

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩 士 論 文

雙對稱斷面薄壁梁之幾何非線性動態分析

Geometric Nonlinear Dynamic Analysis of Doubly Symmetric
Thin-walled Beams

研 究 生：林琮棋

指導教授：蕭國模 博士

中 華 民 國 一 百 零 二 年 九 月

雙對稱斷面薄壁梁之幾何非線性動態分析

Geometric Nonlinear Dynamic Analysis of Doubly Symmetric
Thin-walled Beams

研 究 生：林琮棋

Student：Tsung-Chi Lin

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國 立 交 通 大 學

機械工程學系碩士班

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一 百 零 二 年 九 月

雙對稱斷面薄壁梁之幾何非線性動態分析

Geometric Nonlinear Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled Beam

研究生：林琮棋

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

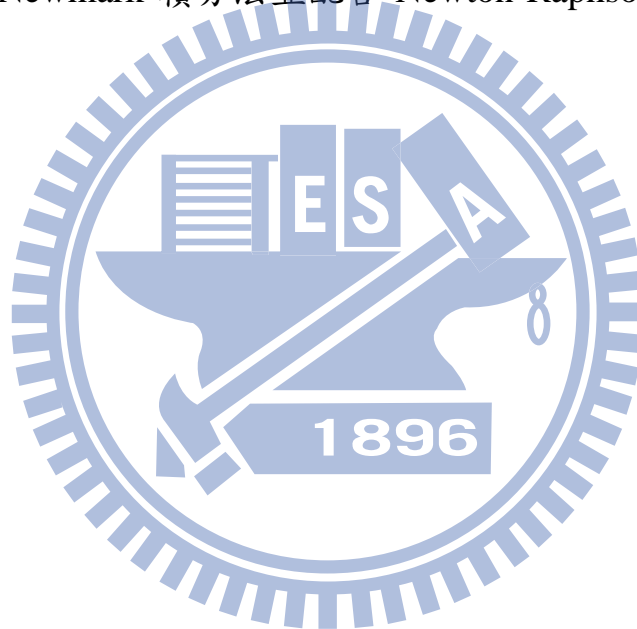
摘要

本文的主要目的是以共旋轉有限元素法推導一個三維梁元素，並探討三維雙對稱薄壁梁的非線性動態反應。本文提出一個使用顯積分法解含旋轉自由度之非線性運動方程式的數值程序，並比較使用顯積分法及隱積分法求解非線性運動方程式之效率及準確性。

本文使用共旋轉有限元素法推導一個兩個節點，每個節點有七個自由度的梁元素，並在梁元素當前的變形位置上建立元素座標，本文利用非線性梁理論、d'Alembert 原理和虛功原理及一致性二階線性化在當前的元素座標上推導梁元素的節點變形力、節點慣性力。本研究使用旋轉向量來描述元素節點的旋轉，用三個旋轉參數來描述元素的變形旋轉，故推導梁元素時需要兩組節點參數，此兩組節點參數間的轉換矩陣為節點旋轉參數的函數。本文保留元素的節點變形力至節點參數之二次項，保留元素的節點慣

性力至節點參數之零次項及由兩組節點參數的轉換矩陣引進的節點參數一次項。元素的剛度矩陣是由元素的節點變形力對節點參數的微分求得，元素的慣性矩陣是由元素的節點慣性力對節點參數及節點參數對時間之微分的全微分求得。

本研究用文獻上的例題說明本研究推導之梁元素的正確性及本文提出之顯積分法的數值程序的可行性。本研究並以數值例題探討慣性力及慣性矩陣中之轉換矩陣及還有慣性矩陣中不同的項對非線性動態分析之效率及準確性的影響。本研究也以數值例題比較使用顯積分法的中央差分法與使用的隱積分法的 Newmark 積分法並配合 Newton-Raphson 增量迭代法之效率及準確性。



Geometric Nonlinear Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled Beam

Student : Tsung-Chi Lin

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

A co-rotational finite element formulation for the geometrically nonlinear dynamic analysis of doubly symmetric thin-walled beam with large rotations but small strain is presented. A numerical procedure based on the central difference method is proposed for the solution of the nonlinear equations of motion with rotation degrees of freedom.

The element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the centroid of the end cross sections of the beam element and the centroid axis is chosen to be the reference axis. The kinematics of the beam element is described in the current element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. The deformation of the beam element is determined by the displacements of the centroid axis and the rotations of element cross section. Three rotation parameters are defined to describe the relative orientation between the element cross section coordinate system rigidly tied to the unwrapped cross section and the current element coordinate system. A rotation vector is used to represent the finite rotation of a base coordinate system rigidly to each node of the

discretized structure. The relation among the variation of the three rotation parameters, three infinitesimal rotations about the axes of the current element coordinate system, and the rotation vector is derived. Three set of nodal parameters are employed here for the determination of the displacement fields of the element and for the assembly of the structural equations.

The element deformation nodal forces and inertia nodal forces are systematically derived by the d'Alembert principle, the virtual work principle and consistent second order linearization in the current element coordinates. The element stiffness matrix may be obtained by differentiating the element deformation nodal forces with respect to the element nodal parameters and the element inertia matrices may be obtained by differentiating the element inertia nodal forces with respect to the element nodal parameters, and their first and second time derivatives.

An incremental-iterative method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson method, and an incremental method based on the central difference method are employed here for the solution of the nonlinear equations of motion. Numerical examples are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method. The possibility to simplify the tangent inertia matrix is investigated. The accuracy and efficiency of the Newmark method and the central difference method are investigated and compared.

誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士這兩年在學業上的指導以及生活上的照顧，不僅使得本文能夠順利完成，另外對於日常生活知識及健康有更多的了解，在此致上最高的敬意和謝意。同時也感謝金大仁老師、尹慶中老師擔任口試委員，對本文提出了寶貴的建議。非常感謝黃楚璋學長這兩年來對於學業的細心指導及日常生活的照顧，感謝蔡明旭學長、許彤羽學姊在課業上的幫助，感謝沈佳鴻同學、莊士緯同學、學弟林群禮、學弟高嘉鴻的朝夕相處以及課業上的相互討論，使我這兩年能順順利利的度過，在我的生活上亦幫助很多，十分感謝你們。

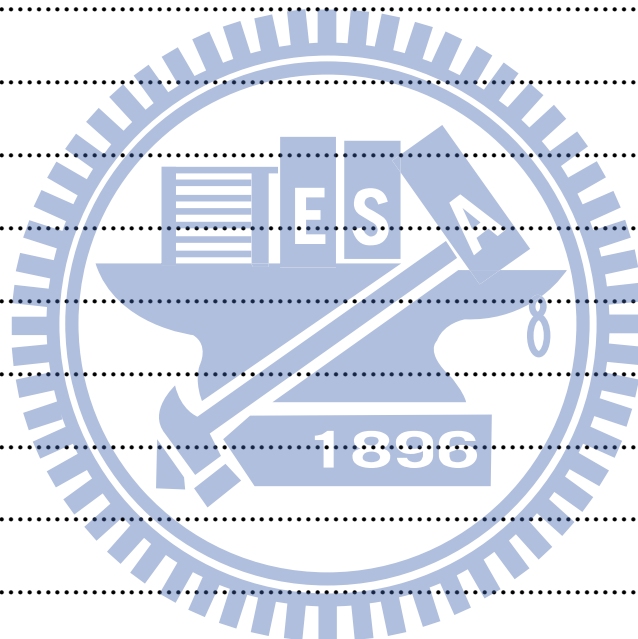
最後要感謝我的父母、阿公、阿嬤、姊姊及親戚的鼓勵，還有新竹的朋友在兩年來的互相鼓勵及照顧，使我能完成這段學業，在此以此成果獻給所有關心我的人。



目錄

中文摘要	I
英文摘要	III
誌謝	V
目錄	VI
表目錄	VIII
圖目錄	IX
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	5
2.1 基本假設	5
2.2 座標系統描述	5
2.3 旋轉向量	7
2.4 Euler 梁的變形描述	9
2.5 Euler 梁的應變、速度、加速度	15
2.5.1 梁的應變	15
2.5.2 梁的速度與加速度	17
2.5.3 梁的位置向量與應變的變分	18
2.6 元素節點內力之推導	20
2.6.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 的推導	23
2.6.2 等效節點慣性力 \mathbf{f}_θ^I 的推導	25
2.7 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導	27
2.8 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣	34
2.9 系統運動方程式	35
第三章 數值計算方法及程序	37

3.1 Newmark 直接積分法	37
3.1.1 Newmark 直接積分法	37
3.1.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme.....	39
3.2 中央差分法	40
第四章 數值例題與結果.....	43
第五章 結論	56
參考文獻.....	58
附表	63
附圖	75
附錄 A	150
附錄 B	153
附錄 C	155
附錄 D	157
附錄 E.....	160
附錄 F.....	164
附錄 G.....	166
附錄 H.....	167



表目錄

表一 例題一 Newmark 法在 A_{ij} 之迭代次數.....	63
表二 例題一 CDM 法在 B_i 之容許最大時間增量.....	64
表三 例題三之 I 型斷面性質	65
表四 例題五之 I 型斷面性質	66
表五 例題六之 I 型斷面性質	67
表六 例題七之矩型斷面性質	68
表七 例題七之週期 T 與最大位移 w_{\max}	69
表八 例題八 兩個元素之質心位置分析.....	70
表九 例題八 十個元素之質心位置分析.....	71
表十 例題九之矩型斷面性質.....	72
表十一 例題九質心位置分析.....	73
表十二 例題十一之 I 型斷面性質	74

圖目錄

圖一	元素座標與元素截面座標.....	75
圖二	旋轉向量圖.....	76
圖三	剛性桿受力作用機制圖.....	77
圖四	中央差分法示意圖.....	78
圖五	I 型斷面示意圖.....	79
圖六	例題一懸臂直角梁之幾何及受力圖.....	80
圖七	例題一 Newmark 法元素數不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較	81
圖八	例題一 Newmark 積分法 A 點在 X_3^G 方向之位移.....	82
圖九	例題一 Newmark 積分法 B 點在 X_3^G 方向之位移.....	83
圖十	例題一 Newmark 法速度項影響之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較	84
圖十一	例題一數值方法不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較.....	85
圖十二	例題一 CDM 法元素數不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較.....	86
圖十三	例題二旋轉圓盤之幾何及受力圖.....	87
圖十四	例題二旋轉圓盤之初始速度.....	88
圖十五	例題二 Newmark 法之旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度.....	89
圖十六	例題二旋轉圓盤之角速度變化過程.....	90
圖十七	例題二旋轉圓盤中心在 XY 平面的運動軌跡.....	91
圖十八	例題二旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度.....	92
圖十九	例題三 I 型斷面梁之幾何及受力圖.....	93
圖二十	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (a)).....	94
圖二十一	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (b)).....	95
圖二十二	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (c)).....	96

圖二十三	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (d))	97
圖二十四	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (e))	98
圖二十五	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (f))	99
圖二十六	例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (g))	100
圖二十七	例題四 I 型斷面懸臂梁之幾何及受力圖	101
圖二十八	例題四 I 型斷面懸臂梁之偏心受力於頂部圖(Case a)	102
圖二十九	例題四 I 型斷面懸臂梁之偏心受力於底部圖(Case b)	102
圖三十	例題四 B 點在 X_1^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03 m$)	103
圖三十一	例題四 B 點在 X_2^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03 m$)	104
圖三十二	例題四 B 點在 X_3^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03 m$)	105
圖三十三	例題四 B 點之負荷一位移曲線圖(Case (a) $e = 0.03 m$)	106
圖三十四	例題四 B 點在 X_1^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03 m$)	107
圖三十五	例題四 B 點在 X_2^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03 m$)	108
圖三十六	例題四 B 點在 X_3^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03 m$)	109
圖三十七	例題四 B 點之負荷一位移曲線圖(Case (b) $e = 0.03 m$)	110
圖三十八	例題四 B 點之負荷一位移曲線圖	111
圖三十九	例題四 B 點之負荷一位移曲線圖	112
圖四十	例題五 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖	113
圖四十一	例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移	114
圖四十二	例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移	115
圖四十三	例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移	116

圖四十四	例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之負荷一位移曲線圖.....	117
圖四十五	例題六 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖	118
圖四十六	例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移	119
圖四十七	例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移	120
圖四十八	例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之負荷一位移曲線圖.....	121
圖四十九	例題七矩形斷面固端梁之幾何及受力圖.....	122
圖五十	例題七中點 C 之位移(Case (a)).....	123
圖五十一	例題七中點 C 之位移至 $t=3.5 \times 10^{-2}$ (sec)(Case (a)).....	124
圖五十二	例題七數值方法不同之中點 C 位移(Case (a))	125
圖五十三	例題七元素數不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b))	126
圖五十四	例題七元素數不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b))	127
圖五十五	例題七元素數不同中點 C 的轉角(Case (b)).....	128
圖五十六	例題七數值方法不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b))	129
圖五十七	例題七數值方法不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b))	130
圖五十八	例題七數值方法不同中點 C 的轉角(Case (b))	131
圖五十九	例題八兩端加圓盤之自由梁之幾何及受力圖.....	132
圖六十	例題八 Newmark 法 B 點之位移	133
圖六十一	例題八 Newmark 法 B 點之位移	134
圖六十二	例題八數值方法不同之 B 點之位移	135
圖六十三	例題九三維矩形斷面梁之幾何及受力圖.....	136

圖六十四	例題九 E 點之位移	137
圖六十五	例題九 質心在 X_2^G 位移	138
圖六十六	例題十 懸臂彎曲梁之幾何及受力圖	139
圖六十七	例題十 Newmark 法自由端之位移	140
圖六十八	例題十 數值方法不同之自由端位移	141
圖六十九	例題十一 直角懸臂梁之幾何及受力圖	142
圖七十	例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$)	143
圖七十一	例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$ $Q = 0.001P$)	144
圖七十二	例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$ $Q = 0.01P$)	145
圖七十三	例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$)	146
圖七十四	例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$ $Q = 0.001P$)	147
圖七十五	例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$ $Q = 0.01P$)	148
圖七十六	例題十一 C 點之負荷—位移曲線圖	149

第一章 緒論

三維梁在所有工程系統中皆是很重要的元件，在機械及航空工業中皆有很廣泛的應用。這些結構在使用中，常伴隨著高速旋轉及大變形，所以在分析設計時，便必須考慮其幾何非線性下的動態反應。

學術上有許多探討非線性三維梁動態反應的研究[1-12]，而這些研究通常是以 Newmark 積分法[13]並搭配 Newton-Raphson 法迭代作計算。如文獻[1]中使用 Conserving energy 其主要原理於文獻[2,3]，搭配 The mid point scheme 這建立在 Newmark 積分法的變形。

文獻[4]使用 Co-rotational formulation，由線性元素的移動動能及轉動動能求得慣性力及慣性矩陣，並利用不同的方式表示旋轉參數及初始增量探討運算效率，並提出陀螺矩陣對於迭代次數之改善。

文獻[5]以建立在文獻[6]Co-rotational formulation 提出依簡單有效的梁元素及數值程序來分析三維梁的動態問題，但其梁元素並非由完整之非線性梁理論推導，變形力只考慮軸向應變對撓曲力之耦合，而慣性力僅考慮陀螺效應的速度耦合項。

文獻[7,8]以 Co-rotational formulation 及完整之幾何非線性梁理論推導梁元素，此梁元素為使用二個節點，十二個自由度，並無考慮翹曲的自由度，並利用 D'Alembert 原理及虛功原理求得元素節點變形力及慣性力，變

形力保留至節點參數二次項，慣性力則忽略變形對其之影響。文獻[7,8]使用旋轉向量來描述元素節點的旋轉，但用三個旋轉參數來描述元素的變形旋轉，所以在推導梁元素需要兩組節點參數，此兩組節點參數的轉換矩陣為節點旋轉參數的函數，文獻[7,8]不考慮轉換矩陣對慣性力之影響。

文獻[9,10]以文獻[8]之推導為基礎，探討動態分析之薄壁梁，此梁元素二個節點，十四個自由度，多考慮翹曲的自由度，文獻[10]所提，非線性動態分析較無文獻探討翹曲對動態分析之影響。

根據本作者所知，探討三維薄壁梁之動態分析研究很少，雖然如文獻[9,10]之探討，並非完整之慣性矩陣推導，故本研究將使用共旋轉有限元素法(Co-rotational finite element formulation)並配合數值方法 Newmark 積分法來探討非線性三維梁的動態分析，本文與文獻[7-10]皆在推導慣性力及慣性矩陣時，將慣性項與變形之耦合忽略，但考慮轉換矩陣對慣性力之影響，而文獻[7-10]皆無考慮陀螺質量矩陣，故本研究將加入陀螺質量矩陣。

而在三維梁結構之非線性動態反應時，我們需使用解非線性運動方程式的數值計算方法，一般使用直接積分法(Direct integration method)。所謂直接積分法[13]，也就是直接處理積分過程，利用原運動方程式搭配積分法對速度加速度之簡化假設，而不是先將運動方程式利用數學轉換變成不同形式作運算。

直接積分法又分為顯積分法(Explicit method)[14]及隱積分法(Implicit

method)[13]，顯積分法常為條件穩定(Conditionally stable)，其原理為將運動方程式建立在 t 時刻，推算 $t + \Delta t$ 時刻的待求物理量。目前常用的顯積分法有中央差分法(Central difference method)、runge-kutta 法。而隱積分法常為無條件穩定(Unconditionally stable)，計算上假設運動方程式於待求物理量之 $t + \Delta t$ 時刻達平衡狀態，計算待求物理量時，除了 t 時刻之前的已知物理量外，在某種程度上必須具備 $t + \Delta t$ 時刻的物理量，於 $t + \Delta t$ 時刻之平衡位置，速度及加速度由迭代法取得。目前常用的隱積分法有 Newmark 法、Wilson- θ 法及 Houbolt 法，還有許多以 Newmark 積分法所作的變形，如 Average acceleration、Linear acceleration 及 Fox-Goodwin formula[13]，在一般使用顯積分法為條件的研究中，較適合應用在非常短暫時間的衝擊[15]，如文獻[16]中，為了求出微型行星齒輪組三維的衝擊分析下其行星臂震盪情形及各個嚙合齒對間之負載分配、接觸齒面應力分布，利用有限元素法分析，在求解動態過程中及採用顯積分法中的中央差分法。或是高度非線性的分析，如文獻[17]中所提，在研究門門的接合情況時所用到較大的 Finite Element Model 顯積分所運算出的結果會比隱積分的結果更符合實際的狀況。

文獻[18]中所提及，在三維含有有限旋轉中的研究中較少搭配顯積分法作計算，就本作者所知，也僅有文獻[19]中使用顯積分法搭配新的計算方法 VFIFE(Vector form intrinsic finite element)應用在三維的網狀型的構架建築

上，此方法與 FEM(Finite element method)大致相似。

非線性三維梁的動態分析文獻上，本作者所知皆無比較使用顯積分法及隱積分法，而文獻[20]所提，在顯積分法中，中央差分法在計算二階運動方程中擁有最高的精確度及穩定度，故在數值計算選擇中央差分法，並與隱積分法的 Newmark 積分法作比較。

本研究用文獻上的例題說明本研究推導之梁元素的正確性及本文提出之顯積分法的數值程序的可行性。本研究並以數值例題探討慣性力及慣性矩陣中之轉換矩陣及還有慣性矩陣中不同的項對非線性動態分析之效率及準確性的影響。本研究也以數值例題比較使用顯積分法的中央差分法與使用的隱積分法的 Newmark 積分法並配合 Newton-Raphson 增量迭代法之效率及準確性。

第二章 理論推導

本研究採用共旋轉有限元素法(Co-rotational finite element formulation)探討非線性三維梁之動態分析。本章中將推導一個兩節點，十四個自由度的梁元素，本文對梁變形的假設，梁變形機制的描述及元素的推導方法和文獻[22, 23]相似。為了本文的完整性，本章將梁元素基本假設、座標系統、梁變形的描述方法及元素的推導方法，簡要敘述如下：

2.1 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的基本假設：

- (1) 梁為細長的等斷面、雙對稱梁，且Euler-Bernoulli假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (4) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。

2.2 座標系統描述

本研究是使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素，元素的節點位於其兩端未翹曲斷面的形心。為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件，本文中共定義了四套直角座標系統：

- (1) 固定總體座標系統(圖一)， $X_i^G (i=1, 2, 3)$

系統的節點座標、方位、速度、加速度、角速度、角加速度及其他座標系統之座標軸的方向餘弦，皆在此座標系統中定義。

(2) 元素座標系統(圖一)， $x_i (i=1, 2, 3)$

此座標系統附屬在每一梁元素上，其原點位於該元素的節點1上， x_1 軸通過該元素的兩端節點(1, 2)， x_2 軸與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 軸與 x_3 軸，可由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定，是分別將位於節點 1, 2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。梁元素的變形、速度、加速度、角速度、角加速度、變形節點內力、慣性節點內力、元素剛度矩陣以及慣性矩陣，皆在此座標系統中建立。

(3) 元素斷面座標系統(圖一)， $x_i^S (i=1, 2, 3)$

此座標系統與元素的斷面一起平移和旋轉，其原點剛接於未翹曲斷面的剪力中心， x_1^S 軸為未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 軸與 x_3^S 軸分別與未翹曲斷面的主軸重合。元素的變形是由斷面座標相對於元素座標的旋轉來決定。

(4) 負荷基底座標系統， $X_i^P (i=1, 2, 3)$

此座標系統是用來描述與結構變形位置相關的作用力機制。該作用力機制造成的系統節點外力及力矩，和負荷剛度矩陣(load stiffness matrix)，皆建立在此座標系統中。此座標系統的原點剛接於與結構變形位置相關的作用力節點上。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與元

素座標 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 、元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{x_1^S, x_2^S, x_3^S\}$ 、負荷基底座標 $\mathbf{X}^P = \{X_1^P, X_2^P, X_3^P\}$ 的關係可表示如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x} \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GP} \mathbf{X}^P\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 、 \mathbf{A}_{GP} 分別代表元素座標、元素斷面座標、負荷基底座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.3 旋轉向量及時間微分

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖二所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成：

$$\begin{aligned}\mathbf{b}' &= \mathbf{b} \cos \phi + (1 - \cos \phi)(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{e} + \sin \phi (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{b}) \\ &= \left[\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) \right] \mathbf{b} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{b}\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， \mathbf{R} 表旋轉矩陣， \mathbf{I} 為 3×3 單位矩陣。

由(2.3.1)式 \mathbf{b}' 對時間的微分可表示成

$$\frac{d\mathbf{b}'}{dt} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{b} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^t \mathbf{b}'\tag{2.3.2}$$

因 \mathbf{b}' 的長度固定，所以其對時間的微分可表示成

$$\frac{d\mathbf{b}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}' \quad (2.3.3)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 為角速度向量。

因 $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t$ 為一反對稱矩陣，從(2.3.2)式和(2.3.3)式可得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t \quad (2.3.4)$$

由(2.3.1)及(2.3.4)式可得 $\boldsymbol{\omega}$ 和旋轉向量 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 對時間的一次微分有以下關係:(其推導詳見(附錄 A)及[21])

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.5)$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\phi}) = [\mathbf{I} + a_1(\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + b_1\boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I})] \quad (2.3.6)$$

$$a_1 = \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}, \quad b_1 = \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) \quad (2.3.7)$$

當旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}$ 有一微小變量 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 時會使向量 \mathbf{b}' 會繞 $x_i (i=1,2,3)$ 軸做微小旋轉 $\delta\phi_i$ ， $\delta\boldsymbol{\phi}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的關係和 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 與 $\boldsymbol{\omega}$ 的關係相同[21]，即

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \Gamma(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.3.8)$$

將(2.3.5)式對時間微分可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\Gamma}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}} + \Gamma(\boldsymbol{\phi})\ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.9)$$

$$\dot{\Gamma}(\boldsymbol{\phi}) = \dot{a}_1(\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + \dot{b}_1\boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + a_1(\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{I}) + b_1\dot{\boldsymbol{\phi}} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + b_1\boldsymbol{\phi} \times (\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{I}) \quad (2.3.10)$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 為角加速度， $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ 為旋轉向量對時間的兩次微分。

由(2.3.7)式可知當 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ 時， $\Gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ 、 $(\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{I})\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}$ ，故

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3.12)$$

即在旋轉向量 $\phi=0$ 時，其對時間的一次，二次微分之值，等於角速度、角加速度。

當 $\phi \ll 1$ 時，可將 $\Gamma(\phi)$ 線性化並表示成近似式 $\bar{T}_{\phi\phi}$

$$\Gamma(\phi) \approx \bar{T}_{\phi\phi} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\Phi = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.13)$$

其中 $\Phi = \phi \times \mathbf{I}$

用(2.3.13)式可將(2.3.5)式、(2.3.8)式和(2.3.9)式改寫成

$$\omega = \bar{T}_{\phi\phi} \dot{\phi} \quad (2.3.14)$$

$$\delta\phi = \bar{T}_{\phi\phi} \delta\phi \quad (2.3.15)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\bar{T}}_{\phi\phi} \dot{\phi} + \bar{T}_{\phi\phi} \ddot{\phi} \quad (2.3.16)$$

由(2.3.13)式可知當 $\phi=0$ 時， $\bar{T}_{\phi\phi}=\mathbf{I}$ 、 $\dot{\bar{T}}_{\phi\phi}\dot{\phi}=0$ ，故由(2.3.14)式和(2.3.16)式可得 $\omega=\dot{\phi}$ 、 $\dot{\omega}=\ddot{\phi}$ ，即仍保有(2.3.11)式和(2.3.12)式的關係。

2.4 Euler 梁的變形描述

本文在當前的座標上描述梁元素的變形，由(2.1)節中的基本假設可知 Euler 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及其截面的旋轉來描述。

本研究採用[22]中之梁的變形機制，如圖一中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在元素座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2.4.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x)$ 、 $v(x)$ 以及 $w(x)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x)$ 、 $w(x)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 是梁斷面沿變形後形心軸的軸向扭轉率， $\theta_1(x)$ 為形心軸的扭轉角， s 為變形後形心軸的弧長， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向量，梁變形後形心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos \theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.4.3)$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.4.4)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.4.5)$$

$$\cos \theta_n = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.4.6)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} \quad , \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x} \quad , \quad \varepsilon_o = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.4.7)$$

ε_o 為形心軸的單位伸長量。

忽略扭轉翹曲的情況下，在(2.4.4)式至(2.4.7)式中， s 為節點 1 至點 P 間的形心軸在變形後的弧長，而 ε_o 為形心軸的單位伸長量(unit extension)。由梁形心軸上的任一點 P 在變形後的位置向量及式(2.4.6)與(2.4.7)，在小應變的假設情況下， $x_p(x)$ 可以表示如下

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_o)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.4.8)$$

其中 $u_1(t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零。

由梁元素的變形為小變形的假設，利用近似式

$$[(1+\varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} \approx (1+\varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2), \quad (2.4.8) \text{式可表示成}$$

$$x_p(x) = u_1 + \int_0^x (1+\varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.4.9)$$

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_1^S 與(2.4.3)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定[22]、[23]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}_\theta \quad (2.4.10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t} \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \{0, \theta_2/(\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3/(\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\} \quad (2.4.12)$$

其中 \mathbf{n}_θ 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{t} 的夾角， θ_t 為斷面繞 \mathbf{t} 的轉角。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}_i' ，如圖一所示，此時 \mathbf{e}_1' 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}_i' ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[22]、[23]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_\theta \mathbf{e}_i, \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R}_θ 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R}_θ 為 $\theta_i (i=1,2,3)$ 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

當 $\theta_i (i=1,2,3)$ 分別有一微小變化 $\delta\theta_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 $x_i (i=1,2,3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta\varphi_i (i=1,2,3)$ 而得。

$\delta\boldsymbol{\theta} = \{\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\varphi} = \{\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3\}$ 之關係可表示如下[22]、[23]：

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = [\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}] \delta\boldsymbol{\theta} = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi}^{-1} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.4.14)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\theta_3, \frac{1-\theta_3^2}{\cos\theta_n}, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \theta_2, \frac{\theta_2\theta_3}{\cos\theta_n}, \frac{1-\theta_2^2}{\cos\theta_n} \right\}$$

$$a = \frac{\theta_3(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$b = \frac{-\theta_2(1-\cos\theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

(2.4.14)式可表示如下：

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi} = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \delta\boldsymbol{\varphi} \quad (2.4.15)$$

當旋轉參數 θ_2 與 θ_3 很小時， $\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi}$ 矩陣可近似如下式

$$\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

由(2.3.15)式、(2.4.15)式及(2.4.16)式，並保留到一次項， $\delta\theta$ 與 $\delta\phi$ 的關係可表示為

$$\delta\theta = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} \delta\phi = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\phi} \delta\phi \quad (2.4.17)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

本文中在每次迭代都將旋轉向量設定為零，即 $\phi = \mathbf{0}$ ，所以 $\bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi}(\mathbf{0})$ 的值為 \mathbf{I} ， $\bar{\mathbf{T}}_{\theta\phi}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi}$ 的值相同。

將(2.4.17)式兩邊除以微小時間 Δt ，可得

$$\dot{\theta} = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} \dot{\phi} = \bar{\mathbf{T}}_{\theta\phi} \dot{\phi} \quad (2.4.19)$$

將(2.4.19)式對時間微分，並由 $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\varphi\phi} \dot{\phi} = \mathbf{0}$ 則可得

$$\ddot{\theta} = \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\theta\varphi} \bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} \dot{\phi} + \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\varphi\phi} \dot{\phi} + \bar{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \bar{\mathbf{T}}_{\varphi\phi} \ddot{\phi} = \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\theta\varphi} \dot{\phi} + \bar{\mathbf{T}}_{\theta\phi} \ddot{\phi} \quad (2.4.20)$$

將(2.4.13)式代入(2.4.2)式，利用近似式 $\cos\theta_n \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ 、 $\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡成

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.4.21)$$

$$r_1 = x_p + y(\theta_2\theta_1 - \theta_3) + z(\theta_2 + \theta_3\theta_1) + \theta_{1,x}\omega$$

$$r_2 = v + y[1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_1^2)] + z(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_1) + \theta_{1,x}\theta_3\omega$$

$$r_3 = w + y(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_1) + z[1 - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2)] - \theta_{1,x}\theta_2\omega$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.4.9)式，可

以得到形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.22)$$

$$l = L + u_2 - u_1 \quad (2.4.23)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， l 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點 1 與 2 在 x_1 方向的位移。

本文中假設梁元素形心軸的位移 v, w 與軸向扭轉角 θ_1 皆為 x 的三次 Hermitian 多項式，因此 v, w, θ_1 可表示成：

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.24)$$

$$w(x) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w'_1, w_2, -w'_2\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.4.25)$$

$$\theta_1(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.4.26)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \quad (2.4.27)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.4.28)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v'_j 與 w'_j ($j=1, 2$) 則分

別是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 與 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 在節點 j 之節點值。 θ_{1j} ($j=1, 2$) 是 θ_1 在節點 j 的節點

值， β_j ($j=1, 2$) 則是 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 為形狀函數

(shape function)。

將(2.4.23)至(2.4.25)式代入(2.4.22)式整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.4.29)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (2.4.30)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.4.31)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.4.32)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.4.33)$$

將(2.4.29)式代入(2.4.9)式整理可得

$$x_p = \mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.4.34)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.4.35)$$

2.5 Euler 梁的應變、速度、加速度

為了推導上的方便，本節中我們將先推導出梁的應變、速度與加速度以及梁的位置向量變分、應變的變分。

2.5.1 梁的應變

假如將(2.4.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標 (Lagrange coordinates)

，則 Green strains ε_{11} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 可以表示成[24]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.5.2)$$

將(2.4.9)式、(2.4.21)式帶回(2.5.2)式，可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j=1,2,3$) 如下

$$g_{11} = 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\theta_1 \theta_{2,x} + \theta_2 \theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \quad (2.5.3)$$

$$\begin{aligned}
& + z(\theta_1\theta_{3,x} + \theta_3\theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx}\omega \\
g_{12} &= (1 + \varepsilon_o)\theta_3 - y(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_3\theta_{3,x}) \\
& + z\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx}\theta_3\omega + \theta_{1,x}\theta_{3,x}\omega \\
g_{13} &= -(1 + \varepsilon_o)\theta_2 + y\left(\frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,x} + \frac{1}{2}\theta_3\theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right) \\
& - z(\theta_1\theta_{1,x} + \theta_2\theta_{2,x}) - \theta_{1,xx}\theta_2\omega - \theta_{1,x}\theta_{2,x}\omega \\
g_{21} &= \theta_1\theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x}\omega_{,y} \\
g_{22} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,y} \\
g_{23} &= \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,y} \\
g_{31} &= \theta_1\theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x}\omega_{,z} \\
g_{32} &= -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z} \\
g_{33} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}
\end{aligned}$$

將(2.5.2)式及(2.5.3)式代回(2.5.1)式，保留變形參數及其微分到二次項

可得：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.5.4-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \varepsilon_{o,x}(yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 - y\theta_1w_{,xx} + z\theta_1v_{,xx} + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2 \\
& + yzv_{,xx}w_{,xx} + \frac{1}{2}z^2w_{,xx}^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} - \theta_{1,xx}\omega(yv_{,xx} + zw_{,xx}) + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.5.4-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx})\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.5.4-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx})\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{1j}^k (j=1,2,3, k=1,2)$ 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項。

2.5.2 梁的速度與加速度：

梁的絕對速度可以由(2.4.21)式中的位置向量對時間做一次微分求得

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \{\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3\} \quad (2.5.5)$$

其中

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p + y(\dot{\theta}_2\theta_1 + \theta_2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) + z(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\theta_1 + \theta_3\dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x}\omega$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} + y(-\theta_1\dot{\theta}_1 - \theta_3\dot{\theta}_3) + z(\frac{1}{2}\dot{\theta}_2\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x}\theta_3\omega + \theta_{1,x}\dot{\theta}_3\omega$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} + y(\frac{1}{2}\dot{\theta}_2\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1) + z(-\theta_1\dot{\theta}_1 - \theta_2\dot{\theta}_2) - \dot{\theta}_{1,x}\theta_2\omega - \theta_{1,x}\dot{\theta}_2\omega$$

$$\dot{x}_p = \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{x}{L} \int_0^L (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx - \int_0^x (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx$$

$$= \mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{x}{L} \int_0^L (\mathbf{N}_b'^t \dot{\mathbf{u}}_b v_{,x} + \mathbf{N}_c'^t \dot{\mathbf{u}}_c w_{,x})dx - \int_0^x (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx$$

梁的絕對加速度可以由(2.5.5)式對時間做一次微分求得

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \ddot{r}_3\} \quad (2.5.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \ddot{x}_p + y(\ddot{\theta}_2\theta_1 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \theta_2\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3) + z(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3\theta_1 + 2\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \theta_3\ddot{\theta}_1) \\ &\quad + \dot{\theta}_{1,x}\omega \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} + y(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 - \theta_1\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 - \theta_3\ddot{\theta}_3) + z(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_2\theta_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\theta_2\ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_1) \\ &\quad + \ddot{\theta}_{1,x}\theta_3\omega + 2\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_3\omega + \theta_{1,x}\ddot{\theta}_3\omega \\ \ddot{r}_3 &= \ddot{w} + y(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_2\theta_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\theta_2\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1) + z(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 - \theta_1\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 - \theta_2\ddot{\theta}_2) \\ &\quad - \ddot{\theta}_{1,x}\theta_2\omega - 2\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_2\omega + \theta_{1,x}\ddot{\theta}_2\omega \\ \ddot{x}_p &= \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{x}{L}(\mathbf{G}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b + \dot{\mathbf{G}}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b) + \frac{x}{L}(\mathbf{G}_c^t \ddot{\mathbf{u}}_c + \dot{\mathbf{G}}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c) \\ &\quad - \int_0^x (v_{,x} \ddot{v}_{,x} + \dot{v}_{,x}^2) dx - \int_0^x (w_{,x} \ddot{w}_{,x} + \dot{w}_{,x}^2) dx \end{aligned}$$

2.5.3 梁的位置向量與應變的變分:

本文利用虛功原理及d'Alembert原理推導運動方程式，所以需要位置向量及應變的變分。由(2.4.21)式及(2.4.34)式可得

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3\} \quad (2.5.7)$$

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta x_p + \delta \theta_1(z\theta_3 + y\theta_2) + \delta \theta_2(z + y\theta_1) + \delta \theta_3(-y + z\theta_1) \\ &\quad + \delta \theta_{1,x}(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2)\omega \\ \delta r_2 &= \delta v + \delta \theta_1(-z - y\theta_1) + \delta \theta_2(\frac{1}{2}z\theta_3) + \delta \theta_3(-y\theta_3 + \frac{1}{2}z\theta_2 + \omega\theta_{1,x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_3) \\
\delta r_3 &= \delta w + \delta\theta_1(y - z\theta_1) + \delta\theta_2\left(\frac{1}{2}y\theta_3 - z\theta_2 - \omega\theta_{1,x}\right) + \delta\theta_3\left(\frac{1}{2}y\theta_2\right) \\
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_2)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta x_p = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{x}{L}(\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) - \int_0^x (v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) dx \quad (2.5.8)$$

