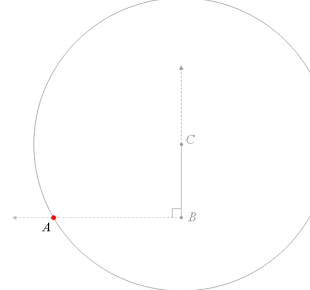
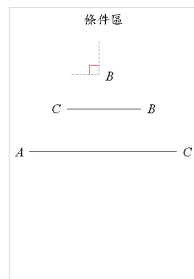


A點位置?



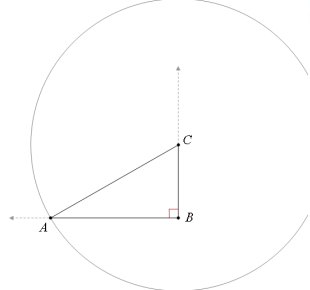
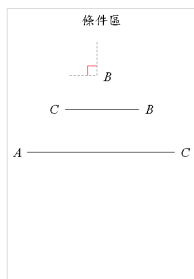
167

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)



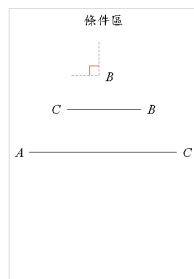
168

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

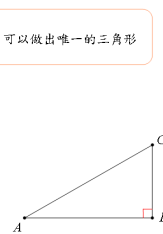


169

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)



可以做出唯一的三角形



170

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

以符號表示為

171

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

以符號表示為 **RHS**  
(直角、斜邊、一股)

172

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

以符號表示為 **RHS**  
(直角、斜邊、一股)

**R** => 直角 (Right angle)  
**H** => 斜邊 (Hypotenuse)  
**S** => 邊 (Side)

173

唯一的三角形 - 直角三角形 (RHS)

條件區

以符號表示為 **RHS**  
(直角、斜邊、一股)

**R** => 直角 (Right angle)  
**H** => 斜邊 (Hypotenuse)  
**S** => 邊 (Side)

**RHS全等性質**：若兩個直角三角形的斜邊和一股分別對應相等，則這兩個直角三角形全等

174

三角形的全等性質 - 目錄

認識三角形	全等三角形	如何做出唯一的三角形
一邊+兩邊 SSS	一邊+兩角 ASA、AAS	一邊+一邊一角 SAS、RHS

全等三角形的判別方法

176

結論

全等三角形的判別方法：有五種

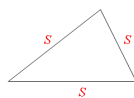
- SSS全等  
3邊
- SAS全等  
2邊夾1角
- ASA全等  
2角夾1邊
- AAS全等  
2角1對邊
- RHS全等  
直角斜邊一股

177

結論

全等三角形的判別方法：有五種

- SSS全等  
3邊
- SAS
- ASA
- AAS
- RHS

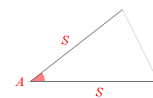


178

結論

全等三角形的判別方法：有五種

- SSS
- SAS全等  
2邊夾1角
- ASA
- AAS
- RHS

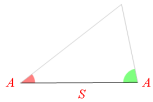


179

**結論**

全等三角形的判別方法：有五種

SSS
3 邊
SAS
2 邊夾 1 角
<b>ASA 全等</b>
<b>2 角夾 1 邊</b>
AAS
2 角 1 對邊
RHS
直角 斜邊 一腰

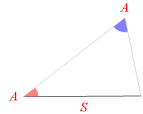


180

**結論**

全等三角形的判別方法：有五種

SSS
3 邊
SAS
2 邊夾 1 角
ASA
2 角夾 1 邊
<b>AAS 全等</b>
<b>2 角 1 對邊</b>
RHS
直角 斜邊 一腰

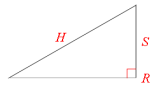


181

**結論**

全等三角形的判別方法：有五種

SSS
3 邊
SAS
2 邊夾 1 角
ASA
2 角夾 1 邊
AAS
2 角 1 對邊
<b>RHS 全等</b>
<b>直角 斜邊 一腰</b>



182

