

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

平面三角形薄殼元素之共旋轉推導法

Co-rotational formulation for the triangular thin
flat shell element

研究生：沈佳鴻

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百零二年九月

平面三角形薄殼元素之共旋轉推導法

Co-rotational formulation for the triangular thin
flat shell element

研究生：沈佳鴻

Student：Jia-Hung Shen

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文



A Thesis
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Mechanical Engineering
September 2013
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年九月

平面三角形薄殼元素之共旋轉推導法

研究生：沈佳鴻

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究主要目的是以共旋轉全拉格朗日推導法(Co-rotational total Lagrangian formulation)、von Karman 板正確的變形機制、一致性二階線性化(Consistent second order linearization)及虛功原理，推導一個具面內旋轉自由度平面三角殼元素，並將其應用在薄殼結構的幾何非線性及挫屈分析。

本文中推導的平面三角殼元素有 3 節點、每個節點有 9 個自由度，元素的節點自由度為節點位移向量的 3 個分量、節點旋轉向量的 3 個分量及節點平面應變的 3 個分量。本研究將元素的三個節點建立在板的中平面上，在三個節點的當前位置建立一個元素座標，並用中平面變形後的位移及法向量描述殼元素的變形。本研究利用極分解定理(Polar decomposition theorem)將殼中平面的變形梯度(Deformation gradient)分解成一個旋轉矩陣(Rotation matrix)和一個伸縮矩陣(Stretch matrix)的乘積，並用一剛接在元素中平面的座標系統的旋轉表示變形梯度中的剛體旋轉。本研究用三個旋轉參數來描述該中平面座標系統的旋轉。

本文採用牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(Arc-length control)法的增量疊代法來解結構的非線性平衡方程式。本研究分析文獻上常見的殼結構基準問題，並與文獻上的線性解、非線性解、挫屈負荷比較。本研究探討元素切線剛度矩陣中一些高次項對結構之非線性行為及挫屈負荷的影響。

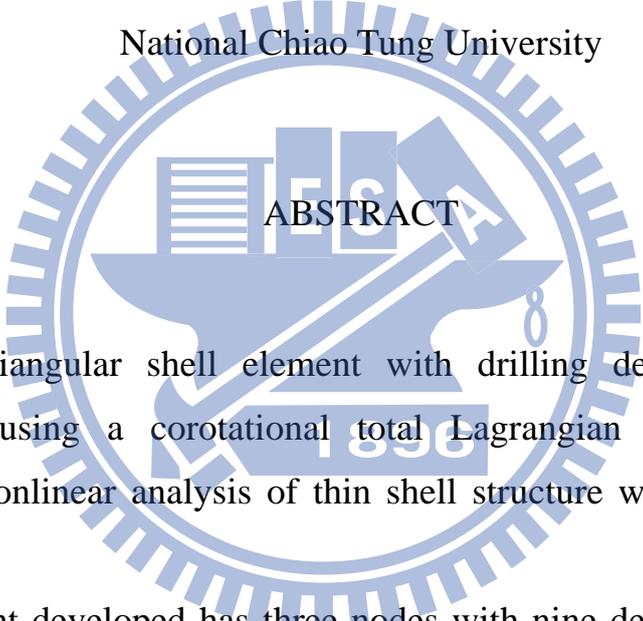
Co-rotational formulation for the triangular thin
flat shell element

Student : Jia-Hung Shen

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized representation of a building or industrial structure, and the year '1896' is visible at the bottom. The word 'ABSTRACT' is overlaid on the logo in a bold, sans-serif font.

ABSTRACT

A facet triangular shell element with drilling degree of freedom is developed by using a corotational total Lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of thin shell structure with large rotation but small strain.

The element developed has three nodes with nine degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the mid-plane of the plate element. The deformations of the shell element are described in a current element coordinate system constructed at the current configuration of the shell element. The element nodal forces are derived using the virtual work principle, the exact kinematics of the von Karman plate, and the consistent second order linearization. The element tangent stiffness matrix may be obtained by differencing the element nodal force with respect to nodal parameters. The deformation of the shell element is determined by the displacements of the mid-plane and the rotations of a mid-plane coordinate system associated with

each point of the mid-plane relative to the current element coordinate system. The origin of the mid-plane coordinates is rigidly tied to mid-plane. Three rotation parameters are defined to describe the rotation of the mid-plane coordinate system. For convenience, two set of nodal parameters are employed to determine the displacement fields of the element. The first set of nodal parameters is chosen to be three nodal displacements, three nodal rotation parameters, and three strains. The second set of nodal parameters is chosen to be three nodal displacement and six nodal values of the first spatial derivative of displacements. To determine the relationship between these two sets of nodal parameters, the deformation gradient at each element node is decomposed into the product of a proper orthogonal matrix and a right stretch matrix by using the polar decomposition theorem, and the rotation matrix corresponding to the rotation of the mid-plane coordinate system relative to the current element coordinate system is regarded as the proper orthogonal matrix. Two sets of nodal parameters are used for the assembly of the structural equations.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. The zero value of the tangent stiffness determinant of the structure is used as the criterion of the buckling state. Benchmark problems for linear and geometric nonlinear analysis of shells given in the literature are studied to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed shell element. The effect of the first order terms of the transformation matrix between the variation of the two sets of nodal parameters on the equilibrium path and buckling load are also investigated.

致謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年碩士班期間的指導與教誨，使本論文得以順利的完成。老師在研究上嚴謹的態度及日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的謝意與敬意。感謝尹慶中老師和鄭文雅老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝黃楚璋學長、許彤羽學姊的照顧，同學林琮棋、莊士緯以及學弟林群禮、高嘉鴻在學業上的砥礪與成長。

感謝父母親、哥哥、弟弟、女友等關心我的朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。

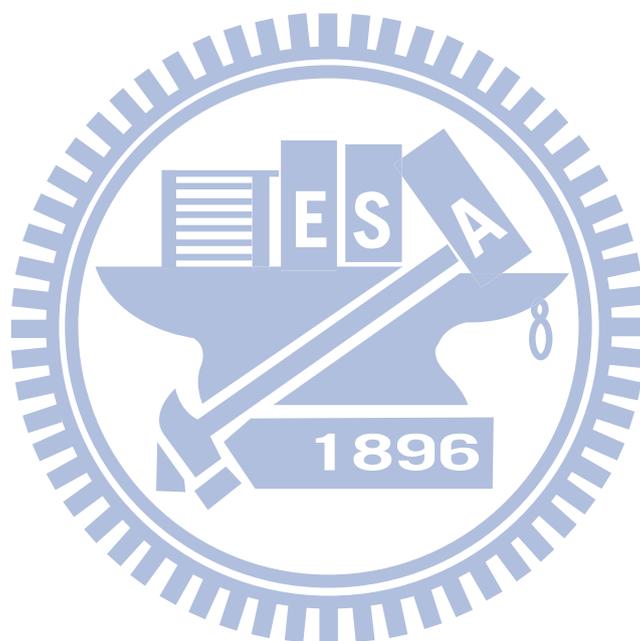


目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
致謝	IV
目錄	V
表目錄	VIII
圖目錄	IX
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	9
2.1 基本假設	9
2.2 座標系統	10
2.3 旋轉向量	11
2.4 殼的變形描述	12
2.5 元素節點參數及節點力向量	18
2.6 元素的應變及其變分	23
2.7 元素節點內力之推導	28
2.8 元素剛度矩陣	30
2.9 殼元素的位移場	31
2.10 座標系統轉換	34
2.11 系統平衡方程式與收斂準則	37
2.12 元素節點變形參數的決定方法	38
第三章 數值計算方法與程序	42
3.1 增量迭代法	42
3.2 弧長控制法	44

3.3 二分法	45
3.4 數值程序	46
第四章 數值分析與結果	49
4.1 半圓環受單點集中力作用	50
4.2 直角構架受到端點剪力作用	51
4.3 圓柱殼片段受到單點集中力作用	51
4.4 槽型斷面梁之側向扭轉挫屈	52
4.5 受壓之簡支承板	54
4.6 T型斷面梁受側向負荷	55
4.7 槽型斷面梁受扭矩	55
4.8 直角梁受到單點集中力作用	56
4.9 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用	57
4.10 半球殼受到單點集中力作用	58
4.11 圓柱殼受一對集中力	59
4.12 圓柱殼受四個徑向集中力作用	60
4.13 開口型半球殼受徑向集中力作用	61
4.14 裂縫環形板受均勻力負荷	62
4.15 聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用	63
第五章 結論與展望	65
5.1 結論	65
5.2 未來研究方向	66
參考文獻	67
附錄 A 元素座標系統的決定	113
附錄 B 切線剛度矩陣 \mathbf{k}	115
附錄 C 面積座標	119

附錄 D	QST 元素的形狀函數及其微分.....	122
附錄 E	DKT 元素的形狀函數.....	123
附錄 F	Projector matrix	127
附錄 G	文獻[19]的實驗說明.....	129



表目錄

表 4.1 圓柱殼片受單點集中力作用的挫屈負荷 (例題 4.3, Mesh 10×10).....	74
表 4.2 槽型斷面梁的挫屈負荷 (例題 4.4).....	74
表 4.3 受壓之簡支承板的挫屈負荷 (例題 4.5).....	75
表 4.4 T 型斷面梁的挫屈負荷 (例題 4.6).....	76
表 4.5 槽型斷面梁的極限點 (例題 4.7).....	77
表 4.6 圓柱殼受四個徑向集中力作用的挫屈負荷 (例題 4.12).....	77
表 4.7 開口型半球殼 B 點位移之線性解 (例題 4.13, P = 1).....	78
表 4.8 開口型半球殼 B 點位移的非線性解 (例題 4.13, P = 400).....	78
表 4.9 聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用的挫屈負荷 (例題 4.15).....	79

圖目錄

圖 1.1	文獻[19]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及 對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g).....	80
圖 2.1	旋轉向量.....	81
圖 2.2	薄殼中 P、Q 點之位移以及元素座標與中平面座標 的關係圖.....	82
圖 2.3	元素節點 j 中心面之 x_{ij}^B 軸受旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用 的示意圖.....	83
圖 2.4	元素節點 j 中心面之 $x_{1j}^{B'}$ 軸受旋轉向量 $\theta_{3j}^E \mathbf{e}_3^E$ 作用 的示意圖.....	84
圖 4.1	半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 18×1 示意圖 (c)網格 18×2 示意圖.....	85
圖 4.2	半圓環受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖.....	86
圖 4.3	直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 M21 與網格 M22 示意圖.....	87
圖 4.4	直角構架受到端點剪力作用之負荷—位移曲線圖.....	88
圖 4.5	圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖.....	89
圖 4.6	圓柱殼片段受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖.....	90
圖 4.7	槽型斷面梁之側向扭轉挫屈(例題 4.4) (a)結構尺寸示意圖 (b)網格(1+2+1)×2 示意圖.....	91
圖 4.8	受壓之簡支承板 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 4×6 示意圖.....	92

圖 4.9 T型斷面梁 (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格(2+2+3)×4 示意圖	93
圖 4.10 槽型斷面梁(例題 4.7) (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格(1+2+1)×2 示意圖	94
圖 4.11 槽型斷面梁之負荷—位移曲線圖(例題 4.7)	95
圖 4.12 直角梁受到單點集中力作用(例題 4.8) (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格(2+3)×2 示意圖	96
圖 4.13 直角梁受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.8)	97
圖 4.14 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用(例題 4.9)	
(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 16×16 示意圖	98
圖 4.15 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.9)	99
圖 4.16 半球殼受到單點集中力作用(例題 4.10) (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格 12×12 示意圖	100
圖 4.17 半球殼受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.10)	101
圖 4.18 圓柱殼受單點集中力作用(例題 4.11) (a)結構尺寸示意圖	
(b)網格 16×24 示意圖	102
圖 4.19 圓柱殼受一對集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.11)	103
圖 4.20 圓柱殼受四個徑向單點集中力作用(例題 4.12)	
(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 8×48 示意圖	104
圖 4.21 圓柱殼受四個徑向單點集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.12)	105

圖 4.22 開口型半球殼受集中力作用(例題 4.13)	
(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 12×12 示意圖	106
圖 4.23 開口型半球殼受集中力作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.13)	107
圖 4.24 裂縫環形板受均勻力負荷作用(例題 4.14)	
(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 6×30 示意圖	108
圖 4.25 裂縫環形板受均勻力負荷作用之負荷—位移曲線圖	
(例題 4.14)	109
圖 4.26 圓柱薄殼(例題 4.15) (a)結構示意圖 (b)俯視圖	
(c)前視圖	110
圖 4.27 圓柱薄殼第一階段 E 點之位移—負荷參數曲線圖	
(例題 4.15)	111
圖 4.28 圓柱薄殼第二階段 E 點之反力—負荷參數曲線圖	
(例題 4.15)	112



第一章 緒論

在近代工程設計的發展上，對材料的要求與結構的表現趨向於高強度與輕量化，舉凡建築結構、航太設備、壓力容器、軍事載體及汽車工業等，設計者要考量以最小成本來達到所需的機能與強度，並且兼顧外型的美觀。由於薄殼在承受彎曲應力與拉伸應力的表現上有良好的表現，又能達到經濟與輕量化的要求，因此薄殼為設計者最常使用的結構之一，而廣泛應用在工程及生活上。常見的薄殼結構包括：建築屋頂、飛機蒙皮、液體儲存槽、人造衛星、火箭、船體結構、水中潛體等。薄殼結構受到外力作用經常會產生大位移和大旋轉，在大位移和大旋轉的問題中，位移和外力往往不是線性關係，因此需要使用非線性分析的方法來探討由幾何形狀改變所造成的非線性行為。

常見的幾何非線性分析的推導方法有三種：全拉格朗日法(total Lagrangian formulation)、更新拉格朗日法(updated Lagrangian formulation)和共旋轉法(Co-rotational formulation)。全拉格朗日法是用初始狀態為參考位置來表示總位移和旋轉；更新拉格朗日法是以結構上一個平衡狀態為參考位置來表示增量位移和旋轉；共旋轉法是利用建立在元素當前變形位置的元素座標將剛體位移及旋轉從總位移及旋轉中扣除，剩下的位移和旋轉即為小位移和小旋轉，因此若使用共旋轉法，原本在線性分析的元素也可以

應用在大位移、小應變的幾何非線性分析，共旋轉法在梁與殼結構的幾何非線性分析已經被廣泛的使用[1-10]。

分析殼結構最常用的方法為有限元素法。殼元素大致分為三類：平面殼元素、曲面殼元素和等參數元素。常見的平面殼元素是由一個平面板元素和一個平面元素疊加而成，此種元素的推導方式簡單，而且在數值計算上比曲面殼元素更有效率[11]，已分別應用在殼結構的線性[12-15]和幾何非線性分析[4-11,16]。平面殼元素最常使用的形狀為三角形或四邊形，對任何不規則形狀的殼結構，我們都可以輕易地將其切割成有限的三角形組合，但不一定適合將其切割成四邊形的組合，故三角形元素在文獻上被廣泛的探討及使用。

CST(Constant strain triangle)元素和 LST(Linear strain triangle)元素都是最簡單的平面元素，在薄殼分析上常常使用它們與合適的板元素疊加，因為這種平面三角殼元素缺少旋轉自由度(Drilling degree of freedom)，所以其元素剛度的面內旋轉剛度(In-plane rotational stiffness)為零，為了避免系統剛度矩陣因奇異性(Singularity)造成分析的困難，常見的解決方法有兩種：(1) 加上一個人工的面內旋轉自由度[17-20]。(2) 採用具有旋轉自由度的平面元素[8,9,17,21-23]。文獻[23]提到三角平面元素加入旋轉自由度的優點為：改善三角平面元素的性能並避免使用到三角形邊上的節點，因為邊上的節點會影響到網格生成，而且在模擬非線性分析與動態分析時較為困難；當

三角平面元素與三角板元素疊加時，能滿足物理上一個節點有 3 個旋轉自由度的要求；三角形元素與殼元素、板元素或是梁元素同時使用時，能使接合簡單化。1964 至 1983 年期間，許多人在研究如何在 3 節點的三角形平面元素上加入節點旋轉自由度，希望能得到一個 3 節點 9 個自由度且具節點旋轉自由度的三角形平面元素，但是都沒有得出可用的元素。1984 年文獻[21]Allman 提出第一個成功帶有旋轉自由度、3 個節點 9 個自由度的三角形平面元素。2002 年文獻[22]提出 DLST 元素是一個具有 12 個自由度，三角形頂點自由度為 2 個位移、1 個旋轉並且邊上中點自由度為 1 個位移。2003 年文獻[23]提出的 OPT 元素具有 3 個節點，每個節點 2 個位移、1 個旋轉的自由度。2008 年文獻[17]成功的將一個具有旋轉自由度的 QST 元素[23]應用在平面應變問題的共旋轉法幾何非線性分析上，該元素具有 3 個節點、18 個自由度，每個節點有 2 個位移、1 個旋轉及 3 個應變自由度。

從 1960 年起有許多的三角形板元素被提出[24-28]，其中具有 3 個節點，每個節點有 1 個位移、兩個旋轉自由度，總共 9 個自由度之三角形板元素的研究發展最為迅速。文獻[18]中比較 DKT、HSM、BCIZ、HCT 等 9 個自由度三角形板元素的線性分析和振動分析後，認為 DKT 元素是這些三角形板元素中最有效率的元素，在靜態和模態分析中均可以收斂到準確的答案。文獻[23]中指出 DKT 元素內部不能滿足 $\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$ 的連續條件且沒有

定義側向位移場 w ，因為計算板元素之質量矩陣及幾何剛度矩陣需要該元素的側向位移場 w ，所以 DKT 元素的質量矩陣和幾何剛度矩陣皆使用其他元素的側向位移場來推導。1968 年文獻[20]把位移假設為完整五次多項式的元素稱為 TUBA 6，除了在三頂點有 1 個側向位移 w_i 、2 個側向位移一次微分 $w_{,xi}$ 、 $w_{,yi}$ ，3 個側向位移兩次微分 $w_{,xxi}$ 、 $w_{,xyi}$ 、 $w_{,yyi}$ 之外，還有 3 個邊上中點側向位移對邊上法線方向微分 $w_{,nk}$ ，共計 6 個節點、21 個自由度。1969 年文獻[29]中也假設側向位移是五次多項式，並且利用邊上的側向位移對邊上法線方向微分 $w_{,n}$ 是三次變化三個限制條件將三個邊上的自由度 $w_{,n4}$ 、 $w_{,n5}$ 、 $w_{,n6}$ 去掉，因此 6 個節點減為 3 個節點、21 個自由度減為 18 個自由度，文獻[9]將此元素稱為 RQT 元素。

1981 年文獻[1]中將 CST 平面元素與 DKT 三角板元素疊加成一平面三角殼元素，並使用更新拉格朗日法將該元素用在具大位移及大旋轉的薄殼結構分析，但更新拉格朗日法的增量旋轉必須是小角度，因此 1987 年文獻[4]使用相同的殼元素，搭配共旋轉法解決增量旋轉大小限制的問題。2006 年文獻[6]採用文獻[4]的殼元素和共旋轉法，以數值例題探討殼結構受到各種位移負荷之非線性分析。

一個好的殼元素應能分析大位移問題和偵測平衡路徑上的分歧點 (Bifurcation point) 及極限點。為了要檢測元素的優劣性，文獻上通常藉由基準問題 (Benchmark problem) 來試驗推導出來的元素模型是否精準或收斂方

法是否有效率。文獻[30]整理出殼在幾何非線性分析中常見的基準問題，文獻[7-9,16,31-34]模擬殼在挫屈分析中常見的基準問題，但更好的基準問題是要兼具實驗數據和數值模擬的比較[19]。

文獻[19]以實驗和數值方法[35]探討一聚酯圓柱薄殼受位移負荷作用後的非線性行為，模擬一矩形薄板在長邊以夾鉗挾持，夾鉗先將薄板彎成一圓柱狀，再施加一集中位移負荷於結構中心的情況，採用兩階段的位移負荷分析。在其實驗中隨著位移負荷的增加，結構連續產生四個特殊的幾何變形，如圖1.1所示。第一個變形是在薄殼中心附近出現兩個對稱X、Y軸的d-cone (developable cone) (圖1.1a)。第二個變形中出現兩個新的d-cone，而四個d-cone圍成一個對薄殼中心轉了一個角度的菱形(圖1.1b)。第三個變形為四個d-cone的連線形成一個梯型(圖1.1c)。第四個變形為梯形底邊兩個d-cone移到薄殼自由端的邊界時，產生一個不連續的變化，使薄殼變成波浪狀的圓柱殼(圖1.1d)。文獻[35]所使用的數值方法為有限元素法，其元素為三角形殼元素，考慮的薄膜應變為不完整非線性項，並且假設位移場是完整五次多項式，多項式的21個係數由節點上的函數值、函數的一次微分、函數二次微分以及函數對邊上中點之法線方向微分計算而得，計算von Karman板殼理論推導出來的能量式，利用找出該能量的最小值求得薄殼結構的變形。雖然在薄殼變成波浪狀前，數值模擬和實驗得出的受力-位移曲線相當接近，但數值模擬無法得出第二個和第三個變形。文獻[7]採用文獻

[6]的數值方法及元素模擬文獻[19]的實驗，並討論位移負載偏移、結構的不完美對結構變形的影響，雖然與文獻[19]的挫屈例題之數值做比較，其數值的結果很相近，但無法觀察到實驗中出現的現象。文獻[8]採用QST平面元素和DKT板元素疊加成一三角平面殼元素，並探討採用不同位移場推導得的幾何剛度矩陣對平衡迭代及挫屈負荷的影響，與文獻[19]所偵測的平衡路徑和挫屈負荷相近，但無法觀察到實驗中d-cone旋轉的現象。文獻[9]採用QST元素和RQT板元素疊加成一三角平面殼元素，此殼元素與文獻[8]相比的優點:擁有更高的精確度、元素內部滿足 $\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$ 的連續條件及具有定義的側向位移場可以推導幾何剛度矩陣。數值模擬的結果與大部分具挫屈分析例題相近，但無法觀察到實驗中d-cone旋轉的現象。

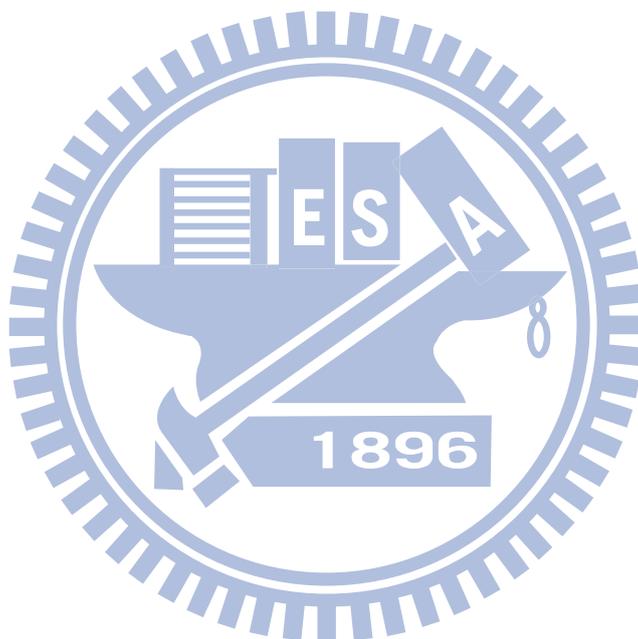
本人猜測文獻[7-9]無法模擬出d-cone旋轉現象的原因在於其推導出的切線剛度矩陣並不完整和沒有考慮到無限小旋轉矩陣(Infinitesimal rotation matrix)的影響，故本篇研究將引用非線性的殼理論來描述殼的變形過程，將變形之間的耦合項考慮更加完善，試圖模擬出實驗中[19]d-cone旋轉的現象。廣為人知的殼理論推導可分兩種：第一種是將殼結構視為三維物體[36-39]，並設參考表面，通常取中平面，再對厚度方向積分。第二種是將殼結構視為 Cosserat surface[40]，在此表面上的任一向量皆可變形，且保有在剛體運動下，向量長度不變的性質。

本研究將三角殼元素的三個節點建立在板的中平面上，在三個節點當前的位置建立一個元素座標，並在當前的元素座標上用板中平面的位移及中平面變形後的法向量描述殼元素的變形。本研究利用極分解定理(Polar decomposition theorem)[41]將殼中平面的變形梯度(Deformation gradient)分解成一個旋轉矩陣(Rotation matrix)，和一伸縮矩陣(Stretch matrix)的乘積，並用一剛接在元素中平面的座標系統的旋轉表示位移梯度中的剛體旋轉。本研究用三個旋轉參數來描述該中平面座標系統的旋轉。

本研究採用 von Karman 板理論為基本假設[42,43]，即第一種殼理論推導，取中平面為參考平面對厚度方向積分的三維物體概念。位移場採用文獻[23,28]的元素位移場，推導出一個 3 節點、每個節點有 9 個自由度的平面三角殼元素，元素的節點自由度為節點位移向量的 3 個分量、節點旋轉向量的 3 個分量及節點平面應變的 3 個分量。廣義來說，應變也為物理上的自由度，且在文獻[9]的數值比較下，大部分的例題也有很好的結果。據本人所知，文獻上尚未有其他人用此方式來描述殼的非線性變形，故本研究將採用此方式推導一平面三角形殼元素，並使用共旋轉法將該元素用在具大位移及大旋轉的薄殼結構分析中，希望能夠有效地改善殼結構幾何非線性分析中平衡迭代的收斂速度，並精確偵測平衡路徑上的分歧點及挫屈模態。

本文在第二章介紹本研究所使用的平面三角殼元素的變形機制以及推

導元素節點內力及剛度矩陣。在第三章說明本研究的數值計算方法和分析時的數值程序。在第四章中以非線性例題測試本研究所使用的平面三角殼元素的性能，以及說明本文提出決定元素節點變形參數的方法是可行的。



第二章 理論推導

本章將採用共旋轉全拉格蘭日推導法(Co-rotational total Lagrange formulation)、von Karman 板理論[42,43]、虛功原理、一致性二階線性化(Consistent second order linearization)推導出一個 3 節點、每個節點有 9 個自由度的平面三角殼元素，元素的節點自由度為節點位移向量的 3 個分量、節點旋轉向量的 3 個分量及節點平面應變的 3 個分量。在本章將說明座標系統、殼元素變形之基本假設、變形描述、應變、元素節點內力及剛度矩陣的推導。

2.1 基本假設

本文中對非線性平面三角殼元素的推導，做以下假設：

- (1) 板為均勻厚度的薄板。
- (2) 在元素變形前，垂直於元素中平面的線段，在元素變形後，依然保持直線、垂直於變形後之中平面且沒有伸長或縮短。
- (3) 元素的變形位移及旋轉為小位移及小旋轉。
- (4) 元素的應變為小應變且僅考慮面內的應變。

假設(2)為 von Karman 板的變形假設。因採用共旋轉推導法，只要元素夠小，假設(3)一定可以滿足。

2.2 座標系統

為了描述系統的運動及元素的變形，本文定義了四組座標系統：

(a) 固定總體座標系統(Global coordinate system)： $X_i^G (i=1,2,3)$

結構體所有節點的座標、位移、旋轉、系統的邊界條件與其他座標系統的基底，以及結構的平衡方程式，均在此座標系統中定義。

(b) 元素座標系統(Element coordinate system)： $x_i^E (i=1,2,3)$

此座標系統是建立在每一個元素變形後的最新位置上，先將座標原點定在元素節點 1， x_1^E 軸為元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線， x_2^E 軸是在元素平面上垂直於 x_1^E 軸，且朝著元素節點 3 的方向， x_3^E 軸則是由 x_1^E 軸與 x_2^E 軸外積而得，再將座標原點移至元素三個節點決定之三角形的形心並旋轉 θ 角使得當前變形位置的元素與初始未變形時的元素在形心處無旋轉作用，詳細說明在附錄 A。元素的位移、元素變形、元素節點內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由座標轉換，將其轉換至總體座標系統及基礎座標系統。

(c) 元素中平面座標系統： $x_i^S (i=1,2,3)$

此座標系統的原點是剛接在元素的中平面上，與中平面一起平移及旋轉，在變形前，其座標軸的方向與元素座標的座標軸的方向一致，在變形後，其 x_3^S 軸的方向與變形後之中平面法線方向一致。本文中將該座標系統對元素座標系統的旋轉視為中平面運動之變形梯度(Deformation

gradient)中剛體旋轉的部份。

(d) 節點基礎座標系統(Base coordinate system)： $x_{ij}^B (i, j = 1, 2, 3)$

此座標系統的原點是剛接在結構離散後的每一個節點，並與對應的節點一起移動及旋轉， j 為節點在元素中的編號。本文中節點 j 在其初始位置之 x_{3j}^B 軸的方向為曲面在該節點的法線方向， x_{1j}^B 軸、 x_{2j}^B 軸的方向為曲面在該節點互相垂直的切線方向，節點的應變自由度是在此座標系統中定義。本文中 ${}^0x_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在初始未變形時的節點基礎座標， ${}^Ix_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在第 I 個增量迭代收斂後的節點基礎座標， x_{ij}^B 表示元素節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標。

2.3 旋轉向量

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖 2.1 所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{a}$ 的作用而轉到一個新位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b} 與 \mathbf{b}' 之間的關係可表示成[45]：

$$\mathbf{b}' = \cos \phi \mathbf{b} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \sin \phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.1)$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ϕ 表繞單位向量為 \mathbf{a} 之轉軸的旋轉角。

當旋轉向量 $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3\}$ ， $\phi_i (i = 1, 2, 3)$ 為 $\boldsymbol{\phi}$ 在某一直角座標的分量，有一微小變量 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 時， \mathbf{b}' 會繞該座標的座標軸做微小的旋轉 $\delta\phi_i (i = 1, 2, 3)$ 。當 $\boldsymbol{\phi}$ 很小時 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\phi_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\phi_3\}$ 之關係可表示成[46]：

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} \delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.2)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\phi_3}{2} & \frac{\phi_2}{2} \\ \frac{\phi_3}{2} & 1 & \frac{-\phi_1}{2} \\ \frac{-\phi_2}{2} & \frac{\phi_1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.4 殼的變形描述

本文在當前的元素座標上描述殼元素的變形，由 2.1 節的基本假設(2)可知 von Karman 板的變形可由其中平面的位移來描述。

如圖 2.2 中， Q 點為殼中的任意點， P 點為 Q 點在同一斷面之中平面上的對應點。在元素座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = \{x \ y \ z\} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r} = \{r_1 \ r_2 \ r_3\} = \mathbf{r}_p + z\mathbf{n} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r}_p = \{x_1 \ x_2 \ x_3\} = \{x+u(x,y) \ y+v(x,y) \ w(x,y)\} \quad (2.6)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i^E ($i=1,2,3$) 上的座標， x 、 y 同時也是 P 點變形前的 x_1^E 、 x_2^E 軸的座標。 \mathbf{r} 、 \mathbf{r}_p 分別是變形後 Q 點、 P 點在元素座標 x_i^E 上的位置向量， x_1 、 x_2 以及 x_3 為 P 點在元素座標 x_i^E 的座標值， $u(x,y)$ 、 $v(x,y)$ 以及 $w(x,y)$ 為 P 點在 x_1^E 、 x_2^E 及 x_3^E 軸方向的位移， \mathbf{n} 是變形後中平面在 P 點的向外單位法線向量，可表示為：

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{\theta_2}{\sqrt{1+\theta_1^2+\theta_2^2}} \quad \frac{-\theta_1}{\sqrt{1+\theta_1^2+\theta_2^2}} \quad \cos\theta_n \right\} \quad (2.7)$$

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (2.9)$$

$$\cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}} \quad (2.10)$$

本文中將 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標(Lagrange coordinates)。由(2.6)式可得：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u_{,x} & v_{,x} \\ u_{,y} & 1+v_{,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

由(2.4)式，殼中任意點的變形梯度(deformation gradient) \mathbf{F} [41]可表示如下：

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial y} & \frac{\partial r_1}{\partial z} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial y} & \frac{\partial r_2}{\partial z} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} & \frac{\partial r_3}{\partial y} & \frac{\partial r_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

由(2.11)式和極分解定理(Polar decomposition theorem) [41]可得：

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & 1 + \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 1 + \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

其中 \mathbf{R} 為一旋轉矩陣(Rotation matrix)， \mathbf{U} 為一伸縮矩陣(Stretch matrix)，

ε_i 、 ε_{ij} ($i = x, y, z, j = x, y, z$) 為在任意點(x, y, z)的工程應變。由基本假設(3)

可知 $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ 。旋轉矩陣 \mathbf{R} 可將在該點的微小體積做一剛

體旋轉，該旋轉可使在矩陣 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$ 之主軸方向的向量轉到矩陣

$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^t \mathbf{F}^{-1}$ 之主軸方向[41]。

令 \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S 分別為元素座標軸 x_i^E 與剛接在 P 點之中平面座標軸 x_i^S ($i=1,2,3$) 的單位向量。由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_3^S 與(2.7)式的 \mathbf{n} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S 是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定：

$$\boldsymbol{\theta}_3 = \theta_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{e}_n \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_n = \left\{ \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}}, \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}}, 0 \right\} \quad (2.17)$$

其中 θ_3 為中平面繞 \mathbf{e}_3 旋轉的角度， θ_n 為 \mathbf{e}_3 和 \mathbf{n} 的夾角， \mathbf{e}_n 為垂直於 \mathbf{e}_3 與 \mathbf{n} 之單位向量。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_3$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，將其轉至一中繼位置 \mathbf{e}_i' ，再將 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i' 上，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_3$ 以及 $\boldsymbol{\theta}_n$ 已知，則中平面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_3$ 與 $\boldsymbol{\theta}_n$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下：

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{n}] \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_{SE} \mathbf{e}_i \quad (2.18)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_3 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_3 \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R}_2 = -\sin \theta_3 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_3 \mathbf{r}_2 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{r}_1 = \{ \cos \theta_n + n_1^2 (1 - \cos \theta_n) \quad n_1 n_2 (1 - \cos \theta_n) \quad -n_2 \sin \theta_n \}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{n_1 n_2 (1 - \cos \theta_n) \quad \cos \theta_n + n_2^2 (1 - \cos \theta_n) \quad n_1 \sin \theta_n\}$$

$$\sin \theta_n = \sqrt{\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}}$$

其中 \mathbf{R}_{SE} 為一旋轉矩陣。因 \mathbf{R}_{SE} 為 $\theta_i (i=1,2,3)$ 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。將 \mathbf{R}_{SE} 保留到 $\theta_i (i=1,2,3)$ 的二次項之近似式可表示如下：

$$\mathbf{R}_{SE} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 & -\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 & \theta_2 \\ \theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 & 1 - \frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 & -\theta_1 \\ -\theta_2 + \theta_1\theta_3 & \theta_1 + \theta_2\theta_3 & 1 - \frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

當旋轉參數 $\theta_i (i=1,2,3)$ 分別有一微小變化 $\delta\theta_i$ 時，中平面座標的單位向量 \mathbf{e}_i^S 會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由 \mathbf{e}_i^S 繞元素座標軸 $x_i^E (i=1,2,3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta\varphi_i (i=1,2,3)$ 而得。

$\delta\theta = \{\delta\theta_1 \quad \delta\theta_2 \quad \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\varphi = \{\delta\varphi_1 \quad \delta\varphi_2 \quad \delta\varphi_3\}$ 之關係可表示成：

$$\delta\theta = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \delta\varphi \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 + \theta_1^2 & \theta_1\theta_2 & -\theta_2 \\ \theta_1\theta_2 & 1 + \theta_2^2 & \theta_1 \\ a\theta_2 & -a\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$a = \frac{-1 + \sqrt{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}}{\theta_1^2 + \theta_2^2}$$

將 $\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi}$ 保留到 $\theta_i (i=1,2,3)$ 的一次項之近似式可表示如下：

$$\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_2 \\ 0 & 1 & \theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & -\frac{1}{2}\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

由(2.21)式可知當 θ_i ($i=1,2,3$) 不為零時， $\delta\theta_i$ 並非繞 x_i^E ($i=1,2,3$) 軸的微小旋轉。因(2.18)式之 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 隨 P 點一起剛體運動，所以(2.20)式之旋轉矩陣 \mathbf{R}_{SE} 與(2.13)式中 P 點的旋轉矩陣 \mathbf{R} 應為同一旋轉矩陣。在本文以後的內容中，除另有說明外，(2.13)式之 \mathbf{R} 都是指在中平面上的旋轉矩陣 $\mathbf{R}(x, y, 0)$ 。將(2.5)式代入(2.12)式，可得變形梯度 \mathbf{F} ，再將 $z=0$ 代入 \mathbf{F} ，可得在中平面之變形梯度 $\mathbf{F}(x, y, 0)$ 。將 $\mathbf{F}(x, y, 0)$ 之變形參數保留到二次項，可得：

$$\mathbf{F}(x, y, 0) = \begin{bmatrix} 1+u_{,x} & u_{,y} & \theta_2 \\ v_{,x} & 1+v_{,y} & -\theta_1 \\ w_{,x} & w_{,y} & \cos\theta_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

將(2.24)式、(2.20)式和(2.14)式代入(2.13)式，並將變形參數保留到二次項可得：

$$u_{,x} = \varepsilon_x - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 - \varepsilon_{xy}\theta_3 \quad (2.25)$$

$$u_{,y} = \varepsilon_{xy} - (1 + \varepsilon_y)\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 \quad (2.26)$$

$$v_{,x} = (1 + \varepsilon_x)\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 + \varepsilon_{yx} \quad (2.27)$$

$$v_{,y} = \varepsilon_{xy}\theta_3 + \varepsilon_y - \frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 \quad (2.28)$$

$$w_{,x} = -(1 + \varepsilon_x)\theta_2 + (\theta_3 + \varepsilon_{yx})\theta_1 \quad (2.29)$$

$$w_{,y} = (\theta_3 - \varepsilon_{xy})\theta_2 + (1 + \varepsilon_y)\theta_1 \quad (2.30)$$

(2.25)式—(2.30)式為中平面之位移梯度(Displacement gradient)與旋轉參數 θ_i ($i=1,2,3$)、中平面之工程應變 ε_x 、 ε_y 、 $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx}$ 間二次的非線性耦合關係。本文中將位移梯度 $u_{,\alpha}$ 、 $v_{,\alpha}$ 、 $w_{,\alpha}$ ($\alpha = x, y$) 及旋轉參數 θ_i

($i=1,2,3$)、中平面之工程應變 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 視為兩組獨立的變形參數。本研究用 θ_i ($i=1,2,3$)， ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 在元素節點的值及(2.25)式—(2.30)式決定 $u_{,\alpha}$ 、 $v_{,\alpha}$ 、 $w_{,\alpha}$ ($\alpha=x,y$) 在元素節點的值，再用 $u_{,\alpha}$ 、 $v_{,\alpha}$ 、 $w_{,\alpha}$ ($\alpha=x,y$) 在元素節點的值及元素節點的節點位移決定元素的位移場。

將(2.25)式至(2.28)式的變形參數保留到一次項可得 $u_{,x} = \varepsilon_x$ 、 $u_{,y} = \varepsilon_{xy} - \theta_3$ 、 $v_{,x} = \theta_3 + \varepsilon_{yx}$ 和 $v_{,y} = \varepsilon_y$ ，該結果與線性分析的定義一致。