由(2.5.4)及(2.4.29)式可以得到應變的變分

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta \varepsilon_{11}^0 + \delta \varepsilon_{11}^1 \quad (2.5.9-a)$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{11}^0 &= \delta \varepsilon_o - y \delta v_{,xx} - z \delta w_{,xx} + \delta \theta_{1,xx} \omega \\
\delta \varepsilon_{11}^1 &= \delta \varepsilon_o (\varepsilon_o + \omega \theta_{1,xx}) + \delta v_{,x} (y \varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta v_{,xx} (y^2 v_{,xx} + y z w_{,xx} + z \theta_1 - y \omega \theta_{1,xx}) + \delta w_{,x} (z \varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta w_{,xx} (y z v_{,xx} + z^2 w_{,xx} - y \theta_1 - z \omega \theta_{1,xx}) \\
&+ \delta \theta_1 (z v_{,xx} - y w_{,xx}) + \delta \theta_{1,x} (y^2 + z^2) \theta_{1,x} \\
&+ \delta \theta_{1,xx} (\omega \varepsilon_o - y \omega v_{,xx} - z \omega w_{,xx} + \omega^2 \theta_{1,xx})
\end{aligned}$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \delta \varepsilon_{12}^0 + \delta \varepsilon_{12}^1 \quad (2.5.9-b)$$

$$\delta \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2} \delta \theta_{1,x} (\omega_{,y} - z)$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{12}^1 &= \delta \varepsilon_o \left(\frac{1}{2} \omega_{,y} \theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(-\frac{1}{4} z v_{,xx} \right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left[\frac{1}{4} z v_{,x} - \frac{1}{2} \omega_{,y} z \theta_{1,x} \right] + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{4} z w_{,xx} \right) \\
&+ \delta v_{,xx} \left[\frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) \theta_{1,x} - \frac{1}{4} z w_{,x} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,x} \left[\frac{1}{2} \omega_{,y} \varepsilon_o + \frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) v_{,xx} - \frac{1}{2} z \omega_{,y} w_{,xx} + \frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,xx} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,x} \right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.5.9-c)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,z} + y)$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{13}^1 = & \delta\varepsilon_o \left(\frac{1}{2}\omega_{,z}\theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(\frac{1}{4}y v_{,xx} \right) \\ & + \delta w_{,xx} \left[-\frac{1}{4}y v_{,x} + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x} \right] \\ & + \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{4}y w_{,xx} \right) + \delta v_{,xx} \left(-\frac{1}{2}y\omega_{,z}\theta_{1,x} + \frac{1}{4}y w_{,x} \right) \\ & + \delta\theta_{1,x} \left[\frac{1}{2}\omega_{,z}\varepsilon_o + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})w_{,xx} - \frac{1}{2}y\omega_{,z}v_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,xx} \right] \\ & + \delta\theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,x} \right) + \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{4}y w_{,xx} \right) \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_o = \frac{1}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.5.10)$$

2.6 元素節點內力之推導

本文將元素的節點內力 \mathbf{f} 視為作用元素節點的外力。本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在元素座標上推導元素節點內力。若在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j=1,2$) 一個虛位移 $\delta\mathbf{\varphi}_j = \{\delta\varphi_{1j}, \delta\varphi_{2j}, \delta\varphi_{3j}\}$ ，

$\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\mathbf{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ，則由虛功原理可知

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \delta\mathbf{q}_\varphi^t \mathbf{f}_\varphi = \delta\mathbf{q}^t \mathbf{f} \\ &= \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13})dV + \int_V \rho\delta\mathbf{r}^t \mathbf{a}dV \\ &= \delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \text{、} \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \text{、} \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{f}_\varphi^D + \mathbf{f}_\varphi^I = \{\mathbf{f}_1^\varphi, \mathbf{m}_1^\varphi, \mathbf{f}_2^\varphi, \mathbf{m}_2^\varphi, \mathbf{B}\} \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (2.6.4)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_\theta^D + \mathbf{f}_\theta^I = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (2.6.5)$$

$$\delta \mathbf{q}_\varphi = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\phi}_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\phi}_2, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (2.6.6)$$

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\phi}_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\phi}_2, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (2.6.7)$$

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\theta}_1^*, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\theta}_2^*, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (2.6.8)$$

其中 δW_{ext} 為外力所作的虛功， δW_{int} 為內力所作的虛功， $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為元素節

點位移向量 \mathbf{q} 、 \mathbf{q}_θ 受虛位移 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 作用引起的變量， $\delta \boldsymbol{\theta}_j^* = \{\delta \theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ，

$\delta \boldsymbol{\phi}_j = \{\delta \phi_{1j}, \delta \phi_{2j}, \delta \phi_{3j}\}$ ， $\mathbf{f}_j^\varphi = \{f_{1j}^\varphi, f_{2j}^\varphi, f_{3j}^\varphi\}$ 、 $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ 、

$\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$ 、 $\mathbf{m}_j^\varphi = \{m_{1j}^\varphi, m_{2j}^\varphi, m_{3j}^\varphi\}$ 、 $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ 、

$\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ($j=1, 2$)、 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{1j}^φ 、 f_{ij}^φ 、 f_{1j}^θ 為作用在元素節

點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij}^φ 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij} 、 m_{ij}^θ 為

作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩

(Bimoment)。

\mathbf{f}_φ 、 \mathbf{f} 、 \mathbf{f}_θ 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\varphi$ 、 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點內力，

\mathbf{f}_φ^D 、 \mathbf{f}_φ^I 為對應於 \mathbf{f}_φ 的元素節點變形內力及元素節點慣性力， \mathbf{f}^D 、 \mathbf{f}^I 為對

應於 \mathbf{f} 的元素節點變形內力及元素節點慣性力， \mathbf{f}_θ^D 、 \mathbf{f}_θ^I 為對應於 \mathbf{f}_θ 的元素

節點變形內力及元素節點慣性力， $\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 為應

力所作的虛功， $\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV$ 為慣性力所作的虛功， $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$) 為梁元素

對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的虛應變， E 為楊氏係數， G 為剪力模數， ρ 為梁的密度，

V 為梁元素未變形前的體積， \mathbf{a} 為梁元素的絕對加速度。本文中梁元素的應變、位置向量、速度、加速度都表示成節點變形參數 \mathbf{q}_θ 的函數，為了推導上的方便，本文中將內力所作的虛功先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ 對 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta\mathbf{q}$ 與 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 與 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f} 與 \mathbf{f}_θ 的關係。

$\delta\mathbf{q}$ 與 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的關係可以表示如下

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi}\delta\mathbf{q}_\phi = \mathbf{T}_{\theta\phi}\mathbf{T}_{\phi\theta}\delta\mathbf{q} = \mathbf{T}_{\theta\phi}\delta\mathbf{q} \quad (2.6.9)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}_1 \\ \delta\mathbf{\theta}_1^* \\ \delta\mathbf{u}_2 \\ \delta\mathbf{\theta}_2^* \\ \delta\mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b1} & \mathbf{T}_{a1} & -\mathbf{T}_{b1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b2} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{b2} & \mathbf{T}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}_1 \\ \delta\mathbf{\phi}_1^* \\ \delta\mathbf{u}_2 \\ \delta\mathbf{\phi}_2^* \\ \delta\mathbf{p} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\theta\phi}\delta\mathbf{q} \quad (2.6.10)$$

$$\mathbf{T}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{2j}/L & 0 & 0 \\ -\theta_{3j}/L & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_{3j} - \frac{1}{2}\phi_{3j} & -\frac{1}{2}\theta_{2j} + \frac{1}{2}\phi_{2j} \\ -\theta_{3j} + \frac{1}{2}\phi_{3j} & 1 + \varepsilon_o & -\frac{1}{2}\phi_{1j} \\ \theta_{2j} - \frac{1}{2}\phi_{2j} & \frac{1}{2}\phi_{1j} & 1 + \varepsilon_o \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.6.11)$$

$\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 $\mathbf{T}_{\phi\theta}$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\theta}$ 的顯式於(附錄 B)

將(2.6.1)式代入(2.6.9)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\phi\theta}^t \mathbf{f}_\theta = \mathbf{T}_{\phi\theta}^t \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.6.12)$$

由(2.6.1)及(2.6.2)式可以求得 \mathbf{f}_θ ，為了推導上的方便，本文將在下兩節中分別用應力所作的虛功 $\int_V (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13})dV$ 及慣性力所作的虛功 $\int_V \rho\delta\mathbf{r}^t \mathbf{a}dV$ 推導 \mathbf{f}_θ 中等效元素節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 及等效元素節點慣性

力 \mathbf{f}_θ^I 。

2.6.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 的推導

由(2.6.1)、(2.6.2)、(2.6.4)、(2.6.8)、(2.4.24)–(2.4.27)式及(2.4.33)式可得

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^D &= \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^D + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^D + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^D + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^D \\ &= \int_V (E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} + 4G \varepsilon_{12} \delta \varepsilon_{12} + 4G \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV\end{aligned}\quad (2.6.13)$$

$$\mathbf{f}_a^D = \{f_{11}^{\theta D}, f_{12}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_b^D = \{f_{21}^{\theta D}, m_{31}^{\theta D}, f_{22}^{\theta D}, m_{32}^{\theta D}\} \quad (2.6.14)$$

$$\mathbf{f}_c^D = \{f_{31}^{\theta D}, m_{21}^{\theta D}, f_{32}^{\theta D}, m_{22}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_d^D = \{m_{11}^{\theta D}, B_1, m_{12}^{\theta D}, B_2\}$$

其中 \mathbf{f}_i^D ($i=a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i=a, b, c, d$) 的廣義節點變形力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.4.24)–(2.4.27)式及(2.4.33)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ^D 可以由 \mathbf{f}_i^D

($i=a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.5.4-a)式之 ε_{1j} 及(2.5.9-a)式之 $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$) 代入(2.6.14)式，即可以求得 \mathbf{f}_i^D ($i=a, b, c, d$)。因本文中 ε_{1j} 僅保留到變形參數到的二次項，所以 \mathbf{f}_i^D 亦僅保留到變形參數到的二次項，但文獻[23]提到 $\theta_{1,x}$ 的三次項不能忽略，所以本文中亦將其保留。

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^D ($i=a, b, c, d$) 可表示如下

$$\mathbf{f}_a^D = A_1 \mathbf{G}_a \quad (2.6.15)$$

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{L} [AEL \varepsilon_o + \frac{3}{2} AEL \varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^D &= \underline{f_{12}^\theta \mathbf{G}_b} + EI_z(1+\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + \underline{E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \theta_1 w_{,xx} dx} \\
&+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx + \underline{\frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}_b' \theta_{1,x} w_{,xx}) dx} \\
\mathbf{f}_c^D &= \underline{f_{12}^\theta \mathbf{G}_c} + EI_y(1+\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + \underline{E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \theta_1 v_{,xx} dx} \\
&+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx + \underline{\frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c' \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} v_{,x}) dx} \\
\mathbf{f}_d^D &= \{GJ + EI_p \varepsilon_o\} \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega(1+3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} dx \\
&+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_d'' v_{,xx} w_{,xx} dx + \underline{E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d v_{,xx} w_{,xx} dx} \\
&+ \underline{\frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_d' (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) dx} \\
&+ \underline{\frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx} \\
I_y &= \int z^2 dA, I_z = \int y^2 dA \\
I_\omega &= \int \omega^2 dA, \alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA, I_p = I_y + I_z \\
J &= \int \{(-z + \omega_{,y})^2 + (y + \omega_{,z})^2\} dA \\
K_I &= \int (y^2 + z^2)^2 dA
\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

(2.6.15)式中加底線_____之項為 $\theta_{1,x}$ 的三次項，加底線_____之項為含 $\theta_i^* (i=1, 2, 3)$ 的項，加底線_____之項為含 L 的項。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， $\theta_i^* (i=1, 2, 3)$ 及 L 都會趨近於零、 $\theta_{i,x}^* (i=1, 2, 3)$ 都會趨近於一個常數，所以當元素數目較多時，加底線_____及_____之項都會趨近於零，因此本文的數值例題中亦將探討忽略這些項對動態分析的影響。

2.6.2 等效節點慣性力 \mathbf{f}_θ^I 的推導

由(2.6.1)、(2.6.4)、(2.6.8)、(2.4.24)–(2.4.27)式及(2.4.33)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^I = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^I + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^I + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^I + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^I = \int_1^2 \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV \quad (2.6.17)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \{f_{11}^{\theta I}, f_{12}^{\theta I}\}, \mathbf{f}_b^I = \{f_{21}^{\theta I}, m_{31}^{\theta I}, f_{22}^{\theta I}, m_{32}^{\theta I}\} \quad (2.6.18)$$

$$\mathbf{f}_c^I = \{f_{31}^{\theta I}, m_{21}^{\theta I}, f_{32}^{\theta I}, m_{22}^{\theta I}\}, \mathbf{f}_d^I = \{m_{11}^{\theta I}, B_1^I, m_{12}^{\theta I}, B_2^I\}$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點慣性力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.4.24)–(2.4.27)式及(2.4.33)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ^I 可以由 \mathbf{f}_i^I

($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.5.6)及(2.5.7)式，代入(2.6.17)式，即可以求得 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)。因本文中 $\delta \mathbf{r}$ 僅保留到變形參數到的一次項，絕對加速度 \mathbf{a} 中保留變形參數對時間的微分到二次項，所以 \mathbf{f}_i^I 中亦僅保留變形參數到的一次項、變形參數對時間的微分到二次項。如前所述，因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i^* ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於零， $\theta_{i,x}^*$ ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於一個常數。文獻[7]都不考慮 \mathbf{f}_i^I 中含變形參數 θ_i^* 或 $\theta_{i,x}^*$ 的項，但其例題的數值結果都很精確，因此本文中亦不考慮 \mathbf{f}_i^I 中含變形參數 θ_i^* 或 $\theta_{i,x}^*$ 的項。

廣義節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$(2.6.19)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a dx + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} (\dot{\mathbf{G}}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b + \dot{\mathbf{G}}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c) - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{w}_{,x}^2 dx \right] dx$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + (1 - \varepsilon_o) \rho I_z \int \mathbf{N}'_b [(1 - \varepsilon_o) \ddot{v}_{,x} + \underline{2(1 - \varepsilon_o) \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x}}] dx$$

$$\mathbf{f}_c^I = \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + (1 - \varepsilon_o) \rho I_y \int \mathbf{N}'_c [(1 - \varepsilon_o) \ddot{w}_{,x} - \underline{2(1 - \varepsilon_o) \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x}}] dx$$

$$\mathbf{f}_d^I = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \ddot{\theta}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\theta}_{1,x} dx + \underline{\rho(1 - \varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \dot{w}_{,x} \dot{v}_{,x} dx}$$

本文將(2.6.19)式中將慣性力拆成兩部份，沒底線的項稱為慣性力的加速度項，加底線的項稱為慣性力的速度耦合項。

文獻[7]不考慮變形與慣性力間的耦合，故(2.6.12)式可近似成 $\mathbf{f}^I = \mathbf{f}_\theta^I$ 。

本文擬於第四章的例題探討(2.6.12)式中 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 對動態分析的影響。

若元素端點 $j(j=1, 2)$ 有 Lump mass，則(2.6.17)式右邊慣性力所做的虛功除了原來的項外，還需再加入 Lump mass 之慣性力所做的虛功 $\int_{V_l} \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a}^l dV_l$ 。本文假設 Lump mass 為剛體，將其形心與梁斷面的形心重合，且其斷面積遠大於梁之斷面積，厚度 t 與梁元素長度 L 比 $t/L \ll 1$ 。

Lump mass 之慣性力所做的虛功可表示成

$$\begin{aligned} \int_{V_l} \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a}^l dV_l = & \delta u_j \int \ddot{u}_j \rho_\ell t dA_\ell + \delta v_j \int \ddot{v}_j \rho_\ell t dA_\ell + \delta w_j \int \ddot{w}_j \rho_\ell t dA_\ell \\ & + \delta \theta_{1j} \left[\int (y^2 + z^2) \ddot{\theta}_{1j} + \int (z^2 - y^2) \dot{w}_j' \dot{v}_j' \right] \rho_\ell t dA_\ell \\ & + \delta \theta_{2j} \left[-\int z^2 \dot{w}_j' + 2 \int z^2 \dot{v}_j' \dot{\theta}_{1j} \right] \rho_\ell t dA_\ell \\ & + \delta \theta_{3j} \left[\int y^2 \dot{v}_j' + 2 \int y^2 \dot{w}_j' \dot{\theta}_{1j} \right] \rho_\ell t dA_\ell \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

其中 t 、 ρ_ℓ 、 A_ℓ 分別為 lump mass 的厚度、密度、面積， y 、 z 為 lump mass 上任一點在 lump mass 斷面座標的座標值。

比較(2.6.17)式等號兩邊 $\delta \mathbf{u}_i$ 的係數，則(2.6.19)式的慣性力需加入由於 lump mass 所造成的節點慣性力：

(2.6.21)

$$f_{1j}^{\ell I} = m_\ell \ddot{u}_j$$

$$f_{2j}^{\ell I} = m_\ell \ddot{v}_j$$

$$f_{3j}^{\ell I} = m_\ell \ddot{w}_j$$

$$m_{1j}^{\ell I} = m_\ell \left(\frac{I_p}{A}\right)_\ell \ddot{\theta}_{1j} + m_\ell \left[\left(\frac{I_y - I_z}{A}\right)_\ell\right] (\dot{w}'_j \dot{v}'_j)$$

$$m_{2j}^{\ell I} = -\left(\frac{m}{A} I_y\right)_\ell \ddot{w}'_j + 2\left(\frac{m}{A} I_y\right)_\ell \dot{v}'_j \dot{\theta}_{1j}$$

$$m_{3j}^{\ell I} = \left(\frac{m}{A} I_z\right)_\ell \ddot{v}'_j + 2\left(\frac{m}{A} I_z\right)_\ell \dot{w}'_j \dot{\theta}_{1j}$$

其中 $m_\ell = \rho_\ell t A_\ell$ 為 lump mass 的質量， $()_\ell$ 代表 $()$ 中的每個變數都加下標 ℓ ，即代表 lump mass 的斷面性質或質量。

2.7 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導

在本節中將推導之元素的剛度矩陣及慣性矩陣。

依元素切線剛度矩陣的定義、搭配(2.6.4)式及(2.6.7)式可得

$$d\mathbf{f}^D = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \mathbf{k} d\mathbf{q} \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.7.2)$$

其中 \mathbf{f}^D 為(2.6.15)式之元素的變形節點內力， \mathbf{q} 為(2.6.7)式之元素節點位移向量， \mathbf{k} 為元素切線剛度矩陣。

由(2.6.10)、(2.6.12)、(2.7.2)式及一致性一次線性化，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 可以表示成 (詳細推導於(附錄 C))

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14})\mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_\theta^D] \mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{H}_\phi^D \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.7.4)$$

$$\mathbf{H}_\theta^D = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta^D = \text{fixed}}, \quad \mathbf{H}_\phi^D = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \right|_{\mathbf{f}_\phi^D = \text{fixed}} \quad (2.7.5)$$

其中 \mathbf{k}_θ^0 為 \mathbf{k}_θ 的零次項， $\mathbf{0}_2$ 、 $\mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 2×2 ， 3×3 及 3×2 的矩陣， \mathbf{H}_θ^D 及 \mathbf{H}_ϕ^D 的顯式(exlicit form)於(附錄 D)。

剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i = a, b, c, d, j = a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^D}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.7.6)$$

其中 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$) 已在(2.6.15)式定義， \mathbf{u}_j ($j = a, b, c, d$) 已在(2.4.24)–(2.4.27)式及(2.4.33)式定義。

\mathbf{k}_{ij} 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{AE}{L} (1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\mathbf{G}_a}{L} [A E \mathbf{G}_b^t + E I_z \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \frac{\mathbf{G}_a}{L} [A E \mathbf{G}_c^t + E I_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \frac{\mathbf{G}_a}{L} \{ E I_p \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx + 3 E I_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx \}$$

$$\mathbf{k}_{bb} = EI_z(1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx + f_{12} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = +E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_1 dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c'^t - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_c''^t) \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d'^t w_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d'^t w_{,x} - \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx}) dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = EI_y(1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx + f_{12} \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'^t dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d'^t v_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c' \mathbf{N}_d'^t v_{,xx} - \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d'^t v_{,x}) dx$$

$$\mathbf{k}_{dd} = [GJ + EI_p] \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t dx + EI_\omega(1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t dx$$

$$+ \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t \theta_{1,x}^2 dx$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^t$$

(2.7.7)式中加底線_____之項為 $\theta_{1,x}$ 的二次項，加底線_____之項為含 θ_i^* ($i = 1, 2, 3$)的項，加底線_____之項為含 L 的項。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i^* ($i = 1, 2, 3$)及 L 都會趨近於零、 $\theta_{i,x}^*$ ($i = 1, 2, 3$)都會趨近於一個常數，所以當元素數目較多時，加底線_____及_____之項都會趨近於零，因此本文的數值例題中亦將探討忽略這些項對動態分析的影響。

元素的慣性矩陣為 $\delta \mathbf{f}^I$ 與 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 、 $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ 的關係矩陣，對應於 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 及 $\delta \ddot{\mathbf{q}}$

之慣性力的改變量 $\delta \mathbf{f}^I$ ，配合(2.6.12)式之 \mathbf{f}_ϕ^I 與 \mathbf{f}_θ^I 以及 \mathbf{f}^I 與 \mathbf{f}_ϕ^I 的關係可以表示成(詳細推導於(附錄 E))

$$\delta \mathbf{f}^I = \delta(\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^I) = \mathbf{H}_\phi^I \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{f}_\phi^I \quad (2.7.8)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_\phi^I &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \delta \mathbf{q}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \\ &= \mathbf{H}_\theta^I \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}_\phi + \mathbf{H}_c \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{c} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

其中

$$\mathbf{H}_\theta^I \mathbf{T}_{\theta\phi} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \quad (2.7.10)$$

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} = \mathbf{m}_\theta (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} + \mathbf{H}_{c\theta}) \quad (2.7.11)$$

\mathbf{m} 為質量矩陣(mass matrix)， \mathbf{c} 為陀螺質量矩陣(gyroscopic matrix)

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{c}_\theta \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.7.13)$$

文獻[7]推導慣性矩陣中不考慮變形與慣性力間的耦合，故 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 、 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$ ，

本文擬於第四章的例題探討 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 對動態分析的影響，及質量矩陣及陀螺質量

矩陣取 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 、 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$ 或 $\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 $\mathbf{c} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{c}_\theta \mathbf{T}_{\theta\phi}$ 探討收斂步數比較。

而 \mathbf{H}_ϕ^I 、 \mathbf{H}_θ^I 及 \mathbf{H}_c 的顯式於(附錄 D)。

元素質量矩陣 \mathbf{m}_θ 可以由子矩陣 $\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成，

\mathbf{m}_{ij} 的顯式可表示如下

$$\mathbf{m}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.7.14)$$

$$\mathbf{m}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx$$

$$\mathbf{m}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'^t dx$$

$$\mathbf{m}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t dx$$

$$\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}^t$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a - d$) 已在(2.6.19)式中定義。

若元素端點 $j(j=1, 2)$ 有 Lump mass，則(2.6.21)式 Lump mass 所產生之慣性力與所對應之節點參數微分，則可得到 Lump mass 之質量矩陣，並將其加入元素質量矩陣之相對位置中，可得正確之質量矩陣。Lump mass 所造成之元素節點質量矩陣可表示成

$$\mathbf{m}_\ell = \begin{bmatrix} m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_p)_\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_y)_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{m}{A}I_z)_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.15)$$

元素陀螺矩陣 \mathbf{c}_θ 可以由子矩陣 $\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{c}_{ij} 的顯式可表示如下

$$\mathbf{c}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.7.16)$$

$$\mathbf{c}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_b^t - \int_0^x \mathbf{N}_b'^t \dot{v}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_c^t - \int_0^x \mathbf{N}_c'^t \dot{w}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ba} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \frac{-2}{L} \rho (1 - \varepsilon_o) I_z \int \mathbf{N}_b' \mathbf{G}_a^t \dot{v}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho(1-\varepsilon_o)I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b'' \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_c'' \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = 2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_d^t \dot{w}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{ca} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \frac{-2}{L} \rho(1-\varepsilon_o) I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{G}_a^t \dot{w}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{cb} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_b'' \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = -2\rho(1-\varepsilon_o) I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_c'' \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d^t \dot{w}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{da} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{db} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} &= \rho(1-\varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_b'' \dot{w}_{,x} dx \\ &\quad - 2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_w \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} \dot{w}_{,x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{dc} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} &= \rho(1-\varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_c'' \dot{w}_{,x} dx \\ &\quad - 2\rho(1-\varepsilon_o)^2 I_w \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} \dot{w}_{,x} dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

為將來討論收斂步數方便，由(2.7.8)式將慣性矩陣分成四大類型

$$\text{第一類型：}\delta \mathbf{f}_\varphi^I = \mathbf{H}_{\theta I} \mathbf{T}_{\theta\varphi} \delta \mathbf{q}_\varphi + \mathbf{H}_c \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{c} \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi \quad (2.7.17)$$

$$\text{第二類型：}\delta \mathbf{f}_\varphi^I = \mathbf{H}_{\theta I} \mathbf{T}_{\theta\varphi} \delta \mathbf{q}_\varphi + \mathbf{H}_c \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{c}_\theta \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{m}_\theta \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi \quad (2.7.18)$$

$$\text{第三類型：}\delta \mathbf{f}_\varphi^I = \mathbf{m}_\theta \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi \quad (2.7.19)$$

$$\text{第四類型：}\delta \mathbf{f}_\varphi^I = \mathbf{c}_\theta \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{m}_\theta \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi \quad (2.7.20)$$

其中第一類型慣性矩陣因考慮變形與慣性力間的耦合，故慣性力取(2.6.12)式，其餘則取近似 $\mathbf{f}^I = \mathbf{f}_\theta^I$ 。

2.8 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣

(1) 偏心作用力機制。如圖三所示，一長度為 R 的剛性桿，一端剛接於節點上，另一端受到一保守力向量 $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_P^P$ 的作用，其中 P 是向量的大小， $\mathbf{e}_P^P = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ 為一單位向量。此機制的 X_1^P 軸是定義在剛性桿上， X_2^P 軸是與 X_1^P 軸垂直的任意軸， X_3^P 軸則由右手定則決定。

此作用力機制對 O 點造成的力矩向量 \mathbf{M} 可表示成

$$\mathbf{M} = RP\mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \quad (2.8.1)$$

當與剛性桿相接的節點受到一微小的旋轉向量 $\Delta\boldsymbol{\varphi}^P = \{\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3\}$ 擾動時， \mathbf{e}_1^P 會有微小變量 $\Delta\mathbf{e}_1^P$

$$\Delta\mathbf{e}_1^P = \Delta\boldsymbol{\varphi}^P \times \mathbf{e}_1^P = \{0, \Delta\varphi_3, -\Delta\varphi_2\} \quad (2.8.2)$$

所以(2.8.1)式中之 \mathbf{M} 有一如下之變量 $\Delta\mathbf{M}$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{M} &= RP \Delta \mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \\ &= RP \{\ell_2 \Delta \varphi_2 + \ell_3 \Delta \varphi_3, -\ell_1 \Delta \varphi_2, -\ell_1 \Delta \varphi_3\}\end{aligned}\quad (2.8.3)$$

因本文僅考慮與變形位置相關的節點力矩，所以依定義，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_P 可由下式求得

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{K}_P \Delta \boldsymbol{\varphi}^P \quad (2.8.4)$$

由(2.8.3)及(2.8.4)式，可得負荷剛度矩陣

$$\mathbf{K}_P = RP \begin{bmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & -\ell_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell_1 \end{bmatrix} \quad (2.8.5)$$

由於系統平衡方程式是定義在固定總體座標系統中，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_P 需先經以下的座標轉換，方可疊加到系統剛度矩陣中，亦即

$$\mathbf{K}_P^G = \mathbf{A}_{GP} \mathbf{K}_P \mathbf{A}_{GP}^t \quad (2.8.6)$$

其中 \mathbf{A}_{GP} 為(2.2.1)式中，總體座標與負荷基底座標間的轉換矩陣。

2.9 系統運動方程式

系統離散化後的動平衡方程式，是由在元素座標上算出的元素節點變形力、慣性力經標準的座標轉換後，在總體座標上所合成之系統內力向量及系統外力向量所組成，可表示如下：

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^D - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.9.1)$$

Ψ 是不平衡力， \mathbf{F}^I 是系統慣性力內力向量， \mathbf{F}^D 是系統變形力內力向量， \mathbf{P} 是系統外力向量。由(2.6.19)式中可知，慣性力可拆成速度項及加速度項

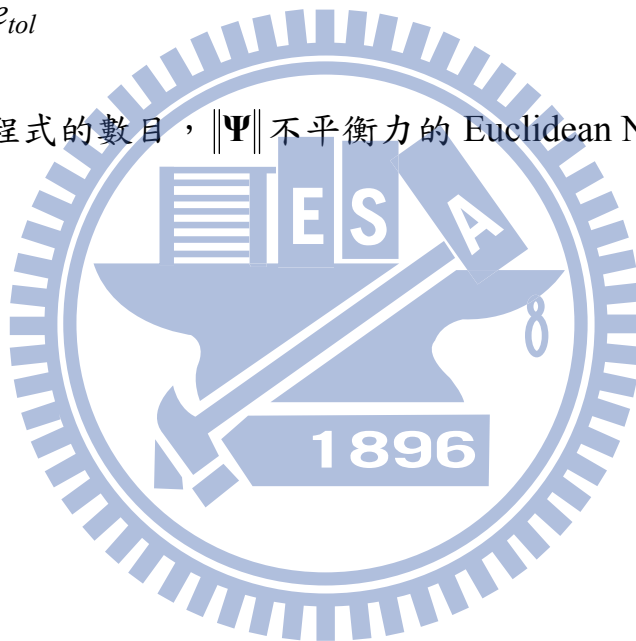
$$\Psi = \mathbf{F}^{I1} + \mathbf{F}^{I2} + \mathbf{F}^D - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.9.2)$$

\mathbf{F}^{I1} 為慣性力加速度項， \mathbf{F}^{I2} 為慣性力速度耦合項

本文中平衡迭代所使用的收斂準則為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N}} \leq e_{tol}$$

其中 N 為系統方程式的數目， $\|\Psi\|$ 不平衡力的 Euclidean Norm， e_{tol} 是容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文使用顯積分法及隱積分法求解非線性運動方程式，並比較兩種積分法解三維梁之非線性動態反應的效率及準確性，因此在本章中將介紹兩種不同的數值計算之方法，隱積分法使用 Newmark 直接積分法和 Newton-Raphson 增量迭代法來求解非線性動態平衡方程式，然而此法應用在受拘束的系統時，會有不穩定的現象發生，若加入 Numerical damping 則可獲得改善，如 Newmark- β damping scheme 及 Hilber-Hughes-Taylor scheme [25]。故本文亦探討上述兩種具 damping 效果的數值方法。而本文中顯積分法使用中央差分法。

本文中探討 t_n 時刻的動平衡方程式時，初始時間 $t_0 = 0$ ，而 $t_n = n\Delta t$ ，其中 Δt 為時間增量， n 為增量次數

3.1 Newmark 直接積分法

3.1.1 Newmark 直接積分法

Newmark 直接積分法乃假設在時間 t_n 時 ($n \geq 0$)，滿足動平衡方程式 (2.9.1) 的平衡位置，速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 為已知，則在 t_{n+1} 時刻之平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 可由下述迭代過程得到。

1. 令在 t_{n+1} 時刻的初始增量位移猜測值 $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (3.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0] \quad (3.1.2)$$

2. 令 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$, $\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$
3. 由 $\Delta \mathbf{U}$ (或 $\delta \mathbf{U}$) 及上次迭代後的變形位置得到此次迭代後的變形位置，再算出系統的節點變形力 \mathbf{F}_{n+1}^D 。由 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及最新的變形位置算出系統的節點慣性力 \mathbf{F}_{n+1}^I 。由在 t_{n+1} 時刻的外力 \mathbf{P}_{n+1} 、 \mathbf{F}_{n+1}^D 、 \mathbf{F}_{n+1}^I 、及系統動平衡方程式(2.9.1)算出系統不平衡力

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + \mathbf{F}_{n+1}^D - \mathbf{P}_{n+1} \quad (3.1.3)$$

4. 檢查 $\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|$ 是否滿足收斂準則，若滿足則迭代停止，本文採用的收斂準則為

$$\frac{\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|}{\sqrt{N}} < e_{tol}$$

e_{tol} 為給定的容許誤差， N 為方程式的數目

5. 若不滿足，則由

$$\delta \mathbf{U} = -[\hat{\mathbf{K}}]^{-1} \mathbf{\Psi}_{n+1} \quad (3.1.4)$$

得一增量位移修正量 $\delta \mathbf{U}$ ，其中

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] \quad (3.1.5)$$

為系統有效剛度矩陣(effective stiffness matrix)， $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$ 、 $[\mathbf{K}]$ 表系統之質量、陀螺與剛度矩陣(其推導詳見(附錄 H))。

6. 令

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{U} \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \mathbf{U} \quad (3.1.7)$$

7. 回到 2.

Newmark 直接積分法中，若取 $\beta = 0.25$ $\gamma = 0.5$ 則稱 Newmark trapezoidal rule，因 Newmark trapezoidal rule[25]不會造成振幅衰減無法除掉高頻的振動，為了使 Newmark 直接積分法能造成振幅衰減，以除掉不必要的高頻振動， β 和 γ 必需滿足下式[26]：

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{2}(1-2\alpha) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

上式中 $\alpha < 0$ 。

Newmark 直接積分法中若 β 和 γ 滿足(3.1.8)式，則稱為 Newmark- β damping scheme[25]。本文中取 $\alpha = -0.05$ 、 $\beta = 0.275625$ 、 $\gamma = 0.55$ 。

3.1.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme

Hilber-Hughes-Taylor scheme(HHT)是一種 Multistep 的數值方法[25]，及其在求取目前的收斂位置時，不僅考慮目前的內力、外力，同時亦考慮了上一次收斂時刻的內力、外力。在應用 HHT scheme 時，前節中 Newmark 直接積分法之數值方法及方程式(3.1.1)式、(3.1.2)式、(3.1.6)式及(3.1.7)式仍可適用，但(3.1.3)式之不平衡力需改為

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + (1+\alpha)\mathbf{F}_{n+1}^D - \alpha\mathbf{F}_n^D - (1+\alpha)\mathbf{P}_{n+1} + \alpha\mathbf{P}_n \quad (3.1.9)$$

其中 \mathbf{F}_n^D 及 \mathbf{P}_n 為 t_n 時刻在平衡位置的節點變形力及外力， $\alpha \leq 0$ 為一控制參數，當 $\alpha = 0$ 時，(3.1.9)式與(3.1.3)式，及 Newmark trapezoidal rule 相同。HHT scheme 中之 β 、 γ 亦需符合(3.1.8)式之要求。

3.2 中央差分法

中央差分法在計算二階運動方程中擁有最高的精確度及穩定度，其缺點為時間增量 Δt 需要取非常小，其原理為 t_n 時刻建立運動方程式，求下個時刻 t_{n+1} 的位移 \mathbf{U}_{n+1} ，其過程如下：

當 $n \geq 1$ 時在時間 t_n 之位移 \mathbf{U}_n 及之時間 t_{n-1} 之位移 \mathbf{U}_{n-1} 已知，欲求 t_{n+1} 時刻的位移 \mathbf{U}_{n+1} ，由動平衡方程式(2.9.2)，並將慣性力加速度項 \mathbf{F}_n^{I1} ，由質量矩陣 \mathbf{M} 以及 t_n 時刻的加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 表示可得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{F}_n^D(\mathbf{U}_n) - \mathbf{F}_n^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n) \quad (3.2.1)$$

\mathbf{F}_n^D 為 t_n 時刻的變形力， \mathbf{P}_n 為 t_n 時刻的外力， \mathbf{F}_n^{I2} 在計算時需用到 t_n 時刻的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ ，但在顯積分法中在 t_n 時刻速度為未知，故本研究以 t_{n-1} 時刻速度代替以求得 \mathbf{F}_n^{I2} 。

令時間 t_n 下速度及加速度(其推導詳見(附錄 G))

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{U}_n = \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta U_n - \Delta U_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2.3)$$

其中

$$\Delta U_n = U_{n+1} - U_n \quad (3.2.4)$$

$$\Delta U_{n-1} = U_n - U_{n-1} \quad (3.2.5)$$

ΔU_n 為 t_n 時刻的位移增量， ΔU_{n-1} 為 t_{n-1} 時刻的位移增量

將(3.2.3)式代入(3.2.1)式得位移增量 ΔU_n

$$\Delta U_n = (\mathbf{M}_{eff})^{-1} \mathbf{F}_{eff} \quad (3.2.6)$$

其中

$$\mathbf{M}_{eff} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}$$

$$\mathbf{F}_{eff} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \Delta U_n + \mathbf{P}_n - \mathbf{F}_n^D(\mathbf{U}_n) - \mathbf{F}_n^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n)$$

將位移增量 ΔU_n 代回(3.2.2)、(3.2.3)可得 t_n 時刻速度 \dot{U}_n 、加速度 \ddot{U}_n

當 $n=0$ 時，初始位移 U_0 、初始速度 \dot{U}_0 已知，將 U_0 及 \dot{U}_0 代入(3.2.1)式可得初始加速度 \ddot{U}_0 ，由中央差分法之定義 \dot{U}_0 及 \ddot{U}_0 又可寫成

$$\dot{U}_0 = \frac{U_1 - U_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.2.7)$$

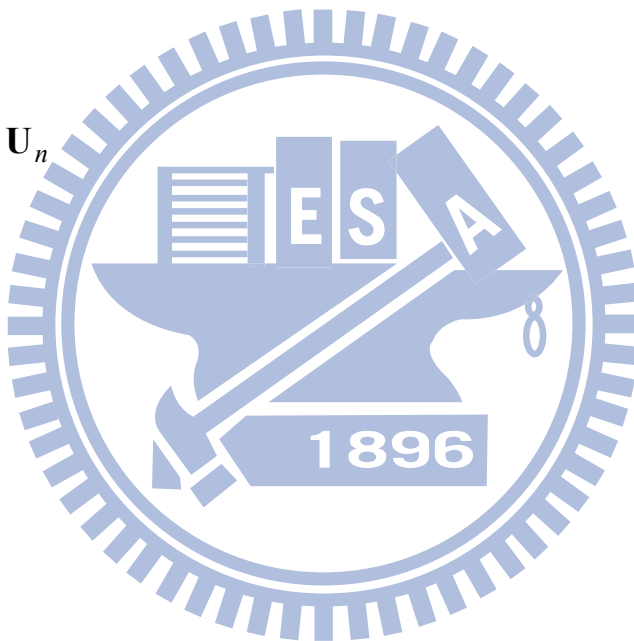
$$\ddot{U}_0 = \frac{U_1 - 2U_0 + U_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.2.8)$$

