

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

雙對稱開口薄壁 Timoshenko 梁之非線性分析

Nonlinear analysis of bisymmetric thin-walled open-section

1896
Timoshenko beam

研究生：莊士緯

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百零二年九月

雙對稱開口薄壁 Timoshenko 梁之非線性分析

Nonlinear analysis of bisymmetric thin-walled open-section

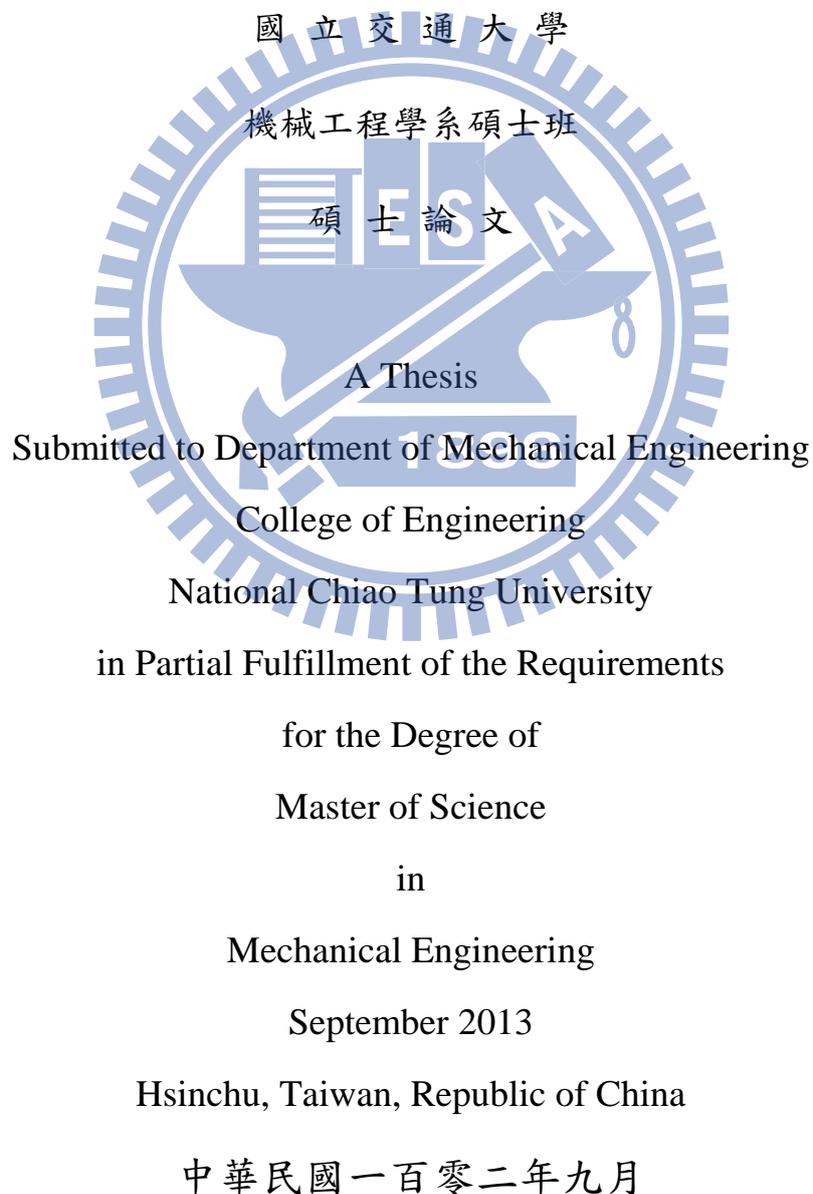
Timoshenko beam

研究生：莊士緯

Student： Shih-Wei Chuang

指導教授：蕭國模 博士

Advisor： Dr. Kuo-Mo Hsiao



雙對稱開口薄壁 Timoshenko 梁之非線性分析

Nonlinear analysis of bisymmetric thin-walled open-section

Timoshenko beam

研究生：莊士緯

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班



本研究的主要目的是以一致性共旋轉法探討雙對稱開口薄壁 Timoshenko 梁的幾何非線性挫屈及挫屈後的分析。

本文中推導的梁元素有兩個節點，每個節點有 7 個自由度。本文中將元素節點定在斷面剪心，並取剪心軸當作梁元素變形的參考軸。本研究在當前梁元素變形的位置上建立元素座標，並在其上描述元素的變形。為了準確描述 Timoshenko 元素的變形，本研究利用虛功原理並考慮剪力修正係數推導元素節點內力，元素節點內力所作的虛功是在元素受虛位移擾動前的元素座標上推導，但元素應力所作的虛功是在元素受虛位移擾動後的元素座標上推導，即將元素座標建立在元素受虛位移擾動後的位置，並在其上定

義元素的變形及推導虛應變。本研究推導的元素節點內力能滿足靜力的平衡。本研究由元素節點內力的改變與擾動位移的關係推導梁元素的切線剛度矩陣。因本研究在推導元素的節點內力時，扣除了虛位移中剛體運動的部分，而元素的節點內力與元素一起剛體運動，所以不能僅由元素節點內力對節點參數微分求得，還要考慮元素節點內力在剛體運動時因方向改變造成的元素節點內力的改變。線性剛度矩陣包含在元素切線剛度矩陣裡面。

本文求解非線性平衡方程式的數值計算是基於牛頓-拉福森 (Newton-Raphson) 法配合弧長控制 (arc length control) 法的增量迭代法。本研究中以系統切線剛度矩陣之行列式值為零當作挫屈準則，利用弧長的二分法求得挫屈負荷。

為了驗證本研究提出的方法的準確性與有效性，本研究以不同數值例題探討剪應變對雙對稱開口薄壁梁之負荷-位移曲線及挫屈負荷的影響，並與 Euler-Bernoulli 梁的結果做比較。

Nonlinear analysis of bisymmetric thin-walled open-section Timoshenko beam

Student : Shih-Wei Chuang

Advisor : Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan, R.O.C.

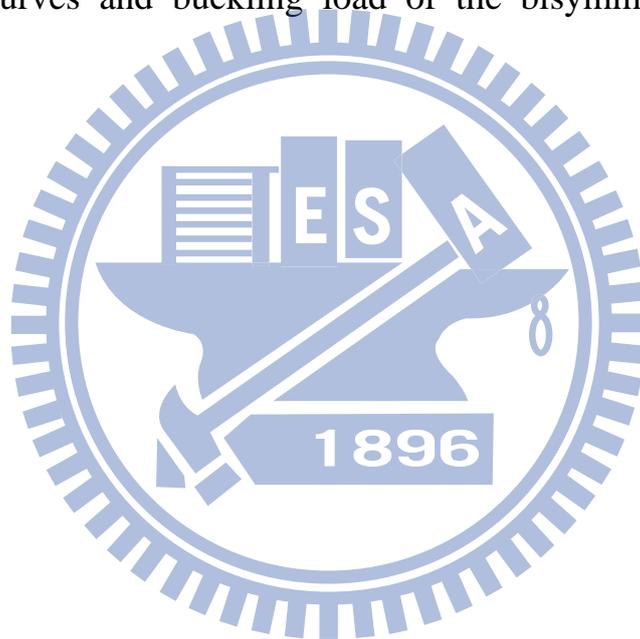
ABSTRACT

A consistent co-rotational total Lagrangian finite element formulation for the geometric nonlinear buckling and postbuckling analysis of bisymmetric thin-walled Timoshenko beams is presented.

The element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the centroid of the end cross-sections of the beam element and the axis of centroid is chosen to be the reference axis. The deformations of the beam element are described in the current element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. The exact kinematics of the Timoshenko beam is considered. The element nodal forces are derived using the virtual work principle with the consideration of the shear correction factor. The virtual rigid body motion corresponding to the virtual nodal displacements is excluded in the derivation of the element nodal forces. A procedure is proposed to determine the virtual rigid body motion. A consistent second-order linearization of the element nodal forces is used here. Thus, all coupling among bending, shearing, twisting, and stretching deformations of the beam element is retained. In the derivation of the element tangent stiffness matrix, the change of element nodal forces induced by the element rigid body rotations should be considered for the present method. Thus, a stability matrix is included in the element tangent stiffness matrix.

An incremental-iterative method based on the Newton–Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. The zero value of the tangent stiffness matrix determinant of the structure is used as the criterion of the buckling state. A bisection method of the arc length is used to find the buckling load.

Numerical examples are studied and compared with the results obtained by using Euler beam element to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method and to investigate the effect of the shear deformation on the loading–deflection curves and buckling load of the bisymmetric thin-walled beams.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年期間的指導與教誨，使本論文得以順利完成，蕭老師在研究上嚴謹的態度以及對日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的敬意及謝意。也感謝鄭文雅老師及尹慶中老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭學長、盧致群學長、翁林甫學長、黃楚璋學長與許彤羽學姐在研究上的協助與照顧以及生活上的互相照應。感謝同學林琮琪、沈佳鴻在課業及研究上的幫忙。最後再感謝學弟林群禮、高嘉鴻、金長虹、蔡耀賢在學業以及各方面的砥礪與成長。

感謝父母親、關心我的親人、及朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母、家人以及所有關心我的人。



目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	VI
致謝.....	V
目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	IX
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	3
2.1 基本假設	3
2.2 座標系統描述.....	3
2.3 旋轉向量	4
2.4 Timoshenko梁的變形描述.....	5
2.5 Timoshenko梁的應變.....	12
2.5.1 梁的應變.....	12
2.5.2 梁之位置向量的變分及應變的變分.....	14
2.6 節點參數與節點力.....	16
2.6.1 系統節點參數與節點力.....	16
2.6.2 元素節點參數與節點力.....	17

2.6.3 元素顯節點參數的擾動與隱節點參數的擾動關係.....	18
2.7 元素節點內力 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 之推導.....	22
2.7.1 元素顯節點內力與隱節點內力的關係.....	23
2.7.2 隱節點內力 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 的推導.....	24
2.8 元素剛度矩陣之推導.....	27
2.9 系統平衡方程式與收斂準則	31
第三章 數值計算方法與程序	33
3.1 增量迭代法	33
3.2 二分法	35
3.3 N循環迭代法	36
第四章 數值例題與結果	37
第五章 結論與展望	47
參考文獻	49
附錄A	52
附錄B	54
附錄C	57
附表.....	61
附圖.....	70

表目錄

表 4.1 例題一：矩形懸臂梁末端受集中負荷之挫屈負荷.....	61
表 4.2 例題二：兩端固接矩形梁中間承受鉛直力之挫屈負荷.....	62
表 4.3 例題三：I 形懸臂梁末端受一集中載重之挫屈負荷.....	64
表 4.4 例題四：兩端固接 I 形梁中間承受鉛直力之挫屈負荷.....	65
表 4.5 例題五：兩端固接 I 形梁承受兩個鉛直力之挫屈負荷.....	66
表 4.6 例題九之十字斷面性質.....	67
表 4.7 例題十：懸臂梁末端斷面不同位置受集中載重之挫屈負荷.....	68
表 4.8 例題十、十一之 I 形斷面性質.....	69



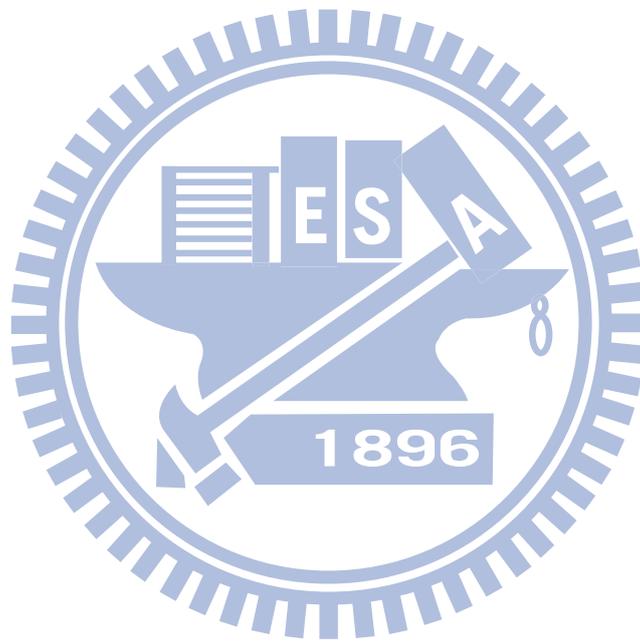
圖目錄

圖 2.1 梁元素之位移以及座標系統關係圖.....	70
圖 2.2 旋轉向量	71
圖 4.1 矩形懸臂梁末端承受集中載重之結構圖(例題一).....	72
圖 4.2 端點 B 在 X_2^G, X_3^G 方向之負荷-位移曲線圖(例題一).....	73
圖 4.3 矩形梁中間承受集中載重之結構圖(例題二).....	74
圖 4.4 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題二).....	75
圖 4.5 I 形懸臂梁末端承受集中載重之結構圖(例題三).....	76
圖 4.6 自由端 B 的負荷-位移曲線圖(例題三).....	77
圖 4.7 I 形梁中間承受一集中載重之結構圖(例題四).....	78
圖 4.8 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題四).....	79
圖 4.9 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題四).....	80
圖 4.10 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題四).....	81
圖 4.11 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題四).....	82
圖 4.12 I 形梁承受兩個集中載重之結構圖(例題五).....	83
圖 4.13 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題五).....	84
圖 4.14 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題五).....	85
圖 4.15 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題五).....	86
圖 4.16 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題五).....	87
圖 4.17 簡支梁兩端承受偏心軸力之結構圖(例題六).....	88

圖 4.18 簡支梁受偏心軸力的負荷-位移曲線圖(例題六).....	89
圖4.19懸臂L形構架自由端承受水平力之結構圖(例題七).....	90
圖 4.20 端點 C 在 X_1^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題七).....	91
圖 4.21 端點 C 在 X_2^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題七).....	92
圖 4.22 端點 C 在 X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖(例題七).....	93
圖4.23簡支梁兩端承受均勻彎矩之結構圖(例題八).....	94
圖4.24簡支梁兩端皆為自由翹曲受均勻彎矩的負荷-位移曲線圖 (例題八).....	95
圖 4.25 簡支梁兩端皆為抑制翹曲受均勻彎矩的負荷-位移曲線圖 (例題八).....	96
圖4.26 懸臂梁末端承受一軸力之結構圖(例題九).....	97
圖 4.27 懸臂梁受軸力的負荷-位移曲線圖(例題九).....	98
圖 4.28 懸臂梁承受均佈載重之結構圖(例題十).....	99
圖4.29偏心力施加位置示意圖(例題十).....	100
圖4.30懸臂梁頂部受偏心分佈載重負荷-位移曲線圖(例題十).....	101
圖4.31懸臂梁底部受偏心分佈載重負荷-位移曲線圖(例題十).....	102
圖4.32偏心力施加位置示意圖(例題十一).....	103
圖4.33懸臂梁末端斷面頂部受集中載重負荷-位移曲線圖 (例題十一).....	104
圖4.34懸臂梁末端斷面底部受集中載重之負荷-位移曲線圖 (例題十一).....	105

圖4.35懸臂梁末端斷面中間受集中載重之負荷-位移曲線圖

(例題十一).....106



第一章 緒論

長久以來薄壁梁結構被廣泛應用在工程上，隨著使用上的不同對結構的選擇也有所不同，有些梁結構在使用中，需能承受大變形與大旋轉；有些結構如飛機、太空梭、船舶等，為了減輕結構整體重量而使用高強度的材料及薄壁斷面；有些特殊結構為了兼顧重量及盡量使受力後變形小，也會使用薄壁梁來組成。

在結構力學上，Euler–Bernoulli梁的變形假設較Timoshenko梁單純，因此被廣泛應用在建模上。尤拉梁與Timoshenko梁變形假設得最大差別在於尤拉梁的斷面在變形後仍然垂直梁的中心軸，而Timoshenko梁考慮斷面剪應變所以較複雜。當梁的細長比(Slenderness ratio) $\eta = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}$ 較大時，梁的側向位移主要是由撓曲正應變造成的，剪應變的貢獻相對地很小，因此細長梁不論用Timoshenko梁模型還是Euler–Bernoulli梁模型分析，得到的側向變形都差不多；而粗短梁的細長比很小，梁的側向位移就不能忽略剪應變的影響。開口薄壁梁的扭轉剛度通常比撓曲剛度小很多，當兩個斷面主軸之二次矩相差較大的開口薄壁梁，在垂直於強主軸的方向受側向力作用時，即使該方向的細長比不大(如 $\eta < 10$)，還是很容易引起側向一扭轉挫屈(Lateral-torsional buckling)。在這種情況下，梁的挫屈負荷及在挫屈前後的側向位移，也許不能忽略剪應變的影響。據本人所知，甚少有文獻探討剪應變對薄壁梁之挫屈負荷及負荷一位移曲線的影響。所以本文希望探討

Timoshenko 梁與 Euler–Bernoulli 梁之幾何非線性行為及挫屈負荷的差異。文獻[1]以一致性共旋轉法推導三維 Euler–Bernoulli 梁元素，考慮聖維南定理與扭轉撓曲的影響，並以例題探討薄壁彈性梁側向扭轉挫屈的現象。文獻[2,3]研究三維薄壁梁的材料及幾何非線性行為，文獻[2,3]採用 Timoshenko 梁與 Euler–Bernoulli 梁兩種模型，其例題主要在探討彈塑性梁的幾何非線性行為。但其例題之梁的細長比都很大，所以兩種梁模型的結果都差不多。文獻[4]提出一三維 Timoshenko 梁的變形機制，推導一梁元素，並將其用在旋轉梁的穩態變形及自然振動分析，但文獻[4]推導的梁元素並沒有考慮剪力修正係數，且文獻[4]的穩態變形僅考慮軸向扭轉及位移。文獻[5]提出一個決定剪切係數(shear coefficient)的方法，並與 Timoshenko[6]與 Cowper[7]的剪切係數做比較。文獻[8]推導一三維 Timoshenko 梁元素的 shape function。

本文將利用文獻[4]黃之三維 Timoshenko 梁的變形機制推導一兩個節點十四個自由度的梁元素，但在推導梁元素時加入剪力修正係數。本文以 d'Alembert 原理、虛功原理配合幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出元素之節點變形力。本文將利用文獻[9]提出的方法推導元素之切線剛度矩陣。本研究將以數值例題探討三維薄壁梁結構在不同邊界條件、斷面下受不同負荷的幾何非線性行為及側向挫屈的現象，以說明本研究中提出的方法的正確性，並與 Euler–Bernoulli 梁的結果比較，以探討剪應變對薄壁梁之挫屈負荷及負荷—位移曲線的影響。

第二章 理論推導

本章所推導的三維Timoshenko梁元素之基本假設、座標系統、梁的變形機制、梁元素的推導方法與文獻[4]類似。

2.1 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的假設：

- (1) 梁為等斷面、雙對稱的Timoshenko梁。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (4) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。

2.2 座標系統描述

本研究是使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素。為了描述梁系統的變形，本文中使用的三個右手座標系統：

- (1) 總體座標系統 $X_i^G, (i=1,2,3)$

如圖四所示，系統的節點座標及方位，其他座標系統之座標軸的方向餘弦，皆在此座標系統中定義。

- (2) 梁斷面座標系統 $x_i^S, (i=1,2,3)$

該座標系統的原點是剛接在梁斷面的形心上，其 x_1^S 軸取在未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 、 x_3^S 軸取在未翹曲斷面的主軸方向。

(3) 元素座標系統 x_i , ($i=1,2,3$)

元素座標系統是建立在每個元素當前的位置上，如圖 2.1 所示，元素座標系統的原點是定義在元素節點 1 上， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 與 x_3 軸，可以由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定[10]，本文是分別將位於節點 1、2 後的斷面繞一個與該斷面之法線及與 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向將無法定義)，然後再以兩斷面的主軸方向的角平分線作為 x_2 軸與 x_3 軸的方向。本文中梁元素的位移、變形，均在此座標系統定義。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ ，元素座標 $\mathbf{x} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ，元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{ x_1^S, x_2^S, x_3^S \}$ 的關係可表示如下：

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S \quad (2.2.1)$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 分別代表元素座標、元素斷面座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.3 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖 2.2 所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3\} = \psi \mathbf{e}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成[11]:

$$\mathbf{b}' = \cos \psi \mathbf{b} + (1 - \cos \psi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \sin \psi (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \quad (2.3.1)$$

其中 \mathbf{I} 為 3×3 的單位矩陣，符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ψ 表繞旋轉軸的轉角， \mathbf{e} 表旋轉軸的單位向量。

當旋轉向量 $\boldsymbol{\psi}$ 有一微小變化 $\delta\boldsymbol{\psi}$ 時會使向量 \mathbf{b}' 繞 x_i ($i=1,2,3$) 軸作微小旋轉 $\delta\varphi_i$ ， $\delta\boldsymbol{\psi}$ 與 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 有以下的關係[11]

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\psi})\delta\boldsymbol{\psi} \quad (2.3.2)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\psi}) = [\mathbf{I} + a_1(\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{I}) + b_1\boldsymbol{\psi} \times (\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{I})] \quad (2.3.3)$$

其中 $a_1 = \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}$ ， $b_1 = \frac{1}{\psi^2} \left(1 - \frac{\sin \psi}{\psi}\right)$ ，當 $\psi \rightarrow 0$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $b_1 = \frac{1}{6}$

當 $\psi \rightarrow 0$ ，將(2.3.3)式線性化， $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\psi})$ 可近似成

$$\mathbf{T}_{\varphi\psi} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

2.4 Timoshenko 梁的變形描述

本文在元素座標上描述梁元素的變形，由(2.1)節中的基本假設可知 Timoshenko 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及

其截面的旋轉來描述。

本研究採用[4]中之梁的變形機制，如圖 2.1 中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在元素座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \phi_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S + ye_2^S + ze_3^S \quad (2.4.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x)$ 、 $v(x)$ 以及 $w(x)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x)$ 、 $w(x)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\phi_{1,x} = \frac{\partial\phi_1}{\partial x}$ 是梁斷面沿變形後形心軸的軸向扭轉率， $\phi_1(x)$ 為形心軸的扭轉角， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向量。

令 s 為變形後形心軸的弧長， ds 為弧長的微小變形，由畢氏定理可以知道：

$$ds^2 = dx_p^2 + dv^2 + dw^2 \quad (2.4.3)$$

由(2.4.3)式可得

$$x_p(x) = u_1(t) + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - (v_{,x})^2 - (w_{,x})^2]^{1/2} dx \quad (2.4.4)$$

其中 $u_1(t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零。

$$v_{,x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{ds}{dx} - 1 \quad (2.4.5)$$

ε_0 為形心軸的單位伸長量。

由梁元素的變形為小變形的假設，利用近似式

$$[(1+\varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2), \text{ 上式可表示成}$$

$$x_p(x) = u_1(t) + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.4.6)$$

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定：

$$\phi_1 = \phi_1 \mathbf{e}_1 \quad (2.4.7)$$

$$\phi_m = \phi_m \mathbf{m} = \{0 \quad \phi_2 \quad \phi_3\} \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{m} = \{0, \frac{\phi_2}{\phi_m}, \frac{\phi_3}{\phi_m}\} = \{0, m_2, m_3\} \quad (2.4.9)$$

其中 \mathbf{m} 為垂直於 x_1 軸之單位向量， $\phi_m = (\phi_2^2 + \phi_3^2)^{1/2}$ 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_1^S 的夾角， ϕ_1 為斷面繞 x_1 軸的轉角。

將旋轉向量 ϕ_1 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}_i' ，再將 ϕ_m 作用在 \mathbf{e}_i' ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 ϕ_m 、以及 ϕ_1 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 ϕ_m 與 ϕ_1 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[9]、[10]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{n} \quad \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{n} = \{\cos \phi_m \quad m_3 \sin \phi_m \quad -m_2 \sin \phi_m\}, \quad \phi_m = (\phi_2^2 + \phi_3^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos\phi_1 \mathbf{r}_1 + \sin\phi_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin\phi_1 \mathbf{r}_1 + \cos\phi_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-m_3 \sin\phi_m \quad \cos\phi_m + (1 - \cos\phi_m)m_2^2 \quad (1 - \cos\phi_m)m_2m_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{m_2 \sin\phi_m \quad (1 - \cos\phi_m)m_2m_3 \quad \cos\phi_m + (1 - \cos\phi_m)m_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 $\phi_i (i=1, 2, 3)$ 的函數，所以本文中稱 ϕ_i 為旋轉參數， $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ ，為旋轉參數向量。

當 $\phi_i (i=1, 2, 3)$ 分別有一微小變化 $\delta\phi_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 $x_i (i=1, 2, 3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta\phi_i (i=1, 2, 3)$ 而得。

$\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\varphi} = \{\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3\}$ 之關係可表示如下[9]、[10]：

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = [\mathbf{n}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{n}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{n}] \delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}_{\varphi\phi} \delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\frac{\phi_3}{\phi_m^2}, \frac{\phi_2^2}{\phi_m^2}, \frac{\phi_2\phi_3}{\phi_m^2} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \frac{\phi_2}{\phi_m^2}, \frac{\phi_2\phi_3}{\phi_m^2}, \frac{\phi_3^2}{\phi_m^2} \right\}$$

$$a = \frac{\phi_3}{\phi_m^2}$$

$$b = \frac{-\phi_2}{\phi_m^2}$$

(2.4.11)式之反函數可表示如下：

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\phi_3 \sin(\phi_m)}{\phi_m (\cos(\phi_m) + 1)} & -\frac{\phi_2 \sin(\phi_m)}{(\cos(\phi_m) + 1)\phi_m} \\ -\phi_3 & \frac{\sin(\phi_m)\phi_2^2 + \cos(\phi_m)\phi_m\phi_3^2}{\sin(\phi_m)\phi_m^2} & \frac{(-\cos(\phi_m)\phi_m + \sin(\phi_m))\phi_2\phi_3}{\sin(\phi_m)\phi_m^2} \\ \phi_2 & \frac{(-\cos(\phi_m)\phi_m + \sin(\phi_m))\phi_2\phi_3}{\sin(\phi_m)\phi_m^2} & \frac{\cos(\phi_m)\phi_m\phi_2^2 + \sin(\phi_m)\phi_3^2}{\sin(\phi_m)\phi_m^2} \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}_{\phi\varphi}^{-1} \delta\boldsymbol{\varphi}$$

$$= \mathbf{T}_{\phi\varphi} \delta\boldsymbol{\varphi} \quad (2.4.12)$$

當旋轉參數向量 $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ 很小時， $\mathbf{T}_{\phi\varphi}$ 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}_{\phi\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\phi_3 & -\frac{1}{2}\phi_2 \\ -\phi_3 & 1 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

將(2.4.10)式代入(2.4.2)式，利用近似式 $\cos\phi_m \approx 1 - \frac{1}{2}\phi_2^2 - \frac{1}{2}\phi_3^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡成

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.4.14)$$

$$r_1 = x_p + y(-\phi_3 + \phi_1\phi_2) + z(\phi_2 + \phi_1\phi_3) + \phi_{1,x}\omega$$

$$r_2 = v + y(1 - \frac{1}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\phi_3^2) + z(-\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_3) + \phi_{1,x}\phi_3\omega$$

$$r_3 = w + y(\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_3) + z(1 - \frac{1}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\phi_2^2) - \phi_{1,x}\phi_2\omega$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.4.6)式，可以得到形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.15)$$

$$l = L + u_2 - u_1 \quad (2.4.16)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， l 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點 1 與 2 在 x_1 方向的位移。

本文中假設梁元素形心軸的側向位移 $v(x)$ 、 $w(x)$ 及旋轉參數 $\phi_1(x)$ ， $\phi_2(x)$ ， $\phi_3(x)$ 的形狀函數如下[8]:

$$v(x) = \{N_{b1} \quad N_{b2} \quad N_{b3} \quad N_{b4}\}^t \{v_1 \quad \phi_{31} \quad v_2 \quad \phi_{32}\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.17)$$

$$w(x) = \{N_{c1} \quad N_{c2} \quad N_{c3} \quad N_{c4}\}^t \{w_1 \quad \phi_{21} \quad w_2 \quad \phi_{22}\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.4.18)$$

$$\phi_1(x) = \{N_{d1} \quad N_{d2} \quad N_{d3} \quad N_{d4}\}^t \{\phi_{11} \quad \beta_1 \quad \phi_{12} \quad \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.4.19)$$

$$\phi_2(x) = \{N_{e1} \quad N_{e2} \quad N_{e3} \quad N_{e4}\}^t \{w_1 \quad \phi_{21} \quad w_2 \quad \phi_{22}\} = \mathbf{N}_e^t \mathbf{u}_c \quad (2.4.20)$$

$$\phi_3(x) = \{N_{f1} \quad N_{f2} \quad N_{f3} \quad N_{f4}\}^t \{v_1 \quad \phi_{31} \quad v_2 \quad \phi_{32}\} = \mathbf{N}_f^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.21)$$

其中 \mathbf{u}_i ($i = b-d$) 為梁在元素座標上的節點位移

$$\mathbf{N}_b = \begin{Bmatrix} D_z(1-3\xi^2+2\xi^3+d_z(1-\xi)) \\ LD_z(\xi-2\xi^2+\xi^3+\frac{d_z}{2}(\xi-\xi^2)) \\ D_z(3\xi^2-2\xi^3+d_z\xi) \\ LD_z(-\xi^2+\xi^3+\frac{d_z}{2}(-\xi+\xi^2)) \end{Bmatrix} \quad (2.4.22)$$

$$\mathbf{N}_c = \begin{Bmatrix} D_y(1-3\xi^2+2\xi^3+d_y(1-\xi)) \\ -LD_y(\xi-2\xi^2+\xi^3+\frac{d_y}{2}(\xi-\xi^2)) \\ D_y(3\xi^2-2\xi^3+d_y\xi) \\ -LD_y(-\xi^2+\xi^3+\frac{d_y}{2}(-\xi+\xi^2)) \end{Bmatrix} \quad (2.4.23)$$

$$\mathbf{N}_d = \begin{Bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ L(-\xi^2+\xi^3) \end{Bmatrix} \quad (2.4.24)$$

$$\mathbf{N}_e = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{6D_y}{L}(-\xi + \xi^2) \\ D_y(1 - 4\xi + 3\xi^2 + d_y(1 - \xi)) \\ \frac{-6D_y}{L}(-\xi + \xi^2) \\ D_y(-2\xi + 3\xi^2 + d_y\xi) \end{array} \right\} \quad (2.4.25)$$

$$\mathbf{N}_f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{6D_z}{L}(-\xi + \xi^2) \\ D_z(1 - 4\xi + 3\xi^2 + d_z(1 - \xi)) \\ \frac{-6D_z}{L}(-\xi + \xi^2) \\ D_z(-2\xi + 3\xi^2 + d_z\xi) \end{array} \right\} \quad (2.4.26)$$

$$D_z = \frac{1}{(1 + d_z)} \quad d_z = \frac{12EI_z}{\kappa_y GA_{sy} L^2} \quad (2.4.27)$$

$$D_y = \frac{1}{(1 + d_y)} \quad d_y = \frac{12EI_y}{\kappa_z GA_{sz} L^2}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

其中 $\mathbf{N}_i (i = a - f)$ 為 Timoshenko 梁的形狀函數(shape function) [8]。 v_j 與

$w_j (j = 1, 2)$ 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值。 $\phi_{ij} (i = 1-3, j = 1, 2)$ 是 ϕ_i 在節點 j

的節點值， $\beta_j (j = 1, 2)$ 則是 $\phi_{1,x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 κ_y 、 κ_z 為 x_2^S 、 x_3^S

方向的剪力修正係數， A_{sy} 、 A_{sz} 為 x_2^S 、 x_3^S 方向的有效剪力面積。

將(2.4.16)至(2.4.18)式代入(2.4.15)式整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.4.28)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1 \quad 1\} \quad (2.4.29)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.4.30)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.4.31)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.4.32)$$

將(2.4.28)代入(2.4.6)整理可得

$$x_p = \mathbf{N}'_a \mathbf{u}_a + x + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.33)$$

$$\mathbf{N}_a = \{1 - \xi, \xi\} \quad (2.4.34)$$

2.5 Timoshenko 梁的應變

為了推導上的方便，本節中我們將先推導出梁的應變以及梁的位置向量變分、應變的變分。

2.5.1 梁的應變

假如將(2.5.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標(Lagrange coordinates)

，則 Green strains ε_{11} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 可以表示成[20]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.5.2)$$

將(2.4.6)、(2.4.14)代回(2.5.2),可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 如下

$$g_{11} = 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\phi_1 \phi_{2,x} + \phi_2 \phi_{1,x} - \phi_{3,x}) \quad (2.5.3)$$

$$+ z(\phi_1 \phi_{3,x} + \phi_3 \phi_{1,x} + \phi_{2,x}) + \phi_{1,xx} \omega$$

$$g_{12} = v_{,x} + (-\phi_1\phi_{1,x} - \phi_3\phi_{3,x})y + (-\phi_{1,x} + \frac{1}{2}\phi_{2,x}\phi_3 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_{3,x})z \\ + \phi_{1,xx}\omega\phi_3 + \phi_{1,x}\omega\phi_{3,x}$$

$$g_{13} = w_{,x} + (\phi_{1,x} + \frac{1}{2}\phi_{2,x}\phi_3 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_{3,x})y + (-\phi_1\phi_{1,x} - \phi_2\phi_{2,x})z \\ - \phi_{1,xx}\omega\phi_2 - \phi_{1,x}\omega\phi_{2,x}$$

$$g_{21} = -\phi_3 + \phi_1\phi_2 + \phi_{1,x}\omega_{,y}$$

$$g_{22} = 1 - \frac{1}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\phi_3^2 + \phi_{1,x}\omega_{,y}\phi_3$$

$$g_{23} = \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_3 - \phi_{1,x}\omega_{,y}\phi_2$$

$$g_{31} = \phi_2 + \phi_1\phi_3 + \phi_{1,x}\omega_{,z}$$

$$g_{32} = -\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\phi_3 + \phi_{1,x}\omega_{,z}\phi_3$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\phi_2^2 - \phi_{1,x}\omega_{,z}\phi_2$$

為了能清楚分辨出應變中那些項代表斷面剪應變，令

$$\theta_2 = \frac{-dw}{ds} = \frac{-w_{,x}}{1 + \varepsilon_0} \quad \theta_3 = \frac{dv}{ds} = \frac{v_{,x}}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.5.4)$$

$$w_{,x} = -\theta_2(1 + \varepsilon_0) \quad v_{,x} = \theta_3(1 + \varepsilon_0)$$