將(2.25)式—(2.28)式代入(2.29)式和(2.30)式，並將變形參數保留到二次項可得：

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-v_{,y}) & u_{,y} \\ v_{,x} & (1-u_{,x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,y} \\ -w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

(2.31)式與(2.11)式之二次近似式的結果是一致的。

將(2.31)式代入(2.5)式，並保留變形參數 $u_{,\alpha}$ 、 $v_{,\alpha}$ 、 $w_{,\alpha}$ ($\alpha=x,y$) 到二次項，可得變形後 Q 點在元素座標 x_i^E 上的位置向量之二次近似式為：

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x + u(x, y) \\ y + v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} (1-u_{,x})\theta_y + v_{,x}\theta_x \\ -(1-v_{,y})\theta_x - u_{,y}\theta_y \\ 1 - \frac{1}{2}\theta_x^2 - \frac{1}{2}\theta_y^2 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\theta_y = -w_{,x} \quad (2.33)$$

$$\theta_x = w_{,y}$$

為了要推導出假設的節點參數之關係，故將(2.25)式至(2.30)式兩邊做變分可得：

$$\delta u_{,x} = \delta \varepsilon_x - \theta_2 \delta \theta_2 - (\varepsilon_{xy} + \theta_3) \delta \theta_3 - \theta_3 \delta \varepsilon_{xy} \quad (2.34)$$

$$\delta u_{,y} = \delta \varepsilon_{xy} - (1 + \varepsilon_y) \delta \theta_3 - \theta_3 \delta \varepsilon_y + \frac{1}{2} \theta_1 \delta \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2 \delta \theta_1 \quad (2.35)$$

$$\delta v_{,x} = (1 + \varepsilon_x) \delta \theta_3 + \theta_3 \delta \varepsilon_x + \frac{1}{2} \theta_1 \delta \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2 \delta \theta_1 + \delta \varepsilon_{yx} \quad (2.36)$$

$$\delta v_{,y} = (\varepsilon_{xy} - \theta_3) \delta \theta_3 + \delta \varepsilon_y - \theta_1 \delta \theta_1 + \theta_3 \delta \varepsilon_{xy} \quad (2.37)$$

$$\delta w_{,x} = -(1 + \varepsilon_x) \delta \theta_2 - \theta_2 \delta \varepsilon_x + (\theta_3 + \varepsilon_{yx}) \delta \theta_1 + \theta_1 \delta \theta_3 + \theta_1 \delta \varepsilon_{yx} \quad (2.38)$$

$$\delta w_{,y} = (\theta_3 - \varepsilon_{xy}) \delta \theta_2 + \theta_2 \delta \theta_3 - \theta_2 \delta \varepsilon_{xy} + (1 + \varepsilon_y) \delta \theta_1 + \theta_1 \delta \varepsilon_y \quad (2.39)$$

2.5 元素節點參數及節點力向量

本文推導的平面三角殼元素有 3 個位於中平面的節點，每個節點有 9 個自由度，為了簡潔，本文用 $\{\}_{j}$ 、 $[\]_j$ 表示 $\{\}$ 、 $[\]$ 中的每個元素都帶有下列標 j 。為了在推導上的需要，本文採用四類的元素節點參數向量，並分別表示如下：

$$\mathbf{q}_x = \{\mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2} \quad \mathbf{q}_{x3}\} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{q}_\theta = \{\mathbf{q}_{\theta1} \quad \mathbf{q}_{\theta2} \quad \mathbf{q}_{\theta3}\} \quad (2.41)$$

$$\delta \mathbf{q}_\varphi = \{\delta \mathbf{q}_{\varphi1} \quad \delta \mathbf{q}_{\varphi2} \quad \delta \mathbf{q}_{\varphi3}\} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{q}_\varphi = \{\mathbf{q}_{\varphi1} \quad \mathbf{q}_{\varphi2} \quad \mathbf{q}_{\varphi3}\} \quad (2.43)$$

其中

$$\mathbf{q}_{xj} = \{\mathbf{u} \quad \mathbf{u}' \quad \mathbf{v}' \quad \mathbf{w}'\}_j \quad (2.44)$$

$$\mathbf{q}_{\theta j} = \{\mathbf{u} \quad \boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{\varepsilon}\}_j \quad (2.45)$$

$$\delta \mathbf{q}_{\theta j} = \{\delta \mathbf{u} \quad \delta \boldsymbol{\phi} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_j \quad (2.46)$$

$$\mathbf{q}_{\theta j} = \{\mathbf{u} \quad \boldsymbol{\phi} \quad \boldsymbol{\varepsilon}\}_j \quad (2.47)$$

j ($j=1,2,3$) 表示元素局部節點 j ， $\mathbf{u}_j = \{u \quad v \quad w\}_j$ ， u_j 、 v_j 以及 w_j 為元素節點位移向量 \mathbf{u}_j 在 x_1^E 、 x_2^E 及 x_3^E 軸方向的位移分量， $\mathbf{u}'_j = \{u_{,x} \quad u_{,y}\}_j$ ， $\mathbf{v}'_j = \{v_{,x} \quad v_{,y}\}_j$ ， $\mathbf{w}'_j = \{w_{,x} \quad w_{,y}\}_j$ ， $u_{,\alpha j} = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_j$ 、 $v_{,\alpha j} = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_j$ 以及 $w_{,\alpha j} = \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)_j$ ($\alpha = x, y$)， $\boldsymbol{\theta}_j = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3\}_j$ ， θ_{ij} 為作用在節點 j 的旋轉參數 θ_i ($i=1,2,3$) ((2.8)、(2.9)、(2.15) 式)， $\boldsymbol{\varepsilon}_j = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}_j$ ， ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 為中平面之工程應變((2.14) 式)的節點值， $\delta \boldsymbol{\phi}_j = \{\delta \phi_1 \quad \delta \phi_2 \quad \delta \phi_3\}_j$ ， $\delta \phi_{ij}$ 為作用在節點 j 的無限小旋轉參數， $\boldsymbol{\phi}_j = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}_j$ ， ϕ_{ij} 為作用在節點 j 的旋轉向量((2.2) 式) $\boldsymbol{\phi}_j$ 在 x_1^E 、 x_2^E 及 x_3^E 軸方向的分量。本文中將作用在節點 j 的旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j$ 在當前的變形位置重新設定為零，本文在平衡迭代的過程中，用節點旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j$ 的增量或擾動量作用在對應的節點基礎座標系統，決定該座標系統變形後的方位。

本研究用在元素節點 j ($j=1,2,3$) 的節點基礎座標系統當前的方位及當前的元素座標決定 \mathbf{q}_θ ，然後用 \mathbf{q}_θ 決定 \mathbf{q}_x ，再用 \mathbf{q}_x 決定元素中平面之位移場 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 以及 $w(x, y)$ 。

由(2.34)式—(2.39)式可得擾動節點參數向量 $\delta \mathbf{q}_{xj}$ 與 $\delta \mathbf{q}_{\theta j}$ 有如下的關係：

$$\delta \mathbf{q}_{xj} = \mathbf{T}_{x\theta j} \delta \mathbf{q}_{\theta j} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{T}_{x\theta j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta_2 & -(\varepsilon_{xy} + \theta_3) & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & -(1 + \varepsilon_y) & 0 & -\theta_3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & (1 + \varepsilon_x) & \theta_3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & (\varepsilon_{xy} - \theta_3) & 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta_3 + \varepsilon_{yx}) & -(1 + \varepsilon_x) & \theta_1 & -\theta_2 & 0 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \varepsilon_y) & (\theta_3 - \varepsilon_{xy}) & \theta_2 & 0 & \theta_1 & -\frac{1}{2}\theta_2 \end{bmatrix}_j \quad (2.49)$$

由(2.21)式可得擾動節點參數向量 $\delta\mathbf{q}_{\theta j}$ 與 $\delta\mathbf{q}_{\varphi j}$ 有如下的關係：

$$\delta\mathbf{q}_{\theta j} = \mathbf{T}_{\theta\varphi j} \delta\mathbf{q}_{\varphi j} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\varphi j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\theta_2 & -\frac{1}{2}\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad (2.51)$$

由(2.2)式可得擾動節點參數向量 $\delta\mathbf{q}_{\theta j}$ 與 $\delta\mathbf{q}_{\varphi j}$ 有如下的關係：

$$\delta\mathbf{q}_{\varphi j} = \mathbf{T}_{\varphi\theta j} \delta\mathbf{q}_{\theta j} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{T}_{\phi\theta j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\phi_3 & \frac{1}{2}\phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\phi_3 & 1 & -\frac{1}{2}\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\phi_2 & \frac{1}{2}\phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad (2.53)$$

由(2.48)式—(2.53)式可得 $\delta\mathbf{q}_x$ 、 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 、 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 間的轉換關係如下

$$\delta\mathbf{q}_x = \mathbf{T}_{x\theta}\delta\mathbf{q}_\theta \quad (2.54)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi}\delta\mathbf{q}_\phi \quad (2.55)$$

$$\delta\mathbf{q}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\phi}\delta\mathbf{q}_\phi \quad (2.56)$$

$$\mathbf{T}_{x\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{x\theta 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{x\theta 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{x\theta 3} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\theta\phi 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\theta\phi 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\theta\phi 3} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{T}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\phi\phi 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\phi\phi 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\phi\phi 3} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

對應於擾動節點參數向量 $\delta\mathbf{q}_{xj}$ 、 $\delta\mathbf{q}_{\theta j}$ 、 $\delta\mathbf{q}_{\phi j}$ 、 $\delta\mathbf{q}_{\phi j}$ 的廣義節點力向量分別為：

$$\mathbf{f}_{xj} = \{\mathbf{f} \quad \mathbf{m}_{u'} \quad \mathbf{m}_{v'} \quad \mathbf{m}_{w'}\}_j \quad (2.60)$$

$$\mathbf{f}_{\theta j} = \{\mathbf{f} \quad \mathbf{m}_\theta \quad \mathbf{m}_\varepsilon\}_j \quad (2.61)$$

$$\mathbf{f}_{\phi j} = \{\mathbf{f} \quad \mathbf{m}_{\phi} \quad \mathbf{m}_{\varepsilon}\}_j \quad (2.62)$$

$$\mathbf{f}_{\phi j} = \{\mathbf{f} \quad \mathbf{m}_{\phi} \quad \mathbf{m}_{\varepsilon}\}_j \quad (2.63)$$

其中

$$\mathbf{f}_j = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3\}_j \quad (2.64)$$

$$\mathbf{m}_{u'j} = \{m_{ux} \quad m_{uy}\}_j, \quad \mathbf{m}_{v'j} = \{m_{vx} \quad m_{vy}\}_j, \quad \mathbf{m}_{w'j} = \{m_{wx} \quad m_{wy}\}_j$$

$$\mathbf{m}_{\theta j} = \{m_{\theta 1} \quad m_{\theta 2} \quad m_{\theta 3}\}_j$$

$$\mathbf{m}_{\phi j} = \{m_{\phi 1} \quad m_{\phi 2} \quad m_{\phi 3}\}_j$$

$$\mathbf{m}_{\phi j} = \{m_{\phi 1} \quad m_{\phi 2} \quad m_{\phi 3}\}_j$$

$$\mathbf{m}_{\varepsilon j} = \{m_{\varepsilon x} \quad m_{\varepsilon y} \quad m_{\varepsilon \gamma}\}_j$$

對應於 δu_j 、 δv_j 以及 δw_j 的廣義節點力為在 x_i^E ($i=1,2,3$) 軸方向的力 f_{ij} ；對應於 $\delta u_{\alpha j}$ 、 $\delta v_{\alpha j}$ 、 $\delta w_{\alpha j}$ ($\alpha=x,y, j=1,2,3$) 的廣義節點力分別為廣義力矩 $m_{u\alpha j}$ 、 $m_{v\alpha j}$ 、 $m_{w\alpha j}$ ；對應於 $\delta \theta_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2,3$) 的廣義節點力為廣義力矩 $m_{\theta ij}$ ；對應於 $\delta \phi_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2,3$) 的廣義節點力為傳統力矩 $m_{\phi ij}$ ；對應於 $\delta \varepsilon_{xj}$ 、 $\delta \varepsilon_{yj}$ 、 $\delta \gamma_{xyj}$ 的廣義節點力分別為廣義力矩 $m_{\varepsilon xj}$ 、 $m_{\varepsilon yj}$ 、 $m_{\gamma j}$ ；對應於 $\delta \phi_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2,3$) 的廣義節點力為廣義力矩 $m_{\phi ij}$ 。因為 θ_{ij} 在變形後不為零，所以其變分 $\delta \theta_{ij}$ 並不是繞 x_i^E 軸的無限小旋轉(見(2.21)式)，所以廣義力矩 $m_{\theta ij}$ 並非繞 x_i^E 軸的傳統力矩。如前所述，本文中將作用在節點 j 的旋轉向量((2.2)式) ϕ_j 在當前的變形位置重新設定為零，所以其變分 $\delta \phi_{ij}$ 與繞 x_i^E 軸的無限小旋轉 $\delta \phi_{ij}$ 的值相同，所以廣義力矩 $m_{\phi ij}$ 與繞 x_i^E 軸的傳統力矩的值相

同。不同元素在共同節點的廣義節點力 $\mathbf{f}_{\phi j}$ 需先轉換到共同座標系統才能組合成在該節點的系統節點內力。

對應於(2.40)式—(2.43)式之元素節點參數向量的元素節點內力向量可表示成：

$$\mathbf{f}_x = \{\mathbf{f}_{x1} \quad \mathbf{f}_{x2} \quad \mathbf{f}_{x3}\} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{\mathbf{f}_{\theta1} \quad \mathbf{f}_{\theta2} \quad \mathbf{f}_{\theta3}\} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{f}_\varphi = \{\mathbf{f}_{\varphi1} \quad \mathbf{f}_{\varphi2} \quad \mathbf{f}_{\varphi3}\} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{f}_\phi = \{\mathbf{f}_{\phi1} \quad \mathbf{f}_{\phi2} \quad \mathbf{f}_{\phi3}\} \quad (2.68)$$

其中 \mathbf{f}_{xj} 、 $\mathbf{f}_{\theta j}$ 、 $\mathbf{f}_{\varphi j}$ 、 $\mathbf{f}_{\phi j}$ 定義於(2.60)—(2.63)式

由(2.54)式—(2.56)式與反梯度法則(contragradient law)[47]，可得 \mathbf{f}_x 、 \mathbf{f}_θ 、 \mathbf{f}_φ 、 \mathbf{f}_ϕ 間的轉換關係如下：

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_x \quad (2.69)$$

$$\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.70)$$

$$\mathbf{f}_\phi = \mathbf{T}_{\varphi\phi}^t \mathbf{f}_\varphi \quad (2.71)$$

2.6 元素的應變及其變分

2.6.1 應變

本文中應變的度量是採用 Green strain，本文中以 ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 表示在當前元素座標 x_i^E 的 Green strain。由基本假設(2)，本文只考慮 ε_{11} 、 ε_{12} 與 ε_{22} ，並

表示如下[48]：

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_2^t \mathbf{g}_2 - 1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.73)$$

其中 \mathbf{r} 定義於(2.32)式。

將(2.32)式代入(2.73)式，並保留變形參數及其微分到二次項，可得 \mathbf{g}_i 的 x_j^E 分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 如下：

$$g_{11} = 1 + u_{,x} + z[-u_{,xx}\theta_y + (1 - u_{,x})\theta_{y,x} + v_{,xx}\theta_x + v_{,x}\theta_{x,x}] \quad (2.74)$$

$$g_{12} = v_{,x} + z[v_{,xy}\theta_x - (1 - v_{,y})\theta_{x,x} - u_{,xy}\theta_y - u_{,y}\theta_{y,x}]$$

$$g_{13} = w_{,x} + z(-\theta_x\theta_{x,x} - \theta_y\theta_{y,x})$$

$$g_{21} = u_{,y} + z[-u_{,xy}\theta_y + (1 - u_{,x})\theta_{y,y} + v_{,xy}\theta_x + v_{,x}\theta_{x,y}] \quad (2.75)$$

$$g_{22} = 1 + v_{,y} + z[v_{,yy}\theta_x - (1 - v_{,y})\theta_{x,y} - u_{,yy}\theta_y - u_{,y}\theta_{y,y}]$$

$$g_{23} = w_{,y} + z(-\theta_x\theta_{x,y} - \theta_y\theta_{y,y})$$

$$g_{31} = (1 - u_{,x})\theta_y + v_{,x}\theta_x \quad (2.76)$$

$$g_{32} = -(1 - v_{,y})\theta_x + u_{,y}\theta_y$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}\theta_x^2 - \frac{1}{2}\theta_y^2$$

將(2.74)式至(2.76)式代入(2.72)式，並保留參數及其微分到二次項，可得應

變為：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = u_{,x} + z\theta_{y,x}$$

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2}u_{,x}^2 + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + zv_{,xx}\theta_x - z\theta_y u_{,xx} + \frac{1}{2}z^2\theta_{x,x}^2 + \frac{1}{2}z^2\theta_{y,x}^2$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}u_{,y} + \frac{1}{2}v_{,x} - \frac{1}{2}z\theta_{x,x} + \frac{1}{2}z\theta_{y,y}$$

$$\varepsilon_{12}^2 = \frac{1}{2}u_{,x}u_{,y} + \frac{1}{2}v_{,x}v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,x}w_{,y} - z\theta_y u_{,xy} + z\theta_x v_{,xy} + \frac{1}{2}z^2\theta_{y,x}\theta_{y,y} + \frac{1}{2}z^2\theta_{x,x}\theta_{x,y}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^1 + \varepsilon_{22}^2 \quad (2.79)$$

$$\varepsilon_{22}^1 = v_{,y} - z\theta_{x,y}$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \frac{1}{2}u_{,y}^2 + \frac{1}{2}v_{,y}^2 + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + z\theta_x v_{,yy} - z\theta_y u_{,yy} + \frac{1}{2}z^2\theta_{x,y}^2 + \frac{1}{2}z^2\theta_{y,y}^2$$

其中 $\varepsilon_{ij}^k (i, j, k = 1, 2)$ 表示 ε_{ij} 中之 k 次項

為了方便以後推導，本文中令 $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ ，並將(2.77)式至(2.79)式的應變表

示為向量式：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \boldsymbol{\varepsilon}_a^2 + z\boldsymbol{\varepsilon}_b^1 + z\boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 + z^2\boldsymbol{\varepsilon}_b^2 \quad (2.80)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a^1 = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a^2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}u_{,x}^2 + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \frac{1}{2}u_{,y}^2 + \frac{1}{2}v_{,y}^2 + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b^1 = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ -\theta_{x,x} + \theta_{y,y} \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 = \begin{Bmatrix} v_{,xx}\theta_x - \theta_y u_{,xx} \\ \theta_x v_{,yy} - \theta_y u_{,yy} \\ -2\theta_y u_{,xy} + 2\theta_x v_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b^2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\theta_{x,x}^2 + \frac{1}{2}\theta_{y,x}^2 \\ \frac{1}{2}\theta_{x,y}^2 + \frac{1}{2}\theta_{y,y}^2 \\ \theta_{y,x}\theta_{y,y} + \theta_{x,x}\theta_{x,y} \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

2.6.2 應變的變分

本研究採用虛功原理推導元素節點內力，所以需要應變的變分。將(2.77)

式至(2.79)式變分可得：

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{11}^1 + \delta\varepsilon_{11}^2 \quad (2.87)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^1 = \delta u_{,x} + \delta\theta_{y,x}(z)$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{11}^2 &= \delta u_{,x}(u_{,x}) + \delta v_{,x}(v_{,x}) + \delta w_{,x}(w_{,x}) \\ &\quad + \delta u_{,xx}(-z\theta_y) + \delta v_{,xx}(z\theta_x) + \delta\theta_x(zv_{,xx}) + \delta\theta_y(-zu_{,xx}) \\ &\quad + \delta\theta_{x,x}(z^2\theta_{x,x}) + \delta\theta_{y,x}(z^2\theta_{y,x}) \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{12}^1 + \delta\varepsilon_{12}^2 \quad (2.88)$$

$$\delta\varepsilon_{12}^1 = \delta u_{,y} \left(\frac{1}{2}\right) + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{2}\right) + \delta\theta_{x,x} \left(-\frac{1}{2}z\right) + \delta\theta_{y,y} \left(\frac{1}{2}z\right)$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{12}^2 = & \delta u_{,x} \left(\frac{1}{2}u_{,y}\right) + \delta u_{,y} \left(\frac{1}{2}u_{,x}\right) + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{2}v_{,y}\right) + \delta v_{,y} \left(\frac{1}{2}v_{,x}\right) + \delta w_{,x} \left(\frac{1}{2}w_{,y}\right) + \delta w_{,y} \left(\frac{1}{2}w_{,x}\right) \\ & + \delta u_{,xy} (-z\theta_y) + \delta v_{,xy} (z\theta_x) + \delta\theta_x (zv_{,xy}) + \delta\theta_y (-zu_{,xy}) \\ & + \delta\theta_{x,x} \left(\frac{1}{2}z^2\theta_{x,y}\right) + \delta\theta_{x,y} \left(\frac{1}{2}z^2\theta_{x,x}\right) + \delta\theta_{y,x} \left(\frac{1}{2}z^2\theta_{y,y}\right) + \delta\theta_{y,y} \left(\frac{1}{2}z^2\theta_{y,x}\right) \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{22}^1 + \delta\varepsilon_{22}^2 \quad (2.89)$$

$$\delta\varepsilon_{22}^1 = \delta v_{,y} + \delta\theta_{x,y} (-z)$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{22}^2 = & \delta u_{,y} (u_{,y}) + \delta v_{,y} (v_{,y}) + \delta w_{,y} (w_{,y}) + \delta u_{,yy} (-z\theta_y) \\ & + \delta v_{,yy} (z\theta_x) + \delta\theta_x (zv_{,yy}) + \delta\theta_y (-zu_{,yy}) \\ & + \delta\theta_{x,y} (z^2\theta_{x,y}) + \delta\theta_{y,y} (z^2\theta_{y,y}) \end{aligned}$$

其中 $\delta\varepsilon_{ij}^k (i, j, k = 1, 2)$ 表示 ε_{ij} 中之 k 次項的變分

為了方便以後推導，本文將(2.87)式—(2.89)式的應變表示為向量式：

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_a^2 + z\delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^1 + z\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 + z^2\delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^2 \quad (2.90)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_a^1 = \left\{ \begin{array}{c} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \end{array} \right\} \quad (2.91)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_a^2 = \left\{ \begin{array}{c} \delta u_{,x} (u_{,x}) + \delta v_{,x} (v_{,x}) + \delta w_{,x} (w_{,x}) \\ \delta u_{,y} (u_{,y}) + \delta v_{,y} (v_{,y}) + \delta w_{,y} (w_{,y}) \\ \delta u_{,x} (u_{,y}) + \delta u_{,y} (u_{,x}) + \delta v_{,x} (v_{,y}) + \delta v_{,y} (v_{,x}) + \delta w_{,x} (w_{,y}) + \delta w_{,y} (w_{,x}) \end{array} \right\} \quad (2.92)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 = \left\{ \begin{array}{c} \delta \theta_{y,x} \\ \delta \theta_{x,y}(-1) \\ \delta \theta_{x,x}(-1) + \delta \theta_{y,y} \end{array} \right\} \quad (2.93)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 = \left\{ \begin{array}{c} \delta u_{,xx}(-\theta_y) + \delta v_{,xx}(\theta_x) + \delta \theta_x(v_{,xx}) + \delta \theta_y(-u_{,xx}) \\ \delta u_{,yy}(-\theta_y) + \delta v_{,yy}(\theta_x) + \delta \theta_x(v_{,yy}) + \delta \theta_y(-u_{,yy}) \\ \delta u_{,xy}(-2\theta_y) + \delta v_{,xy}(2\theta_x) + \delta \theta_x(2v_{,xy}) + \delta \theta_y(-2u_{,xy}) \end{array} \right\} \quad (2.94)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^2 = \left\{ \begin{array}{c} \delta \theta_{x,x}(\theta_{x,x}) + \delta \theta_{y,x}(\theta_{y,x}) \\ \delta \theta_{x,y}(\theta_{x,y}) + \delta \theta_{y,y}(\theta_{y,y}) \\ \delta \theta_{x,x}(\theta_{x,y}) + \delta \theta_{x,y}(\theta_{x,x}) + \delta \theta_{y,x}(\theta_{y,y}) + \delta \theta_{y,y}(\theta_{y,x}) \end{array} \right\} \quad (2.95)$$

若元素位移場表示成節點參數 \mathbf{q}_x 的函數，則可得 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\delta \mathbf{q}_x$ 之關係式為：

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^2 + z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 + z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 + z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^2 \\ &= \mathbf{B}_a^1 \delta \mathbf{q}_x + \mathbf{B}_a^2 \delta \mathbf{q}_x + z \mathbf{B}_b^1 \delta \mathbf{q}_x + z \mathbf{B}_{ab}^2 \delta \mathbf{q}_x + z^2 \mathbf{B}_b^2 \delta \mathbf{q}_x \end{aligned} \quad (2.96)$$

其中 \mathbf{B}_i^j 為 $\delta \mathbf{q}_x$ 對應於 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^j$ ($i = a, b, ab, j = 1, 2$) 之應變-位移關係矩陣。

2.7 元素節點內力之推導

在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應力與應變關係為：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.97)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}\} \quad (2.98)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}\}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

其中 E 是楊氏模數(Young's module)， ν 是蒲松比(Poisson ratio)。

本文利用虛功原理及一致性二階線性化，保留節點內力到二次項推導對應於擾動元素節點參數向量 $\delta \mathbf{q}_x$ 之廣義元素節點內力向量 \mathbf{f}_x 。

由虛功原理、(2.80)式、(2.96)式和(2.97)式及一致性二階線性化可得：

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{q}_x^t \mathbf{f}_x &= W_{\text{int}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \\
 &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^{1t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^{1t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_a^2 + z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^{1t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_b^2) dV + \int_V z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^{2t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dV \\
 &\quad + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_a^{2t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dV \\
 &\quad + \int_V (z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^{1t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 + z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^{1t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2) dV + \int_V z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^{2t} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 dV
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

令

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_a &= \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D} dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}_b &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{D} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

其中 h 為元素厚度。

由(2.100)式可將(2.99)式表示成：

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{q}_x^t \mathbf{f}_x &= W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}_x^t \left[\int_A (\mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^2 + \mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^2) dA \right. \\
 &\quad + \int_A \mathbf{B}_a^{2t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dA \\
 &\quad + \int_A (\mathbf{B}_b^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 + \mathbf{B}_b^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2) dA \\
 &\quad + \int_A \mathbf{B}_{ab}^{2t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 dA \\
 &\quad \left. + \int_A \mathbf{B}_b^{2t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dA \right]
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

由(2.101)式，元素的節點內力向量 \mathbf{f}_x 可表示為：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x = & \int_A (\mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 + \mathbf{B}_b^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^1) dA + \int_A \mathbf{B}_a^{2t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dA + \int_A \mathbf{B}_{ab}^{2t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^1 dA \\ & + \int_A \mathbf{B}_b^{2t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_a^1 dA + \int_A \mathbf{B}_b^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^2 dA + \int_A \mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^2 dA + \int_A \mathbf{B}_a^{1t} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^2 dA \end{aligned} \quad (2.102)$$

(2.102)式中加底線的項為線性項，本文中 \mathbf{f}_x 僅考慮其線性項。

2.8 元素剛度矩陣

對應於元素節點參數向量 \mathbf{q}_ϕ 的元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} ，可由(2.68)式的元素節點內力 \mathbf{f}_ϕ 對節點參數 \mathbf{q}_ϕ 微分求得。利用(2.71)式和(2.43)式可求得切線剛度矩陣 \mathbf{k} 如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi)}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi = \text{fixed}} \\ &= \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{k}_\phi + \mathbf{H}_\phi \end{aligned} \quad (2.103)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\theta = \text{fixed}} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} \\ &= \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{k}_\theta + \mathbf{H}_\theta \mathbf{T}_{\theta\phi} \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \frac{\partial \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \mathbf{T}_{x\theta}^t \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} + \frac{\partial \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} \Big|_{\mathbf{f}_x = \text{fixed}} \\ &= \mathbf{T}_{x\theta}^t (\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_\sigma) \mathbf{T}_{x\theta} + \mathbf{H}_x \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_x} = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_\sigma \quad (2.106)$$

(2.103)式之 \mathbf{k} 的詳細推導見附錄 B。

2.9 殼元素的位移場

本文之三角形殼元素的位移場((2.32)式)是由(2.40)式之節點參數向量 \mathbf{q}_x 決定，所以可以採用文獻上節點參數與 \mathbf{q}_x 一致之平面元素與板元素的位移場當本文之三角形殼元素的位移場。本文之殼元素在中平面 x_1^E 、 x_2^E 軸方向的位移分量 u 、 v ((2.32)式)採用三節點之 QST 平面元素[23]的位移場，(2.32)式中的 $z\theta_y$ 及 $-z\theta_x$ 採用三節點之 DKT 板元素[28]中， x_1^E 、 x_2^E 軸方向的位移場。因 DKT 板元素沒有定義(2.32)式中在中平面 x_3^E 軸方向的位移場 $w(x,y)$ ，所以本文將暫用文獻[8]中採用的線性位移場，計算(2.92)式中的 $w_{,x}$ 、 $w_{,y}$ 及其變分。

QST 元素的位移場 $u = u(\xi, \eta)$ 、 $v = v(\xi, \eta)$ 分別為板之中平面在 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量， ξ 、 η 為面積座標(area coordinates)，面積座標的介紹詳見附錄 C。此元素有 3 個節點，每個節點有 6 個自由度，分別為 u 、 v 在節點 j 的節點值 u_j 、 v_j ($j=1,2,3$)，以及 $u_{,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$ 、 $v_{,\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$ ($\alpha = \xi, \eta$) 在節點 j 的節點值 $u_{,\xi_j}$ 、 $u_{,\eta_j}$ 、 $v_{,\xi_j}$ 、 $v_{,\eta_j}$ 。

QST 元素位移場可表示為[23]：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{u}_\xi \quad (2.107)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{v}_\xi \quad (2.108)$$

$$\mathbf{u}_\xi = \{ \mathbf{u}_{\xi 1} \quad \mathbf{u}_{\xi 2} \quad \mathbf{u}_{\xi 3} \} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{v}_\xi = \{ \mathbf{v}_{\xi 1} \quad \mathbf{v}_{\xi 2} \quad \mathbf{v}_{\xi 3} \} \quad (2.110)$$

$$\mathbf{u}_{\xi j} = \{u_j \quad u_{,\xi j} \quad u_{,\eta j}\} \quad (2.111)$$

$$\mathbf{v}_{\xi j} = \{v_j \quad v_{,\xi j} \quad v_{,\eta j}\} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_v = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9\} \quad (2.113)$$

其中 \mathbf{N}_u 為對應於 u 的形狀函數， \mathbf{N}_v 為對應於 v 的形狀函數， \mathbf{u}_ξ 、 \mathbf{v}_ξ 為元素節點參數向量， $\mathbf{u}_{\xi j}$ 、 $\mathbf{v}_{\xi j}$ 為在元素節點 j ($j=1,2,3$) 的元素節點參數向量， N_i ($i=1,2,\dots,9$) 為面積座標的三次函數，其表示式詳見附錄 D。

因 u 、 v 都是 ξ 、 η 的顯函數，所以 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 與 $u_{,\xi}$ 、 $u_{,\eta}$ 及 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 與 $v_{,\xi}$ 、 $v_{,\eta}$ 的關係可表示成(詳見附錄 C)：

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi m} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.114)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi m} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{A}_{\xi m} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (2.117)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.118)$$

其中 $\mathbf{A}_{\xi m}$ 為面積座標 ξ 、 η 與 Lagrange 座標 x 、 y 間的 Jacobin matrix， x_j 、 y_j 分別是元素節點 j 在元素座標系統的 Lagrange 座標 x 、 y 的座標值。

令

$$\mathbf{u}_m = \{\mathbf{u}_{m1} \quad \mathbf{u}_{m2} \quad \mathbf{u}_{m3}\} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{v}_m = \{\mathbf{v}_{m1} \quad \mathbf{v}_{m2} \quad \mathbf{v}_{m3}\} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{u}_{mj} = \{u_j \quad u_{,xj} \quad u_{,yj}\} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{v}_{mj} = \{v_j \quad v_{,xj} \quad v_{,yj}\} \quad (2.122)$$

其中 \mathbf{u}_m 、 \mathbf{v}_m 為 QST 元素的第二組節點參數向量， $u_{,xj}$ 、 $u_{,yj}$ 、 $v_{,xj}$ 、 $v_{,yj}$ 分別為 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 、 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 在元素節點 j 之值(與(2.44)式中的 $\mathbf{u}'_j = \{u_{,x} \quad u_{,y}\}_j$ ， $\mathbf{v}'_j = \{v_{,x} \quad v_{,y}\}_j$ 為相同的節點參數)。由(2.114)式與(2.115)式，可求得(2.109)

式中 \mathbf{u}_ξ 與(2.119)式中 \mathbf{u}_m 的關係：

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{T}_{\xi m} \mathbf{u}_m \quad (2.123)$$

$$\mathbf{T}_{\xi m} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\xi m1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\xi m2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\xi m3} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$\mathbf{T}_{\xi m1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & y_{21} \\ 0 & x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

DKT 板元素有 3 個節點，每個節點有 3 個自由度，分別為板之中平面在 x_3^E 軸方向之位移分量 $w(x, y)$ 的節點值 w_j ($j=1,2,3$) 以及 $w(x, y)$ 分別對 Lagrange 座標 x 和 y 的微分的節點值 $w_{,xj}$ 和 $w_{,yj}$ 。

DKT 元素沒有定義位移場 $w(x, y)$ ，其 x_1^E 、 x_2^E 軸方向的位移場分別表示為 $z\theta_y$ 及 $-z\theta_x$ [28]：

$$\theta_y = \mathbf{H}_x^t(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \quad (2.126)$$

$$\theta_x = -\mathbf{H}_y^t(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \quad (2.127)$$

$$\mathbf{u}_b = \{w_1 \quad w_{,x1} \quad w_{,y1} \quad w_2 \quad w_{,x2} \quad w_{,y2} \quad w_3 \quad w_{,x3} \quad w_{,y3}\} \quad (2.128)$$

其中 \mathbf{H}_x^T 為對應於 θ_y 的形狀函數， \mathbf{H}_y^T 為對應於 θ_x 的形狀函數， \mathbf{u}_b 為節點參數向量，形狀函數 \mathbf{H}_x^T 、 \mathbf{H}_y^T 的表示式詳見附錄 E。

(2.126)、(2.127)式之 θ_y 、 θ_x 在元素節點 j ($j=1,2,3$) 之值分別為 $w_{,xj}$ 、 $-w_{,yj}$ 但 (2.126)、(2.127)式之 θ_y 、 θ_x 並不是 $w_{,x}$ 、 $-w_{,y}$ 。所以採用 DKT 元素時，本文(2.33)式的關係僅適用在元素節點 j ($j=1,2,3$)。

2.10 座標系統轉換

為了建立結構的平衡方程式，必須將定義在當前元素座標的元素節點參數向量 \mathbf{q}_ϕ ((2.43)式)中的 $\mathbf{u}_j = \{u \quad v \quad w\}_j$ 和 $\phi_j = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}_j$ ($j=1,2,3$) 轉換成固定總體座標的分量， $\boldsymbol{\varepsilon}_j = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}_j$ 轉換成對應於節點基礎座標的分量，才能將各元素節點內力組合成結構系統節點內力以及將元素剛度矩陣疊加成結構系統剛度矩陣。

令 $\mathbf{A}_{GE}^0 = [\mathbf{e}_1^{E0} \quad \mathbf{e}_2^{E0} \quad \mathbf{e}_3^{E0}]$ 、 $\mathbf{A}_{GE} = [\mathbf{e}_1^E \quad \mathbf{e}_2^E \quad \mathbf{e}_3^E]$ 分別表示初始元素座標及當前元素座標與總體座標的轉換矩陣， \mathbf{e}_i^{E0} 、 \mathbf{e}_i^E ($i=1,2,3$) 為初始元素座標 ${}^0x_i^E$ 軸及當前元素座標 x_i^E ($i=1,2,3$) 軸方向的單位向量，則 \mathbf{A}_{GE} 與 \mathbf{A}_{GE}^0 關係可表示成：

$$\mathbf{A}_{GE} = \mathbf{R}_{GE}^0 \mathbf{A}_{GE}^0 \quad (2.129)$$

其中 \mathbf{R}_{GE}^0 代表將初始元素座標轉到當前元素座標的旋轉矩陣。

在當前元素座標的節點位移 \mathbf{u}_j 和節點旋轉向量 ϕ_j 與在固定總體座標的節點位移和節點旋轉向量之關係可表示成：

$$\mathbf{u}_j^G = \mathbf{A}_{GE} \mathbf{u}_j \quad (2.130)$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^G = \mathbf{A}_{GE} \boldsymbol{\phi}_j \quad (2.131)$$

其中 $\mathbf{u}_j^G = \{u^G \quad v^G \quad w^G\}_j$ ， $\boldsymbol{\phi}_j^G = \{\phi_1^G \quad \phi_2^G \quad \phi_3^G\}_j$ ， u_j^G 、 v_j^G 、 w_j^G 分別為在節點 j ， X_1^G 、 X_2^G 、 X_3^G 軸的位移分量， ϕ_{1j}^G 、 ϕ_{2j}^G 、 ϕ_{3j}^G 分別為在節點 j ， X_1^G 、 X_2^G 、 X_3^G 軸的旋轉向量分量。

令 \mathbf{A}_{GBj}^0 、 $\mathbf{A}_{BEj}^0 = \mathbf{A}_{GBj}^{0t} \mathbf{A}_{GE}^0$ ($j=1,2,3$) 分別表示節點 j 之初始節點基礎座

標與總體座標及初始元素座標的轉換矩陣， \mathbf{A}_{BEj}^0 可表示成：

$$\mathbf{A}_{BEj}^0 = \begin{bmatrix} c_B & -s_B & 0 \\ s_B & c_B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad (2.132)$$

其中 $c_{Bj} = \cos({}^0x_{1j}^B, {}^0x_1^E)$ 、 $s_{Bj} = \sin({}^0x_{1j}^B, {}^0x_1^E)$ 。

初始節點基礎座標隨元素座標一起剛體旋轉後，與當前元素座標的轉換矩陣仍為(2.132)式，所以在當前元素座標的節點應變 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 與對應的節點基礎座標的節點應變之關係可表示成[51]：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{R}_{EBj} \boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.133)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \{\varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj}\} \quad (2.134)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \{\varepsilon_x^B \quad \varepsilon_y^B \quad \gamma_{xy}^B\}_j \quad (2.135)$$

$$\mathbf{R}_{EBj} = \begin{bmatrix} c_B^2 & s_B^2 & -c_B s_B \\ s_B^2 & c_B^2 & c_B s_B \\ 2c_B s_B & -2c_B s_B & c_B^2 - s_B^2 \end{bmatrix}_j \quad (2.136)$$