但 U_{-1} 值實際並不存在，故將(3.2.7)式、(3.2.8)式聯立消去 U_{-1} 項可得

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (3.2.9)$$

當 $n \geq 1$ 時，在 t_n 時刻計算 $\Delta \mathbf{U}_n$ 之數值計算過程如下：

1. 令 $\dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_{n-1}$
2. 利用當前的變形位置 \mathbf{U}_n 及 $\Delta \mathbf{U}_{n-1}$ ，計算系統的節點變形力 $\mathbf{F}^D(\mathbf{U}_n)$ 、由當前的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 及變形位置求出節點慣性力速度耦合項 $\mathbf{F}^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n)$
3. 由(3.2.6)式解出位移增量 $\Delta \mathbf{U}_n$ 代回(3.2.2)、(3.2.3)可得 t_n 時的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 、加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$
4. $\mathbf{U}_{n+1} = \Delta \mathbf{U}_n + \mathbf{U}_n$



第四章 數值例題與結果

為了測試本研究提出的方法的有效性、準確性及效率，本章中分析了多種不同的數值例題。本章中為了比較不同之數值計算方法的準確性及效率，例題一、例題七、例題八及例題十，除了 Newmark trapezoidal rule 外，還使用中央差分法(CDM)，其餘的例題皆只使用 Newmark trapezoidal rule，其中第二題為了除掉虛假的高頻振動，另外使用了 Newmark- β damping scheme 及 HHT scheme。在比較數值方法不同時，是以計算次數位移增量及改正量次數做為探討效率的比較，Newmark 法的計算次數即為總迭代次數，CDM 法的計算次數則為增量次數。本章中所有例題之容許誤差皆設為 $e_{tol} = 10^{-4}$ 。

由第二章的說明可知元素節點內力及剛度矩陣中會有趨近於零的項，為探討這些項的影響，本研究考慮三種類型的內力及剛度，並說明如下

第一類型內力：(2.6.15)式全部考慮

第二類型內力：(2.6.15)式中去掉加底線 _____ 的項

第三類型內力：(2.6.15)式中去掉加底線 _____ 及 _____ 的項

第一類型剛度：(2.7.7)式全部考慮

第二類型剛度：(2.7.7)式中去掉加底線 _____ 的項

第三類型剛度：(2.7.7)式中去掉加底線 _____ 及 _____ 的項

為探討慣性矩陣中不同項的影響，本研究考慮三種類型的慣性矩陣，並說明如下

第一類型：(2.7.17)式，考慮所有慣性矩陣

第二類型：(2.7.18)式，考慮所有慣性矩陣，但質量矩陣及陀螺矩陣用近似式

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta \text{ 及 } \mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$$

第三類型：(2.7.19)式，只考慮質量矩陣且用近似式 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$

第四類型：(2.7.20)式，只考慮質量矩陣及陀螺矩陣且用近似式 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 及

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$$

本章中若無特別說明，在 Newmark 積分法時，一律使用第二類型的內力及剛度、第四類型的慣性矩陣；在 CDM 時，一律使用第二類型的內力，質量矩陣取 $\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 。

本章中例題一、例題八、例題十為實際並不存在的梁斷面，為考量本研究的真實性，另外討論包括矩形斷面及 I 型斷面(圖五)。本章中除了例題十一有考慮抑制翹曲，其餘皆為自由翹曲。計算形心的軸向應變皆僅考慮元素弦長的變化。

例題一 懸臂直角梁

如圖六所示，考慮一根在 $X_1 - X_2$ 平面上成直角的懸臂梁，在其肘處受 $-X_3$ 方向上的外力作用，其作用力大小如圖六所示，在時間 $t=2$ 及移除外力，讓它自由振動[27,28,29]。此題之幾何及材料性質為： $L=10$ ， $EA=10^6$ ，

$EI_y = EI_z = GJ = 10^3$, $A\rho = 1$, $\rho I_y = \rho I_z = 10$ 。數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM 比較。本題結果如圖七至圖十二及表一、表二所示，除另有說明外，本例題分析時使用八個元素，Newmark 積分法時，使用時間增量 $\Delta t = 0.2$ 。圖七為 A、B 兩點位移的歷時分析，圖七可發現四個元素與八個元素的解仍有少許的差異，圖八及圖九中分別為 A、B 兩點在 X_3^G 方向上位移的歷時分析與文獻[27,28,29]的結果比較，由圖八及圖九可以發現本文的結果與文獻的結果相當吻合。

圖十 Case 1 為考慮(2.6.19)式之慣性力所有的項，Case 2 為不考慮(2.6.19)式之加底線的項，即不考慮速度耦合項，因本例題之軸向角速度與側向角速度的乘積相當大，所以圖十 Case 1 及 Case 2 的結果在最大位移處約有 10 %的誤差。

表一為 Newmark 積分法以不同類型之剛度矩陣、慣性矩陣，元素數目及時間增量分析時，所需的迭代次數。由表一可發現分析時用第三類型的慣性矩陣，即只考慮近似的質量矩陣，比其他類型的慣性矩陣分析時所需的迭代次數約多了10%。因第三類型的慣性矩陣為傳統的質量矩陣，在推導上最簡單，計算上所需的空間及時間最少，故本研究提出之三維梁共旋轉推導法也可只考慮質量矩陣。第四類型的慣性矩陣在計算上所需的時間及空間比第三類型的慣性矩陣增加不多，但需要的迭代次數可以減少10%，所以本章中除另有說明外都是用第四類型的慣性矩陣。

圖十一為 CDM 與 Newmark 積分法的位移-時間曲線。兩種方法都是使用八個元素的結果，由圖十一可發現 CDM 與 Newmark 積分法數值結果非常接近，但 CDM 使用的時間增量 $\Delta t = 10^{-3}$ ，共 3×10^4 個增量，Newmark 積分法使用的迭代次數約 1000 次(見表一)，所以本例題 CDM 使用的計算次數約為 Newmark 積分法的 30 倍。探討質量矩陣對 CDM 的最大容許時間增量及準確性分析之影響，本例題考慮了以下兩種情況，第一種情況 B1：

$\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 以及第二種情況 B2： $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ ，表二為 CDM 在不同元素數目的最大容許時間增量。由表二發現在 CDM 中，若取四個元素，使用質量矩陣 $\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 的最大容許時間較 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 的大，但取八個元素的兩種情況的最大容許時間增量都是 $\Delta t = 10^{-3}$ 。兩種情況所得到的結果都一樣。由圖十二可知本例題四個元素與八個元素的位移時間曲線有些微的差異，故在本例題使用 Newmark 積分法不管是效率及準確性都比 CDM 好。

例題二：旋轉薄圓盤的運動

本題考慮如圖十三所示之旋轉薄圓盤的運動，此圓盤藉著一無質量的剛性桿與一球接頭連接並受重力的作用，由於此系統之運動為剛體運動，可以應用三維剛體動力學求出此系統之初始速度及加速度見圖十四。為了模擬此無質量剛性桿的作用，假設此剛性桿之半徑 $r = 0.01$ ， $\rho A = 10^{-10}$ ， $EA = 10^{12}$ ， $GJ = EI_y = EI_z = 2.5 \times 10^7$ 。本例題中僅使用一個元素來進行分

析，同時將此圓盤視為元素端點上的 lump mass，本例題時間增量 Δt 取為 $\Delta t = 10^{-3}$ 。

在受拘束的系統中若使用 Newmark trapezoidal rule ($\alpha = 0$)，則其加速度會有不穩定的現象[25]，本文使用了[25]中所建議的 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$)及 HHT scheme ($\alpha = -0.05$)來改善其收斂性。圖十五為本研究 $\alpha = 0$ 及 $\alpha = -0.05$ 時，圓盤中心 X 方向之加速度的歷時分析的比較，由圖中可以發現當 $\alpha = 0$ ，X 方向加速度會有劇烈抖動的情形，若使用 HHT scheme ($\alpha = -0.05$) 或 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$)，則抖動情形會獲得明顯改善。本例題使用 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$) 之結果與 HHT ($\alpha = -0.05$) 的結果相同，但在總迭代次數 HHT ($\alpha = -0.05$) 卻是 Newmark- β damping scheme ($\alpha = -0.05$) 的兩倍，圖十六、圖十七及圖十八皆為使用 Newmark- β damping scheme 的結果。圖十六為系統角速度的變化過程，圖十七為圓盤中心在 XY 平面上的運動軌跡。圖十八為本研究圓盤中心 X 方向之加速度的歷時分析與文獻結果的比較。由圖十六-十八可知本文結果與文獻[25]的結果相當吻合。

例題三：一雙對稱 I 型斷面梁承受均佈側向載重

本題考慮如圖十九所示之一雙對稱 I 型斷面梁承受均佈側向載重，此梁之幾何及材料性質： $L = 10\text{ m}$ ， $b = 0.3\text{ m}$ ， $t_f = 0.03\text{ m}$ ， $d = 0.56\text{ m}$ ，

$t_w = 0.012 \text{ m}$, $x_C = 6.9048 \text{ m}$, 楊氏係數 $E = 210 \text{ GPa}$, 剪力係數

$G = 80.77 \text{ GPa}$, 線密度 $m = 188.40 \text{ kg/m}$ 。表三為其斷面性質。本例題考慮

A、B 兩端的邊界情況如下：(a) $u_A = u_B = 0, w_A = w_B = 0, w'_A = w'_B = 0$,

(b) $u_A = u_B = 0, w_A = w_B = 0, w'_A = 0$, (c) $u_A = u_B = 0, w_A = w_B = 0$,

(d) $u_A = 0, w_A = w_B = 0$, (e) $u_A = 0, w_A = w_B = 0, w'_A = 0$, (f) $u_A = 0$,

$w_A = w_B = 0, w'_A = w'_B = 0$, (g) $u_A = 0, w_A = 0, w'_A = 0$ 。情況(a)-(f)負載

$P_0 = 3000 \text{ kN/m}$, 情況(g)負載 $P_0 = 300 \text{ kN/m}$ 。本例題中皆使用二十個元素

來進行分析，本例題時間增量 Δt 取為 10^{-4} (sec) 。圖二十-圖二十六為 C 點在

X_1^G 與 X_3^G 方向的位移。由圖二十-圖二十六可知本文結果邊界(a)-(c)、(f)及

(g)與文獻[30]的結果相當吻合，情況(d)、(e)與文獻[30]的結果有些差異。這

可能是因為文獻[30]沒有考慮梁的慣性矩造成的。

例題四：一雙對稱I型斷面懸臂梁承受偏心的均佈側向載重

本例題延續例題三的討論，如圖二十七所示之懸臂梁 A 端為固定端，B

端為自由端，本例題與例題三之梁有相同的材料性質及斷面，但其長度改

為 $L = 8 \text{ m}$ ，該梁承受如圖二十七所示的均佈側向負載，其中 $P_0 = 60 \text{ kN/m}$ ，

該負載為偏心載重，其作用位置有兩種，如圖二十八及二十九所示，(a)頂

部且偏心距離 $e = 0.03 \text{ m}$ ，(b)底部且偏心距離 $e = 0.03 \text{ m}$ 。本題中使用二十一

個元素來進行分析，時間增量 $\Delta t = 10^{-4} \text{ (sec)}$ 。剛度為第一類型，內力為第

一類型，慣性矩陣為第三類型。

圖三十至三十二，為 Case (a) B 點之位移的歷時分析，由圖三十至三十二可見 B 點 X_1^G 與 X_3^G 軸方向位移-時間曲線與文獻[31]的結果幾乎相同，但在 X_2^G 方向的位移-時間曲線則有很大的差別，本例題另外探討靜態分析，圖三十三為 Case (a)靜態分析的負荷-位移曲線，由圖三十三可見，

$P_0 = 60 \text{ kN/m}$ 時，B 點 X_2^G 及 X_3^G 方向之位移 $V_B = 2.4347 \times 10^{-2} (m)$ 、

$W_B = 0.1059 (m)$ ，由圖三十一及三十二可見本研究之 $V_B(t)$ 及 $W_B(t)$ 的最大值都遠大於靜態分析的位移，這應是合理的，但文獻[31]之動態分析 $V_B(t)$ 的最大值接近本研究靜態分析的位移，所以文獻[31]之 $V_B(t)$ 的曲線可能是不正確的。圖三十四至三十六為 Case (b) B 點之位移的歷時分析，由圖三十四至三十六可見本文的結果與文獻[31]的結果在 $t > 0.08 (\text{sec})$ 後有很大的差異，圖三十七為 Case (b)靜態分析的負荷-位移曲線，由圖三十七可見當 $P_0 = 60 \text{ kN/m}$ 時，應早已挫屈。

本題另討論靜態分析時負載分別施於頂部及底部時，偏心距離 $e = 0 \text{ m}$ 的情況，圖三十八為負載施於頂部且偏心距離 $e = 0 \text{ m}$ 時的負荷-位移曲線圖，其挫屈點約為 $P_0 = 140 \text{ kN/m}$ ，圖三十九負載施於底部且偏心距離 $e = 0 \text{ m}$ 時的負荷-位移曲線圖，其挫屈點約為 $P_0 = 72 \text{ kN/m}$ 。

例題五：一雙對稱 I 型斷面簡支梁承受二偏心力的軸向力

本題考慮如圖四十所示之簡支梁受到偏心力，此梁之幾何及材料性質： $L = 264.6in$ ， $b = 7.995in$ ， $t_f = 0.53in$ ， $d = 13.66in$ ， $t_w = 0.305in$ ，楊氏係數 $E = 29000ksi$ ，剪力係數 $G = 11200ksi$ ，密度 $\rho = 8.789 \times 10^{-3} slug/in^3$ ，表四為其斷面性質。本例題中使用二十個元素來進行分析，軸向力分別探討 $P_0 = 50 kip$ ， $P_0 = 100 kip$ ， $P_0 = 150 kip$ 三種情況，在 $P_0 = 50 kip$ 、 $P_0 = 100 kip$ 時的時間增量 $\Delta t = 2 \times 10^{-4} (sec)$ ， $P_0 = 150 kip$ 時的時間增量為 $\Delta t = 2 \times 10^{-5} (sec)$ ，其結果如圖四十一至四十三所示，由圖四十一至四十三可見 $P_0 = 150 kip$ 的位移-時間曲線與 $P_0 = 50 kip$ 和 $P_0 = 100 kip$ 的位移-時間曲線明顯的不同，圖四十四為靜態分析的負荷-位移曲線，由圖四十四可知 $P_0 = 150 kip$ 時早已超過挫屈點，這應可說明為何圖四十三與圖四十一、圖四十二明顯的不同。

例題六：一雙對稱 I 型斷面簡支梁承受兩端彎矩

本題考慮如圖四十五所示之簡支梁兩端分別受到 X_2^G 及 $-X_2^G$ 的彎矩 M ，其中 B 點還受到 X_3^G 的彎矩 $0.01M$ ，此梁之幾何及材料性質： $L = 6.1m$ ， $b = 0.262636m$ ， $t_f = 0.028448m$ ， $d = 0.28194m$ ， $t_w = 0.017272m$ ，楊氏係數 $E = 199.94804 GPa$ ，剪力係數 $G = 82.73712 GPa$ ，密度 $\rho = 7800 kg/m^3$ ，表五為其斷面性質。本例題中使用二十個元素來進行分析，彎矩分別探討

$M_0 = 1\text{ MN} - m$ ， $M_0 = 2\text{ MN} - m$ 兩種情況，時間增量為 $\Delta t = 10^{-4}$ (sec)，其結果如圖四十六及四十七所示，由圖四十六及四十七所見 $M_0 = 2\text{ MN} - m$ 的位移-時間曲線與 $M_0 = 1\text{ MN} - m$ 的位移-時間曲線明顯的不同，圖四十八為靜態分析的負荷-位移曲線，由圖四十八所示 $M_0 = 2\text{ MN} - m$ 應早已超過挫屈點，這應可說明為何圖四十七與圖四十六明顯的不同。

例題七 矩形斷面固端梁受側向負載

考慮一兩端固定的矩形斷面梁之中點受一偏心載重 F 作用，本例題考慮兩種偏心距 Case (a) $e = 0\text{ m}$ ，Case (b) $e = 6 \times 10^{-3}\text{ m}$ 。Case (a) 在文獻 [30,32-35] 中都曾探討。梁的幾何及材料性質為： $L = 0.508\text{ m}$ ， $b = 0.0254\text{ m}$ ， $h = 3.175 \times 10^{-3}\text{ m}$ ， $E = 207\text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ， $\rho = 2713\text{ kg/m}^3$ ，其斷面性質列於表六。本例題因對稱僅分析一半的結構，Case (a) 將其離散成六個元素，Case (b) 將其離散成十五個元素，本例題 Newmark 積分法 Case (a) 的時間增量取 $\Delta t = 10^{-5}$ (sec)，Case (b) 的時間增量取 $\Delta t = 10^{-6}$ (sec)，本例題亦使用 CDM 分析，Case (a) 的時間增量取 $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ (sec)，Case (b) 的時間增量取 $\Delta t = 0.5 \times 10^{-6}$ (sec)。

圖五十為 Case (a) 使用 Newmark 積分法之中點位移的歷時分析，由圖五十可見，本研究的結果與文獻[30]的結果很接近但與文獻[35]的結果有較大的差異，表七為 Case (a) 之振動週期與最大位移，表七中的週期指的是位

移-時間曲線中第一個最低點發生的時間，表七中除了文獻[32]的結果外，其餘文獻的結果皆相差不大，圖五十一亦為 Case (a)使用 Newmark 積分法的結果，但有較長的分析時間。由圖五十一可見在 $t = 3.5 \times 10^{-2}$ (sec) 內共有十七個振動週期，這與文獻[35]的結果一樣。圖五十二為 CDM 與 Newmark 積分法的歷時分析比較，由圖五十二可發現兩者的結果相同，CDM 在最大容許時間增量 $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ (sec) 才會收斂。所需的計算次數 CDM 為 1667 次、Newmark 積分法為 2567 次。圖五十三至五十五為 Case (b)之 C 點位移的歷時分析，由圖五十三至五十五可發現六個元素與十個元素及十五個元素的解差異較大，十個元素與十五個元素的解仍有少許的差異。圖五十六至五十八為 CDM 與 Newmark 積分法的位移-時間曲線，由圖五十六至五十八發現兩者的結果非常接近。所需的計算次數 CDM 為 4000 次、Newmark 積分法為 22032 次。由本題的計算次數可知，在短暫時間之分析，CDM 較 Newmark 積分法有效率。

例題八 兩端附圓盤之自由梁

如圖五十九所示，考慮一根在 $X_1 - X_2$ 平面上的梁，其作用力大小如圖五十九所示，其兩端各加圓盤，其圓盤材料性質為：質量 $M = 10$ ，質量慣性 $\mathbf{J}_\rho = \text{diag}(I_\rho, I_y, I_z) = \text{diag}(200.0, 100.0, 100.0)$ 。梁的幾何及材料性質為： $L = 10$ ， $EA = 10^4$ ， $EI_y = EI_z = GJ = 500$ ， $A\rho = 1$ ， $\rho I_y = \rho I_z = 10$ ，本例題

數值方法使用 Newmark 積分法及中央差分法(CDM)，本文使用 Newmark 積分法時，考慮了三種情況，(a) 兩個元素、時間增量 $\Delta t = 0.25$ ，(b) 兩個元素、時間增量 $\Delta t = 0.15$ ，(c) 十個元素、時間增量 $\Delta t = 0.25$ ，圖六十為三種情況 B 點的位移-時間曲線，由圖六十可見三種情況的結果都相同，所需的迭代次數 Case (a) 為 588 次、Case (b) 為 973 次、而 Case (c) 為 973 次。圖六十一為本文的結果與文獻[6]之結果的比較，由圖六十一可見兩者的位移-時間的曲線有相同的趨勢但不相同。本例題中外力的方向都是固定不變的，由牛頓第二運動定律知自由梁之質心應做直線運動，且 $\ddot{x}_i^c = F_i / m$ ，其中 \ddot{x}_i^c ($i=1,2,3$) 為質心加速度， F_i 為所受外力， m 為圓盤質量加上梁之質量。將上式做兩次積分後，可得質心位置 x_c 的理論值(其詳細推導於(附錄 H))，表八及表九分別為兩個元素及十個元素在時間增量 $\Delta t = 0.25$ 時之質心位置分析，表中總體座標的原點為 B 點 $t = 0$ 時的位置，由表可看出在雖然在位移圖中，兩個元素及十個元素雖然圖形相同，但在質心位置計算上兩個元素較沒那麼精確，跟解析解約有百分之一的誤差，而十個元素的質心位置分析幾乎與解析解相同。

在 CDM 中，使用十個元素時，最大容許時間增量需 $\Delta t = 0.005$ ，由圖六十二可見 CDM 與 Newmark 積分法有相同之位移-時間曲線，但 CDM 所需的計算次數約為 Newmark 積分法的十倍。

例題九 三維梁自由運動

如圖六十三所示，考慮三維在空間自由移動之矩形斷面梁。梁的幾何及材料性質為： $L_1 = 20\text{ m}$ ， $L_2 = 5\text{ m}$ ， $b = 0.1\text{ m}$ ， $b = 0.05\text{ m}$ ， $E = 70\text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ， $\rho = 2700\text{ kg/m}^3$ ，表十為其斷面性質，所受之外力 $F_1 = F(t)$ ， $F_2 = F(t)/10$ ， $F_3 = F(t)/8$ ，其中外力力矩為 Follower Moment $M_1 = L_1 F(t)/10$ ，所謂的 Follower Moment 指此 Moment 乃附著在梁的斷面上，其方向隨斷面一起旋轉，與文獻[36]相同，本例題取時間增量 $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ ，使用一百二十個元素。

圖六十四為 E 點位移的歷時分析，由圖六十四可見，本文與文獻[36]的結果有些不同，為了驗證本研究之正確性，我們同樣使用例題八中的牛頓運動方程式來檢驗此結構之質心運動軌跡，如圖六十五及表十一所示，本文的結果與解析解相當吻合。

例題十 懸臂彎曲梁

如圖六十六所示，本例題考慮一根在 $X_1 - X_2$ 平面上的懸臂彎曲梁，其端點受一 Z 方向的外力，該作用力大小如圖六十六所示，梁的幾何及材料性質為： $R = 15$ ， $EA = 10^6$ ， $EI_y = EI_z = GJ = 10^3$ ， $A\rho = 1$ ， $\rho I_y = \rho I_z = 10$ ，本例題使用十個元素，時間增量 $\Delta t = 0.04$ ，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM 比較。圖六十七為自由端位移的歷時分析，由圖六十七可見，本研

究的結果與文獻[6]的結果幾乎重合，Newmark 積分法的平均迭代次數為四次，而在 CDM 中，使用十個元素時，最大容許時間增量為 $\Delta t = 6 \times 10^{-4}$ ，其結果如圖六十八所示與 Newmark 積分法相同，但在計算次數所需約為 Newmark 積分法的六十倍，與其它例題相比差別更大。

例題十一：一雙對稱 I 型斷面直角懸臂梁承端點受二集中力

本題考慮如圖六十九所示之直角懸臂梁，此梁之幾何及材料性質：
 $L = 240in$ ， $b = 8.42in$ ， $t_f = 0.93in$ ， $d = 21.62in$ ， $t_w = 0.58in$ ，楊氏係數 $E = 29000ksi$ ，剪力係數 $G = 11200ksi$ ，密度 $\rho = 8.789 \times 10^{-3} slug/in^3$ ，表十為其斷面性質，考慮邊界條件情況 A 點 B 點及 C 點皆為抑制翹曲，使用二十個元素來進行分析，時間增量 $\Delta t = 2 \times 10^{-4} (sec)$ 。在外力分別探討兩種情況，在 X_1 方向負載(a) $P_0 = 10 kip$ ，(b) $P_0 = 15 kip$ ，並探討兩種情況分別在加入 X_2 方向負載 $Q = 0$ 、 $Q = 0.001P$ 及 $Q = 0.01P$ 。圖七十-圖七十二為(a) $P_0 = 10 kip$ 時自由端 C 點之時間-位移曲線圖，圖七十三-圖七十五為(b) $P_0 = 15 kip$ 時自由端 C 點之時間-位移曲線圖，由圖中可發現當 $P_0 = 10 kip$ 位移在 X_1^G 、 X_2^G 方向振動週期隨著負載的增加變化很小，當 $P_0 \geq 15 kip$ 時，由圖七十六中可看出靜態位移有明顯劇增的情況，圖七十三-圖七十五得到位移的振幅急速變大之相同結果。

第五章 結論

本研究主要目的是以共旋轉有限元素法，推導一個雙對稱斷面的薄壁梁元素，並將其應用在梁結構的幾何非線性動態分析。

本研究推導之梁元素有兩個節點十四個自由度。本文在梁元素當前的變形位置上建立元素座標，並視其為一個局部的固定的座標系統，所以在元素座標的速度、加速度、角速度及角加速即為絕對速度、加速度、角速度及角加速度。本研究利用非線性梁理論、d'Alembert 原理、虛功原理及一致性二階線性化在當前的元素座標上推導梁元素的節點變形力、節點慣性力。本文用旋轉向量來描述元素節點的旋轉，但用三個旋轉參數來描述元素的變形旋轉，所以在推導梁元素需要兩組節點參數，此兩組節點參數的轉換矩陣為節點旋轉參數的函數，本文保留兩組節點參數的轉換矩陣至節點參數之一次項。本文保留元素的節點變形力至節點參數之二次項，保留元素的節點慣性力至節點參數之零次項及由兩組節點參數的轉換矩陣引進的節點參數一次項。本文中推導出完整的元素慣性矩陣，元素慣性矩陣中的質量矩陣、陀螺矩陣是由元素的節點慣性力分別對節點參數對時間之二次微分的微分、節點參數對時間之一次微分的微分求得。本研究推導的結果及分析例題的數值結果可以得到以下結論：

1. 文獻[7]在推導慣性力中不考慮由節點參數的轉換矩陣(2.6.9)式造成的

變形與慣性力間的耦合，而本研究在推導慣性力及慣性矩陣中考慮變形與其耦合，本研究數值結果與需要的迭代次數，與文獻[7]差異甚小，由此結果可得在慣性力中(2.6.12)式及慣性矩陣中(2.7.12)、(2.7.13)式， $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 對動態分析的結果及效率並無太大影響。

2. 文獻[4]所提陀螺質量矩陣可大幅改善收斂需要的迭代次數，但由本文第四章的數值結果發現，考慮陀螺質量矩陣雖然可使總迭代次數減少了，但平均迭代次數減少有限，故與文獻[7]一樣，本研究所提出的推導法可只考慮質量矩陣，平均迭代次數及分析的效率並不會有太大的差異。
3. 在三維梁動態分析中，就本作者所知幾乎沒有文獻研究使用中央差分法，本文於第四章的數值結果發現，使用中央差分法與 Newmark 積分法分析的結果非常接近，但中央差分法需要之時間增量較 Newmark 積分法小很多，效率較 Newmark 積分法差，故中央差分法可以用在本研究提出的三維梁動態分析推導法。
4. 本文中除了使用 Newmark trapezoidal rule 外，另外使用 Newmark- β damping scheme 與 HHT scheme，發現後兩者確能消除加速度抖動現象，且不影響其準確性，但在效率方面，使用 HHT 的總迭代次數卻比 Newmark- β damping scheme 較多。
5. 因文獻上缺乏三維薄壁梁動態分析之結果，故本研究中之於第四章之例題可以供以後的研究參考及比較。

參考文獻

- [1] Crisfield M. A. , Galvanetto U. , Jelenic G. , "Dynamics of 3-D Co-rotational Beams", *Computers and Structures*, Vol. 20, pp. 507-519, 1997
- [2] Crisfield M. A. , SHI J. , "A Co-rotational Element/Time-integration Strategy for Non-linear Dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 1897-1913, 1994
- [3] Crisfield M. A. , Galvanetto U. , "An Energy-conserving Co-rotational Procedure for The Dynamics of Planar Beam Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 2265-2282, 1996
- [4] LE T. N. , Battini J. M. , Hjjaj M. , "Dynamics of 3-D Beam Elements in a Co-rotational Context: A Comparative Study of Established and new Formulation", *Finite Elements in Analysis and Design*, pp. 97-111, 2012
- [5] 蔡昌明, “空間梁結構的動態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1989
- [6] Hsiao K. M. , "Co-rotational Total Lagrangian Formulation for Three Dimensional Beam Element", *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 3, pp. 797-804, 1992
- [7] 林哲言, “三維梁之非線性動態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1994
- [8] Hsiao K. M. , Lin J. Y. , Lin W. Y. , "A Consistent Co-rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,

- Vol. 169, pp.1-18, 1999
- [9] Hsiao K. M. , Lin W. Y. , Chen R. H. , " Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Thin-Walled Beams ", *Proceedings of The World Congress on Engineering*, Vol. 2, pp.1442-1446, 2009
- [10] 陳泓虎, “薄壁開口梁之自由振動分析及幾何非線性動態反應研究”, 國立交通大學機械工程研究所博士論文, 臺灣, 新竹, 2007
- [11] 黃于哲, “滑動梁之動態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2003
- [12] 林運融, “挫屈梁之靜態與動態分析”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2010
- [13] Subbaraj K. and Dokainish M. A. , "A Survey of Direct Time-integration Methods in Computational Structural Dynamic II. implicit methods", *Computers and Structures*, Vol. 32, No. 6, pp. 1387-1401, 1989
- [14] Subbaraj K. and Dokainish M. A. , "A Survey of Direct Time-integration Methods in Computational Structural Dynamic I. explicit methods", *Computers and Structures*, Vol. 32, No. 6, pp. 1371-1386, 1989
- [15] Satish N. R. Remala, "Nonlinear Transient Finite Element Simulations of Beam Parametric Response Including Quadratic Damping", *University of Kentucky Master's Theses*, pp. 16-34, 2005
- [16] 機械月刊電子雜誌, "微型行星齒輪組三維動態接觸/衝擊分析", 越吟出版有限公司, 441 期, 4 月, 2012 年
- [17] Van Der Vegte G. J. , "Numerical Simulations of Bolted Connections: The Implicit Versus The Explicit Approach", *Connections in steel structure V*,

- pp. 89-98, june, 3-4, 2004
- [18] Fujii F. , Katagiri T. , Mihara Y. , Tsuji T. , Hsiao K. M. and Kobayashi T. ,
"3-D Finite Rotational Motion Treated in the Explicit Method", 日本計算
工學會, Vol.17, 5 月 29 日, 2012
- [19] Wang C. Y. , Wang R. Z. , "Nonlinear Dynamic Analysis of Space Frame
Structure", *IASS-IACM*, pp. 28-31, 2008
- [20] Krieg R. D. , "Unconditional Stability in Numerical Time Integration
Methods", *J. appl. Mech* , Vol. 40, pp. 417-420, 1973
- [21] Borri M., Mello, F. and Atluri, S. N. , "Variational Approaches for
Dynamics and Time-Finite-Elements: Numerical Studies", *Computational
Mechanic* , Vol. 7, pp. 49-76, 1990
- [22] 蔡秉宏, “以有限元素法分析三維旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與自由振
動”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2010
- [23] Hsiao K. M. , Lin W. Y. , "Co-rotational Formulation for Geometric
Nonlinear Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled Beams", *Computer
Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6023-6052,
2001.
- [24] Chung T. J. , "Continuum Mechanics", *Prentice-Hall N. J.*, 1988.
- [25] Cardna A. ,and Geradin M. , "Time Integration of the Equations of
Motion in Mechanism Analysis", *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 3,
pp. 801-820, 1989
- [26] Bathe K. J. , "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", The
Southeast Book Company, Prentice-Hall, Inc., Englewood cliffs, New
Jersey, 1982

- [27] Simo J. C. , Vc-Quoc L. , "On the Dynamics in Space of Rods Undergoing Large Motions –a Geometrically Exact Approach", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 125-161, 1988
- [28] LE T. N. , Battini J. M. , Hjiat M. , "A New Corotational Element for Nonlinear Dynamic Analysis of 3D Beams", *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.12–14, 2013
- [29] Iura, M. , Atluri S. N., "Dynamic Analysis of Finitely Stretched and Rotated Three-Dimension Space-Curved Beams", *Computers and Structures*, Vol. 29, No. 5, pp. 875-889, 1988
- [30] Katsikadelies J. T., Tsiatas G. C., "Non-linear dynamic analysis of beams with variable stiffness", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, pp. 847-863, 2004
- [31] Katsikadelies J. T., Tsiatas G. C., "Non-linear Effects in Elastic Flexural-Torsional Vibrations of Beams of Arbitrary Cross Section", *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 25–28, 2011
- [32] McNamara J. E. , "Solution schemes for problems of nonlinear structural dynamics", *Journal of Pressure Vessel Technology*, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 96, pp. 96–102, 1974
- [33] Mondkar D. P. ,and Powell G. H. , "Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11 pp. 499–520, 1977
- [34] Yang T. Y. ,and Saigal S. , "A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 20 pp 851–867, 1984

- [35] Leung A. Y. T. ,and Mao S. G. , "Symplectic integration of an accurate beam finite element in non-linear vibration", *Computers and Structures*, Vol. 54 pp. 1135–1147, 1995
- [36] Henrik H. , Palacios R., "Consistent structural linearization in flexible-body dynamics with large rigid-body", *Computers and Structures*, Vol 25–28, 2011

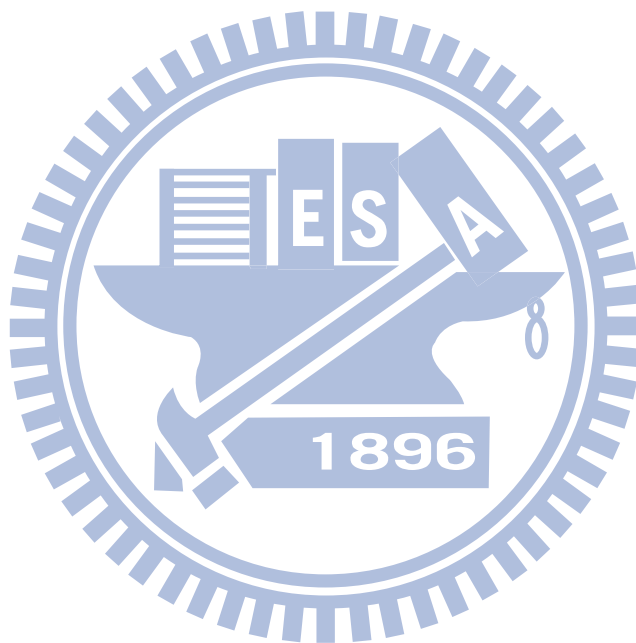


表一 例題一 Newmark 法在 A_{ij} 之迭代次數(i 為剛度類型, j 為慣性矩陣類型)

Number of Element	Δt	A11	A12	A13	A14	A21	A22	A23	A24	A31	A32	A33	A34
4	0.15	1252	1056	1085	1056	1245	1057	1083	1057	1258	1057	1082	1057
4	0.2	926	822	866	820	925	815	865	816	929	816	868	816
8	0.15	1020	1006	1092	1006	1013	1006	1092	1006	1017	1005	1091	1004
8	0.2	927	918	1017	918	925	918	1019	919	894	884	988	884

表二 例題一 CDM 法在 Bi 之容許最大時間增量(i 質量矩陣類形)

Number of Element	B1	B2
4	0.003	0.002
8	0.001	0.001



表三 例題三之 I 型斷面性質

Section geometry of I section:	
$d = 0.56\text{ m}, b = 0.3\text{ m}$	
$t_f = 0.03\text{ m}, t_w = 0.012\text{ m}$	
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.024
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	1.41428×10^{-3}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	1.35076×10^{-4}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	1.16417×10^{-4}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	5.70528×10^{-6}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	9.49229×10^{-6}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	9.47204×10^{-6}

表四 例題五之 I 型斷面性質

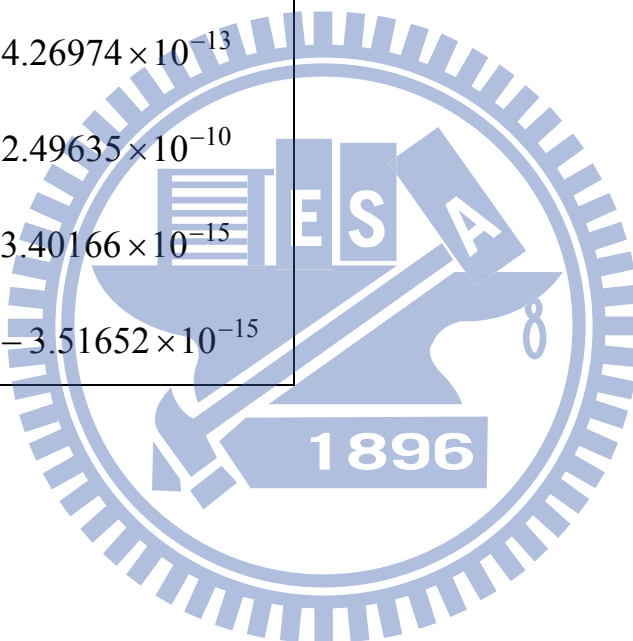
Section geometry of I section:	
$d = 13.66in, b = 7.995in$	
$t_f = 0.53in, t_w = 0.305in$	
$A \text{ (in}^2\text{)}$	12.3177
$I_y \text{ (in}^4\text{)}$	4.16284×10^2
$I_z \text{ (in}^4\text{)}$	45.1717
$K_I \text{ (in}^6\text{)}$	2.13311×10^4
$J \text{ (in}^4\text{)}$	0.912679
$I_\omega \text{ (in}^6\text{)}$	1.95217×10^3
$\alpha_{\omega yz} \text{ (in}^6\text{)}$	1.94492×10^3

表五 例題六之 I 型斷面性質

Section geometry of I section: $d = 0.28194\text{ m}, b = 0.262636\text{ m}$, $t_f = 0.028448\text{ m}, t_w = 0.017272\text{ m}$	
$A \text{ (m}^2\text{)}$	1.88229×10^{-2}
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	2.57464×10^{-4}
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	8.59907×10^{-5}
$K_I \text{ (m}^6\text{)}$	7.73902×10^{-6}
$J \text{ (m}^4\text{)}$	4.41757×10^{-6}
$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	1.39226×10^{-6}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (m}^6\text{)}$	1.37446×10^{-6}