再將(2.5.4)代入(2.5.2)式及(2.5.3)式再代回(2.5.1)式，保留變形參數及其微分

到二次項，並在剪應變加上修正係數 $\mu_{12} = \sqrt{\kappa_y}$ ， $\mu_{13} = \sqrt{\kappa_z}$ ，其中 κ_y 、 κ_z [18]

分別為(2.4.27)式中 x_2^S 、 x_3^S 方向的剪力修正係數，可得：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.5.5-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_0 + z\phi_{2,x} - y\phi_{3,x} + \omega\phi_{1,xx}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 + (\omega\phi_{1,xx} + z\phi_{2,x} - y\phi_{3,x})\varepsilon_0 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\phi_{1,x}^2 + \underline{((\phi_2 - \theta_2)\mu_{13}y + (\phi_3 - \theta_3)\mu_{12}z)\phi_{1,x}} \\ &+ \frac{1}{2}y^2\phi_{3,x}^2 + (\phi_1\phi_{2,x} - \omega\phi_{1,xx}\phi_{3,x} - z\phi_{2,x}\phi_{3,x})y + \frac{1}{2}z^2\phi_{2,x}^2 + (\omega\phi_{1,xx}\phi_{2,x} + \phi_1\phi_{3,x})z + \frac{1}{2}\omega^2\phi_{1,xx}^2\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.5.5-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\phi_{1,x} + \frac{1}{2}\underline{(\theta_3 - \phi_3)\mu_{12}}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^2 &= \frac{1}{2}[(\phi_{1,x}\omega_{,y} + \underline{(\theta_3 - \phi_3)\mu_{12}})\varepsilon_0 + \underline{(\phi_2 - \theta_2)\mu_{13}}\phi_1 + \omega\omega_{,y}\phi_{1,xx}\phi_{1,x} + z\omega_{,y}\phi_{1,x}\phi_{2,x} \\ &+ (\omega - y\omega_{,y})\phi_{1,x}\phi_{3,x}] + \frac{1}{4}z(\phi_2\phi_{3,x} - \phi_{2,x}\phi_3)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.5.5-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\phi_{1,x} + \frac{1}{2}\underline{(\phi_2 - \theta_2)\mu_{13}}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^2 &= \frac{1}{2}[(\phi_{1,x}\omega_{,z} + \underline{(\phi_2 - \theta_2)\mu_{13}})\varepsilon_0 + \underline{(\phi_3 - \theta_3)\mu_{12}}\phi_1 + \omega\omega_{,z}\phi_{1,xx}\phi_{1,x} + (z\omega_{,z} - \omega)\phi_{1,x}\phi_{2,x} \\ &- y\omega_{,z}\phi_{1,x}\phi_{3,x}] + \frac{1}{4}y(\phi_{2,x}\phi_3 - \phi_{3,x}\phi_2)\end{aligned}$$

$\varepsilon_{1j}^k (j=1,2,3, k=1,2)$ 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項。(2.5.5) 式中加底線的項為梁的斷面剪應變項，在這些項中都加入修正係數 μ_{12} 或 μ_{13} 。

2.5.2 梁之位置向量的變分及應變的變分

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理推導平衡方程式，所以需要求出位置向量及應變的變分。由(2.4.14)及(2.4.33)式，我們可以求得位置向量變分的分量

$$\delta\mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3\} \quad (2.5.6)$$

$$\delta r_1 = \delta x_p + \delta\phi_1(z\phi_3 + y\phi_2) + \delta\phi_2(z + y\phi_1) + \delta\phi_3(-y + z\phi_1) + \delta\phi_{1,x}\omega$$

$$\begin{aligned} \delta r_2 &= \delta\phi_1(-z - y\phi_1) + \delta\phi_2\left(\frac{1}{2}z\phi_3\right) + \delta\phi_3(-y\phi_3 + \frac{1}{2}z\phi_2 + \omega\phi_{1,x}) \\ &\quad + \delta\phi_{1,x}(\omega\phi_3) + \delta v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta r_3 &= \delta\phi_1(y - z\phi_1) + \delta\phi_2\left(\frac{1}{2}y\phi_3 - z\phi_2 - \omega\phi_{1,x}\right) + \delta\phi_3\left(\frac{1}{2}y\phi_2\right) \\ &\quad - \delta\phi_{1,x}(\omega\phi_2) + \delta w \end{aligned}$$

其中

$$\delta x_p = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{x}{L} (\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) - \int_0^x (v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) dx \quad (2.5.7)$$

而由(2.5.5)及(2.4.28)式可以得到應變的變分

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta \varepsilon_{11}^1 + \delta \varepsilon_{11}^2 \quad (2.5.8-a)$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11}^1 &= \delta \varepsilon_0 + z \delta \phi_{2,x} - y \delta \phi_{3,x} + \omega \delta \phi_{1,xx} \\ \delta \varepsilon_{11}^2 &= \delta \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + \phi_{2,x} z - \phi_{3,x} y + \phi_{1,xx} \omega) + \delta \phi_2 (\mu_{13} y \phi_{1,x}) \\ &\quad + \delta \phi_{2,x} ((\phi_1 - z \phi_{3,x}) y + z^2 \phi_{2,x} + (\varepsilon_0 + \phi_{1,xx} \omega) z) + \delta \phi_3 (\mu_{12} z \phi_{1,x}) \\ &\quad + \delta \phi_{3,x} (y^2 \phi_{3,x} - (\varepsilon_0 + \phi_{2,x} z + \phi_{1,xx} \omega) y + \phi_1 z) + \delta \phi_1 (\phi_{2,x} y + z \phi_{3,x}) \\ &\quad + \delta \phi_{1,x} (\phi_{1,x} y^2 + (\phi_2 \mu_{13} + w_{,x} \mu_{13}) y + z^2 \phi_{1,x} + (-v_{,x} \mu_{12} + \phi_3 \mu_{12}) z) \\ &\quad + \delta \phi_{1,xx} (\omega \varepsilon_0 - \omega \phi_{3,x} y + \omega \phi_{2,x} z + \omega^2 \phi_{1,xx}) + \delta v_{,x} (-\mu_{12} z \phi_{1,x}) + \delta w_{,x} (\mu_{13} y \phi_{1,x}) \end{aligned}$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \delta \varepsilon_{12}^1 + \delta \varepsilon_{12}^2 \quad (2.5.8-b)$$

$$\delta \varepsilon_{12}^1 = \delta \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{2} \mu_{12} v_{,x}\right) + \delta \phi_3 \left(-\frac{1}{2} \mu_{12}\right) + \delta \phi_{1,x} \left(\frac{1}{2} \omega_{,y} - \frac{1}{2} z\right) + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{2} (1 - \varepsilon_0) \mu_{12}\right)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{12}^2 &= \delta\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,y} - \frac{1}{2}\phi_3\mu_{12} + \frac{1}{2}v_{,x}\mu_{12}\right) + \delta\phi_2\left(\frac{1}{2}\mu_{13}\phi_1 + \frac{1}{4}z\phi_{3,x}\right) \\
&+ \delta\phi_{2,x}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,y}z - \frac{1}{4}\phi_3z\right) + \delta\phi_3\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_{12} - \frac{1}{4}\phi_{2,x}z\right) \\
&+ \delta\phi_{3,x}\left(-\frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,y}y + \frac{1}{2}\omega\phi_{1,x} + \frac{1}{4}z\phi_2\right) + \delta\phi_1\left(\frac{1}{2}\phi_2\mu_{13} + \frac{1}{2}w_{,x}\mu_{13}\right) \\
&+ \delta\phi_{1,x}\left(-\frac{1}{2}\omega_{,y}\phi_{3,x}y + \frac{1}{2}\omega_{,y}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\phi_{1,xx} + \frac{1}{2}z\omega_{,y}\phi_{2,x} + \frac{1}{2}\omega\phi_{3,x}\right) \\
&+ \delta\phi_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\phi_{1,x}\right) + \delta v_{,x}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_{12}\right) + \delta w_{,x}\left(\frac{1}{2}\mu_{13}\phi_1\right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^1 + \delta\varepsilon_{13}^2 \quad (2.5.8-c)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^1 = \delta\varepsilon_0\left(-\frac{1}{2}w_{,x}\mu_{13}\right) + \delta\phi_2\left(\frac{1}{2}\mu_{13}\right) + \delta\phi_{1,x}\left(\frac{1}{2}\omega_{,z} + \frac{1}{2}y\right) + \delta w_{,x}\left(\frac{1}{2}(1-\varepsilon_0)\mu_{13}\right)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{13}^2 &= \delta\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,z} + \frac{1}{2}\phi_2\mu_{13} + \frac{1}{2}w_{,x}\mu_{13}\right) + \delta\phi_2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_{13} - \frac{1}{4}\phi_{3,x}y\right) \\
&+ \delta\phi_{2,x}\left(\frac{1}{4}\phi_3y + \frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,z}z - \frac{1}{2}\omega\phi_{1,x}\right) + \delta\phi_3\left(\frac{1}{2}\mu_{12}\phi_1 + \frac{1}{4}\phi_{2,x}y\right) \\
&+ \delta\phi_{3,x}\left(-\frac{1}{2}\phi_{1,x}\omega_{,z}y - \frac{1}{4}\phi_2y\right) + \delta\phi_1\left(\frac{1}{2}\phi_3\mu_{12} - \frac{1}{2}v_{,x}\mu_{12}\right) \\
&+ \delta\phi_{1,x}\left(-\frac{1}{2}y\omega_{,z}\phi_{3,x} + \frac{1}{2}\omega_{,z}\phi_{2,x}z + \frac{1}{2}\omega_{,z}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\phi_{1,xx} - \frac{1}{2}\omega\phi_{2,x}\right) \\
&+ \delta\phi_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\phi_{1,x}\right) + \delta v_{,x}\left(-\frac{1}{2}\mu_{12}\phi_1\right) + \delta w_{,x}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_{13}\right)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{1}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.5.9)$$

2.6 節點參數與節點力

2.6.1 系統節點參數與節點力

本文中在元素節點 j ($j=1, 2$) 上的系統節點參數為 U_{ij}^G 與 ψ_{ij}^G 及 β_j ，其中

U_{ij}^G 是節點 j 的平移向量 \mathbf{U}_j^G 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1, 2, 3$) 方向的分量；

ψ_{ij}^G 是節點 j 的旋轉向量 Ψ_j^G 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1,2,3$) 方向的分量； β_j 是節點 j 的剪心軸扭轉率。本文中在任何變形位置的 Ψ_j^G 都被重新設定為零，所以旋轉向量分量的變分 $\delta\psi_{ij}^G$ 與繞 X_i^G ($i=1,2,3$) 軸的微小旋轉 $\delta\phi_{ij}^G$ 的值相同[12]。

2.6.2 元素節點參數與節點力

本文中採用了兩組元素節點參數，分別稱為顯節點參數(explicit nodal parameter)與隱節點參數(implicit nodal parameter)。元素的顯節點參數是用來將元素矩陣組合為系統矩陣，所以其定義必需與系統的節點參數一致。本文中在元素節點 j ($j=1,2$) 的顯節點參數為 u_{ij} 與 ψ_{ij} 及 β_j ，其中 u_{ij} ($u_{1j}=u_j, u_{2j}=v_j, u_{3j}=w_j$) 是節點 j 的平移向量 \mathbf{u}_j 在其當前固定元素座標軸 x_i ($i=1,2,3$) 方向的分量； ψ_{ij} 是節點 j 的旋轉向量 Ψ_j 在當前固定元素座標軸 x_i ($i=1,2,3$) 方向的分量； β_j 是節點 j 的剪心軸扭轉率。本文中在任何變形位置的 Ψ_j 都被重新設定為零。對應於 u_{ij} 的廣義節點力 f_{ij} ，為在 x_i 軸方向的力；對應於 ψ_{ij} 的廣義節點力 m_{ij} ，與繞 x_i 軸的傳統力矩的值相同。對應於 β_j 的廣義節點力 B_j 為廣義雙力矩。

元素的隱節點參數是用以決定梁元素的變形。在元素節點 j ($j=1,2$) 的隱節點參數為 u_{ij} 與 ϕ_{ij} 及 β_j ，其中 u_{ij} ($u_{1j}=u_j, u_{2j}=v_j, u_{3j}=w_j$) 是節點 j 的位移向量 \mathbf{u}_j 在其元素座標軸 x_i ($i=1,2,3$) 方向的分量； ϕ_{ij} 是旋轉參數 ϕ_i

在節點 j 的值， β_j 是節點 j 的剪心軸扭轉率。對應於 u_{ij} 的節點力為在 x_i 軸方向的力 f_{ij} ；對應於 ϕ_{ij} 及 β_j 的節點力分別為廣義力矩 m_{ij}^ϕ 與廣義雙力矩 B_j 。因為 ϕ_{ij} 在變形後不為零，所以其變分並不是繞 x_i 軸的無限小旋轉，所以廣義力矩 m_{ij}^ϕ 並非繞 x_i 軸的傳統力矩。

2.6.3 元素顯節點參數的擾動與隱節點參數的擾動關係

令 $x_i (i=1,2,3)$ 表示在當前變形位置的固定元素座標， \mathbf{e}_i 、 ψ_{ij} 、 $\phi_{ij} (i=1,2,3, j=1,2)$ 、 l 分別表示在 x_i 軸方向的單位向量、元素節點 j 的旋轉向量及轉參數分量、及元素的弦長。此時元素的顯節點參數除了 $u_2 = L - l$ 外其餘的值皆為零。令

$$\delta \mathbf{q}_\varphi = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \varphi_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \varphi_2, \delta \beta\} \quad (2.6.1)$$

$$\delta \mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$$

$$\delta \varphi_j = \{\delta \varphi_{1j}, \delta \varphi_{2j}, \delta \varphi_{3j}\}$$

$$\delta \beta = \{\delta \beta_1, \delta \beta_2\}$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 為一擾動節點位移向量，($j=1,2$)， δu_j 、 δv_j 、 δw_j 為節點 j 在固定元素座標 $x_i (i=1,2,3)$ 軸方向的擾動位移， $\delta \varphi_{ij}$ 為節點 j 繞固定元素座標 $x_i (i=1,2,3)$ 軸的擾動旋轉， $\delta \beta$ 為擾動扭轉率向量， $\delta \beta_j$ 為元素扭轉率在節點 j 的擾動量。

令 $\delta \mathbf{q}_\psi$ 為對應於 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 之顯節點參數向量 \mathbf{q}_ψ 的擾動量， $\delta \mathbf{q}_\psi$ 可表示成

$$\delta \mathbf{q}_\psi = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \psi_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \psi_2, \delta \beta\} \quad (2.6.2)$$

$$\delta \psi_j = \{\delta \psi_{1j}, \delta \psi_{2j}, \delta \psi_{3j}\}$$

其中 $\delta \mathbf{u}_j$ 、 $\delta \beta$ 在(2.6.1)式中已有定義。

由(2.3.2)式可知 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 與 $\delta \mathbf{q}_\psi$ 有以下的關係

$$\delta \mathbf{q}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\psi} \delta \mathbf{q}_\psi \quad (2.6.3)$$

其中矩陣 $\mathbf{T}_{\phi\psi}$ 的顯式列於附錄A。

因本文中在任何變形位置的 ψ_j 都被重新設定為零，所以 $\mathbf{T}_{\phi\psi}$ 的值等於 \mathbf{I}_{14} 。

若梁元素在當前的變形位置受到 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 的擾動，則可由文獻[13]的方法決定

受擾動後的元素座標 \bar{x}_i ($i=1,2,3$)、定義在擾動後的元素座標之元素節點 j

的旋轉參數 $\bar{\phi}_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2$) 及元素的弦長 $\bar{\ell}$ 。若取到擾動量的一次

項，則擾動前後的元素座標的關係可表示成 [13]

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta v_{12}}{\ell} & -\frac{\delta w_{12}}{\ell} \\ \frac{\delta v_{12}}{\ell} & 1 - A_1 & \frac{-(\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12})}{2} - A_2 \\ \frac{\delta w_{12}}{\ell} & \frac{(\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12})}{2} + A_2 & 1 - A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{x\bar{x}} \bar{\mathbf{x}} \quad (2.6.4)$$

其中 $\delta v_{12} = \delta v_2 - \delta v_1$, $\delta w_{12} = \delta w_2 - \delta w_1$, $A_1 = \frac{1}{2}(\phi_{11} \delta \phi_{11} + \phi_{12} \delta \phi_{12})$,

$A_2 = \frac{1}{4}(\phi_{31} \delta \phi_{21}^d + \phi_{32} \delta \phi_{22}^d - \phi_{21} \delta \phi_{31}^d - \phi_{22} \delta \phi_{32}^d)$, $\delta \phi_{2j}^d = \delta \phi_{2j} + \frac{\delta w_{12}}{\ell}$,

$\delta \phi_{3j}^d = \delta \phi_{3j} - \frac{\delta v_{12}}{\ell}$.

若取到擾動量的一次項，則擾動後元素的弦長 $\bar{\ell}$ 可表示成

$$\bar{\ell} = \ell + \delta u_{12} \quad (2.6.5)$$

$$\delta u_{12} = \delta u_2 - \delta u_1$$

擾動後元素節點 j 的旋轉參數 $\bar{\phi}_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2$) 在擾動後的元素座標 \bar{x}_i 可表示成

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{12} = -\bar{\phi}_{11} = & -\frac{\phi_{11}}{2} + \frac{\phi_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11}}{2} + \frac{\delta\phi_{12}}{2} - \frac{\delta v_{12}(\phi_{21} - \phi_{22})}{4\ell} - \frac{\delta w_{12}(\phi_{31} - \phi_{32})}{4\ell} \\ & - \frac{\phi_{31}\delta\phi_{21}}{4} + \frac{\phi_{32}\delta\phi_{22}}{4} + \frac{\phi_{21}\delta\phi_{31}}{4} - \frac{\phi_{22}\delta\phi_{32}}{4} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{2j} = \phi_{2j} + \frac{\delta w_{12}}{\ell} + \delta\phi_{2j} - \frac{\delta v_{12}(\phi_{11} + \phi_{12})}{2\ell} + \frac{1}{2}\phi_{3j}\delta\phi_{11} + \frac{1}{2}\phi_{3j}\delta\phi_{12} - \phi_{3j}\delta\phi_{1j} \\ + \frac{\delta\phi_{3j}(\phi_{11} + \phi_{12})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{3j} = \phi_{3j} - \frac{\delta v_{12}}{\ell} + \delta\phi_{3j} - \frac{\delta w_{12}(\phi_{11} + \phi_{12})}{2\ell} - \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{11} - \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{12} + \phi_{2j}\delta\phi_{1j} \\ - \frac{\delta\phi_{2j}(\phi_{11} + \phi_{12})}{2} \end{aligned}$$

其中 $\phi_{11} = -\phi_{12}$ ，所以 $\phi_{11} + \phi_{12} = 0$ ，但其變分不為零，且在推導元素剛度矩陣時需用到該變分，故在上式中仍需保留該項。

當元素的顯節點參數受到 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 擾動時，其運動過程可視為先做一剛體運動後再做一變形運動，在該剛體運動後，元素從當前的變形位置移動到擾動後的元素座標 \bar{x}_i ，但仍保持其原來的變形，即定義在 \bar{x}_i 座標的元素節點旋轉參數及元素的弦長和擾動前定義在 x_i 座標的元素節點旋轉參數及

元素的弦長有相同的值，仍為 ϕ_{ij} 和 l 。在該變形運動後，定義在 \bar{x}_i 座標的元素節點旋轉參數及元素的弦長就變成(2.6.5)式及(2.6.6)式之 $\bar{\phi}_{ij}$ 及 \bar{l} 。所以由(2.6.5)式及(2.6.6)式可知在 \bar{x}_i 座標中元素節點旋轉參數及元素的弦長受到的擾動可表示成

$$\delta\bar{\phi}_{ij} = \bar{\phi}_{ij} - \phi_{ij} \quad (2.6.7)$$

$$\delta\bar{l} = \bar{l} - l \quad (2.6.8)$$

由元素座標的定義可知元素節點位移在 \bar{x}_i 方向的擾動可表示成

$$\delta\bar{u}_1 = \delta\bar{v}_j = \delta\bar{w}_j = 0 \quad (2.6.9)$$

$$\delta\bar{u}_2 = \delta\bar{l}$$

令

$$\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi = \{\delta\bar{\mathbf{u}}_1, \delta\bar{\phi}_1, \delta\bar{\mathbf{u}}_2, \delta\bar{\phi}_2, \delta\beta\} \quad (2.6.10)$$

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_j = \{\delta\bar{u}_j, \delta\bar{v}_j, \delta\bar{w}_j\}$$

$$\delta\bar{\phi}_j = \{\delta\bar{\phi}_{1j}, \delta\bar{\phi}_{2j}, \delta\bar{\phi}_{3j}\}$$

其中 $\delta\beta$ 在(2.6.1)式中已有定義。

由(2.4.15)式、(2.4.28)式-(2.4.31)式、(2.5.9)式、(2.6.5)式-(2.6.10)式可知 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 與在 \bar{x}_i 座標中隱節點參數的擾動量 $\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi$ 有以下的關係

$$\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi} \delta\mathbf{q}_\phi \quad (2.6.11)$$

其中矩陣 $\mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi}$ 的顯式列於附錄A。

由(2.6.3)式及(2.6.11)式可知 $\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi$ 與顯隱節點參數的擾動量 $\delta\mathbf{q}_\psi$ 有以下的關係

$$\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi} \mathbf{T}_{\phi\psi} \delta\mathbf{q}_\psi \quad (2.6.12)$$

2.7 元素節點內力 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 之推導

對應於(2.6.11)式及(2.6.12)式之 $\delta\mathbf{q}_\psi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 與 $\delta\bar{\mathbf{q}}_\phi$ 的節點內力向量分別為

顯節點內力向量 $\mathbf{f}_\psi = \{\mathbf{f}_1^\psi, \mathbf{m}_1^\psi, \mathbf{f}_2^\psi, \mathbf{m}_2^\psi, \mathbf{B}\}$ 、傳統節點內力向量

$\mathbf{f}_\phi = \{\mathbf{f}_1^\phi, \mathbf{m}_1^\phi, \mathbf{f}_2^\phi, \mathbf{m}_2^\phi, \mathbf{B}\}$ 與隱節點內力向量 $\bar{\mathbf{f}}_\phi = \{\mathbf{f}_1^\phi, \mathbf{m}_1^\phi, \mathbf{f}_2^\phi, \mathbf{m}_2^\phi, \mathbf{B}\}$ ，其中

$\mathbf{f}_j^\psi = \{f_{1j}^\psi, f_{2j}^\psi, f_{3j}^\psi\}$ ， $\mathbf{f}_j^\phi = \{f_{1j}^\phi, f_{2j}^\phi, f_{3j}^\phi\}$ ， $\mathbf{f}_j^\phi = \{f_{1j}^\phi, f_{2j}^\phi, f_{3j}^\phi\}$ ，

$\mathbf{m}_j^\psi = \{m_{1j}^\psi, m_{2j}^\psi, m_{3j}^\psi\}$ ， $\mathbf{m}_j^\phi = \{m_{1j}^\phi, m_{2j}^\phi, m_{3j}^\phi\}$ ， $\mathbf{m}_j^\phi = \{m_{1j}^\phi, m_{2j}^\phi, m_{3j}^\phi\}$ ($j = 1, 2$)，

$\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{ij}^ψ 為作用在元素節點 j ， \bar{x}_i 方向的內力， f_{1j}^ϕ 為作用在元素節點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij}^ϕ 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij}^ψ 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， m_{ij}^ϕ 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 \bar{x}_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩(Bimoment)。

\mathbf{f}_ψ 及 \mathbf{f}_ϕ 的分量是定義在當前的元素座標上，而 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 的分量是定義在擾動後的元素座標上，雙力矩和座標系統無關。

本文利用虛功原理推導元素節點內力，本文將元素的節點內力 \mathbf{f}_ψ 及 \mathbf{f}_ϕ

視為作用元素節點的外力，應力所作的虛功視為是隱節點內力 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 所作的虛功。在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j = 1, 2$) 一個虛位移，則由虛功原

理可知

$$\begin{aligned}
 \delta W_{ext} &= \delta \mathbf{q}_{\psi}^t \mathbf{f}_{\psi} = \delta \mathbf{q}_{\phi}^t \mathbf{f}_{\phi} \\
 &= \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV \\
 &= \delta \bar{\mathbf{q}}_{\phi}^t \bar{\mathbf{f}}_{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \text{、} \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \text{、} \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \tag{2.7.2}$$

\mathbf{f}_{ψ} 、 $\bar{\mathbf{f}}_{\phi}$ 為(2.6.11)式中對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_{\psi}$ 、 $\delta \bar{\mathbf{q}}_{\phi}$ 的廣義元素節點內力， $\delta \bar{\mathbf{q}}_{\phi}$ 為(2.6.11)式中對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_{\phi}$ 的虛位移。

$\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 為應力所作的虛功， $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) 為梁元素對應於虛位移 $\delta \bar{\mathbf{q}}_{\phi}$ 的虛應變， E 為楊氏係數， G 為剪力模數。

2.7.1 元素顯節點內力與隱節點內力的關係

利用(2.6.3)、(2.6.11)式與反梯度法則(contragradient law)[14]，可求得節點內力向量 \mathbf{f}_{ψ} 、 \mathbf{f}_{ϕ} 與 $\bar{\mathbf{f}}_{\phi}$ 之關係如下

$$\mathbf{f}_{\psi} = \mathbf{T}_{\phi\psi}^t \mathbf{f}_{\phi} \tag{2.7.3}$$

$$\mathbf{f}_{\phi} = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \bar{\mathbf{f}}_{\phi} \tag{2.7.4}$$

如前所述， $\mathbf{T}_{\phi\psi}$ 的值等於 \mathbf{I}_{14} ，故(2.7.3)式之 \mathbf{f}_{ψ} 與 \mathbf{f}_{ϕ} 的值相同，所以 \mathbf{f}_{ϕ} 亦可視為顯節點內力。(2.7.4)式的顯式可表示成

$$f_{12}^{\phi} = -f_{11}^{\phi} = f_{12}^{\phi} \tag{2.7.5}$$

$$\begin{aligned}
 f_{21}^{\phi} = -f_{22}^{\phi} &= \frac{1}{4\ell} (\phi_{22} - \phi_{21})(m_{11}^{\phi} - m_{12}^{\phi}) + \frac{1}{\ell} (1 + \varepsilon_0)(m_{31}^{\phi} + m_{32}^{\phi}) \\
 &+ \frac{1}{2\ell} (\phi_{11} + \phi_{12})(m_{21}^{\phi} + m_{22}^{\phi}) = \frac{1}{\ell} (m_{31}^{\phi} + m_{32}^{\phi})
 \end{aligned}$$

$$f_{31}^\phi = -f_{32}^\phi = \frac{1}{4\ell}(\phi_{32} - \phi_{31})(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) - \frac{1}{\ell}(1 + \varepsilon_0)(m_{22}^\phi + m_{21}^\phi) \\ + \frac{1}{2\ell}(\phi_{11} + \phi_{12})(m_{31}^\phi + m_{32}^\phi) = -\frac{1}{\ell}(m_{21}^\phi + m_{22}^\phi)$$

$$m_{11}^\phi = -m_{12}^\phi = \frac{1}{2}(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) + \frac{1}{2}\phi_{32}m_{22}^\phi - \frac{1}{2}\phi_{31}m_{21}^\phi - \frac{1}{2}\phi_{22}m_{32}^\phi + \frac{1}{2}\phi_{21}m_{31}^\phi$$

$$m_{21}^\phi = m_{21}^\phi + \frac{\phi_{31}}{4}(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) - \frac{(\phi_{11} + \phi_{12})}{2}m_{31}^\phi$$

$$m_{31}^\phi = m_{31}^\phi - \frac{\phi_{21}}{4}(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) + \frac{(\phi_{11} + \phi_{12})}{2}m_{21}^\phi$$

$$m_{22}^\phi = m_{22}^\phi - \frac{\phi_{32}}{4}(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) - \frac{(\phi_{11} + \phi_{12})}{2}m_{32}^\phi$$

$$m_{32}^\phi = m_{32}^\phi + \frac{\phi_{22}}{4}(m_{11}^\phi - m_{12}^\phi) + \frac{(\phi_{11} + \phi_{12})}{2}m_{22}^\phi$$

由(2.7.5)式可以發現僅有七個獨立的隱節點內力分量對顯節點內力向量有貢獻。節點內力能滿足平衡方程式，側向力 $f_{2j}^\phi, f_{3j}^\phi (j=1,2)$ 可視為是彎矩 m_{2j}^ϕ, m_{3j}^ϕ 的反作用力與 $f_{2j}^\phi, f_{3j}^\phi (j=1,2)$ 無關。

2.7.2 隱節點內力 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 的推導

為了方便推導，由(2.7.1)及(2.7.2)式，內力所做的虛功可改寫成

$$\delta \bar{\mathbf{q}}_\phi^t \bar{\mathbf{f}}_\phi = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d \quad (2.7.6) \\ = \int_V E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} dV + \int_V 4G [(\delta \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} + \delta \varepsilon_{13} \varepsilon_{13})] dV$$

$$\mathbf{f}_a = \{f_{11}^\phi, f_{12}^\phi\}, \mathbf{f}_b = \{f_{21}^\phi, m_{31}^\phi, f_{22}^\phi, m_{32}^\phi\} \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{f}_c = \{f_{31}^\phi, m_{21}^\phi, f_{32}^\phi, m_{22}^\phi\}, \mathbf{f}_d = \{m_{11}^\phi, B_1, m_{12}^\phi, B_2\}$$

其中 $\mathbf{f}_i (i=a, b, c, d)$ 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i (i=a, b, c, d)$ 的廣義節點變形力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.4.17)–(2.4.27)式及(2.4.32)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 $\bar{\mathbf{f}}_\phi$ 可以由 \mathbf{f}_i

($i=a, b, c, d$) 組合而成。

由於本文中所考慮的為雙對稱斷面梁故

$$\int ydA = \int zdA = \int \omega dA = \int yz dA = \int y\omega dA = \int z\omega dA = \int y^2 z dA = \int z^2 y dA = 0 \quad (2.7.8)$$

$$\int y^2 \omega dA = \int z^2 \omega dA = \int \omega^2 y dA = \int \omega^2 z dA = \int y\omega_{,y} dA = \int z\omega_{,z} dA = \int \omega\omega_{,z} dA = 0$$

$$\int \omega\omega_{,y} dA = 0$$

將(2.5.5)式之 ε_{1j} 及(2.5.8)之 $\delta\varepsilon_{1j}$ 和(2.5.9)之 $\delta\varepsilon_0$ 代入(2.7.6)式右邊，並保留變形參數到二次項及 $\phi_{1,x}$ 的三次項，再由(2.7.8)式可以得到應力所作的虛功為

$$\begin{aligned} & \int_V E\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11}dV + \int_V 4G[(\delta\varepsilon_{12})\varepsilon_{12} + (\delta\varepsilon_{13})\varepsilon_{13}]dV = \\ & \int_V \{ \delta\varepsilon_0[EA_1 + GB_1] + \delta\phi_2[E(-\mu_{13}I_z\phi_{1,x}\phi_{3,x}) + GB_2] \\ & + \delta\phi_{2,x}[EA_2 + G(\frac{1}{2}J\phi_3\phi_{1,x} - \mu_{12}J_{z\omega y}(\phi_3 - v_{,x})\phi_{1,x})] \\ & + \delta\phi_3[E\mu_{12}I_z\phi_{1,x}\phi_{2,x} + GB_3] \\ & + \delta\phi_{3,x}[EA_3 + G(-\frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_2 - \mu_{13}J_{y\omega z}(\phi_2 + w_{,x})\phi_{1,x})] \\ & + \delta\phi_1[E(I_y - I_z)\phi_{2,x}\phi_{3,x}] + \delta\phi_{1,x}[EA_4 + GB_4] + \delta\phi_{1,xx}[EA_5] \\ & + \delta v_{,x}[E(-\mu_{12}I_y\phi_{1,x}\phi_{2,x}) + GB_5] \\ & + \delta w_{,x}[E(-\mu_{13}I_z\phi_{1,x}\phi_{3,x}) + GB_6] \} dx \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