其中 c_{Bj} 、 s_{Bj} 已在(2.132)式為定義。

為了方便說明，令元素節點參數向量 $\mathbf{q}_{Ej} = \mathbf{q}_{\phi_j}$ ， $\mathbf{q}_E = \mathbf{q}_\phi$ ，其中 \mathbf{q}_{ϕ_j} 與 \mathbf{q}_ϕ

分別定義於(2.47)式與(2.43)式。

由(2.130)式、(2.131)式和(2.133)式可得：

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{T}_{EB} \mathbf{q}_B \quad (2.137)$$

$$\mathbf{T}_{EB} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{EB1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB3} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

$$\mathbf{q}_B = \{\mathbf{q}_{B1} \quad \mathbf{q}_{B2} \quad \mathbf{q}_{B3}\} \quad (2.139)$$

$$\mathbf{T}_{EBj} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EBj} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

$$\mathbf{q}_{Bj} = \{\mathbf{u}^G \quad \phi^G \quad \boldsymbol{\varepsilon}^B\}_j \quad (2.141)$$

令 $\mathbf{f}_{Ej} = \mathbf{f}_{\phi_j}$ ， $\mathbf{f}_E = \mathbf{f}_\phi$ ，其中 \mathbf{f}_{ϕ_j} 與 \mathbf{f}_ϕ 分別定義於(2.63)式與(2.68)式。

由反梯度法則及(2.137)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{f}_E \quad (2.142)$$

$$\mathbf{f}_B = \{\mathbf{f}_{B1} \quad \mathbf{f}_{B2} \quad \mathbf{f}_{B3}\} \quad (2.143)$$

$$\mathbf{f}_{Bj} = \{\mathbf{f}^G \quad \mathbf{m}_\phi^G \quad \mathbf{m}_\varepsilon^B\}_j \quad (2.144)$$

其中

$$\mathbf{f}_j^G = \{f_1^G \quad f_2^G \quad f_3^G\}_j \quad (2.145)$$

$$\mathbf{m}_\phi^G = \{m_{\phi 1}^G \quad m_{\phi 2}^G \quad m_{\phi 3}^G\}_j$$

$$\mathbf{m}_\varepsilon^B = \{m_{\varepsilon x}^B \quad m_{\varepsilon y}^B \quad m_\gamma^B\}_j$$

f_{ij}^G ($i=1,2,3, j=1,2,3$)分別為對應於 δu_j^G 的節點力， m_{exj}^B 、 m_{eyj}^B 、 m_{yj}^B 分別為對應於 $\delta \varepsilon_{xj}^B$ 、 $\delta \varepsilon_{yj}^B$ 、 $\delta \gamma_{xyj}^B$ 的廣義節點力矩， $m_{\phi ij}^G$ 為對應於 $\delta \phi_{ij}^G$ 的廣義節點傳統力矩。本文中將作用在節點 j 的旋轉向量 ϕ_j^G ((2.131)式)在當前的變形位置重新設定為零，所以其變分 $\delta \phi_{ij}^G$ 與繞 X_i^G 軸的無限小旋轉 $\delta \phi_{ij}^G$ 的值相同，所以廣義力矩 $m_{\phi ij}^G$ 與繞 X_i^G 軸的傳統力矩的值相同。

對應於節點參數向量 \mathbf{q}_B 的剛度矩陣 \mathbf{k}_B ，可由(2.143)式的節點內力 \mathbf{f}_B 對節點參數 \mathbf{q}_B 微分求得。利用(2.137)式和(2.142)式可求得剛度矩陣 \mathbf{k}_B 如下：

$$\mathbf{k}_B = \frac{d\mathbf{f}_B}{d\mathbf{q}_B} = \frac{d(\mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{f}_E)}{d\mathbf{q}_B} = \mathbf{T}_{EB}^t \frac{d\mathbf{f}_E}{d\mathbf{q}_E} \frac{d\mathbf{q}_E}{d\mathbf{q}_B} = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{k}_E \mathbf{T}_{EB} \quad (2.146)$$

其中 \mathbf{k}_E 是對應於 \mathbf{q}_E 的元素剛度矩陣。

2.11 系統平衡方程式與收斂準則

結構系統受外力負荷時，其平衡方程式可表示為：

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (2.147)$$

其中 Ψ 為系統不平衡力向量，系統節點內力 \mathbf{F} 可由(2.143)式的元素節點內力 \mathbf{f}_B 疊加得出， \mathbf{Q} 為系統位移向量， λ 為負荷參數， \mathbf{P} 為參考外力負荷向量。若外力為與變形位置相關(configuration dependent)的外力，則 \mathbf{P} 在每一個變形位置都須更新。本文以不平衡力 Ψ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭代時的誤差度量，且收斂準則表示為：

$$e = \frac{\|\Psi\|}{|\lambda|\sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.148)$$

其中 N 代表離散系統的自由度總數， e_{tol} 為一給定的容許誤差值。

2.12 元素節點變形參數的決定方法

本文中採用增量迭代法解非線性平衡方程式，假設第 I 個位置已知，此處的第 I 個位置，是指第 I 個增量迭代收斂後的平衡位置。 \mathbf{x}_j 為元素節點 j ($j=1,2,3$) 在當前元素座標上的位置向量， ${}^I\mathbf{X}_j$ 、 ${}^I x_{ij}^B$ 、 $\Delta\mathbf{U}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 分別為元素節點 j 在固定總體座標中第 I 個位置的位置向量、元素節點 j 在第 I 個位置的節點基礎座標、元素節點 j 的增量位移向量、元素節點 j 的增量應變向量以及元素節點 j 的增量旋轉。本文中假設元素節點 j 受 $\Delta\mathbf{U}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 作用後的變形過程如下：

1. 節點 j 受 $\Delta\mathbf{U}_j$ 的作用由第 I 個位置 ${}^I\mathbf{X}_j$ 平移到節點當前變形位置 \mathbf{X}_j ，在移動過程中，節點 j 無剛體旋轉，即元素各邊在節點的切線方向維持不變，剛接在其上的節點基礎座標的方位亦不變。
2. 節點 j 及剛接在其上的節點基礎座標軸 ${}^I x_{ij}^B$ 受到 $\Delta\phi_j$ 作用，旋轉到當前變形位置的 x_{ij}^B 。
3. 節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標上之應變分量增加一增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 。

由上述的變形過程可知節點 j 當前變形位置的固定總體座標 \mathbf{X}_j 可以由 ${}^I\mathbf{X}_j$ 加上 $\Delta\mathbf{U}_j$ 得到，由 \mathbf{X}_j 可以利用元素座標定義求出當前變形位置的元素座標 x_i^E 。元素座標決定方式如附錄 A 所示，則元素節點變形參數可決定如下：

(1) 節點位移 \mathbf{u}_j

節點位移 \mathbf{u}_j 可由元素節點 j 在當前變形位置的元素座標上的位置向量 \mathbf{x}_j 與元素節點 j 在初始未變形時的元素座標上位置向量的 ${}^0\mathbf{x}_j$ 的差得出：

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j - {}^0\mathbf{x}_j \quad (2.149)$$

$$\mathbf{u}_j = \{u_j \quad v_j \quad w_j\} \quad (2.150)$$

$$\mathbf{x}_j = \{x_{1j} \quad x_{2j} \quad x_{3j}\} \quad (2.151)$$

$${}^0\mathbf{x}_j = \{{}^0x_{1j} \quad {}^0x_{2j} \quad {}^0x_{3j}\} \quad (2.152)$$

(2) 節點應變 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$

利用第 I 個位置在節點基礎座標上的節點應變向量 ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 加上增量應變向量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 可以求出當前變形位置的節點基礎座標上的節點應變向量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = {}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.153)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = {}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.154)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \left\{ \Delta\varepsilon_{xj}^B \quad \Delta\varepsilon_{yj}^B \quad \Delta\gamma_{xyj}^B \right\} \quad (2.155)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 為當前變形位置的基礎節點座標上的節點應變向量。

(3) 節點旋轉參數 θ_{ij}

如圖 2.3 所示，將旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用在 x_{ij}^B 軸上，使其旋轉到 $x_{ij}^{B'}$ 軸的新位置， θ_{nj} 可表示為：

$$\theta_{nj} = \sin^{-1} \left(\frac{\|\mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B\|}{\|\mathbf{e}_3^E\| \|\mathbf{e}_{3j}^B\|} \right) \frac{\|\mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B\|}{\|\mathbf{e}_3^E\| \|\mathbf{e}_{3j}^B\|} \quad (2.156)$$

其中 \mathbf{e}_3^E 及 \mathbf{e}_{3j}^B 分別為當前變形位置的元素座標之 x_3^E 軸的單位向量，及當前變形位置的節點基礎座標之 x_{3j}^B 軸的單位向量。此時， $x_{3j}^{B'}$ 軸與 x_3^E 軸重合，且 $x_{1j}^{B'}$ 軸和 $x_{2j}^{B'}$ 軸與 x_3^E 軸垂直，與 x_1^E 軸、 x_2^E 軸共平面，但不重合。同理，在初始未變形時將旋轉向量 ${}^0\theta_{nj}$ 作用在 ${}^0x_{ij}^B$ 軸上，使其旋轉到 ${}^0x_{ij}^{B'}$ 軸的新位置， ${}^0\theta_{nj}$ 可表示為：

$${}^0\theta_{nj} = \sin^{-1} \left(\frac{\|{}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B\|}{\|{}^0\mathbf{e}_3^E\| \|{}^0\mathbf{e}_{3j}^B\|} \right) \frac{\|{}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B\|}{\|{}^0\mathbf{e}_3^E\| \|{}^0\mathbf{e}_{3j}^B\|} \quad (2.157)$$

其中 ${}^0\mathbf{e}_3^E$ 、 ${}^0\mathbf{e}_{3j}^B$ 分別為初始未變形時元素座標之 ${}^0x_3^E$ 軸的單位向量，以及初始未變形時基礎節點座標之 ${}^0x_{3j}^B$ 軸的單位向量。若結構初始未變形時為曲面，則 ${}^0x_3^E$ 軸和 ${}^0x_{3j}^B$ 軸不平行，所以 ${}^0\theta_{nj} \neq 0$ ；若結構初始未變形時為平面，則 ${}^0x_3^E$ 軸和 ${}^0x_{3j}^B$ 軸平行，所以 ${}^0\theta_{nj} = 0$ 。

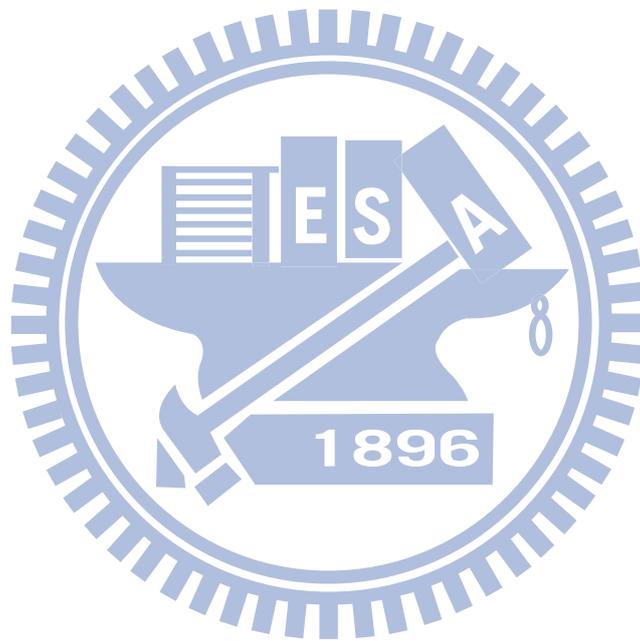
令 ${}^0\theta_{nj}^E$ 及 θ_{nj}^E 為將 ${}^0\theta_{nj}$ 與 θ_{nj} 分別以初始未變形時的元素座標及當前變形位置的元素座標為基底，節點旋轉參數 θ_{ij} ($i=1,2, j=1,2,3$) 可表示為：

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1j} \\ \theta_{2j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \theta_{nj}^E - {}^0\theta_{nj}^E \quad (2.158)$$

如圖 2.4 所示， $\theta_{3j}\mathbf{e}_3^E$ ($j=1,2,3$) 為將 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉到 $x_{1j}^{B'}$ 軸的旋轉向量， θ_{3j} 可表示為：

$$\theta_{3j} = \sin^{-1} \left(\frac{\|{}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'}\|}{\|{}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'}\| \|\mathbf{e}_{1j}^{B'}\|} \cdot \mathbf{e}_3^E \right) \quad (2.159)$$

其中 ${}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'}$ 、 $\mathbf{e}_{1j}^{B'}$ 分別為初始未變形時之 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸的單位向量，以及當前變形位置之 $x_{1j}^{B'}$ 軸的單位向量。



第三章 數值計算方法與程序

本文解(2.147)式的非線性平衡方程式所使用平衡迭代的數值計算方法是採用文獻[52]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。本文中為了求得分歧點，以系統切線剛度矩陣之行列式值為零來判斷。本文採用二分法決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文在平衡路徑的挫屈負荷分歧點加入一個與挫屈模態向量方向一致的擾動位移。為了本文的完整性，以下將簡單介紹文獻[52]中提出的增量迭代數值計算方法與程序。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，令其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 λ_I ，則第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可以利用尤拉預測值(Euler predictor)求得[52]：

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_T = (\mathbf{K}_T^I)^{-1} \mathbf{P} \quad (3.2)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， \mathbf{K}_T^I 為第 I 個平衡位置的系統切線剛度矩陣。

(3.1)式中的 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[52]：

$$\Delta\lambda = \pm \Delta l / (\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T)^{1/2} \quad (3.3)$$

其中正負符號決定方法為，當第 $I-1$ 與 I 個增量收斂時，其系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 Δl 表示第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定[52]：

$$\Delta l = \Delta l_I (J_D / J_I)^{1/2} \quad (3.4)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。本文第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定：

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.5)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考外力負荷向量 \mathbf{P} 作用下的系統線性解之 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量之絕對值。

在平衡迭代時若第 I 個位置的增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ 及增量位移負荷參數 $\Delta\lambda$ 已知時，由 $\mathbf{Q}_{I+1} = \mathbf{Q}_I + \Delta\mathbf{Q}$ ， $\lambda_{I+1} = \lambda_I + \Delta\lambda$ ，及 2.12 節的方法，則可以求得系統中各元素在當前的元素座標、節點位移、節點變形角。再利用 2.7 節和 2.8 節的方法求得當前元素座標上的節點內力及剛度矩陣，再由 2.10 節中提到的座標轉換轉到固定總體座標與節點基礎座標的節點內力及剛度矩陣。當系統內力及外力求得後，系統不平衡力向量可以由(2.147)式求得：

$$\Psi_{I+1} = \Psi(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{I+1}) - \lambda_{I+1} \mathbf{P} \quad (3.6)$$

將(2.147)式在 $\lambda = \lambda_{I+1}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{I+1}$ 時用泰勒展開式展開為：

$$\Psi = \Psi_{I+1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda + \mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = 0 \quad (3.7)$$

其中 $\mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1})$ 為二次以上的高次項， $\delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量， $\delta \lambda$ 為負荷參數修正量。根據(2.147)式，(3.7)式中的 $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}}$ 與 $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$ 可表示為：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{K}_T \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -\mathbf{P} \quad (3.9)$$

依牛頓法，忽略(3.7)式中二次以上的高次項，並將(3.8)式與(3.9)式代入，可以得出：

$$\Psi_{I+1} + \mathbf{K}_T \mathbf{r} - \delta \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{r} = \delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量，整理(3.10)式，可得到位移修正量：

$$\mathbf{r} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\Psi_{I+1} - \delta \lambda \mathbf{P}) = \mathbf{r}_0 + \delta \lambda \mathbf{r}_T \quad (3.11)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{K}_T^{-1} \Psi_{I+1}$ 為標準牛頓法的位移修正量， \mathbf{r}_T 在(3.2)式中已定義。

3.2 弧長控制法

(3.11)式中的負荷參數修正量 $\delta \lambda$ 可利用文獻[52]中所提出的定弧長控制法決定，其方法在每一個增量中固定其增量位移向量的 Euclidean norm 為一定值 Δl ，由新的增量位移向量 $(\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r})$ 可以得到：

$$\Delta l^2 = (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r})^t (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}) \quad (3.12)$$

將(3.11)式代入(3.12)式可以得到：

$$\Delta l^2 = (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta \lambda \mathbf{r}_T)^T (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta \lambda \mathbf{r}_T) \quad (3.13)$$

(3.13)式經過整理後可以得到 $\delta \lambda$ 的二次方程式：

$$a_1 \delta \lambda^2 + a_2 \delta \lambda + a_3 = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$a_1 = \mathbf{r}_T^T \mathbf{r}_T \quad (3.15)$$

$$a_2 = 2(\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^T \mathbf{r}_T \quad (3.16)$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^T (\Delta \mathbf{Q} + \mathbf{r}_0) - \Delta l^2 \quad (3.17)$$

將(3.11)式求得之增量位移修正量 \mathbf{r} 以及(3.14)式求得之負荷參數修正量 $\delta \lambda$ 加入上次迭代之 $\Delta \mathbf{Q}$ 與 $\Delta \lambda$ 中，可以得到新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次迭代，迭代過程將一直重複至(3.6)式中的系統不平衡力向量滿足(2.148)式的收斂準則為止。

3.3 二分法

利用 3.1 節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 值。 Δl_{I+1} 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{cr} ：

- (1) 令 $\Delta l_L = 0$, $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$, $\lambda_L = \lambda_I$, $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ 。其中下標 L 及 R 表示左界及右界。
- (2) 取 $\Delta l_{I+1} = \frac{\Delta l_L + \Delta l_R}{2}$, 重做第 $I+1$ 個增量迭代, 並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。
- (3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零, 則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}$, $\Delta l_L = \Delta l_{I+1}$ 。若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零, 則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}$, $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ 。
- (4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足, 則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷, 否則回到步驟(2), 重新展開下一次二分法迭代。

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值, 本文例題之計算給定 $e_D = 10^{-8}$ 及 $e_\lambda = 10^{-5}$ 。

3.4 數值程序

本文使用的增量迭代法之數值程序可以分為三個主要部分：

1. 輸入並計算開始分析所需的資料

(a) 輸入結構資料、邊界條件與負荷參數。

(b) 選擇一個參考自由度, 並給定期望此自由度應達到的位移。

(c) 給定最大增量次數、最大迭代次數、期望迭代次數與容許誤差值。

(d) 形成系統剛度矩陣並求得(3.5)式中的 \mathbf{R}_0 。

(e) 利用(3.1)式、(3.3)式與(3.5)式計算初始增量位移向量、初始增量負荷參數與第一次增量弧長。

2. 使用迭代法求增量的收斂解

(a) 由 2.12 節的方法，利用已知的增量位移求得當前元素的變形向量 \mathbf{q}_ϕ ，並計算(2.68)式中元素節點內力，接著由 2.10 節座標轉換將 \mathbf{f}_E 利用(2.142)式轉換至 \mathbf{f}_B ，然後將元素節點內力 \mathbf{f}_B 組合成結構系統節點內力 \mathbf{F} 。

(b) 計算(2.147)式的不平衡力 Ψ 。

(c) 檢查(2.148)式的收斂準則，若滿足則進入第 3 部分；否則檢查迭代數，如果小於給定之最大迭代次數，則進行步驟(d)；否則減少增量弧長並以(3.1)式與(3.3)式計算新的增量位移向量與增量負荷參數，回到步驟(a)重新計算。

(d) 利用(3.11)式與(3.14)式計算增量位移修正量與增量負荷參數修正量，回到步驟(a)重新計算。

3. 計算下一次增量所需的資料

(a) 檢查參考自由度的位移及進行的增量次數是否已達給定值，若已達到給定值則停止分析工作；否則進行步驟(b)。

(b) 計算(3.11)式中的切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。本文中 \mathbf{K}_T 的計算方法是利用初

始未變形的元素剛度矩陣 \mathbf{k} ，再加上元素幾何剛度矩陣 \mathbf{k}_σ ，本文中忽略元素其他的幾何變形與內部應力對元素剛度矩陣造成的影響，再利用2.10節座標轉換將 \mathbf{k}_E 利用(2.146)式轉換至 \mathbf{k}_B ，然後將元素剛度矩陣 \mathbf{k}_B 疊加成結構系統剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。

(c)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.4)式計算下一次增量的增量位移向量、增量負荷參數與增量弧長。

(d)回到第2部分進行迭代工作。



第四章 數值分析與結果

為了解本文中所推導之三角殼元素在幾何非線性分析的收斂性和準確性及本文中所採用之數值程序的可行性，本章中將以第二章中推導的三角殼元素以及在第三章中提到的數值方法與程序，用不同的網格分析文獻上具大位移、大旋轉的例題，並與文獻上的結果比較。

本章將採用文獻[53]的方法，利用 Projector matrix 除去擾動節點位移及旋轉中的剛體位移及旋轉，修改本文第二章中推導的元素節點內力及剛度矩陣，使平衡迭代的收斂速度更加快速，該方法的詳細說明在附錄 F。因文獻[53]的共旋轉推導法考慮了元素節點內力在擾動剛體旋轉時的改變，所以其元素切線剛度矩陣 $\mathbf{k}_p = \mathbf{P}^t \mathbf{k}_\phi \mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{F}_1^t \mathbf{P} - \mathbf{F}_2 \mathbf{G}^t$ 中含幾何剛度矩陣(詳見附錄 F (F.10)式)，但其 \mathbf{k}_ϕ 僅考慮線性部分，故非完整之幾何剛度矩陣。本章用(2.103)式中之切線剛度，但以附錄 F 之 \mathbf{k}_p 取代本文(2.103)式中之 \mathbf{k}_ϕ 。為了解不同元素幾何剛度對平衡迭代及挫屈負荷的影響，本文亦將在附錄 F (F.10)式的 \mathbf{k}_ϕ 中考慮文獻[8]所推導的元素幾何剛度 \mathbf{k}_σ 。本章中將元素切線剛度分為三種：(1)僅考慮線性 \mathbf{k}_ϕ ，不另外加幾何剛度，稱為第零型元素幾何剛度(Type(0))，(2)假設 u 、 v 、 w 為線性位移場，但不考慮 DKT 元素位移場 u 、 v 推導的元素幾何剛度[8]，稱為第一型元素幾何剛度(Type(1))，(3)使用 QST 元素本身的位移場 $u = \mathbf{N}_{u\theta,x} \mathbf{q}_\theta$ 、 $v = \mathbf{N}_{v\theta,x} \mathbf{q}_\theta$ ，並且考慮 DKT 元素

位移場 u 、 v ，假設 w 為線性位移場，推導的元素幾何剛度[8]稱為第二型元素幾何剛度(Type(2))。為探討(2.57)式的 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 中一次項的影響，本章考慮以下兩種情況：Case(a)為 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 只取到零次項，Case(b)為 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 取到一次項。本章中所有的例題皆考慮(2.58)式的 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 和 Projector matrix 的作用。

4.1 半圓環受到單點集中力作用

圖 4.1(a)為半圓環示意圖及其所受到之集中力負荷圖，半圓環兩端為固接，在圓環上端受到一個單點的集中力 $2F$ 。由於結構為左右對稱，因此本文僅考慮一半結構來進行分析。本例題假設在固定端($X_2^G = 0$)的邊界條件設定為 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$ ，結構對稱處($X_1^G = 0$)之邊界條件為 $U = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題使用網格為 20×1 和 40×2 ，平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。圖 4.1(b)、4.1(c)為網格 18×1 示意圖和網格 18×2 示意圖。圖 4.2 是本文的結果與文獻[54]的結果，其中文獻[54]的結果是使用了 320 個四角平面元素得到的結果。本例題使用 Type(0)之元素幾何剛度，網格 20×1 之 Case(a)的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格 20×1 之 Case(b)的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7，網格 40×2 之 Case(a)的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，網格 40×2 之 Case(b)的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，由圖 4.2 可以看出本例題在網格 20×1

和網格 40×25 之 Case(a)和 Case(b)的負荷一位移曲線都與文獻[54]的結果非常相近。

4.2 直角構架受到端點剪力作用

圖 4.3(a)為直角構架示意圖及其所受到之剪力負荷圖，結構左下端為固定端，右上端受一均勻分佈的剪力作用。本例題假設固定端($X_1^G = 0$)的邊界條件為 $U = V = W = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 。本例題考慮兩種不同的網格，分別為圖 4.3(b)的網格 M21 與網格 M22。網格 M21 使用了 38 個三角殼元素，網格 M22 使用了 152 個三角殼元素。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Type(0)之元素幾何剛度，在網格 M21 之 Case(a)的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，在 Case(b)的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5。在網格 M22 之 Case(a)的分析過程中使用了 8 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，在 Case(b)的分析過程中使用了 8 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。圖 4.4 是本例題在不同網格下的結果與文獻[54]的結果，文獻[54]的結果是使用 304 個四角平面元素得到的結果，本例題網格 M11 的 U_A 是取自由端之兩節點水平位移的平均值。由圖 4.4 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[54]的結果相當吻合。

4.3 圓柱殼片段受到單點集中力作用

圖 4.5(a)為圓柱殼片段示意圖及圖 4.5(b)其所受到之集中力負荷圖，結構線段 AD 及 BC 為鉸接，其他兩邊為自由邊，在 E 點受到一個向下的集中力 F 。本例題假設鉸接端線段 AD 及 BC 的邊界條件為 $U = V = W = \theta_x = \theta_z = 0$ 。本例題使用網格為 10×10 ，如圖 4.5(c)所示。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。圖 4.6 是本例題採用 Type(0)之元素幾何剛度的結果與文獻[31]的結果，由圖 4.6 可見本文的結果與文獻[31]的結果相當吻合。case(a)的主要路徑分析過程中使用了 16 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4；次要路徑分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，挫屈負荷 $F_{cr} = 528.949\text{N}$ ， E 點向下位移為 9.707mm 。case(b)的主要路徑分析過程中使用了 27 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4；次要路徑分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，挫屈負荷 $F_{cr} = 529.166\text{N}$ ， E 點向下位移為 9.671mm 。表 4.1 為不同元素幾何剛度在網格 10×10 所偵測到的挫屈負荷，由表 4.1 可以看出本例題由不同元素幾何剛度偵測到的挫屈負荷很相近。由本例題可見本文的數值程序可以準確找出主要平衡路徑、分歧點及次要路徑。

4.4 槽型斷面梁之側向扭轉挫屈(Lateral torsional buckling)

圖 4.7(a)為槽型斷面梁的示意圖及其所受到之均勻位移負荷圖，結構線段 AB 、 BC 及 CD 為固定端，結構線段 EF 、 FG 及 GI 受到均勻軸向位移負

荷 λ ，除了軸向位移外，其位移、旋轉都受到拘束。本例題假設在線段 EF 、 FG 及 GI 之邊界條件為 $V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，固定端線段 AB 、 BC 及 CD 的邊界條件設定為 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段 AB 、 BC 、 CD 、 EF 、 FG 及 GI 方向的正應變為 0。本例題使用了網格 $(2+2+2) \times 14$ 和 $(4+4+4) \times 60$ ，圖 4.7(b) 為網格 $(1+2+1) \times 2$ 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Type(0) 之元素幾何剛度，在網格 $(2+2+2) \times 14$ 之 Case(a) 的分析過程中使用了 21 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1，在 Case(b) 的分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1；在網格 $(4+4+4) \times 60$ 之 Case(a) 的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1；在 Case(b) 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1。表 4.2 是本例題在不同網格及元素幾何剛度下的偵測到的挫屈負荷與文獻[5]的結果，文獻[5]的殼元素是由三角形的平面元素 OPT[23] 和三角形的板元素 DKT[26] 疊加而成，其結果是使用網格 $(2+2+2) \times 15$ 和 $(4+4+4) \times 60$ 得到的結果。由表 4.2 亦可以看出在相同網格下，Case(b) 所偵測到的挫屈負荷比 Case(a) 來的大，但當網格變密時，兩者所偵測到的挫屈負荷逐漸接近；用不同的元素幾何剛度所偵測到的挫屈負荷都相當接近。由表 4.2 可以看出本文的挫屈負荷之收斂值約為 3000，文獻[5]的挫屈負荷之收斂值約為 2500，兩者有相當的差異。

4.5 受壓之簡支承板(Simply supported compressed plate)

圖 4.8(a)為受壓之簡支承板之示意圖及其所受到之均勻位移負荷圖，結構線段 AB 、 BC 、 CD 及 AD 為簡支端，結構線段 AD 及 BC 受到均勻位移負荷 λ 。本例題假設在線段 AB 及 CD 之邊界條件為 $W = \theta_y = \theta_z = 0$ ，在線段 BC 及 AD 之邊界條件為 $W = \theta_x = \theta_z = 0$ ，在 A 點之邊界條件為 $V = 0$ 。本例題使用了網格 4×6 、 4×10 、 6×12 和 8×20 ，圖 4.8(b)為網格 4×6 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用不同的元素幾何剛度。在 Case(a)、Type(0)之元素幾何剛度、網格 4×6 分析過程中使用了 16 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1，在網格 4×10 分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1，在網格 6×12 分析過程中使用了 23 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1，在網格 8×20 分析過程中使用了 15 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 1。表 4.3 是本例題在不同網格下的所偵測到的挫屈負荷與文獻[5]的結果，文獻[5]的殼元素是由三角形的平面元素 OPT[23]和三角形的板元素 DKT[26]疊加而成，其結果是使用網格 4×10 和 8×20 得到的結果。由表 4.3 可以看出本文的結果與文獻[5]的結果相近。由表 4.3 亦可以看出在相同網格下，Case(b)所偵測到的挫屈負荷比 Case(a)來的大，但當網格變密時，兩者所偵測到的挫屈負荷逐漸接近；用不同的元素幾何剛度所偵測到的挫屈負荷都相當接近。

4.6 T 型斷面梁受側向負荷(Transversally loaded T profile)

圖 4.9(a)為 T 型斷面梁之示意圖及其所受到之集中力負荷圖，結構線段 AB 、 CD 和 EF 、 GI 為鉸接，結構 J 點受到集中力負荷。本例題假設在 C 點之邊界條件為 $V=0$ ，在線段 CD 、 GI 之邊界條件為 $U=W=0$ ，在線段 AB 及 EF 之邊界條件為 $W=\theta_y=0$ ，沿線段 CD 及 GI 方向的正應變為 0。本例題使用了網格 $(2+2+4)\times 20$ 、 $(3+3+5)\times 30$ 和 $(5+5+8)\times 50$ ，圖 4.9(b)為網格 4×6 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Case(a)、Type(0)之元素幾何剛度，在網格 $(2+2+4)\times 20$ 的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格 $(3+3+5)\times 30$ 的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格 $(5+5+8)\times 50$ 的分析過程中使用了 7 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2。表 4.4 是本例題在不同網格下所偵測到的挫屈負荷與文獻[5]的結果，文獻[5]的殼元素是由三角形的平面元素 OPT[23]和三角形的板元素 DKT[26]疊加而成，其結果是使用網格 $(2+2+4)\times 20$ 和 $(5+5+8)\times 50$ 得到的結果。由表 4.4 可以看出本文的結果與文獻[5]的結果相近。由表 4.4 亦可以看出在相同網格下，Case(b)所偵測到的挫屈負荷比 Case(a)來的大，但當網格變密時，兩者所偵測到的挫屈負荷逐漸接近；用不同的元素幾何剛度所偵測到的挫屈負荷都相當接近。

4.7 槽型斷面梁受扭矩(Channel section in torsion)

圖 4.10(a)為槽型斷面梁之示意圖及其所受到之集中力負荷與均勻力負荷圖，結構線段 AB 、 BC 、 CD 和 EF 、 FG 、 GI 為鉸接，結構 J 、 K 點受到集中力負荷，線段 AB 、 BC 、 CD 和 EF 、 FG 、 GI 受到均勻力負荷。本例題假設在 M 點之邊界條件為 $U = 0$ ，在 B 和 F 點之邊界條件為 $V = 0$ ，在線段 BC 和 FG 之邊界條件為 $W = \theta_x = 0$ 。本例題使用網格 $(1+2+1) \times 20$ 和 $(2+4+2) \times 40$ ，圖 4.10(b)為網格 $(1+2+1) \times 2$ 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Case(a)、Type(0)之元素幾何剛度，在網格 $(1+2+1) \times 20$ 的分析過程中使用了 127 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格 $(2+4+2) \times 40$ 的分析過程中使用了 229 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2。圖 4.11 是本例題在不同網格下的負荷一位移曲線與文獻 [16] 的結果，文獻 [16] 的結果是使用網格 $(1+2+1) \times 20$ 得到的結果。表 4.5 是本例題之負荷一位移曲線的極限點與文獻 [5] 的結果。由圖 4.11 可以發現本文在相同位移 ($-W_j$)，Case(b) 所需的力負荷比 Case(a) 大，其差距隨著位移增加而增加，但隨著網格增加而減少。由圖 4.11 及表 4.5 可以發現本文與文獻 [16] 的負荷一位移曲線及文獻 [5] 極限點都有相當的差距。

4.8 直角梁受到單點集中力作用

圖 4.12(a)為直角梁示意圖及其所受到之集中力負荷圖，直角梁前端為固定端，末端為自由端，在直角梁末端受到一個單點的集中力 P 。本例題

假設固定端線段 BD 及 BF 的邊界條件設定為 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段 BD 及 BF 方向的正應變為 0。本例題考慮兩種不同的網格，分別為網格 $(2+2) \times 25$ 與網格 $(4+6) \times 60$ ，圖 4.12(b) 為結構劃分成網格 $(2+3) \times 2$ 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Case(a)、Type(1) 之元素幾何剛度，在網格 $(2+2) \times 25$ 的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，在網格 $(4+6) \times 60$ 的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。圖 4.13 是本例題在不同網格下的結果與文獻[5]的結果，其中 OPT[5]的結果是使用了網格 $(2+2) \times 25$ 得到的結果，ALL[5]的結果是使用網格 $(4+6) \times 60$ 得到的結果。由圖 4.13 可見本文 Case(a) 和 Case(b) 的之負荷一位移曲線都與文獻[5]使用 OPT 元素的結果相當吻合。

4.9 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用

圖 4.14(a) 為圓柱殼示意圖及其所受到之集中力負荷圖，圓柱殼前端為自由端，末端為固定端，在圓柱殼上下端各受到一個單點的集中力 F 。由於結構對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析。本例題假設線段 BC 的邊界條件為 $W = \theta_x = \theta_y = 0$ ，線段 AD 的邊界條件為 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ ，線段 CD 的邊界條件設定為 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題使用網格 16×16 、 32×32 和 40×40 ，圖 4.14(b) 為網格 16×16 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Case(a)、Type(0) 之元素幾何剛度，在

網格 16×16 的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7，網格 32×32 的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7，網格 40×40 的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7。圖 4.15 是本例題在不同網格下的的負荷位移曲線都與文獻 [16,30] 的結果，其中文獻 [16] 使用網格 16×16 的三角殼元素，文獻 [30] 使用軟體 ABAQUS 的四邊形曲殼元素 S4R，網格為 32×32 。由圖 4.15 可以可出當位移較大時，Case(a) 的曲線皆在文獻 [30] 的曲線上方，Case(b) 的曲線皆在文獻 [30] 的曲線下方，當網格越密時，Case(a) 和 Case(b) 的負荷位移曲線都曲線皆會越接近文獻 [30] 的曲線。

4.10 半球殼受到單點集中力作用

圖 4.16(a) 為半球殼示意圖及其所受到之集中力負荷圖，半球殼頂端為固定端，半球殼底端為自由端，在半球殼前後左右端各受到一個單點的集中力 $2F$ 。由於結構對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析。本例題假設在半球殼頂端處 C 點的邊界條件設定為 $U = V = W = 0$ ，線段 AC 的邊界條件為 $U = \theta_y = \theta_z = 0$ ，線段 BC 的邊界條件為 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ 。本例題使用網格 12×12 ，276 個三角殼元素，圖 4.16(b) 為網格 12×12 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Type(0) 之元素幾何剛度，在網格 12×12 之 Case(a) 分析過程中使用了 17 個增量，每個增量的平

均迭代次數約為 3；在 Case(b) 分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。圖 4.17 是本例題的結果與文獻[16]的結果，文獻[16]的結果是使用網格 12×12 ，276 個三角殼元素得到的結果。由圖 4.17 可以看出本例題之 Case(a)和 Case(b)在 A、B 兩點的負荷一位移曲線與文獻[16]的結果都幾乎重合。

4.11 圓柱殼受一對集中力(Pullout of an open-ended cylindrical shell)

圖 4.18(a)為圓柱殼受一對集中力示意圖。圓柱殼前後兩端為自由端，在圓柱殼上下端各受到一個單點的集中力 $2F$ 。由於結構對稱，因此本例題僅考慮八分之一結構來進行分析。本例題假設在線段 AD 的邊界條件為 $U = \theta_y = \theta_z = 0$ ，線段 AB 的邊界條件為 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ ，線段 BC 的邊界條件為 $W = \theta_x = \theta_y = 0$ 。本例題使用網格 16×24 和 24×36 ，圖 4.18(b)為網格 16×24 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Case(a)、Type(0)之元素幾何剛度，在網格 16×24 的分析過程中使用了 29 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格 24×36 的分析過程中使用了 42 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2。圖 4.19 是本例題在不同網格下之負荷一位移曲線與文獻[30]的結果，其中文獻[30]使用軟體 ABAQUS 的曲殼元素 S4R，網格為 16×24 。由圖 4.19 可以看出本例題之 Case(a)和 Case(b)在不同網格的結果與文獻[30]的結果很接近。

4.12 圓柱殼受四個徑向集中力作用(Cylindrical shell pinched by four radial forces)

圖 4.20(a)為圓柱殼受到四個徑向集中力示意圖。圓柱殼前後兩端為自由端，在圓柱殼上下左右端各受到一個單點的集中力 P 。本例題假設在 A 點和 D 點的邊界條件為 $U = V = 0$ ， B 點和 C 點的邊界條件為 $V = W = 0$ 。本例題使用網格 8×48 和 12×72 ，圖 4.20(b)為網格 8×48 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，負荷參數為 $\lambda = \frac{PR^2}{DL}$ ， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ，其中 R 為半徑、 L 為高度、 h 為厚度、 E 為楊氏模數和 ν 為蒲松比。本例題使用 Type(0) 之元素幾何剛度，網格 8×48 之 Case(a) 的主要路徑分析過程中使用了 27 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4；次要路徑分析過程中使用了 25 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，主要路徑上偵測到三個挫屈負荷參數分別為 6.037、10.537 和 11.738。次要路徑為在第二個分歧點將模態當擾動位移後，結構的位移-負荷曲線圖。網格 12×72 之 Case(a) 的主要路徑分析過程中使用了 28 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 3；次要路徑分析過程中使用了 26 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，主要路徑上偵測到三個挫屈負荷參數分別為 6.219、10.382 和 11.539。圖 4.21 為本例題在不同網格下的負荷-位移曲線與文獻[32]的結果，文獻[32]使用網格 12×72 的三角殼元素。由圖 4.21 可以看出本文網格 12×72 之負荷-位移曲線很接近文獻[32]的曲線。表 4.6 為 Case(a) 和 Case(b) 使用不同元素幾何剛度所偵