表六 例題七之矩型斷面性質

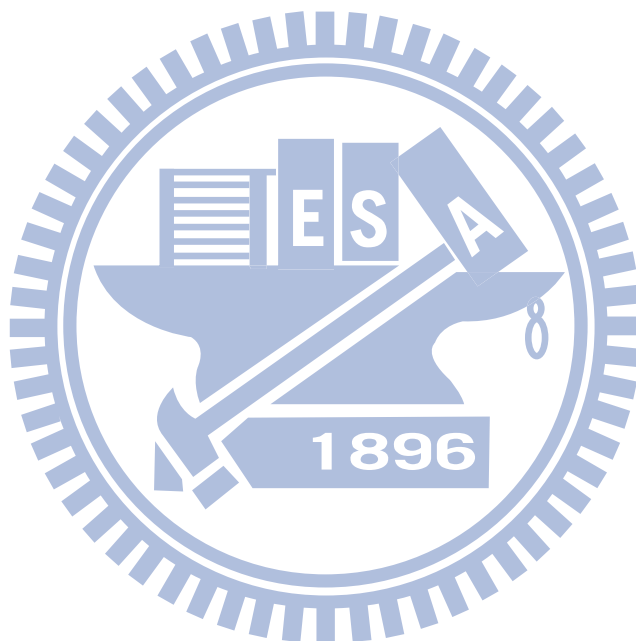
Section geometry of rectangle section: $b = 0.0254\text{ m}, h = 0.003175\text{ m}$	
$A\ (m^2)$	8.0645×10^{-5}
$I_y\ (m^4)$	6.7746×10^{-11}
$I_z\ (m^4)$	4.33574×10^{-9}
$K_I\ (m^6)$	4.26974×10^{-13}
$J\ (m^4)$	2.49635×10^{-10}
$I_\omega\ (m^6)$	3.40166×10^{-15}
$\alpha_{\omega yz}\ (m^6)$	-3.51652×10^{-15}



表七 例題七之週期與 T 與最大位移 w_{\max}

	Present	Ref[30]	Ref[32]	Ref[33]	Ref[34]	Ref[35]
$w_{\max} (m)$	0.01971	0.0196	0.02286	0.01956	0.01956	0.01946
$T (\mu s)$	2300	2275	2884	2300	2300	2151

$T(\mu s)$ 為第一次到最低點所需的時間



表八 例題八 兩個元素之質心位置分析

Time	Present			Analytical		
	X_1^c	X_2^c	$X_3^c(10^{-2})$	X_1^c	X_2^c	X_3^c
0	-3.0	4.0	0.0	-3.0	4.0	0.0
2.5	-2.3021	3.99996	-0.00065	-2.3056	4.0	0.0
5	1.1676	3.99949	-0.07394	1.1667	4.0	0.0
7.5	5.3355	3.99901	-0.20713	5.3334	4.0	0.0
10	9.5043	3.99740	-0.32818	9.5000	4.0	0.0
12.5	13.6722	3.99612	-0.36104	13.6667	4.0	0.0
15	17.8399	3.99510	-0.42373	17.8334	4.0	0.0
17.5	22.0078	3.99482	-0.55443	22.0001	4.0	0.0
20	26.1766	3.99337	-0.67626	26.1667	4.0	0.0
22.5	30.3446	3.99196	-0.73313	30.3334	4.0	0.0
25	34.5122	3.99074	-0.77492	34.5001	4.0	0.0
27.5	38.6801	3.99061	-0.89592	38.6668	4.0	0.0
30	42.8488	3.98932	-1.0225	42.8334	4.0	0.0

總體座標的原點為 B 點 $t = 0$ 時的位置

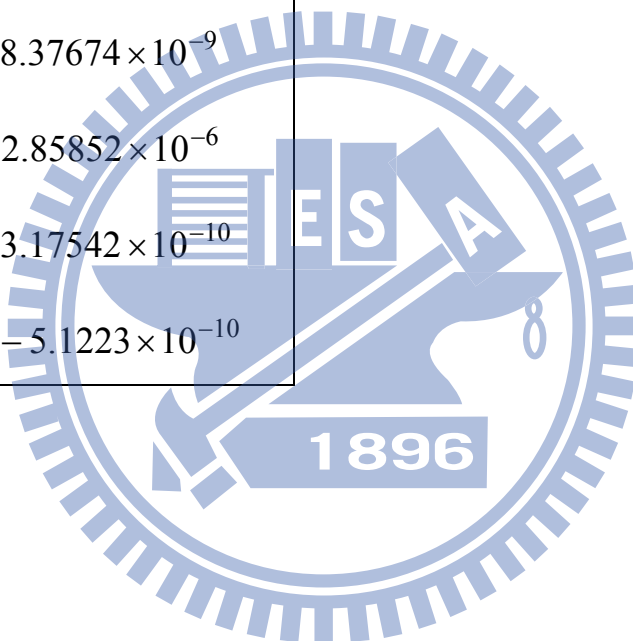
表九 例題八 十個元素之質心位置分析

Time	Present			Analytical		
	X_1^c	X_2^c	$X_3^c(10^{-3})$	X_1^c	X_2^c	X_3^c
0	-3.0	4.0	0.0	-3.0	4.0	0.0
2.5	-2.3020	4.0	-0.0003	-2.3056	4.0	0.0
5	1.1667	3.99998	-0.0287	1.1667	4.0	0.0
7.5	5.3334	3.99996	-0.0819	5.3334	4.0	0.0
10	9.5002	3.99990	-0.1309	9.5000	4.0	0.0
12.5	13.6669	3.99984	-0.1440	13.6667	4.0	0.0
15	17.8336	3.99980	-0.1681	17.8334	4.0	0.0
17.5	22.0003	3.99979	-0.2198	22.0001	4.0	0.0
20	26.1671	3.99973	-0.2698	26.1667	4.0	0.0
22.5	30.3338	3.99968	-0.2938	30.3334	4.0	0.0
25	34.5005	3.99963	-0.3091	34.5001	4.0	0.0
27.5	38.6672	3.99962	-0.3559	38.6668	4.0	0.0
30	42.8339	3.99957	-0.4083	42.8334	4.0	0.0

總體座標的原點為 B 點 $t = 0$ 時的位置

表十 例題九之矩型斷面性質

Section geometry of rectangle section: $b = 0.1m, h = 0.05m$	
$A \ (m^2)$	5×10^{-3}
$I_y \ (m^4)$	1.04167×10^{-6}
$I_z \ (m^4)$	4.16667×10^{-6}
$K_I \ (m^6)$	8.37674×10^{-9}
$J \ (m^4)$	2.85852×10^{-6}
$I_{\omega} \ (m^6)$	3.17542×10^{-10}
$\alpha_{\omega yz} \ (m^6)$	-5.1223×10^{-10}



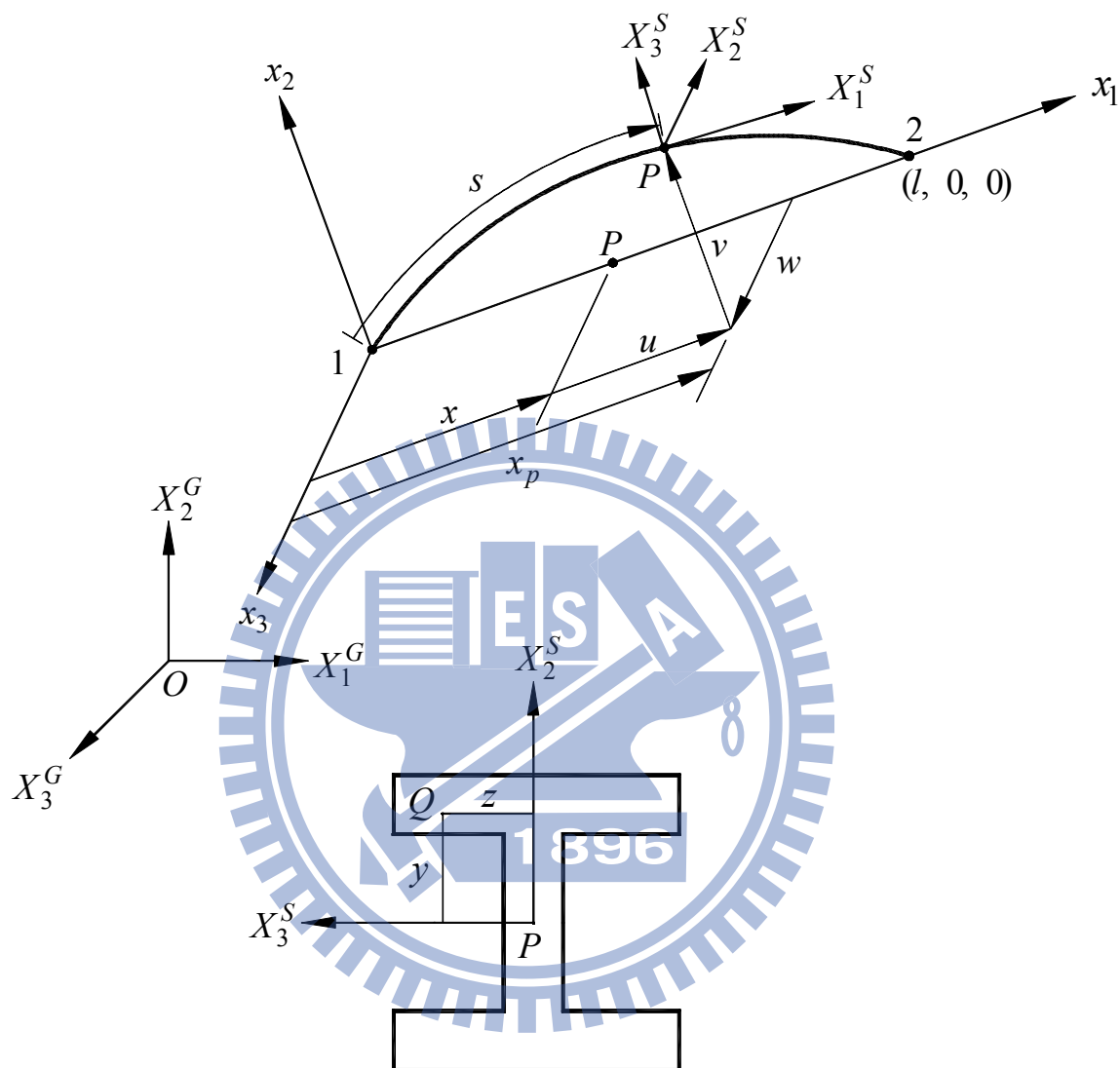
表十一 例題九質心位置分析

Time (sec)	Present			Analytical		
	$X_1^c (10^{-2} m)$	$X_2^c (m)$	$X_3^c (m)$	$X_1^c (m)$	$X_2^c (m)$	$X_3^c (m)$
0	0.0	0.0	0.83333	0.0	0.0	0.83333
2.5	-0.00032	0.1608	0.83333	0.0	0.1606	0.83333
5	-0.00149	1.2860	0.83325	0.0	1.2850	0.83333
7.5	0.01745	4.3403	0.83321	0.0	4.3369	0.83333
10	0.05090	10.2881	0.83335	0.0	10.2800	0.83333
12.5	0.06459	19.9334	0.83331	0.0	19.9237	0.83333
15	0.14539	33.4373	0.83329	0.0	33.4250	0.83333
17.5	0.25509	50.7987	0.83368	0.0	50.7838	0.83333
20	0.37435	72.0184	0.83387	0.0	72.0000	0.83333

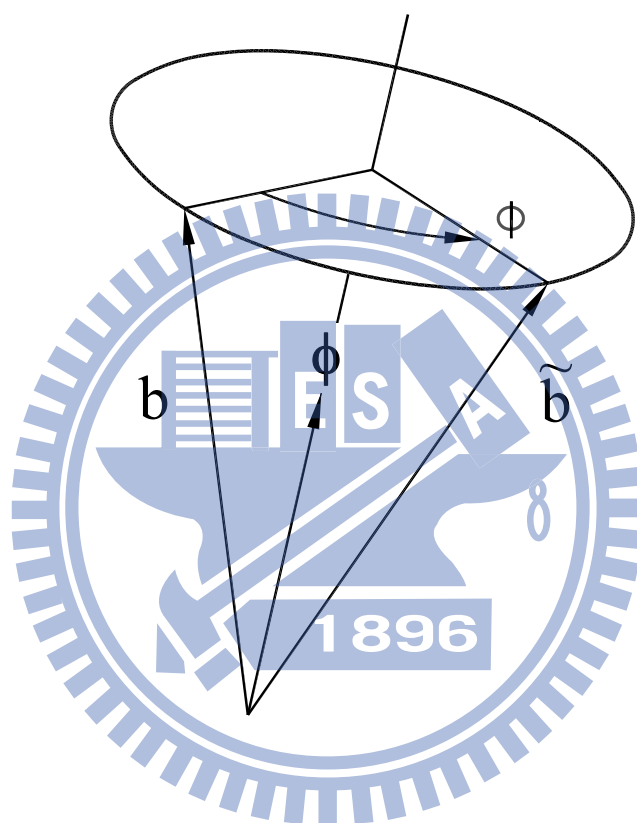
總體座標的原點為 C 點 $t=0$ 時的位置

表十二 例題十一之 I 型斷面性質

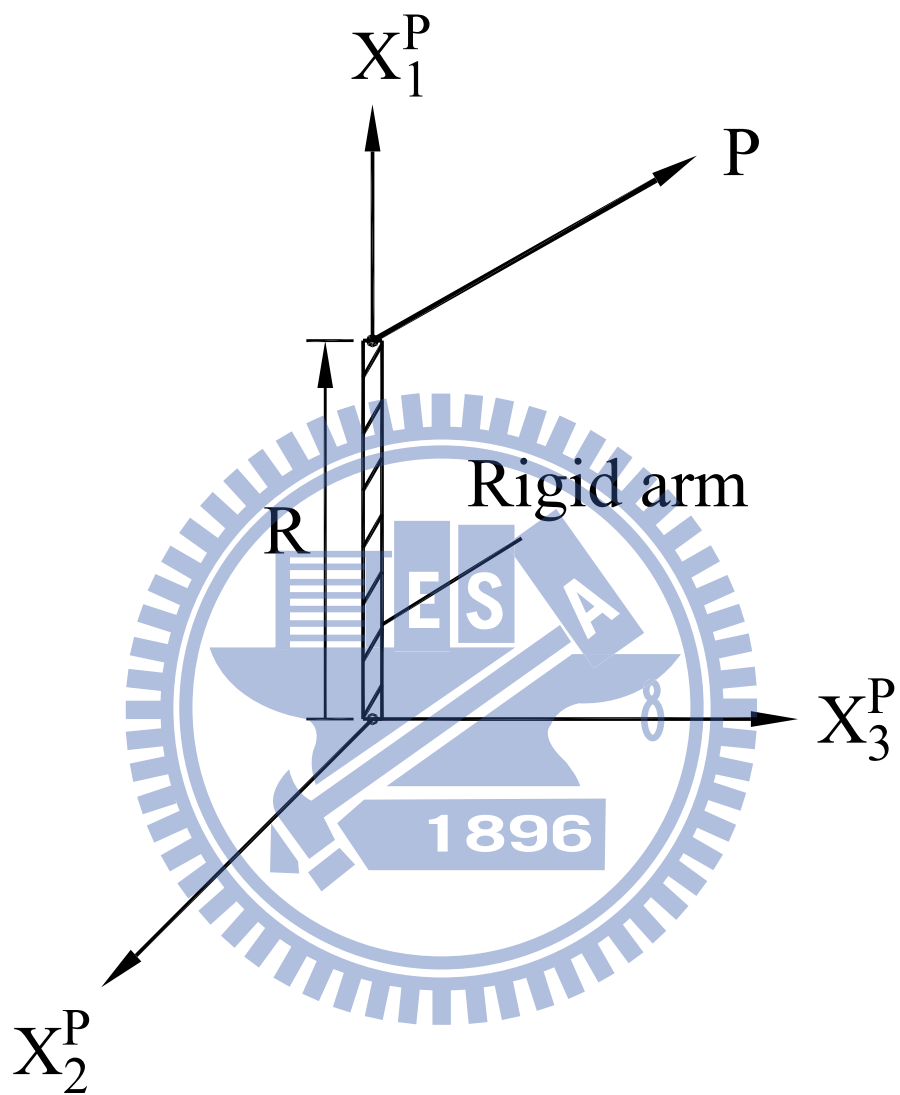
Section geometry of I section:	
$d = 21.62\text{ in}, b = 8.42\text{ in}$	
$t_f = 0.93\text{ in}, t_w = 0.58\text{ in}$	
$A \text{ (in}^2\text{)}$	27.122
$I_y \text{ (in}^4\text{)}$	2.05009×10^3
$I_z \text{ (in}^4\text{)}$	92.8482
$K_I \text{ (in}^6\text{)}$	2.22757×10^5
$J \text{ (in}^4\text{)}$	5.80026
$I_\omega \text{ (in}^6\text{)}$	5.80026
$\alpha_{\omega yz} \text{ (in}^6\text{)}$	9.90592×10^3



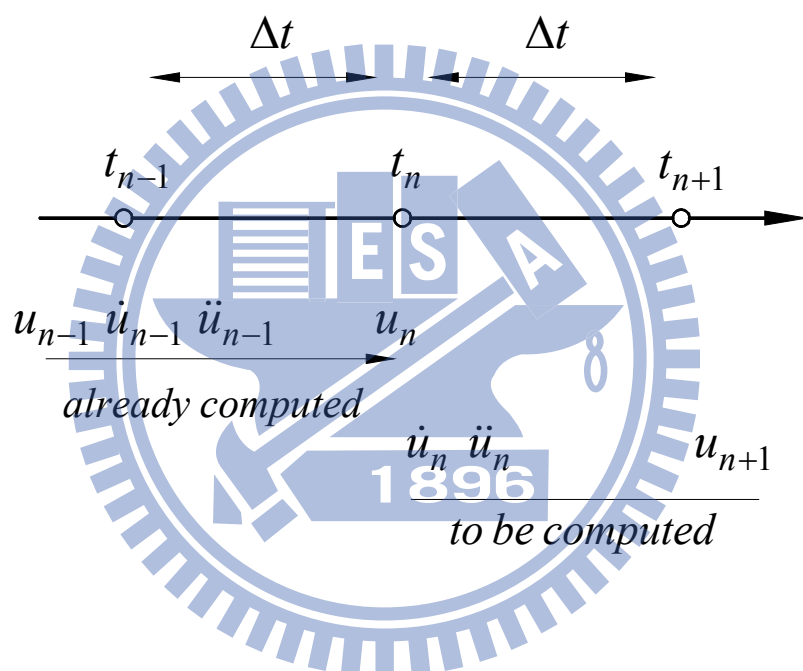
圖一 元素座標與元素截面座標



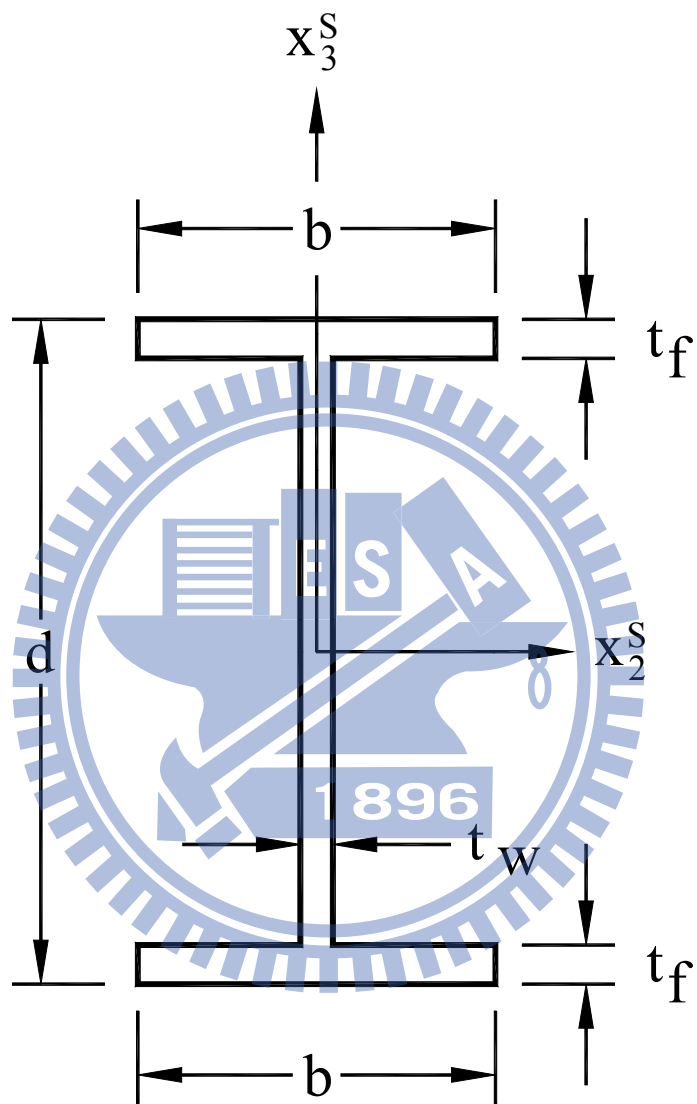
圖二 旋轉向量圖



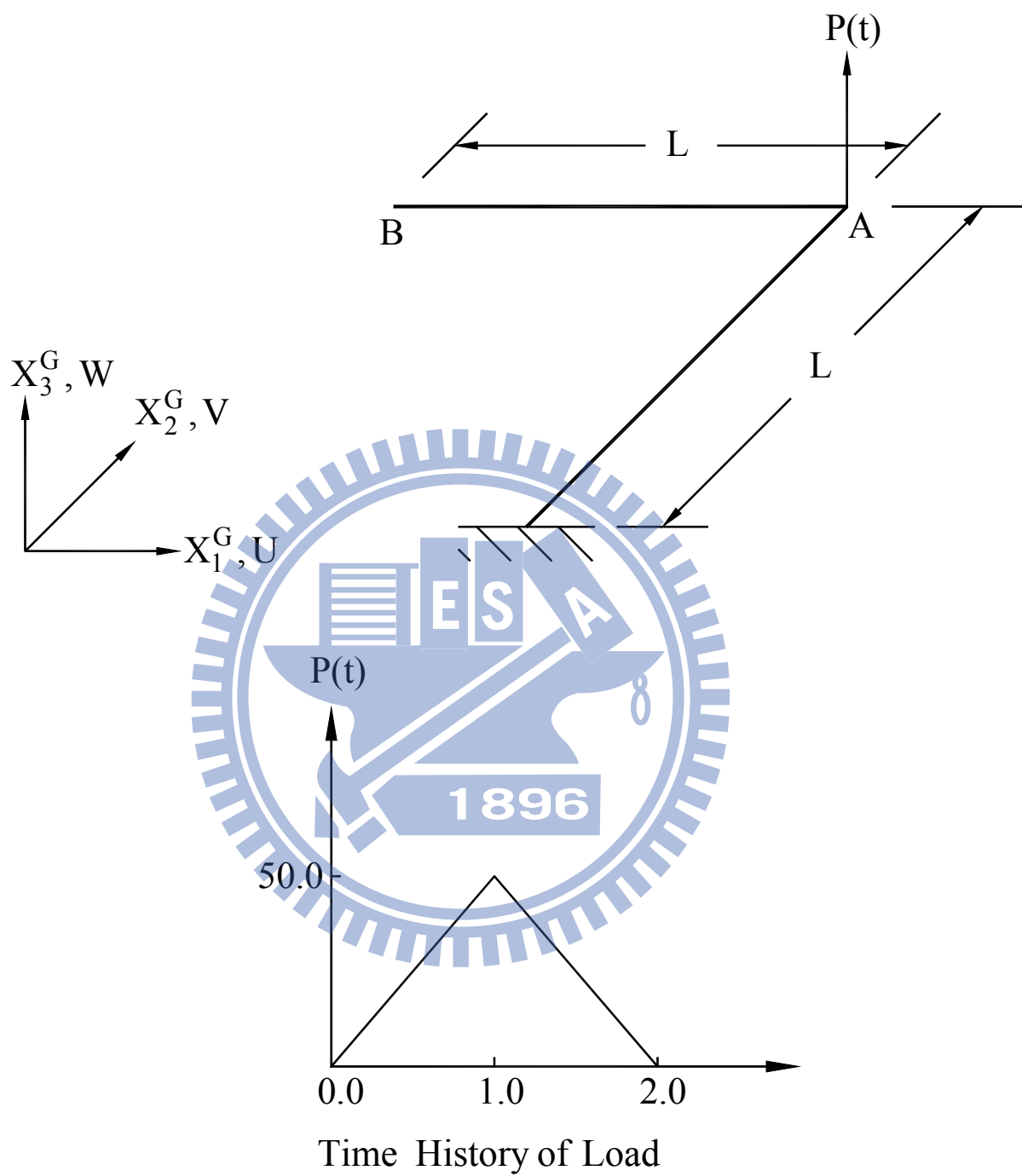
圖三 剛性桿受力作用機制圖



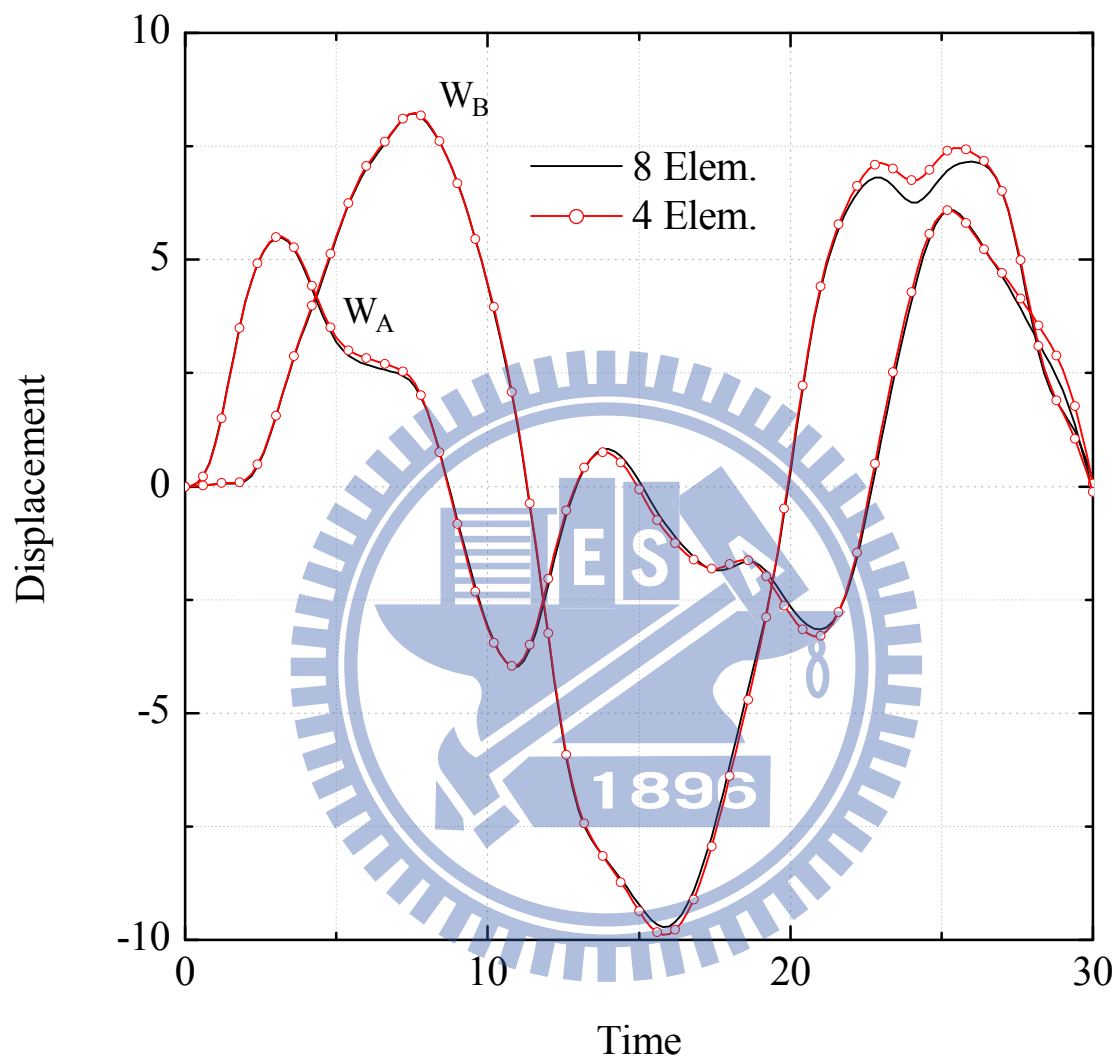
圖四 中央差分法示意圖



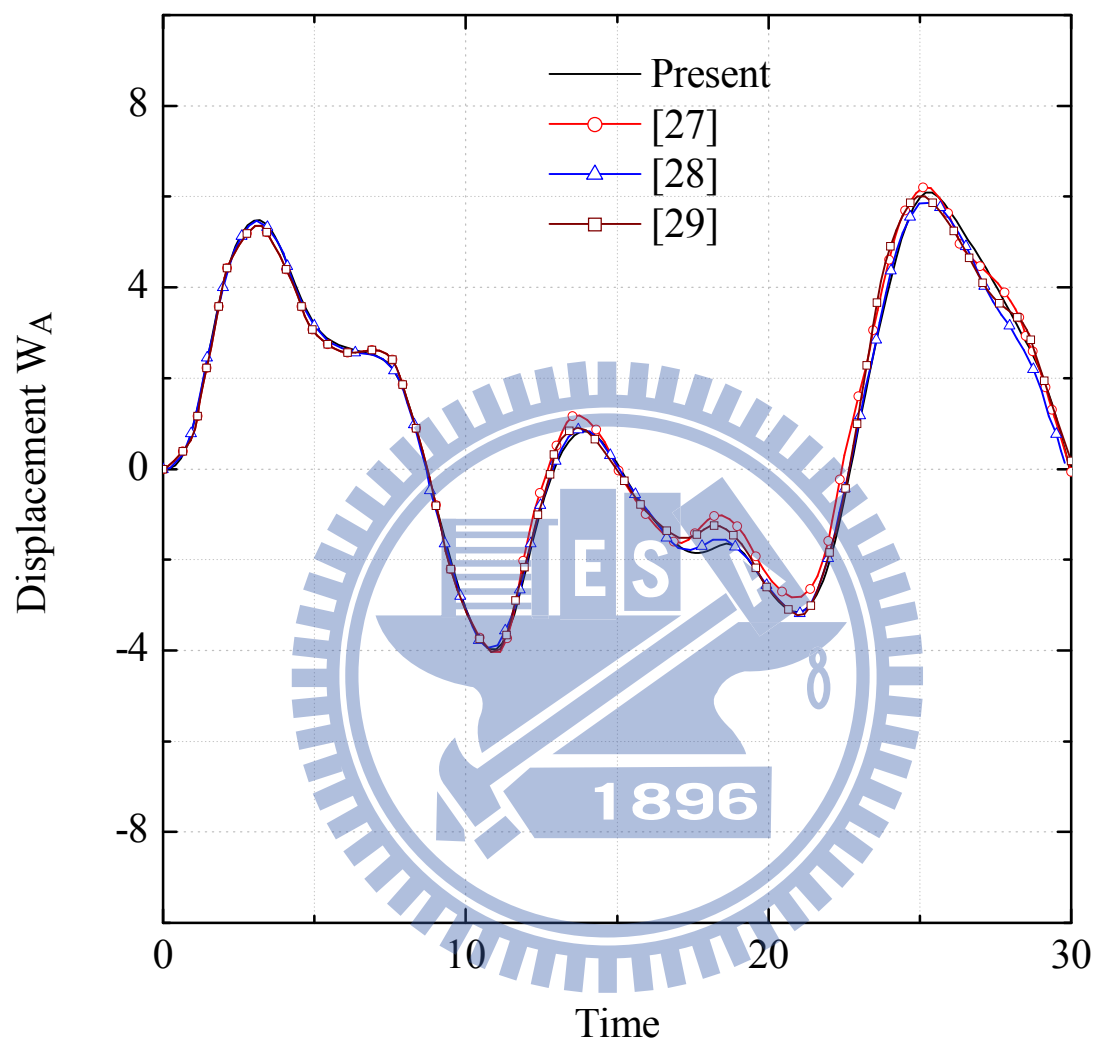
圖五 I 型斷面示意圖



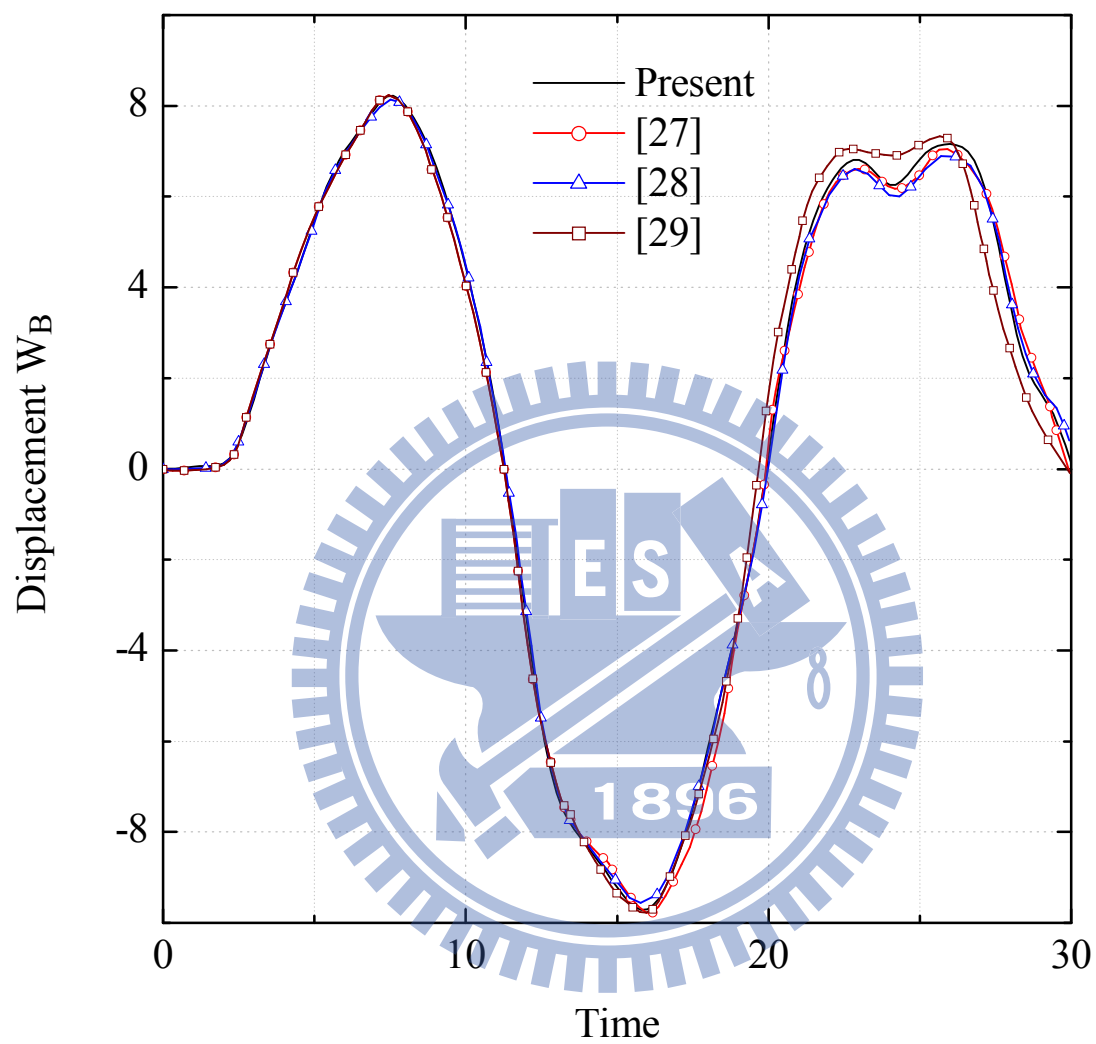
圖六 例題一懸臂直角梁之幾何及受力圖



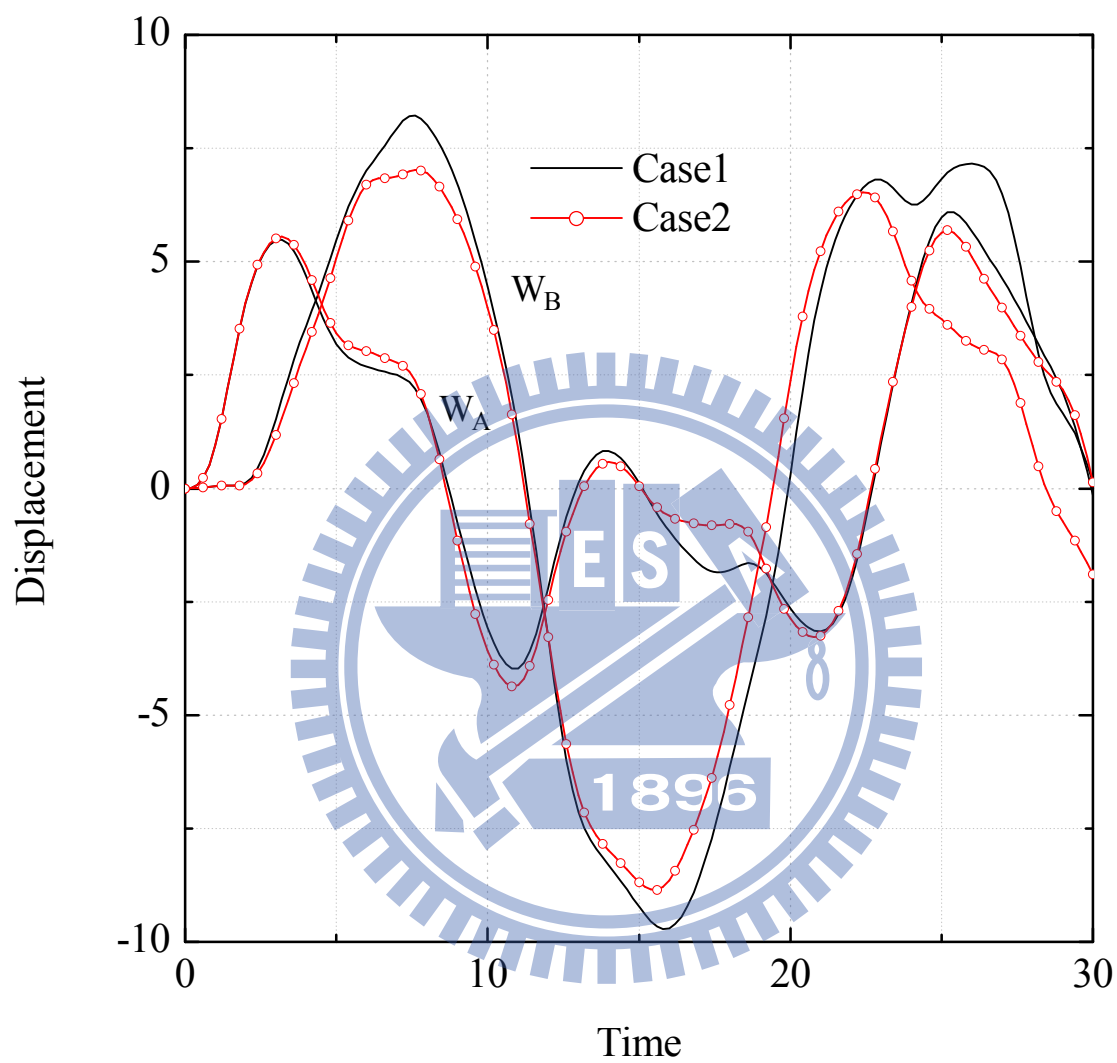
圖七 例題一 Newmark 法元素數不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較