其中

$$A_1 = A(\varepsilon_0 + \frac{3\varepsilon_0^2}{2}) + \frac{1}{2}(I_p)\phi_{1,x}^2 + \frac{3}{2}I_y\phi_{2,x}^2 + \frac{3}{2}I_z\phi_{3,x}^2 + \frac{3}{2}I_\omega\phi_{1,xx}^2 \quad (2.7.10)$$

$$A_2 = (1 + 3\varepsilon_0)I_y\phi_{2,x} + (I_y - I_z)\phi_1\phi_{3,x} - \mu_{12}I_y(v_{,x} - \phi_3)\phi_{1,x} - 3\alpha_{yz\omega}\phi_{1,xx}\phi_{3,x}$$

$$A_3 = (1 + 3\varepsilon_0)I_z\phi_{3,x} + (I_y - I_z)\phi_1\phi_{2,x} - \mu_{13}I_z(\phi_2 + w_{,x})\phi_{1,x} - 3\alpha_{yz\omega}\phi_{1,xx}\phi_{2,x}$$

$$A_4 = \varepsilon_0 I_p \phi_{1,x} - I_y \mu_{12} (v_{,x} - \phi_3) \phi_{2,x} - I_z \mu_{13} (\phi_2 + w_{,x}) \phi_{3,x} + \frac{1}{2} K_I \phi_{1,x}^3$$

$$A_5 = (1 + 3\varepsilon_0)I_\omega\phi_{1,xx} - 3\alpha_{yz\omega}\phi_{2,x}\phi_{3,x}$$

$$B_1 = A(\mu_{13}^2\phi_2^2 + \mu_{12}^2\phi_3^2) - A\mu_{12}^2\phi_3v_{,x} + A\mu_{13}^2\phi_2w_{,x}$$

$$= A_{sz}\mu_{13}^2(\phi_2 + w_{,x})\phi_2 - A_{sy}\mu_{12}^2(v_{,x} - \phi_3)\phi_3$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= -\frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_{3,x} - \mu_{13}J_{y\omega z}\phi_{1,x}\phi_{3,x} + A_{sz}\mu_{13}^2(1+\varepsilon_0)w_{,x} + A_{sz}\mu_{13}^2(1+2\varepsilon_0)\phi_2 \\
&\approx \left(-\frac{1}{2}J - \mu_{13}J_{y\omega z}\right)\phi_{1,x}\phi_{3,x} + A_{sz}\mu_{13}^2(\phi_2 + w_{,x}) \\
B_3 &= -\mu_{12}J_{z\omega y}\phi_{1,x}\phi_{2,x} + \frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_{2,x} - A_{sy}\mu_{12}^2(1+\varepsilon_0)v_{,x} + A_{sy}\mu_{12}^2(1+2\varepsilon_0)\phi_3 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}J - \mu_{12}J_{z\omega y}\right)\phi_{1,x}\phi_{2,x} - A_{sy}\mu_{12}^2(v_{,x} - \phi_3) \\
B_4 &= J\phi_{1,x} + \frac{1}{2}J\phi_3\phi_{2,x} - \frac{1}{2}J\phi_{3,x}\phi_2 + \mu_{12}J_{z\omega y}(v_{,x} - \phi_3)\phi_{2,x} - \mu_{13}J_{y\omega z}(\phi_2 + w_{,x})\phi_{3,x} \\
B_5 &= A_{sy}\mu_{12}^2v_{,x} - A_{sy}\mu_{12}^2(1+\varepsilon_0)\phi_3 + \mu_{12}J_{z\omega y}\phi_{1,x}\phi_{2,x} \\
&\approx \mu_{12}J_{z\omega y}\phi_{1,x}\phi_{2,x} + A_{sy}\mu_{12}^2(v_{,x} - \phi_3) \\
&= \frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_{2,x} - B_3 \\
B_6 &= -\mu_{13}J_{y\omega z}\phi_{1,x}\phi_{3,x} + A_{sz}\mu_{13}^2(1+\varepsilon_0)\phi_2 + A_{sz}\mu_{13}^2w_{,x} \\
&\approx -\mu_{13}J_{y\omega z}\phi_{1,x}\phi_{3,x} + A_{sz}\mu_{13}^2(\phi_2 + w_{,x}) \\
&= -\frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_{3,x} + B_2
\end{aligned}$$

$$I_y = \int z^2 dA \quad I_z = \int y^2 dA \quad (2.7.11)$$

$$I_p = I_y + I_z \quad I_\omega = \int \omega^2 dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA \quad \alpha_{yz\omega} = \int yz\omega dA$$

$$J = \int (y^2 + z^2 - z\omega_{,y} + y\omega_{,z}) dA$$

$$J_{y\omega z} = \int (y\omega_{,z}) dA \quad J_{z\omega y} = \int (z\omega_{,y}) dA$$

將(2.4.17-21)代入(2.7.9)式後，再代入(2.7.6)式比對左右兩邊係數可得

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) :

$$\mathbf{f}_a = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a \int [EA_1 + GB_1] dx \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{f}_b = f_{12}\mathbf{G}_b + \int \mathbf{N}'_f [EA_3 + G(-\frac{1}{2}J\phi_{1,x}\phi_2 - \mu_{13}J_{y\omega z}(\phi_2 + w_{,x})\phi_{1,x})]dx$$

$$+ (-EI_y + GJ_{z\omega y})\mu_{12} \int (\mathbf{N}'_b - \mathbf{N}_f)\phi_{1,x}\phi_{2,x}dx + GA_{sy}\mu_{12}^2 \int (\mathbf{N}'_b - \mathbf{N}_f)(v_{,x} - \phi_3)dx$$

$$+ \frac{1}{2}GJ \int \mathbf{N}_f\phi_{1,x}\phi_{2,x}dx$$

$$\mathbf{f}_c = f_{12}\mathbf{G}_c + \int \mathbf{N}'_e [EA_2 + G(\frac{1}{2}J\phi_3\phi_{1,x} + \mu_{12}J_{z\omega y}(v_{,x} - \phi_3)\phi_{1,x})]dx$$

$$- (EI_z + GJ_{y\omega z})\mu_{13} \int (\mathbf{N}_e + \mathbf{N}'_c)\phi_{1,x}\phi_{3,x}dx + GA_{sz}\mu_{13}^2 \int (\mathbf{N}_e + \mathbf{N}'_c)(\phi_2 + w_{,x})dx$$

$$- \frac{1}{2}GJ \int \mathbf{N}_e\phi_{1,x}\phi_{3,x}dx$$

$$\mathbf{f}_d = \int \mathbf{N}_d [E(I_y - I_z)\phi_{2,x}\phi_{3,x}]dx + \int \mathbf{N}'_d [EA_4 + GB_4]dx + \int \mathbf{N}''_d [EA_5]dx$$

以共旋轉有限元素法離散梁結構時，隨著元素數目的增加，元素之長度斜率與扭轉角會趨近於零，但與其他變形參數之間的耦合項不可忽略，由上述的討論可知(2.7.10)、(2.7.12)式中加底線”.....”的項在元素增加時會趨近於零。

2.8 元素剛度矩陣之推導

本文在基於牛頓法之增量迭代法求解時，在平衡迭代過程中需要先得梁元素切線剛度矩陣。

由元素切線剛度矩陣的定義及 $(\mathbf{f}_\psi = \mathbf{T}_{\varphi\psi}^t \mathbf{f}_\varphi)$ 式，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k}_ψ 可以表示成

$$d\mathbf{f}_\psi = \mathbf{k}_\psi d\mathbf{q}_\psi = \frac{\partial \mathbf{f}_\psi}{\partial \mathbf{q}_\psi} d\mathbf{q}_\psi \quad (2.8.1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\psi}^t \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi} \right) \mathbf{T}_{\phi\psi} d\mathbf{q}_\phi + \left(\mathbf{T}_{\phi\psi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \right) \mathbf{T}_{\phi\psi} d\mathbf{q}_\phi \\ &= [\mathbf{T}_{\phi\psi}^t \mathbf{k}_\phi + \mathbf{H}_\phi] \mathbf{T}_{\phi\psi} d\mathbf{q}_\phi \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\psi}^t \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi} \quad (2.8.2)$$

\mathbf{H}_ϕ 的顯式詳見附錄 B。

由(2.8.1)式、 $\mathbf{T}_{\phi\psi} = \mathbf{I}_{14}$ ，並保留變形參數到一次項可得

$$\mathbf{k}_\psi = \mathbf{k}_\phi + \mathbf{H}_\phi \quad (2.8.3)$$

由元素切線剛度矩陣的定義及 $(\mathbf{f}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \bar{\mathbf{f}}_\phi)$ 式，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k}_ϕ 可以表示成[9]、[10]

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_\phi &= \mathbf{k}_\phi d\mathbf{q}_\phi = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} d\mathbf{q}_\phi + (\mathbf{R}_{x\bar{x}} - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\phi \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \bar{\mathbf{f}}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi} \right) \mathbf{T}_{\phi\phi} d\mathbf{q}_\phi + \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \mathbf{T}_{\phi\phi} d\mathbf{q}_\phi + \mathbf{H}_R d\mathbf{q}_\phi \\ &= \mathbf{H}_\phi \mathbf{T}_{\phi\phi} d\mathbf{q}_\phi + \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{k}_\phi \mathbf{T}_{\phi\phi} d\mathbf{q}_\phi + \mathbf{H}_R d\mathbf{q}_\phi \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

$$\mathbf{R}_{x\bar{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x\bar{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\bar{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\bar{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\bar{x}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8.5)$$

$$\mathbf{k}_\phi = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} \quad (2.8.6)$$

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{\partial(\mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi}^t \bar{\mathbf{f}}_\phi)}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\bar{\mathbf{f}}_\phi} \quad (2.8.7)$$

\mathbf{H}_ϕ 的顯式詳見附錄 B。

其中 \mathbf{A}_{xx} 已在(2.6.4)式定義。由 $\mathbf{H}_R d\mathbf{q} = (\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{I}_{14})\mathbf{f}_\phi$ 可得 \mathbf{H}_R ， \mathbf{H}_R 的顯式詳見附錄 B。

由(2.8.1)式、 $\mathbf{T}_{\phi\psi} = \mathbf{I}_{14}$ ，並保留變形參數到一次項可得

$$\mathbf{k}_\phi = [\mathbf{k}_\phi + (\mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi}^t - \mathbf{I}_{14})\mathbf{k}_\phi^0 + \mathbf{H}_\phi] \mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi} + \mathbf{H}_R \quad (2.8.8)$$

其中 \mathbf{k}_ϕ^0 為 \mathbf{k}_ϕ 的零次項。

剛度矩陣 \mathbf{k}_ϕ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i = a, b, c, d, j = a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.8.9)$$

其中 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 已在(2.7.12)式定義， \mathbf{u}_j ($j = a, b, c, d$) 已在(2.4.17)–(2.4.21)式及(2.4.32)式定義。

\mathbf{k}_{ij} 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{AE}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_0) \quad (2.8.10)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AE(1 + 3\varepsilon_0)\mathbf{G}_b^t + 3EI_z \int \mathbf{N}_f^t \phi_{3,x} dx \\ - GA_{sy} \mu_{12}^2 \int \mathbf{N}_g^t \phi_3 dx - GA_{sy} \mu_{12}^2 \gamma_{12} \int \mathbf{N}_f^t dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AE(1+3\varepsilon_0)\mathbf{G}_c^t + 3EI_y \int \mathbf{N}_e'^t \phi_{2,x} dx + GA_{sz} \mu_{13}^2 \int \mathbf{N}_h^t \phi_2 dx + GA_{sz} \mu_{13}^2 \gamma_{13} \int \mathbf{N}_e^t dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_d} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [EI_p \int \mathbf{N}_d''^t \phi_{1,x} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \phi_{1,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_b} = f_{12} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx + GA_{sy} \mu_{12}^2 \int \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^t dx + EI_z (1+3\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_f'^t dx - GA_{sy} \mu_{12}^2 \varepsilon_0 \int (\mathbf{N}_f \mathbf{N}_g^t + \mathbf{N}_g \mathbf{N}_f^t) dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_c} = (-EI_y + GJ_{z\omega y}) \mu_{12} \int \mathbf{N}_g \mathbf{N}_e'^t \phi_{1,x} dx + \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_e'^t \phi_{1,x} dx - \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_e^t \phi_{1,x} dx - (GJ_{y\omega z} + EI_z) \mu_{13} \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_h^t \phi_{1,x} dx + E(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_e''^t \phi_1 dx - 3E\alpha_{yz\omega} \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_e''^t \phi_{1,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_d} = (-EI_y + GJ_{z\omega y}) \mu_{12} \int (\mathbf{N}_g \mathbf{N}_d'^t \phi_{2,x} dx + \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_d'^t \phi_{2,x} dx - \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_d^t \phi_2 dx - (GJ_{y\omega z} + EI_z) \mu_{13} \gamma_{13} \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_d'^t dx + E(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_d^t \phi_{2,x} dx - 3E\alpha_{yz\omega} \int \mathbf{N}_f' \mathbf{N}_d''^t \phi_{2,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^D}{\partial \mathbf{u}_c} = f_{12} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'^t dx + GA_{sz} \mu_{13}^2 \int \mathbf{N}_h \mathbf{N}_h^t dx + EI_y (1+3\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_e' \mathbf{N}_e'^t dx + GA_{sz} \mu_{13}^2 \varepsilon_0 \int (\mathbf{N}_e \mathbf{N}_h^t + \mathbf{N}_h \mathbf{N}_e^t) dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = (-EI_z - GJ_{y\omega z}) \mu_{13} \int \mathbf{N}_h \mathbf{N}_d'^t \phi_{3,x} dx - \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_e \mathbf{N}_d'^t \phi_{3,x} dx - (EI_y - GJ_{z\omega y}) \mu_{12} \gamma_{12} \int \mathbf{N}_e' \mathbf{N}_d'^t dx + E(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_e' \mathbf{N}_d^t \phi_{3,x} dx - 3E\alpha_{yz\omega} \int \mathbf{N}_e' \mathbf{N}_d''^t \phi_{3,x} dx + \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_e' \mathbf{N}_d^t \phi_3 dx$$

$$\mathbf{k}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^D}{\partial \mathbf{u}_d} = (EI_p \varepsilon_0 + GJ) \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t dx + EI_\omega (1+3\varepsilon_0) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t dx + \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t \phi_{1,x}^2 dx$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^t$$

$$\gamma_{13} = \phi_2 + w_{,x} = (\mathbf{N}'_e + \mathbf{N}'_c) \mathbf{u}_c = \mathbf{N}'_h \mathbf{u}_c \quad (2.8.11)$$

$$\gamma_{12} = v_{,x} - \phi_3 = (\mathbf{N}'_b - \mathbf{N}'_f) \mathbf{u}_b = \mathbf{N}'_g \mathbf{u}_b$$

由於 $\mathbf{N}'_b - \mathbf{N}'_f$ 、 $\mathbf{N}'_e + \mathbf{N}'_c$ 為常數，上式中將其以 \mathbf{N}_g 、 \mathbf{N}_h 代換，簡化式子。

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{N}'_b - \mathbf{N}'_f = \begin{Bmatrix} -\frac{D_z}{L} d_z \\ -\frac{D_z}{2} d_z \\ \frac{D_z}{L} d_z \\ -\frac{D_z}{2} d_z \end{Bmatrix} \quad (2.8.12)$$

$$\mathbf{N}_h = \mathbf{N}'_e + \mathbf{N}'_c = \begin{Bmatrix} -\frac{D_y}{L} d_y \\ \frac{D_y}{2} d_y \\ \frac{D_y}{L} d_y \\ \frac{D_y}{2} d_y \end{Bmatrix} \quad (2.8.13)$$

其中 γ_{12} 、 γ_{13} 為剪應變的一次項。

由 2.7.2 節的討論可知(2.8.10)式中加底線“.....”的項在元素較多時會趨近於零。

2.9 系統平衡方程式與收斂準則

在固定總體座標系統中定義的非線性平衡方程式，可表示為

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{F} - \mathbf{P} \rightarrow 0 \quad (2.9.1)$$

其中 Ψ 為不平衡力向量， \mathbf{F} 為系統節點內力向量， \mathbf{P} 表系統節點外力向量。若僅考慮單一負荷參數的外力， \mathbf{P} 可表示成 $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_{ref}$ ，其中 λ 為負荷參數， \mathbf{P}_{ref} 是一參考負荷向量。 \mathbf{F} 可由(2.7.3)、(2.7.4)式之元素顯節點內力向量，由元素座標轉換到固定總體座標上組合而成， \mathbf{P} 可由與變形位置相關的節點作用力及與變形無關之節點作用力組合而成。

本文以不平衡力向量 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.9.2)$$

其中 N 表離散系統的自由度數， e_{tol} 是一給定的容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.9.1)式的數值計算方法是基於牛頓—拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制(arc length control)法的增量迭代法[15]。為了求得挫屈負荷，本文採用文獻[16]中所提出的二分法，決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了改善平衡迭代的收斂情況，本文中採用了 N 循環迭代法[17]。以下對本文使用的增量迭代法、二分法及 N 循環迭代法加以說明。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T, \quad (3.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， $\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 的切線解。 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[15]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta\ell / (\mathbf{Q}_T^t \mathbf{Q}_T)^{1/2}, \quad (3.2)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 $I-1$ 個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 $\Delta\ell$ 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta l = (J_D/J_I)^{1/2} \Delta l_I, \quad (3.3)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.4)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 作用下的系統線性解 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ 及增量負荷 $\Delta \lambda$ 已知，由 $\Delta \mathbf{Q}$ 可求得梁結構新的變形位置。再利用 2.7 與 2.8 節的方法，求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。而對應此位置的負荷參數為 $\lambda = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，其中 λ_I 為第 I 個增量達平衡時的負荷參數， $\Delta \lambda$ 即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量 Ψ 向量可由 (2.9.1) 式求得。若 (2.9.2) 式的收斂準則不能滿足，則利用定弧長控制法 [15]，求得一位移修正量 $\delta \mathbf{Q}$ 與負荷參數修正量 $\delta \lambda$ ，並加入前一次迭代的 $\Delta \mathbf{Q}$ 與 $\Delta \lambda$ 中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。 $\delta \mathbf{Q}$ 與 $\delta \lambda$ 可由下列二式決定

$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1} (-\Psi + \delta \lambda \mathbf{P}) \quad (3.5)$$

$$\Delta l^2 = (\Delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q})^t (\Delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q}) \quad (3.6)$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足 (2.9.2) 式的收斂準則為止。

3.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 的增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 $\Delta\ell_{I+1}$ 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB} ：

- (1) 令 $\Delta\ell_L = 0$, $\Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$, $\lambda_L = \lambda_I$, $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ ，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。
- (2) 取 $\Delta\ell_{I+1} = \frac{\Delta\ell_L + \Delta\ell_R}{2}$ ，重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。
- (3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}$, $\Delta\ell_L = \Delta\ell_{I+1}$
若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}$, $\Delta\ell_R = \Delta\ell_{I+1}$
- (4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D \quad (3.7)$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \quad (3.8)$$

其中 e_D 及 e_λ 為給定的容許誤差值

則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

3.3 N 循環迭代法

在計算元素的剛度矩陣及節點內力時，必須使用形心的正應變 ε_0 。對某些問題，最初幾次迭代之形心正應變會比其收斂值的階數(order)大很多，因此可能引起平衡迭代收斂困難或發散。為了改善收斂情況，本文採用了 N 循環迭代法[17]，並說明如下：

在第一次循環迭代中，(2.7.12)式及(2.8.10)式中，除了(2.7.12)式的 \mathbf{f}_a 及(2.8.10)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前變形的形心正應變外，其餘部份皆使用上一個增量收斂的形心正應變來計算元素的節點力與剛度矩陣。

在第 I 次 ($I < N$) 循環迭代中，除了(2.7.12)式之 \mathbf{f}_a 及(2.8.10)式中的 \mathbf{k}_{aa} 使用目前形心正應變來計算外，其餘的節點力與元素剛度矩陣皆使用前一次循環迭代收斂的形心正應變來計算。在第 N 次循環迭代中，所有的節點力與元素剛度矩陣皆使用當前的形心正應變來計算。

第四章 數值例題與結果

為了測試本研究所提出的方法的準確性及探討剪應變對梁結構之幾何非線性行為的影響，本章將分析不同長度、不同斷面、不同受力狀況的梁結構，並比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁之幾何非線性行為及挫屈負荷的差異。本章中 Euler 梁的結果使用文獻[13]陳之梁元素及程式分析的結果。本文假設應變為小應變且在彈性範圍內，所以分析例題時，盡量使結構之最大剪應變與撓曲應變皆小於 0.01。

例題一 矩形懸臂梁自由端受一集中載重

如圖 4.1 所示，一長度 L 的懸臂梁在其自由端承受一集中力，該懸臂梁的自由端與固定端皆為自由翹曲(WF)。該梁的楊氏係數

$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ ， $b = 10 \text{ mm}$ ，其詳細斷面常數列於附錄 C。本例題考慮 $L = 50$ 、 100 mm 與三種不同斷面 $a = 1$ 、 0.8 、 0.5 mm ，共六

種情況。本例題將梁分成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ ，懸臂 Timoshenko

梁自由端位移之線性分析的解析解為 $\delta = \frac{PL^3}{3EI_y} \left(1 + \frac{3EI_y}{\kappa_z GAL^2}\right)$ [18]，

$L = 50 \text{ mm}$ ， $a = 1$ 、 0.8 、 0.5 mm 的解析解分別為 2.455×10^{-3} 、 3.069×10^{-3} 、 4.910×10^{-3} 、 $L = 100 \text{ mm}$ ， $a = 1$ 、 0.8 、 0.5 mm 的解析解分別為 1.920×10^{-2} 、 2.400×10^{-2} 、 $3.839 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 。本文之線性分析的數值解與解析解完全相

同。圖 4.2 為 $L = 50 \text{ mm}$ ， $a = 0.8 \text{ mm}$ 之 Timoshenko 梁與尤拉梁的負荷-位移

曲線圖，圖中可看出 Timoshenko 梁與 Euler 梁的位移負荷曲線幾乎一致。

表 4.1 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁的挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Euler 梁的挫屈負荷的解析解 P_{cr} 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ε_{cr}^T 。表 4.1 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。由表 4.1 可發現本例題中 Timoshenko 梁、Euler 梁及解析解的挫屈負荷都很接近，Timoshenko 梁和 Euler 梁挫屈時的位移都很小也很接近，Timoshenko 梁之剪應變 γ_{cr}^T 對挫屈位移 δ_{cr}^T 的貢獻很小。

例題二 兩端固接矩形梁中間承受鉛直力

如圖 4.3 所示，一矩形斷面長度 L 的梁兩端固接，中間承受一集中力，梁的兩端皆為自由翹曲。該梁的楊氏係數 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ ， $b = 10 \text{ mm}$ ，詳細斷面常數列於附錄 C。本例題將梁分成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。本例題考慮 $L = 50$ 、 100 mm 與三種不同斷面 $a = 1$ 、 0.8 、 0.5 mm 。本例題考慮兩種邊界條件，

共同邊界條件 C： $U_A = V_A = V_B = W_A = W_B = \psi_{1A} = \psi_{1B} = \psi_{2A} = \psi_{2B}$

$$= \psi_{3A} = \psi_{3B} = 0$$

$$(C1) \quad U_B = \text{free}, \quad \beta_A = \beta_B = 0$$

$$(C2) \quad U_B = 0, \quad \beta_A = \beta_B = 0$$

圖 4.4 為 $L = 50 \text{ mm}$ 、 $a = 0.8 \text{ mm}$ 、邊界條件 C1 的負荷-位移曲線圖，從圖中

可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁挫屈前在受力方向(X_3^G)的負荷-位移曲線的差異隨著力的增加而增加，但挫屈後兩者幾乎保持平行。挫屈後 Timoshenko 梁與尤拉梁在 X_1^G 、 X_2^G 軸方向的負荷-位移曲線幾乎重合。表 4.2 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁的挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Euler 梁的挫屈負荷的解析解 P_{cr} 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ε_{cr}^T 。表 4.2 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。由表 4.2 可發現本例題中 Timoshenko 梁及 Euler 在梁邊界條件 C1 的挫屈負荷都比在梁邊界條件 C2 的挫屈負荷小，挫屈負荷的解析解因不考慮挫屈前的變形，故在梁邊界條件 C1 和 C2 的挫屈負荷相同。Timoshenko 梁和 Euler 梁的挫屈負荷都很接近，但挫屈位移有相當的差異，這可能是因兩端固接，梁的撓曲剛度及挫屈負荷都增加，使剪應變對側向位移的貢獻相對地增加。因挫屈負荷隨 L 增加而變小，所以無因次位移 δ_{cr}^T/L 、 δ_{cr}^E/L 及 γ_{cr}^T 都隨 L 增加而變小。

例題三 I 型懸臂梁自由端受一集中載重

如圖 4.5 所示，一長度 L 的懸臂梁在其自由端承受一集中力，本例題考慮邊界條件如下：

共同邊界條件 A： $U_A = V_A = W_A = \psi_{1A} = \psi_{2A} = \psi_{3A} = 0$ ， $\beta_B = 0$

$$U_B = V_B = W_B = \psi_{1B} = \psi_{2B} = \psi_{3B} = \text{free}$$

$$(A1) \beta_A = 0$$

$$(A2) \beta_A = free$$

該梁的楊氏係數 $E = 2.9 \times 10^7 \text{ psi}$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。本例題考慮 $L = 50 \text{ in}$ ， $W10 \times 30$ 型鋼， $b = 5.81 \text{ in}$ ， $d = 10.47 \text{ in}$ ， $t_f = 0.51 \text{ in}$ ， $t_w = 0.30 \text{ in}$ ，與 $L = 100 \text{ in}$ ， $W21 \times 93$ ， $b = 8.42 \text{ in}$ ， $d = 21.62 \text{ in}$ ， $t_f = 0.93 \text{ in}$ ， $t_w = 0.58 \text{ in}$ ，其詳細斷面常數列於附錄 C。本例題將梁離散成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。圖 4.6 為 Timoshenko 梁與尤拉梁 ($W21 \times 93$ ， $L = 100 \text{ in}$ ，A2) 的負荷-位移曲線圖，圖中可看出兩者的 U_C 、 V_C 曲線差異甚小，但 W_C 的曲線有相當的差異。表 4.3 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁的挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Euler 梁的挫屈負荷的解析解 P_{cr} 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ϵ_{cr}^T 。表 4.3 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。由表 4.3 可知 Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷幾乎相同，但挫屈點的位移有相當的差異。由表 4.3 亦可知線性挫屈負荷的解析解與 Timoshenko 梁與尤拉梁的非線性挫屈負荷差異很大。

例題四 兩端固接 I 型梁中間承受鉛直力

如圖 4.7 所示，一長度 L 的 I 型梁兩端固接中間承受一集中力。該梁的楊氏係數 $E = 2.9 \times 10^7 \text{ psi}$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。本例題考慮斷面 $W10 \times 30$ 。長度 $L = 140, 180 \text{ in}$ ，與斷面 $W21 \times 93$ 、長度 $L = 240, 300 \text{ in}$ 的梁，其斷面常數列於附錄 C。

本例題將考慮以下四種不同的邊界條件：

共同邊界條件 B： $U_A = V_A = V_B = W_A = W_B = \psi_{1A} = \psi_{1B} = \psi_{2A} = \psi_{2B} = 0$

$$(B1) \quad U_B = 0, \quad \psi_{3A} = \psi_{3B} = 0, \quad \beta_A = \beta_B = 0$$

$$(B2) \quad U_B = \text{free}, \quad \psi_{3A} = \psi_{3B} = 0, \quad \beta_A = \beta_B = 0$$

$$(B3) \quad U_B = 0, \quad \psi_{3A} = \psi_{3B} = \text{free}, \quad \beta_A = \beta_B = \text{free}$$

$$(B4) \quad U_B = \text{free}, \quad \psi_{3A} = \psi_{3B} = \text{free}, \quad \beta_A = \beta_B = \text{free}$$

本例題將梁分成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。圖 4.8、圖 4.9 為斷面 $W10 \times 30$ 型鋼在不同長度、邊界條件下的負荷-位移曲線圖，圖 4.10、圖 4.11 為斷面 $W21 \times 93$ 型鋼在不同長度、邊界條件下的負荷-位移曲線圖。由圖 4.8-圖 4.11 可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁在 X_3^G 方向的負荷-位移曲線相差很大，而圖 4.8、圖 4.9 可看出在 X_2^G 方向的負荷-位移曲線有相當的差距。表 4.4 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁的挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Euler 梁的挫屈負荷的解析解 P_{cr} 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ε_{cr}^T 。表 4.4 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。由表 4.4 可發現 Timoshenko 梁與尤拉梁在挫屈負荷、挫屈前的最大位移均有所差異。

例題五 兩端固接梁承受兩個鉛直力

如圖 4.12 所示，一長度 L 的 I 形梁兩端固接，在距兩端 $\frac{L}{4}$ 處各加一個集中載重。其楊氏係數 $E = 2.9 \times 10^7 \text{ psi}$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。本例題將梁分成

40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ ，並考慮四種不同長度斷面的梁，長度 $L = 240,300 \text{ in}$ 斷面 $W10 \times 30$ 型鋼與長度 $L = 340,420 \text{ in}$ 斷面 $W21 \times 93$ 型鋼，詳細斷面常數列於附錄 C。本例題的邊界條件與例題四相同。圖 4.13-4.16 為梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖，由圖 4.13-4.16 可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁在 X_3^G 方向的負荷-位移曲線有所差異。表 4.5 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁的挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ε_{cr}^T 。表 4.5 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。由表 4.5 可發現 Timoshenko 梁與尤拉梁在挫屈負荷上相差不大，但在挫屈前的最大位移上有所差異。

例題六 簡支梁兩端受偏心軸力

一斷面為 $W14 \times 43$ 型鋼的簡支梁兩端承受偏心軸力，其偏心位置如圖 4.17 所示。梁的兩端皆為自由翹曲，並可繞著 X_2^G, X_3^G 旋轉，但不可繞 X_1^G 軸旋轉。其端點 A 在 X_1^G 方向不可位移，端點 B 在 X_1^G 方向是可以平移的。本例題將梁分成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ ，其幾何與材料性質為：楊氏係數 $E = 2.9 \times 10^7 \text{ psi}$ ，剪力係數 $G = 1.12 \times 10^7 \text{ psi}$ ， $L = 264.6 \text{ in}$ ， $b = 7.995 \text{ in}$ ， $t_f = 0.53 \text{ in}$ ， $d = 13.66 \text{ in}$ ， $t_w = 0.305 \text{ in}$ ，詳細的斷面常數列於附錄 C。圖 4.18 為簡支梁受偏心軸力的負荷-位移曲線圖，圖中 Timoshenko 梁與尤拉梁的曲線幾乎重合。

例題七 懸臂 L 型構架自由端承受水平力

如圖 4.19 所示結構圖，為一 W21×93 型鋼斷面的懸臂 L 形構架，其型鋼腹板平放在 $X_1^G - X_2^G$ 平面上，在自由端點 C 承受一 X_1^G 方向之力 P 。本例題考慮兩種斷面邊界條件：case (a) 所有斷面均為自由翹曲 case (b) AB 桿的斷面 A 及 B 和 BC 桿的斷面 B 為抑制翹曲。其幾何與材料性質為：楊氏係數 $E = 2.9 \times 10^7 \text{ psi}$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ ， $L = 240 \text{ in}$ ， $b = 8.42 \text{ in}$ ， $t_f = 0.93 \text{ in}$ ， $d = 21.62 \text{ in}$ ， $t_w = 0.58 \text{ in}$ ，詳細的斷面常數列於附錄 C。本文將梁分成 20 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ ，其中 case(a)：Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷為 $P_{cr} = 13.0935$ 、 13.0941 kip ，挫屈點的位移為 4.03144 、 4.00467 in 。case(b)：Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷為 $P_{cr} = 18.6947$ 、 18.6942 kip ，挫屈點的位移為 5.70494 、 5.74322 in 。圖 4.20-4.22 為 case(a)、case(b) 端點 C 在 X_1^G 、 X_2^G 、 X_3^G 三個方向的負荷-位移曲線圖，圖 4.20、4.21 可看出當位移逐漸增大，Timoshenko 梁與尤拉梁曲線的差距也逐漸變大。圖 4.22 中 Timoshenko 梁與尤拉梁的曲線則幾乎重合。

例題八 簡支梁受均勻彎矩

如圖 4.23 為一長度為 610 cm 、斷面為 W10×100 型鋼的簡支梁，該梁兩端受均勻彎矩。本例題兩端不能繞 X_1^G 軸轉動但能繞 X_2^G 、 X_3^G 軸轉動，本例題考慮 case(a) 兩端皆為自由翹曲及 case(b) 兩端皆為抑制翹曲兩種邊界條

件，並將梁分成 20 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。其幾何及材料性質為：
 $d = 28.194 \text{ cm}$ ， $b = 26.2636 \text{ cm}$ ， $t_f = 2.8448 \text{ cm}$ ， $t_w = 1.7272 \text{ cm}$ ，楊氏係
 數 $E = 1.9994804 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ，剪力係數 $G = 0.8273712 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ，其詳
 細斷面常數列於附錄 C。圖 4.24、4.25 分別為 case(a)、case(b) 的負荷-位移
 曲線圖，其中 case(a)：Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷為

$P_{cr} = 1.71196 \times 10^8$ 、 $1.71381 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{cm}$ ， X_1^G 方向挫屈點的位移為
 15.455393、15.472964 cm。case(b)：Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷為

$P_{cr} = 2.33652 \times 10^8$ 、 $2.33917 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{cm}$ ， X_1^G 方向挫屈點的位移為
 21.079245、21.103139 cm。由圖 4.24、4.25 可看出 Timoshenko 梁與尤拉
 梁的曲線幾乎相同。

例題九 懸臂梁末端承受一軸力負荷

如圖 4.26 所示，一長度 L 斷面為十字的懸臂梁在其自由端斷面形心受
 一軸力，梁的固定端為抑制翹曲，自由端為自由翹曲。其幾何與材料性質
 為： $L = 200 \text{ cm}$ ， $b = 20 \text{ cm}$ ， $h = 30 \text{ cm}$ ， $t = 0.5 \text{ cm}$ ，楊氏係數
 $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。本例題將梁分成 20 個元素，容許誤
 差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ ，Timoshenko 梁與尤拉梁的挫屈負荷為 $P_{cr} = 283.056$ 、
 283.056 kN， X_1^G 方向挫屈點的位移為 0.109010、0.109010 cm。圖 4.27
 為懸臂梁受軸力的負荷與 X_1^G 方向位移、繞 X_1^G 旋轉角的曲線圖，由圖 4.27

可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁的曲線完全重合。

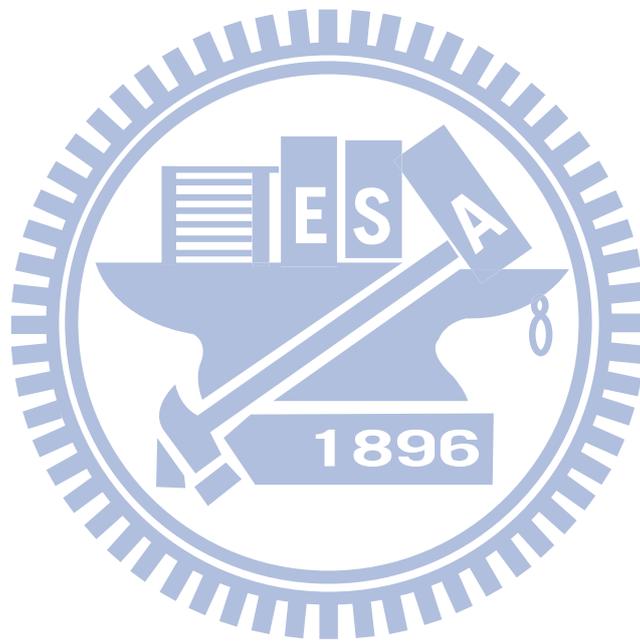
例題十 懸臂梁承受均佈載重

如圖 4.28 所示，一長度 L 的懸臂梁承受偏心 $e = 0.03m$ 均佈側向載重，施加力的位置如圖 4.30 分成兩種，該懸臂梁的自由端與固定端皆為自由翹曲(WF)。其幾何及材料性質為： $L = 8m$ ， $d = 0.56m$ ， $t_f = 0.03m$ ， $t_w = 0.012m$ ， $b = 0.3m$ ，楊氏係數 $E = 210GPa$ ，剪力模數 $G = 80.77GPa$ ，線密度 $m = 188.40kg/m$ ，表 4.8 為本例題的 I 形斷面性質。本例題將梁離散成 20、40 個元素比較兩者的負荷-位移曲線，發現兩者的曲線幾乎一致，因此本例題取 20 個元素來畫圖，其容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。圖 4.30、31 為懸臂梁分別在頂部、底部受偏心分佈載重負荷-位移圖，圖中可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁的曲線相當接近。