測到的挫屈負荷，由表 4.6 和圖 4.21 可以看出，當位移較小時， $T_{x\theta}$ 的一次項對本例題的負荷一位移曲線幾乎沒有影響，但對第一個挫屈負荷參數有相當的影響，由表 4.6 亦可以看出不同元素幾何剛度對挫屈負荷參數影響很小。由表 4.6 可以看出本例題在網格 12×72 的結果與文獻[32]的結果很相近，但本文僅偵測到三個挫屈負荷參數，而文獻[32]偵測到四個挫屈負荷參數。

4.13 開口型半球殼受徑向集中力作用(Hemispherical shell subjected to alternating radial forces)

圖 4.22(a)為半球殼受到集中力示意圖。半球殼頂端為一個圓形開口與球心夾 18° ，底端為自由端，在半球殼前後左右端各受到一個單點的集中力 P 。由於結構對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析。本例題假設在線段 AD 的邊界條件為 $V = \theta_x = \theta_z = 0$ ， A 點的邊界條件為 $W = 0$ ，線段 BC 的邊界條件為 $U = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題考慮了線性與非線性分析，本例題線性分析時使用網格 12×12 、 16×16 、 24×24 和 64×64 ，非線性分析時使用網格 12×12 、 16×16 、 24×24 ，圖 4.22(b)為網格 12×12 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。表 4.7 為本例題在不同網格下線性分析的結果與文獻[55]的結果，文獻[55]是使用四節點殼元素。由表 4.7 可以看出本例題在網格較密時才與文獻[55]的結果相近。本例題使用 Type(0)之元素幾何剛度、Case(a)，在網格 12×12 的分析過程中使用了 27 個增量，每個增量

的平均迭代次數約為 7，在網格 16×16 的分析過程中使用了 34 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，在網格 24×24 的分析過程中使用了 49 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。圖 4.23 是本文的負荷一位移曲線與文獻[30,39]的結果，文獻[30]使用軟體 ABAQUS 的曲殼元素 S4R，網格為 12×12 ，文獻[39]是使用網格 24×24 的八節點殼元素。由圖 4.23 可以發現在相同網格下，結構變形越大，Case(a)與 Case(b)的曲線會分開的越明顯。當網格變密時，Case(a)和 Case(b)的曲線會越接近文獻[30]的曲線。表 4.8 為本例題在 $P = 400$ 時， B 點的位移與文獻[30,39,56]的結果，文獻[56]元素的節點比文獻[39]元素的節點多考慮一個旋轉自由度。由表 4.8 可以看出本例題在不同網格的結果與文獻[39]的結果相近。

4.14 裂縫環形板受均勻力負荷(Slit annular plate subjected to lifting line force)

圖 4.24(a)為裂縫環形板受均勻力負荷作用示意圖。環形板在裂縫一側受均勻力作用，單位長度之力為 P ，裂縫另一側線段 AB 為固定端。本例題假設在線段 AB 的邊界條件為 $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題使用網格 6×30 和 10×80 ，圖 4.24(b)為網格 6×30 示意圖。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} 。本例題使用 Type(0)之元素幾何剛度，在 Case(a)條件下，網格 6×30 的分析過程中使用了 24 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7，網格 10×80 的分析過程中使用了 43 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。

圖 4.25 是本例題在不同網格下之負荷一位移曲線與文獻[30]的結果，文獻[30]使用軟體 ABAQUS 的曲殼元素 S4R，網格為 6×30 。由圖 4.25 可以看出本例題在不同網格的結果與文獻[30]的結果相當吻合。

4.15 聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用

本例題為文獻[29]的實驗，實驗的流程詳見附錄G。圖4.26為聚酯圓柱薄殼的示意圖。本例題第一階段的邊界條件設定為：

$$\text{線段 } FG \text{ 的 } V = W = \theta_x = \theta_z = \varepsilon_y = 0$$

$$\text{線段 } HI \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_z = \varepsilon_y = 0$$

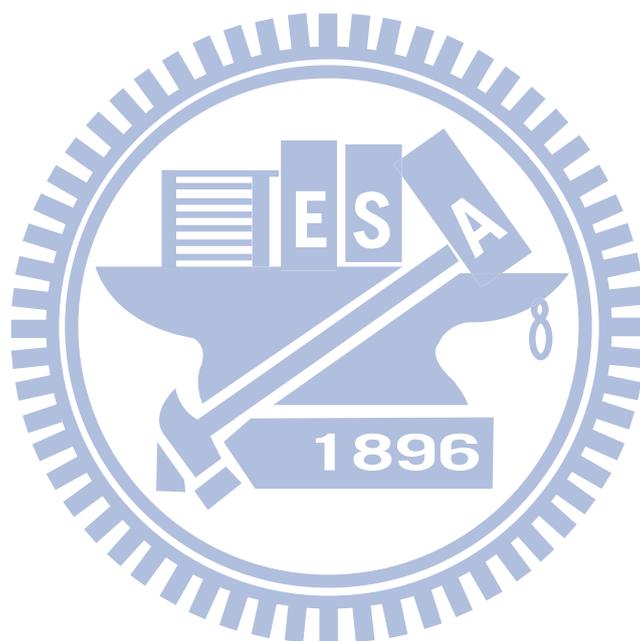
第一階段的位移負荷為：線段 FG 受到 $U = 28.64787748\lambda$ 、 $\theta_y = -\lambda$ 的位移負荷，線段 HI 受到 $\theta_y = \lambda$ 的位移負荷，其中 λ 為位移負荷參數。當 λ 到達 0.349066 時進入第二階段。第二階段的邊界設定為：

$$\text{線段 } FG \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \varepsilon_y = 0$$

$$\text{線段 } HI \text{ 的 } U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \varepsilon_y = 0$$

第二階段的位移負荷為： E 點受到 $W = -\lambda$ 。本例題使用網格 24×48 和 30×60 ，第一階段採用的容許誤差為 10^{-5} ，第二階段採用的容許誤差為 10^{-4} 。因本例題在 Case(b)情況下 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 僅對剛度作用，故在 Case(a)與 Case(b)情況下所偵測到的位移－負荷參數曲線相同。因網格 24×48 和 30×60 所偵測到的位移－負荷參數曲線相同，故僅呈現網格 30×60 所偵測到的結果。

圖 4.27 為網格 30×60 在第一階段 E 點的位移—負荷參數曲線圖，本文得到的曲線幾乎與文獻[7]的曲線重合。圖 4.28 為網格 30×60 在第二階段與文獻 [7]、[19] 數值分析以及文獻[19]實驗得到的 E 點的反力—負荷參數曲線圖。表 4.9 為本例題在不同網格下的所偵測到的挫屈負荷。由表 4.9 可以看出不同元素幾何剛度對挫屈負荷參數影響很小。本例題在偵測到分歧點時，將模態當擾動位移皆無法進入次要路徑。



第五章 結論與展望

5.1 結論

本研究以共旋轉全拉格朗日推導法(Co-rotational total Lagrangian formulation)、von Karman 板正確的變形機制、一致性二階線性化(Consistent second order linearization)及虛功原理，推導一個具面內旋轉自由度平面三角殼元素，該元素有 3 個節點、每個節點有 9 個自由度的平面三角殼元素，元素的節點自由度為節點位移向量的 3 個分量、節點旋轉向量的 3 個分量及節點平面應變的 3 個分量，為了描述元素的變形，本研究又定義了其他兩組節點參數，並考慮不同元素節點參數間的非線性轉換關係。由本文分析之數值例題的結果，可得以下結論：

1. 本文在增量平衡迭代時加入 Projector matrix 可以有效地改善收斂速度。
2. 當元素數較少且結構變形較大時，轉換矩陣 $\mathbf{T}_{x\theta}$ (2.57 式) 的一次項對有些結構之平衡路徑有明顯的影響。但隨著元素數目的增加， $\mathbf{T}_{x\theta}$ 的一次項對平衡路徑的影響逐漸減少，但仍對平衡路徑之分歧點的位置有相當的影響。
3. 本文所使用決定元素變形參數的方法，可以確實應用在幾何非線性分析上，並有正確的結果。
4. 本文所推導的元素節點內力保留到變形參數的二次項，但數值計算時僅

取到線性項。本文的元素切線剛度矩陣僅為近似的切線剛度矩陣。本文中比較了數種近似切線剛度矩陣，由數值例題的結果顯示各種近似切線剛度矩陣都有相近的效果。

5. 除了無法模擬例題十五之實驗結果外，本文之例題的數值結果與文獻的結果都相當吻合。這可能是本文的元素節點內力僅取到線性項，且近似切線剛度矩陣可能無法模擬造成例題十五挫屈的機制。

5.2 未來研究方向

本文採用 DKT 板元素的位移場，該元素沒有定義元素內部的側向位移 w ，本文在數值模擬時元素節點內力僅取到線性項且元素切線剛度矩陣僅為近似的切線剛度矩陣，這些也許都會影響平衡迭代的收斂速度和偵測平衡路徑上分歧點及挫屈模態的準確性，因此以後研究可以考慮把 DKT 板元素的位移場替換成具有側向位移場 w 的三角板元素以及考慮元素節點內力的二次項和完整的元素切線剛度矩陣。

參考文獻

- [1] K. J. Bathe, L. W. Ho, “A simple and effective element for analysis of general shell structures”, Computer and Structure, vol. 13, pp. 673–681, 1981.
- [2] C. Pacoste, “Co-rotational flat facet triangular element for shell instability”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 156, pp. 75–110, 1998.
- [3] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, “An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures”, Computer and Structure, vol. 86, pp. 850–858, 2008.
- [4] K. M. Hsiao, “Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element”, Computer and Structure, vol. 25, pp. 665–674, 1987.
- [5] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of the linear element for corotational triangular shells”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pp. 6362–6377, 2006.
- [6] 楊禮龍, “薄殼結構在位移負荷作用之下的幾何非線性分析”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2006.
- [7] 楊水勝, 拘限彈性薄板受側向位移負荷的行為研究, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2007.
- [8] 林寬政, “平面三角形殼元素之改善研究”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2010.

- [9] 盧致群, “高階平面三角形殼元素之研究”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2011.
- [10] Z. X. Li, L. Vu-Quoc, “An efficient co-rotational formulation for curved triangular shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 72, pp. 1029–1062, 2007.
- [11] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, “Corotational non-linear analysis of thin plates and shells using a new shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, pp. 859–885, 2007.
- [12] L. Kang, Q. Zhang, Z. Wang, “Linear and geometrically nonlinear analysis of novel flat shell elements with rotational degrees of freedom”, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 45, pp. 386–392, 2009.
- [13] N. Carpenter, H. Stolarski, T. Belytschko, “A flat triangular shell element with improved membrane interpolation”, Communications in Applied Numerical Methods, vol. 1, pp. 161–168, 1985.
- [14] W. Chen, Y. K. Cheung, “Refined non-conforming triangular elements for analysis of shell structures”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pp. 433–455, 1999.
- [15] J. G. Kim, J. K. Lee, Y. K. Park, “A new 3-node triangular flat shell element”, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 18, pp. 153–159, 2002.
- [16] J. M. Battini, “A modified corotational framework for triangular shell elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pp. 1905–1914, 2007.
- [17] 林育丞, “具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2008.

- [18] J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho, “A study of three-node triangular plate bending elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineer, vol. 15, pp. 1771–1812, 1980.
- [19] A. Boudaoud, P. Patrício, Y. Couder, M. B. Amar, “Dynamics of singularities in a constrained elastic plate”, Nature, vol. 407, pp. 718–720, 2000.
- [20] J. H. Argyris, I. Fried, D. W. Scharpf, “The tuba family of plate elements for the matrix displacement method”, The Aeronautical Journal of the Aeronautical Society, vol. 72, pp. 701–709, 1968.
- [21] D. J. Allman, “A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis”, Computers and Structures, vol. 19, pp. 1–8, 1984.
- [22] L. Damkilde, M. Gronne, “An improved triangular element with drilling rotations”, Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics, pp. 135–138, 2002.
- [23] C. A. Felippa, “A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pp. 2125–2168, 2003.
- [24] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz, “Triangular elements in plate bending—conforming and nonconforming solutions”, Proceeding First Conference on Matrix in Structural Mechanics, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, pp. 66–80, 1966.
- [25] R. W. Clough, J. L. Tocher, “Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending”, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, pp. 515–545, 1965.

- [26] J. A. Stricklin, W. E. Haisler, P. R. Tisdale, R. Gunderson, “A rapidly converging triangular plate element”, AIAA Journal, vol. 7, pp. 180–181, 1969.
- [27] D. J. Allman, “Triangular finite element bending with constant and linearly varying bending elements”, High Speed Comput. Elastic Struct. Tom 1, pp. 105–107, 1971.
- [28] J. L. Batoz, “An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, pp. 1077–1089, 1982.
- [29] G. R. Cowper, E. Kosko, G. M. Lindberg, M. D. Olson, “Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element”, AIAA Journal, vol. 7, pp. 1957–1965, 1969.
- [30] K. Y. Sze, X. H. Liu, S. H. Lo, “Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells”, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40, pp. 1551–1569, 2004.
- [31] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, “Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Pade approximants”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pp. 1987–2012, 2004.
- [32] V. V. Kuznetsov, S. V. Levyakov, “Phenomenological invariant-based finite-element model for geometrically nonlinear analysis of thin shells”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pp. 4952–4965, 2007.
- [33] E. H. Boutyour, L. Azrar, M. Potier-Ferry, “Vibration of buckled elastic structures with large rotations by an asymptotic numerical method”, Computers and Structures, vol. 84, pp. 93–101, 2006.

- [34] A. Eriksson, C. Pacoste, “Element formulation and numerical techniques for stability problems in shells”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, pp. 3775–3810, 2002.
- [35] P. Patrício, W. Krauth, “Numerical solutions of the Von Karman equations for a thin plate”, Journal of Modern Physics, vol. 8, pp. 427–434, 1997.
- [36] K. Wisniewski, “A shell theory with independent rotations for relaxed Biot stress and right stretch strain”, Computational Mechanics, vol. 21, pp. 101–122, 1998.
- [37] C. Sansour, H. Bufler, “An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation”, International journal for numerical methods in engineering, vol. 34, pp. 73–115, 1992.
- [38] K. Wisniewski, E. Turska, “Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, pp. 1117–1135, 2000.
- [39] M. Li, F. Zhan, “The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part IV. The FE formulation of Mindlin plate and shell based on Green-Lagrangian strain”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 182, pp. 187–203, 2000.
- [40] C. Sansour, H. Bednarczyk, “The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 120, pp. 1–32, 1995.
- [41] L. E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J. ,1969
- [42] Th. v. Kármán, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau.,
Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 4/4, 311-385, 1910.

- [43] P. G. Ciarlet, “A Justification of the von Karman Equations”, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 73, pp. 349–389, 1980.
- [44] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements”, Communications in Numerical Method in Engineering, vol.20, pp. 819–825, 2004
- [45] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [46] K. M. Hsiao, “Corotational Total Lagrangian Formulation for Three-Dimensional Beam Element”, AIAA Journal, 30, No. 3, pp. 797–804, 1992.
- [47] D. J. Dawe, Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures, Clarendon Press, 1984.
- [48] T. J. Chung, Continuum Mechanics, Prentice-Hall, N. J., 1988
- [49] R. D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1981
- [50] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, CENTRAL BOOK CO., 1971.
- [51] A. P. Boreisi, K. P. Chong, Elasticity In Engineering Mechanics, John Wiley & Sons, 1999.
- [52] M. A. Crisfield, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through”, Computers and Structures, vol. 13, pp.55–62, 1981
- [53] B. Nour-Omid, C. C. Rankin, “Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 93, pp. 353–384, 1991.
- [54] J. M. Battini, “A non-linear corotational 4-node plane element”, Mechanics Research Communications, vol. 35, pp. 408–413, 2008.

- [55] K. Wisniewski, E. Turska, “Four-node mixed Hu-Washizu shell element with drilling rotation”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 90, pp. 506–536, 2012
- [56] M. Li, F. Zhan, “The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part V. The shell element with drilling degree of freedom based on Biot strain”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 189, pp. 743–759, 2000.

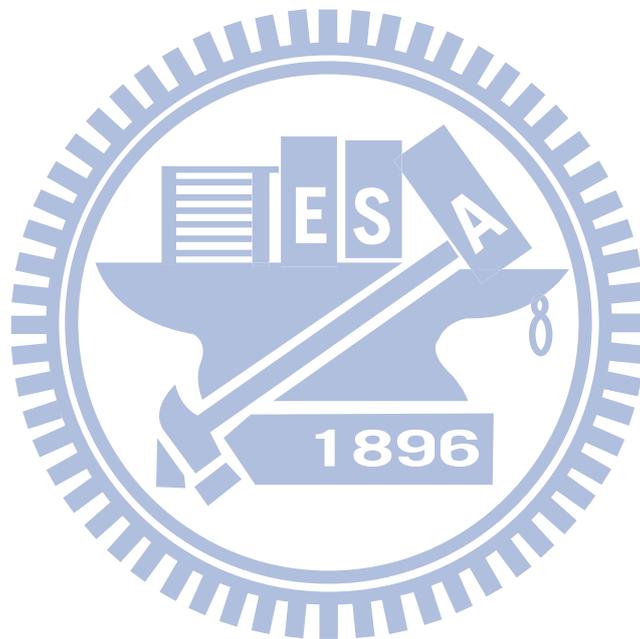


表 4.1 圓柱殼片段受到單點集中力作用的挫屈負荷(例題 4.3，Mesh 10×10)

$T_{x\theta}$	Type of Kg	Buckling load
(a)	(0)	528.949
(a)	(1)	528.946
(a)	(2)	528.726
(b)	(0)	529.166
(b)	(1)	529.163
(b)	(2)	529.093

表 4.2 槽型斷面梁的挫屈負荷 (例題 4.4)

	Mesh	$T_{x\theta}$	Type of Kg	Buckling load	
Present	(2+2+2)×14	(a)	(0)	3022.17	
	(2+2+2)×14	(a)	(1)	2999.39	
	(2+2+2)×14	(a)	(2)	3005.15	
	(2+2+2)×14	(b)	(0)	3137.76	
	(2+2+2)×14	(b)	(1)	3112.96	
	(2+2+2)×14	(b)	(2)	3119.37	
	(4+4+4)×60	(a)	(0)	2969.00	
	(4+4+4)×60	(a)	(1)	2957.80	
	(4+4+4)×60	(a)	(2)	2972.12	
	(4+4+4)×60	(b)	(0)	2995.84	
	(4+4+4)×60	(b)	(1)	2984.41	
	(4+4+4)×60	(b)	(2)	2999.13	
	ref.[5]	(2+2+2)×15	-	-	2618.26
		(4+4+4)×60	-	-	2529.29

表 4.3 受壓之簡支承板的挫屈負荷 (例題 4.5)

	Mesh	$T_{x\theta}$	Type of Kg	Buckling load	
Present	4×6	(a)	(0)	60.9536	
	4×6	(a)	(1)	60.9551	
	4×6	(a)	(2)	60.7836	
	4×6	(b)	(0)	63.0364	
	4×6	(b)	(1)	63.0380	
	4×6	(b)	(2)	62.8510	
	4×10	(a)	(0)	59.3858	
	4×10	(a)	(1)	59.3903	
	4×10	(a)	(2)	59.2272	
	4×10	(b)	(0)	61.7979	
	4×10	(b)	(1)	61.8026	
	4×10	(b)	(2)	61.6275	
	6×12	(a)	(0)	58.5703	
	6×12	(a)	(1)	58.5704	
	6×12	(a)	(2)	58.4311	
	6×12	(b)	(0)	59.5753	
	6×12	(b)	(1)	59.5754	
	6×12	(b)	(2)	59.4167	
	8×20	(a)	(0)	58.1172	
	8×20	(a)	(1)	58.1191	
	8×20	(a)	(2)	57.9698	
	8×20	(b)	(0)	58.5838	
	8×20	(b)	(1)	58.5882	
	8×20	(b)	(2)	58.4232	
	ref.[5]	4×10	-	-	59.1703
		8×20	-	-	58.4762

表 4.4 T 型斷面梁的挫屈負荷 (例題 4.6)

	Mesh	$T_{x\theta}$	Type of Kg	Buckling load
Present	(2+2+4)×20	(a)	(0)	2993.08
	(2+2+4)×20	(a)	(1)	2992.78
	(2+2+4)×20	(a)	(2)	2990.83
	(2+2+4)×20	(b)	(0)	3098.05
	(2+2+4)×20	(b)	(1)	3097.52
	(2+2+4)×20	(b)	(2)	3095.79
	(3+3+5)×30	(a)	(0)	2942.77
	(3+3+5)×30	(a)	(1)	2942.56
	(3+3+5)×30	(a)	(2)	2940.45
	(3+3+5)×30	(b)	(0)	3005.97
	(3+3+5)×30	(b)	(1)	3005.67
	(3+3+5)×30	(b)	(2)	3003.68
	(5+5+8)×50	(a)	(0)	2863.83
	(5+5+8)×50	(a)	(1)	2863.71
	(5+5+8)×50	(a)	(2)	2861.54
	(5+5+8)×50	(b)	(0)	2890.41
	(5+5+8)×50	(b)	(1)	2890.27
	(5+5+8)×50	(b)	(2)	2888.11
ref.[5]	(2+2+4)×20	-	-	3103.86
	(5+5+8)×50	-	-	2890

表 4.5 槽型斷面梁的極限點 (例題 4.7)

	Mesh	$\mathbf{T}_{x\theta}$	$-W_J^L$	Limit point
Present	(1+2+1)×20	(a)	19.9372	1111.40
	(1+2+1)×20	(b)	19.6097	1159.65
	(2+4+2)×40	(a)	20.4243	1112.90
	(2+4+2)×40	(b)	21.1579	1128.17
ref.[5]	(1+2+1)×20	-	-	1011.92
	(3+8+3)×56	-	-	1080.86

* W_J^L 為 J 點在極限點的側向位移

表 4.6 圓柱殼受四個徑向集中力作用的挫屈負荷 (例題 4.12)

	Mesh	$\mathbf{T}_{x\theta}$	Kg	B_1		B_2		B_3		
				λ	$-W_A/R$	λ	$-W_A/R$	λ	$-W_A/R$	
Present	8×48	(a)	(0)	6.037	0.0673	10.537	0.1202	11.738	0.1370	
	8×48	(a)	(1)	6.033	0.0673	10.537	0.1202	11.738	0.1370	
	8×48	(a)	(2)	6.033	0.0673	10.537	0.1202	11.738	0.1370	
	8×48	(b)	(0)	6.626	0.0766	10.987	0.1244	11.839	0.1410	
	8×48	(b)	(1)	6.626	0.0766	10.987	0.1244	11.841	0.1410	
	8×48	(b)	(2)	6.619	0.0765	10.986	0.1244	11.816	0.1409	
	12×72	(a)	(0)	6.219	0.0708	10.382	0.1193	11.539	0.1363	
	12×72	(a)	(1)	6.219	0.0708	10.382	0.1193	11.539	0.1363	
	12×72	(a)	(2)	6.218	0.0709	10.382	0.1193	11.538	0.1363	
	12×72	(b)	(0)	6.516	0.0754	10.489	0.1202	11.575	0.1371	
	12×72	(b)	(1)	6.515	0.0754	10.489	0.1202	11.575	0.1371	
	12×72	(b)	(2)	6.508	0.0752	10.489	0.1202	11.574	0.1371	
	ref.[32]	8×48	-	-	6.590	0.0767	10.210	0.1179	11.295	0.134
		12×72	-	-	6.397	0.0738	10.251	0.1183	11.351	0.135

*Case(b)迭代剛度使用元素幾何剛度 Type(0)且不考慮 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 轉換

表 4.7 開口型半球殼 B 點位移之線性解(例題 4.13, P = 1)

	$-V_B \times 100$					
	4×4	8×8	12×12	16×16	24×24	64×64
Present			8.3123	8.9851	9.2743	9.3503
ref.[55]	9.2866	9.3824		9.3839		9.3714

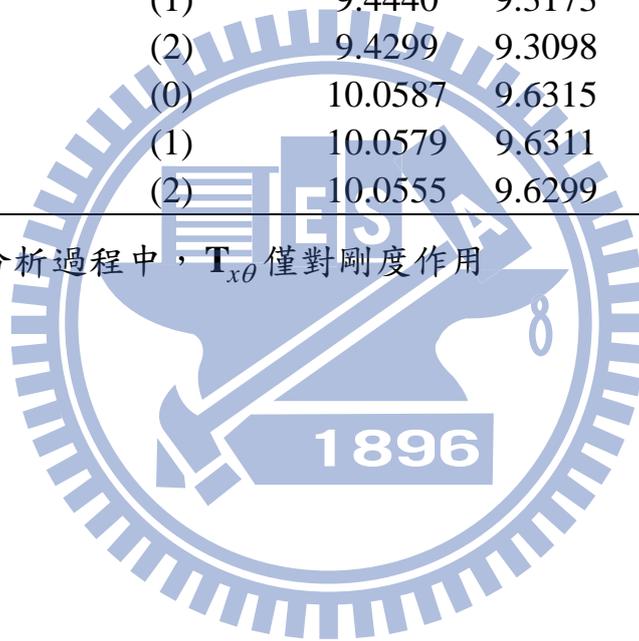
表 4.8 開口型半球殼 B 點位移的非線性解(例題 4.13, P = 400)

	Mesh	$T_{x\theta}$	$-V_B$
Present	12×12	(a)	7.934
	12×12	(b)	7.790
	16×16	(a)	8.045
	16×16	(b)	7.954
	24×24	(a)	8.111
	24×24	(b)	8.076
ref.[30]	12×12	-	8.178
	16×16	-	8.178
ref.[39]	16×16	-	8.112
	24×24	-	8.148
ref.[56]	16×16	-	7.629
	24×24	-	7.714

表 4.9 聚酯圓柱薄殼受兩階段負荷作用的挫屈負荷 (例題 4.15)

Mesh	$T_{x\theta}$	Type of Kg	B_1	$-W_E$	B_2	$-W_E$
24×48	(a)	(0)	9.5614	9.3320	18.2032	13.5716
24×48	(a)	(1)	9.5674	9.3358	18.1976	13.5712
24×48	(a)	(2)	9.5613	9.3313	18.2121	13.5710
24×48	(b)	(0)	10.8078	9.9395	16.4032	13.4939
24×48	(b)	(1)	10.7919	9.9314	16.3995	13.4940
24×48	(b)	(2)	10.7903	9.9301	16.3948	13.4941
30×60	(a)	(0)	9.4440	9.3173	18.2274	13.6123
30×60	(a)	(1)	9.4440	9.3173	18.2255	13.6123
30×60	(a)	(2)	9.4299	9.3098	18.2310	13.6123
30×60	(b)	(0)	10.0587	9.6315	16.5281	13.5306
30×60	(b)	(1)	10.0579	9.6311	17.9329	13.5969
30×60	(b)	(2)	10.0555	9.6299	17.9362	13.5967

*使用 Case(b)分析過程中， $T_{x\theta}$ 僅對剛度作用



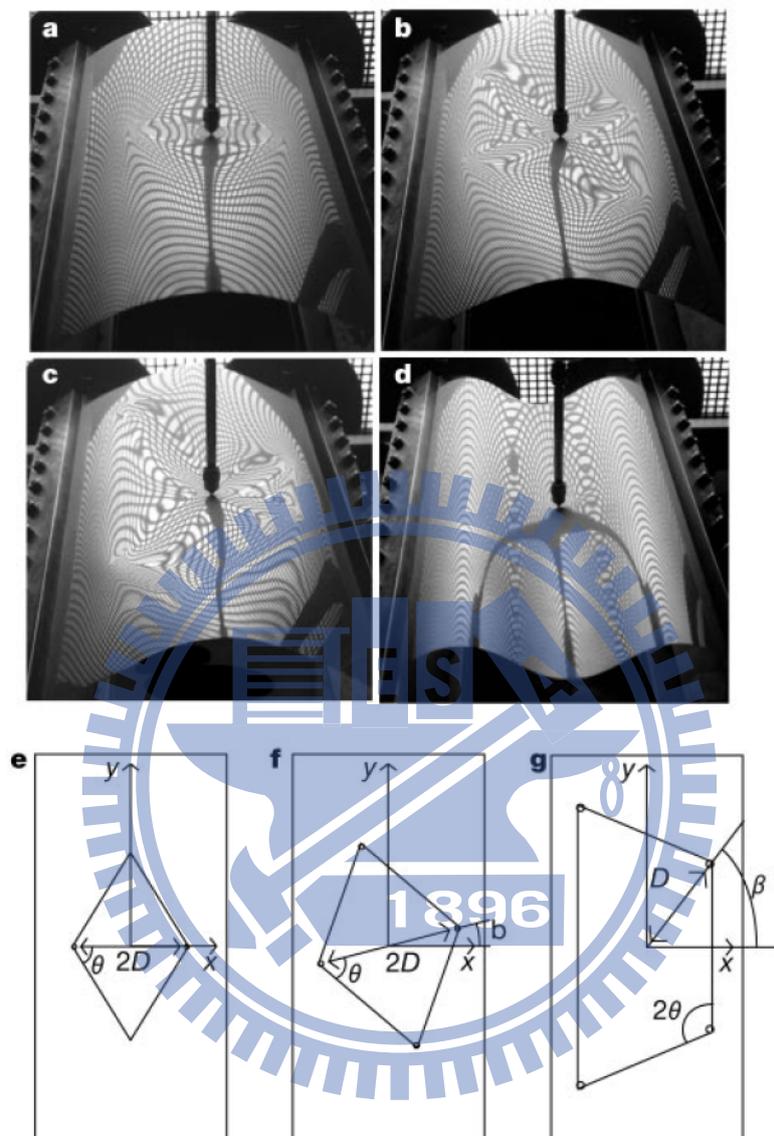


圖 1.1 文獻[19]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及
對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g)

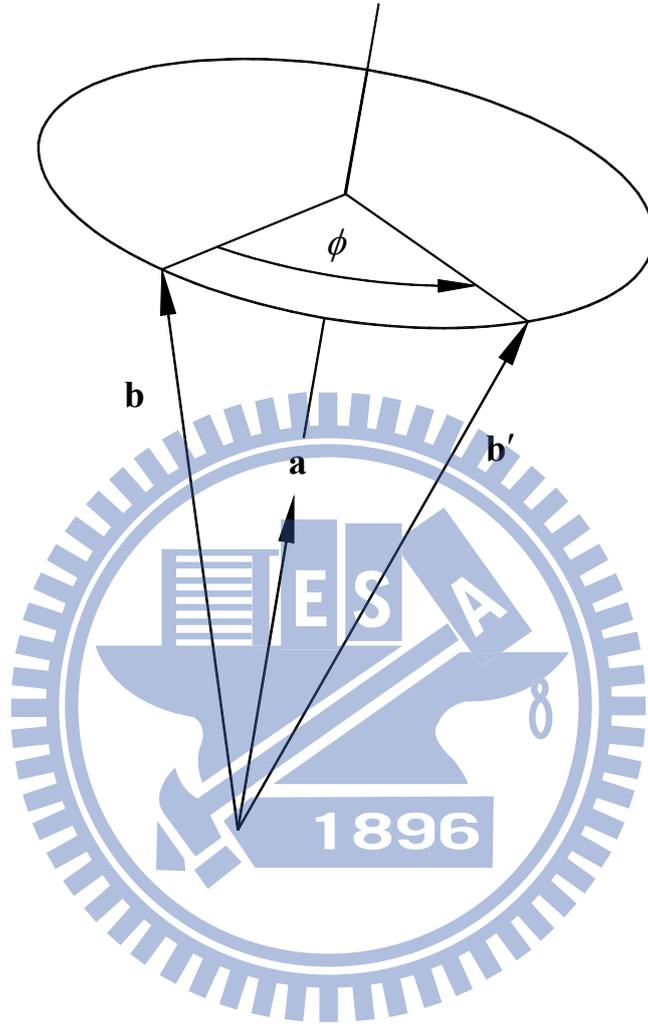


圖 2.1 旋轉向量

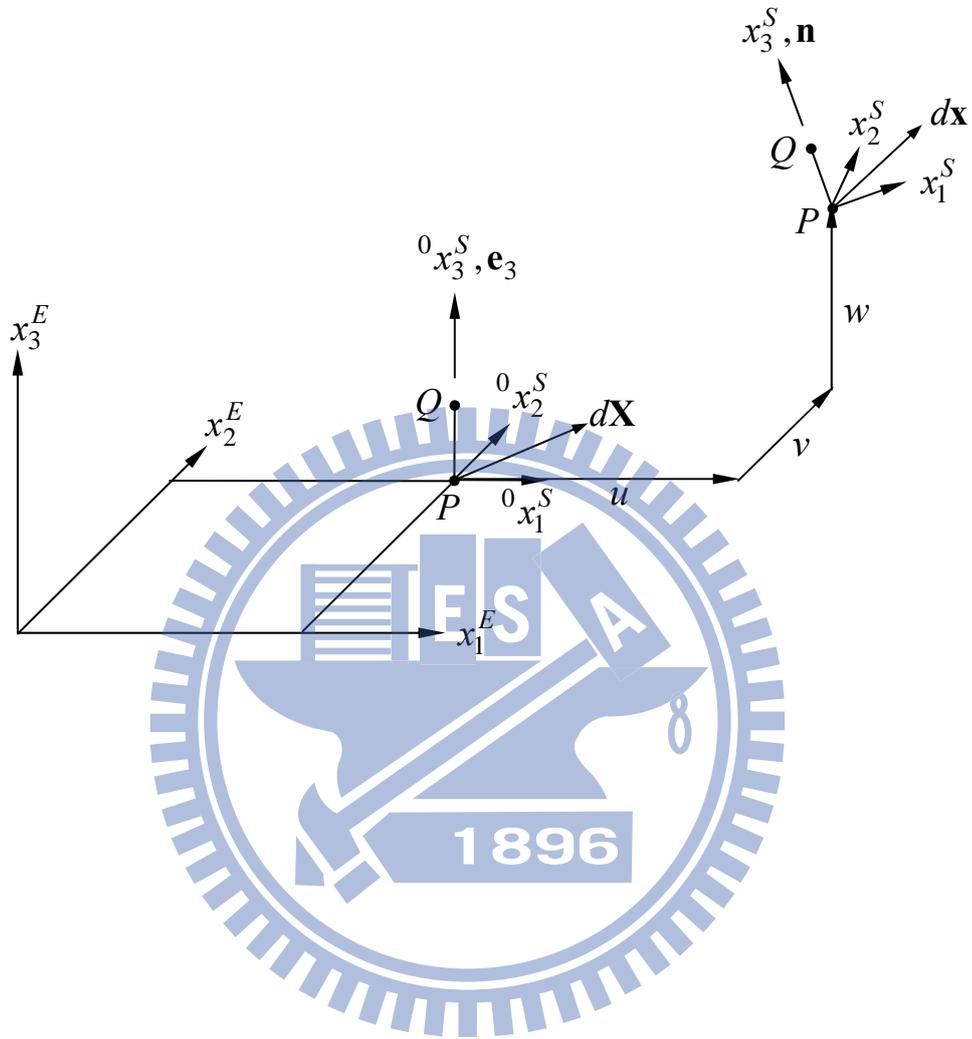


圖 2.2 薄殼中 P 、 Q 點之位移以及元素座標與中平面座標之關係圖

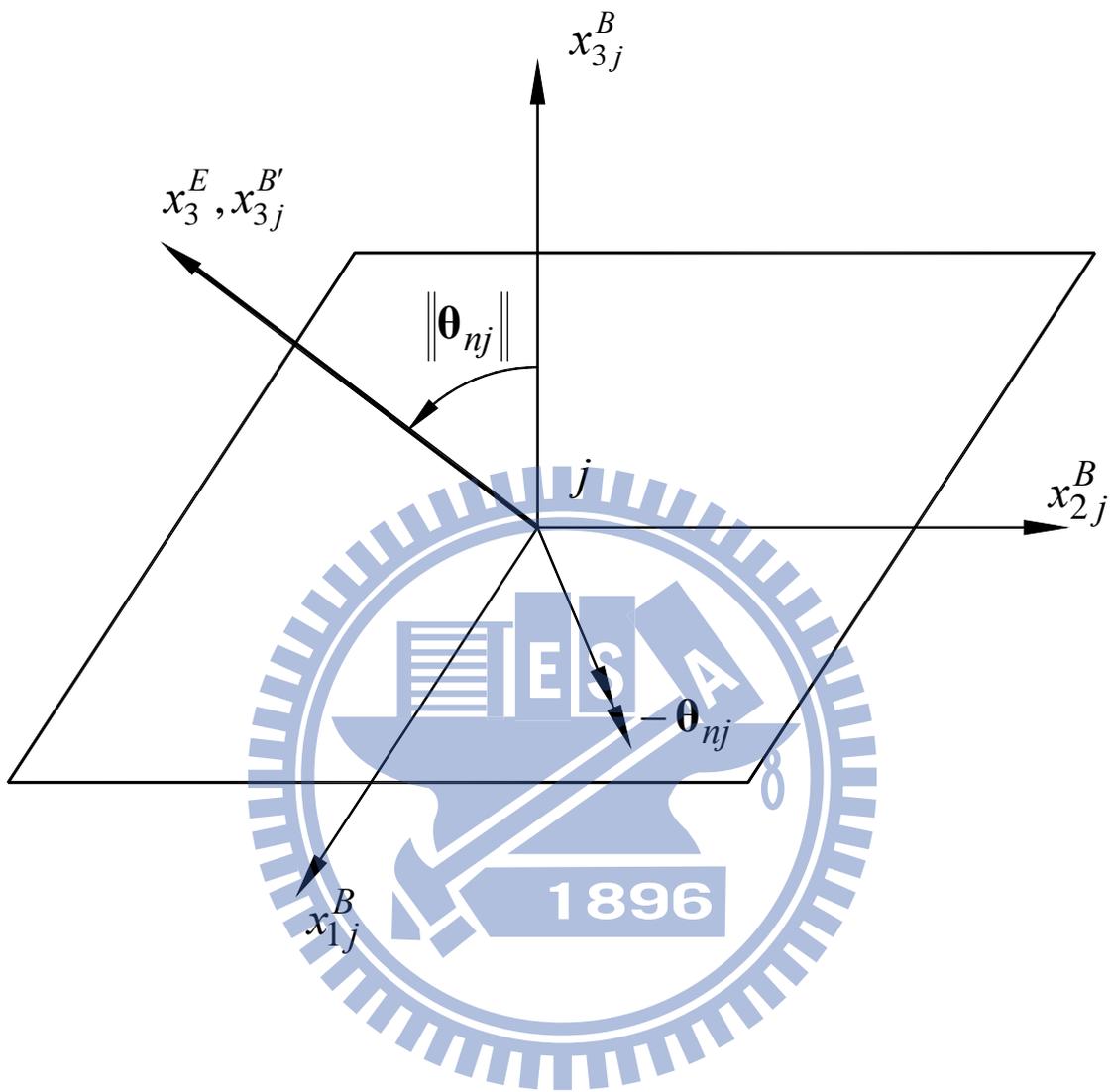


圖 2.3 元素節點 j 中心面之 x_{ij}^B 軸受旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用的示意圖