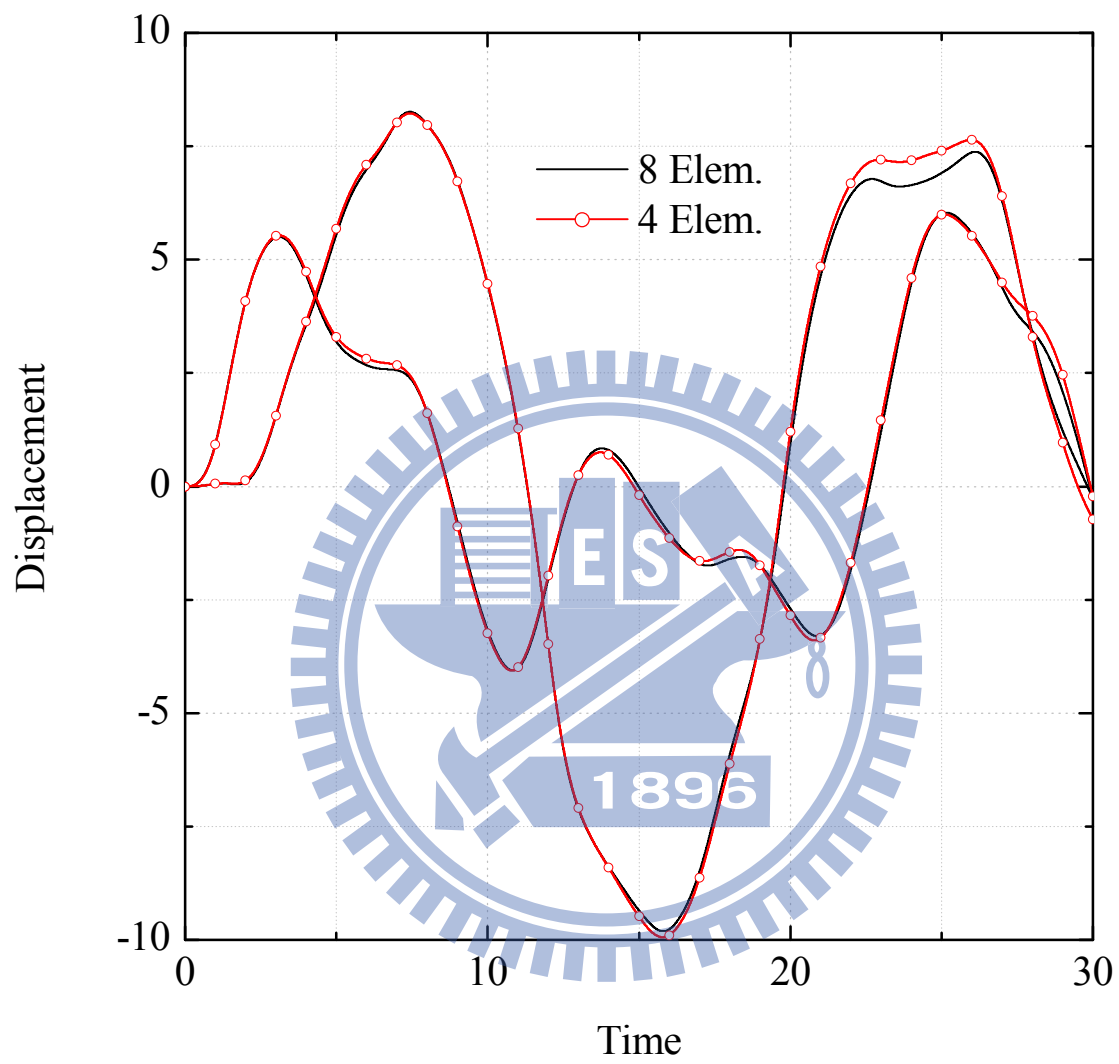
圖八 例題一 Newmark 積分法 A 點在 X_3^G 方向之位移



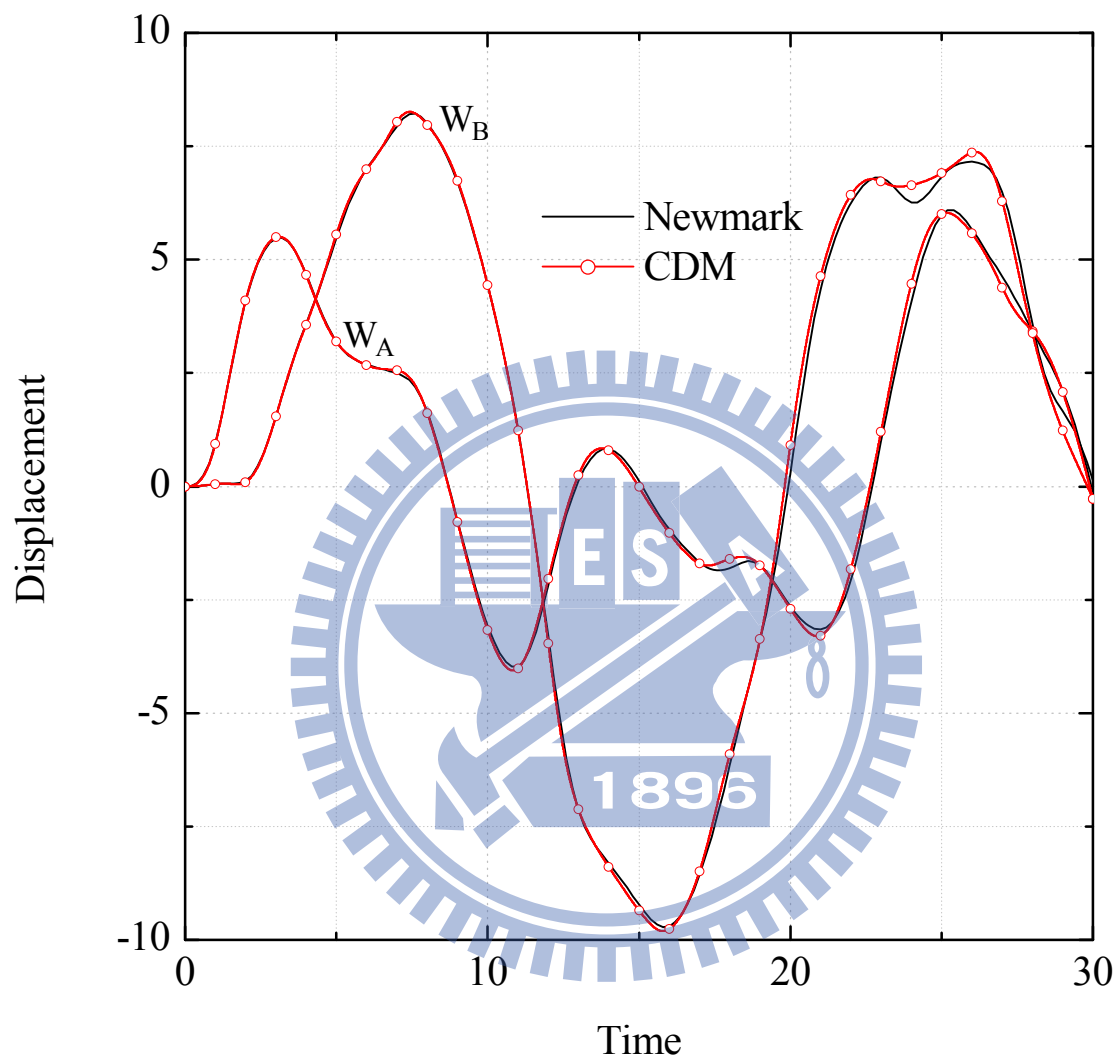
圖九 例題一 Newmark 法積分法 B 點在 X_3^G 方向之位移



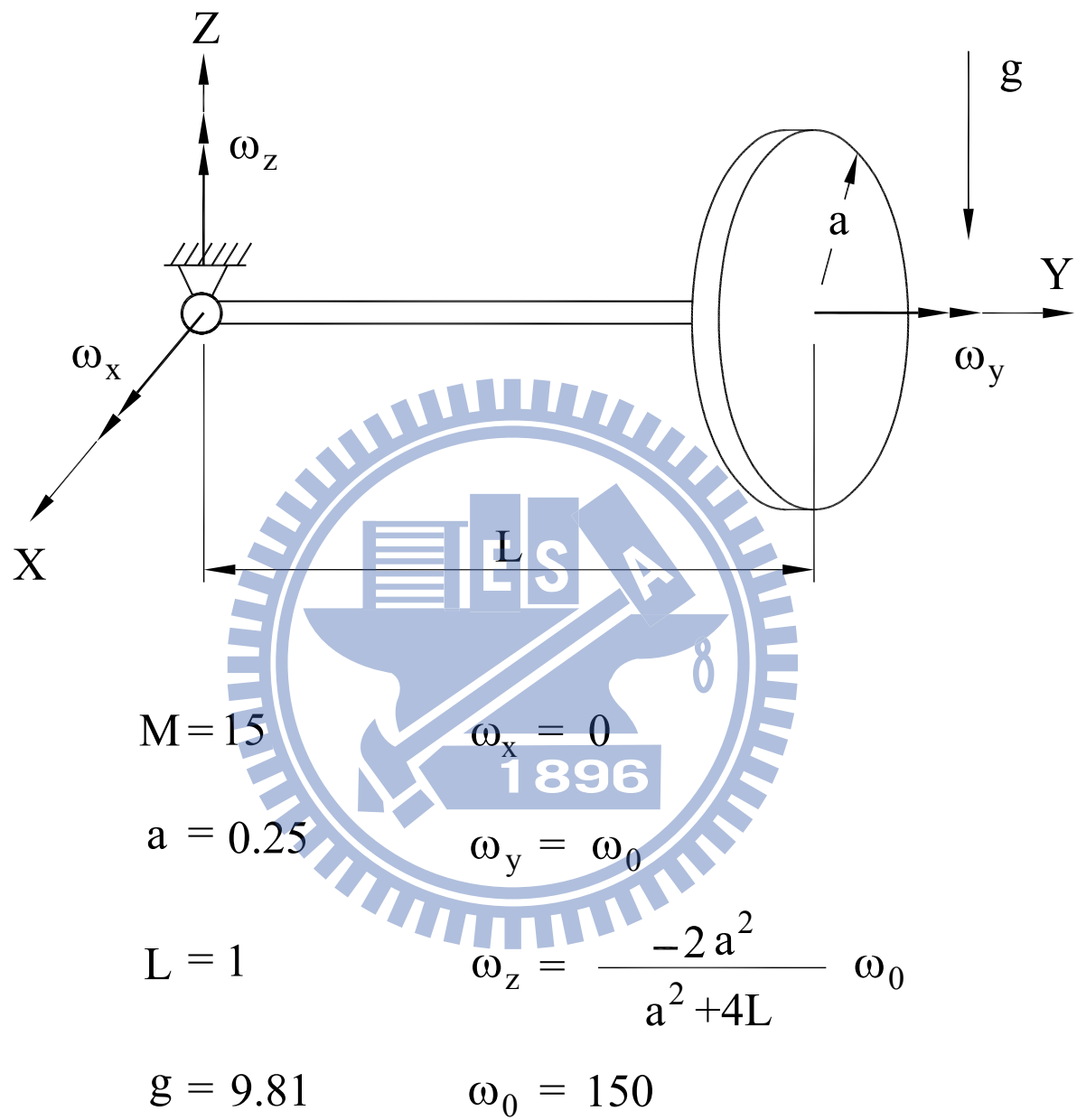
圖十 例題一 Newmark 法速度項影響之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較



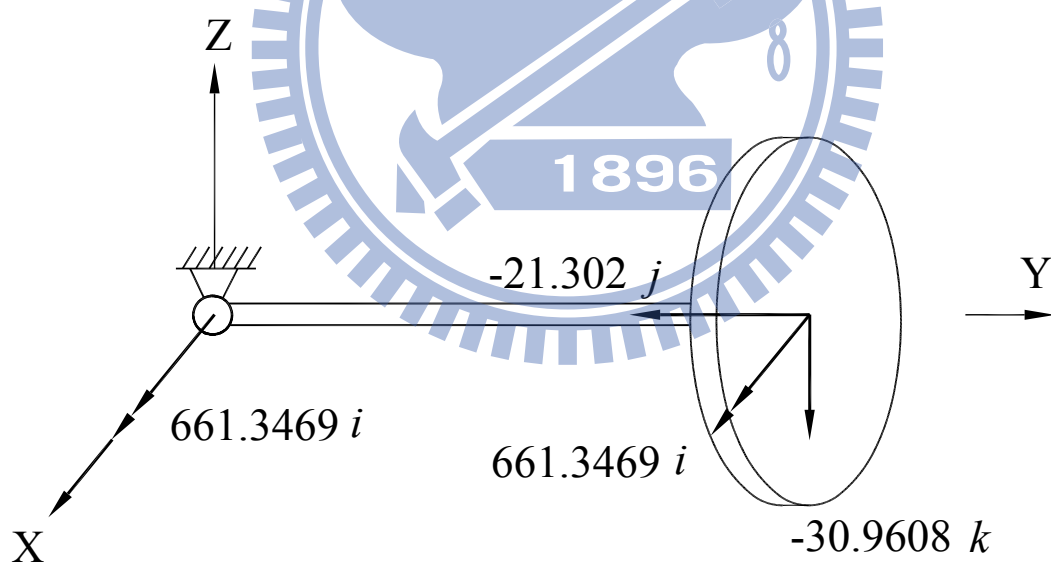
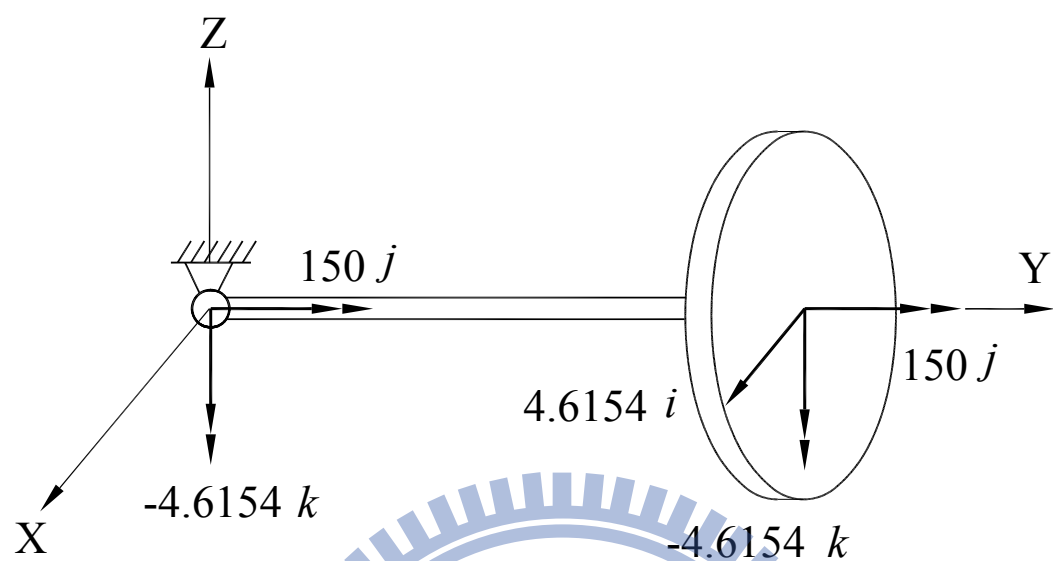
圖十一 例題一數值方法不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較



圖十二 例題一 CDM 法元素數不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較

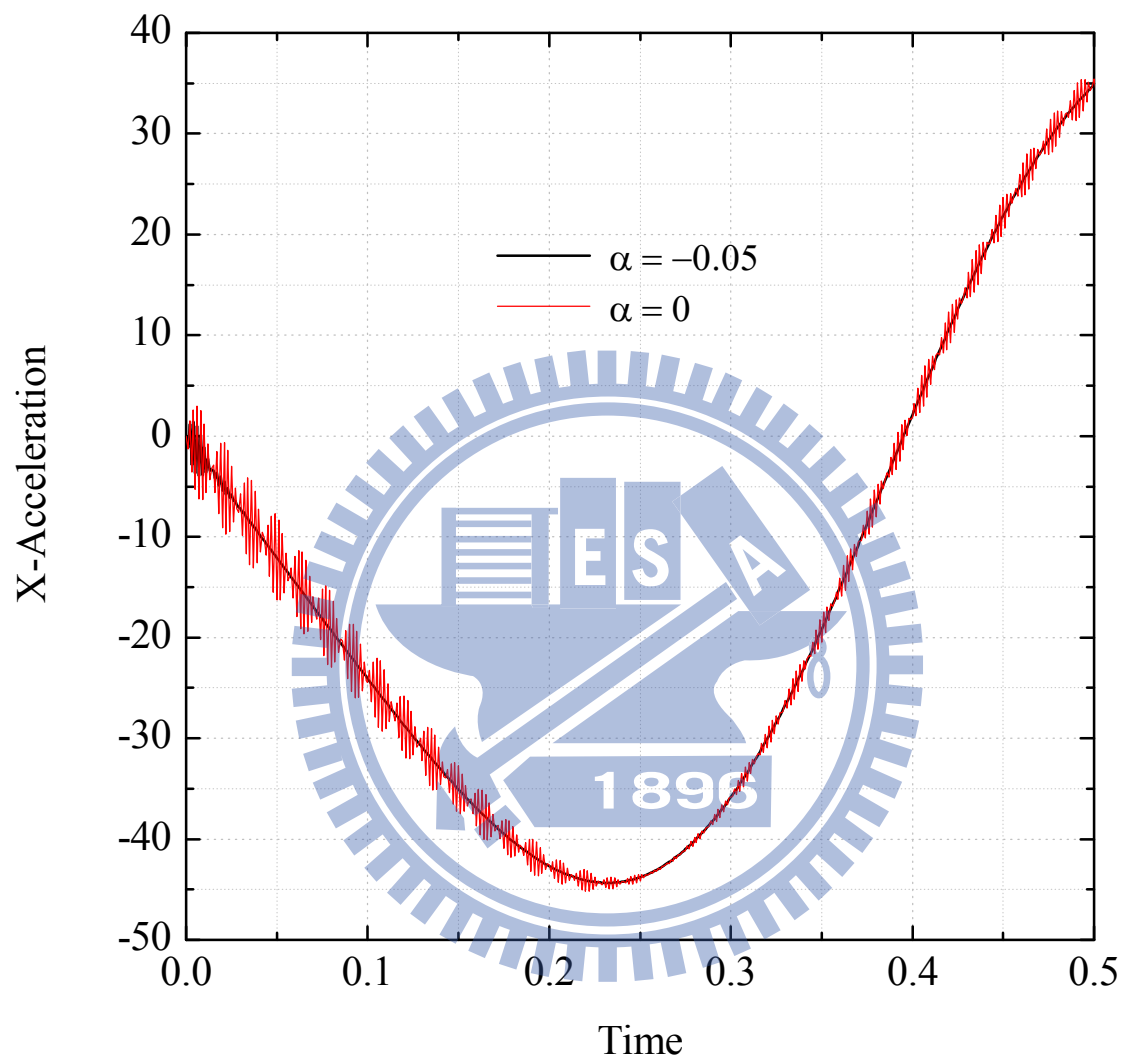


圖十三 例題二旋轉圓盤之幾何及受力圖

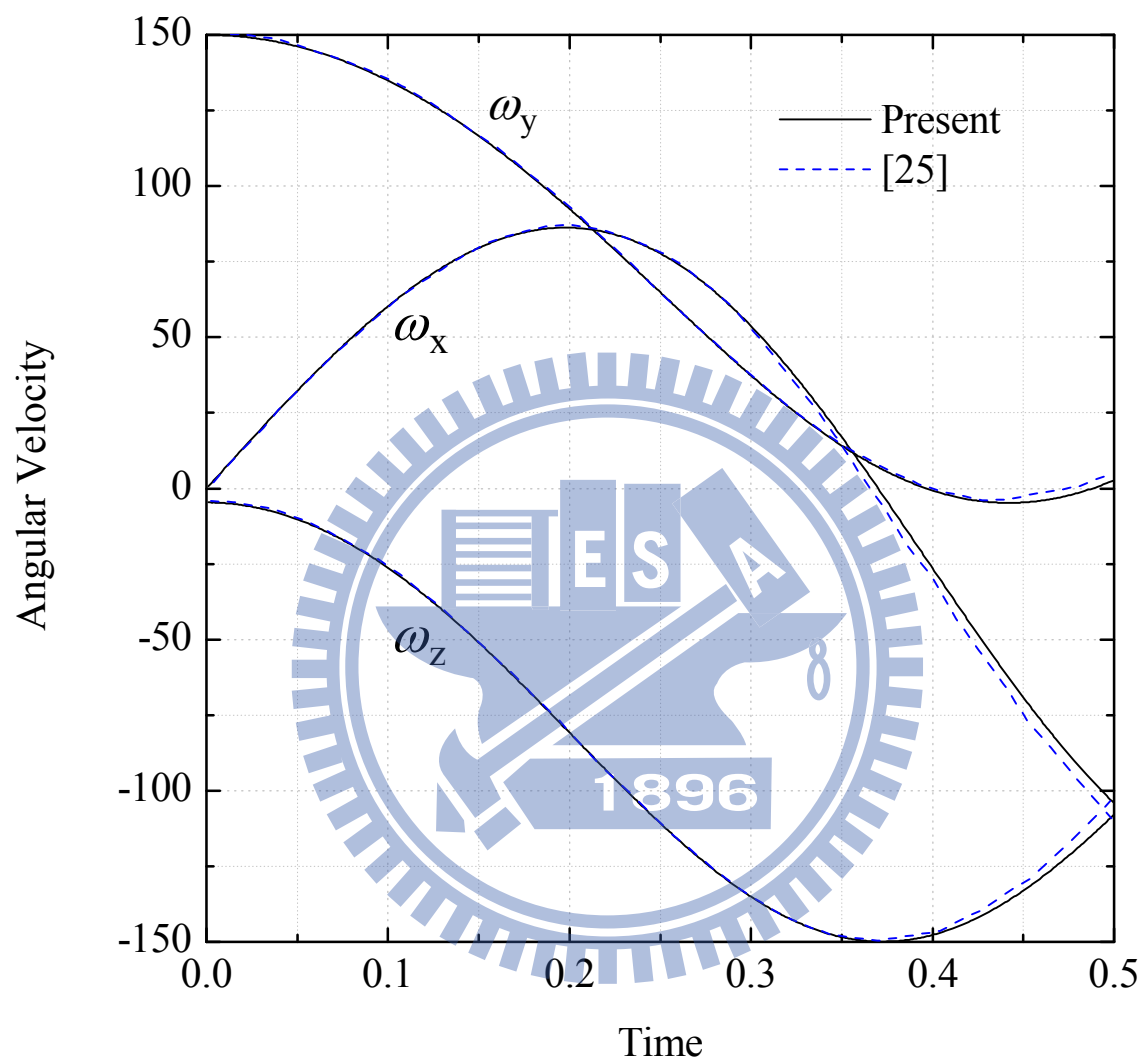


(b)

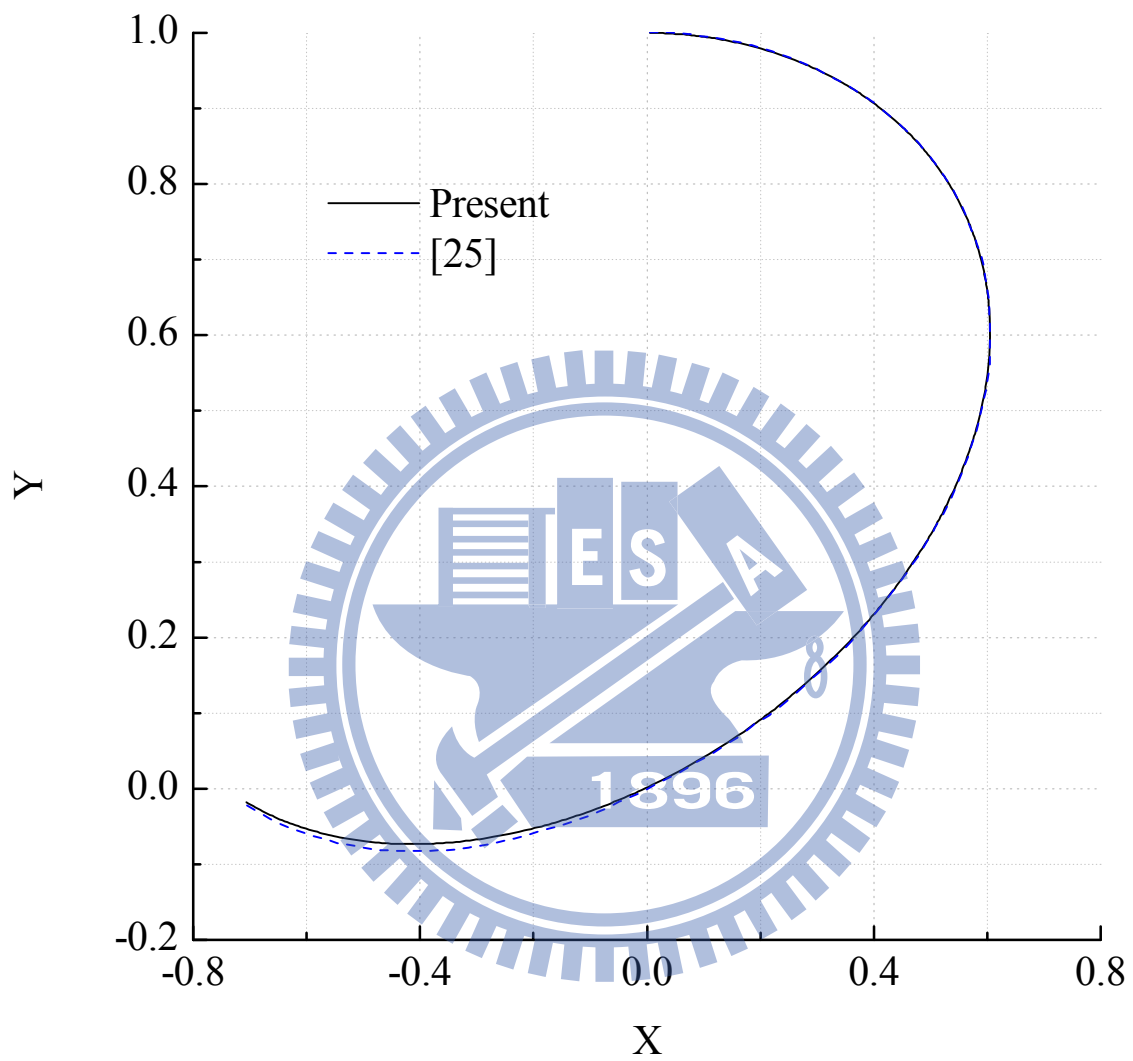
圖十四 例題二旋轉圓盤之初始速度



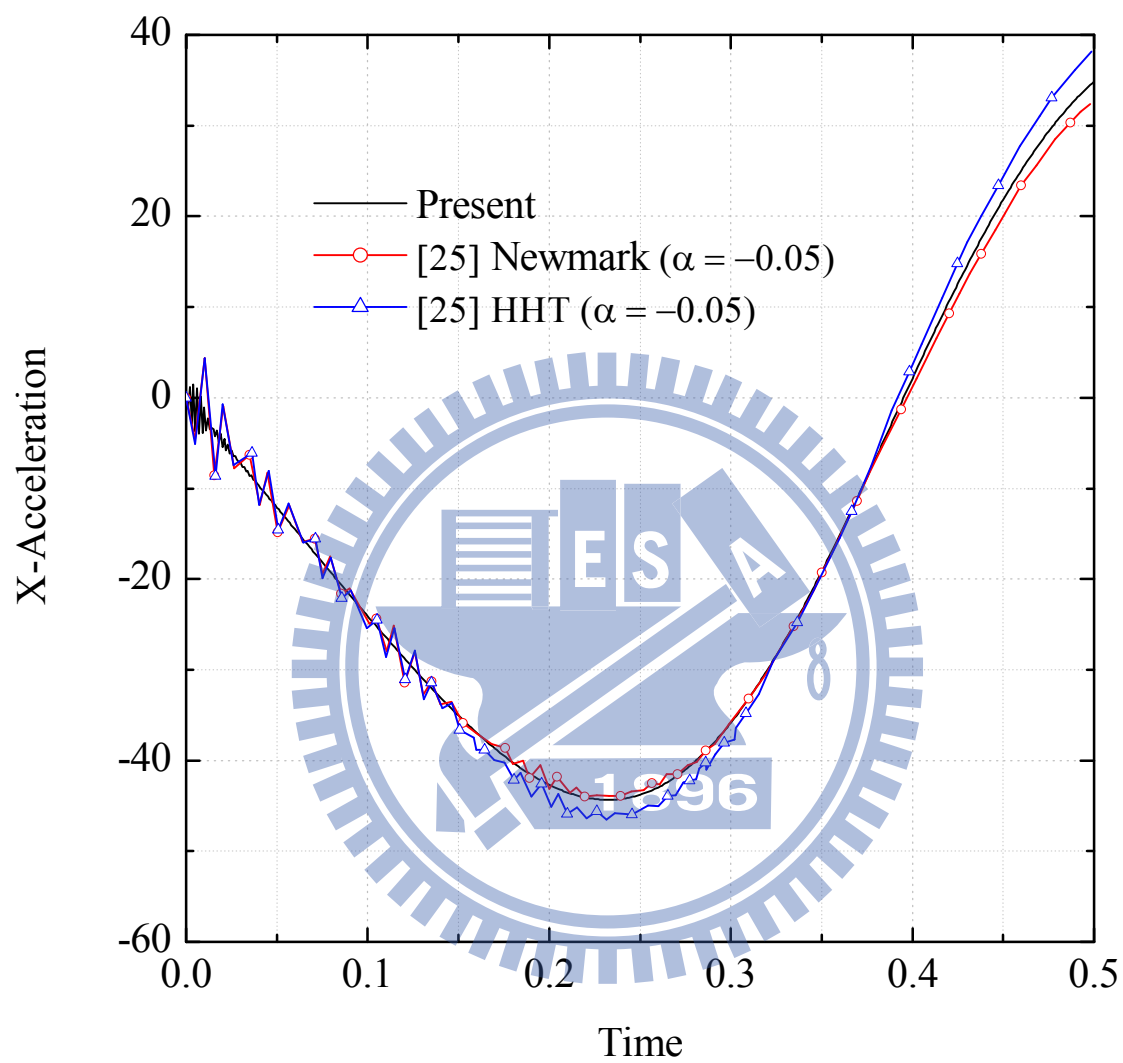
圖十五 例題二 Newmark 法之旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度