例題十一 懸臂梁承受集中載重

圖 4.5 為一長度 L 的懸臂梁末端承受一偏心 $e = 0$ 的側向集中載重，施加力的位置如圖 4.30 分成三種，該懸臂梁的自由端與固定端皆為自由翹曲(WF)。其幾何及材料性質為： $L = 3m$ ， $d = 0.56m$ ， $t_f = 0.03m$ ， $t_w = 0.012m$ ， $b = 0.3m$ ，楊氏係數 $E = 210GPa$ ，剪力模數 $G = 80.77GPa$ ，表 4.8 為本例題的 I 形斷面性質。本例題將梁離散成 40 個元素，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。表 4.7 為本例題 Timoshenko 與 Euler 梁末端不同位置承受集

中載重之挫屈負荷 P_{cr}^T 及 P_{cr}^E 、Timoshenko 梁端點 B 在 X_3^G 方向的挫屈位移 δ_{cr}^T 、挫屈時最大剪應變 γ_{cr}^T 、最大撓曲應變 ε_{cr}^T 。表 4.7 中上標 T 及 E 分別表示 Timoshenko 與 Euler 梁。圖 4.33-35 為懸臂梁末端受集中載重負荷-位移圖，由圖 4.33-35 可看出 Timoshenko 梁與尤拉梁的曲線皆有差異，尤其是力加在底部的圖 4.34，由表 4.7 可看出其挫屈前的位移兩者有顯著的差異，而挫屈負荷兩者也有些許的不同。



第五章 結論與展望

本研究以 Corotation Total Lagrangian 有限元素法和虛功原理推導 Timoshenko 梁元素的元素節點內力，再由元素節點內力的改變與擾動位移的關係推導梁元素的切線剛度矩陣，並探討 Timoshenko 梁與尤拉梁在不同斷面、長度、邊界條件下受不同負荷的幾何非線性行為及挫屈負荷的差異。Timoshenko 梁與尤拉梁最大的不同是在於梁變形後，尤拉梁的斷面仍然會垂直於中心軸，而 Timoshenko 梁不會垂直於中心軸。假設梁在挫屈前都在彈性範圍內，梁的撓曲應變造成的側向變形較大時，剪應變的影響就不大；而當梁的撓曲應變所造成的側向變形較小時，剪應變的影響就不可忽略。梁在挫屈之後梁的彎曲變形會忽然變大，剪應變對梁變形的影響比較不明顯，所以挫屈後 Timoshenko 梁與尤拉梁在負荷與位移的曲線上，兩者的斜率相差不大幾乎平行。

由例題一到五的結果可知在懸臂梁的例題中 Timoshenko 梁與尤拉梁的負荷與位移曲線兩者差異小，而在兩端固接的例題中 Timoshenko 梁與尤拉梁的負荷與位移曲線兩者差異明顯較大。在矩形斷面的例題中 Timoshenko 梁與尤拉梁的負荷與位移曲線兩者差異小，而在 I 形斷面的例題中 Timoshenko 梁與尤拉梁的負荷與位移曲線兩者差異較大。當梁受力後彎曲變形很大，剪應變的影響就不大，因此邊界條件會影響到梁的側向變形，剪應變對梁

變形的影響也會隨之改變。梁在不同斷面、細長比、邊界條件下剪應變得影響也會不同。

本研究考慮斷面剪應變的影響，探討 Timoshenko 梁與尤拉梁在非線性行為之間的差異，希望後續能繼續探討剪應變對旋轉梁自然頻率的影響。



參考文獻

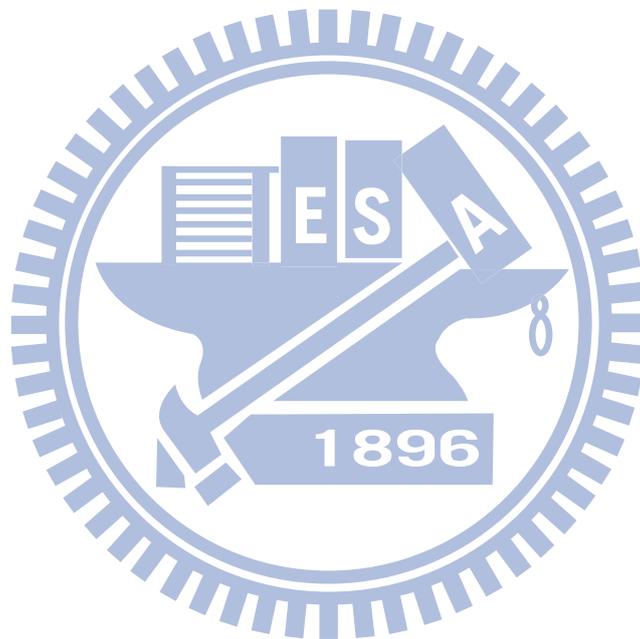
- [1] Jean-Marc Battini, Costin Pacoste, “Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems”, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, Vol. 191, pp. 1755-1789, 2002.
- [2] Rabe Alsafadie, Mohammed HjiAj and Hugues Somja, Jean-Marc Battini, “A comparative study of displacement and mixed-based corotational finite element formulations for elasto-plastic three-dimensional beam analysis”, *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, Vol. 28, No. 7, pp. 939-982, 2011.
- [3] Rabe Alsafadie, Jean-Marc Battini and Mohammed HjiAj, “Efficient local formulation for elasto-plastic corotational thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*; Vol. 27, pp. 498-509, 2011.
- [4] 黃智傑, “旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2001.
- [5] J. R. Hutchinson, “Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, Issue 1, pp. 87-92, 2001.
- [6] S. P. Timoshenko, “On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Bars of Prismatic Bars,” *Philos. Mag.*, Vol. 41, pp. 744–746, 1921.
- [7] G. R. Cowper, “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory,” *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 335–340, 1966.

- [8] A. Bazoune, and Y. A. Khulief, and N.G. Stephe, “Shape function of three-dimensional timoshenko beam element”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, Issue 2, pp. 473-480, 2003.
- [9] 游敬義, 雙對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 2000.
- [10] K. M. Hsiao, W. Y. Lin, “Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6023-6052, 2001.
- [11] Borri M., Mello, F. and Atluri, S. N., “Variational Approaches for Dynamics and Time-Finite-Elements: Numerical Studies”, *Computational Mechanics*, Vol. 7, pp. 49-76, 1990.
- [12] K.M. Hsiao, “Corotational total Lagrangian formulation for three-dimensional beam element”, *AIAA J.*, Vol 30(3), pp 797-804, 1992.
- [13] 陳弘虎, 不對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 2002.
- [14] D.J. Dawe, “Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures, Oxford University”, *N.Y.*, 1984.
- [15] M.A. Crisfield, “A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap Through”, *Computers and Structures*, Vol 13, pp 55-62, 1981.
- [16] 賴文斌, 三維梁非線性挫屈及挫屈後行為研究, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 1994.
- [17] K.M. Hsiao, H.J. Horng, and Y.R. Chen, “A Corotational Procedure That Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures”, *Computers and Structures*, Vol 27 (6), pp 769-781, 1987.

[18]S. P. Timoshenko ,James M. Gere, “Mechanics of Materials”, pp. 373, 1979.

[19]W.F Chen, E.M Lui, “STUCTURAL STABILITY : theory and implementation” ,1988.

[20]T.J. Chung, “Continuum Mechanic”, Prentice-Hall N.J., 1998.



附錄 A 轉換矩陣 $\mathbf{T}_{\varphi\psi}$ 及 $\mathbf{T}_{\phi\varphi}$

本附錄為 2.6.3 節提到的(2.6.3)式、(2.6.11)式中，轉換矩陣 $\mathbf{T}_{\varphi\psi}$ 及 $\mathbf{T}_{\phi\varphi}$ 的顯式

$$\delta\mathbf{q}_\varphi = \mathbf{T}_{\varphi\psi} \delta\mathbf{q}_\psi \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{T}_{\varphi\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\psi_{31} & \frac{1}{2}\psi_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\psi_{31} & 1 & -\frac{1}{2}\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\psi_{21} & \frac{1}{2}\psi_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\psi_{32} & \frac{1}{2}\psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\psi_{32} & 1 & -\frac{1}{2}\psi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\psi_{22} & \frac{1}{2}\psi_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta \bar{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi} \delta \mathbf{q}_\phi \quad (2.6.11)$$

$$\mathbf{T}_{\bar{\phi}\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\phi_2}{4l} & \frac{\Delta\phi_3}{4l} & \frac{1}{2} & \frac{\phi_{31}}{4} & -\frac{\phi_{21}}{4} & 0 & 0 & -\frac{\Delta\phi_2}{4l} & -\frac{\Delta\phi_3}{4l} & -\frac{1}{2} & -\frac{\phi_{32}}{4} & \frac{\phi_{22}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1+\varepsilon_0)}{l} & -\frac{\phi_{31}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\varepsilon_0}{l} & \frac{\phi_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\varepsilon_0}{l} & 0 & \frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1+\varepsilon_0}{l} & 0 & -\frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta\phi_2}{4l} & -\frac{\Delta\phi_3}{4l} & -\frac{1}{2} & -\frac{\phi_{31}}{4} & \frac{\phi_{21}}{4} & 0 & 0 & \frac{\Delta\phi_2}{4l} & \frac{\Delta\phi_3}{4l} & \frac{1}{2} & \frac{\phi_{32}}{4} & -\frac{\phi_{22}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1+\varepsilon_0)}{l} & \frac{\phi_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\varepsilon_0}{l} & -\frac{\phi_{32}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\varepsilon_0}{l} & 0 & -\frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1+\varepsilon_0}{l} & 0 & \frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta\phi_2 = -(\phi_{21} - \phi_{22})$, $\Delta\phi_3 = -(\phi_{31} - \phi_{32})$

附錄 B \mathbf{H}_φ 、 \mathbf{H}_ϕ 、 \mathbf{H}_R

本附錄為 2.8 節中提到的(2.8.2)式、(2.8.7)式、(2.8.8)式，矩陣 \mathbf{H}_φ 、 \mathbf{H}_ϕ 與 \mathbf{H}_R 的顯式，由於程式的寫法需要，以下以

元素來排列自由度

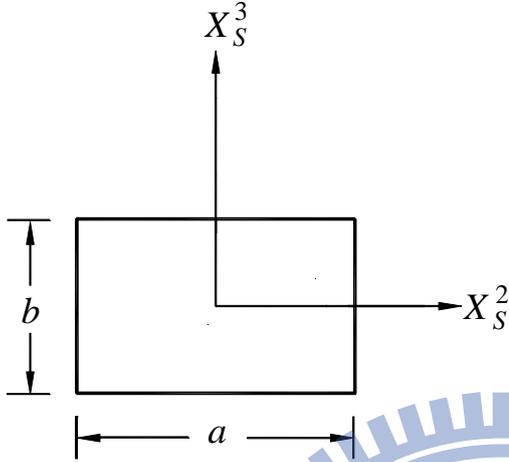
$$\mathbf{H}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{31}^\varphi}{2} & \frac{m_{21}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_{31}^\varphi}{2} & 0 & -\frac{m_{11}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}^\varphi}{2} & \frac{m_{11}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{32}^\varphi}{2} & \frac{m_{22}^\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}^\varphi}{2} & 0 & -\frac{m_{12}^\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}^\varphi}{2} & \frac{m_{12}^\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_\phi = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}^\phi}{L} & -\frac{m_{31}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}^\phi}{L} & -\frac{m_{32}^\phi}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_{31}^\phi & -m_{21}^\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{m_{21}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^\phi}{2} & 0 & \frac{m_{21}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{m_{31}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^\phi}{2} & 0 & 0 & \frac{m_{31}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{21}^\phi}{L} & \frac{m_{31}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}^\phi}{L} & \frac{m_{32}^\phi}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{32}^\phi & -m_{22}^\phi & 0 \\
 -\frac{m_{22}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^\phi}{2} & 0 \\
 -\frac{m_{32}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}^\phi}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{12}^\phi}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{21}^\varphi}{l} & \frac{f_{31}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{21}^\varphi}{l} & -\frac{f_{31}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{11}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{11}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{11}^\varphi}{l} & \frac{f_{21}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{11}^\varphi}{l} & \frac{f_{21}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{21}^\varphi}{l} & \frac{m_{31}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}^\varphi}{l} & -\frac{m_{31}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{11}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{m_{31}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{m_{31}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{11}^\varphi}{l} & \frac{m_{21}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^\varphi}{l} & \frac{m_{21}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{22}^\varphi}{l} & \frac{f_{32}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{22}^\varphi}{l} & -\frac{f_{32}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{12}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{12}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{12}^\varphi}{l} & \frac{f_{22}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{12}^\varphi}{l} & \frac{f_{22}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{22}^\varphi}{l} & \frac{m_{32}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}^\varphi}{l} & -\frac{m_{32}^\varphi}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{12}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{m_{32}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^\varphi}{l} & 0 & -\frac{m_{32}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{12}^\varphi}{l} & \frac{m_{22}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^\varphi}{l} & \frac{m_{22}^\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

附錄 C 斷面常數

矩形斷面



$$\omega = yz - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(K_n y) \sinh(K_n z)}{(2n+1)^3 \cosh(K_n b/2)}$$

$$A = ab$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_z = \frac{ba^3}{12}$$

$$J = \int_A (y^2 + z^2 + y\omega_{,z} - z\omega_{,y}) dA$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$$

$$\alpha_{\omega yz} = \Omega_{yz} = \int \omega yz dA$$

$$I_4 = K_I = \alpha_{2y} + \alpha_{2z} + 2\alpha_{yz} = \int y^4 dA + \int z^4 dA + 2\int y^2 z^2 dA$$

$$J_{y\omega z} = \int_A y\omega_{,z} dA$$

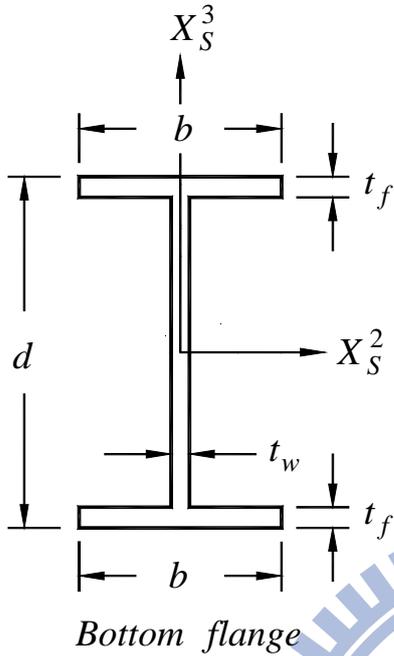
$$J_{z\omega y} = \int_A z\omega_{,y} dA$$

a (mm)	0.5	0.8	1
b (mm)	10	10	10
A (mm ²)	5	8	10
J (mm ⁴)	0.403536	1.62062	3.12325
I_y (mm ⁴)	41.6667	66.6667	83.3333
I_z (mm ⁴)	0.104167	0.426667	0.833333
$\alpha_{\omega yz}$ (mm ⁶)	0.863013	3.50372	6.78838
K_I (mm ⁶)	626.740	1007.15	1264.01
I_ω (mm ⁶)	0.858136	3.45467	6.64291
$J_{y\omega z}$ (mm ⁴)	0.0976016	0.383642	0.728292
$J_{z\omega y}$ (mm ⁴)	41.4649	65.85640	81.7717
I_z/I_y	0.0025000	0.0064000	0.010000
J/I_z	3.87395	3.79832	3.74790
$\eta_z(L = 50\text{mm})$	346.410	216.506	173.205
$\eta_z(L = 100\text{mm})$	692.820	433.013	346.410

$$\eta_z = \sqrt{\frac{AL^2}{I_z}}$$

$$\kappa_y = \frac{5}{6}, \quad \kappa_z = \frac{5}{6}$$

I 型斷面



翹曲函數：

Top flange

$$\omega = -y(z - d + t_f)$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ 0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

Web

$$\omega = yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5t_w \leq y \leq 0.5t_w \\ -0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

Bottom flange

$$\omega = -y(z + d - t_f) \quad \text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5d \leq z \leq -0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

	W10×30	W21×93	W14×43	W10×100
d (in)	10.47	21.62	13.66	28.194(cm)
b (in)	5.81	8.42	7.995	26.2636(cm)
t_f (in)	0.51	0.93	0.53	2.8448(cm)
t_w (in)	0.30	0.58	0.305	1.7272(cm)
A (in ²)	8.76120	27.30	12.60	189.7(cm ²)
A_{sy} (in ²)	5.9262	15.6612	8.4747	149.42938(cm ²)
A_{sz} (in ²)	3.141	12.5396	4.1663	48.696677(cm ²)
J (in ⁴)	0.598852	6.030	1.050	453.7(cm ⁴)
I_y (in ⁴)	168.198	2070	428.0	2.593×10 ⁴ (cm ⁴)
I_z (in ⁴)	16.6917	92.90	45.20	8.616×10 ³ (cm ⁴)

I_{ω} (in^6)	4.16063×10^2	9.940×10^3	1.950×10^3	$1.383 \times 10^6 (cm^6)$
K_I (in^6)	4.85901×10^3	2.228×10^5	2.133×10^4	$7.739 \times 10^6 (cm^6)$
$J_{y\omega z}$ (in^4)	-16.6492	-92.2056	-45.1121	$-8.57975 \times 10^3 (cm^4)$
$J_{z\omega y}$ (in^4)	1.67642×10^2	2.04493×10^3	4.15441×10^2	$2.5324 \times 10^4 (cm^4)$
$\alpha_{\omega y z}$ (in^6)	4.13231×10^2	9.927×10^3	1.945×10^3	$1.375 \times 10^6 (cm^6)$

$$\kappa_y = \frac{5}{6}, \quad \kappa_z = 1$$



表 4.1 例題一矩形懸臂梁自由端受集中負荷之挫屈負荷(固定端 A 為 warping free)

L (mm)	a (mm)	P_{cr}^T ($10^2 N/mm^2$)	P_{cr}^E ($10^3 N/mm^2$)	P_{cr} ($10^2 N/mm^2$)	δ_{cr}^T (mm)	δ_{cr}^E (mm)	γ_{cr}^T (10^{-4})	ε_{cr}^T (10^{-3})
50	1	3.44027	3.44140	3.37267	0.84443950	0.81917261	4.2593741	4.796894
	0.8	1.76462	1.76498E	1.73839	0.54150921	0.52523578	2.730953	3.0758422
	0.5	0.432780	0.432817	0.428615	0.21251250	0.20609977	1.0716474	1.2070422
100	1	0.856676	0.856741	0.843169	1.6440443	1.6314480	1.0606466	2.3889495
	0.8	0.439282	0.439307	0.434596	1.0539506	1.0458525	0.67984088	1.5313828
	0.5	0.107706	0.107708	0.107154	0.41350189	0.41030899	0.26670051	0.60079175

挫屈負荷之解析解 $P_{cr} = \frac{4.013}{L^2} \sqrt{EI_y GJ}$ [19]

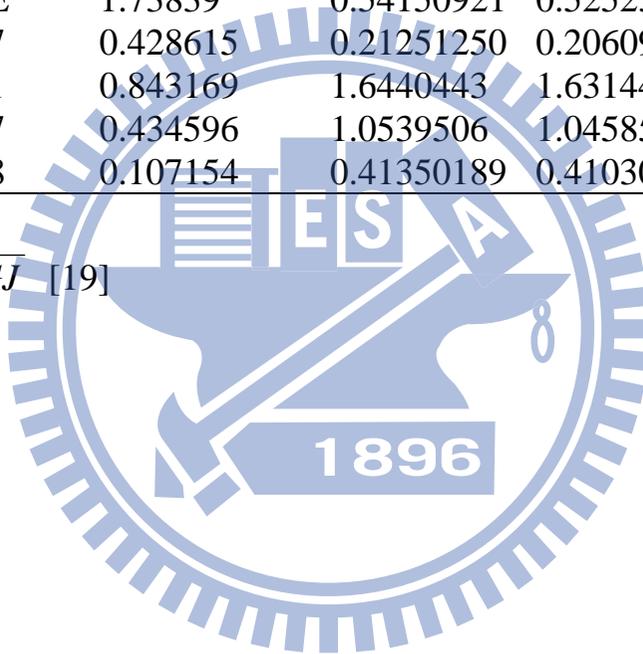


表 4.2 例題二：兩端固接矩形梁中間承受鉛直力之挫屈負荷

L (mm)	a (mm)	B.C	P_{cr}^T ($10^3 N/mm^2$)	P_{cr}^E ($10^3 N/mm^2$)	P_{cr} ($10^3 N/mm^2$)	δ_{cr}^T (mm)	δ_{cr}^E (mm)	γ_{cr}^T (10^{-3})	ε_{cr}^T (10^{-3})
50	1	C1	4.03423	4.03939	-	0.22499957	0.15027534	2.4973984	7.1703539
		C2	4.10648	4.07631	4.40509	0.22891053	0.15161658	2.5415295	7.2946745
	0.8	C1	2.07721	2.07888	-	0.14481490	0.09667427	1.6073547	4.6149000
		C2	2.10076	2.091	2.27073	0.14642734	0.09722945	1.6254491	4.6661905
	0.5	C1	0.511514	0.511678	-	0.05705833	0.03807127	0.6333070	1.8182731
		C2	0.513771	0.512848	0.559816	0.05730803	0.03815784	0.6360880	1.8262277
100	1	C1	0.998319	0.998606	-	0.33418799	0.29719632	0.6180055	3.5486590
		C2	1.03622	1.02949	1.06759	0.34654474	0.30616773	0.6413404	3.6802022
	0.8	C1	0.513602	0.513699	-	0.21491548	0.19110610	0.3974305	2.2821011
		C2	0.525911	0.523765	0.550284	0.21998134	0.19479417	0.4069203	2.3359780
	0.5	C1	0.126373	0.126382	-	0.08460944	0.07522742	0.1564616	0.8984272
		C2	0.127544	0.127344	0.135674	0.085388611	0.07579671	0.1579092	0.9067059

邊界條件 C2 的挫屈負荷解析解[19]： $P_{cr} = \frac{8C_4}{L^2} \sqrt{EI_z GJ}$

$$C_4 = C_1 \frac{\pi}{K} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{KL}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)} = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)}, C_1 = 1, K = 0.5$$

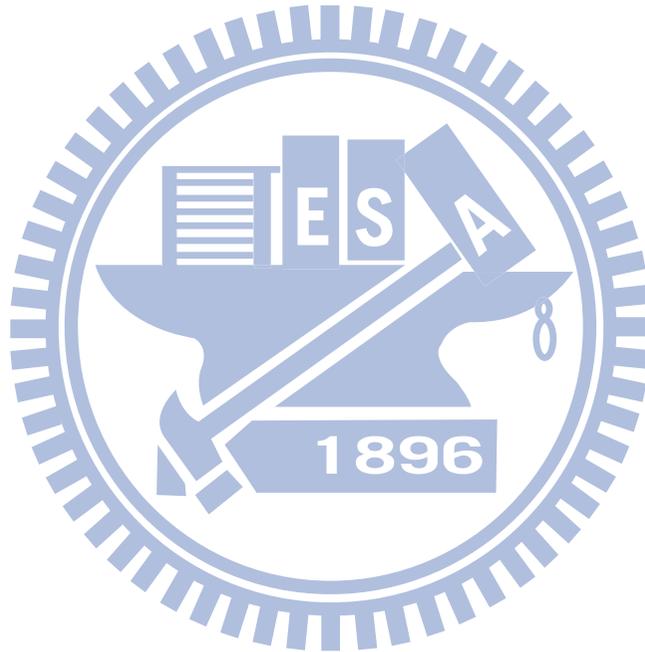


表 4.3 例題三：I 形懸臂梁自由端端受一集中載重之挫屈負荷

斷面	L (in)	B.C.	P_{cr}^T ($10^6 lb$)	P_{cr}^E ($10^6 lb$)	P_{cr} ($10^6 lb$)	δ_{cr}^T (in)	δ_{cr}^E (in)	γ_{cr}^T (10^{-2})	ε_{cr}^T (10^{-2})
W10×30	50	A1	0.338364	0.338785	0.26488428	3.360608	2.8855663	0.96574807	1.7694832
		A2	0.124838	0.12525	-	1.2439096	1.0694767	0.35633046	0.65378903
W21×93	100	A1	0.505604	0.507359	0.39790787	3.1663285	2.8153078	0.36148971	0.88845387
		A2	0.22126	0.222005	-	1.3865798	1.2325821	0.15819596	0.38891661

邊界條件 A1 的挫屈負荷解析解[19]：

$$P_{cr} = \frac{C_4}{L^2} \sqrt{EI_z GJ}$$

$$C_4 = C_1 \frac{\pi}{K} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{KL}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)} = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)}$$

$$C_1 = 1.3, K = 1$$

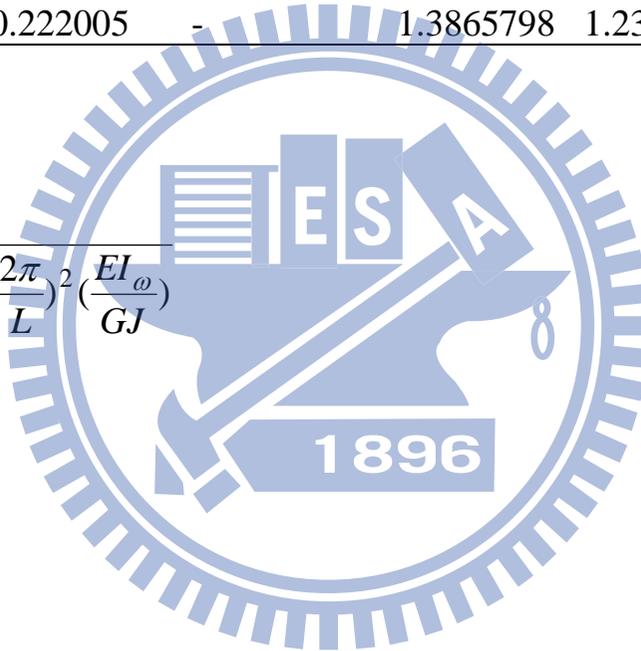


表 4.4 例題四：兩端固接 I 形梁中間承受鉛直力之挫屈負荷

斷面	L (in)	B.C.	P_{cr}^T (10^6 psi)	P_{cr}^E (10^6 psi)	P_{cr} (10^6 psi)	δ_{cr}^T (in)	δ_{cr}^E (in)	γ_{cr}^T (10^{-2})	ε_{cr}^T (10^{-2})
W10×30	180	B1	0.179360	0.176887	0.15783066	1.338717	1.0970616	0.25556844	0.42860761
		B2	0.172178	0.171880	0.15783066	1.2931313	1.0702013	0.2457275	0.41378918
	140	B3	0.189082	0.185577	0.17128773	0.74132694	0.54316791	0.26967011	0.3527595
		B4	0.183325	0.182217	0.17128773	0.72022526	0.53386359	0.26163549	0.34268627
W21×93	300	B1	0.438210	0.436496	0.40222598	1.2596668	1.0215911	0.15659534	0.29413443
		B2	0.430267	0.430969	0.40222598	1.2385973	1.009544	0.15381533	0.28918522
	240	B3	0.436095	0.433584	0.41216670	0.70977365	0.5199115	0.15587355	0.23437457
		B4	0.429770	0.429829	0.41216670	0.69981617	0.51553139	0.15363768	0.23108366

邊界條件 B1、B2 的挫屈負荷解析解[19]： $P_{cr} = \frac{8C_4}{L^2} \sqrt{EI_z GJ}$

$$C_4 = C_1 \frac{\pi}{K} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{KL}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)} = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)}$$

$$C_1 = 1$$

$$K = 0.5$$

邊界條件 B3、B4 的挫屈負荷解析解[19]：

$$P_{cr} = \frac{8C_4}{L^2} \sqrt{EI_z GJ}$$

$$C_4 = C_1 \frac{\pi}{K} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{KL}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)} = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI_\omega}{GJ}\right)}$$

$$C_1 = 1.7$$

$$K = 1$$

表 4.5 例題五：兩端固接 I 形梁承受兩個鉛直力之挫屈負荷

斷面	L (in)	B.C.	P_{cr}^T (10^5 psi)	P_{cr}^E (10^5 psi)	δ_{cr}^T (in)	δ_{cr}^E (in)	γ_{cr}^T (10^{-2})	ε_{cr}^T (10^{-2})
W10×30	300	B1	0.741026	0.729534	2.2537957	2.0726349	0.15406679	0.27647427
		B2	0.661603	0.662800	2.0484945	1.9104259	0.18884349	0.39685580
	240	B3	0.665369	0.655056	1.0912082	0.96378271	0.18977689	0.31835791
		B4	0.620858	0.620082	1.0226639	0.91522169	0.17721407	0.29795627
W21×93	420	B1	2.75101	2.72956	1.9675552	1.7497616	0.19656887	0.38669273
		B2	2.62099	2.62706	1.8813510	1.6885572	0.18739396	0.36934221
	340	B3	2.36060	2.34099	0.94757709	0.79783075	0.16874635	0.26912300
		B4	2.28807	2.28923	0.91927406	0.78063294	0.16359157	0.26102124



表 4.6 例題九：十字斷面性質

Section geometry of symmetric 十字斷面	
L=200 cm, b=20 cm, h=30 cm, t=0.5 cm,	
E=2.1×10 ⁷ N, ν = 0.3, G=8.076923077×10 ⁶ N	
$A(cm^2)$	24.75
$I_y(cm^4)$	1125.203125
$I_z(cm^4)$	333.640625
$K_I(I_4)(cm^6)$	171935.7828
$J(cm^4)$	2.0625
$I_\omega(cm^6)$	30.38183594
$\alpha_{\omega yz}(cm^6)$	16.49316406
$J_{y\omega z}(cm^4)$	-3.33172×10 ²
$J_{z\omega y}(cm^4)$	1.12361×10 ³
$A_{sy}(cm^2)$	10
$A_{sz}(cm^2)$	15
K_y	0.833333333333
K_z	0.833333333333

表 4.7 例題十一：懸臂梁末端斷面不同位置受集中載重之挫屈負荷 ($L = 3m$)

力施加的位置	P_{cr}^T ($10^6 N$)	P_{cr}^E ($10^6 N$)	δ_{cr}^T (m)	δ_{cr}^E (m)	γ_{cr}^T (10^{-2})	ε_{cr}^T (10^{-2})
頂部	0.574549	0.574366	0.021285208	0.017723093	0.16147061	0.11855652
中間	2.16506	2.16108	0.080090095	0.066583755	0.60783873	0.44674465
底部	4.45075	4.45551	0.16317491	0.13592071	1.2411767	0.91834616

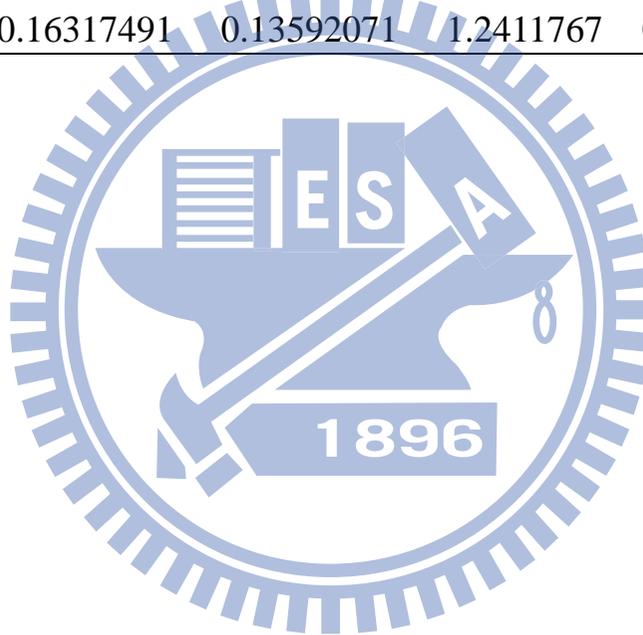


表 4.8 例題十、十一的 I 形斷面性質

Section geometry of symmetric I 形斷面	
$d = 0.56 \text{ m}$, $t_f = 0.03 \text{ m}$, $t_w = 0.012 \text{ m}$, $b = 0.3 \text{ m}$,	
$E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80.77 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$	
$A(m^2)$	0.024
$I_y(m^4)$	1.3904×10^{-3}
$I_z(m^4)$	1.35072×10^{-4}
$K_I(I_4)(m^6)$	1.14831×10^{-4}
$J(m^4)$	5.688×10^{-5}
$I_\omega(m^6)$	9.51222×10^{-6}
$\alpha_{\omega yz}(m^6)$	9.47175×10^{-6}
$J_{y\omega z}(m^4)$	-1.34928×10^{-4}
$J_{z\omega y}(m^4)$	1.38486×10^{-3}
$A_{sy}(m^2)$	0.018
$A_{sz}(m^2)$	0.006
κ_y	0.833333333333
κ_z	1.0