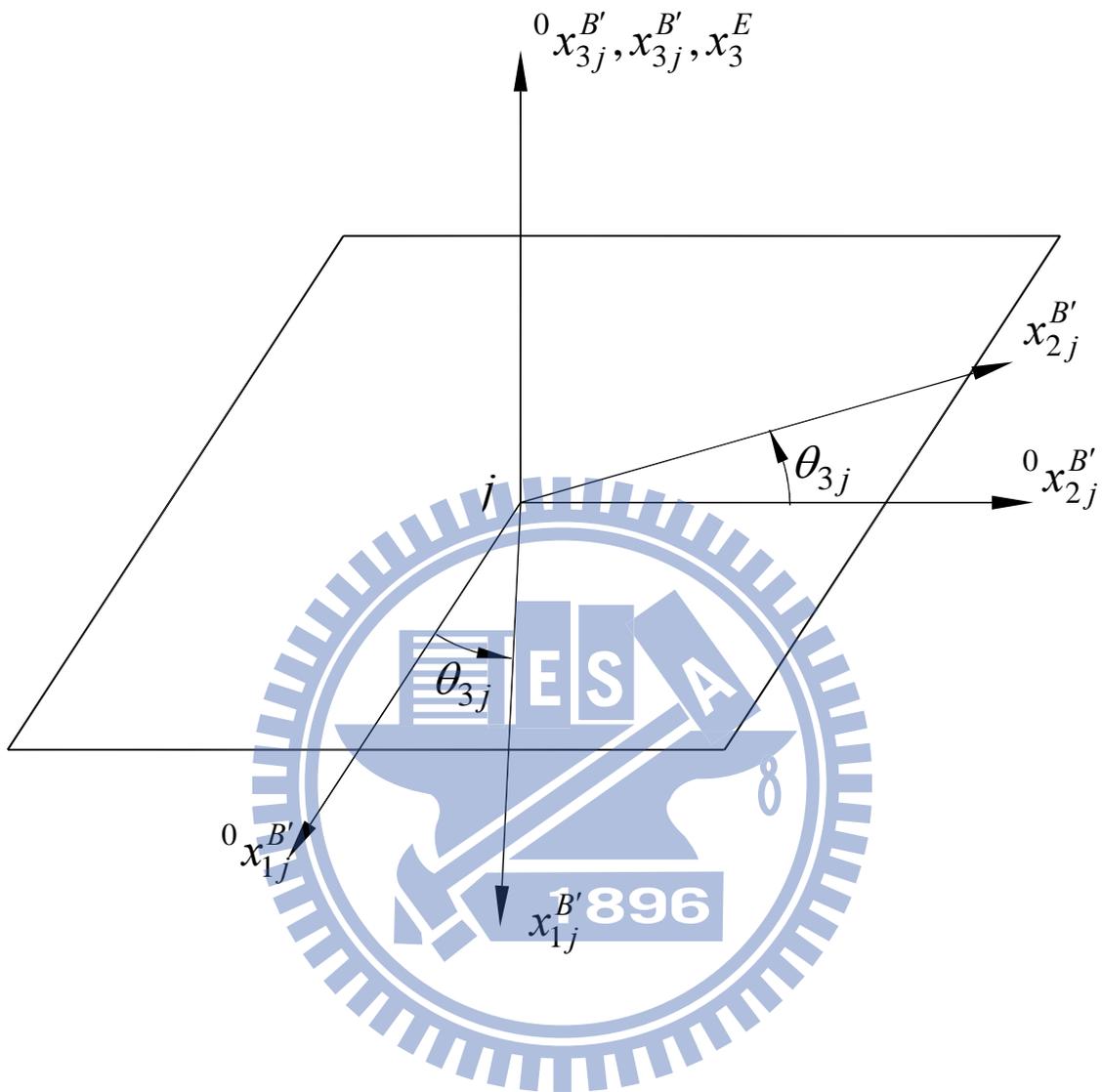
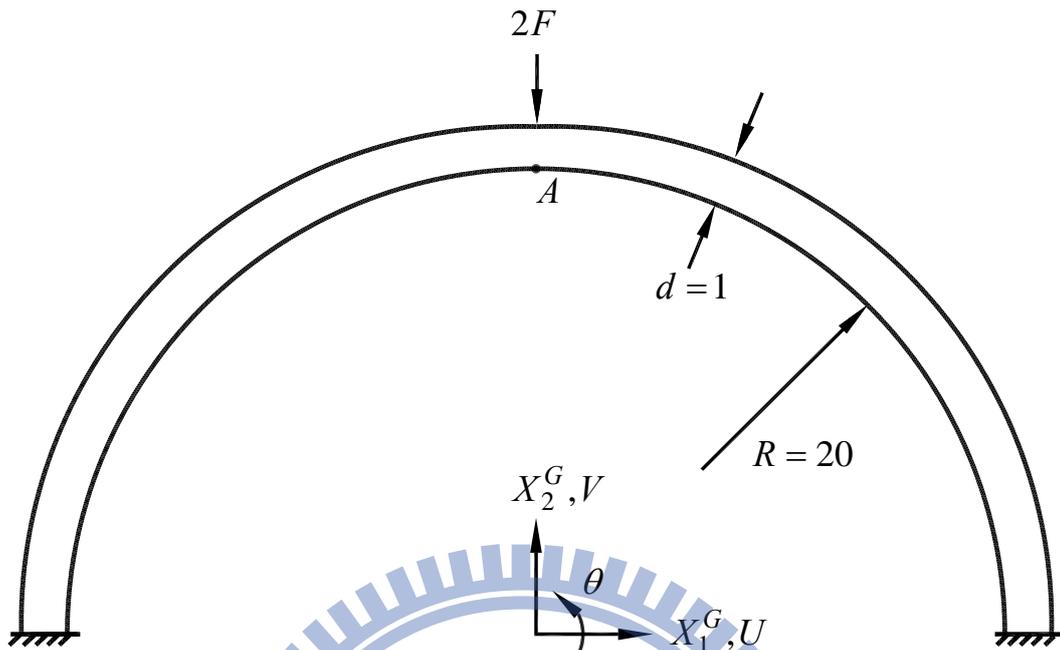
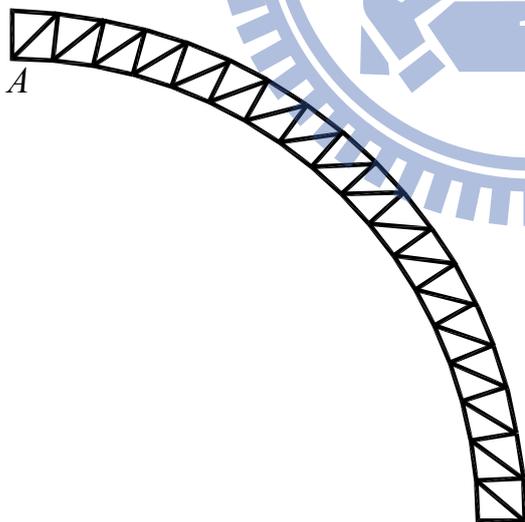


圖 2.4 元素節點 j 中心面之 $^0x_{1j}^{B'}$ 軸受旋轉向量 $\theta_{3j}\mathbf{e}_3^E$ 作用的示意圖

(a)



(b)



(c)

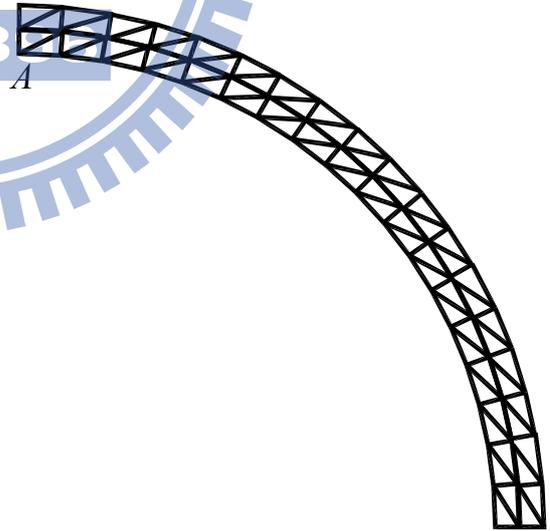


圖 4.1 半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖
(b)網格 18×1 示意圖 (c)網格 18×2 示意圖

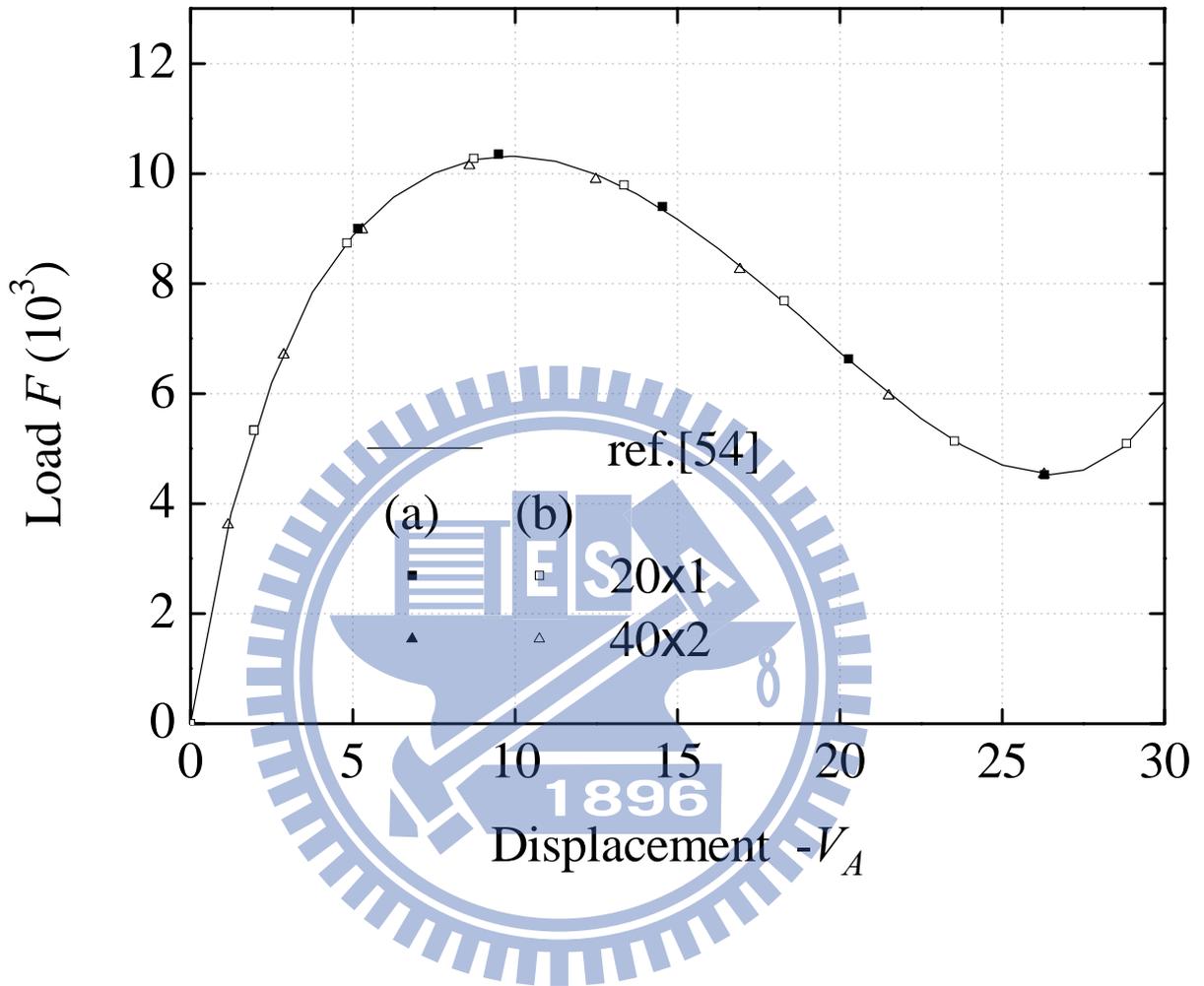
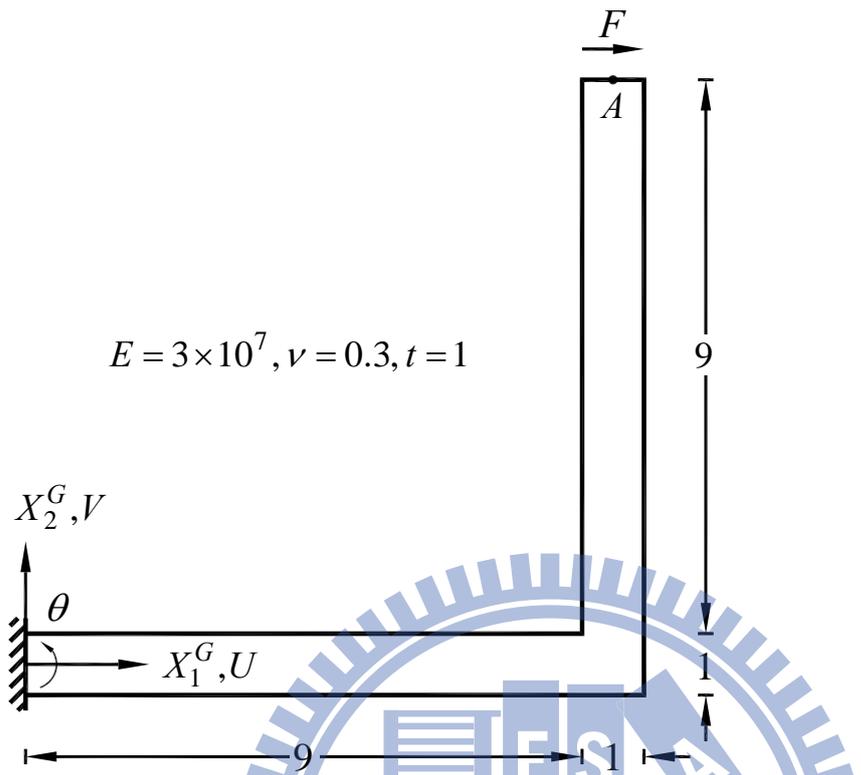


圖 4.2 半圓環受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖

(a)



(b)

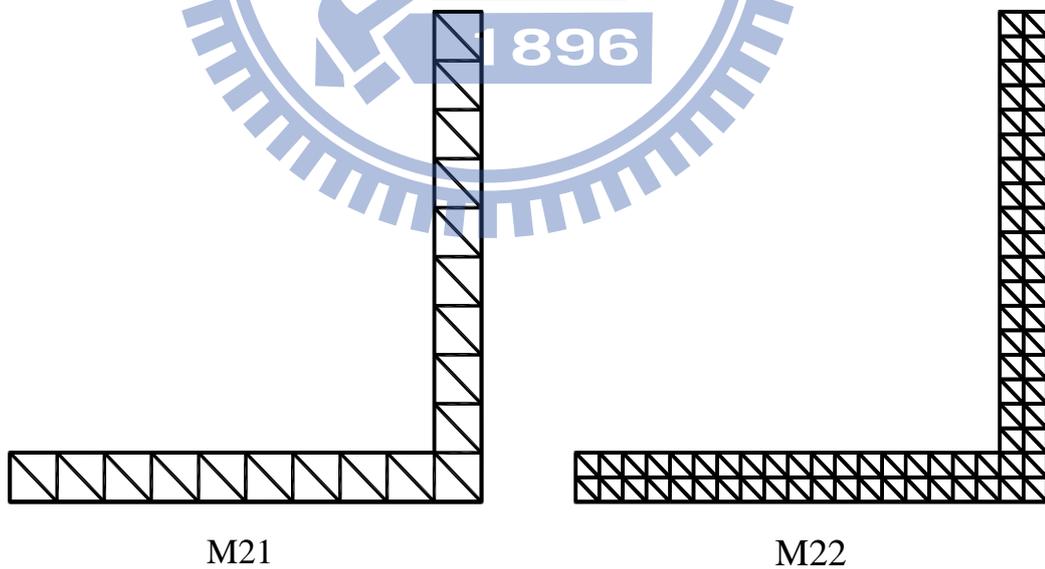


圖 4.3 直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 M21 與網格 M22 示意圖

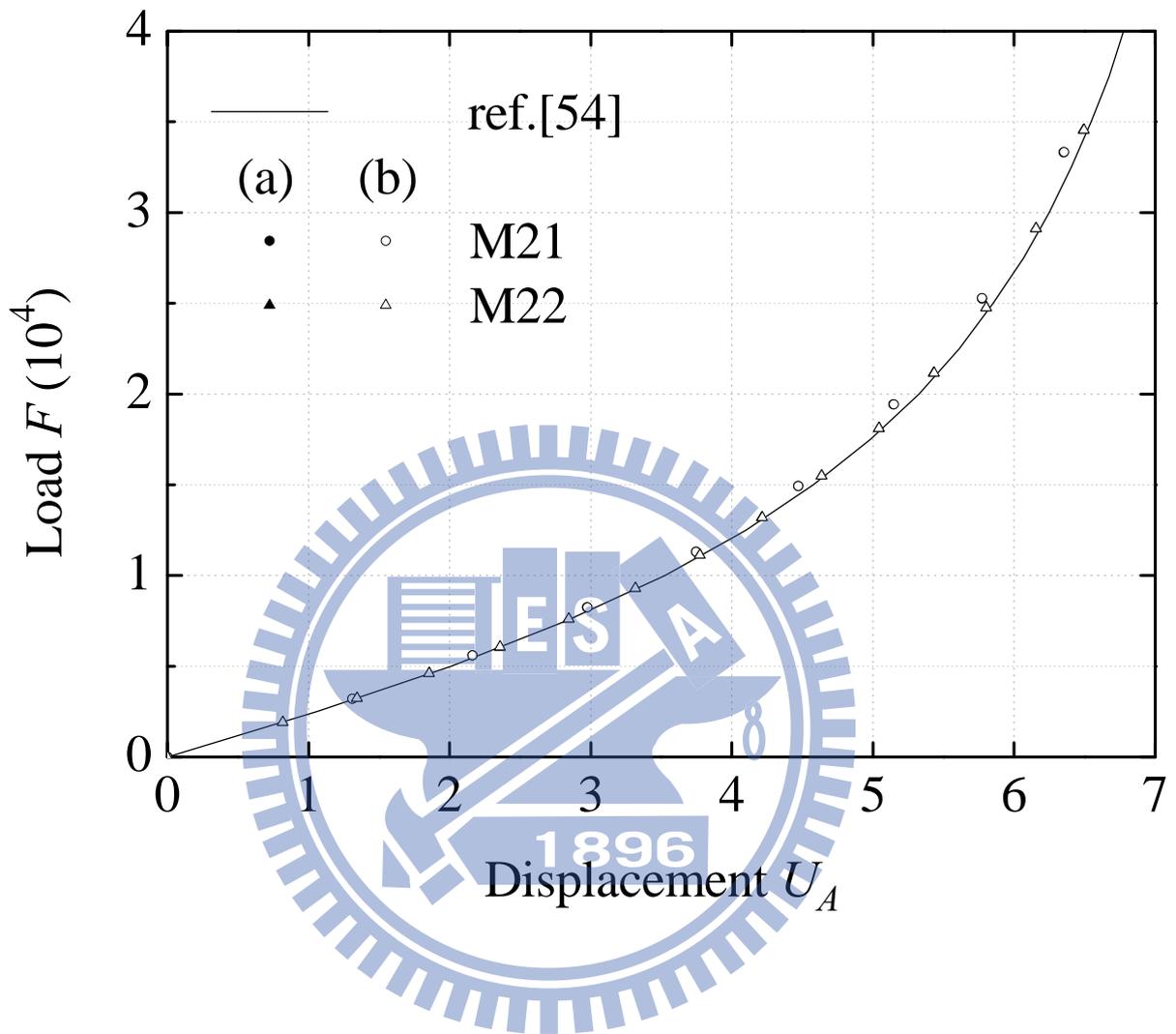
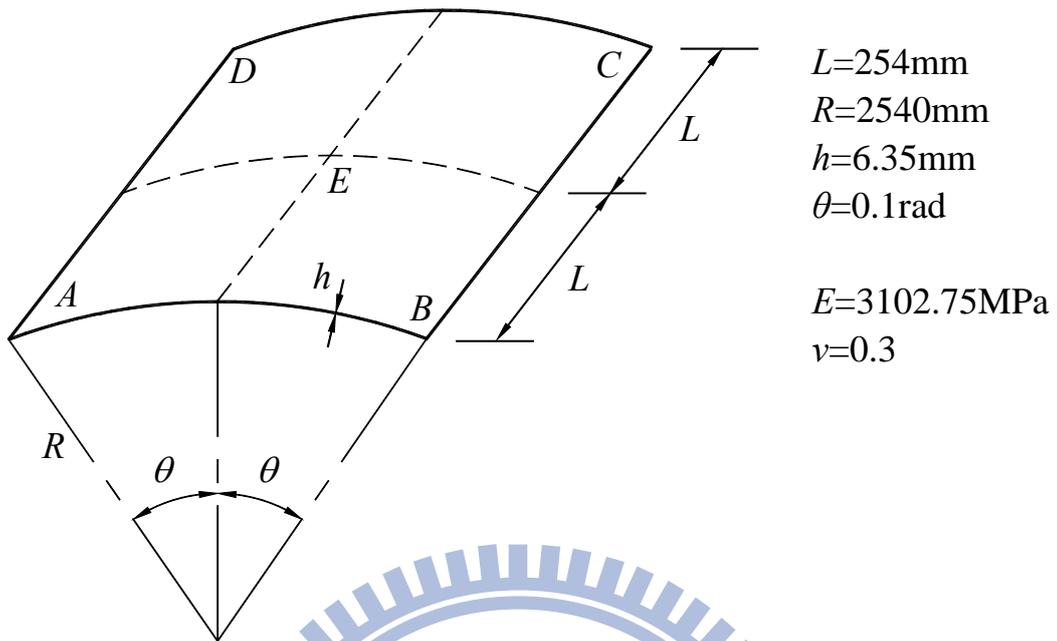
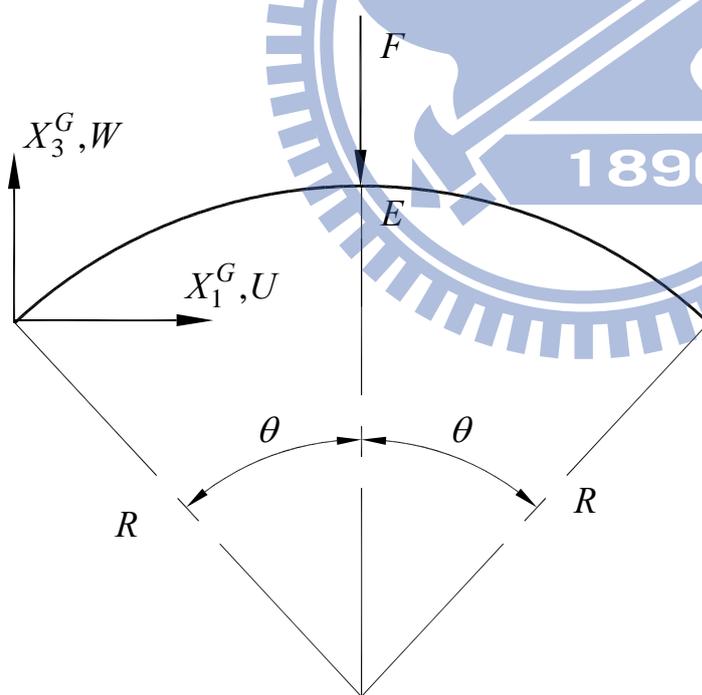


圖 4.4 直角構架受到端點剪力作用之負荷—位移曲線圖

(a)



(b)



(c)

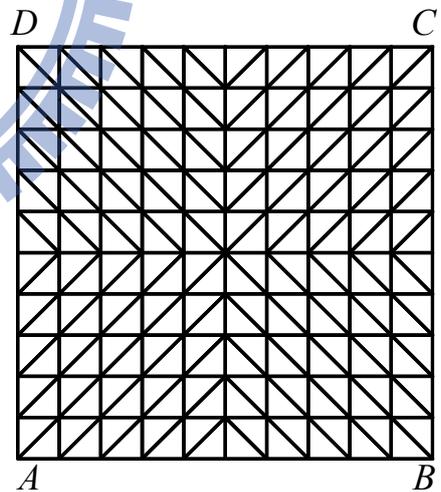


圖 4.5 圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖

(b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖

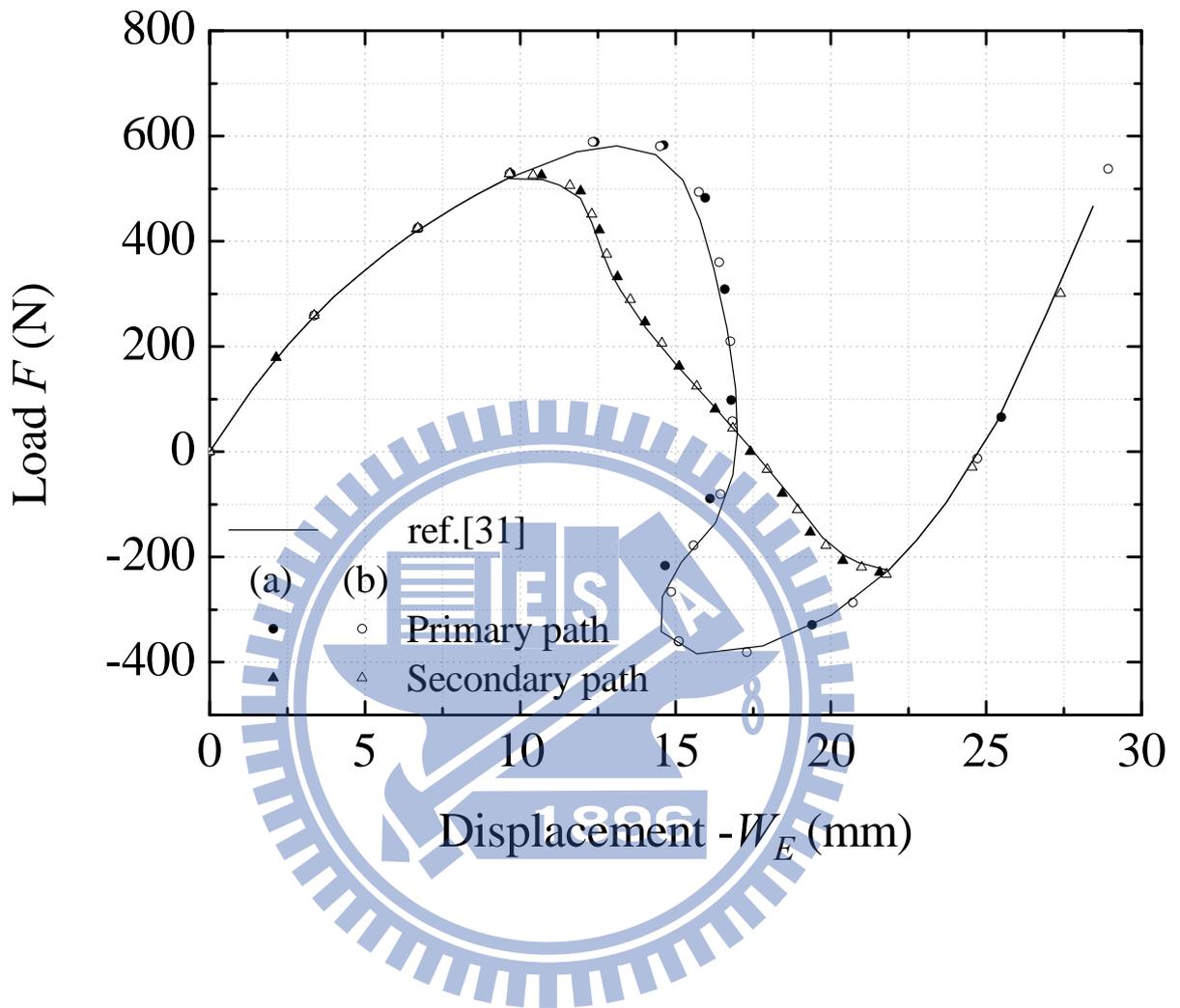
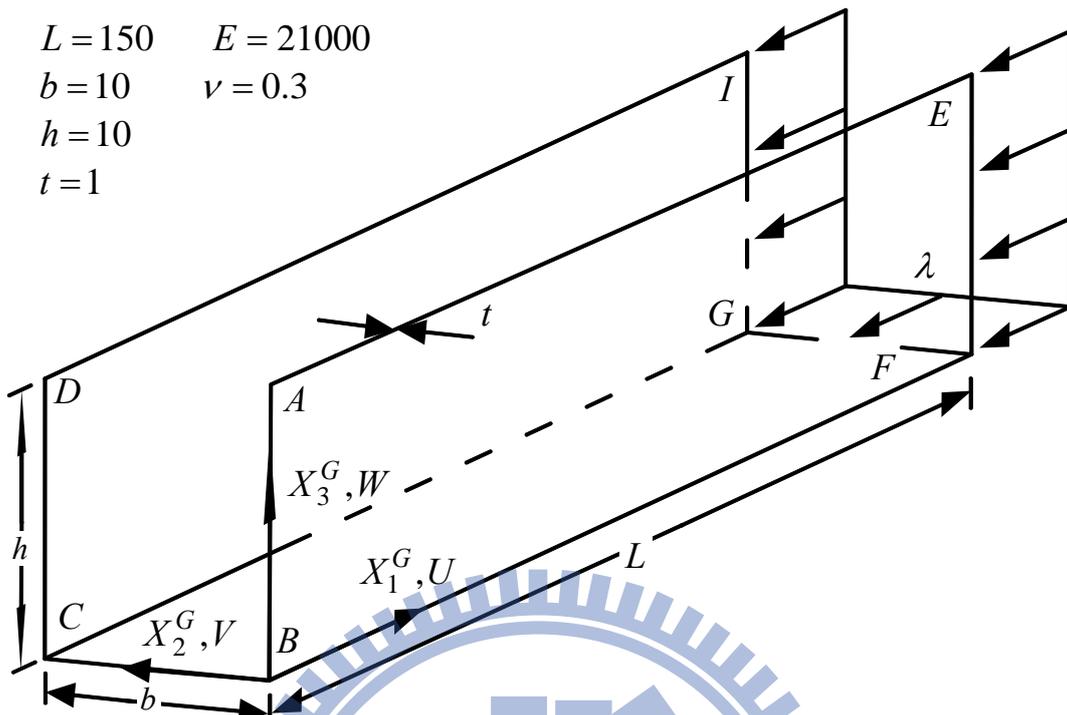


圖 4.6 圓柱殼片段受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 150 & E &= 21000 \\ b &= 10 & \nu &= 0.3 \\ h &= 10 \\ t &= 1 \end{aligned}$$



(b)

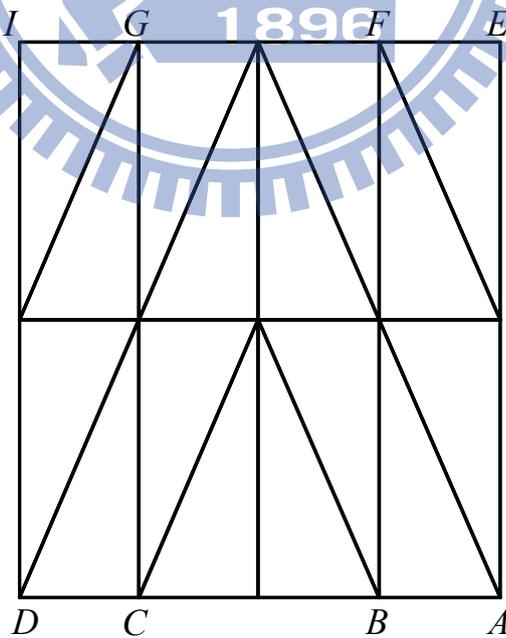
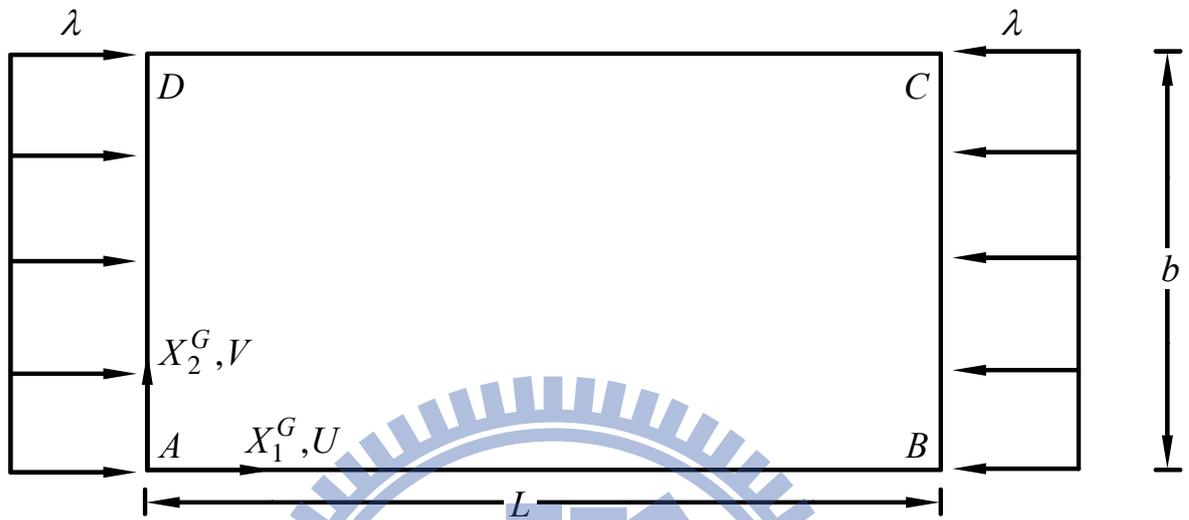


圖 4.7 槽型斷面梁之側向扭轉挫屈(例題 4.4) (a)結構尺寸示意圖

(b)網格(1+2+1) \times 2 示意圖

(a)

$$L = 100 \quad b = 50 \quad t = 2$$
$$E = 100 \quad \nu = 0.3$$



(b)

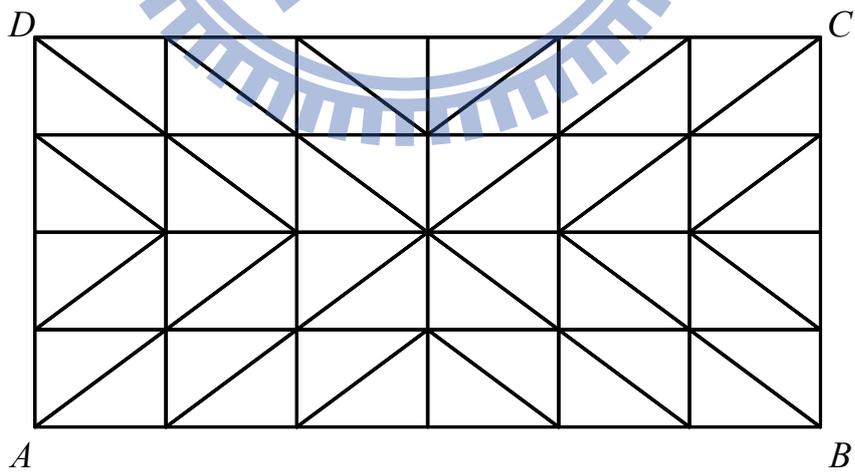
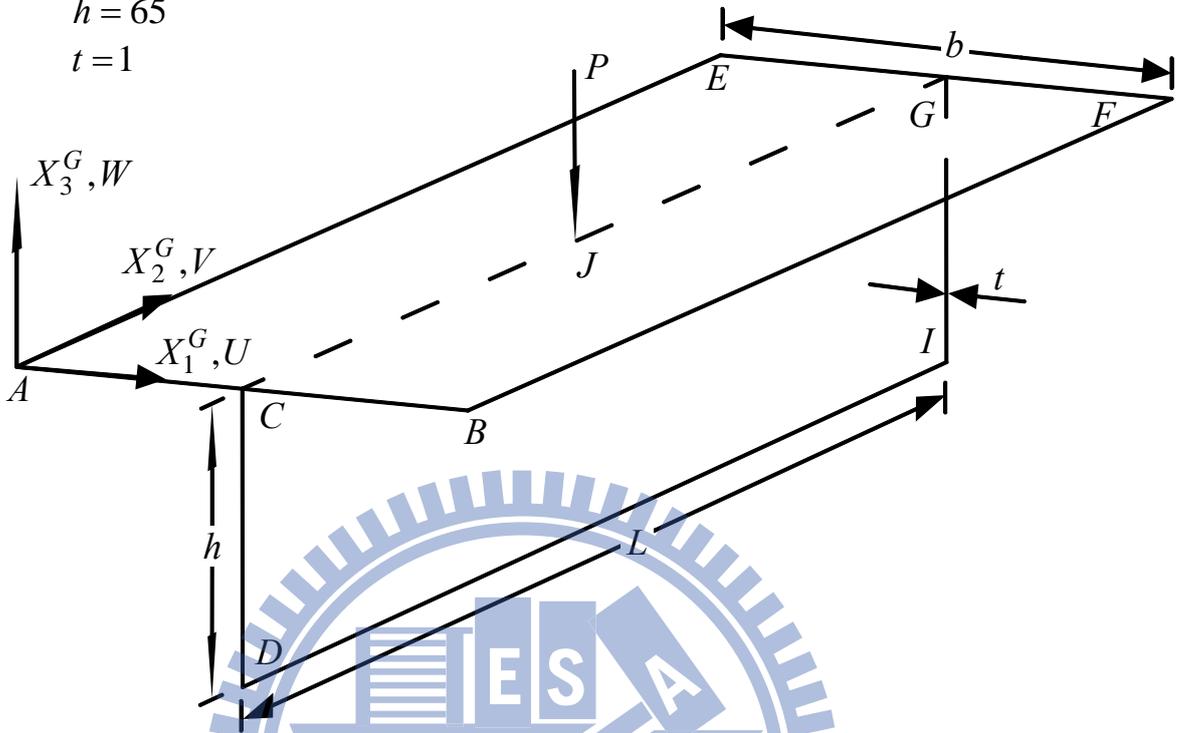


圖 4.8 受壓之簡支承板 (a)結構尺寸示意圖
(b)網格 4x6 示意圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 450 & E &= 70960 \\ b &= 38 & \nu &= 0.321 \\ h &= 65 \\ t &= 1 \end{aligned}$$



(b)