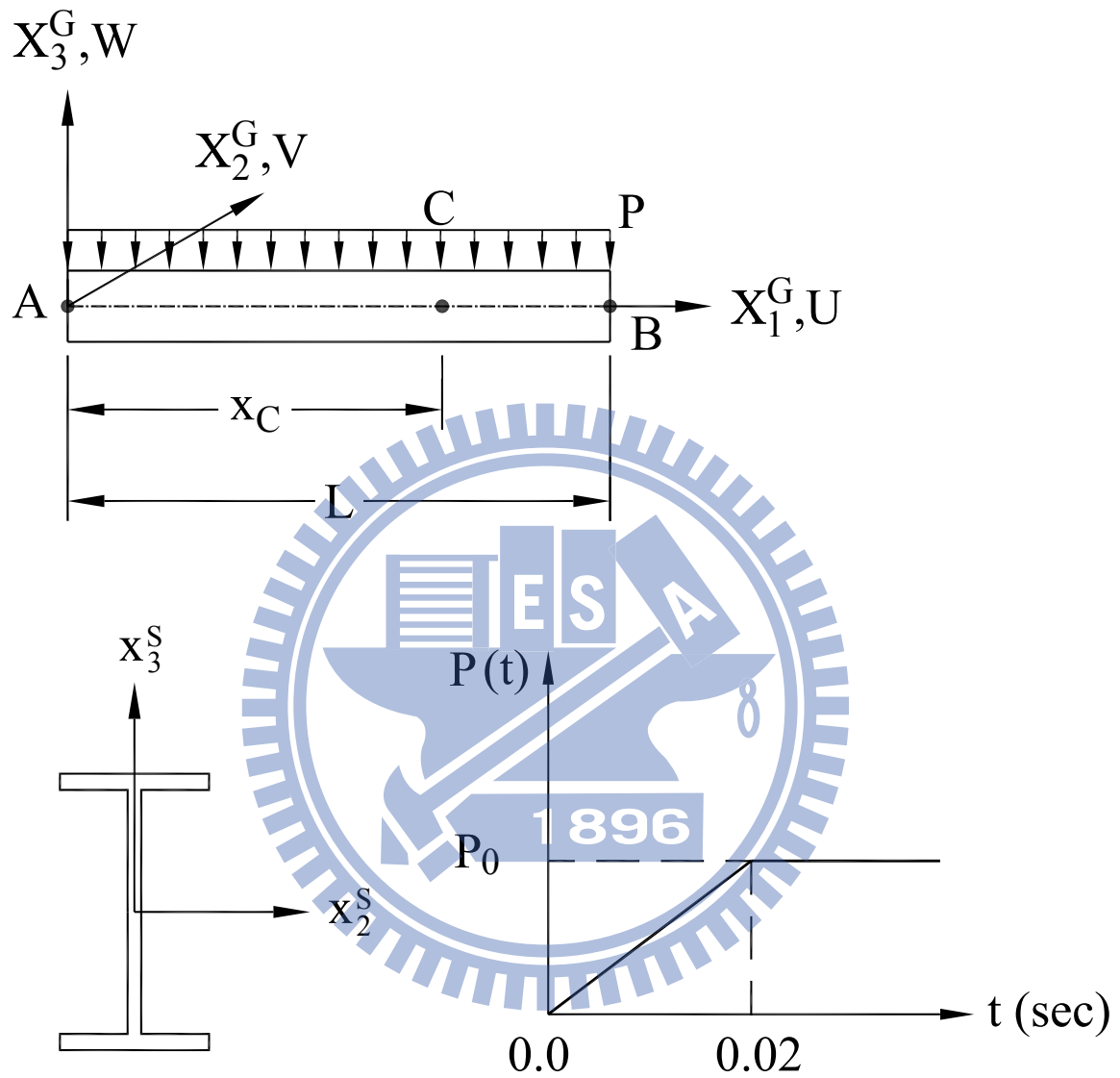
圖十六 例題二旋轉圓盤之角速度變化過程



圖十七 例題二旋轉圓盤中心在 XY 平面的運動軌跡



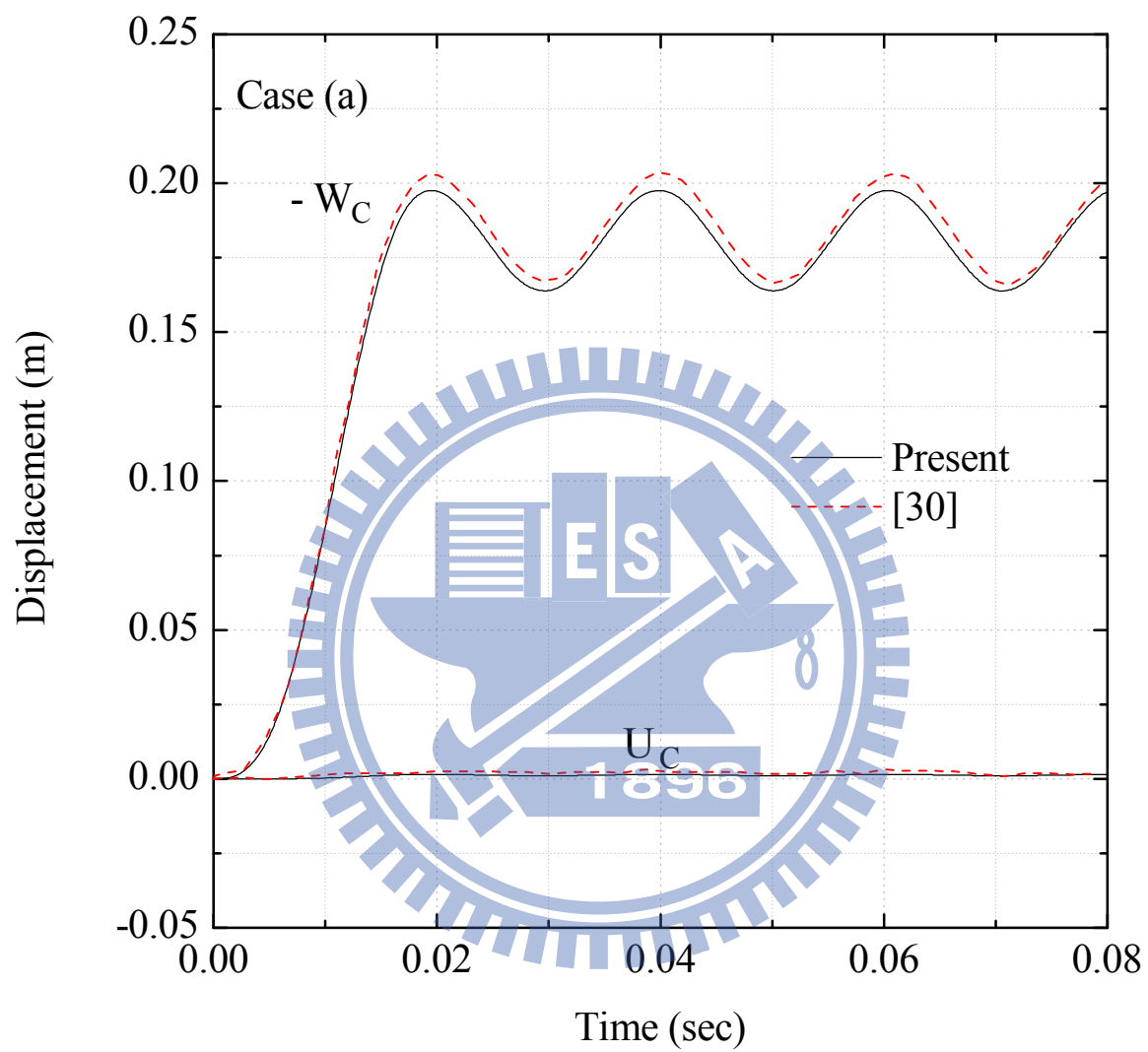
圖十八 例題二旋轉圓盤中心在 X 方向的加速度



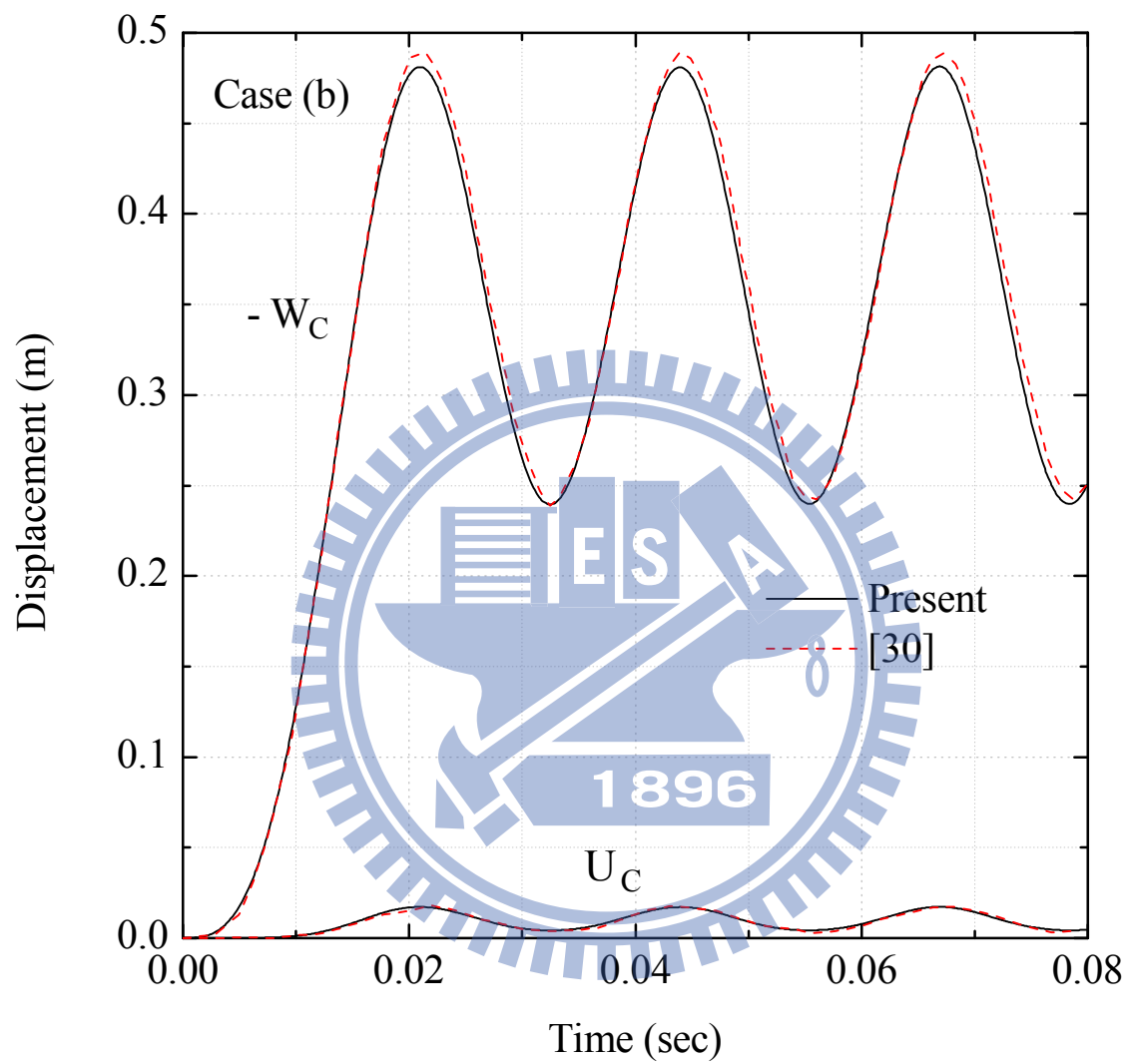
End cross section

Time History of Load

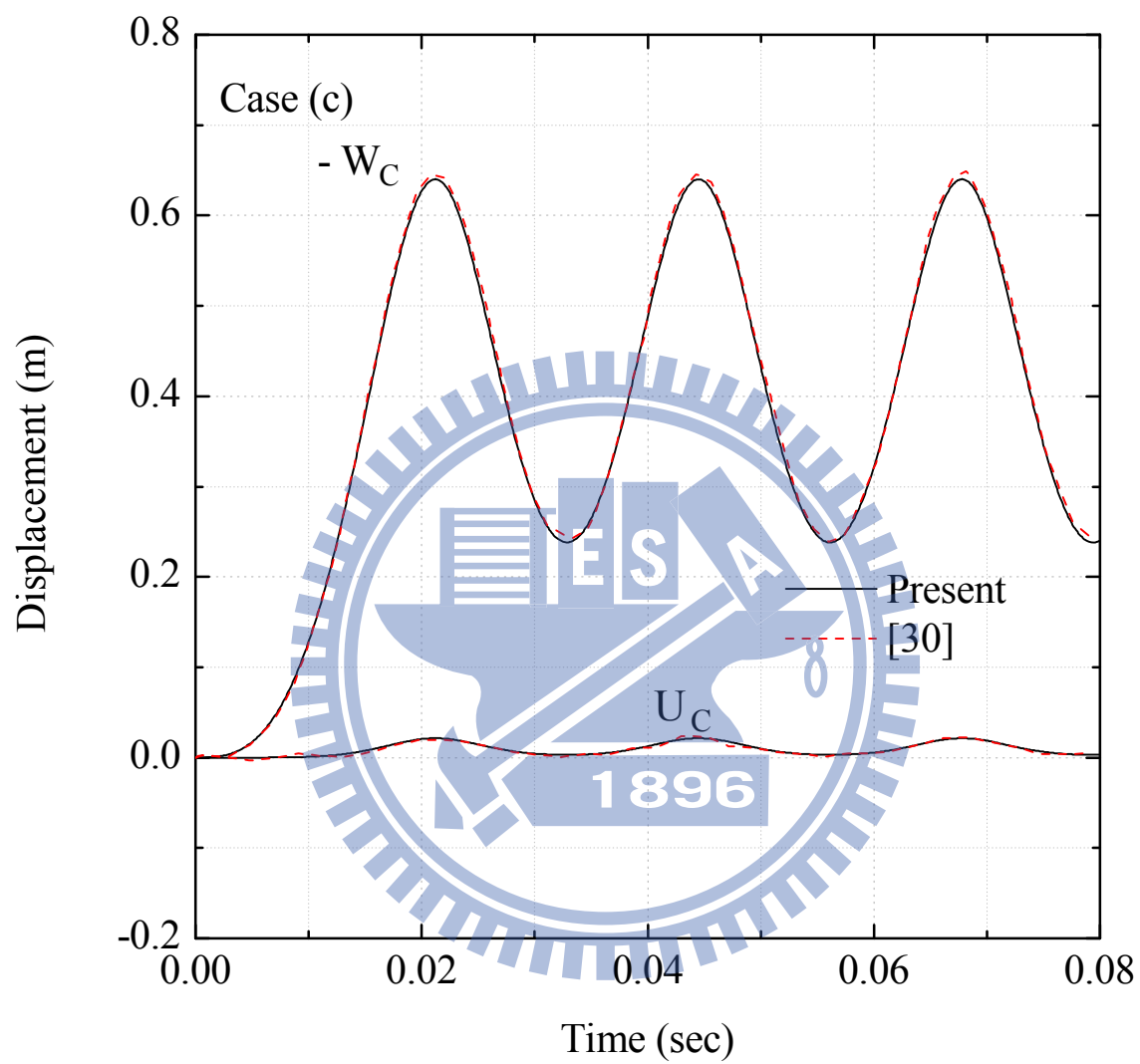
圖十九 例題三 I 型斷面梁之幾何及受力圖



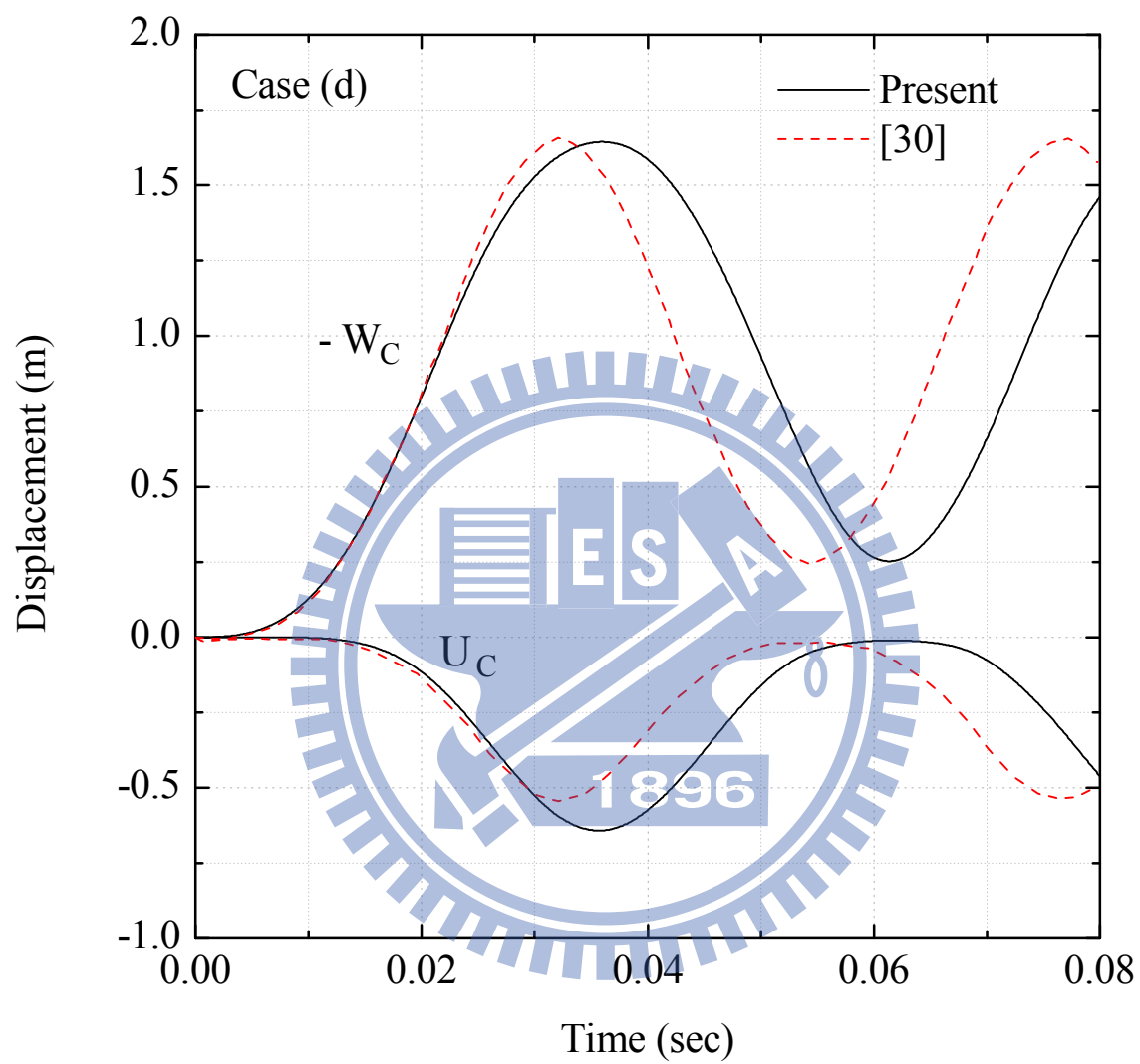
圖二十 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (a))



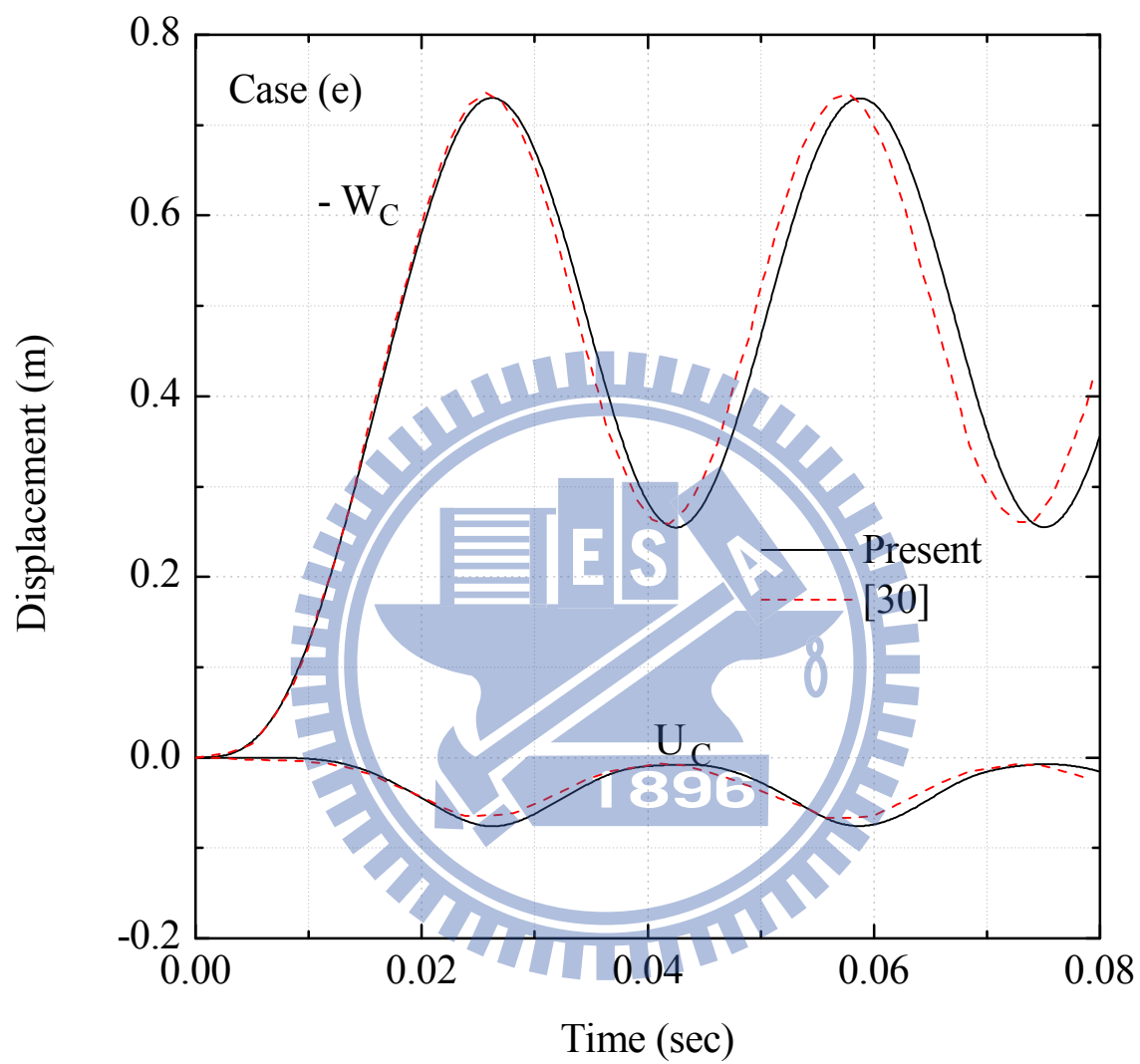
圖二十一 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (b))



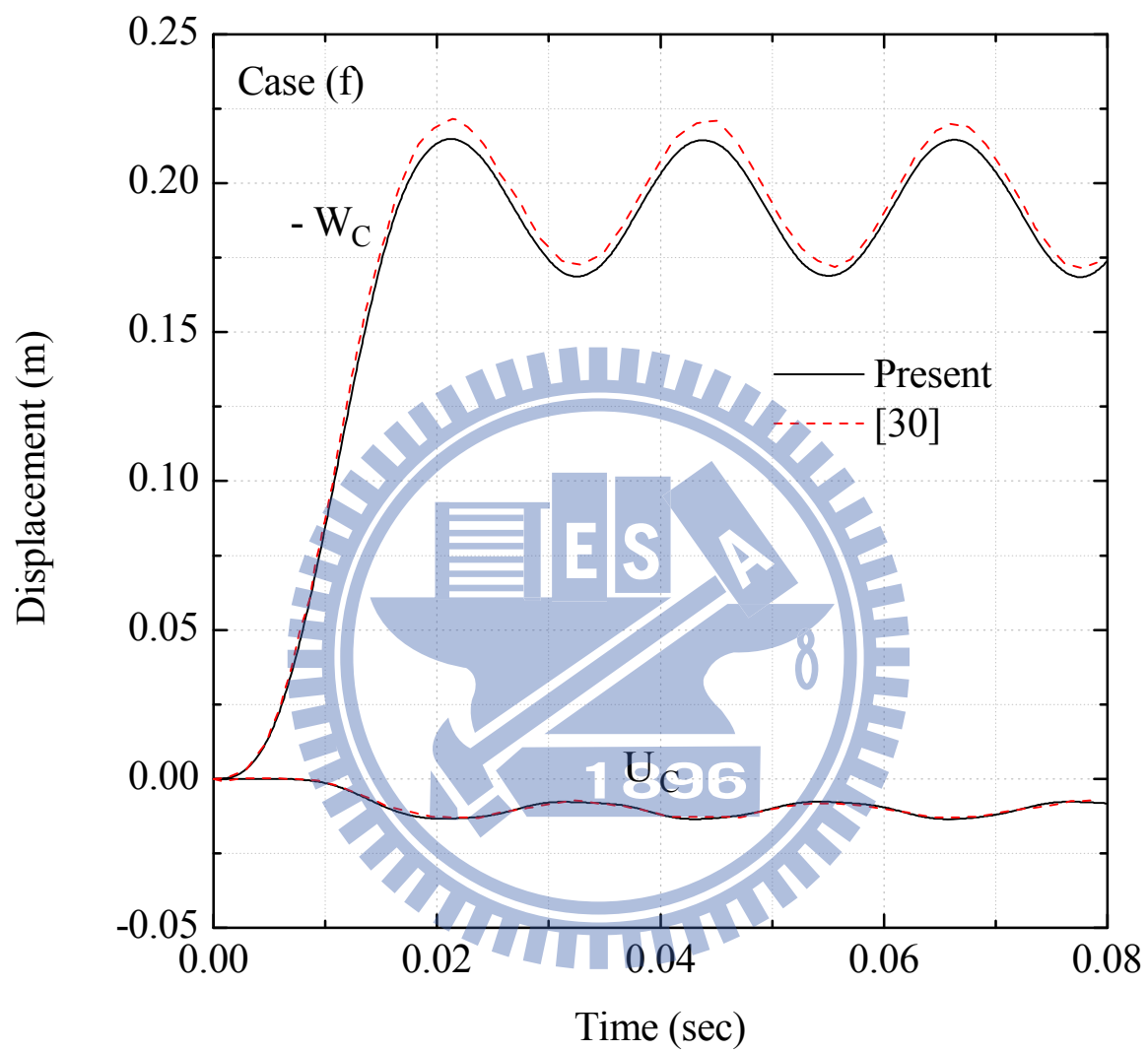
圖二十二 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (c))



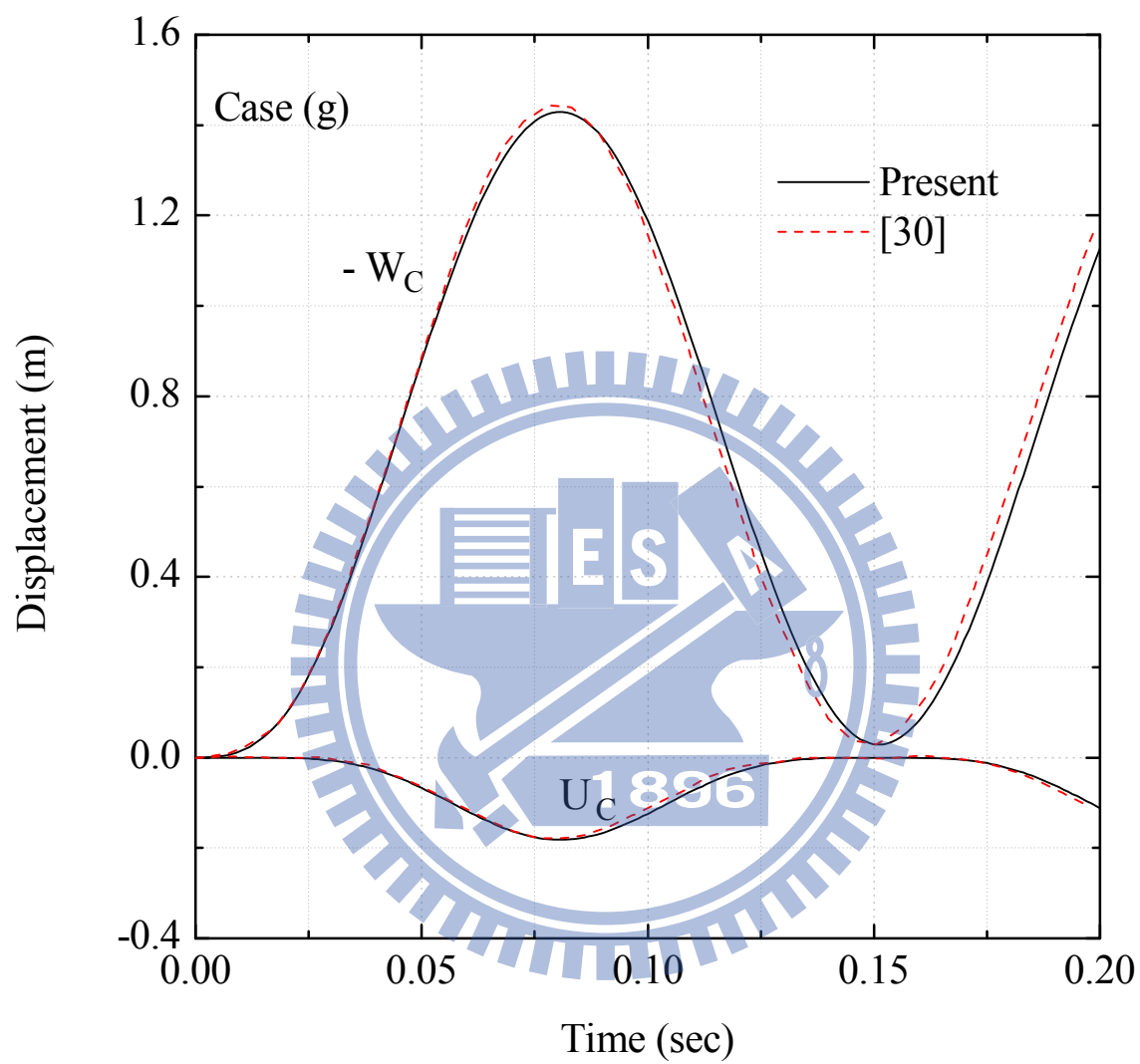
圖二十三 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (d))



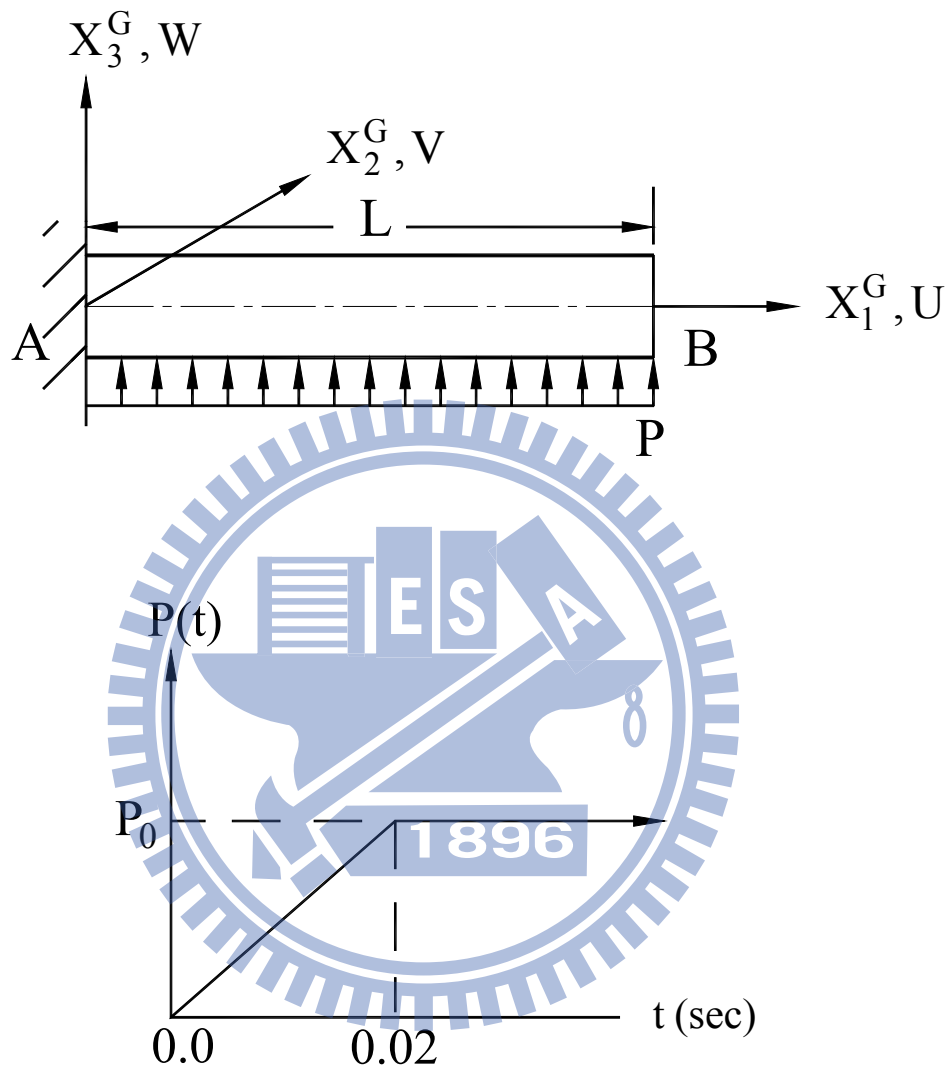
圖二十四 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (e))



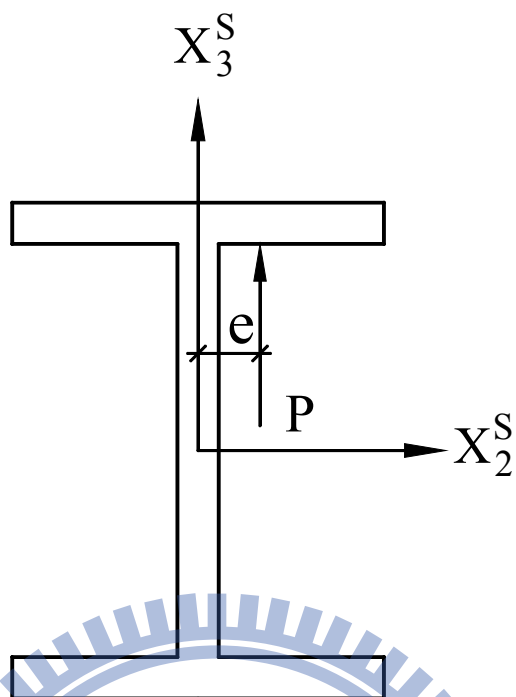
圖二十五 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (f))



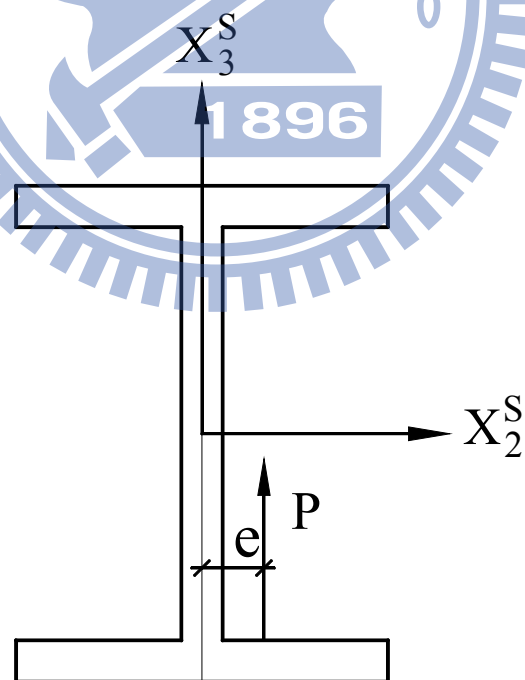
圖二十六 例題三之 C 點在 X_1^G 與 X_3^G 方向的位移(Case (g))



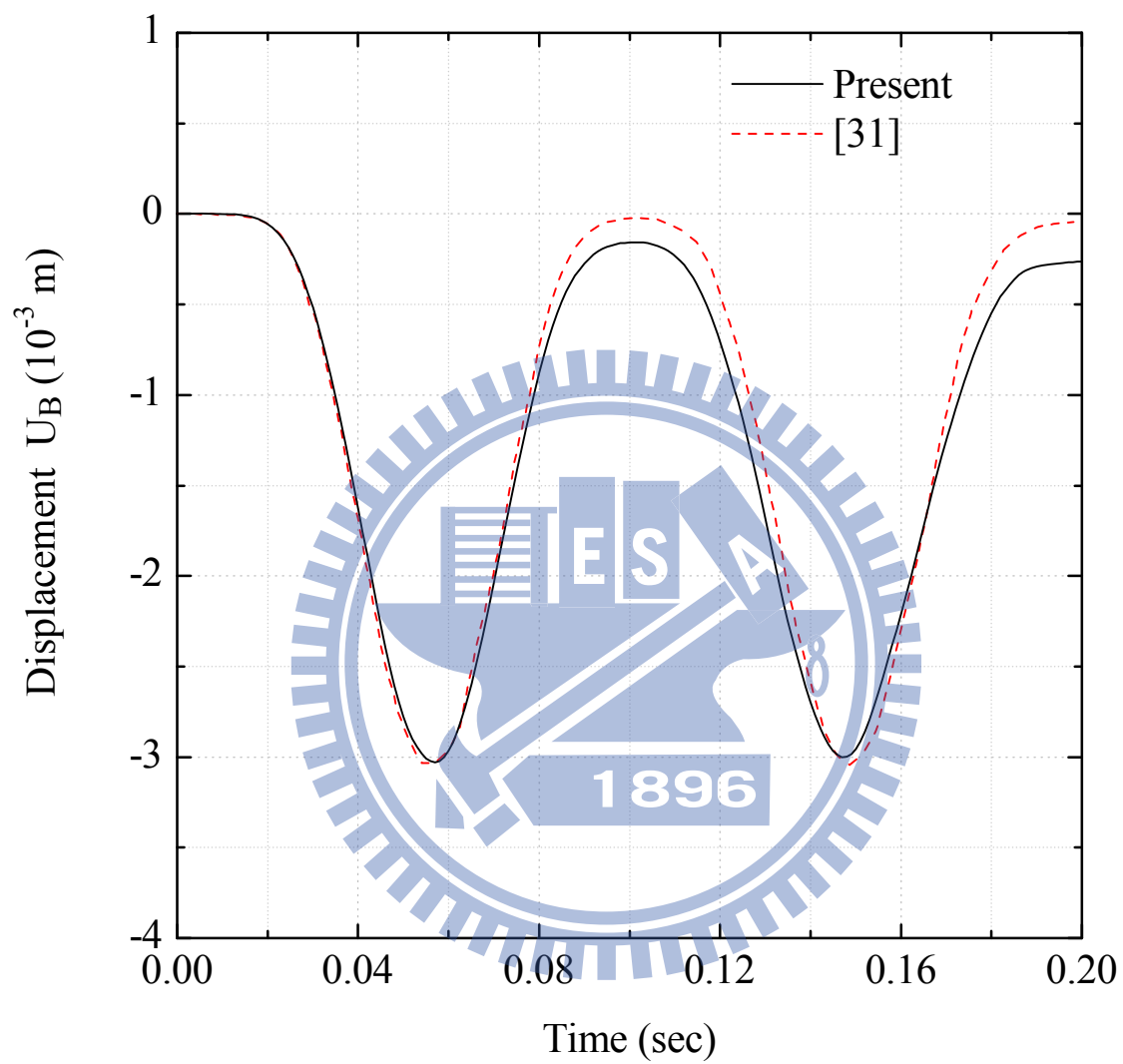
圖二十七 例題四 I 型斷面懸臂梁之幾何及受力圖



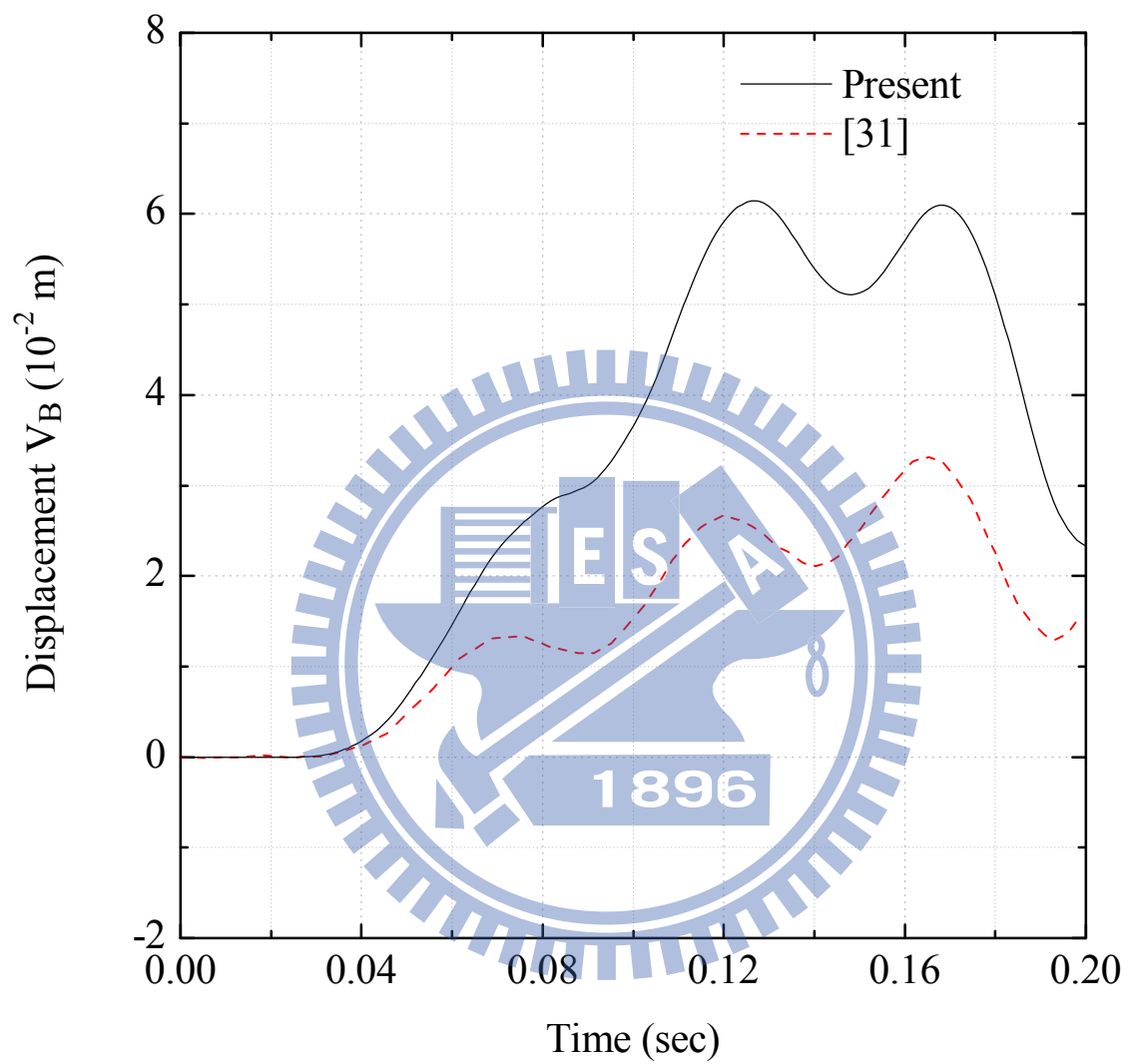
圖二十八 例題四 I 型斷面懸臂梁之偏心受力於頂部圖 (Case a)