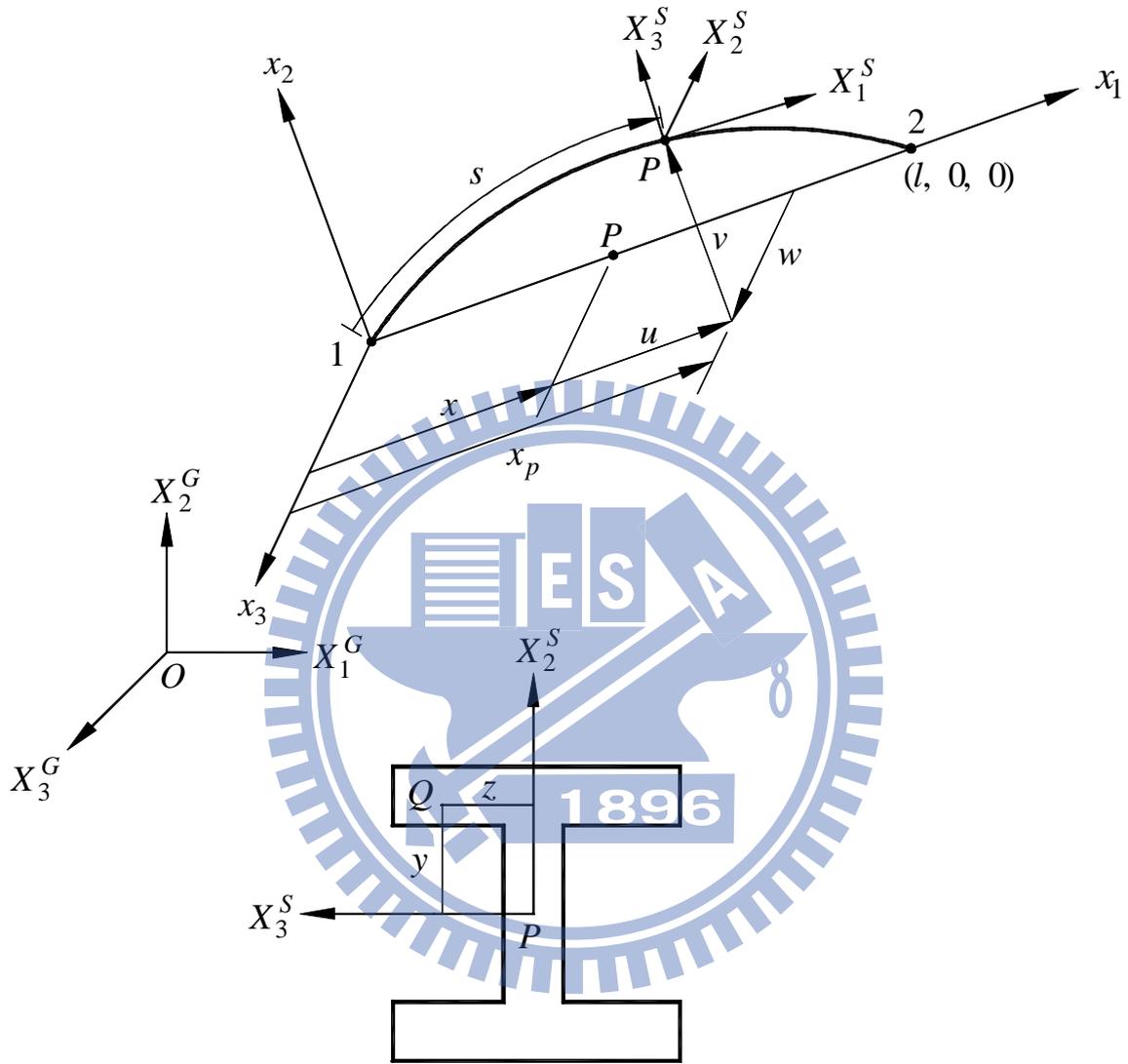


圖 2.1 梁元素之位移以及座標系統關係圖

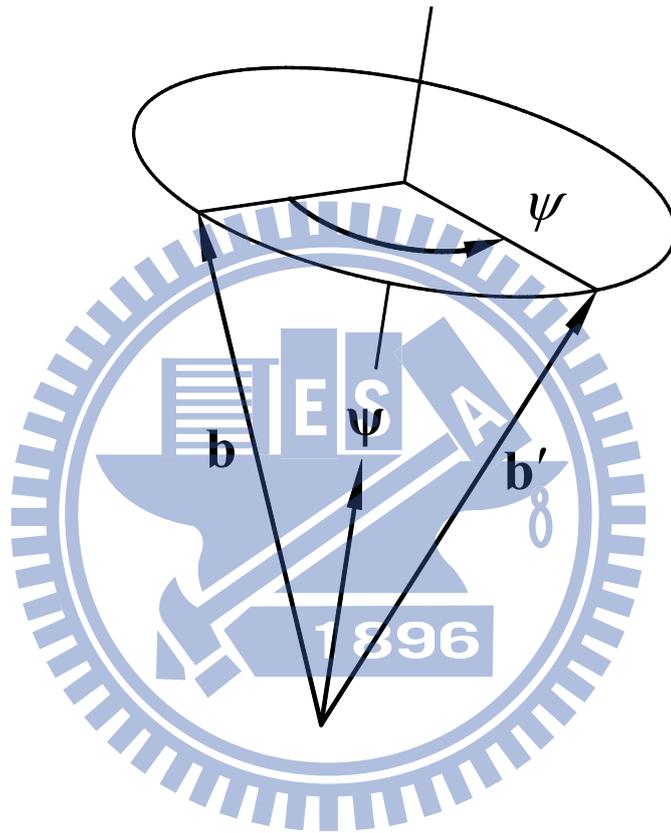


圖 2.2 旋轉向量

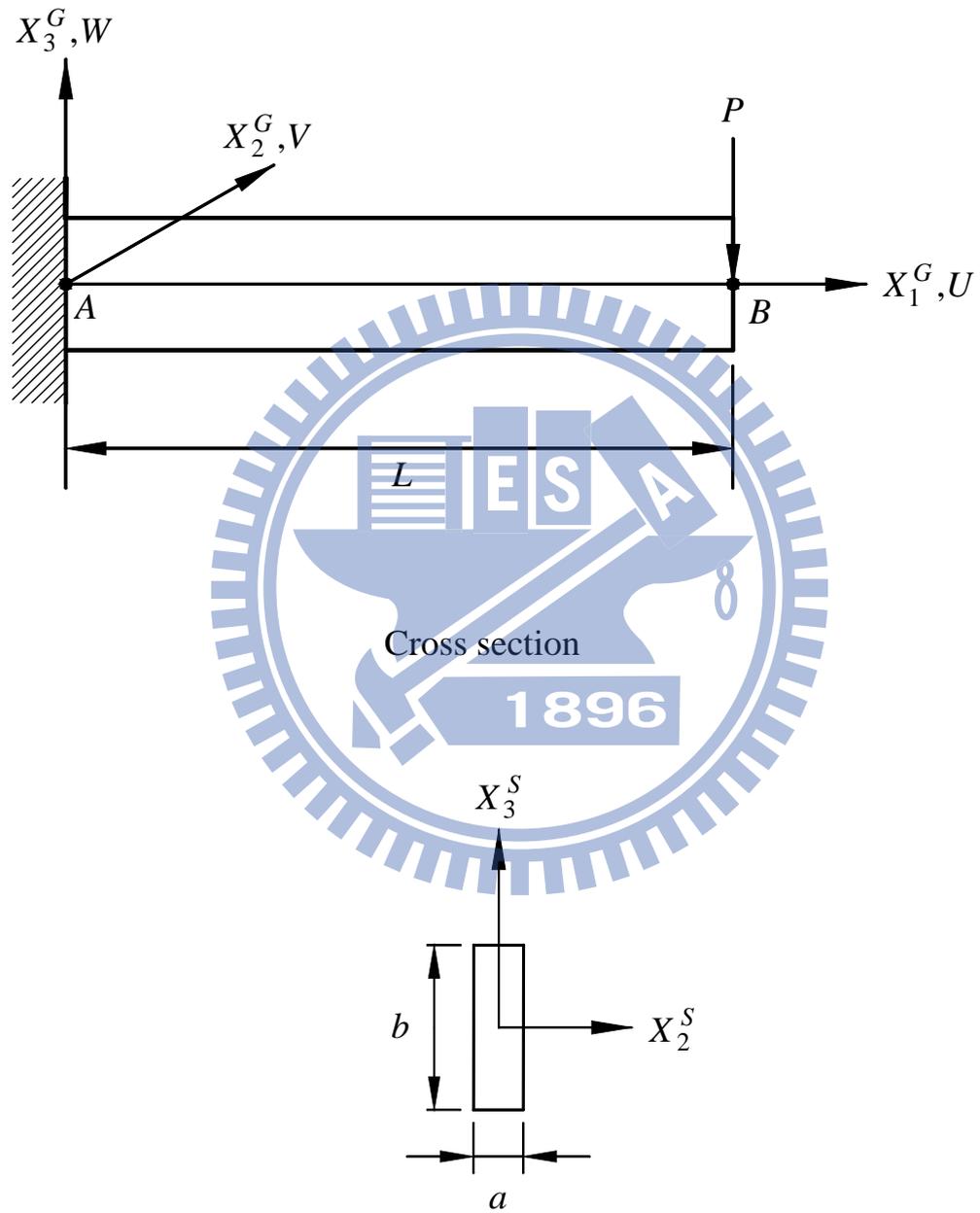


圖 4.1 矩形懸臂梁自由端承受集中載重之結構圖

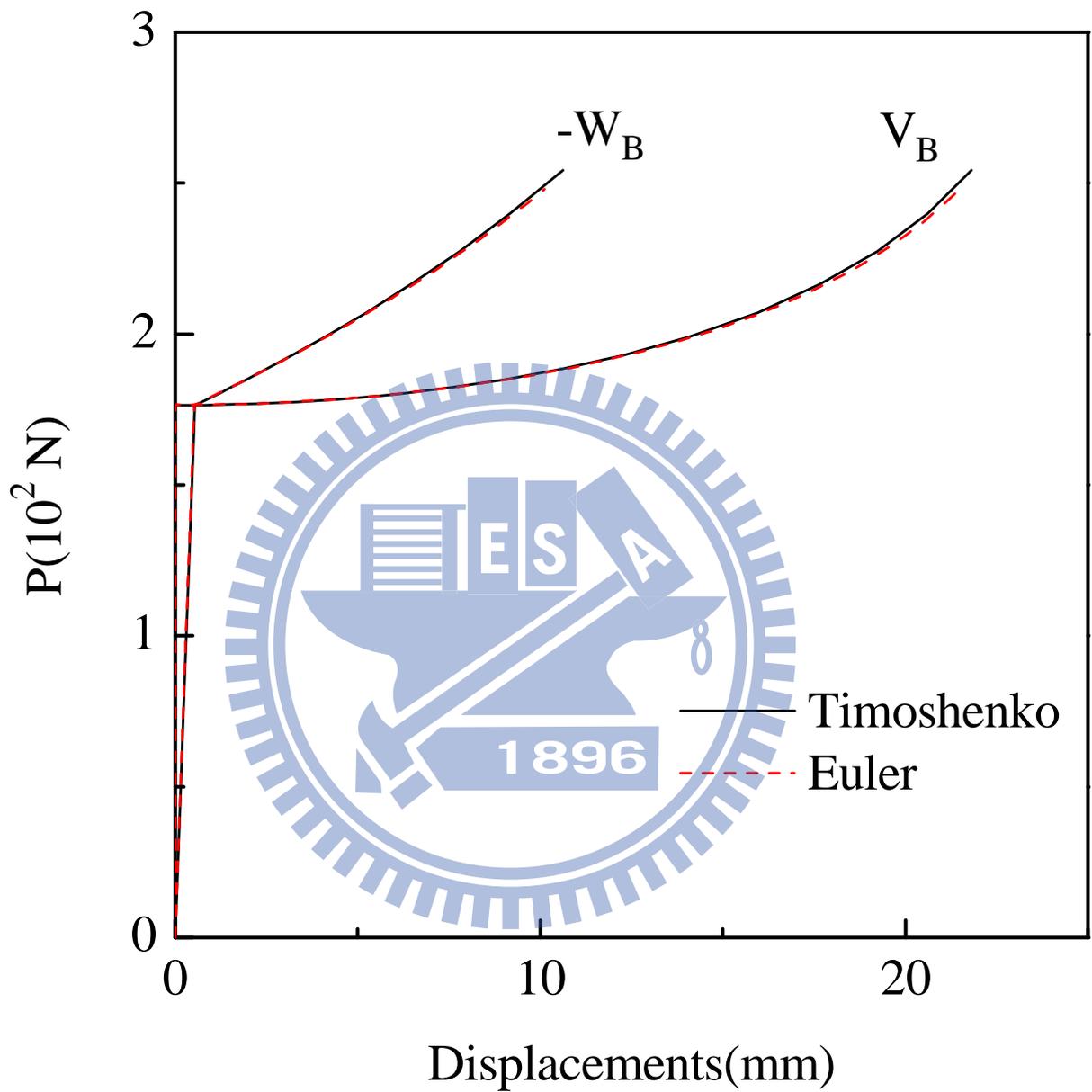


圖 4.2 端點 B 在 X_2^G, X_3^G 方向之負荷-位移曲線圖

(例題一：矩形斷面， $L = 50 \text{ mm}$ ， $a = 0.8 \text{ mm}$)

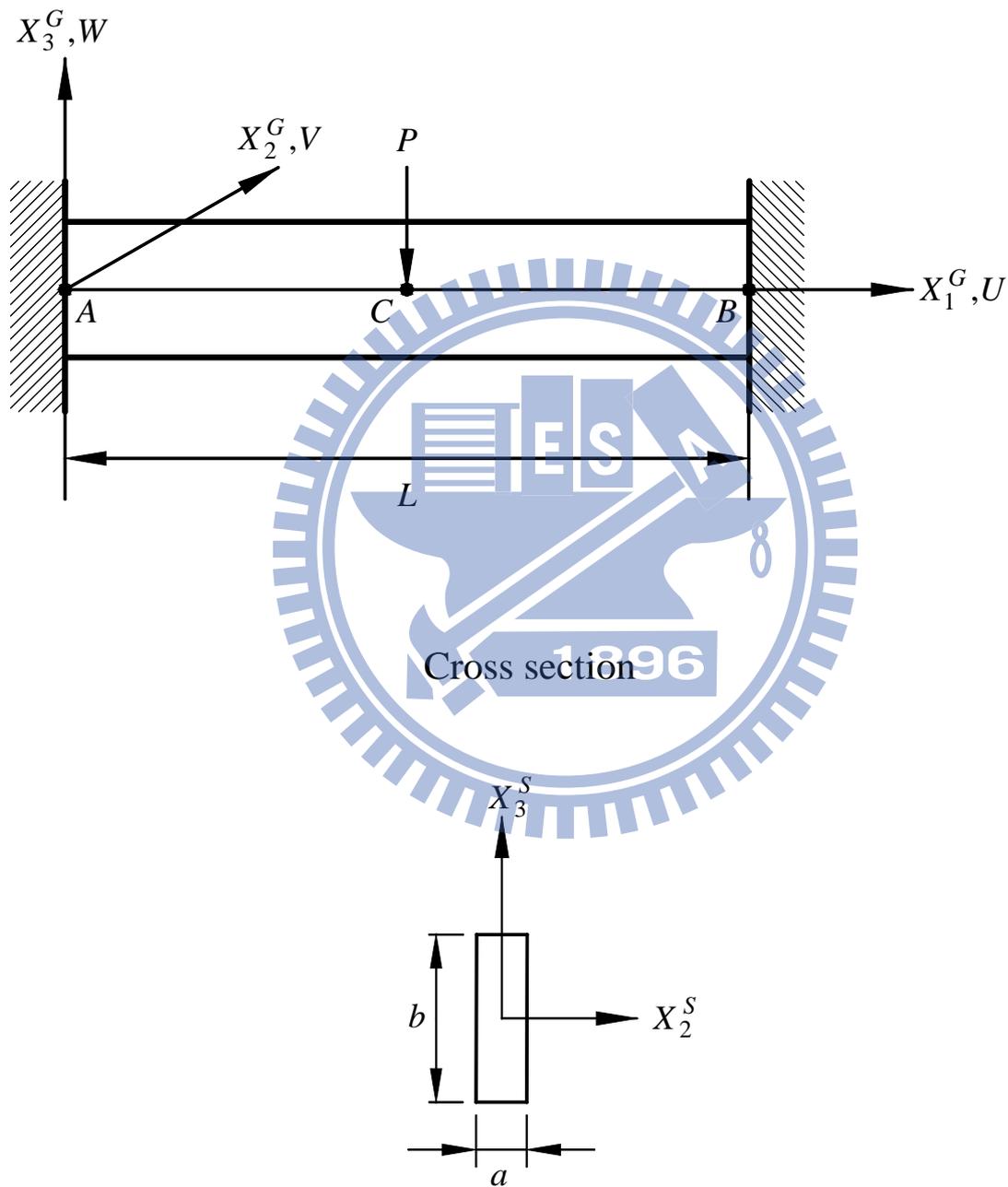


圖 4.3 矩形梁中間承受集中載重之結構圖

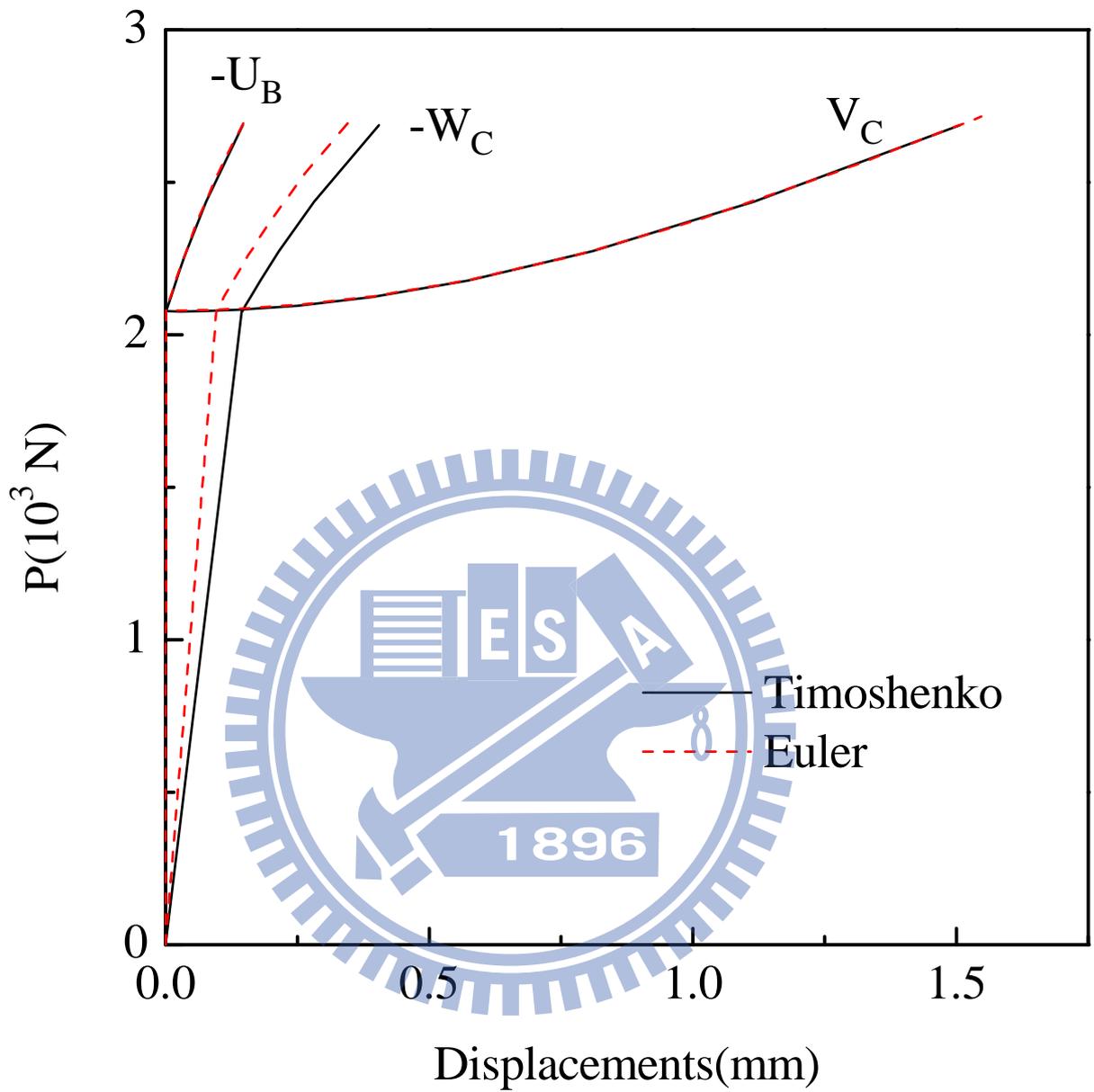


圖 4.4 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題二：矩形斷面， $L = 50 \text{ mm}$ ， $a = 0.8 \text{ mm}$ ，C1)

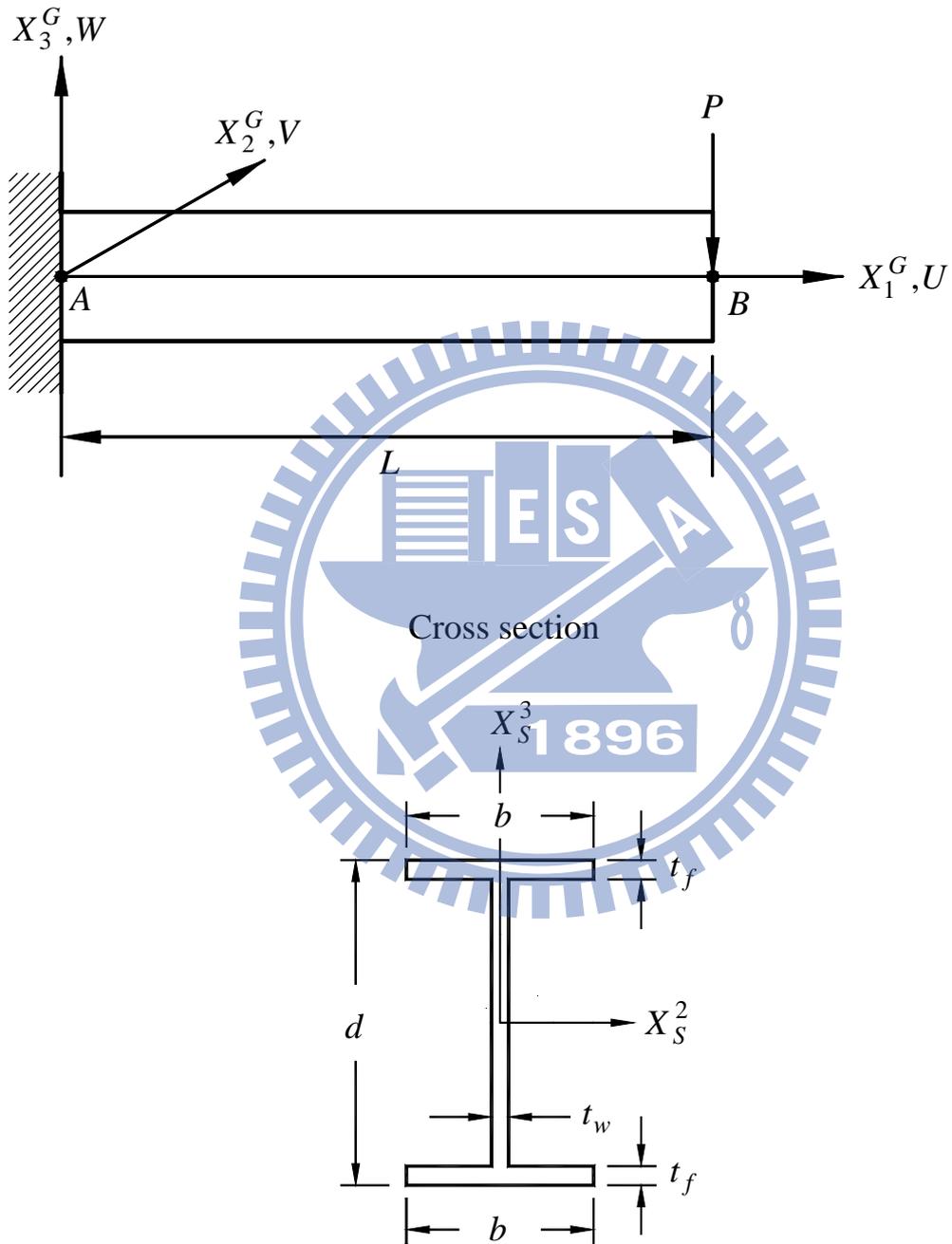


圖 4.5 I形懸臂梁自由端承受集中載重之結構圖

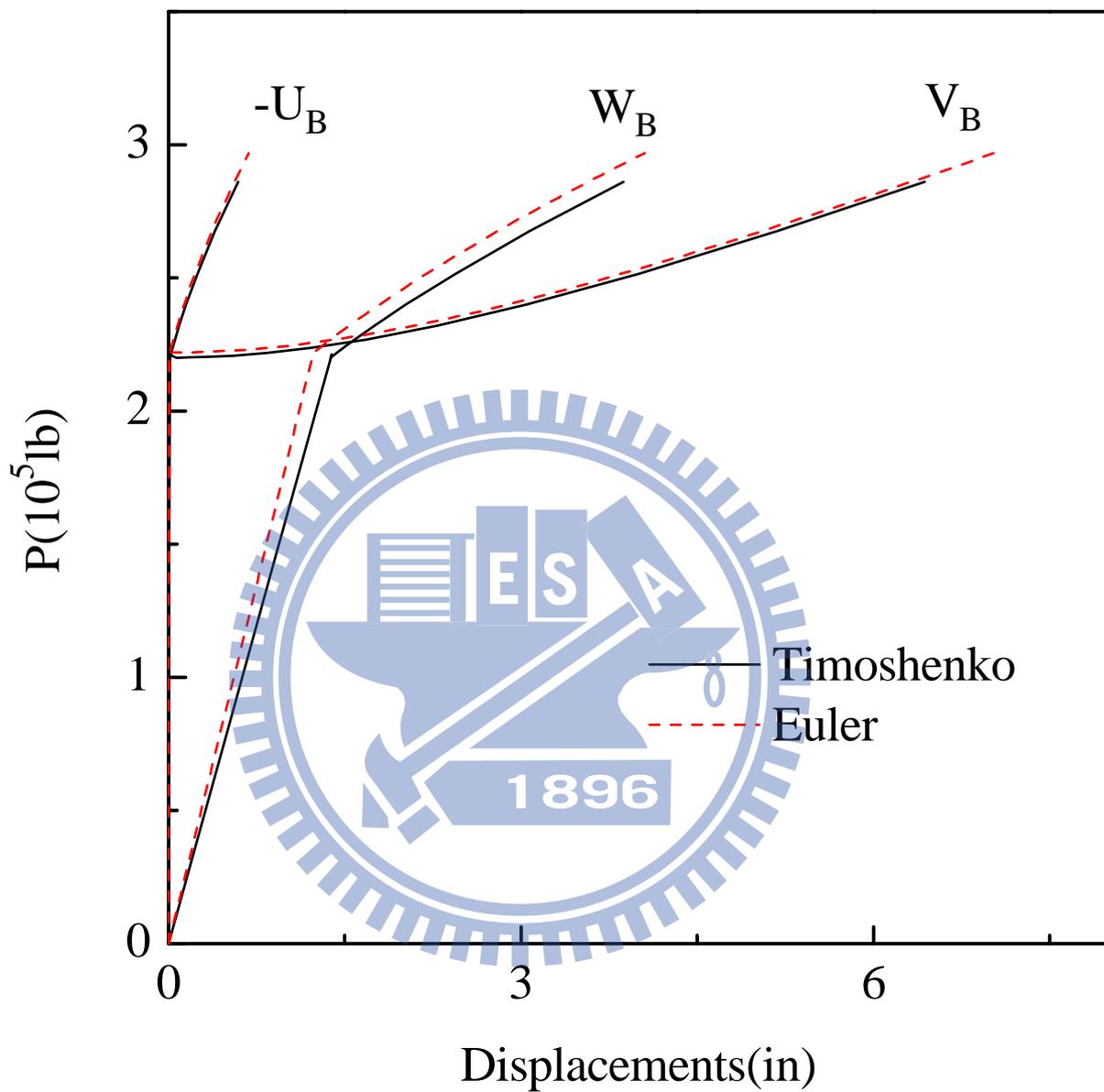


圖 4.6 自由端 B 的負荷-位移曲線圖

(例題三：W21×93， $L = 100 \text{ in}$ ，A2)

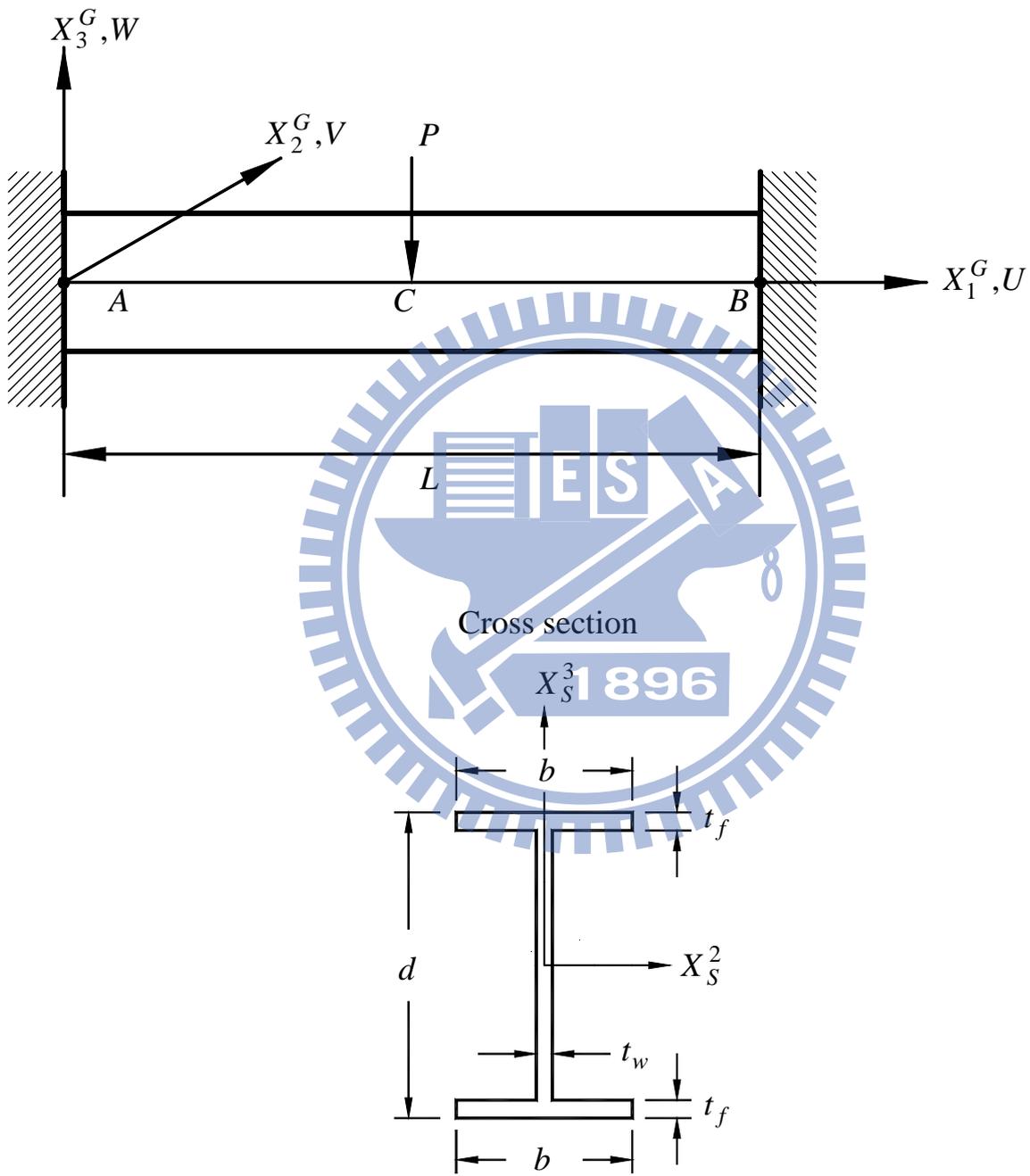


圖 4.7 I 形梁中間承受一集中載重之結構圖

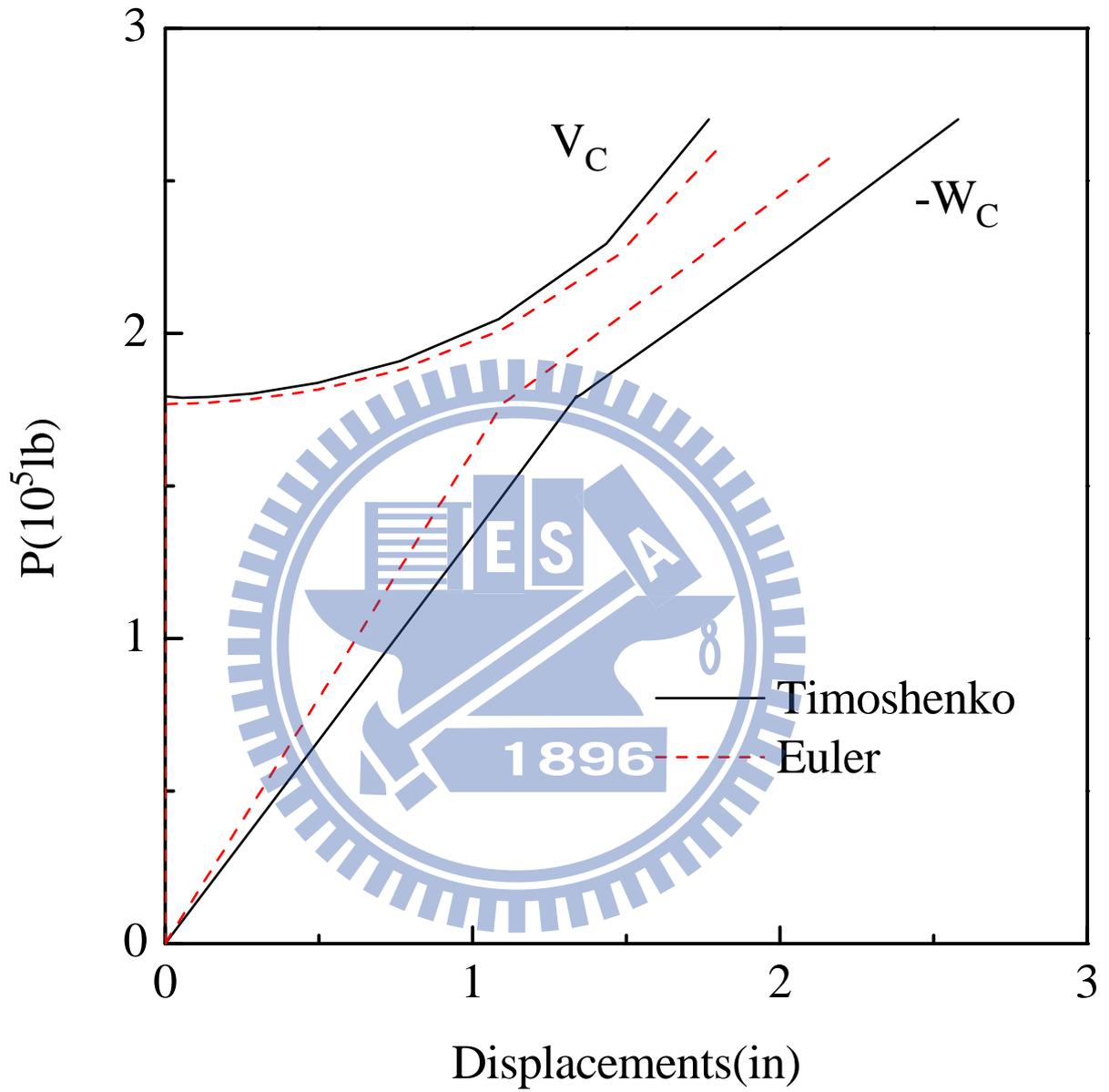


圖 4.8 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題四： $W10 \times 30$ ， $L = 180 \text{ in}$ ， B1)