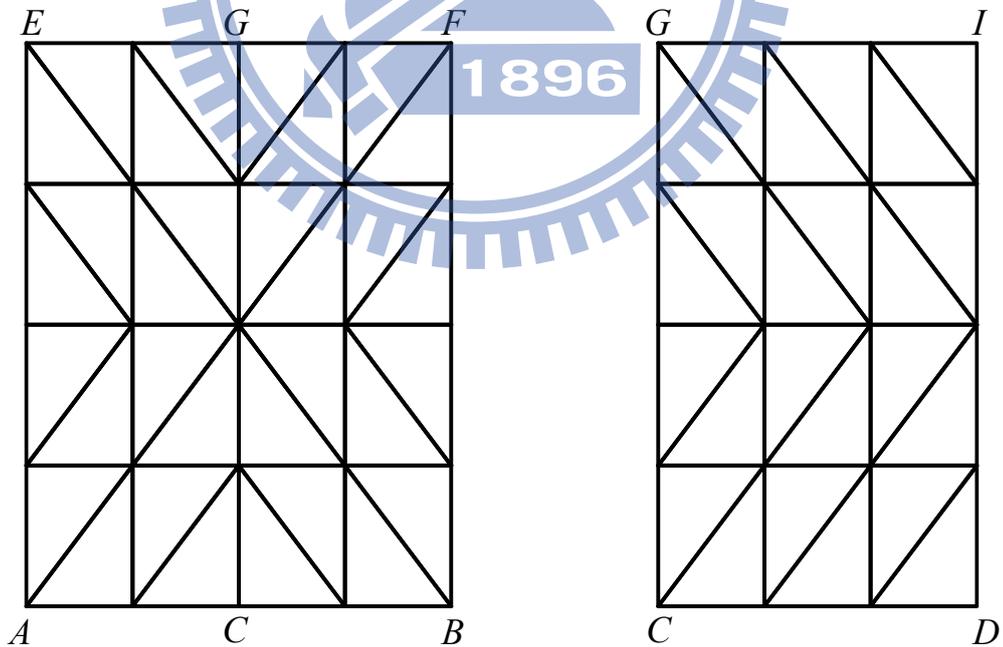


圖 4.9 T 型斷面梁 (a)結構尺寸示意圖

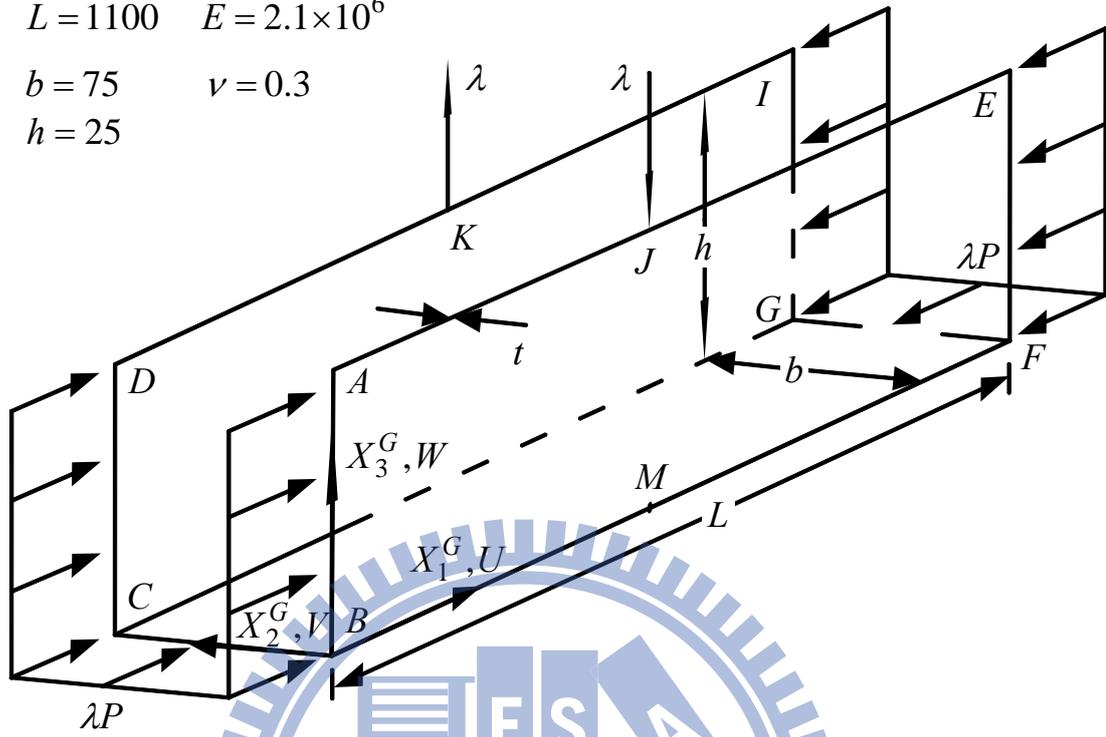
(b)網格(2+2+3)×4 示意圖

(a)

$$L = 1100 \quad E = 2.1 \times 10^6$$

$$b = 75 \quad \nu = 0.3$$

$$h = 25$$



(b)

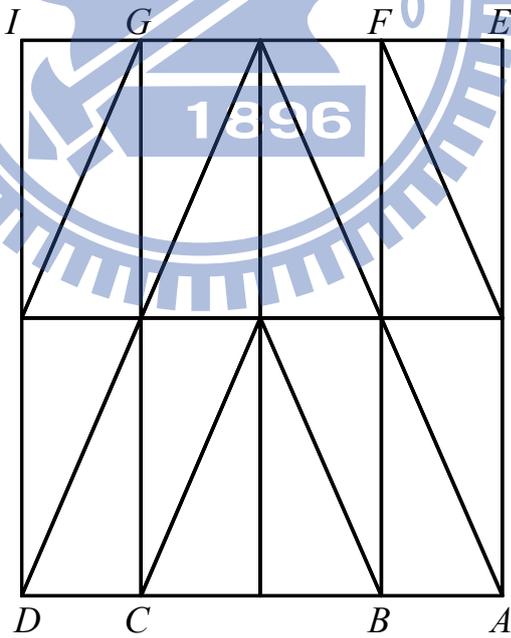


圖 4.10 槽型斷面梁(例題 4.7) (a)結構尺寸示意圖

(b)網格(1+2+1)×2 示意圖

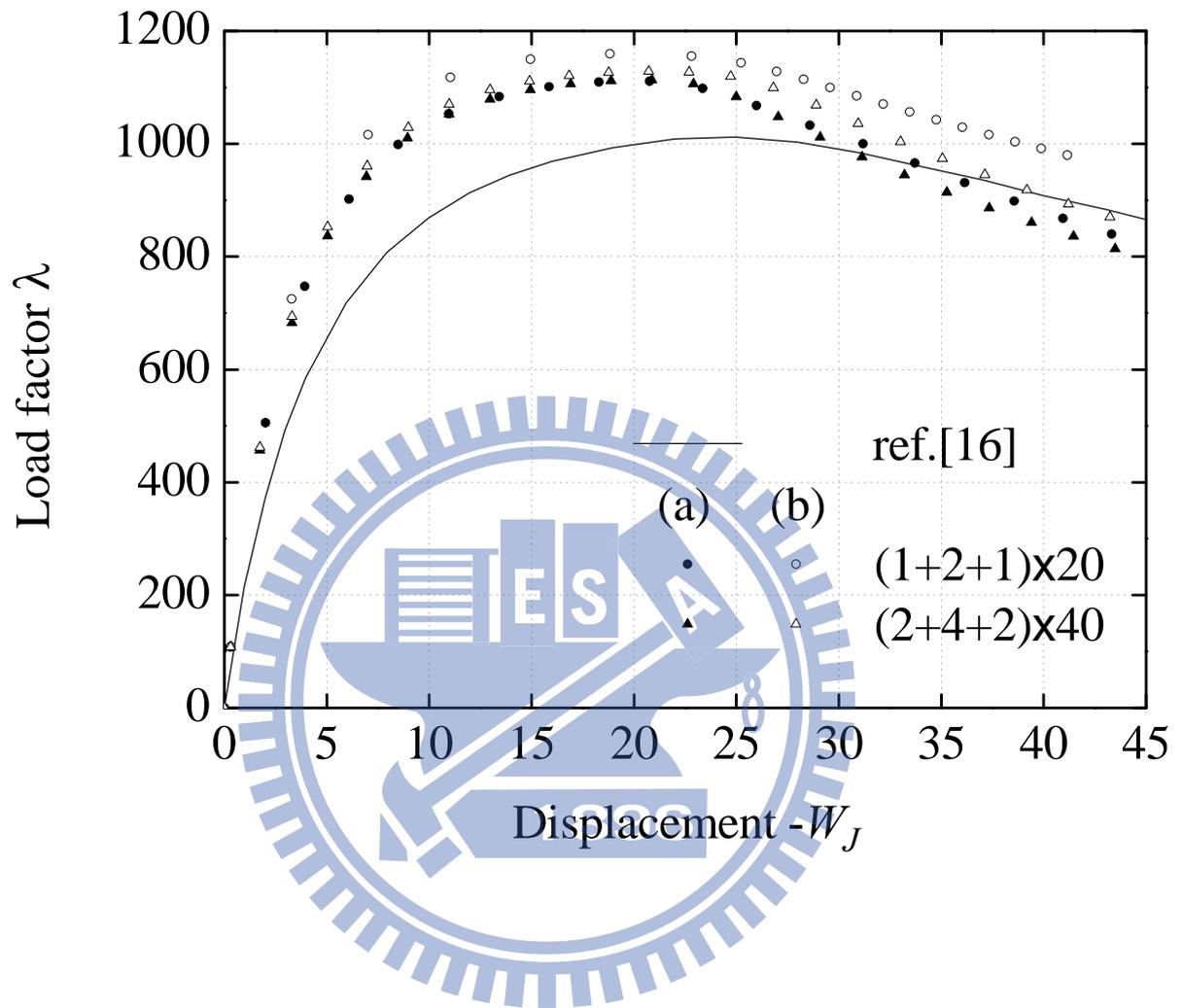
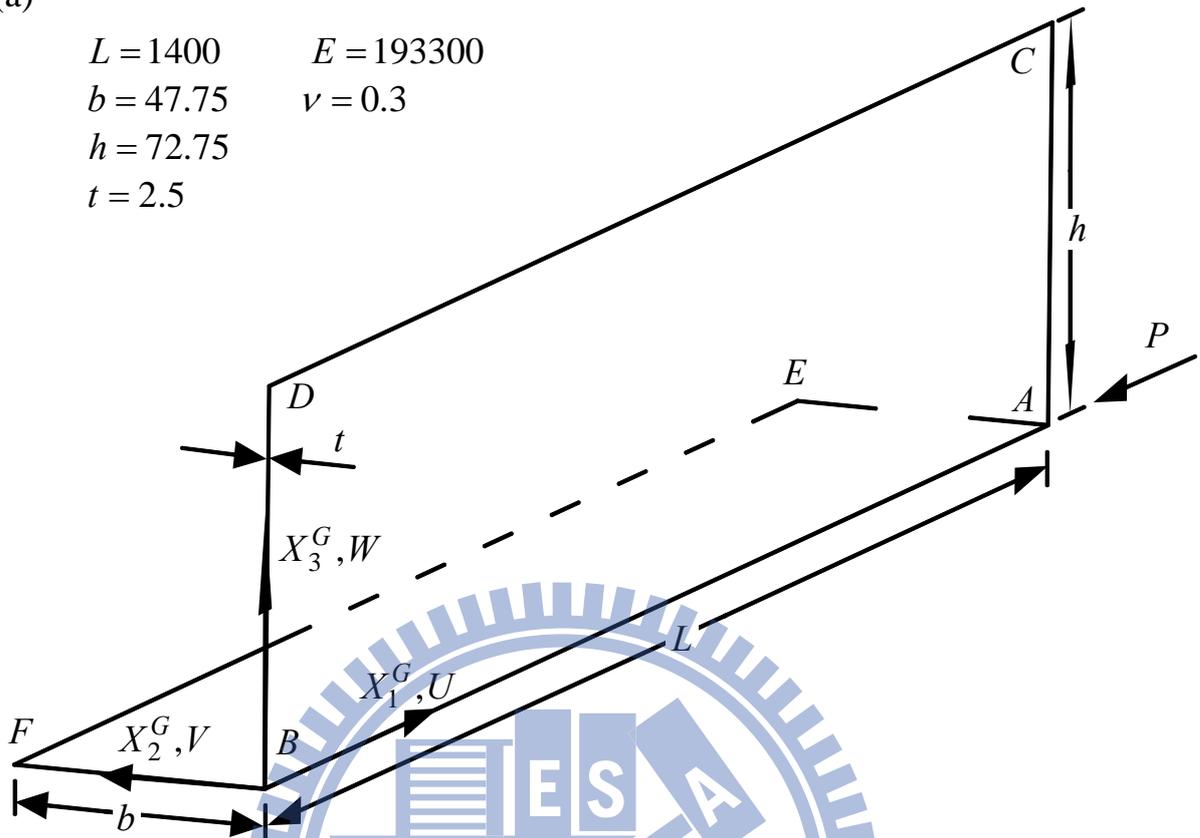


圖 4.11 槽型斷面梁之負荷—位移曲線圖(例題 4.7)

(a)

$$\begin{aligned} L &= 1400 & E &= 193300 \\ b &= 47.75 & \nu &= 0.3 \\ h &= 72.75 \\ t &= 2.5 \end{aligned}$$



(b)

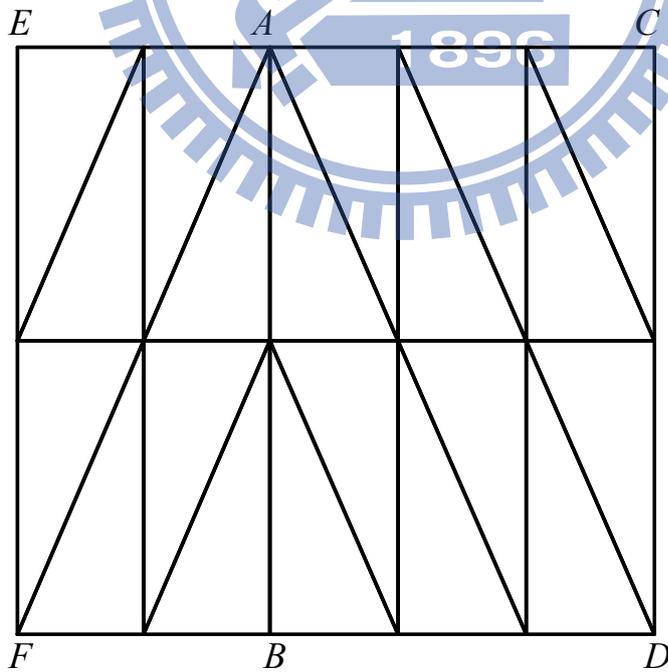


圖 4.12 直角梁受到單點集中力作用(例題 4.8) (a)結構尺寸示意圖

(b)網格(2+3)×2 示意圖

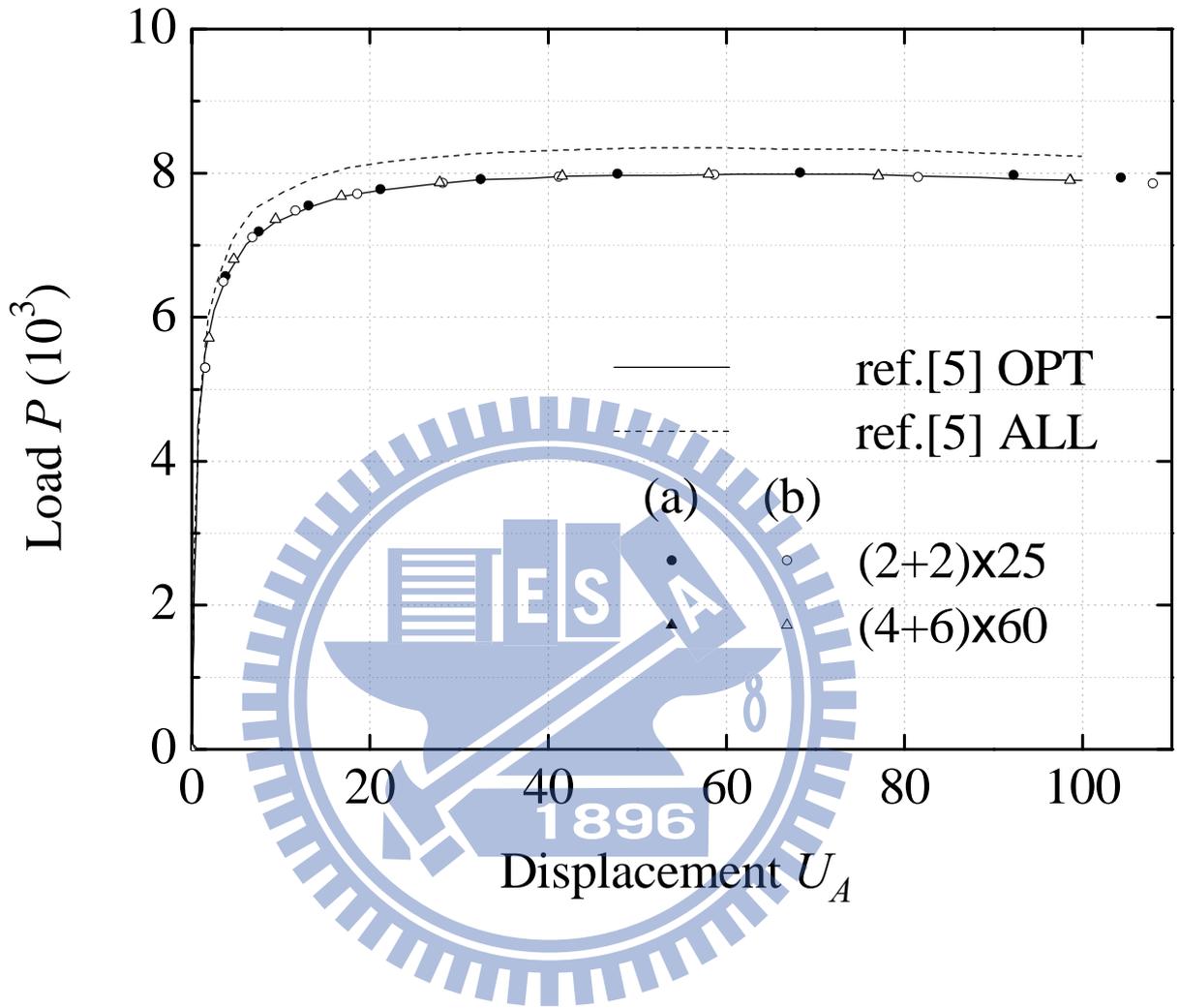
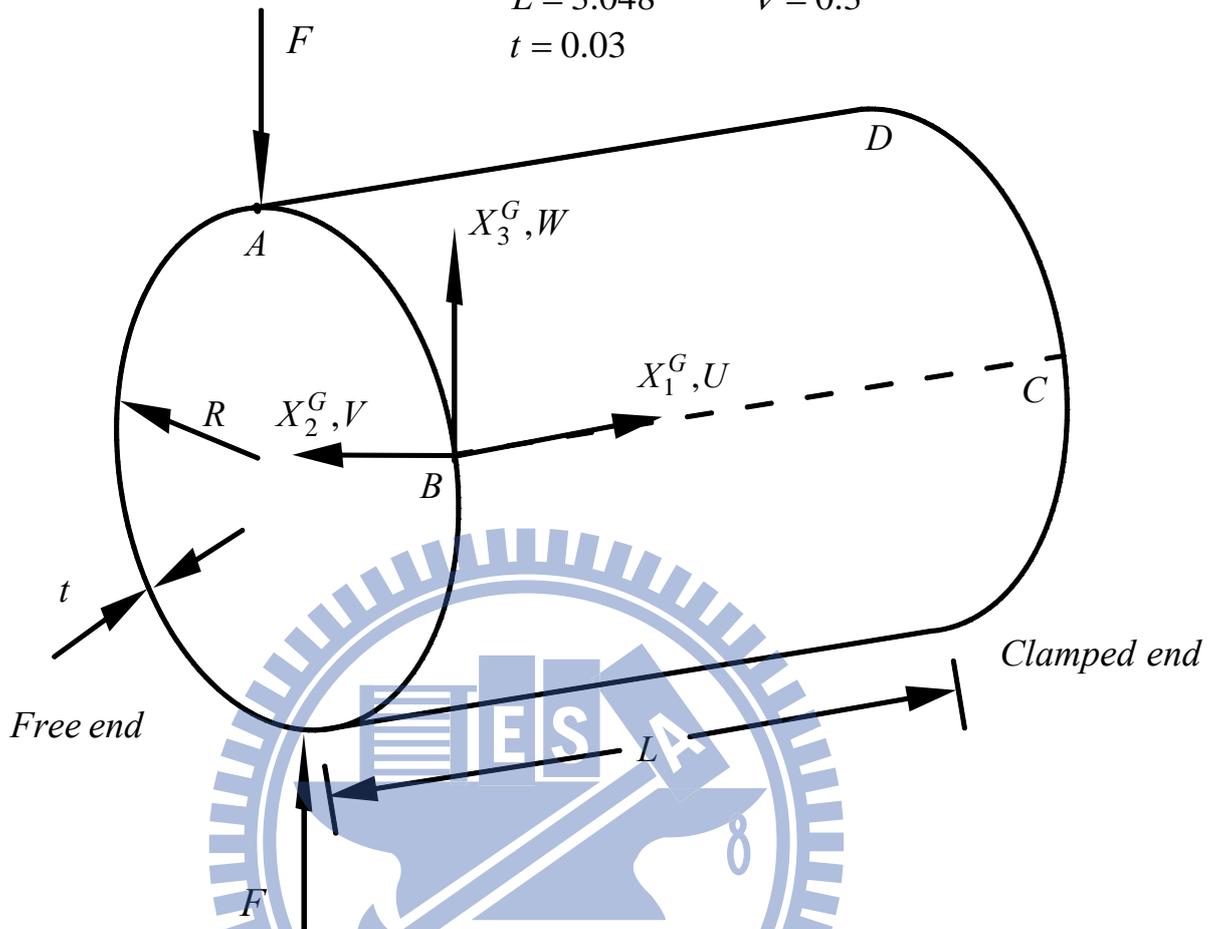


圖 4.13 直角梁受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.8)

(a)

$$\begin{aligned} R &= 1.016 & E &= 2.0685 \times 10^7 \\ L &= 3.048 & \nu &= 0.3 \\ t &= 0.03 \end{aligned}$$



(b)

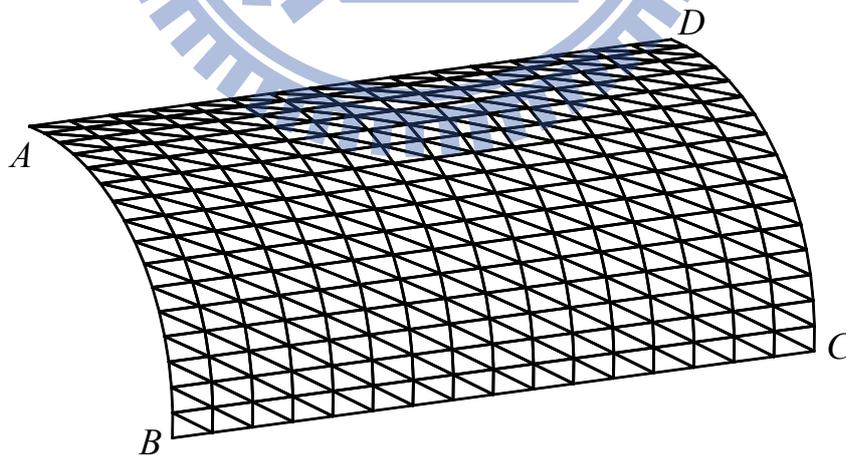


圖 4.14 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用(例題 4.9)

(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 16×16 示意圖

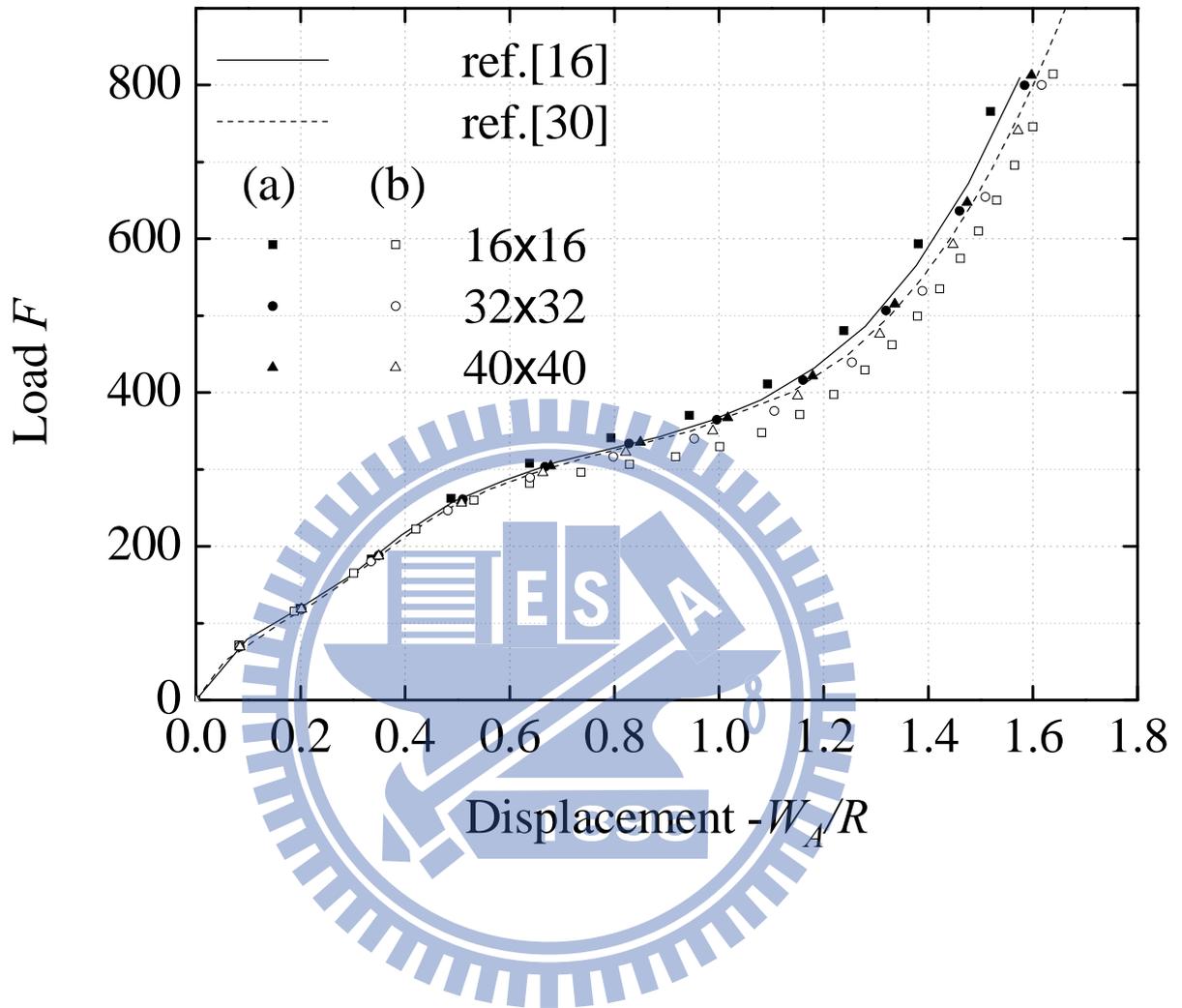
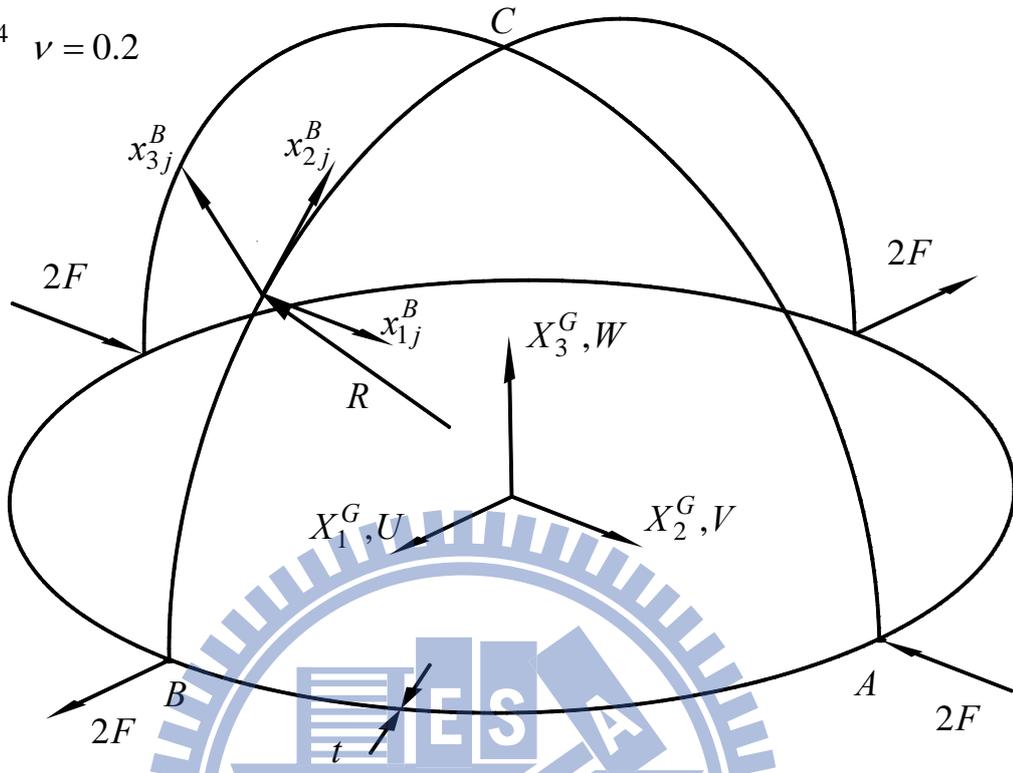


圖 4.15 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.9)

(a)

$$R = 10 \quad t = 0.5$$

$$E = 10^4 \quad \nu = 0.2$$



(b)

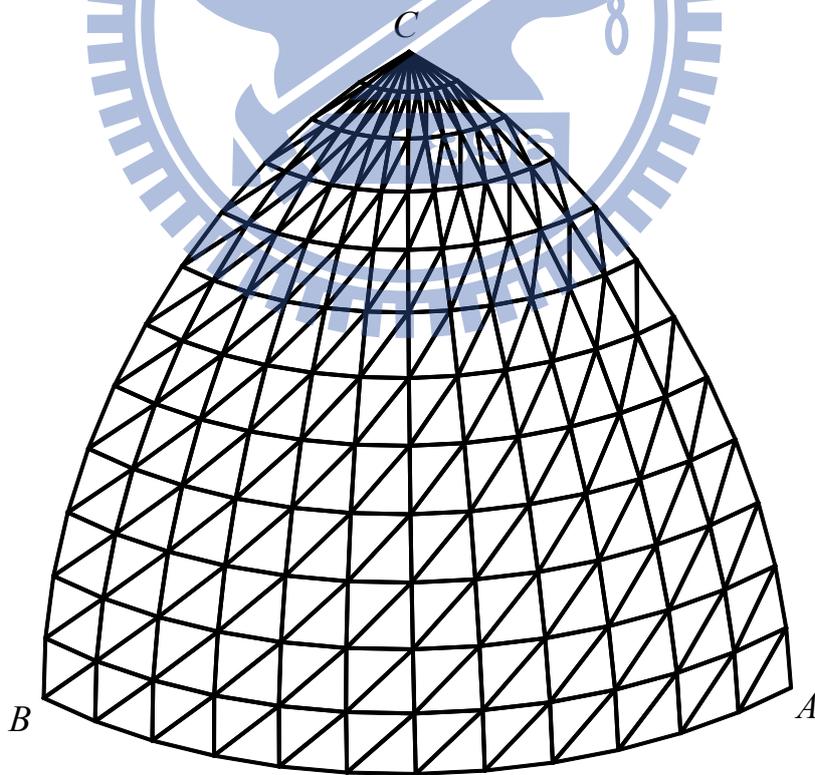


圖 4.16 半球殼受到單點集中力作用(例題 4.10) (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 12×12 示意圖

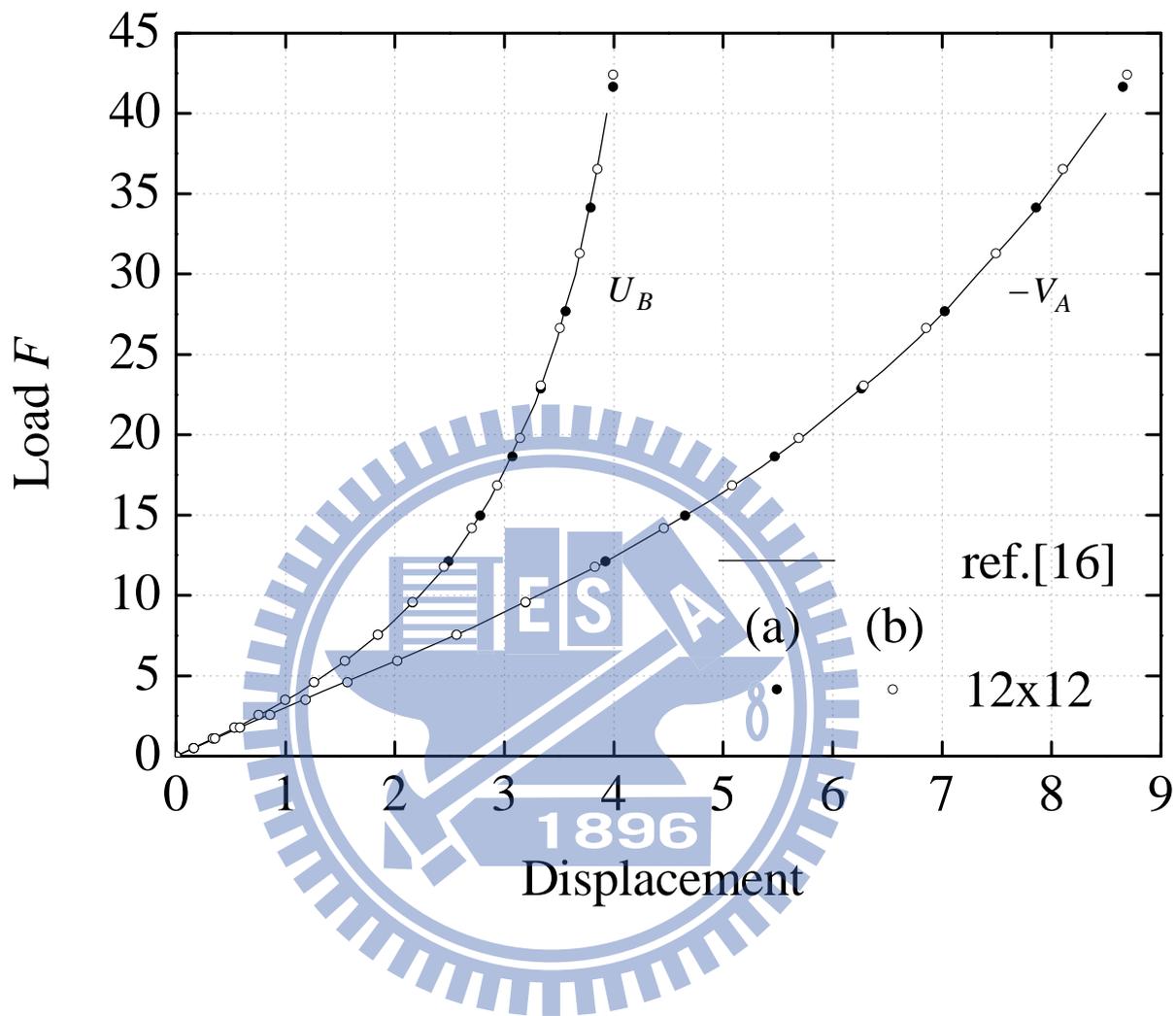


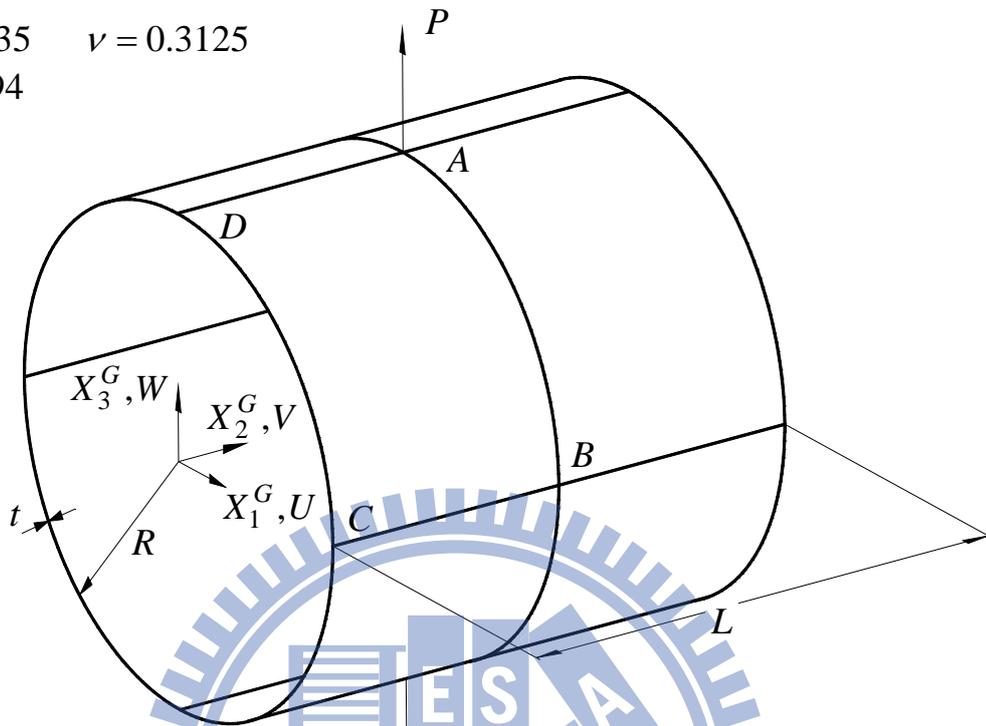
圖 4.17 半球殼受到單點集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.10)

(a)

$$R = 4.953 \quad E = 10.5 \times 10^6$$

$$L = 10.35 \quad \nu = 0.3125$$

$$t = 0.094$$



(b)