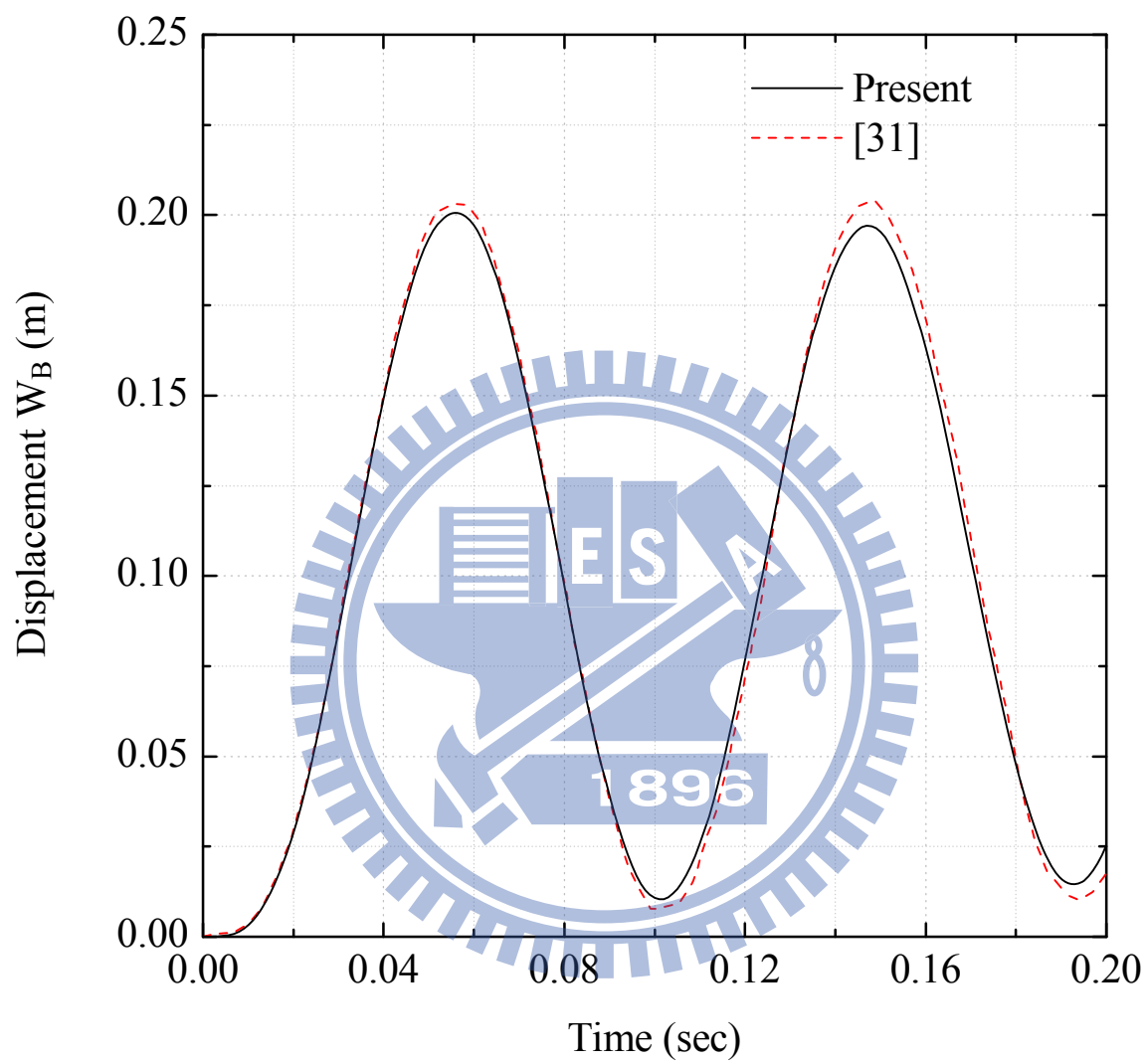
圖二十九 例題四 I 型斷面懸臂梁之偏心受力於底部圖 (Case b)



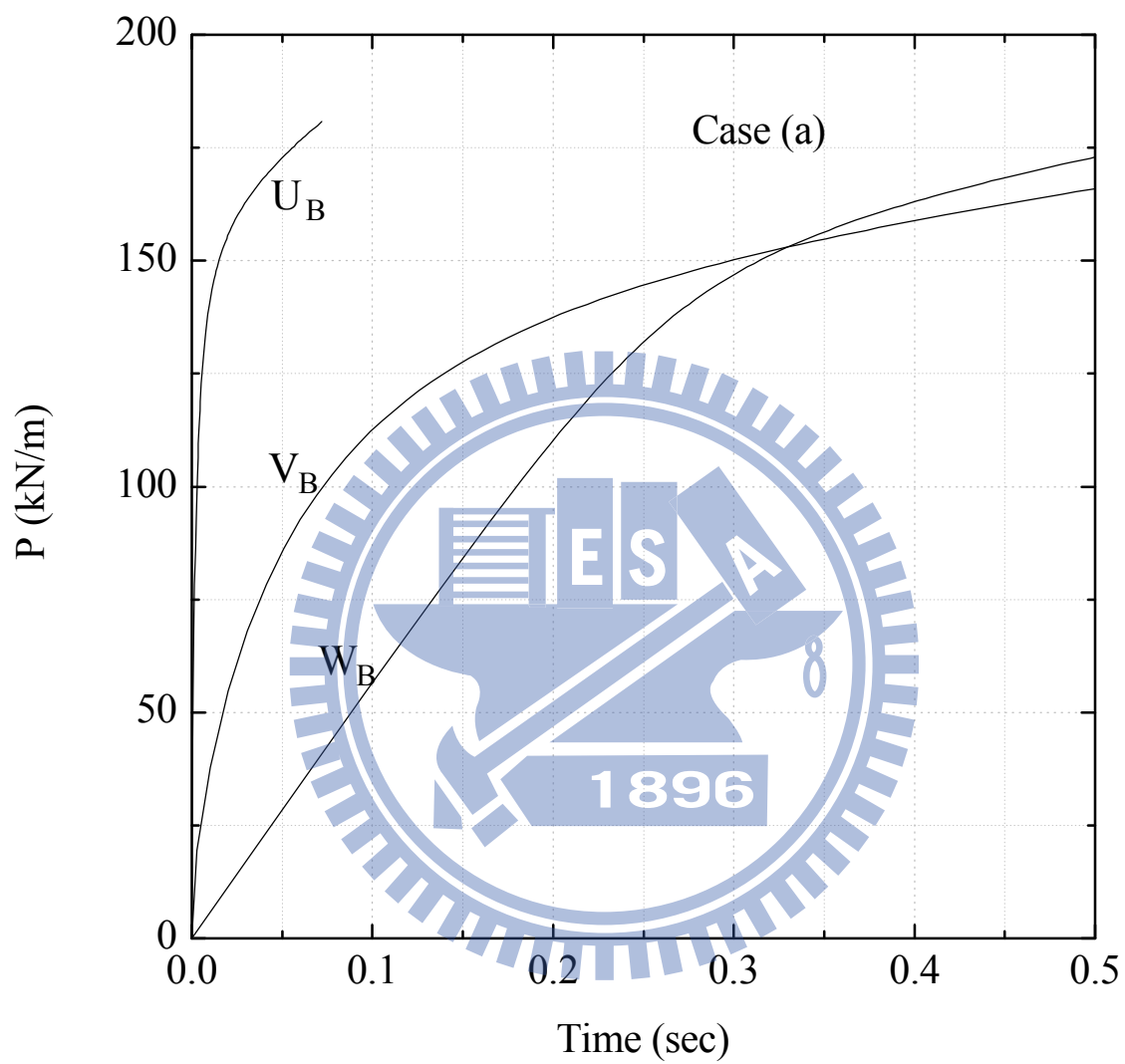
圖三十 例題四 B 點在 X_1^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03$ m)



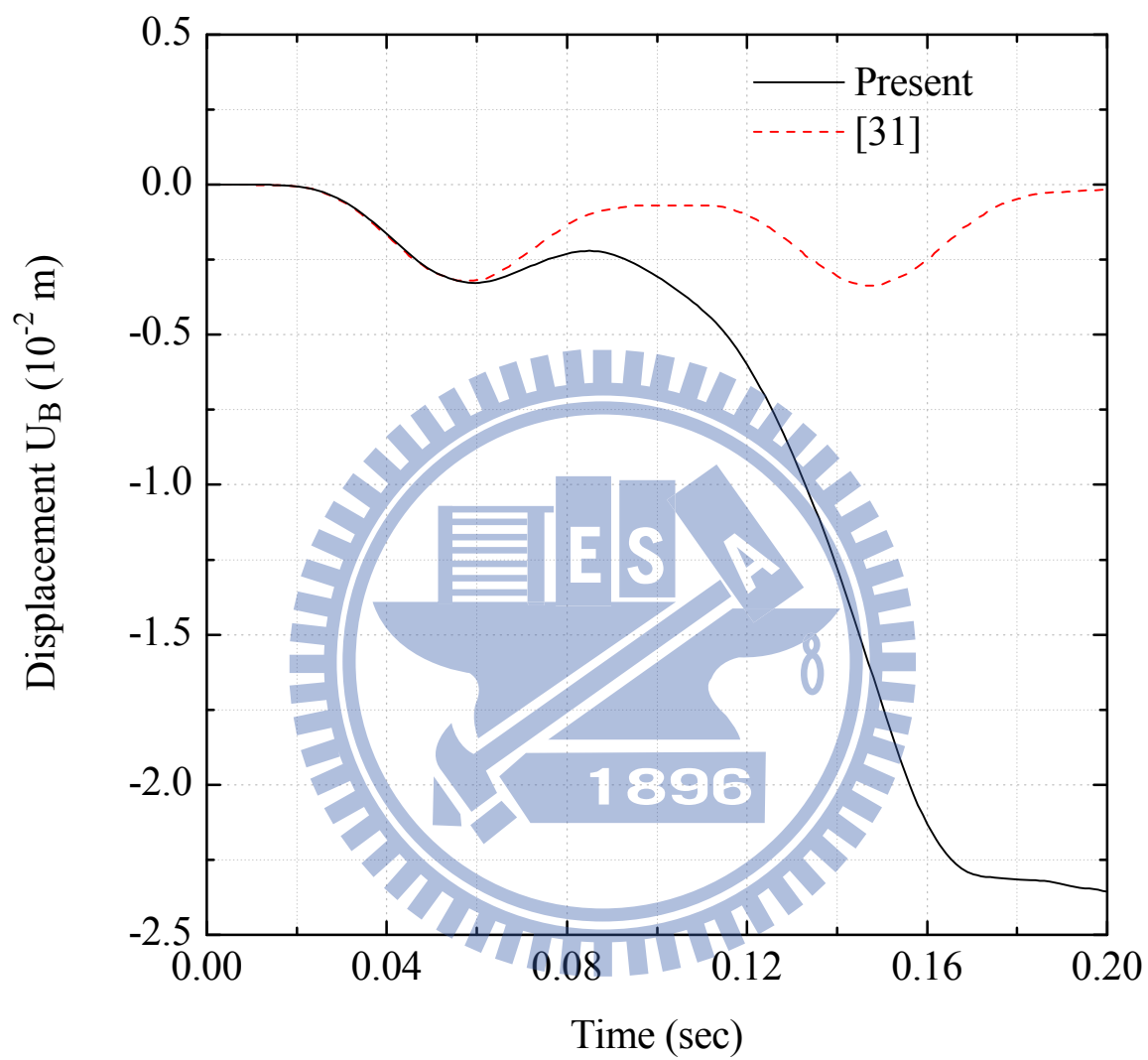
圖三十一 例題四 B 點在 X_2^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03$ m)



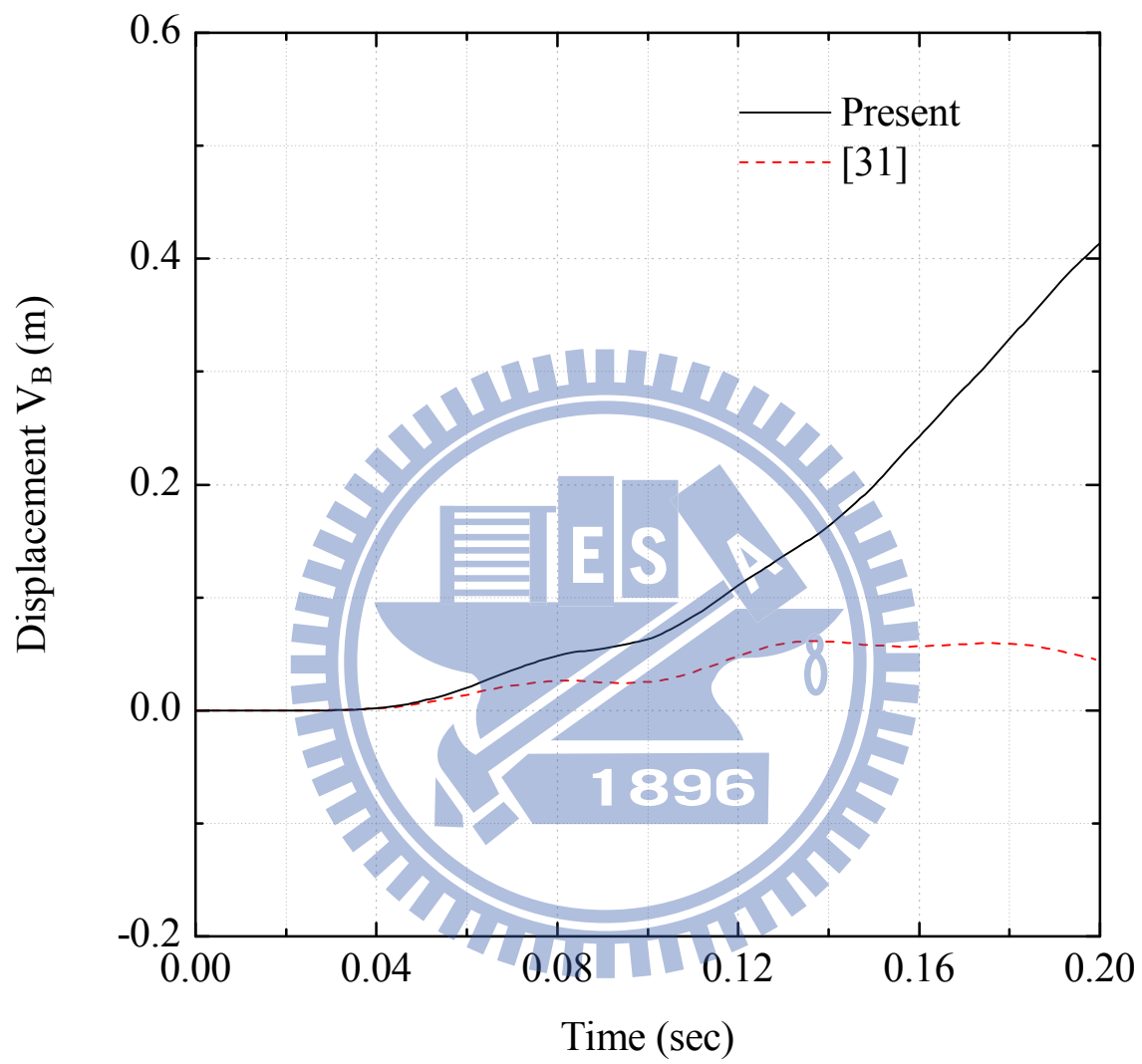
圖三十二 例題四 B 點在 X_3^G 方向的位移(Case (a) $e = 0.03\text{ m}$)



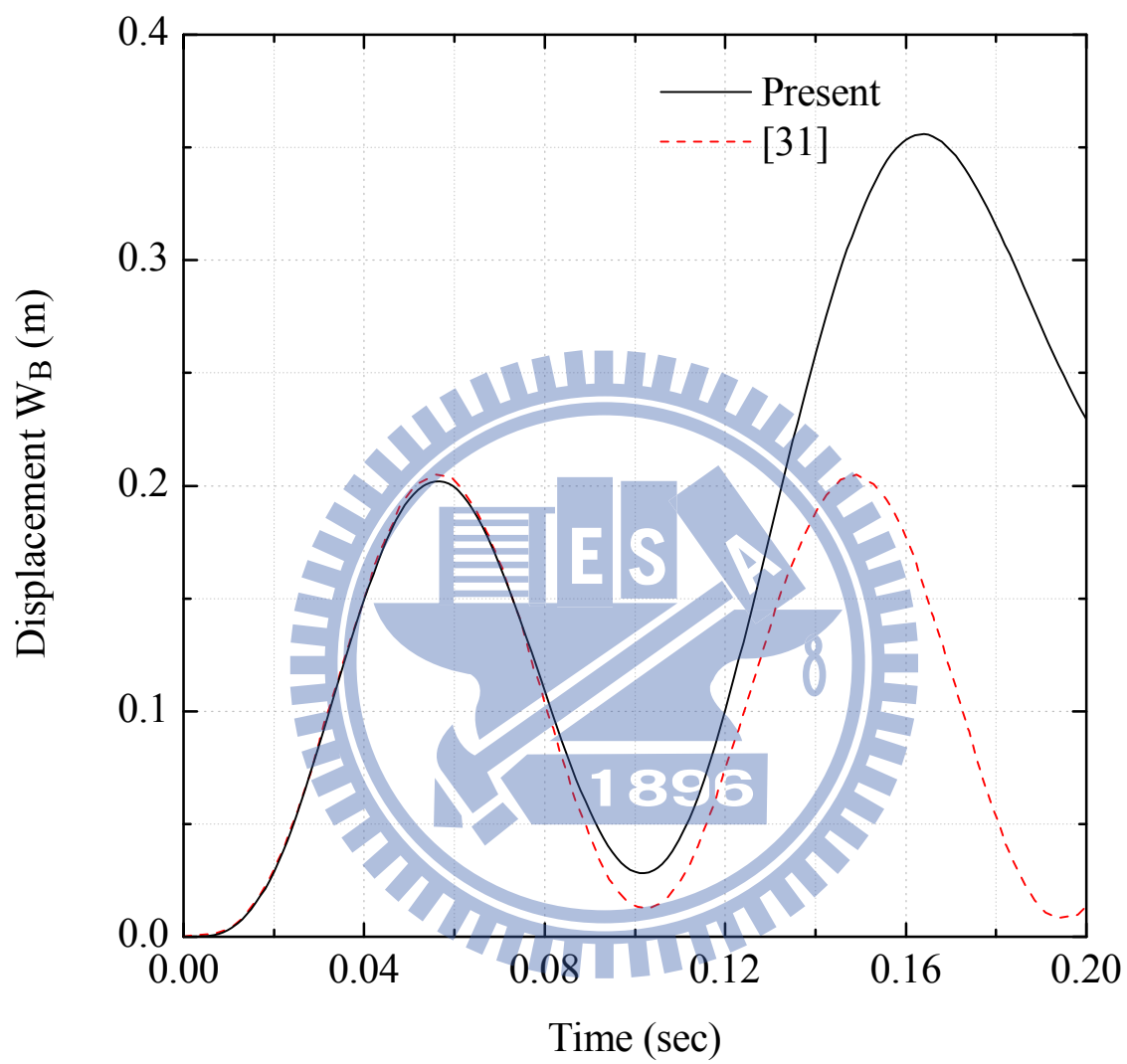
圖三十三 例題四 B 點之負荷—位移曲線圖(Case (a) $e = 0.03\text{ m}$)



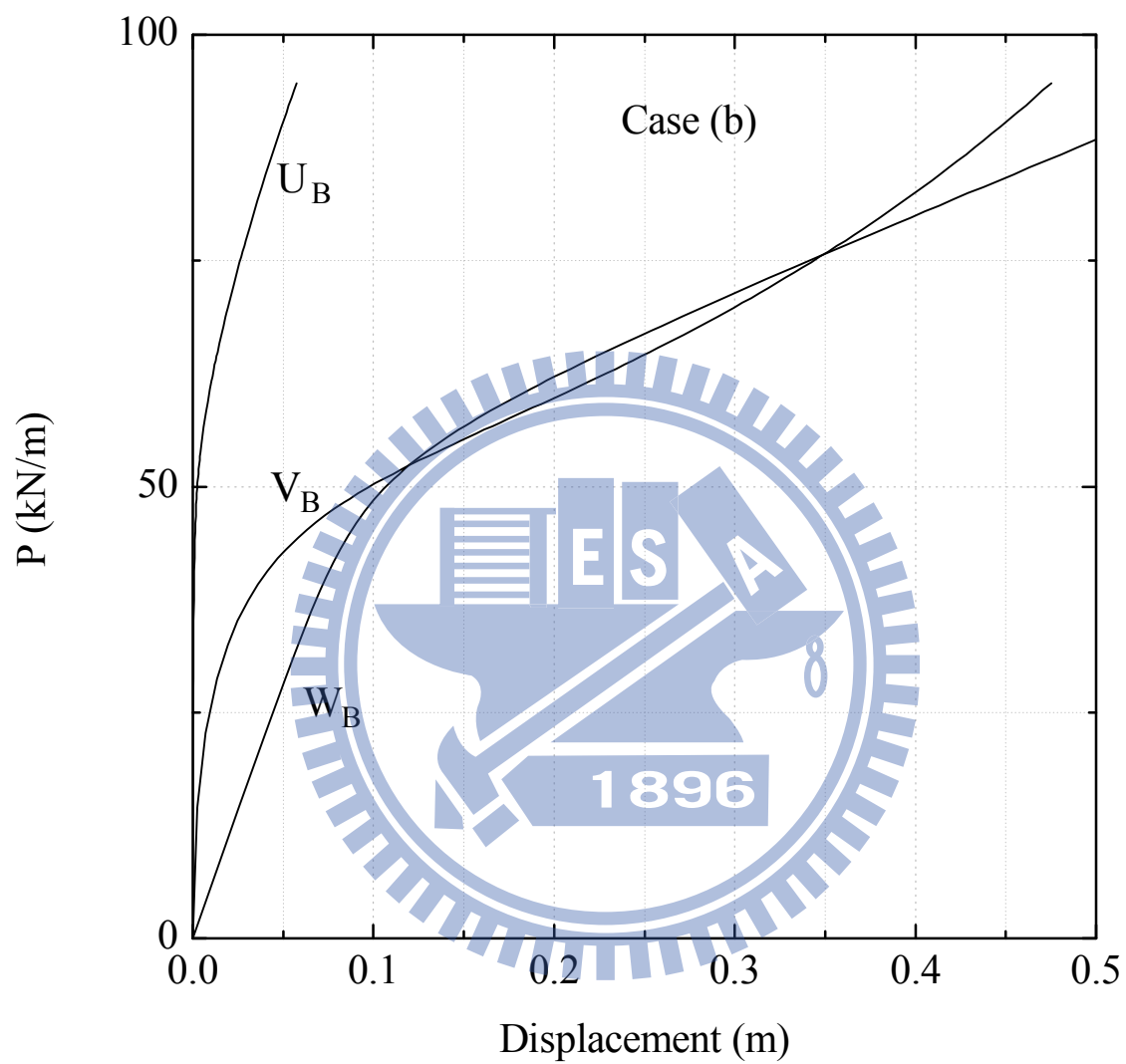
圖三十四 例題四 B 點在 X_1^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03$ m)



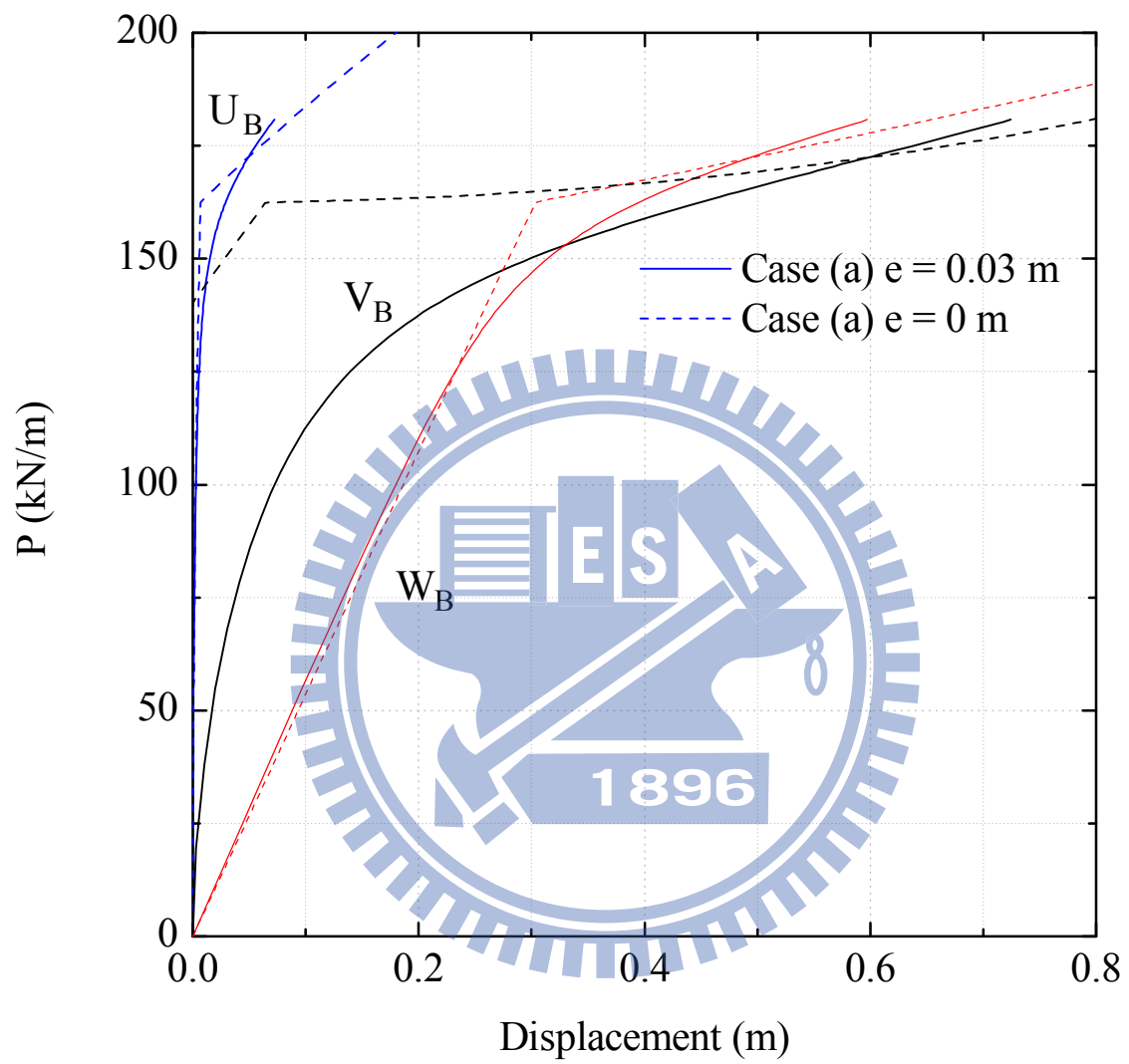
圖三十五 例題四 B 點在 X_2^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03\text{ m}$)



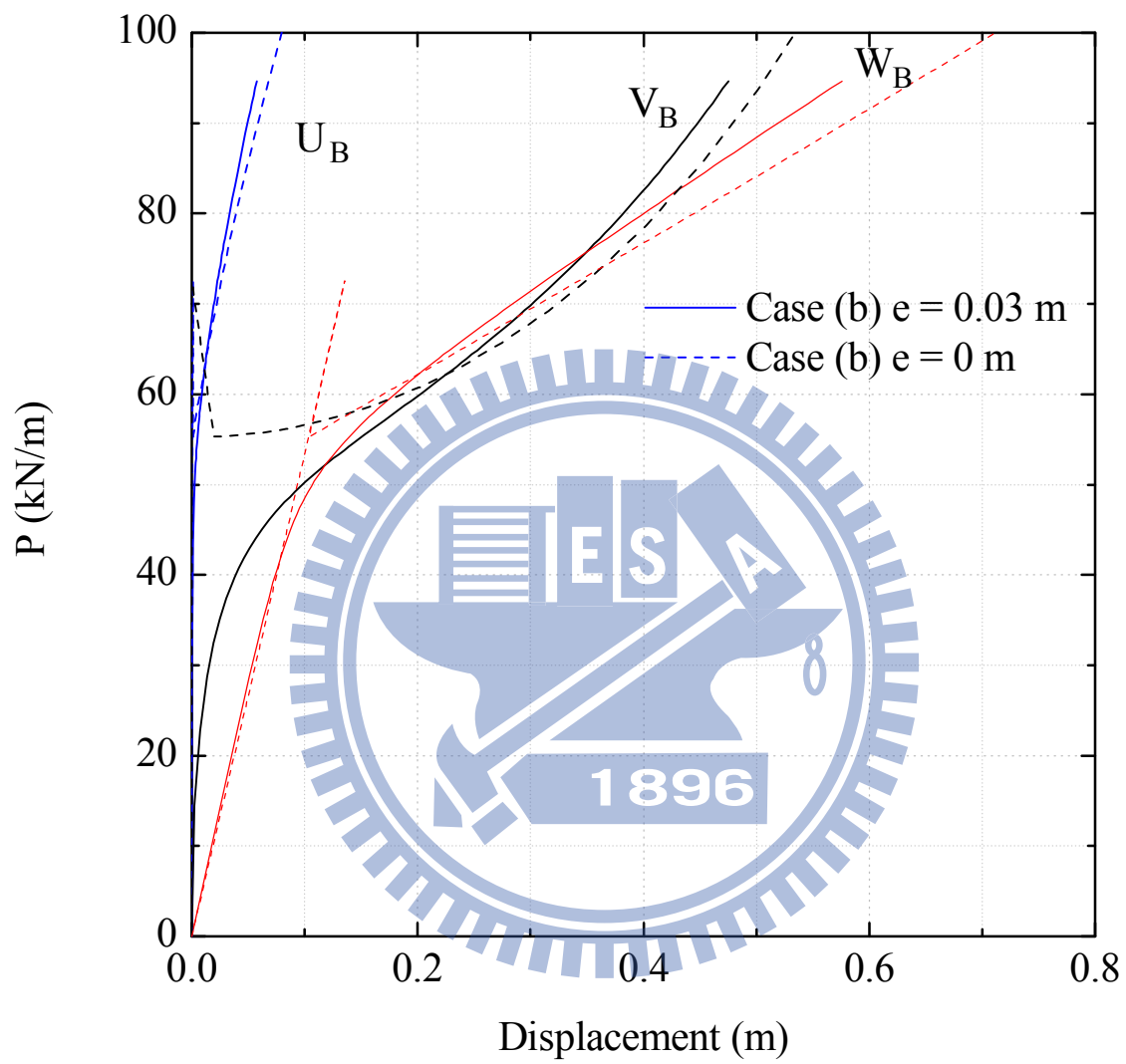
圖三十六 例題四 B 點在 X_3^G 方向的位移(Case (b) $e = 0.03\text{ m}$)



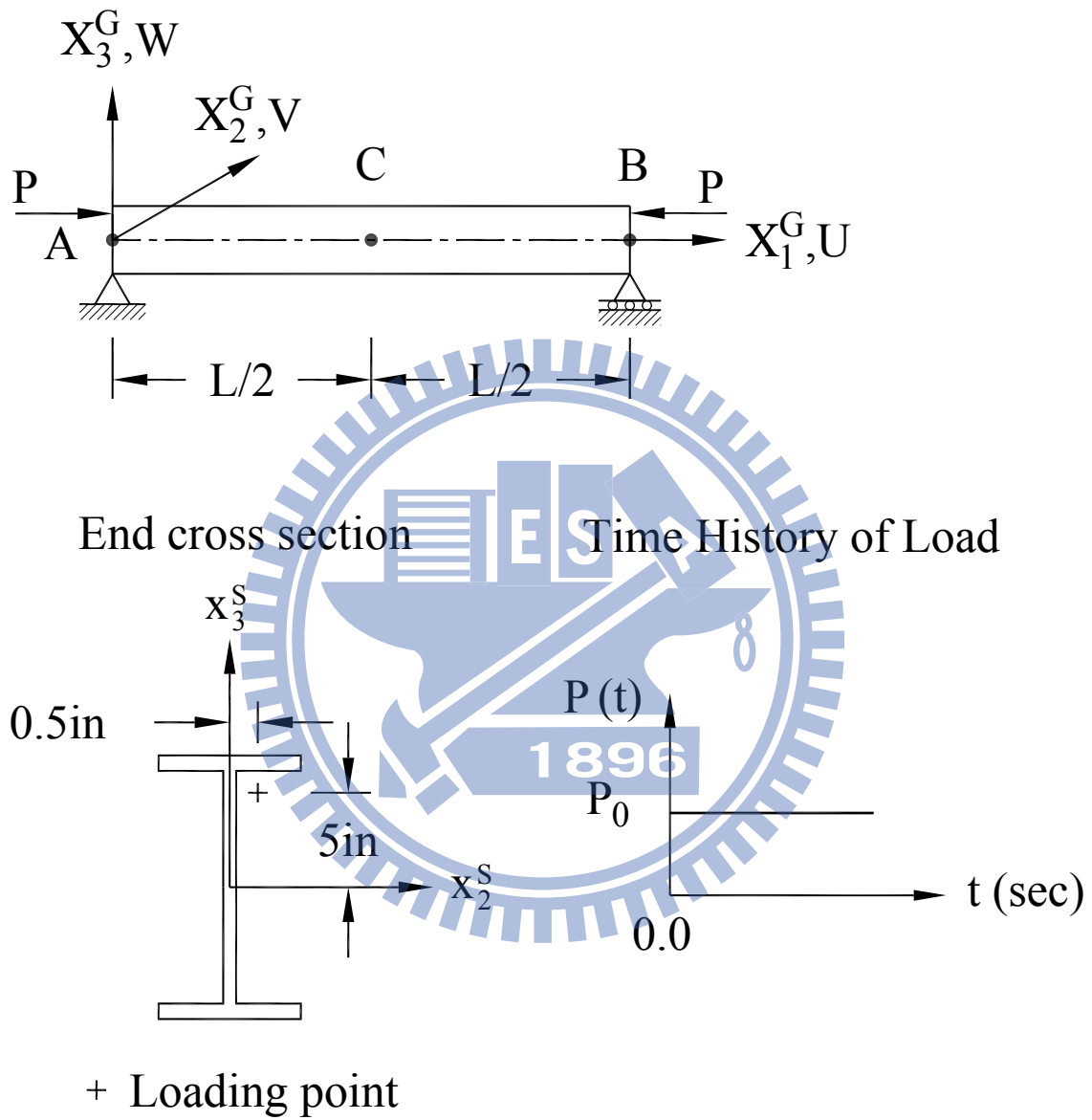
圖三十七 例題四 B 點之負荷—位移曲線圖(Case (b) $e = 0.03 m$)