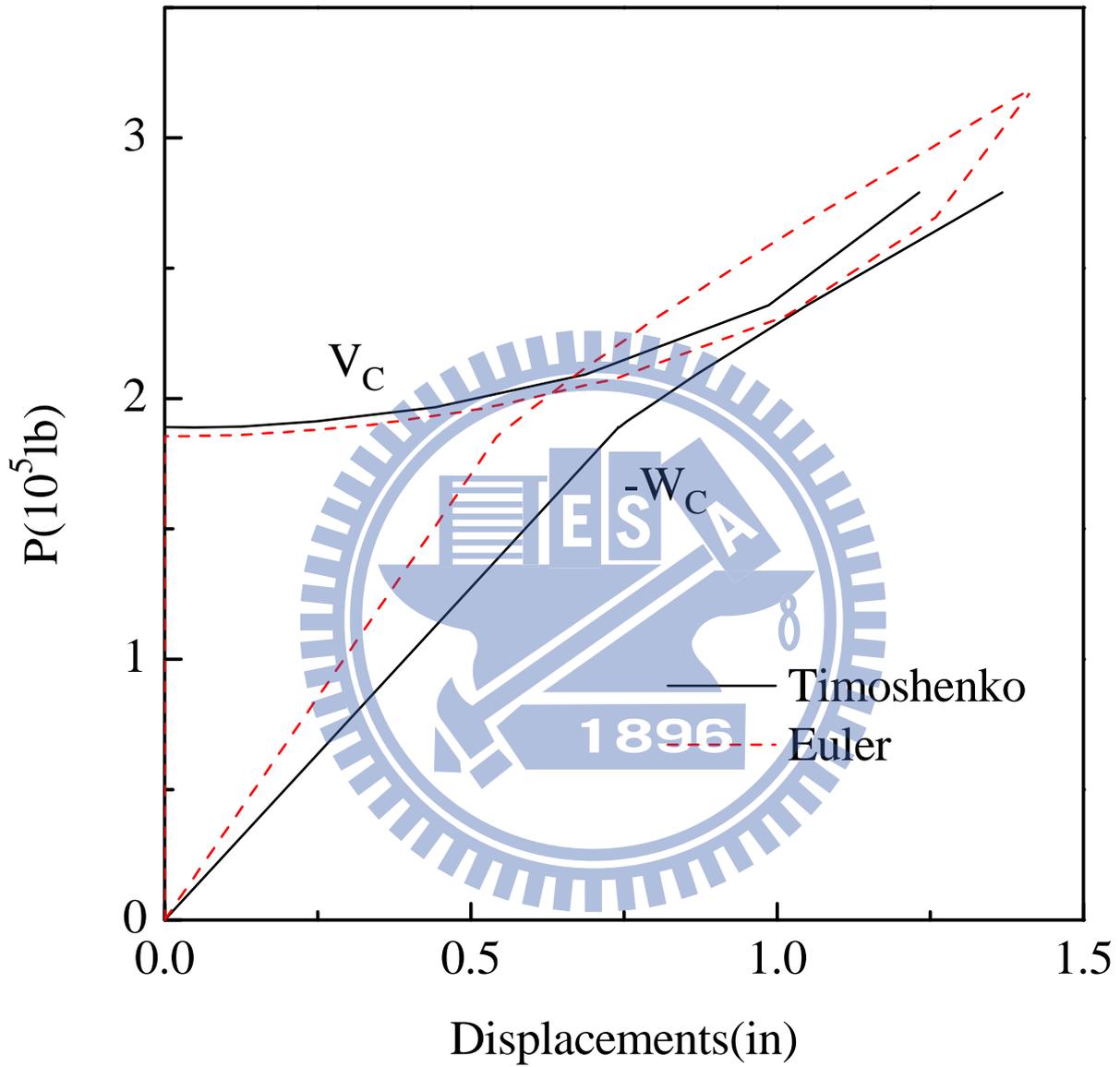


圖 4.9 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題四：W10×30， $L = 140 \text{ in}$ ，B3)

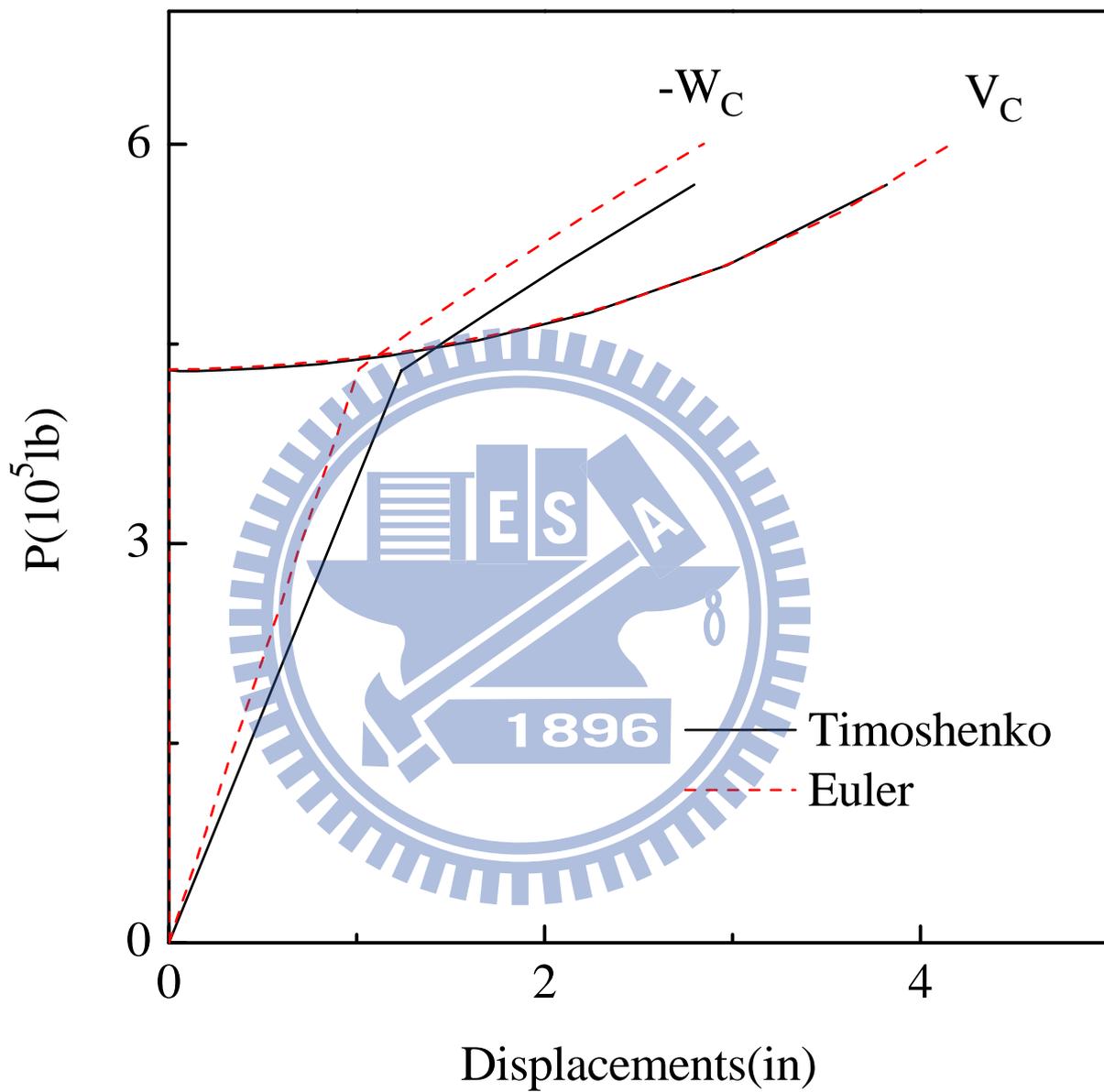


圖 4.10 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題四：W21×93， $L = 300 \text{ in}$ ，B2)

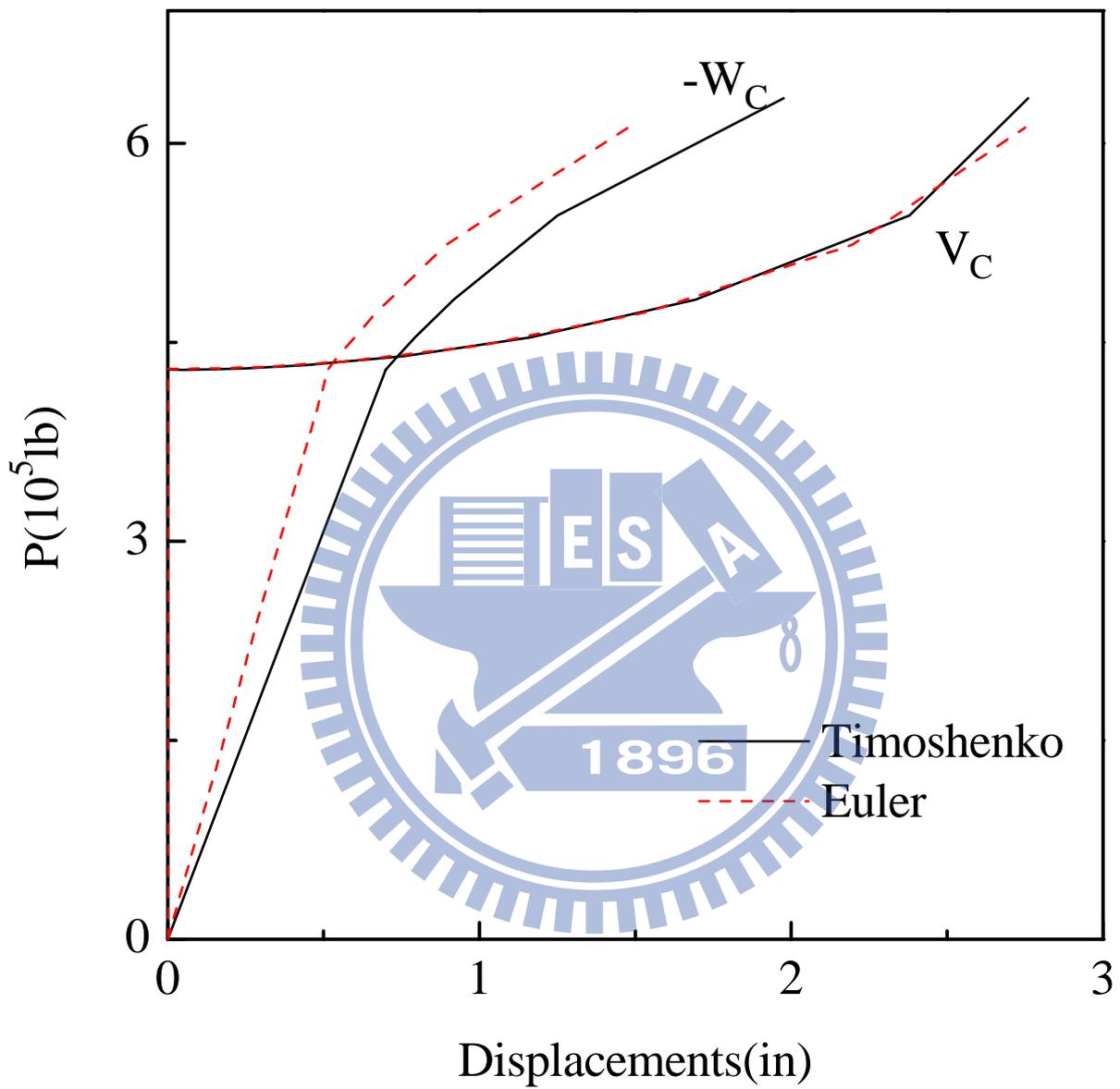


圖 4.11 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題四：W21×93， $L = 240 \text{ in}$ ，B4)

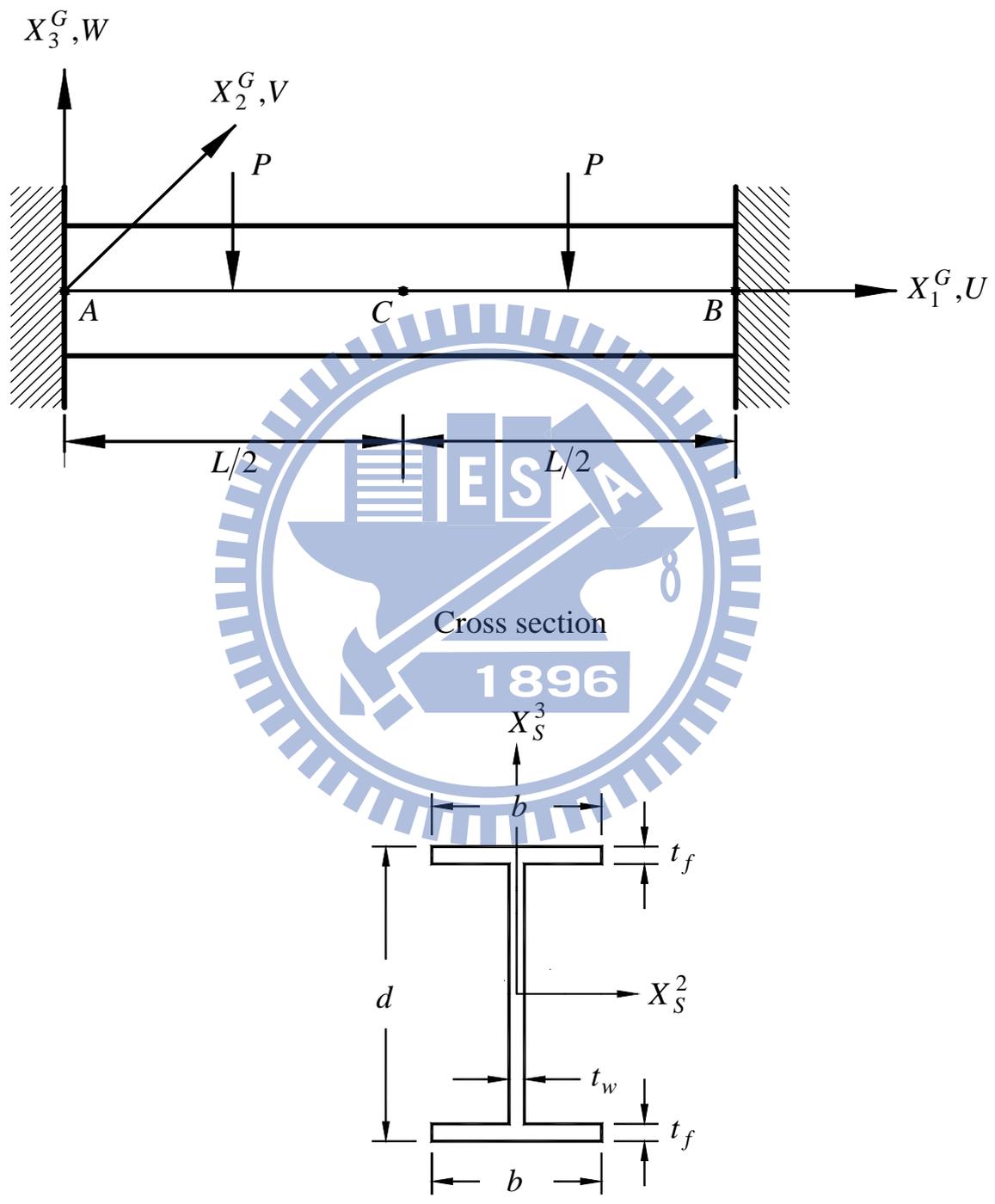


圖 4.12 I 形梁承受兩個集中載重之結構圖

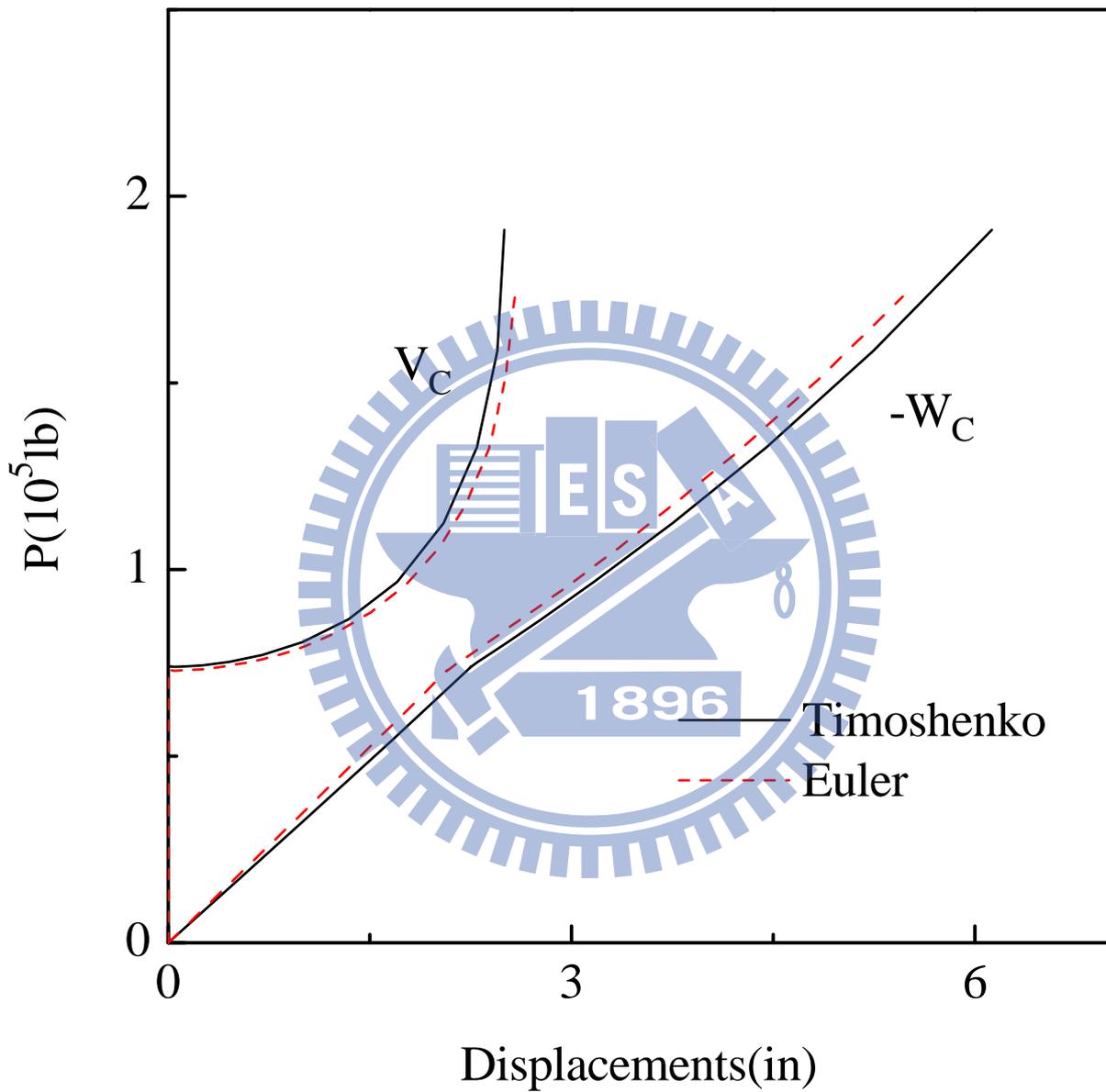


圖 4.13 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題五：W10×30， $L = 300 \text{ in}$ ，B1)

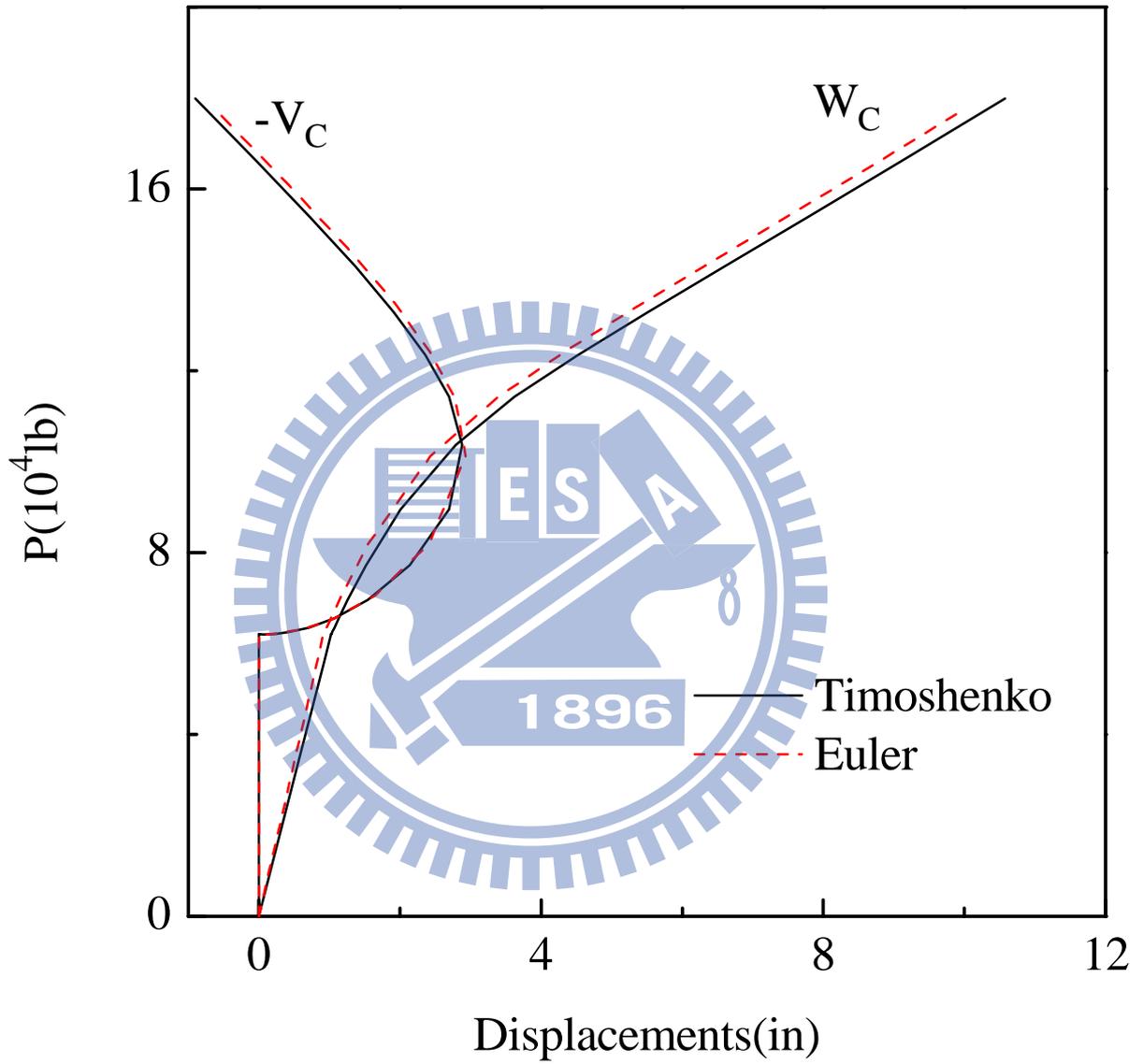


圖 4.14 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題五：W10×30， $L = 240$ in，B4)

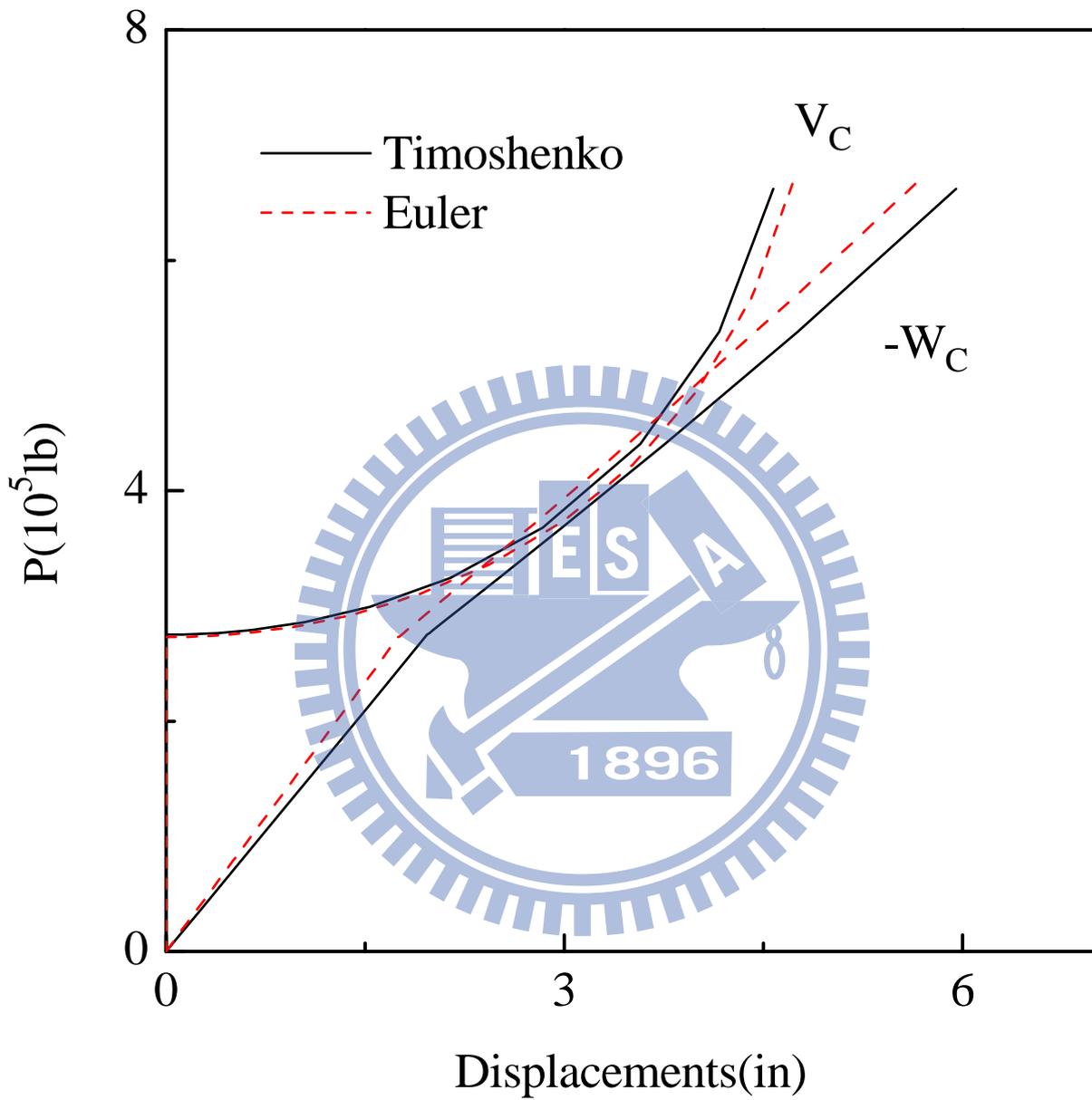


圖 4.15 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題五：W21×93， $L = 420 \text{ in}$ ，B1)

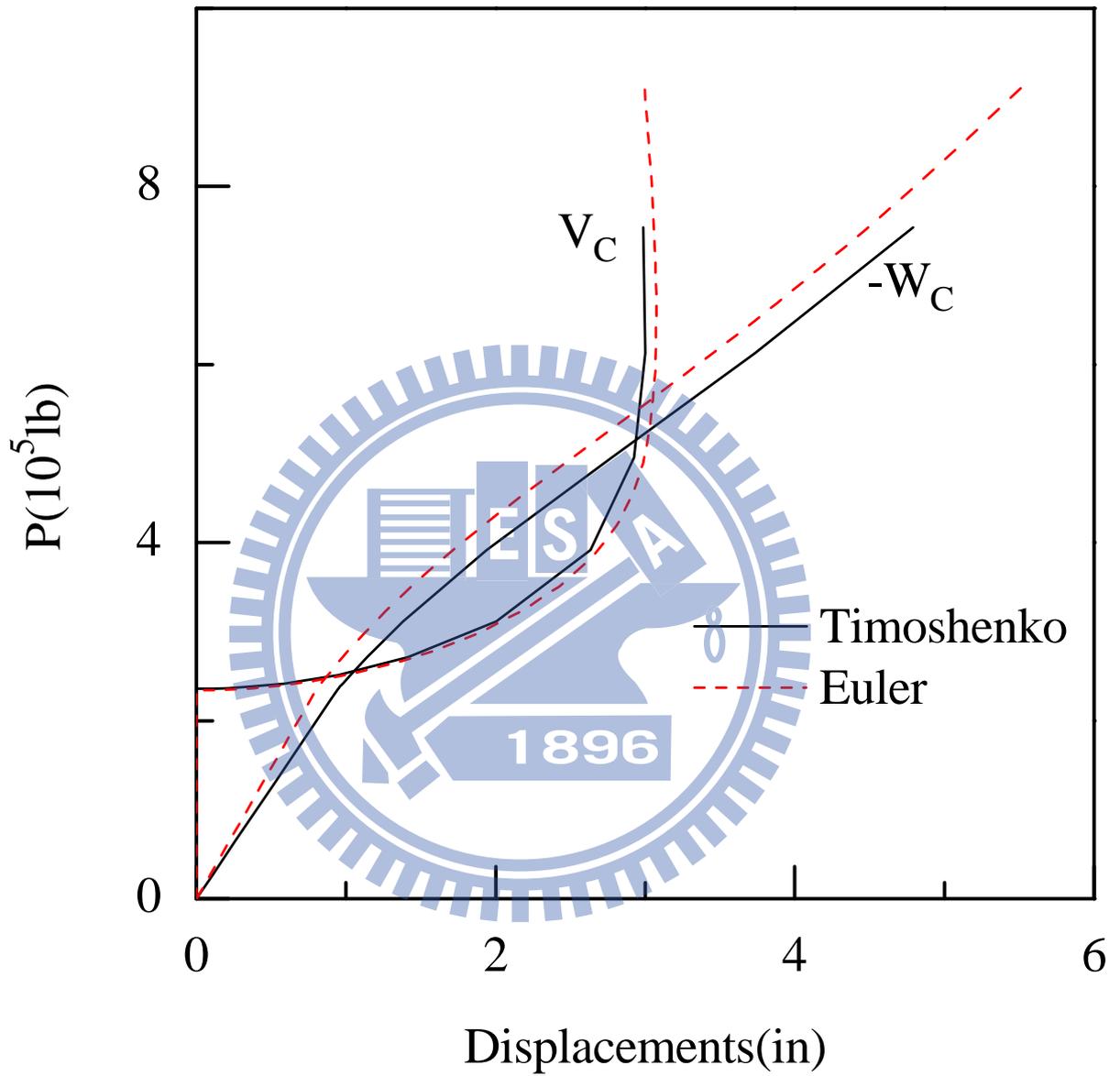


圖 4.16 梁端點 C 在 X_2^G, X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題五：W21×93， $L = 340 \text{ in}$ ，B3)