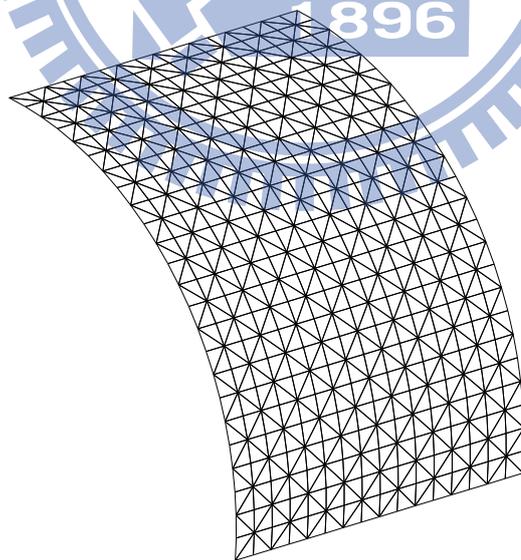


圖 4.18 圓柱殼受一對集中力作用(例題 4.11) (a)結構尺寸示意圖

(b)網格 16×24 示意圖

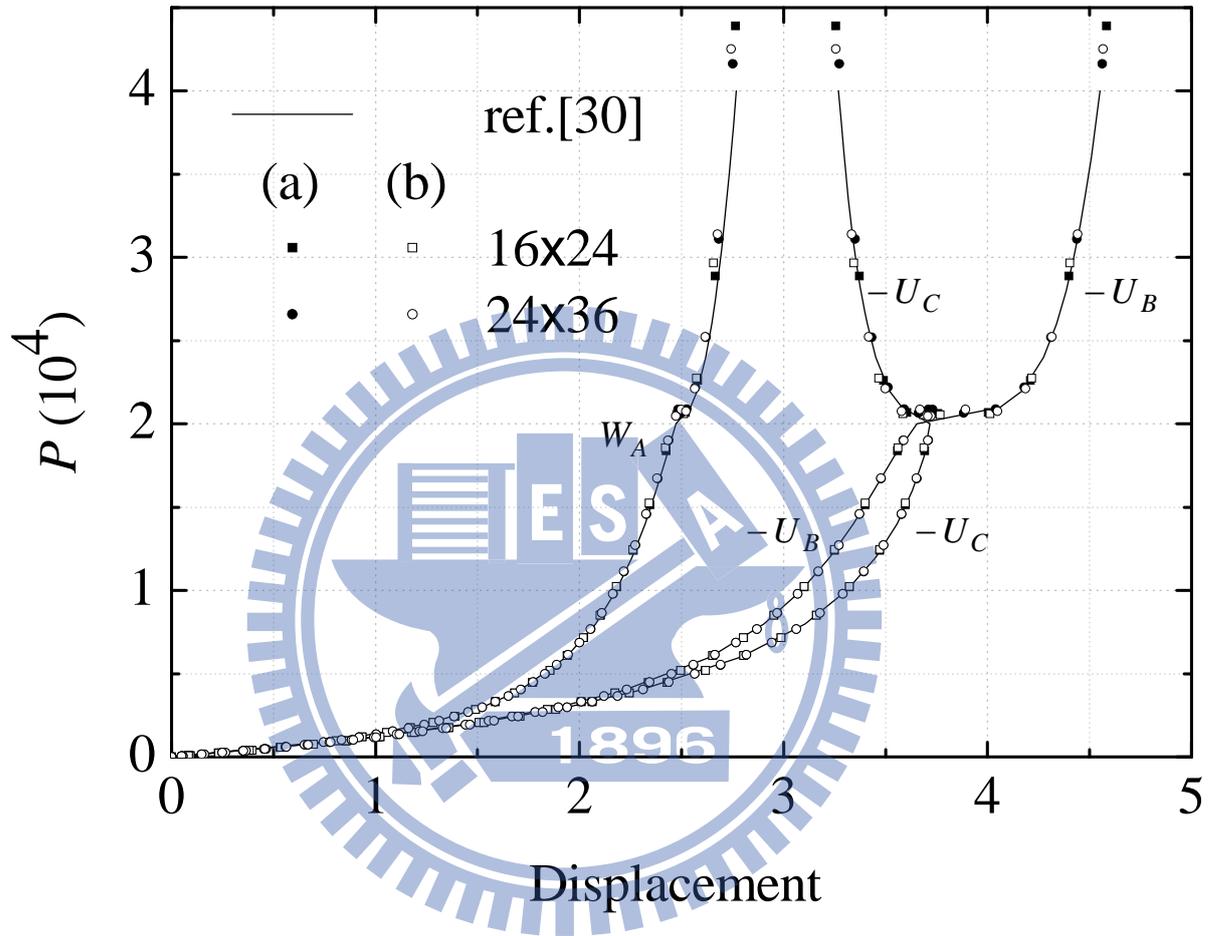


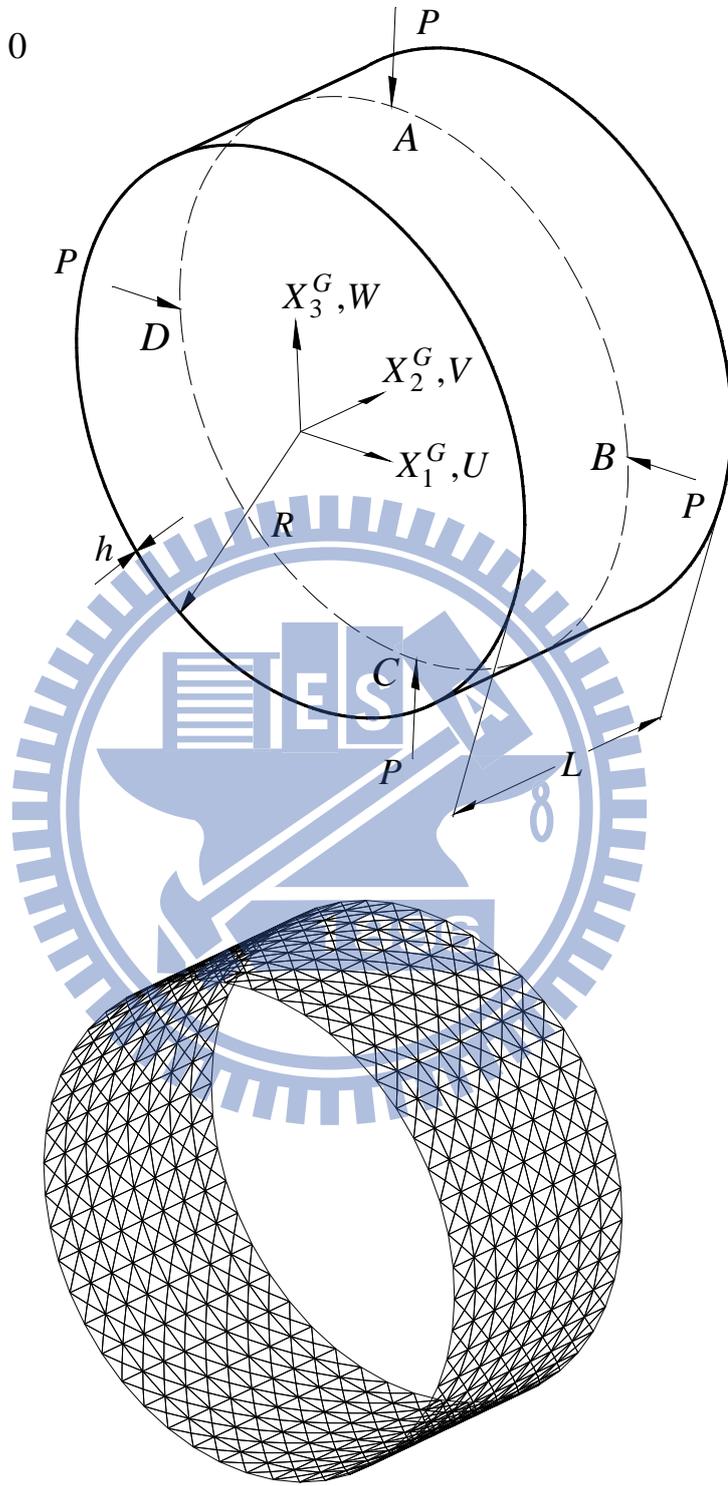
圖 4.19 圓柱殼受一對集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.11)

(a)

$$R = 0.1 \text{ m} \quad E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}$$

$$L = 0.1 \text{ m} \quad \nu = 0$$

$$h = 0.001 \text{ m}$$



(b)

圖 4.20 圓柱殼受四個徑向單點集中力作用(例題 4.12)

(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 8×48 示意圖

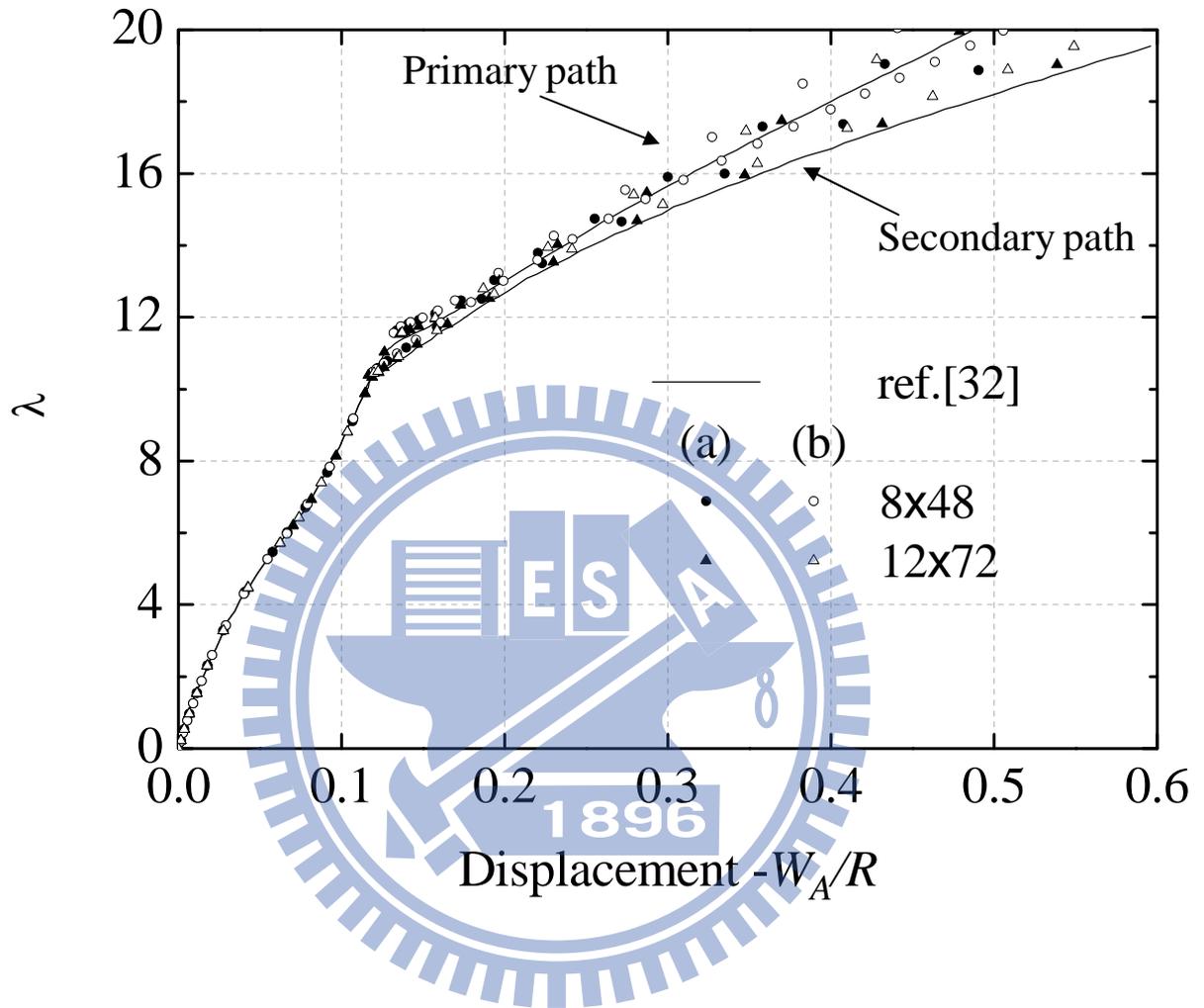
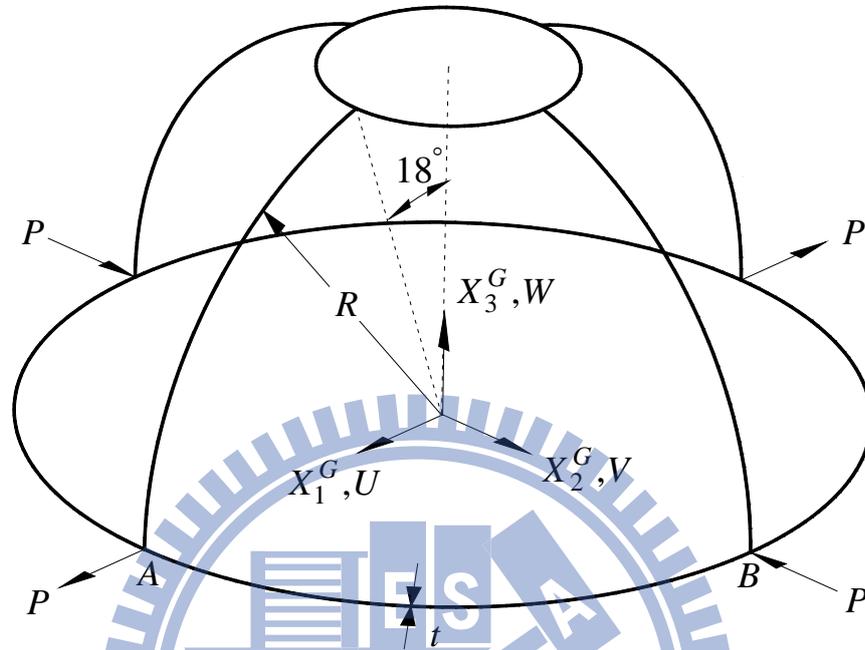


圖 4.21 圓柱殼受四個徑向單點集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.12)

(a)

$$R = 10 \quad E = 6.825 \times 10^7$$

$$t = 0.04 \quad \nu = 0.3$$



(b)

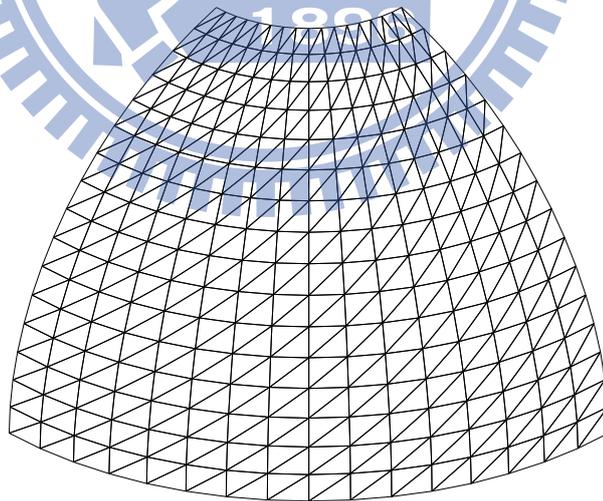


圖 4.22 開口型半球殼受集中力作用(例題 4.13)

(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 16×16 示意圖

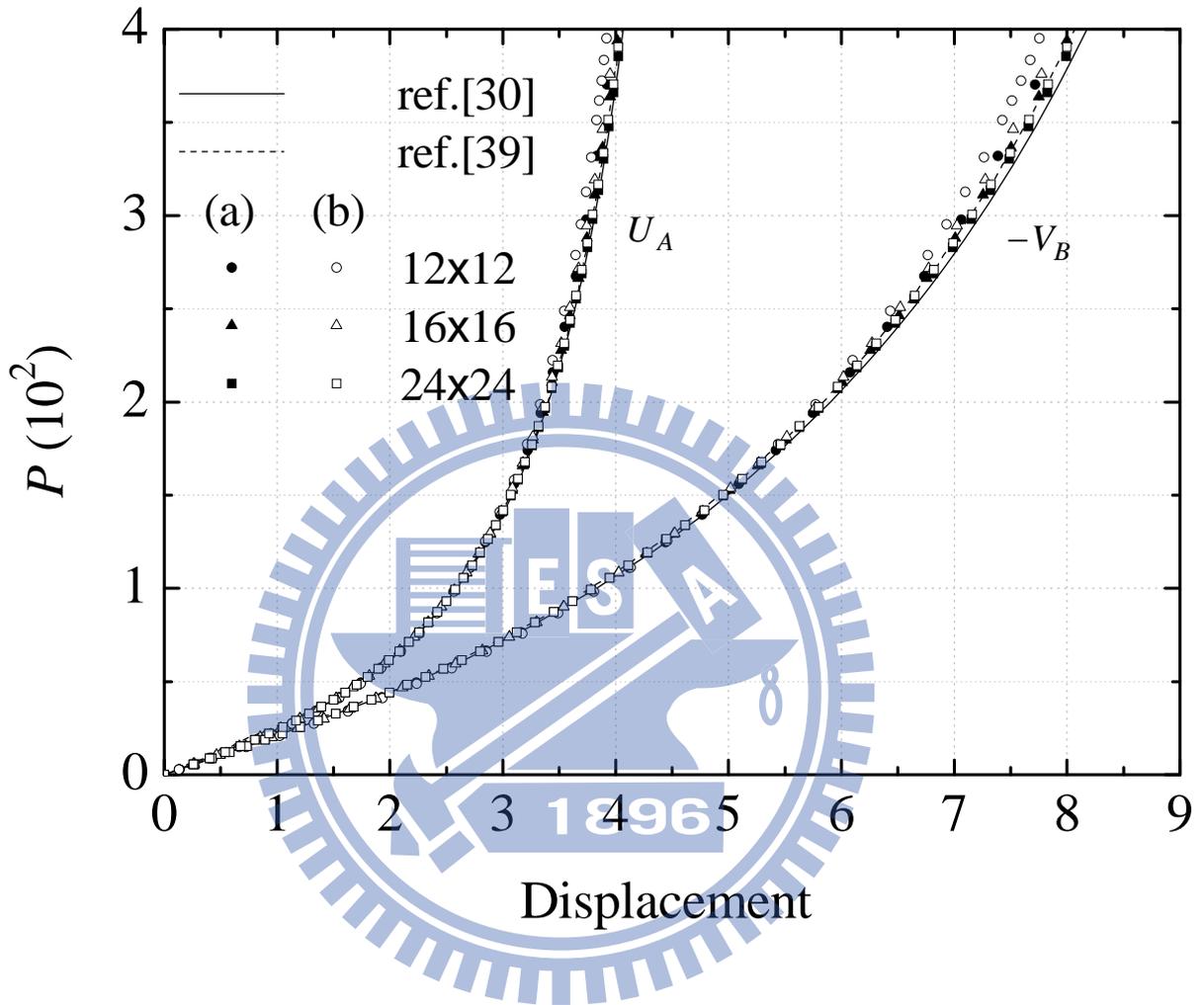


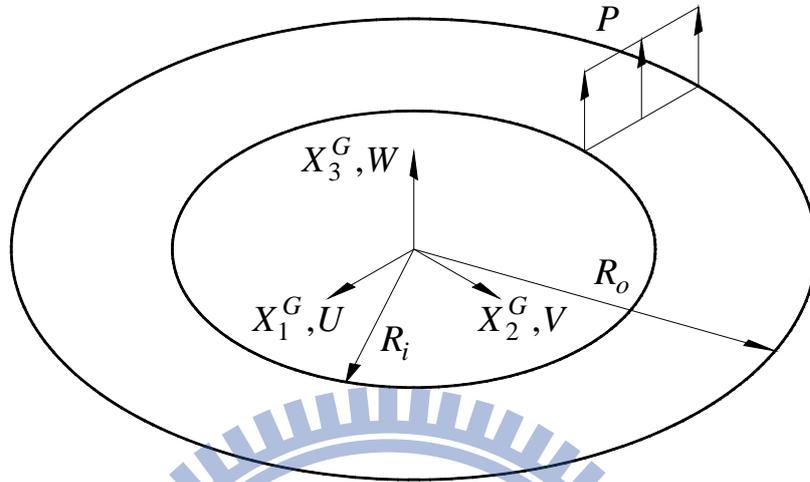
圖 4.23 開口型半球殼受集中力作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.13)

(a)

$$R_i = 6 \quad E = 21 \times 10^6$$

$$R_o = 10 \quad \nu = 0$$

$$t = 0.03$$



(b)

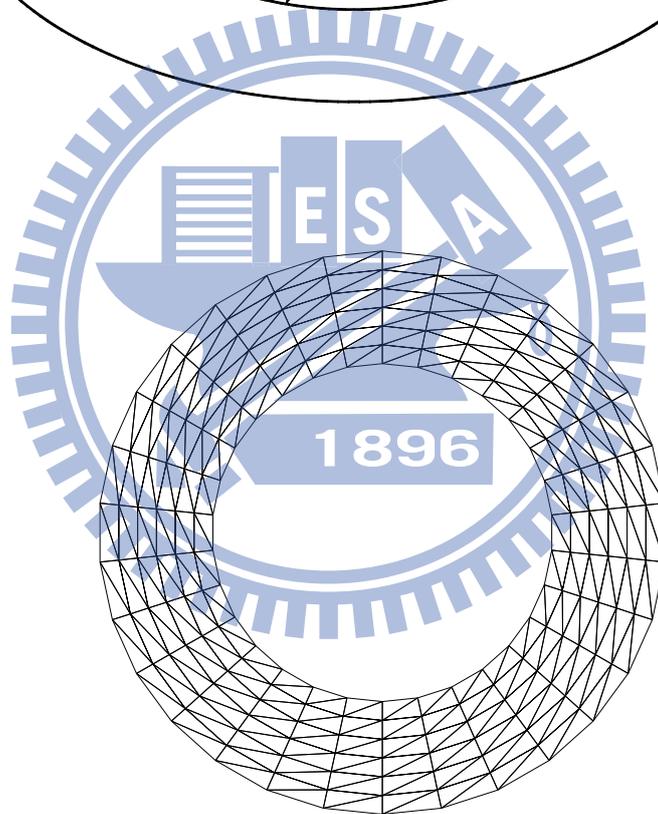


圖 4.24 裂縫環形板受均勻力負荷作用(例題 4.14)

(a)結構尺寸示意圖 (b)網格 6×30 示意圖

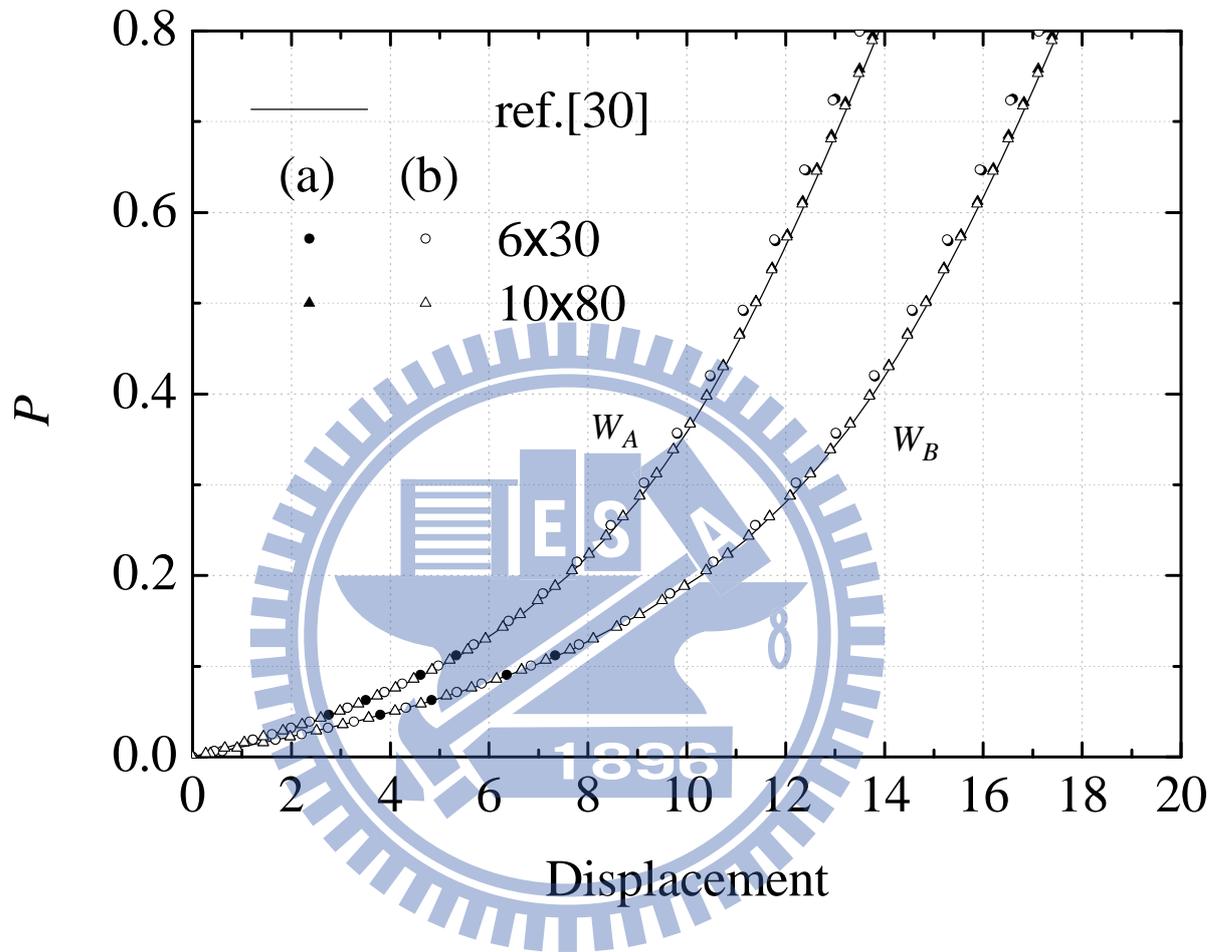


圖 4.25 裂縫環形板受均勻力負荷作用之負荷—位移曲線圖(例題 4.14)

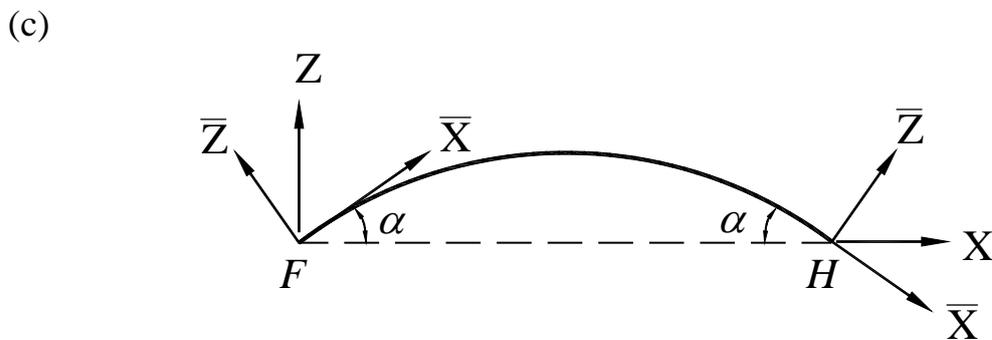
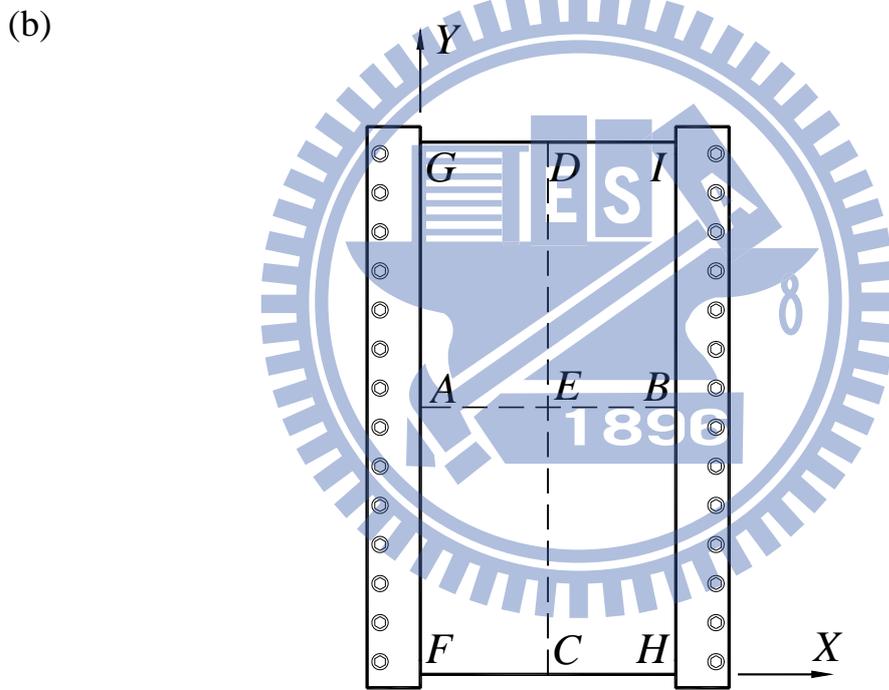
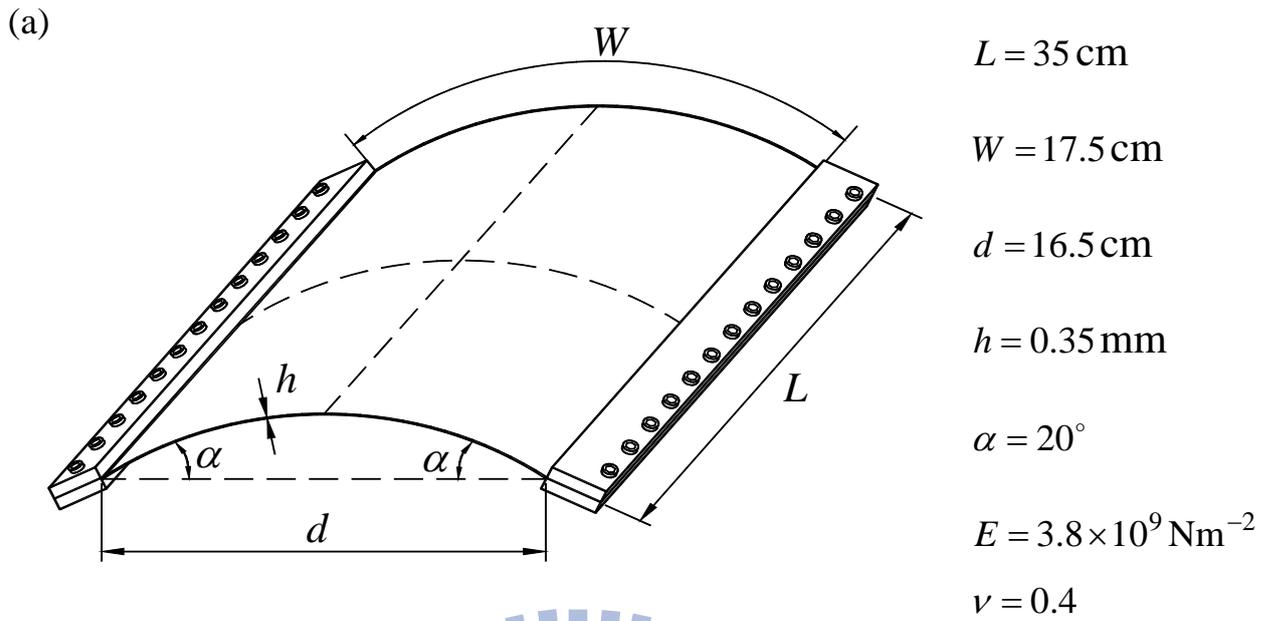


圖 4.26 圓柱薄殼(例題 4.15) (a)結構示意圖(b)俯視圖(c)前視圖

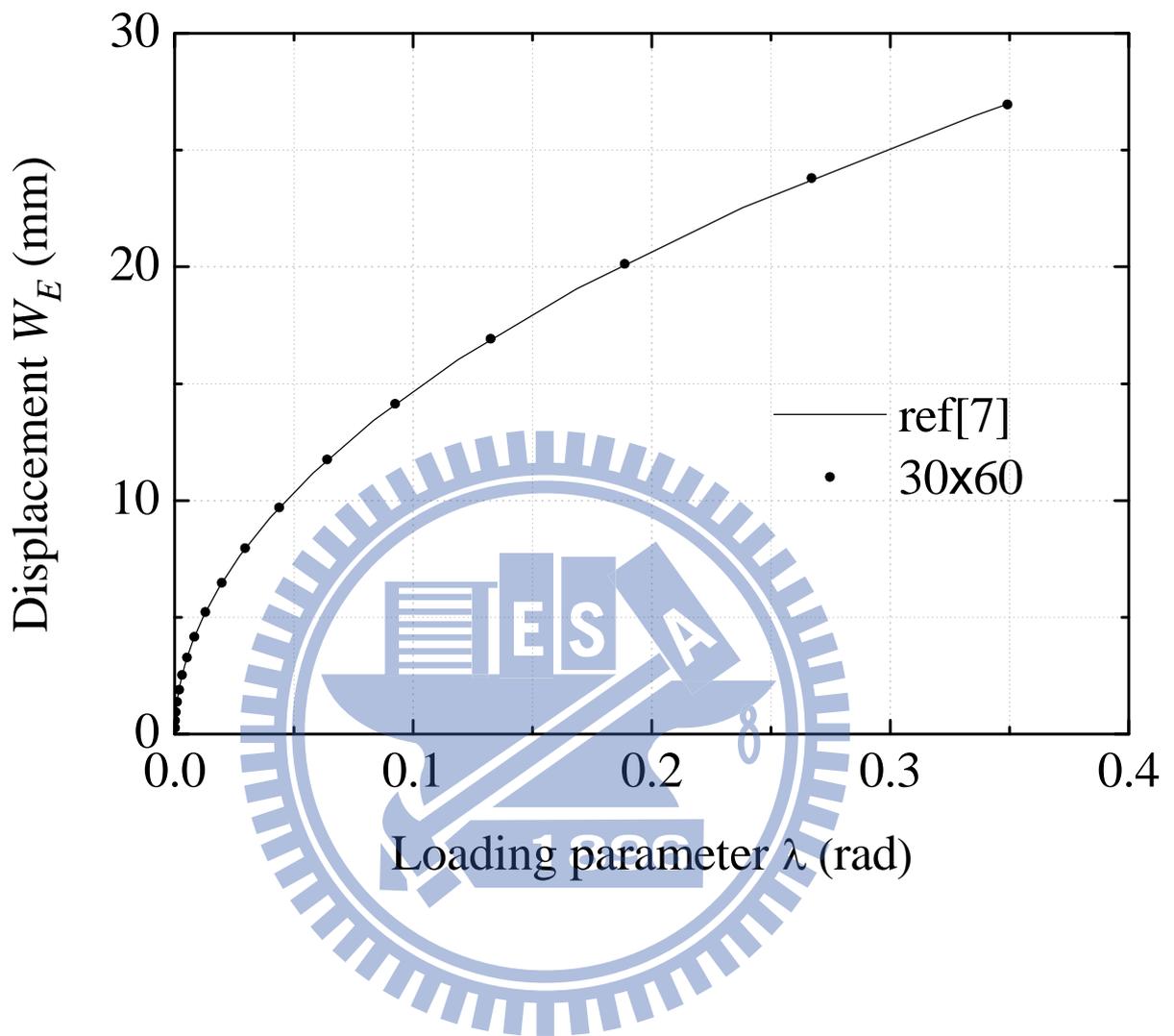


圖 4.27 圓柱薄殼第一階段 E 點之位移—負荷參數曲線圖(例題 4.15)

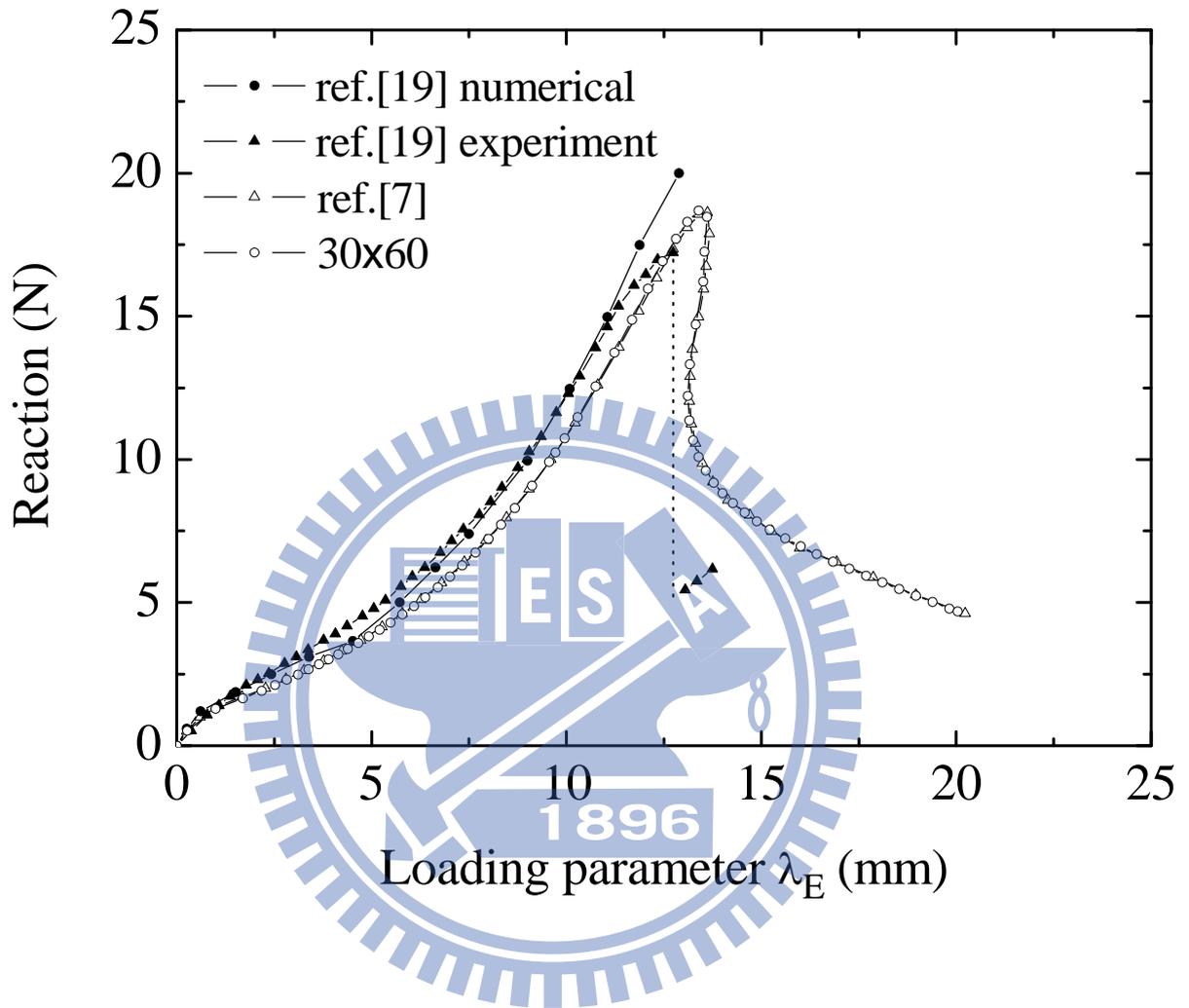


圖 4.28 圓柱薄殼第二階段 E 點之反力—負荷參數曲線圖(例題 4.15)

附錄 A 元素座標系統的決定

本文採用文獻[44]提出的元素座標系統，元素座標系統為原點定在元素的形心，將當前變形的元素之形心 C 與初始未變形的元素之形心重疊，並且將當前變形位置的元素座標 x_1^E 與初始未變形時的元素座標 ${}^0x_1^E$ 同方向且平行，再將初始未變形的元素旋轉一個角度 θ ， $x_i^{E'}$ ($i=1,2$) 為旋轉後的元素座標軸，如圖 A.1 所示，使旋轉後的初始未變形的元素與當前變形的元素在元素形心處無旋轉作用，即

$$\frac{\partial u}{\partial^0 y} - \frac{\partial v}{\partial^0 x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial^0 y} = \frac{1}{2A} \sum_{ijk} {}^0x_{ji} u_k, \quad \frac{\partial v}{\partial^0 x} = \frac{1}{2A} \sum_{ijk} {}^0y_{ij} v_k, \quad ijk = 123, 231, 312 \quad (\text{A.2})$$

$$u_k = x_{kn} - {}^0x_k, \quad v_k = y_{kn} - {}^0y_k, \quad {}^0x_{ji} = {}^0x_j - {}^0x_i, \quad {}^0y_{ij} = {}^0y_i - {}^0y_j \quad (\text{A.3})$$