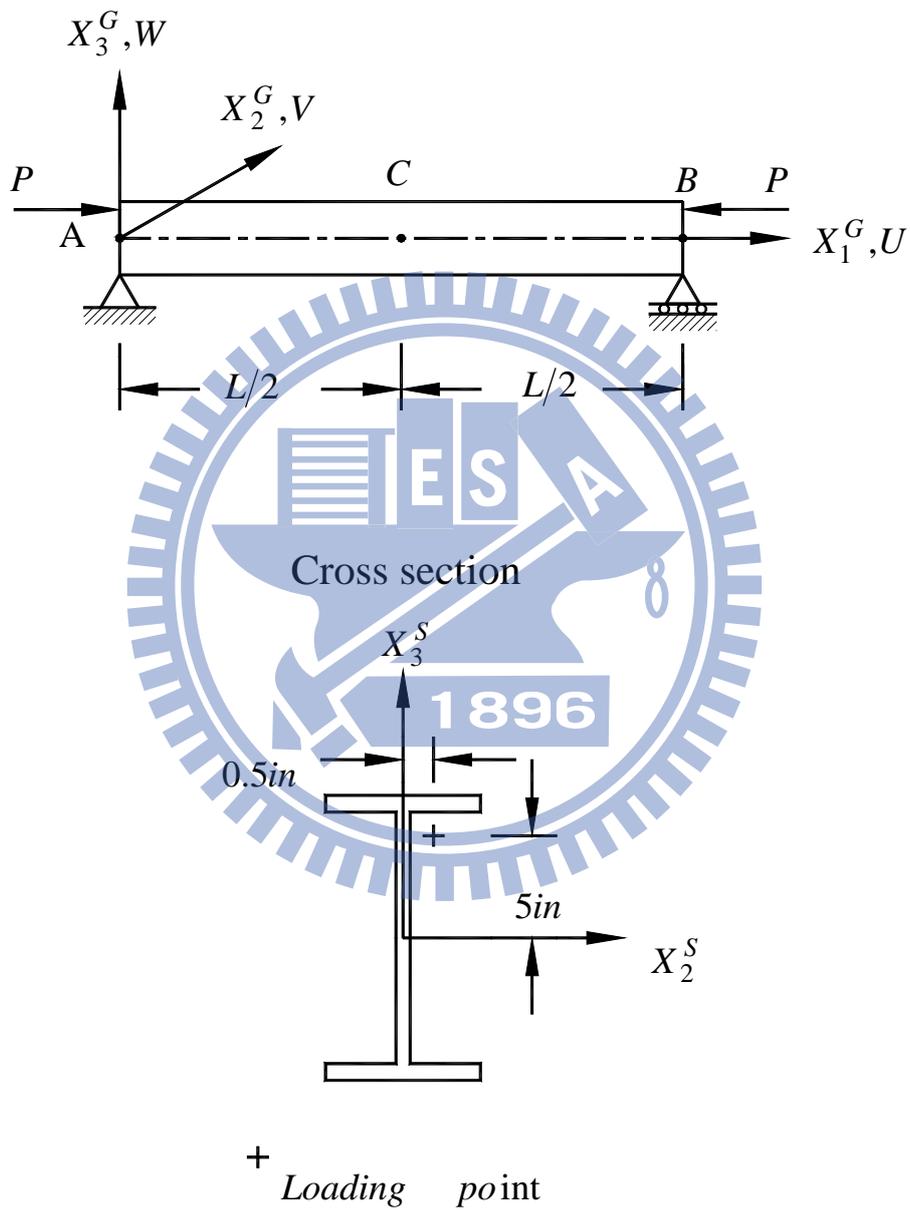


圖 4.17 簡支梁兩端承受偏心軸力之結構圖

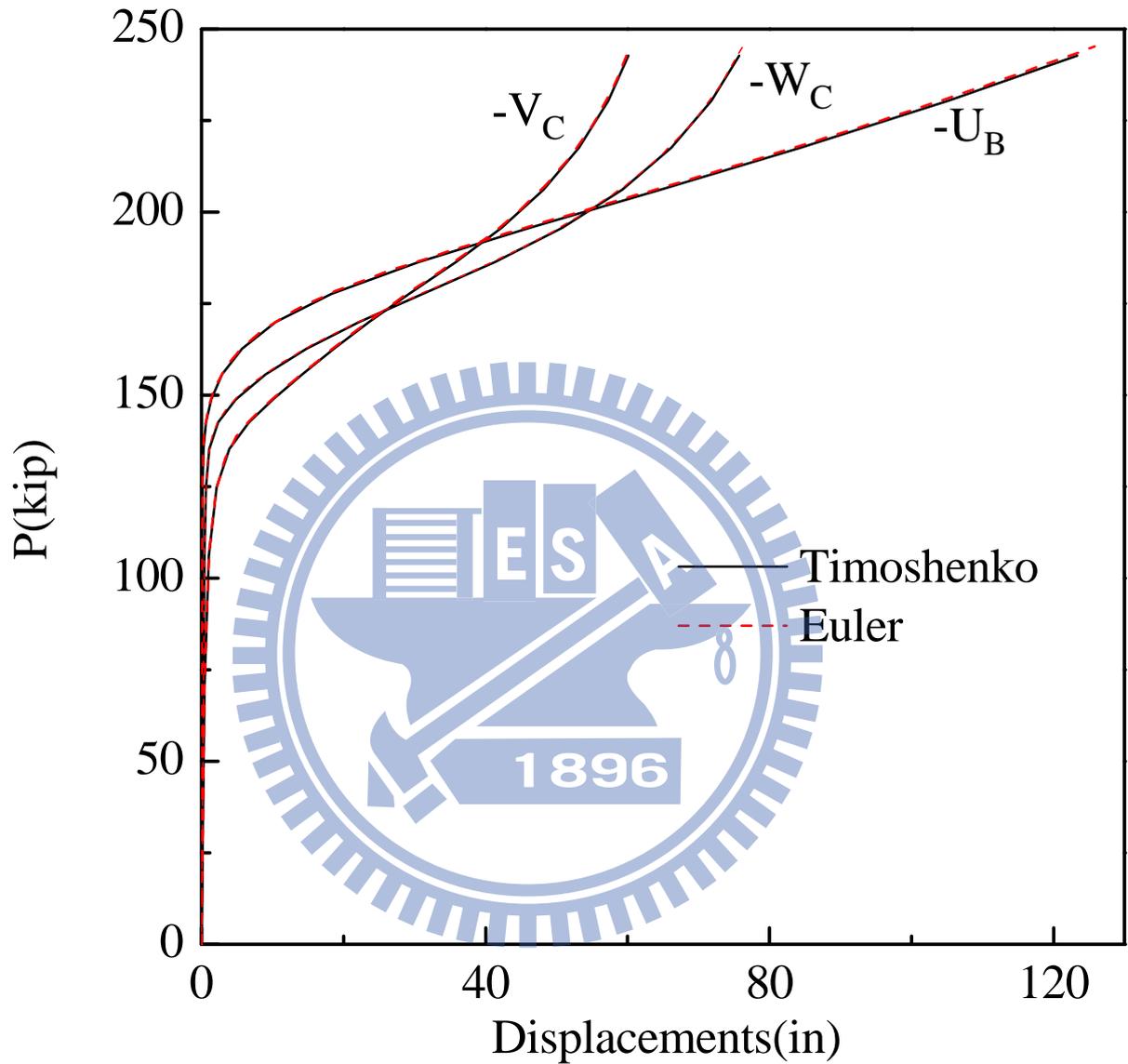


圖 4.18 簡支梁受偏心軸力的負荷-位移曲線圖

(例題六： $W14 \times 43$ ， $L = 264.6 \text{ in}$)

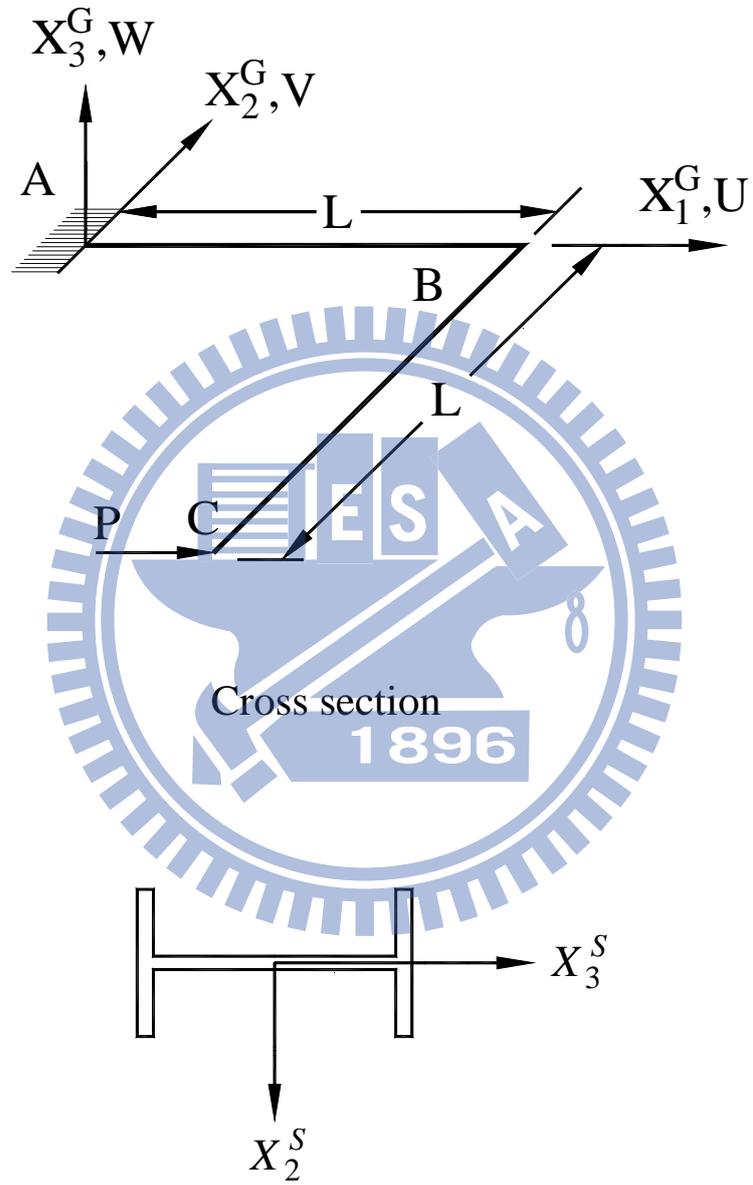


圖 4.19 懸臂 L 形構架自由端承受水平力之結構圖

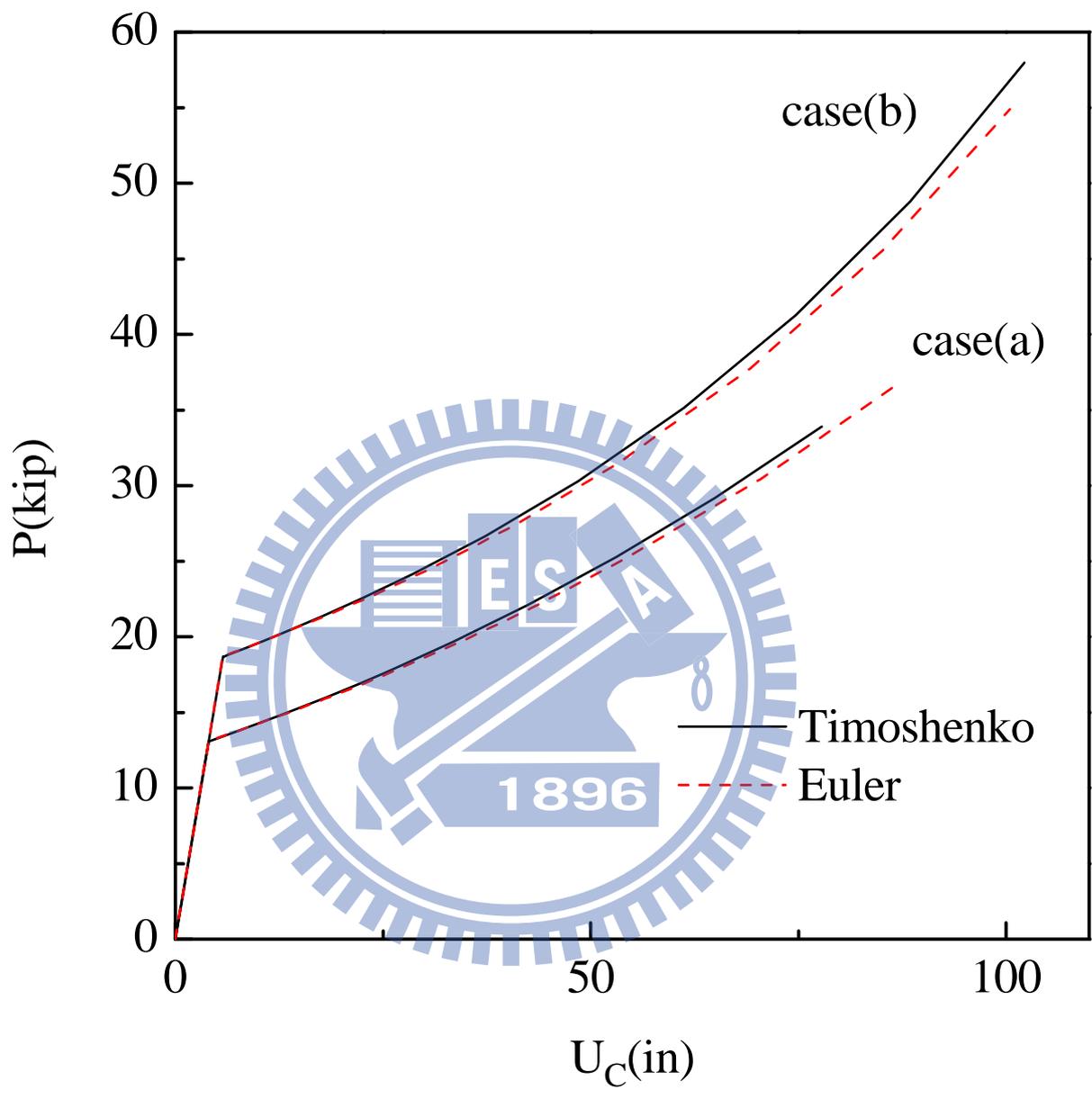


圖 4.20 端點 C 在 X_1^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題七：W21×93， $L = 240$ in)

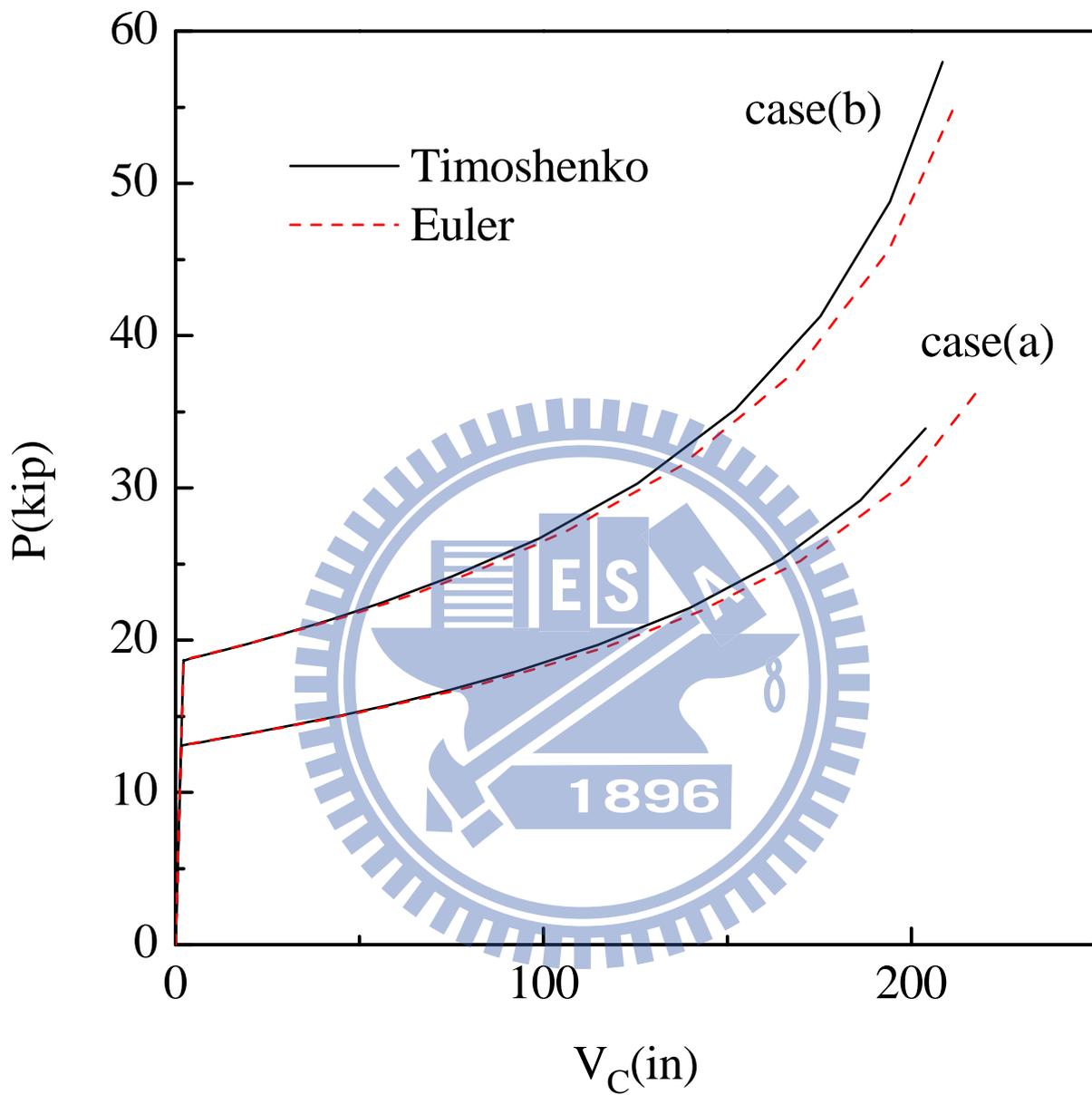


圖 4.21 端點 C 在 X_2^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題七：W21×93， $L = 240$ in)

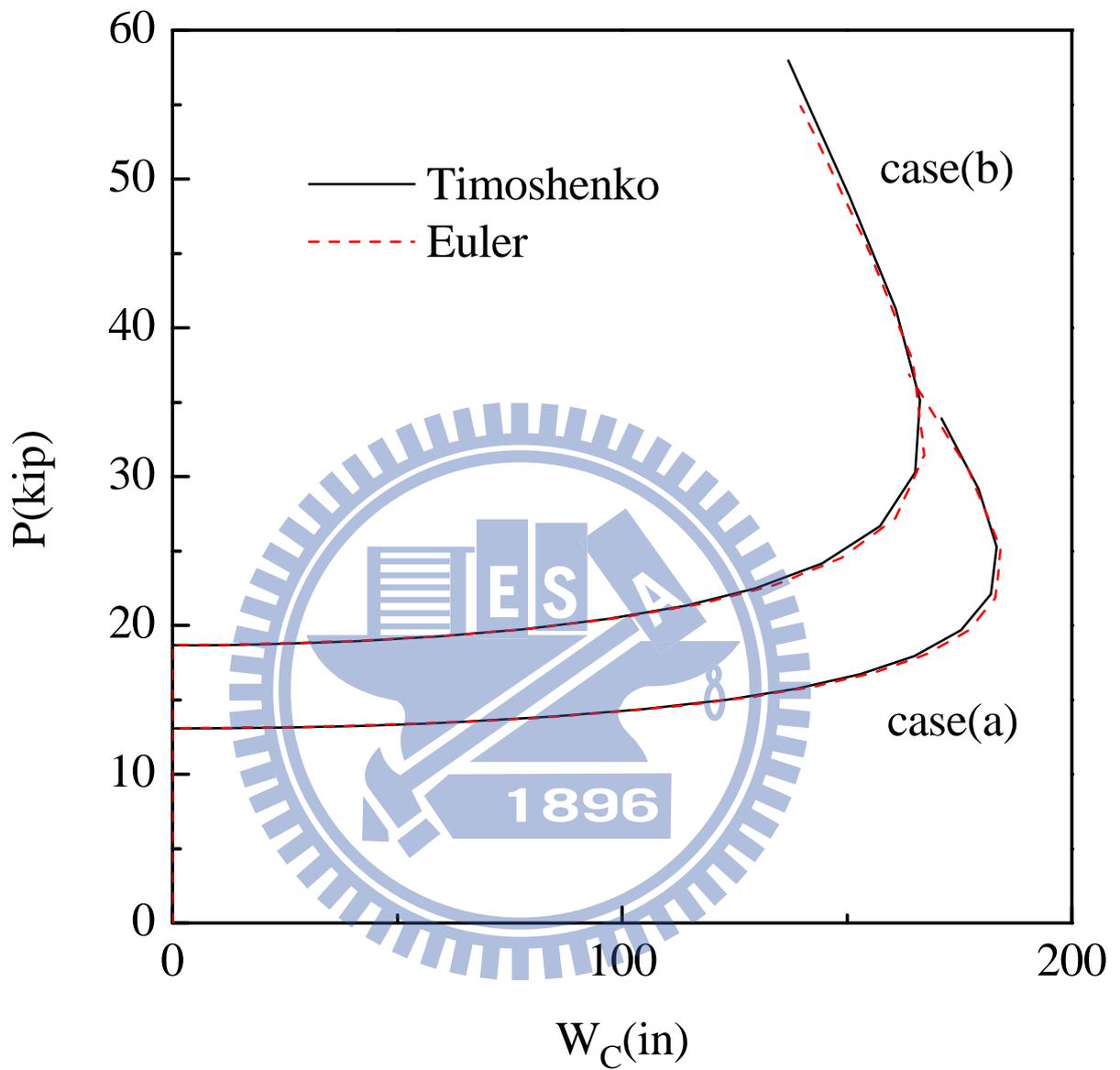


圖 4.22 端點 C 在 X_3^G 方向的負荷-位移曲線圖

(例題七： $W21 \times 93$, $L = 240$ in)

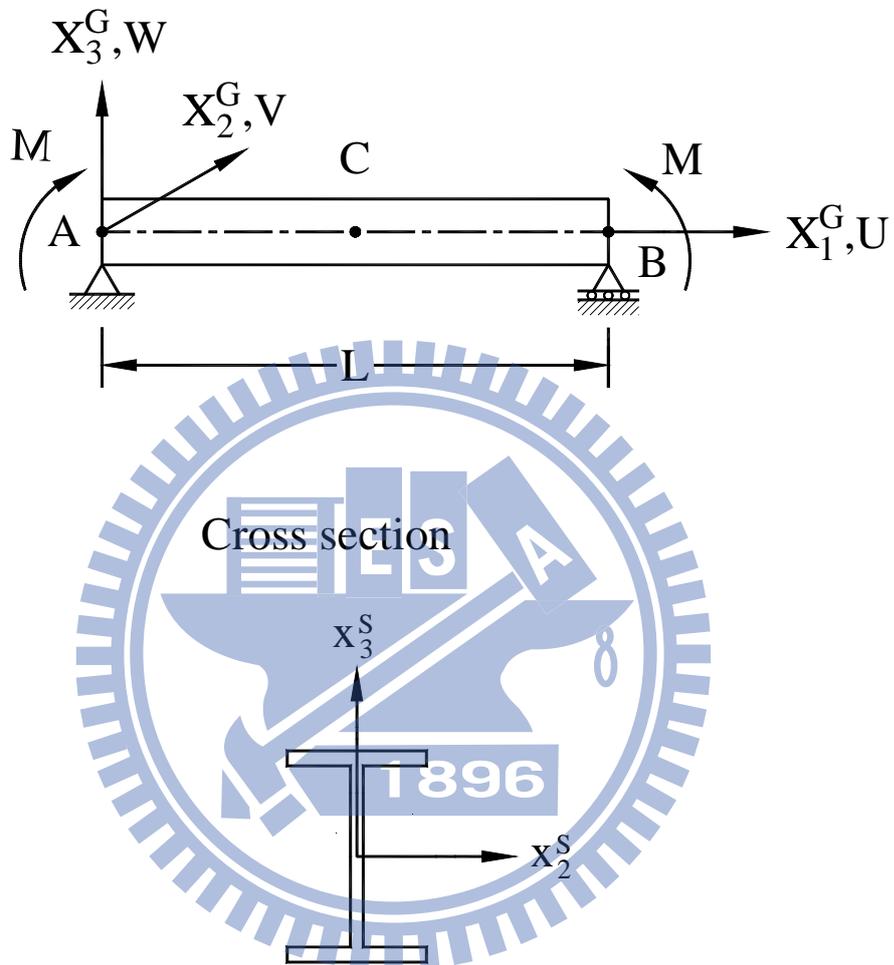


圖 4.23 簡支梁兩端承受均勻彎矩之結構圖

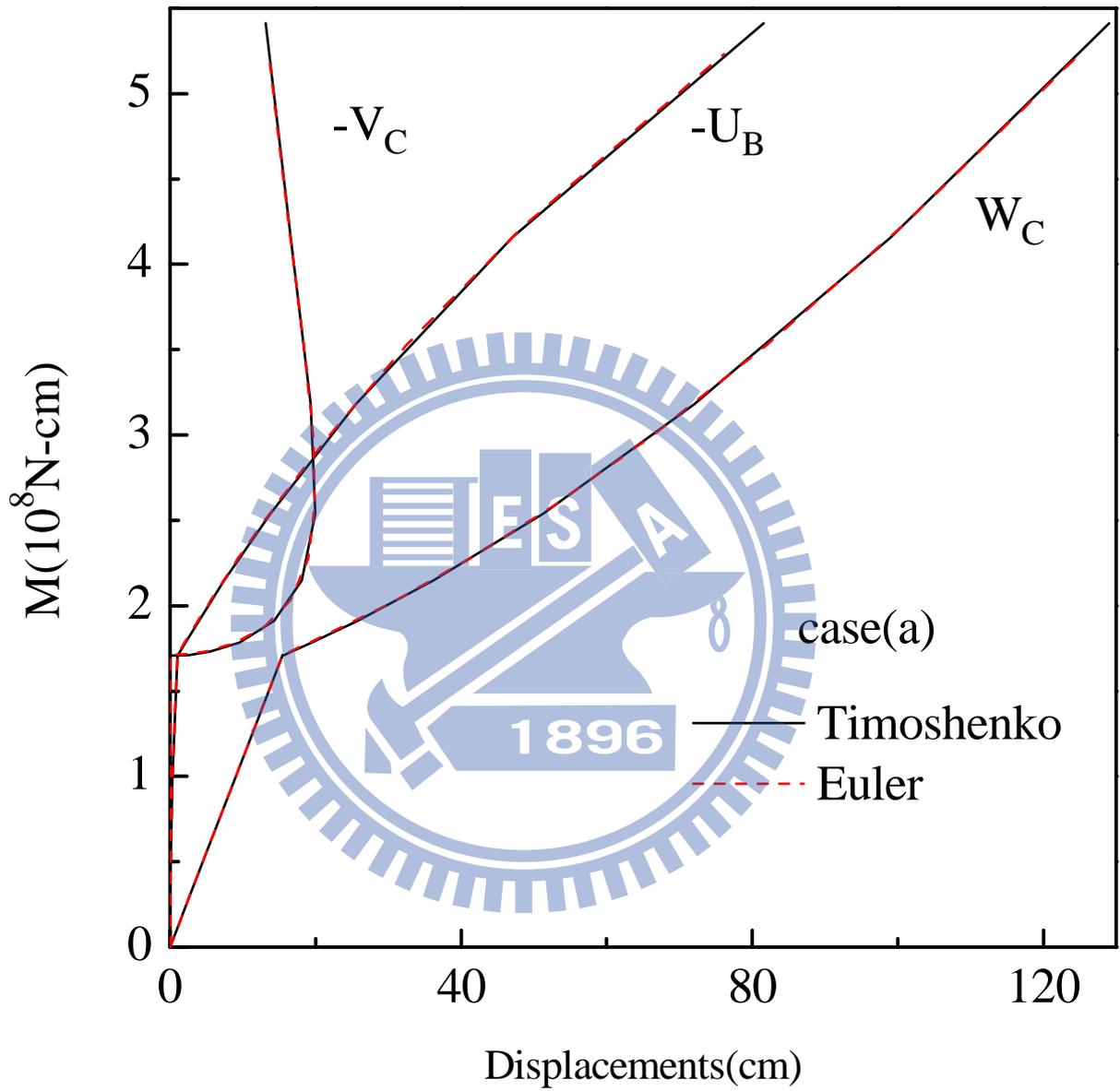


圖 4.24 簡支梁兩端皆為自由翹曲受均勻彎矩的負荷-位移曲線圖

(例題八：W10×100， $L = 610 \text{ cm}$)

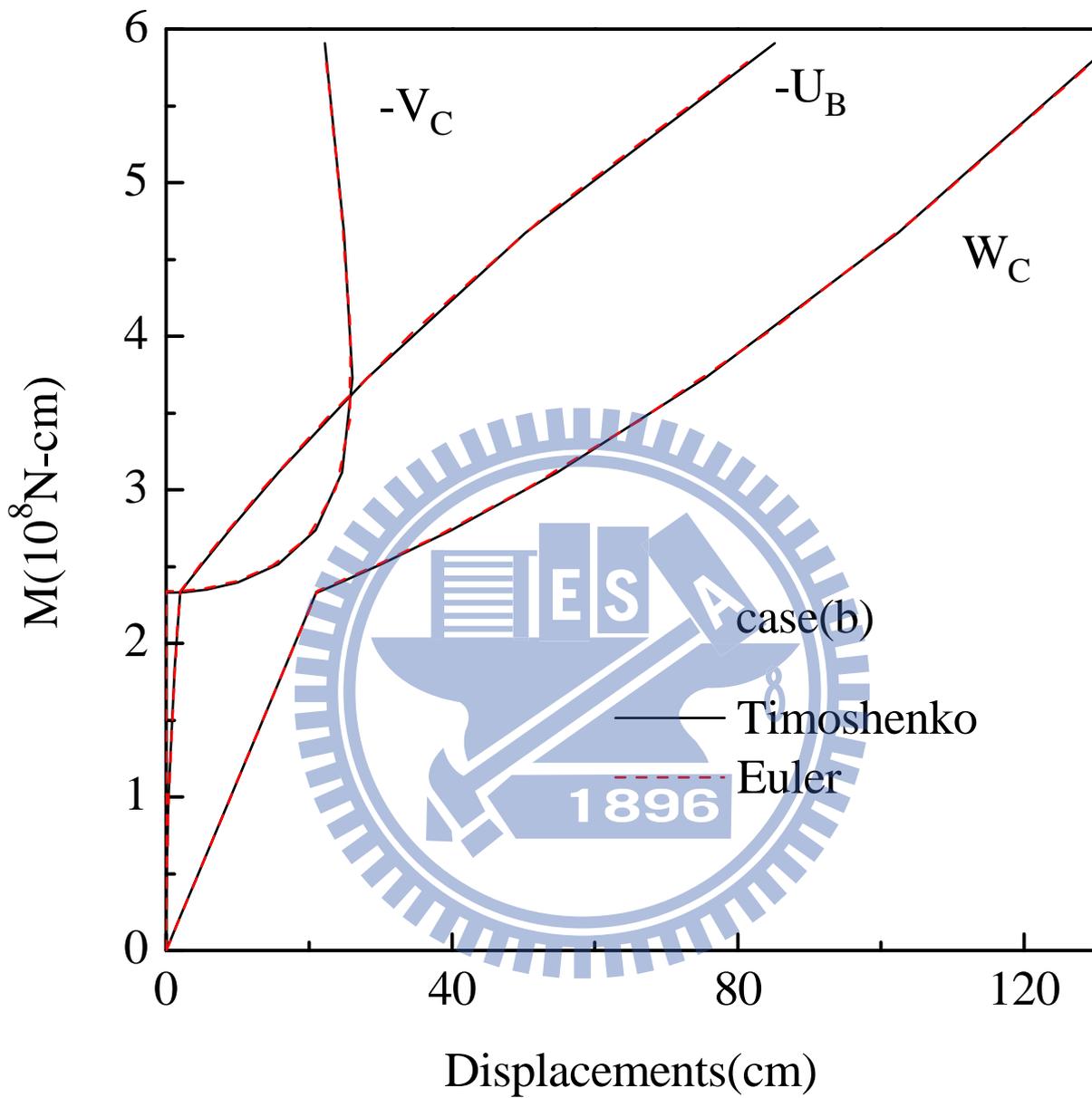


圖 4.25 簡支梁兩端皆為抑制翹曲受均勻彎矩的負荷-位移曲線圖

(例題八： $W10 \times 100$ ， $L = 610 \text{ cm}$)

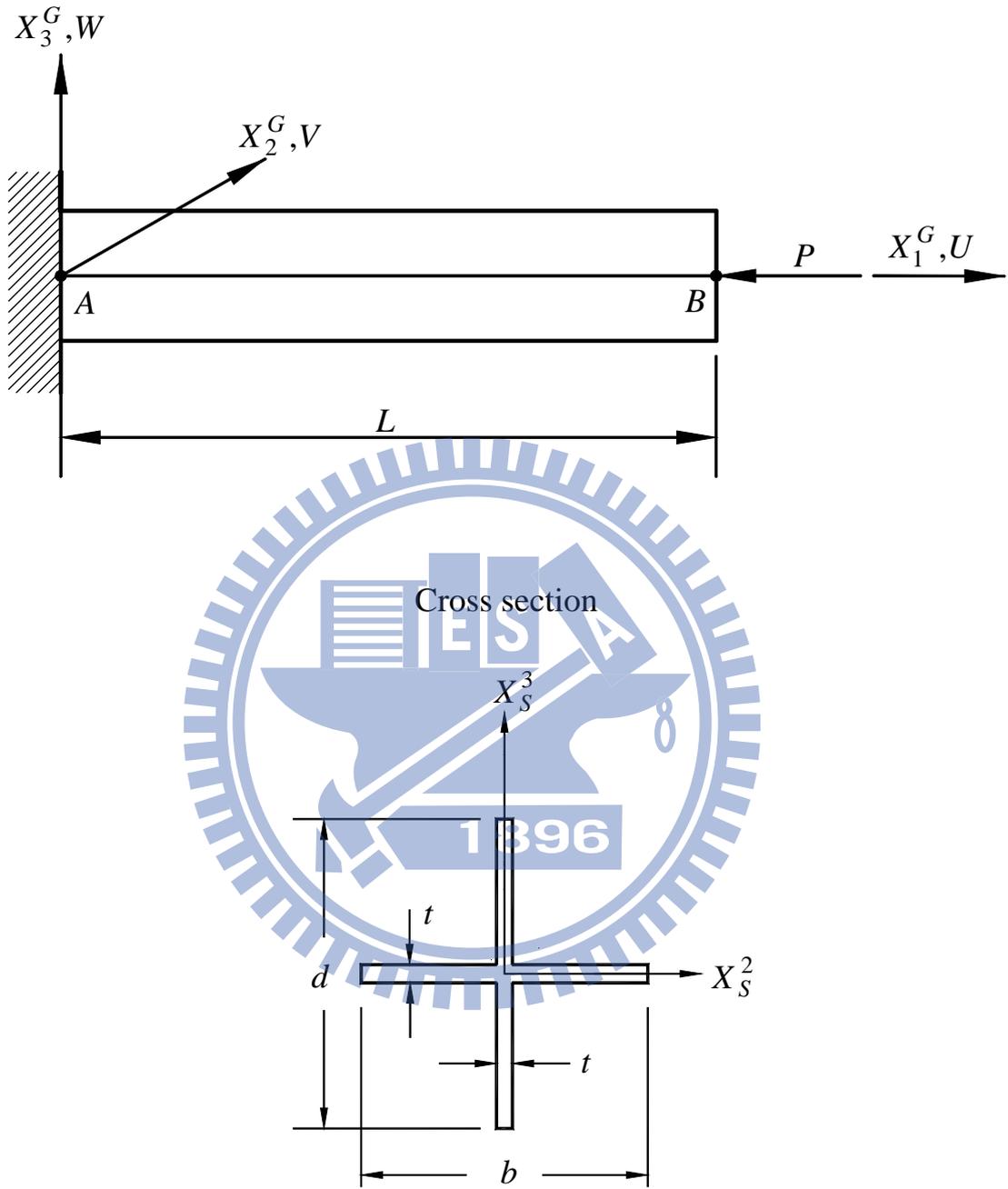


圖 4.26 懸臂梁末端承受一軸力之結構圖

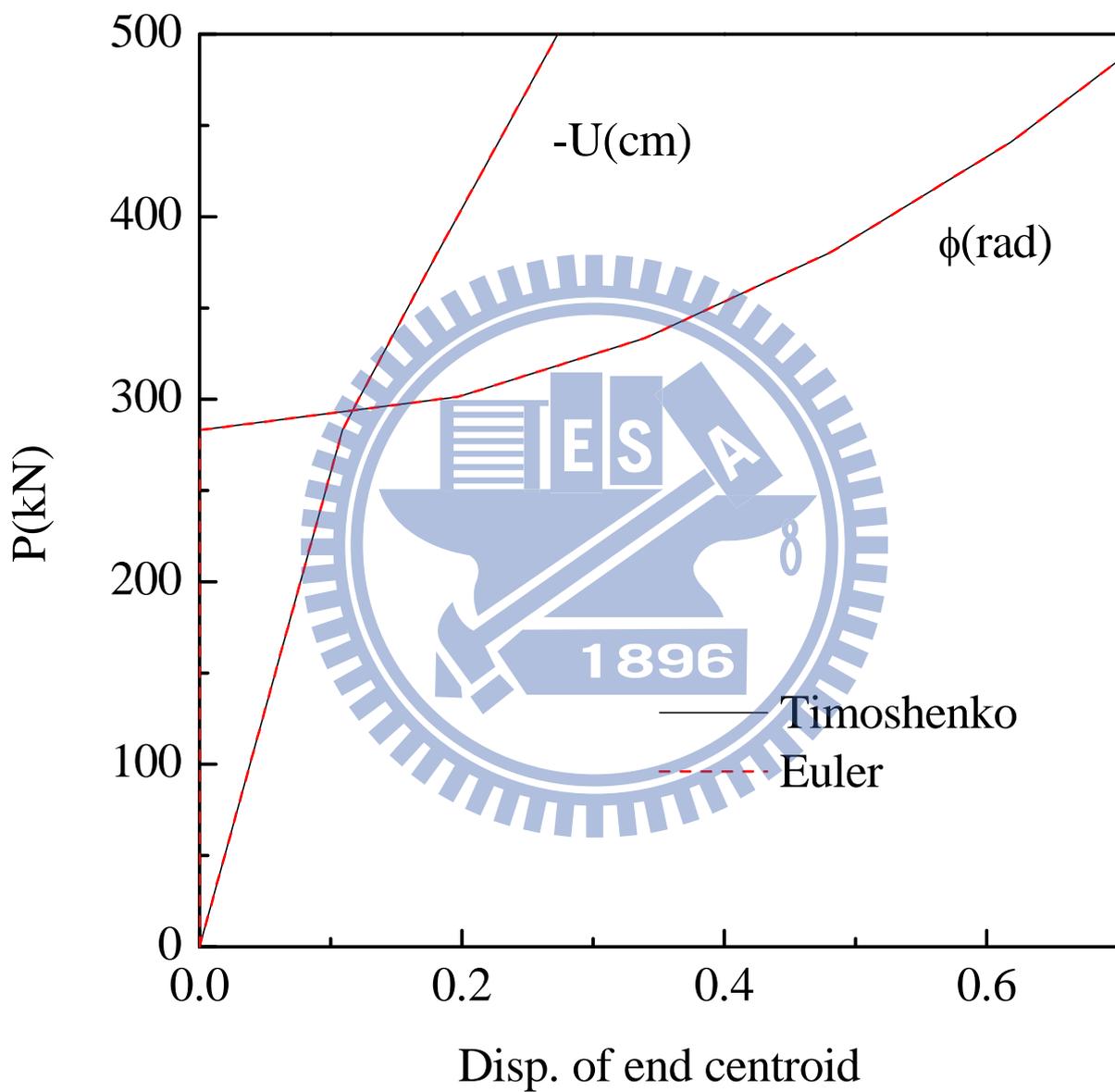


圖 4.27 懸臂梁受軸力的負荷-位移曲線圖

(例題九：十字斷面， $L = 200 \text{ cm}$)

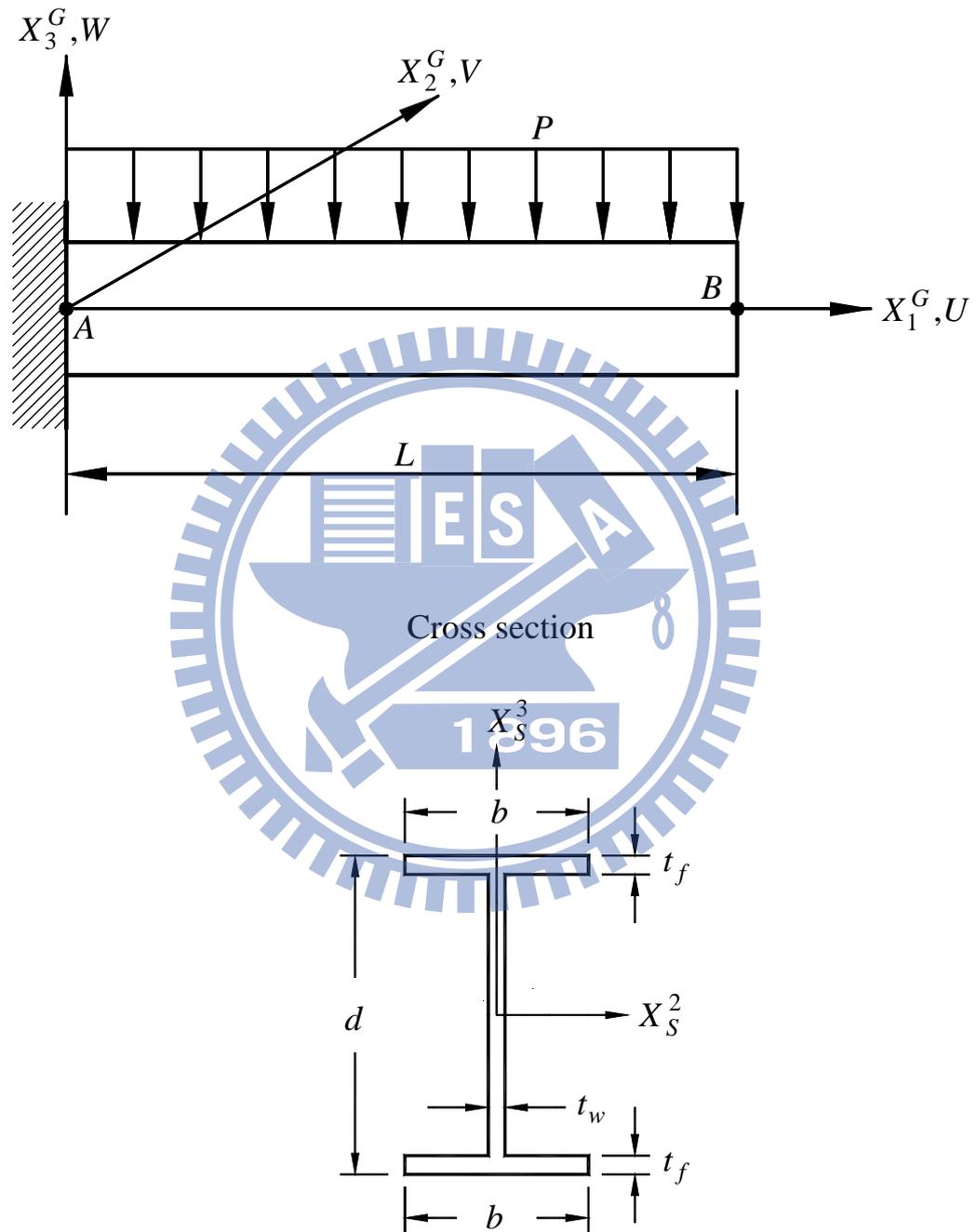


圖 4.28 懸臂梁承受均佈載重之結構圖

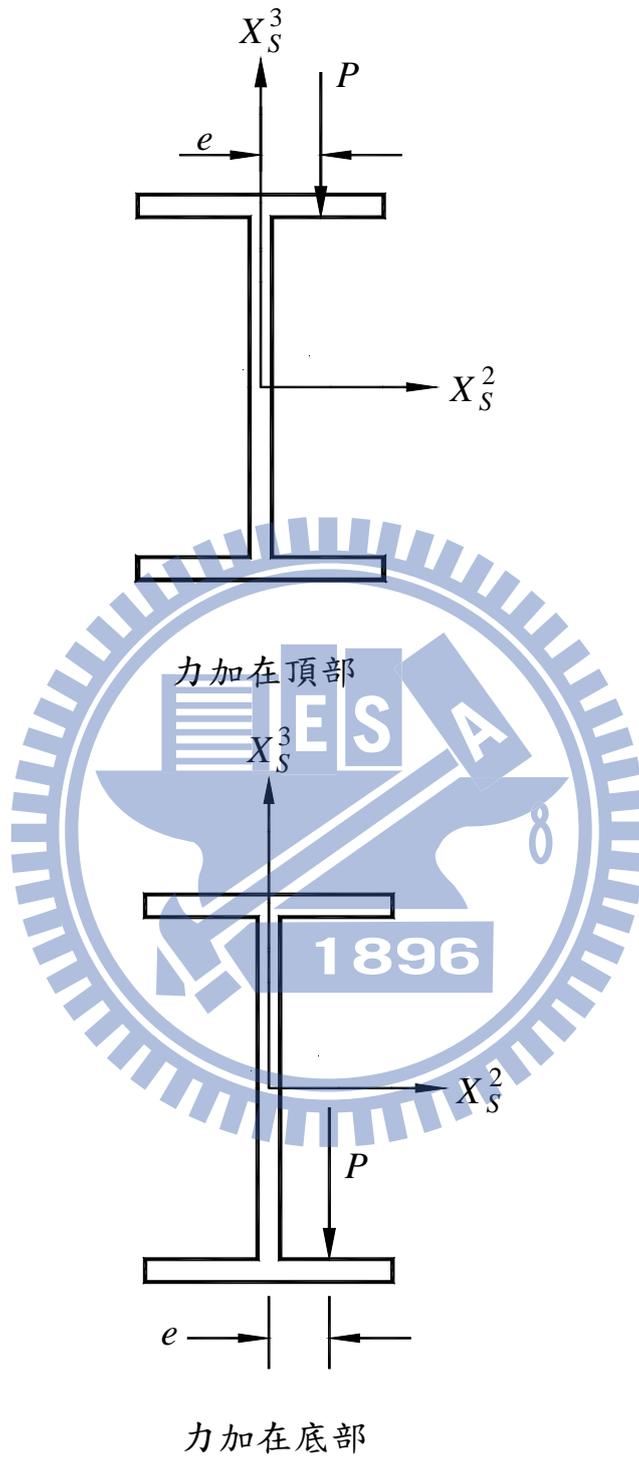


圖 4.29 偏心力施加位置示意圖

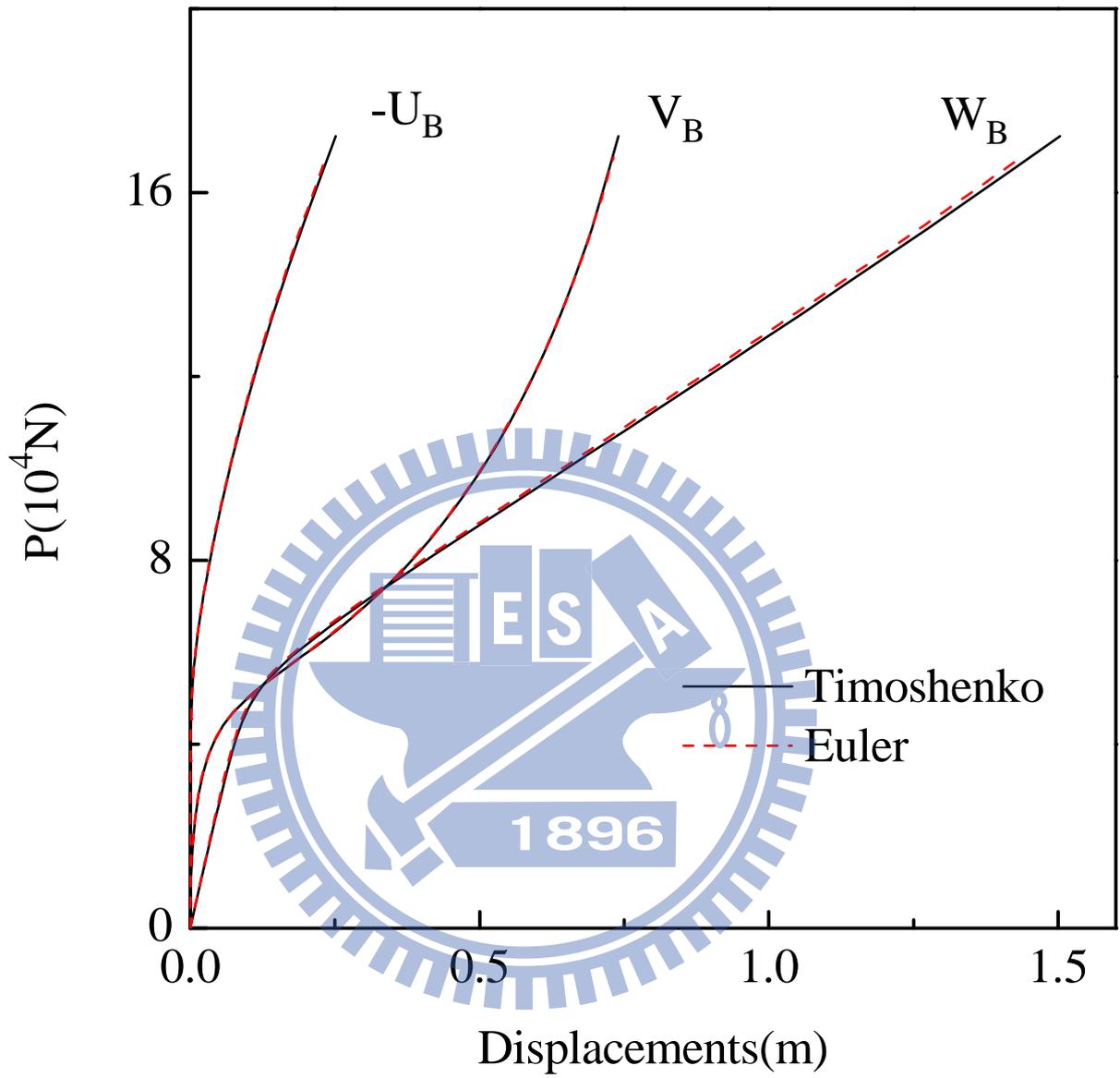


圖 4.30 懸臂梁頂部受偏心分佈載重負荷-位移曲線圖

(例題十：I 形斷面， $L = 8 \text{ m}$)

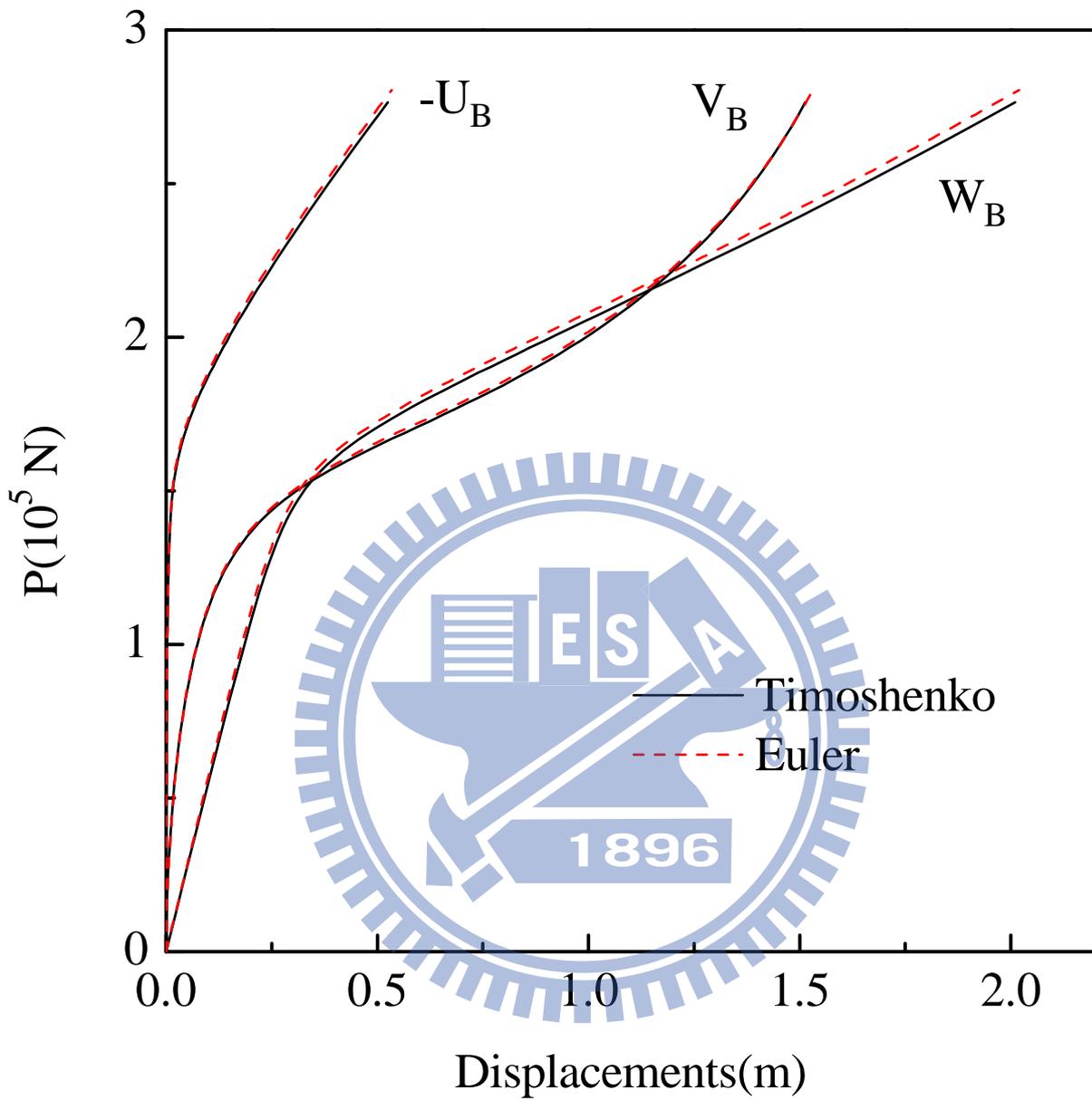


圖 4.31 懸臂梁底部受偏心分佈載重負荷-位移曲線圖

(例題十：I 形斷面， $L = 8 \text{ m}$)

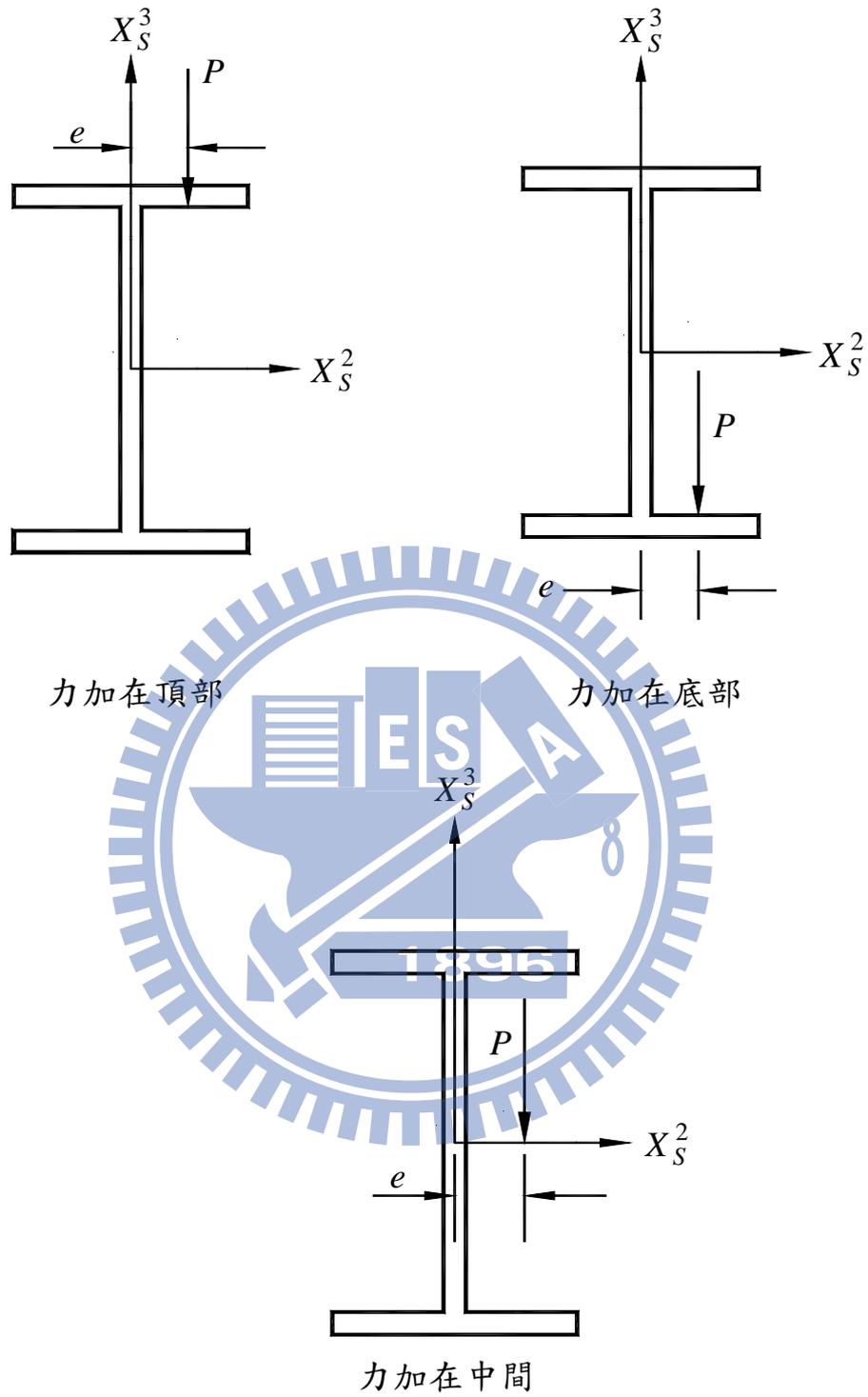


圖 4.32 偏心力施加位置示意圖

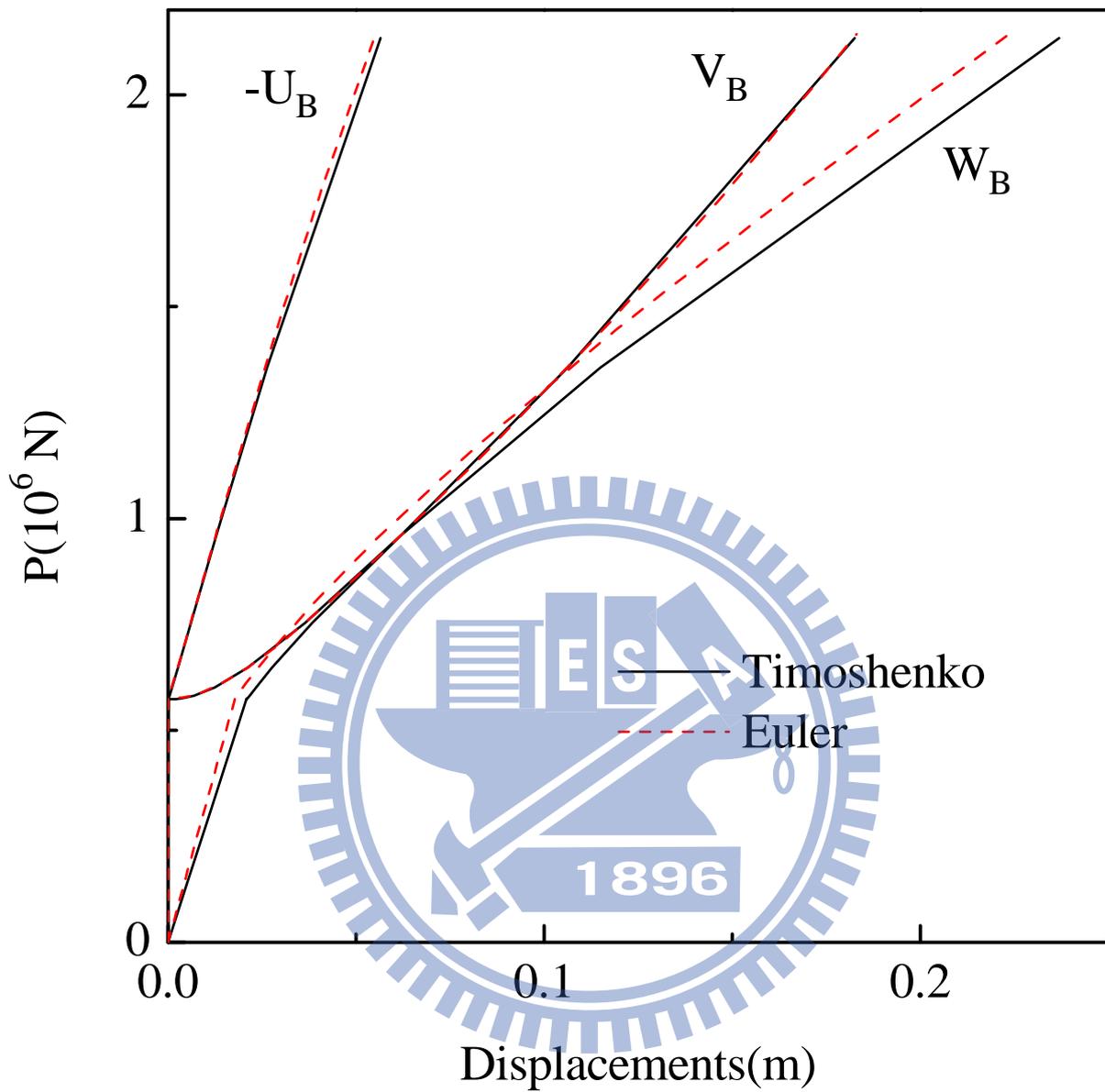


圖 4.33 懸臂梁自由端斷面頂部受集中載重負荷-位移曲線圖

(例題十一：I 形斷面， $L = 3 \text{ m}$)

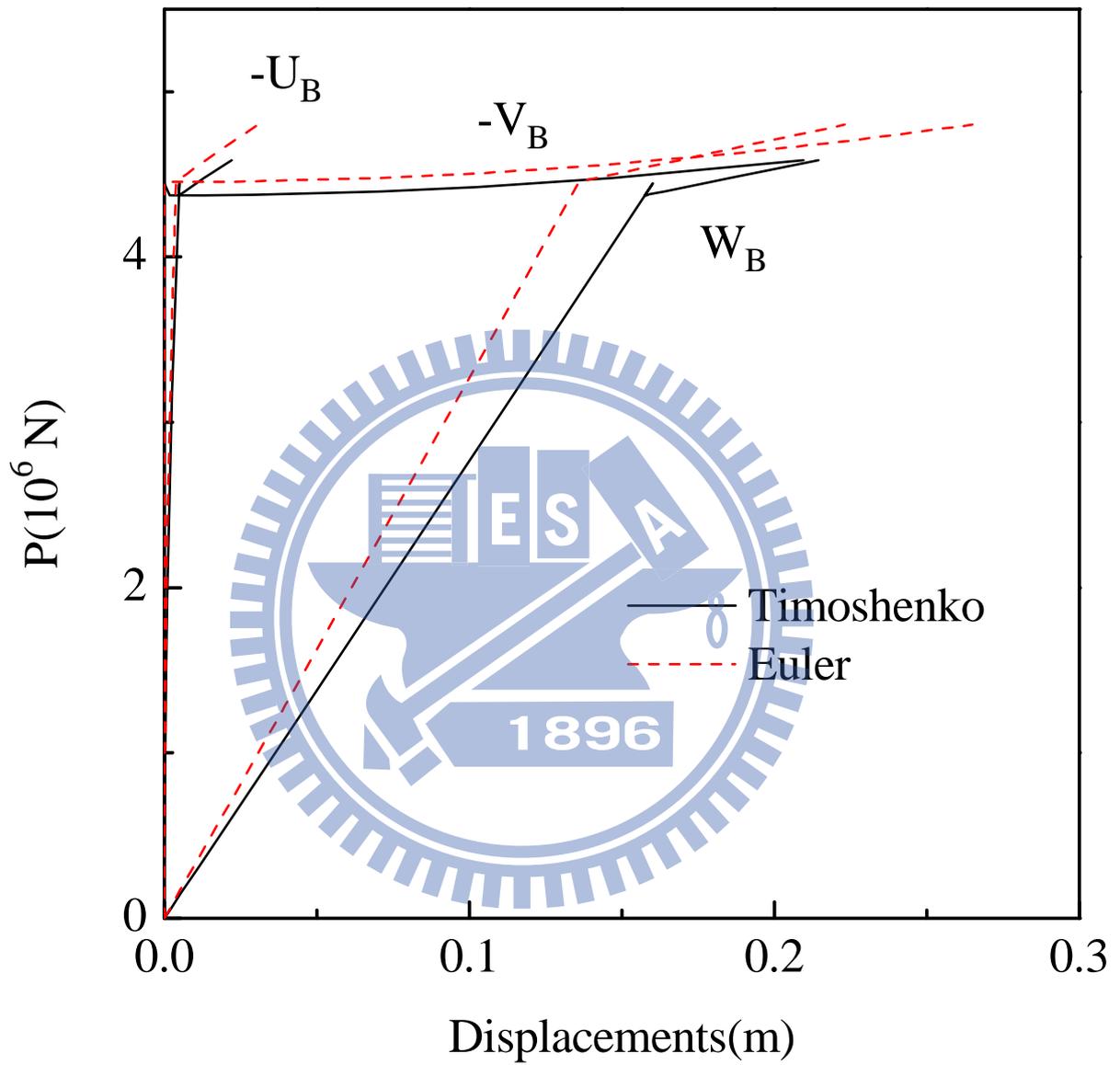


圖 4.34 懸臂梁自由端斷面底部受集中載重之負荷-位移曲線圖

(例題十一：I 形斷面， $L = 3\text{ m}$)

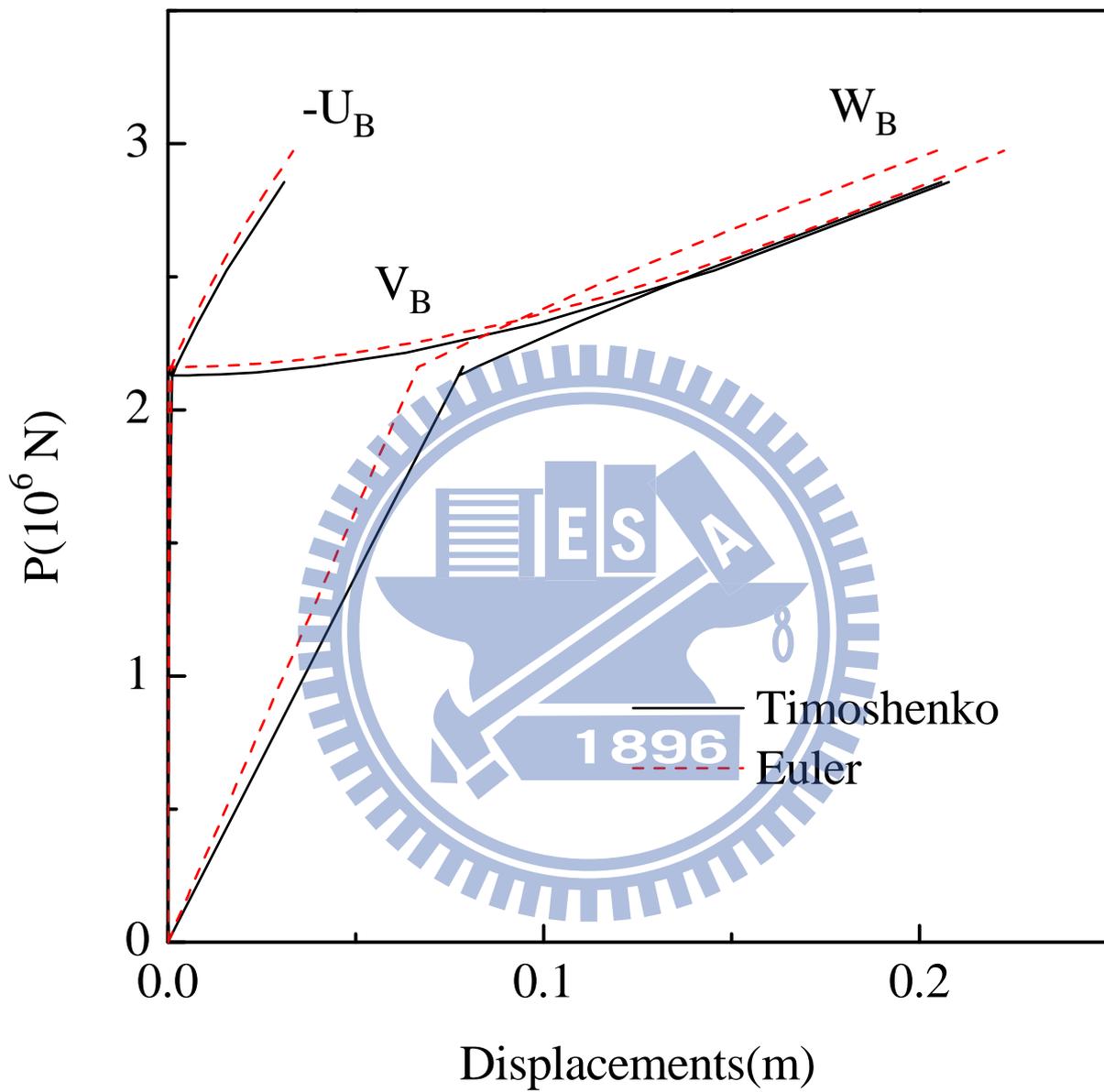


圖 4.35 懸臂梁自由端斷面中間受集中載重之負荷-位移曲線圖

(例題十一：I 形斷面， $L = 3 m$)