A 為元素面積， 0x_k ， 0y_k 為初始未變形時元素節點 k 的座標值， x_k ， y_k 為當前變形時元素節點 k 的座標值， x_{kn} ， y_{kn} 為節點 k 在元素座標旋轉 θ 角後的座標值， θ 角逆時鐘方向為正，則 x_{kn} ， y_{kn} 與 x_k ， y_k 關係式如下：

$$x_{kn} = \cos \theta x_k + \sin \theta y_k, \quad y_{kn} = -\sin \theta x_k + \cos \theta y_k \quad (\text{A.4})$$

由(A.2)、(A.3)和(A.4)式可得：

$$\tan \theta = \frac{\sum_{ijk} ({}^0y_{ij} y_k - {}^0x_{ji} x_k)}{\sum_{ijk} ({}^0x_{ji} y_k + {}^0y_{ij} x_k)} \quad (\text{A.5})$$

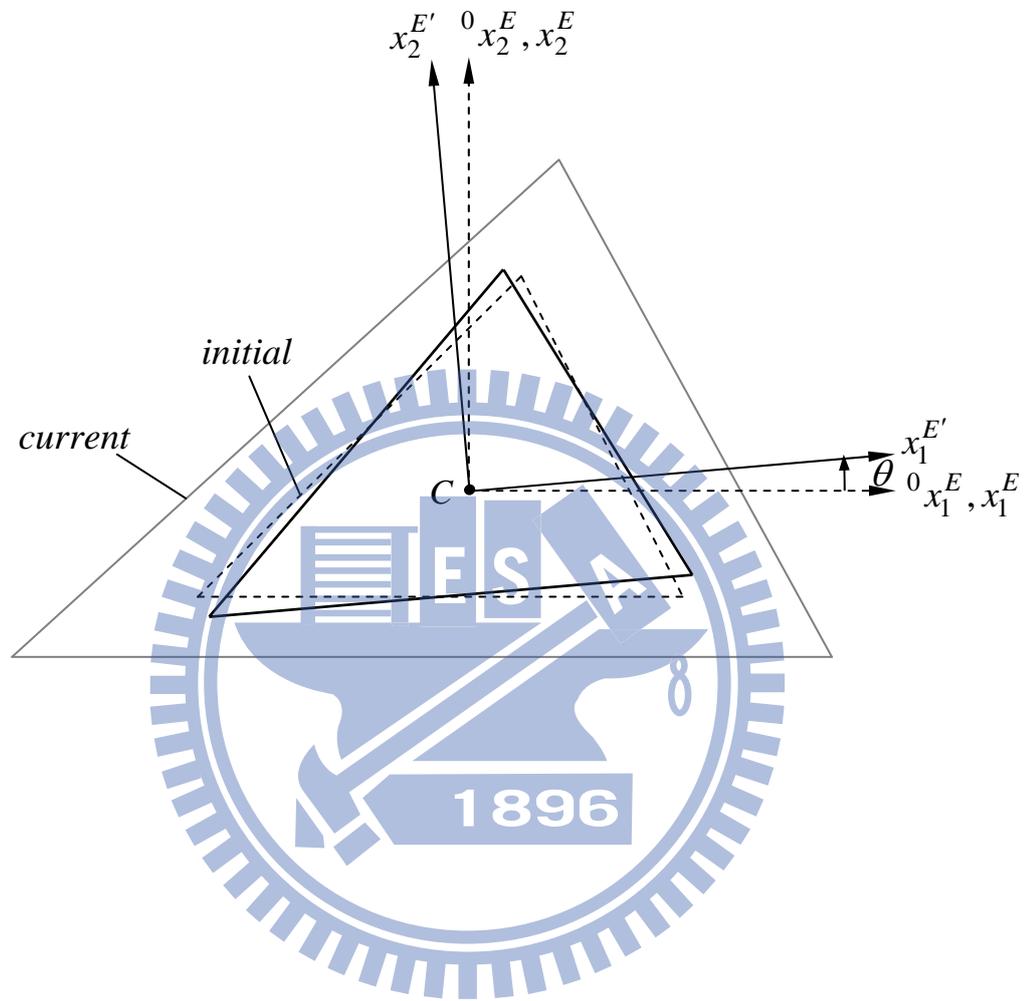


圖 A.1 元素座標示意圖

附錄 B 切線剛度矩陣 \mathbf{k}

由(2.66)式 $\mathbf{f}_\theta = \{\mathbf{f}_{\theta 1} \quad \mathbf{f}_{\theta 2} \quad \mathbf{f}_{\theta 3}\}$ 、(2.41)式 $\mathbf{q}_\theta = \{\mathbf{q}_{\theta 1} \quad \mathbf{q}_{\theta 2} \quad \mathbf{q}_{\theta 3}\}$ 、(2.57)式 $\mathbf{T}_{x\theta}$ 、

(2.65)式 $\mathbf{f}_x = \{\mathbf{f}_{x1} \quad \mathbf{f}_{x2} \quad \mathbf{f}_{x3}\}$ 和(2.40)式 $\mathbf{q}_x = \{\mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2} \quad \mathbf{q}_{x3}\}$ 可得在(2.105)式

\mathbf{k}_θ 推導為：

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \frac{\partial \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} = \mathbf{T}_{x\theta}^t \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_x} \frac{\partial \mathbf{q}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} + \frac{\partial \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_\theta} \Big|_{\mathbf{f}_x = \text{fixed}} \quad (\text{B.1})$$

$$= \mathbf{T}_{x\theta}^t (\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_\sigma) \mathbf{T}_{x\theta} + \mathbf{H}_x$$

其中

$$\mathbf{f}_{\theta j} = \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_{xj}$$

$$= \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_{\theta 1} \\ m_{\theta 2} \\ m_{\theta 3} \\ m_{\varepsilon x} \\ m_{\varepsilon y} \\ m_\gamma \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \frac{1}{2}\theta_2 m_{uy} + \frac{1}{2}\theta_2 m_{vx} - \theta_1 m_{vy} + (\theta_3 + \frac{1}{2}\gamma_{xy})m_{wx} + (1 + \varepsilon_y)m_{wy} \\ -\theta_2 m_{ux} + \frac{1}{2}\theta_1 m_{uy} + \frac{1}{2}\theta_1 m_{vx} + (-1 - \varepsilon_x)m_{wx} + (\theta_3 - \frac{1}{2}\gamma_{xy})m_{wy} \\ (-\theta_3 - \frac{1}{2}\gamma_{xy})m_{ux} + (-1 - \varepsilon_y)m_{uy} + (1 + \varepsilon_x)m_{vx} + (-\theta_3 + \frac{1}{2}\gamma_{xy})m_{vy} + \theta_1 m_{wx} + \theta_2 m_{wy} \\ m_{ux} + \theta_3 m_{vx} - \theta_2 m_{wx} \\ -\theta_3 m_{uy} + m_{vy} + \theta_1 m_{wy} \\ -\frac{1}{2}\theta_3 m_{ux} + \frac{1}{2}m_{uy} + \frac{1}{2}m_{vx} + \frac{1}{2}\theta_3 m_{vy} + \frac{1}{2}\theta_1 m_{wx} - \frac{1}{2}\theta_2 m_{wy} \end{Bmatrix}_j \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial \mathbf{q}_x} = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_\sigma \quad (\text{B.3})$$

\mathbf{k}_x 與 \mathbf{k}_σ 分別為對應於(2.40)式 \mathbf{q}_x 的線性剛度矩陣與元素幾何剛度矩陣。

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{x2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{x3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{H}_{xj} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{x\theta}^t \mathbf{f}_{xj}}{\partial \mathbf{q}_{\theta j}} \right|_{\mathbf{f}_{xj} = \text{fixed}} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{H}_{xj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{vy} & \frac{m_{uy} + m_{vx}}{2} & m_{wx} & 0 & m_{wy} & \frac{1}{2}m_{wx} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_{uy} + m_{vx}}{2} & -m_{ux} & m_{wy} & -m_{wx} & 0 & -\frac{1}{2}m_{wy} \\ 0 & 0 & 0 & m_{wx} & m_{wy} & -m_{ux} - m_{vy} & m_{vx} & -m_{uy} & \frac{m_{vy} - m_{ux}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{wx} & m_{vx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wy} & 0 & -m_{uy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_{wx} & -\frac{1}{2}m_{wy} & \frac{m_{vy} - m_{ux}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j$$

(B.6)

將(B.1) \mathbf{k}_{θ} 轉換到(2.104)式 \mathbf{k}_{φ} ，可由(2.67)式 $\mathbf{f}_{\varphi} = \{\mathbf{f}_{\varphi 1} \quad \mathbf{f}_{\varphi 2} \quad \mathbf{f}_{\varphi 3}\}$ 、(2.42)式

$\delta \mathbf{q}_{\varphi} = \{\delta \mathbf{q}_{\varphi 1} \quad \delta \mathbf{q}_{\varphi 2} \quad \delta \mathbf{q}_{\varphi 3}\}$ 、(2.58)式 $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 、(2.66)式 $\mathbf{f}_{\theta} = \{\mathbf{f}_{\theta 1} \quad \mathbf{f}_{\theta 2} \quad \mathbf{f}_{\theta 3}\}$ 和(2.41)

式 $\mathbf{q}_{\theta} = \{\mathbf{q}_{\theta 1} \quad \mathbf{q}_{\theta 2} \quad \mathbf{q}_{\theta 3}\}$ 得：

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\varphi} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{\varphi}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{f}_{\theta}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi}} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_{\theta}}{\partial \mathbf{q}_{\theta}} \frac{\partial \mathbf{q}_{\theta}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi}} + \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{f}_{\theta}}{\partial \mathbf{q}_{\theta}} \right|_{\mathbf{f}_{\theta} = \text{fixed}} \frac{\partial \mathbf{q}_{\theta}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi}} \\ &= \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{k}_{\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi} + \mathbf{H}_{\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

其中

$$\mathbf{f}_{\phi j} = \mathbf{T}_{\theta \phi j}^t \mathbf{f}_{\theta j} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_{\phi 1} \\ m_{\phi 2} \\ m_{\phi 3} \\ m_{\varepsilon x} \\ m_{\varepsilon y} \\ m_{\gamma} \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_{\theta 1} + \frac{1}{2} \theta_2 m_{\theta 3} \\ m_{\theta 2} - \frac{1}{2} \theta_1 m_{\theta 3} \\ -\theta_2 m_{\theta 1} - \theta_1 m_{\theta 2} + m_{\theta 3} \\ m_{\varepsilon x} \\ m_{\varepsilon y} \\ m_{\gamma} \end{Bmatrix}_j \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{H}_{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\theta 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\theta 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\theta 3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{H}_{\theta j} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta \phi j}^t \mathbf{f}_{\theta j}}{\partial \mathbf{q}_{\theta j}} \right|_{\mathbf{f}_{\theta j} = \text{fixed}} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{H}_{\theta j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_{\theta 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_{\theta 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{\theta 2} & -m_{\theta 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j \quad (\text{B.11})$$

再將(B.5)式 \mathbf{k}_{ϕ} 轉換到(2.103)式 \mathbf{k} ，可由(2.68)式 $\mathbf{f}_{\phi} = \{\mathbf{f}_{\phi 1} \quad \mathbf{f}_{\phi 2} \quad \mathbf{f}_{\phi 3}\}$ 、(2.43)

式 $\mathbf{q}_{\phi} = \{\mathbf{q}_{\phi 1} \quad \mathbf{q}_{\phi 2} \quad \mathbf{q}_{\phi 3}\}$ 、(2.59)式 $\mathbf{T}_{\phi \theta}$ 、(2.67)式 $\mathbf{f}_{\theta} = \{\mathbf{f}_{\theta 1} \quad \mathbf{f}_{\theta 2} \quad \mathbf{f}_{\theta 3}\}$ 、(2.42)

式 $\delta \mathbf{q}_{\phi} = \{\delta \mathbf{q}_{\phi 1} \quad \delta \mathbf{q}_{\phi 2} \quad \delta \mathbf{q}_{\phi 3}\}$ 得：

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi)}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \frac{\partial \mathbf{q}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi = \text{fixed}} \quad (\text{B.12})$$

$$= \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{k}_\phi + \mathbf{H}_\phi$$

其中

$$\mathbf{f}_{\phi j} = \mathbf{T}_{\phi\phi j}^t \mathbf{f}_{\phi j} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_{\phi 1} \\ m_{\phi 2} \\ m_{\phi 3} \\ m_{ex} \\ m_{ey} \\ m_\gamma \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_{\phi 1} + \frac{1}{2} \phi_3 m_{\phi 2} - \frac{1}{2} \phi_2 m_{\phi 3} \\ -\frac{1}{2} \phi_3 m_{\phi 1} + m_{\phi 2} + \frac{1}{2} \phi_1 m_{\phi 3} \\ \frac{1}{2} \phi_2 m_{\phi 1} - \frac{1}{2} \phi_1 m_{\phi 2} + m_{\phi 3} \\ m_{ex} \\ m_{ey} \\ m_\gamma \end{Bmatrix}_j \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{H}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\phi 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\phi 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\phi 3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{H}_{\phi j} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi j}^t \mathbf{f}_{\phi j}}{\partial \mathbf{q}_{\phi j}} \Big|_{\mathbf{f}_\phi = \text{fixed}} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{H}_{\phi j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_{\phi 3} & \frac{1}{2} m_{\phi 2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_{\phi 3} & 0 & -\frac{1}{2} m_{\phi 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_{\phi 2} & \frac{1}{2} m_{\phi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j \quad (\text{B.16})$$

附錄 C 面積座標(area coordinates)

C.1 面積座標的定義

如圖 C.1 所示， x 、 y 為三角形中任一點 P 在直角座標中的座標值，將 P 點與三角形的三個頂點作連線，就形成了三個小三角形，三個頂點 1、2、3 相對應的三個小三角形的面積分別為 A_1 、 A_2 、 A_3 ，令面積座標

$$\lambda = \frac{A_1}{A} \quad (\text{C.1})$$

$$\xi = \frac{A_2}{A} \quad (\text{C.2})$$

$$\eta = \frac{A_3}{A} \quad (\text{C.3})$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}) \quad (\text{C.4})$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (\text{C.5})$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (\text{C.6})$$

其中 A 為三角形 123 的面積， x_i 、 y_i 代表三角形頂點 i 的 x 和 y 座標。 λ 、 ξ 、 η 稱為三角形中 P 點的面積座標，固

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (\text{C.7})$$

由(C.1)式至(C.3)式與(C.7)式可以得出

$$\lambda + \xi + \eta = 1 \quad (\text{C.8})$$

因 λ 、 ξ 、 η 之間不是互相獨立的，因此在本文中僅用 ξ 、 η 表示三角形中任意點的面積座標，如圖 C.2。

C.2 面積座標與直角座標的關係

P 點之面積座標與直角座標之間的關係可表示成[49]

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

與

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

若任意函數 $\phi = \phi(\xi, \eta)$ 為面積座標函數，則其對 x 或 y 的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

在(C.11)式中的 ξ, x 、 η, x 、 ξ, y 、 η, y 可以利用(C.10)式微分得出

$$\begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

反之，若任意函數 $\phi = \phi(x, y)$ 為直角座標函數，其對 ξ 或 η 的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

在(C.13)式中的 x, ξ 、 y, ξ 、 x, η 、 y, η 可以利用(C.9)式微分得出

$$\begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

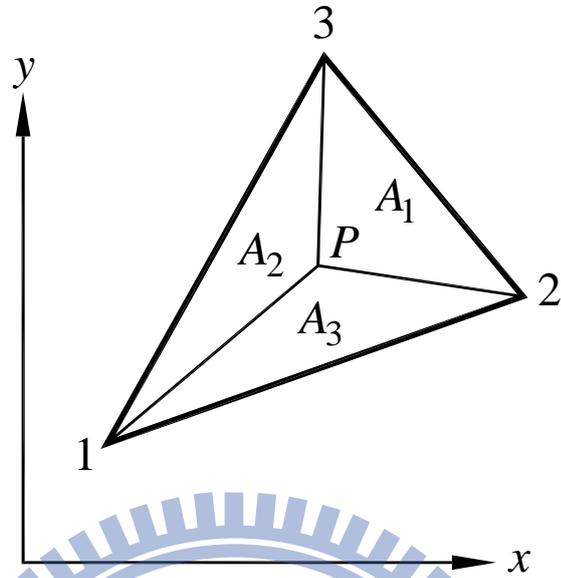


圖 C.1 面積座標表示方法

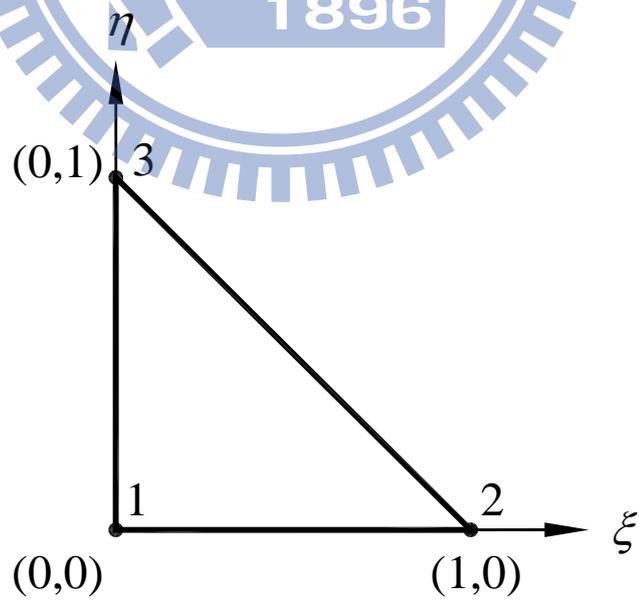


圖 C.2 面積座標示意圖

附錄 D QST 元素的形狀函數及其微分

在(2.113)式中 $N_i (i=1, \dots, 9)$ 及其對 ξ 、 η 的偏微分，可表示為[23]：

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\lambda^2(3-2\lambda)+2a$	$6\lambda(-1+\lambda)+2b$	$6\lambda(-1+\lambda)+2c$
2	$\xi\lambda^2+a/2$	$\lambda(\lambda-2\xi)+b/2$	$-2\xi\lambda+c/2$
3	$\eta\lambda^2+a/2$	$-2\lambda\eta+b/2$	$\lambda(\lambda-2\eta)+c/2$
4	$\xi^2(3-2\xi)+2a$	$6\xi(1-\xi)+2b$	$2c$
5	$\xi^2(-1+\xi)-a$	$\xi(-2+3\xi)-b$	$-c$
6	$\xi^2\eta+a/2$	$2\xi\eta+b/2$	$\xi^2+c/2$
7	$\eta^2(3-2\eta)+2a$	$2b$	$6\eta(1-\eta)+2c$
8	$\xi\eta^2+a/2$	$\eta^2+b/2$	$2\xi\eta+c/2$
9	$\eta^2(-1+\eta)-a$	$-b$	$\eta(-2+3\eta)-c$

其中

$$\lambda = 1 - \xi - \eta \tag{D.1}$$

$$a = \xi\eta\lambda \tag{D.2}$$

$$b = \eta(\lambda - \xi) \tag{D.3}$$

$$c = \xi(\lambda - \eta) \tag{D.4}$$

附錄 E DKT 元素的形狀函數

在(2.126)式和(2.127)式裡面的 \mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 分別有 9 個分量，其表示式為[28]

$$H_{x1} = 1.5(a_6N_6 - a_5N_5) \quad (\text{E.1})$$

$$H_{x2} = -N_1 + c_5N_5 + c_6N_6$$

$$H_{x3} = b_5N_5 + b_6N_6$$

$$H_{x4} = 1.5(a_4N_4 - a_6N_6)$$

$$H_{x5} = -N_2 + c_6N_6 + c_4N_4$$

$$H_{x6} = b_6N_6 + b_4N_4$$

$$H_{x7} = 1.5(a_5N_5 - a_4N_4)$$

$$H_{x8} = -N_3 + c_4N_4 + c_5N_5$$

$$H_{x9} = b_4N_4 + b_5N_5$$

$$H_{y1} = 1.5(d_6N_6 - d_5N_5)$$

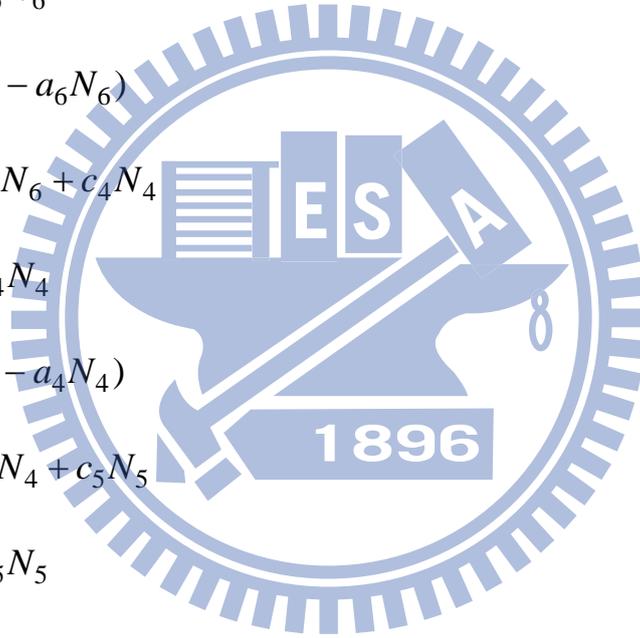
$$H_{y2} = H_{x3}$$

$$H_{y3} = -N_1 + e_5N_5 + e_6N_6$$

$$H_{y4} = 1.5(d_4N_4 - d_6N_6)$$

$$H_{y5} = H_{x6}$$

$$H_{y6} = -N_2 + e_6N_6 + e_4N_4$$



$$H_{y7} = 1.5(d_5N_5 - d_4N_4)$$

$$H_{y8} = H_{x9}$$

$$H_{y9} = -N_3 + e_4N_4 + e_5N_5$$

其中

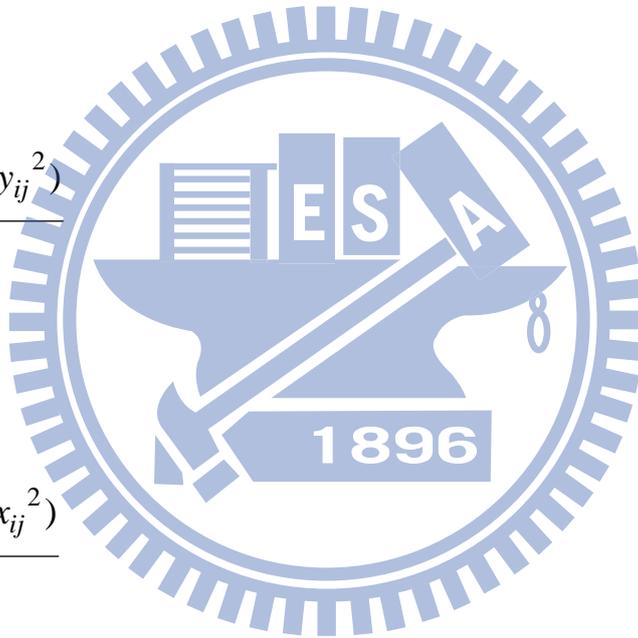
$$a_k = \frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (\text{E.2})$$

$$b_k = \frac{\frac{3}{4}x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$d_k = \frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$e_k = \frac{(\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$



$$l_{ij}^2 = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)$$

其中 $k = 4, 5, 6$ 分別對應到 $ij = 23, 31, 12$ 如圖 E.1 所示， $x_{ij} = x_i - x_j$ ，

$$y_{ij} = y_i - y_j \text{。}$$

在 \mathbf{H}_x 、 \mathbf{H}_y 的表示式中的 $N_i (i = 1 - 6)$ 為[28]

$$N_1 = 2(1 - \xi - \eta) \left(\frac{1}{2} - \xi - \eta \right) \quad (\text{E.3})$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

其中 ξ 、 η 是元素面積座標裡的 L_2 與 L_3 [50]，如圖 E.2 所示。

在文獻[50]中元素面積座標的 L_1 、 L_2 、 L_3 分別為

$$L_1 = \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y) \quad (\text{E.4})$$

$$L_2 = \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y)$$

$$2A = (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

其中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 y_1 、 y_2 、 y_3 分別是元素三個端點在元素座標的座標值。

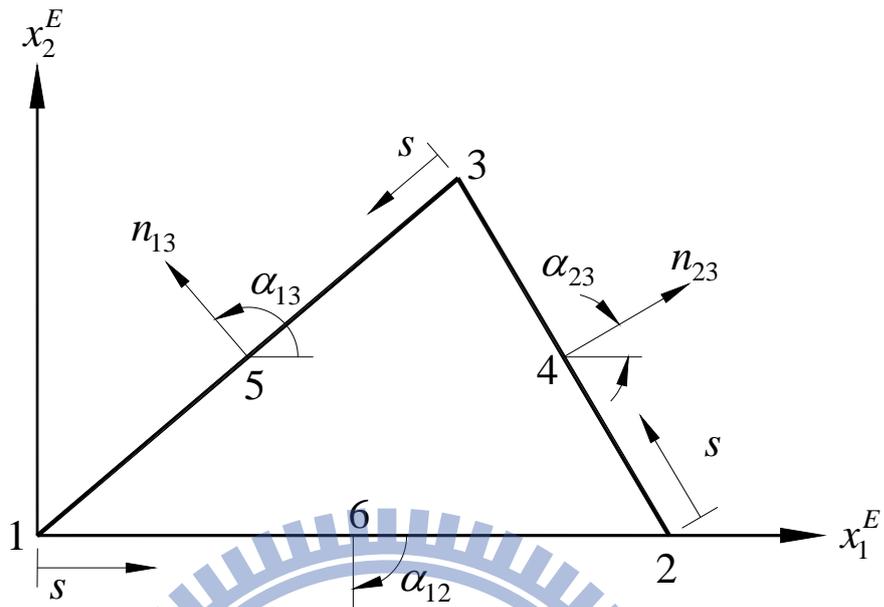


圖 E.1 DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖

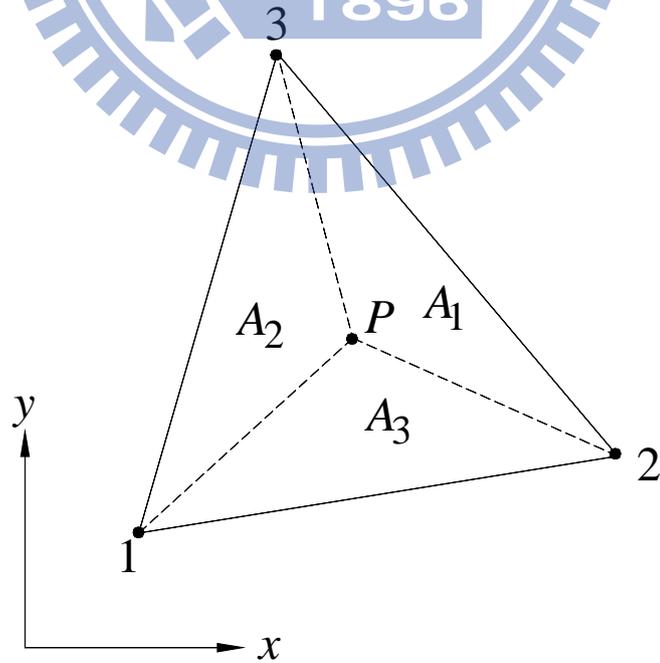


圖 E.2 元素面積座標的示意圖

附錄 F Projector matrix

本文與文獻[53]的三角形殼元素有相同節點位移和旋轉自由度，所以文獻[53]的 Projector matrix 僅要稍加修改，即可適用於本文所推導的殼元素。

若殼元素在當前的變形位置，受到節點擾動位移 $\delta \mathbf{q}_\varphi^a$ 作用，則在擾動後的元素座標中對應於 $\delta \mathbf{q}_\varphi^a$ 的節點擾動變形位移 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ (見(2.42)式)可表示成：

$$\delta \mathbf{q}_\varphi = \mathbf{P} \delta \mathbf{q}_\varphi^a \quad (\text{F.1})$$

其中 \mathbf{P} 為所謂的 Projector matrix， \mathbf{P} 能濾掉 $\delta \mathbf{q}_\varphi^a$ 中的剛體位移。

對應於 $\delta \mathbf{q}_\varphi^a$ 的元素節點內力 \mathbf{f} 與對應於 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 的元素節點內力 \mathbf{f}_φ ((2.67)式)的關係可表示成：

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^t \mathbf{f}_\varphi \quad (\text{F.2})$$

其中 \mathbf{f} 為考慮 Projector matrix 時的元素節點內力， \mathbf{f}_φ 為不考慮 Projector matrix 時的元素節點內力。

本文之 Projector matrix 可表示成[53]：

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{27} - \mathbf{A} \mathbf{G}^t \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}_{27 \times 3}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix}_{27 \times 3} \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{r}}_i^e \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_i^e \\ 0 & 0 & -x_i^e \\ -y_i^e & x_i^e & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

$$\mathbf{G}_j^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{ki}^e/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{ki}^e/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_{ki}^0/C & -y_{ki}^0/C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

$$A = \|\mathbf{r}_{12}^e \times \mathbf{r}_{13}^e\|, \quad C = \beta_j x_j + \gamma_j y_j \quad (\text{F.7})$$

$$\beta_i = y_j^0 - y_k^0, \quad \gamma_i = -(x_j^0 - x_k^0) \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{r}_{ij}^e = \mathbf{r}_j^e - \mathbf{r}_i^e, \quad \mathbf{r}_{ij}^e = \{x_{ij}^e \quad y_{ij}^e \quad z_{ij}^e\} = \{x_j^e - x_i^e \quad y_j^e - y_i^e \quad z_j^e - z_i^e\}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{F.9})$$

其中 x_j^0 和 y_j^0 , x_j^e 、 y_j^e 和 z_j^e 分別為初始元素節點在元素座標上的座標值及當前元素節點在元素座標上的座標值，由本文座標的定義， $z_j^e = 0$ 。

考慮 Projector matrix 時，元素剛度可表示成[53]：

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{P}^t \mathbf{k}_\varphi \mathbf{P} - \mathbf{G} \mathbf{F}_1^t \mathbf{P} - \mathbf{F}_2 \mathbf{G}^t \quad (\text{F.10})$$

$$\mathbf{F}_1 = \{\tilde{\mathbf{n}}_1^e \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{n}}_2^e \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{n}}_3^e \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\}_{27 \times 3} \quad (\text{F.11})$$

$$\mathbf{F}_2 = \{\tilde{\mathbf{n}}_1^e \quad \tilde{\mathbf{m}}_1^e \quad \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{n}}_2^e \quad \tilde{\mathbf{m}}_2^e \quad \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{n}}_3^e \quad \tilde{\mathbf{m}}_3^e \quad \mathbf{0}\}_{27 \times 3} \quad (\text{F.12})$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^t \mathbf{f}_\varphi = \{\mathbf{n}_1^e \quad \mathbf{m}_1^e \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{n}_2^e \quad \mathbf{m}_2^e \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{n}_3^e \quad \mathbf{m}_3^e \quad \mathbf{0}\} \quad (\text{F.13})$$

其中 \mathbf{k}_p 為考慮 Projector matrix 時的切線剛度， \mathbf{k}_φ 已在(2.104)式中定義，其

推導見附錄 B， $\tilde{\mathbf{n}}_1^e$ 、 $\tilde{\mathbf{m}}_1^e$ 、 $\tilde{\mathbf{n}}_2^e$ 、 $\tilde{\mathbf{m}}_2^e$ 、 $\tilde{\mathbf{n}}_3^e$ 和 $\tilde{\mathbf{m}}_3^e$ 分別為對應於 \mathbf{n}_1^e 、 \mathbf{m}_1^e 、 \mathbf{n}_2^e 、

\mathbf{m}_2^e 、 \mathbf{n}_3^e 和 \mathbf{m}_3^e 的旋轉矩陣 (spin matrix)。 $\mathbf{n}_j^e = \{f_{1j}^e \quad f_{2j}^e \quad f_{3j}^e\}$ 、

$\mathbf{m}_j^e = \{m_{1j}^e \quad m_{2j}^e \quad m_{3j}^e\}$ 分別為元素節點 j 在元素座標 x_i^E ($i=1,2,3$) 軸方向的

力和廣義力矩。

附錄 G 文獻[19]的實驗說明

文獻[19]的實驗是探討一聚酯圓柱薄殼受位移負荷作用後的非線性行為，文中將一薄片的兩個長邊以夾鉗固定，再將其彎成柱狀殼，兩邊夾持端相距一固定距離 $d = 16.5\text{cm}$ ，並與水平面維持一固定角度 $\alpha = 20^\circ$ (如圖 G.1)，然後在薄殼中心施加一向下的位移負荷，薄片的尺寸和材料參數為長度 $L = 35\text{cm}$ 、寬度 $W = 17.5\text{cm}$ 、厚度 $h = 0.35\text{mm}$ 、楊氏係數 $E = 3.8 \times 10^9 \text{N/m}^2$ 。在其實驗中隨著位移負荷的增加，結構連續產生四個特殊的幾何變形，如圖 G.2 所示。第一個變形是中心向下位移 4mm 時，薄殼中心附近出現兩個對稱 X、Y 軸的 d-cone (developable cone) (圖 G.2a)。第二個變形是中心向下位移 11.5mm 時，出現兩個新的 d-cone，而四個 d-cone 圍成一個對薄殼中心轉了一個角度的菱形(圖 G.2b)。第三個變形是中心向下位移 12.5mm 時，四個 d-cone 的連線形成一個梯形(圖 G.2c)。第四個變形是中心向下位移 15mm 時，梯形底邊兩個 d-cone 移到薄殼自由端的邊界時，產生一個不連續的變化，使薄殼變成波浪狀的圓柱殼(圖 G.2d)。文獻[19]提到殼的長度若不夠長，則無法觀察到菱形及後來的梯形圖形這兩種型態，會提早產生波浪狀的柱狀殼。

$$L = 35 \text{ cm}$$

$$W = 17.5 \text{ cm}$$

$$d = 16.5 \text{ cm}$$

$$h = 0.35 \text{ mm}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$E = 3.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.4$$

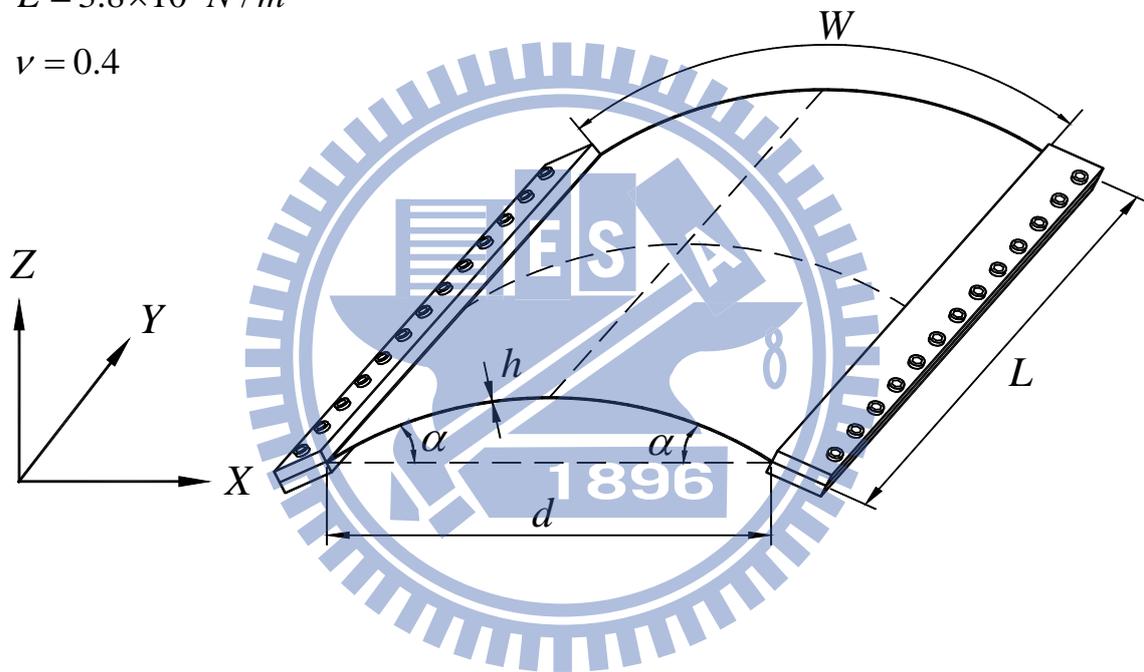


圖 G.1 柱狀薄板結構示意圖

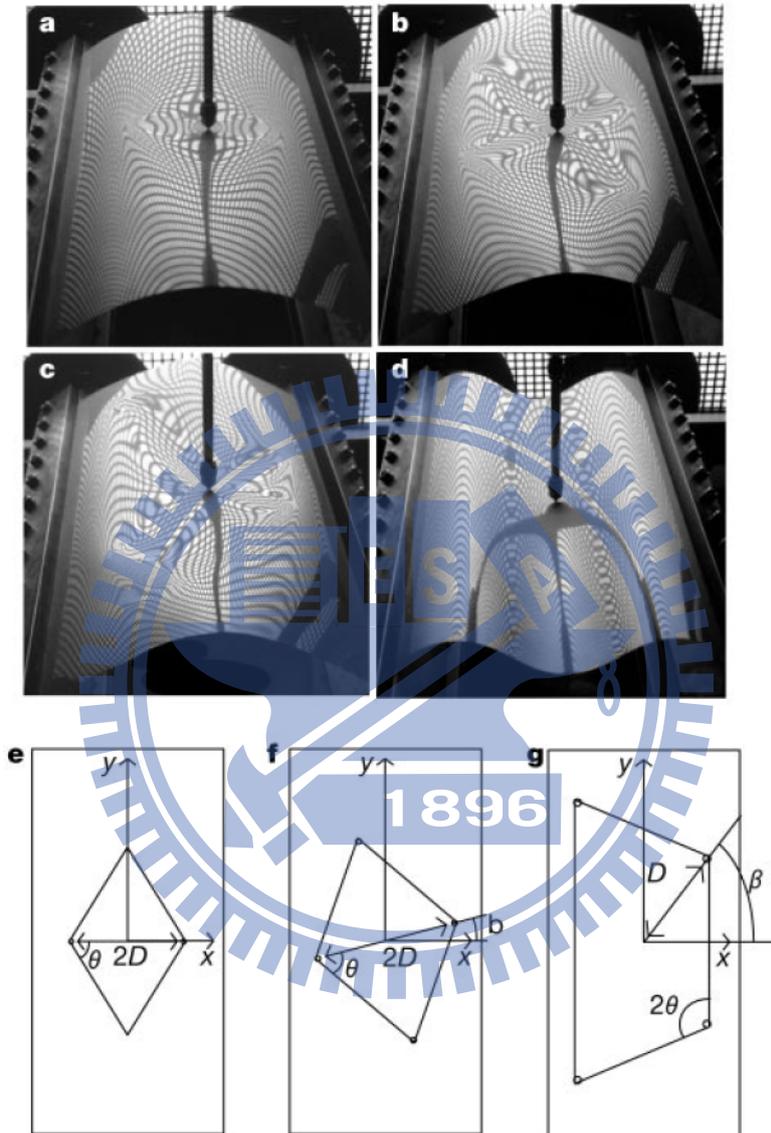


圖 G.2 文獻[19]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及
對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g)