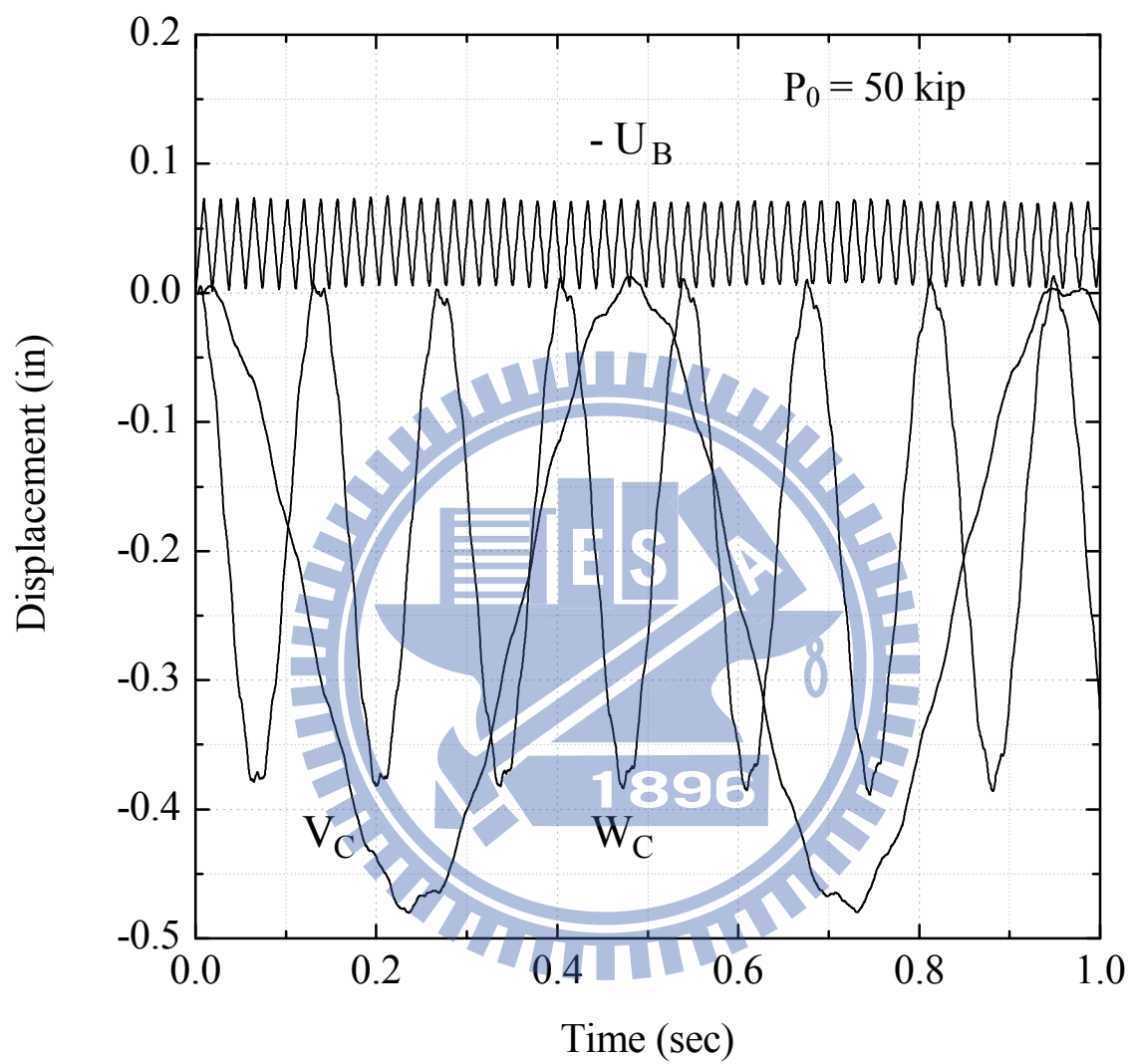
圖三十八 例題四 B 點之負荷—位移曲線圖



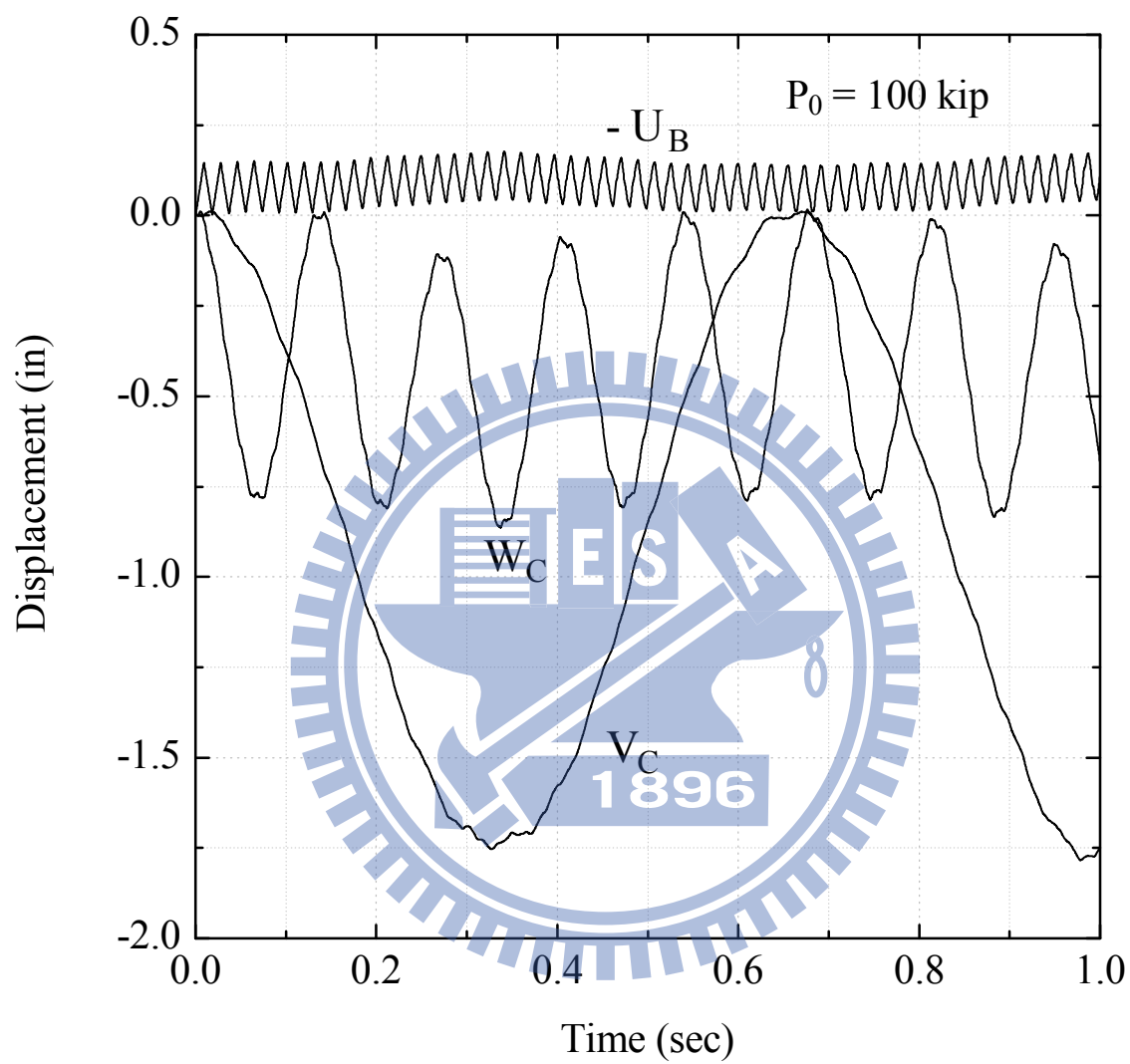
圖三十九 例題四 B 點之負荷—位移曲線圖



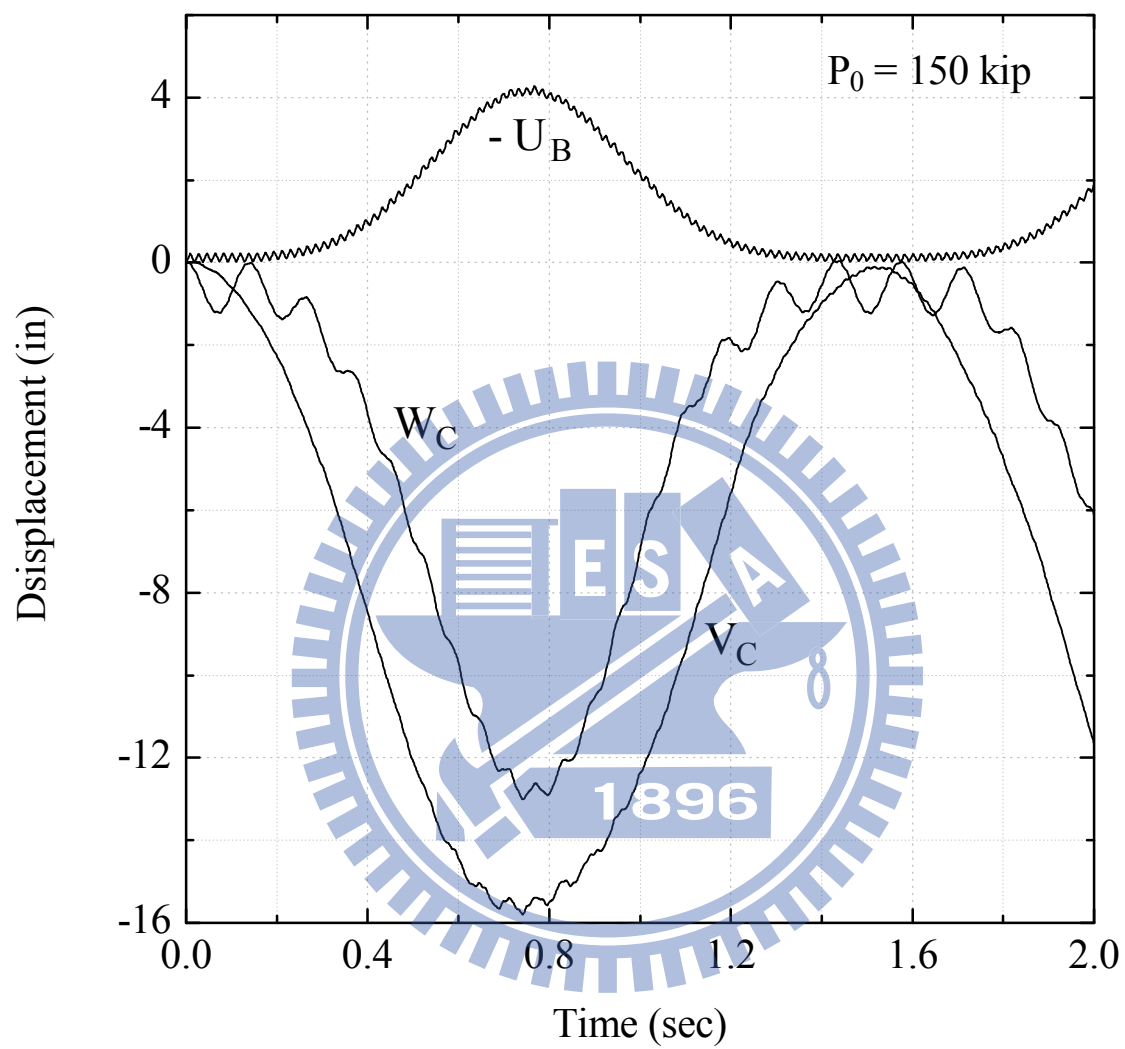
圖四十 例題五 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖



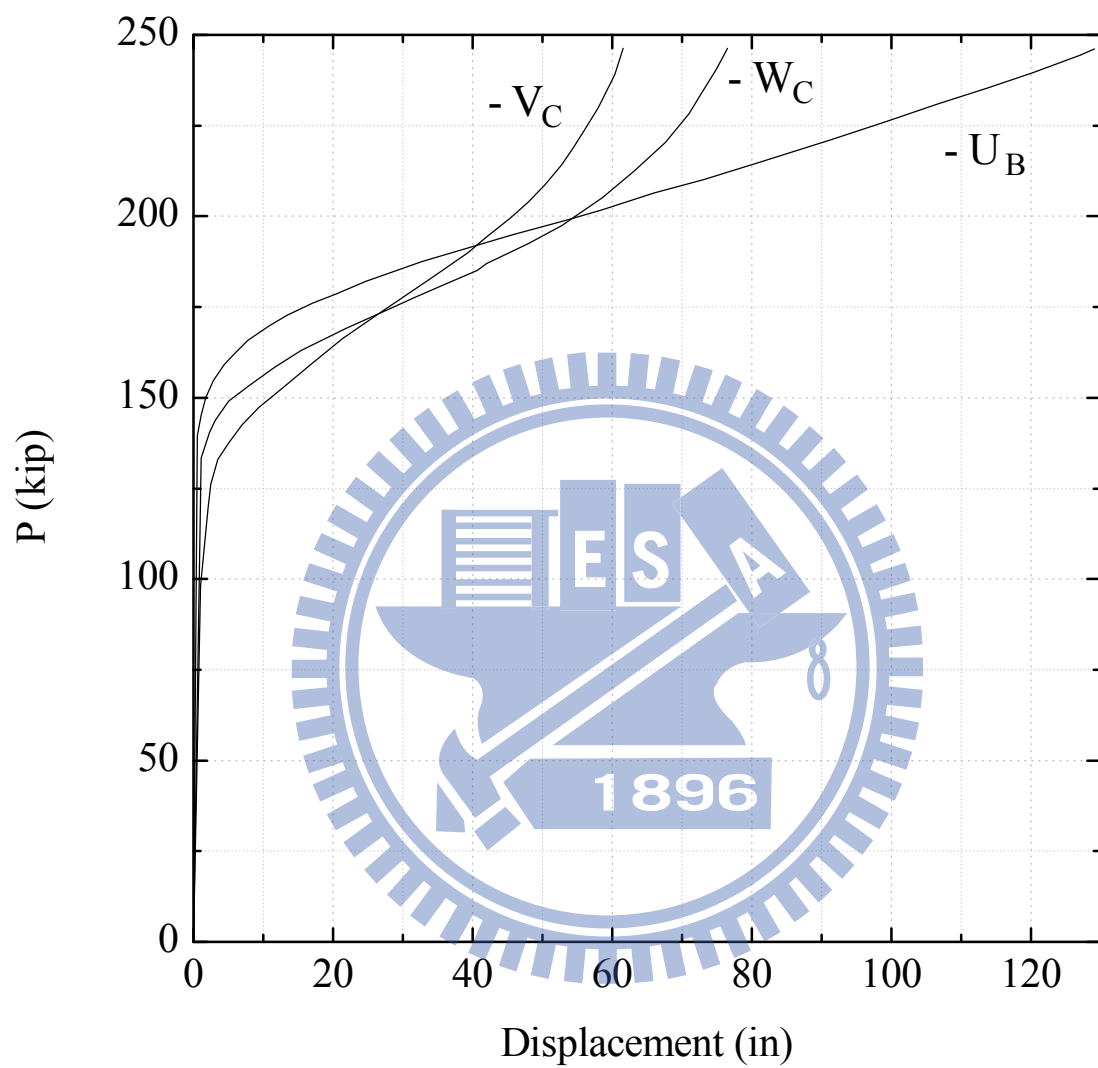
圖四十一 例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位
移



圖四十二 例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移

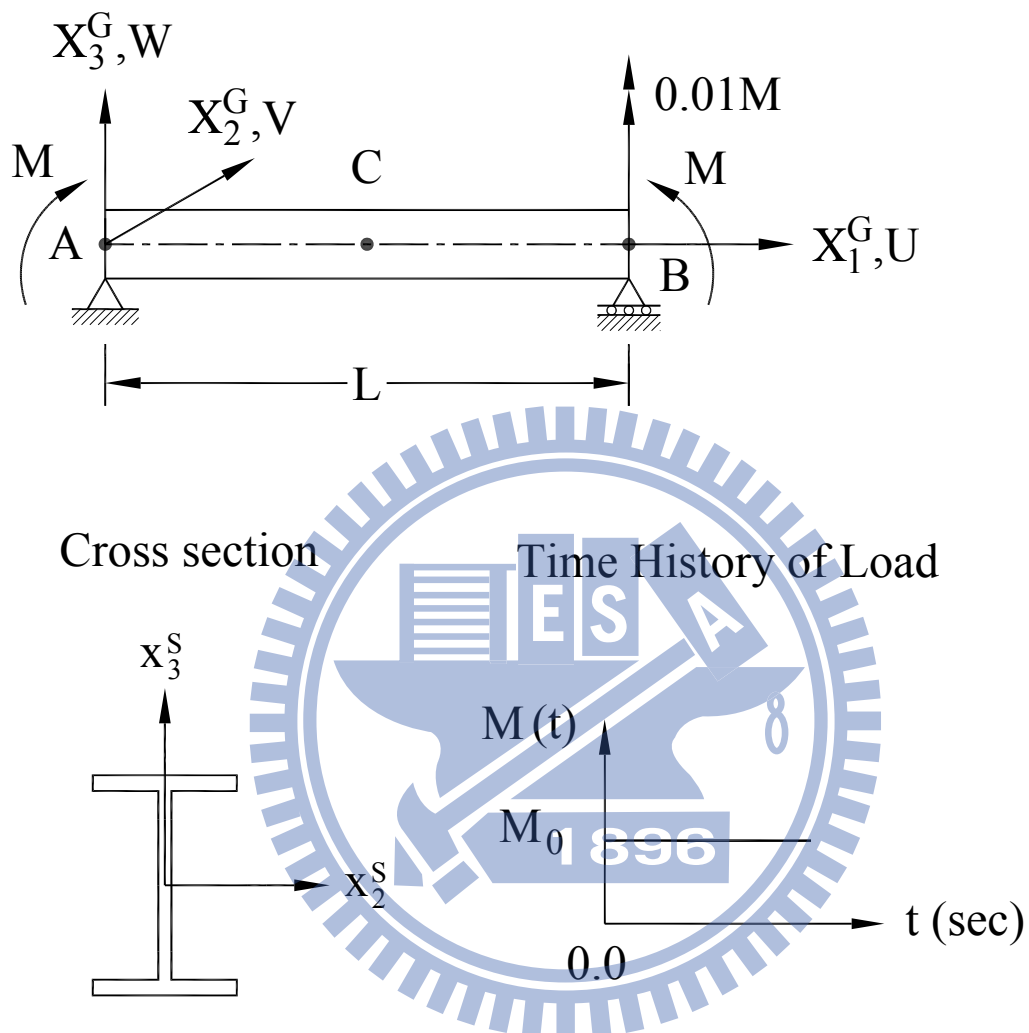


圖四十三 例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位
移

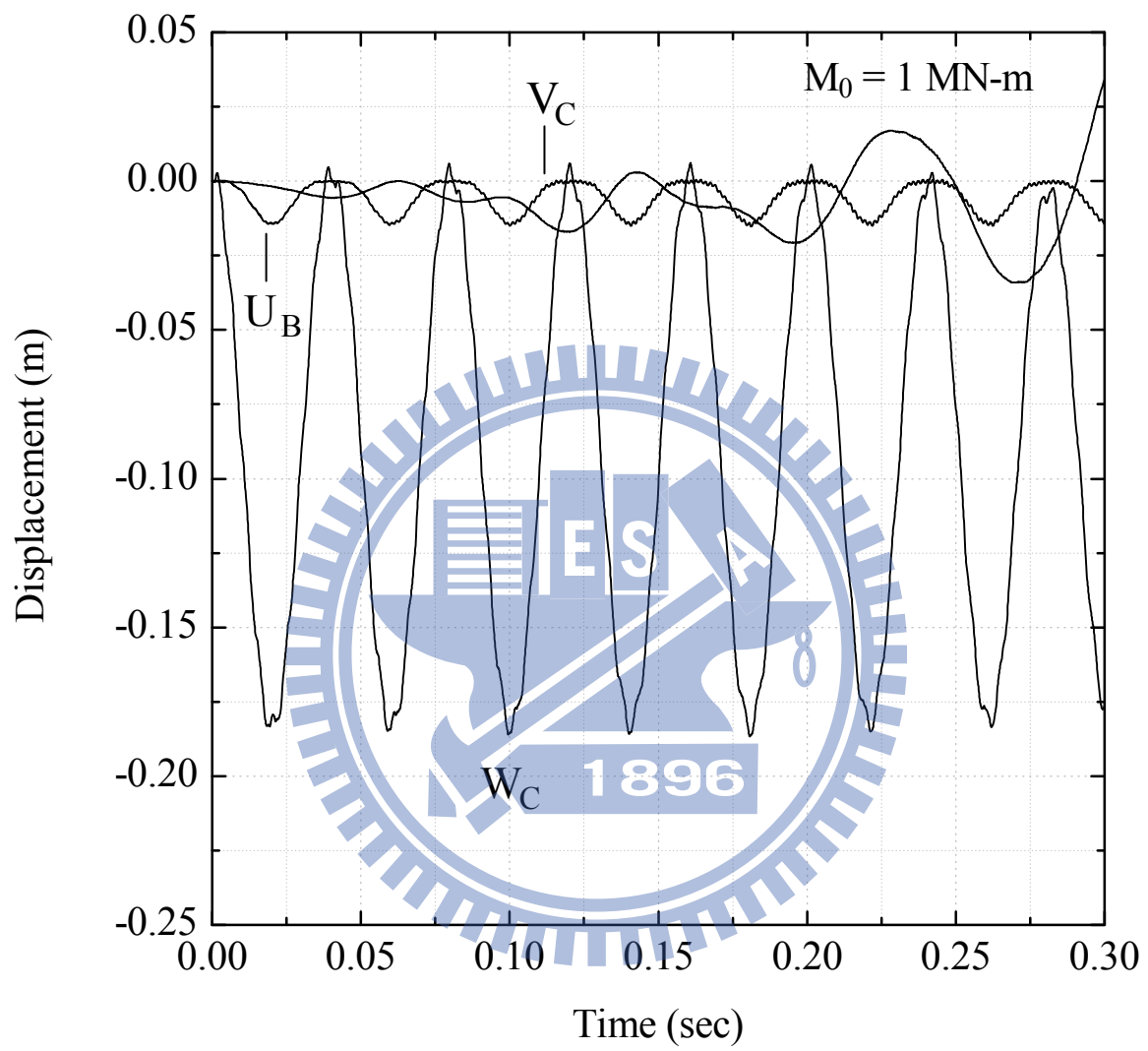


圖四十四 例題五端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之負荷一位

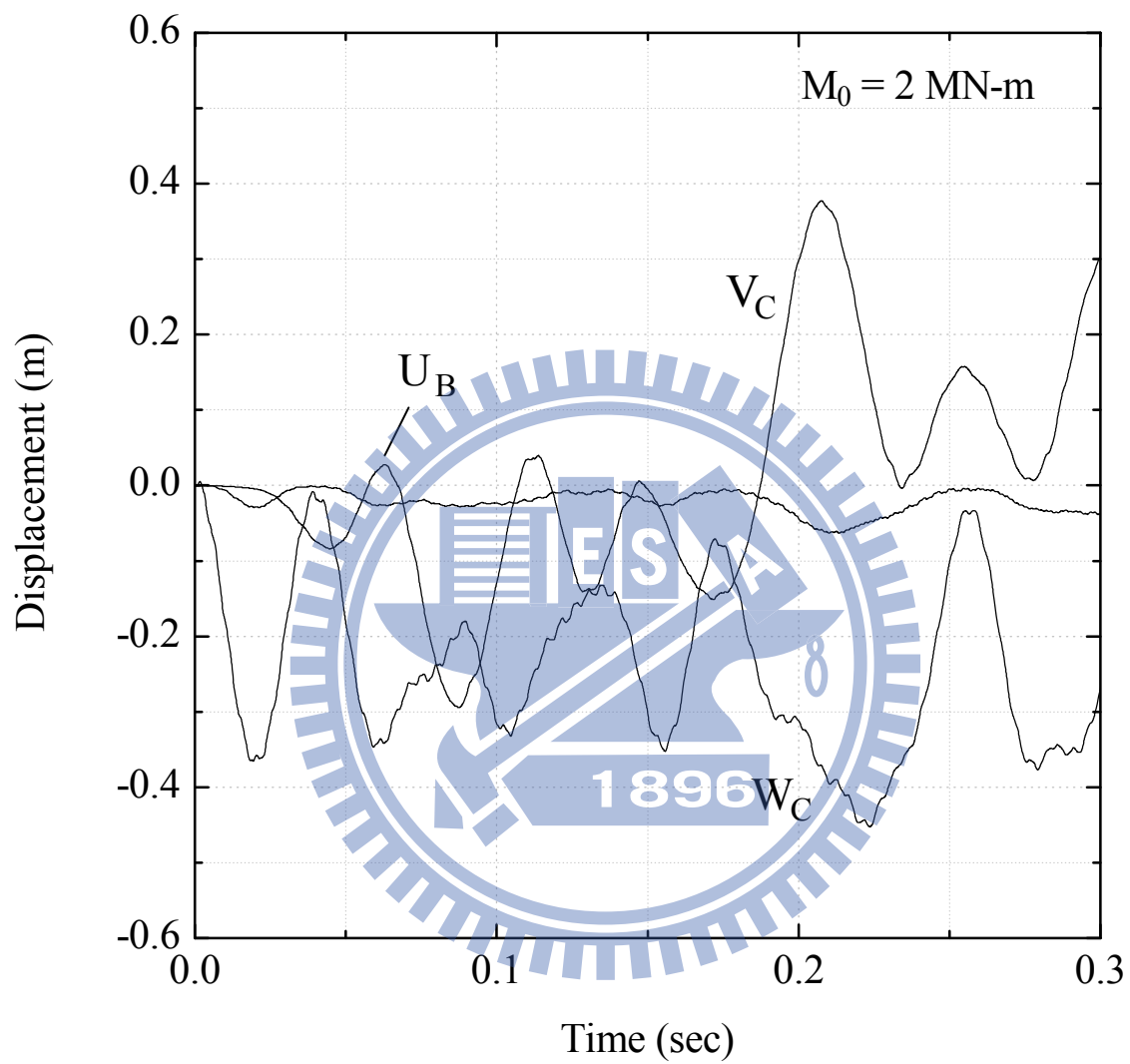
移曲線圖



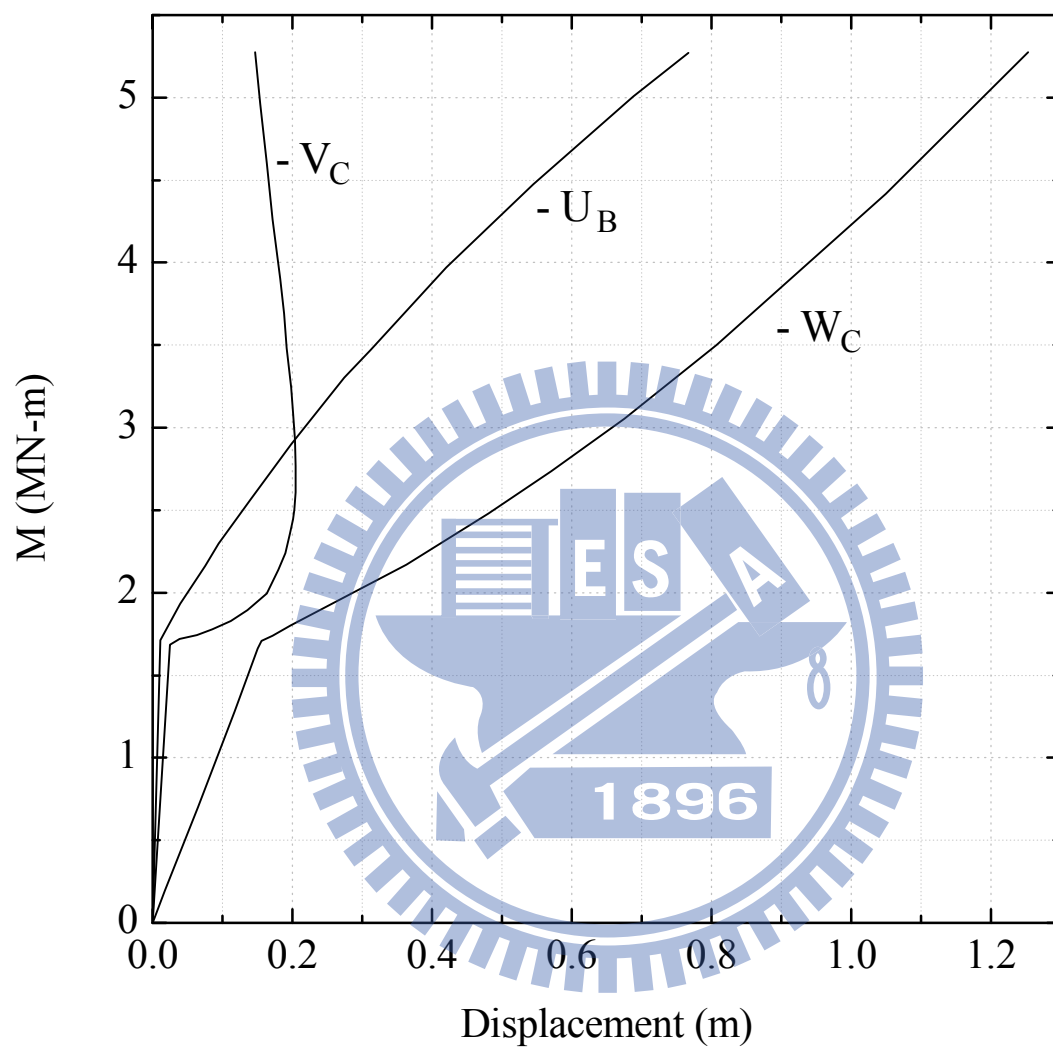
圖四十五 例題六 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖



圖四十六 例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位移

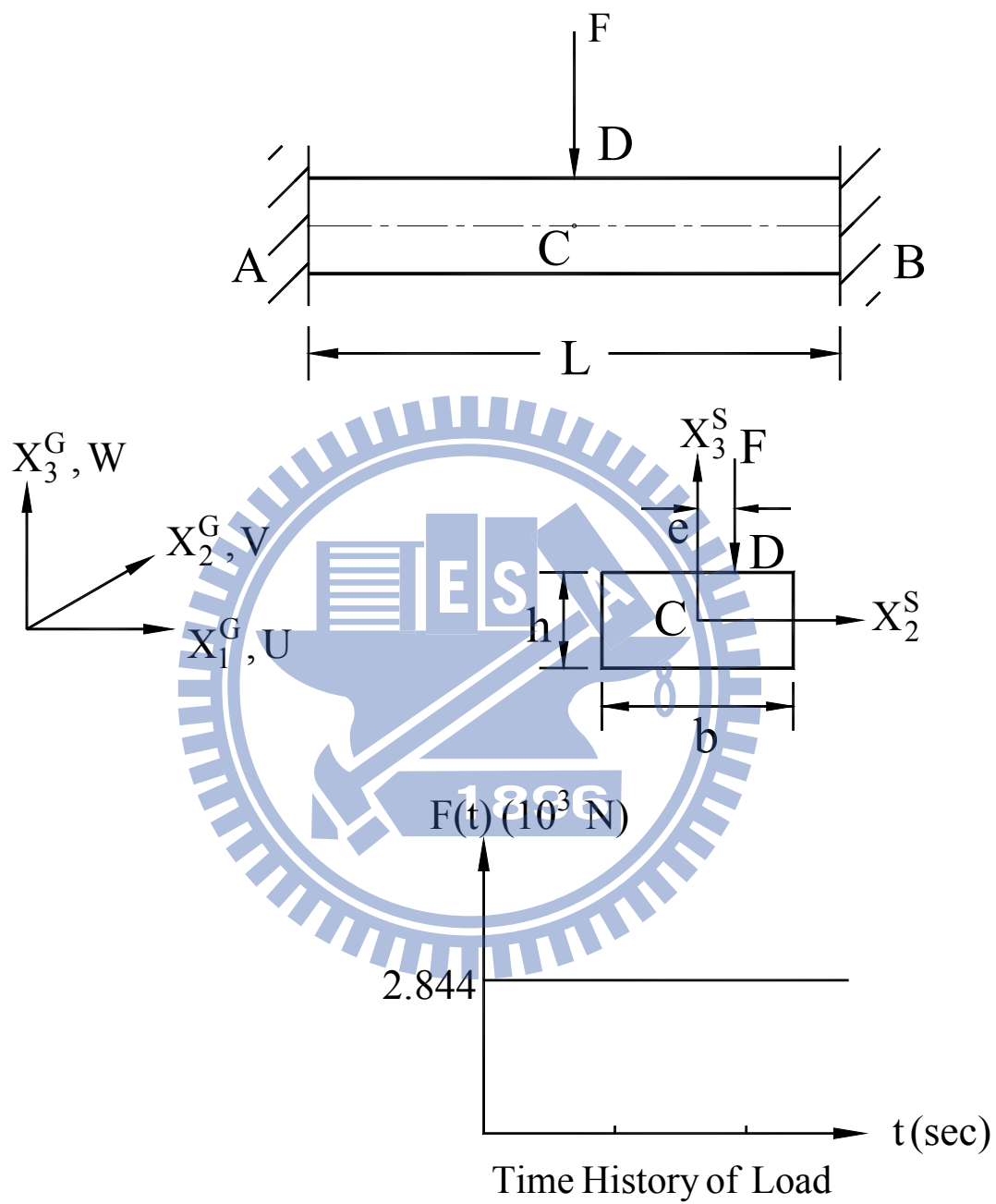


圖四十七 例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在及 X_2^G 方向及 X_3^G 方向之位
移

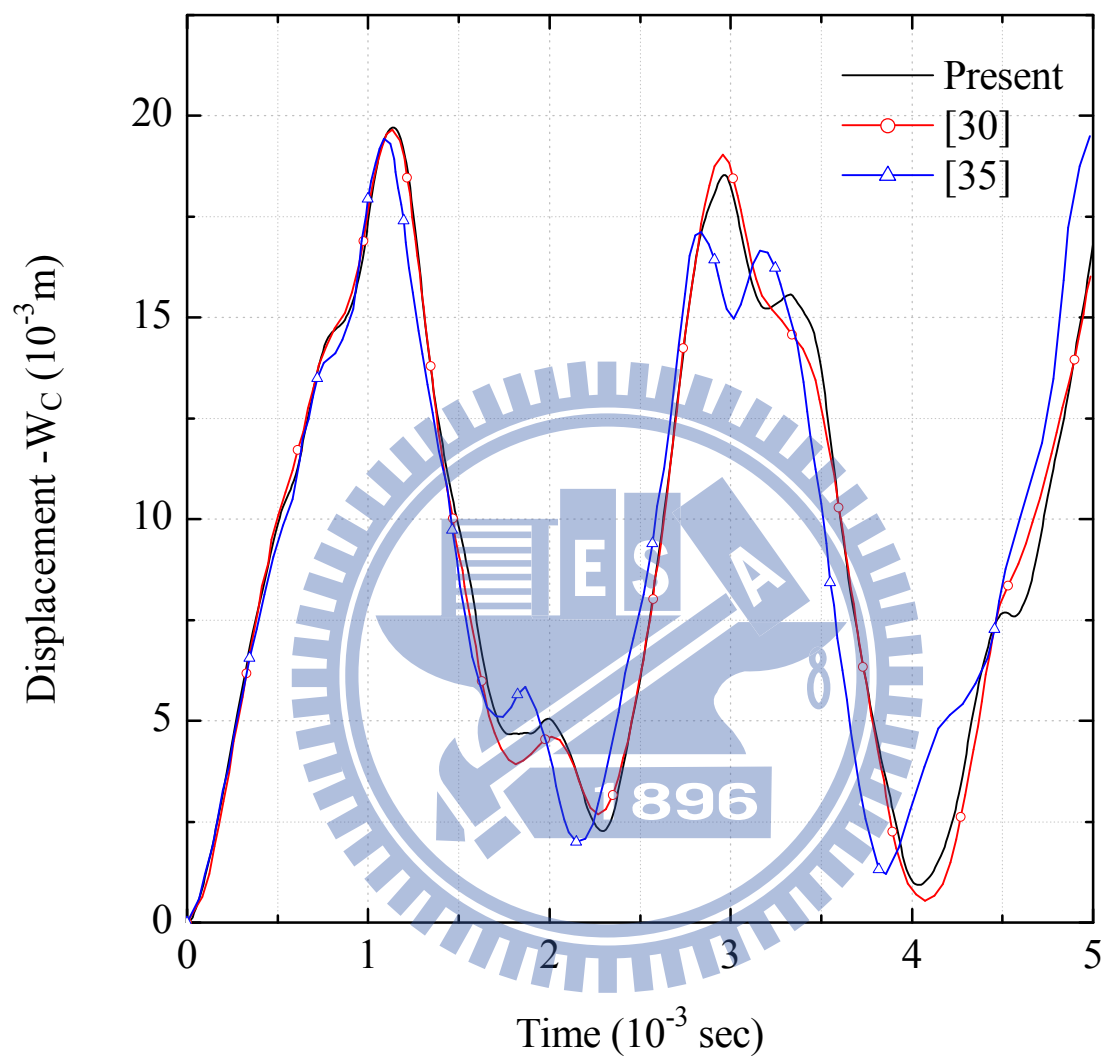


圖四十八 例題六端點 B 在 X_1^G 方向、中點 C 在 X_2^G 及 X_3^G 方向之負荷一位

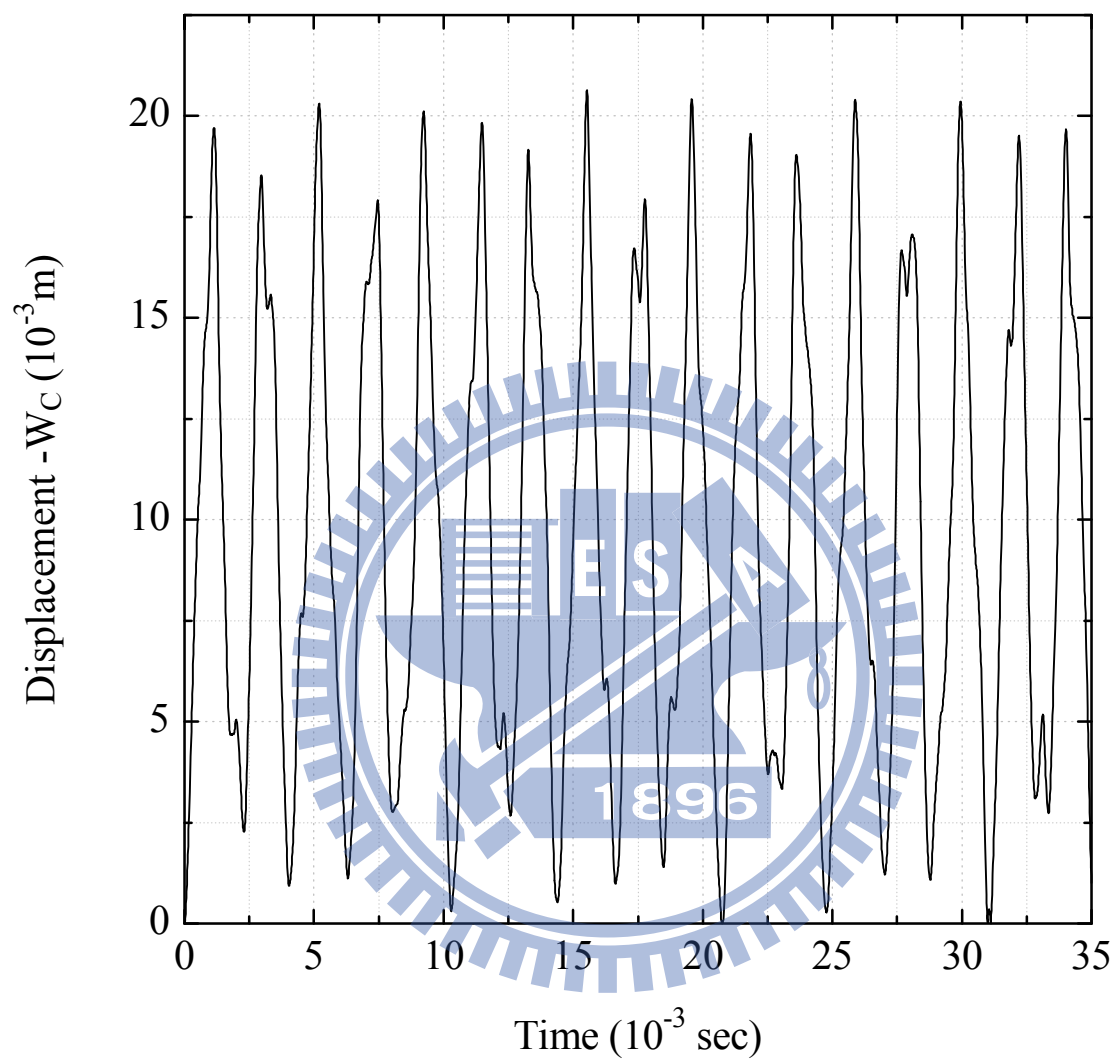
移曲線圖



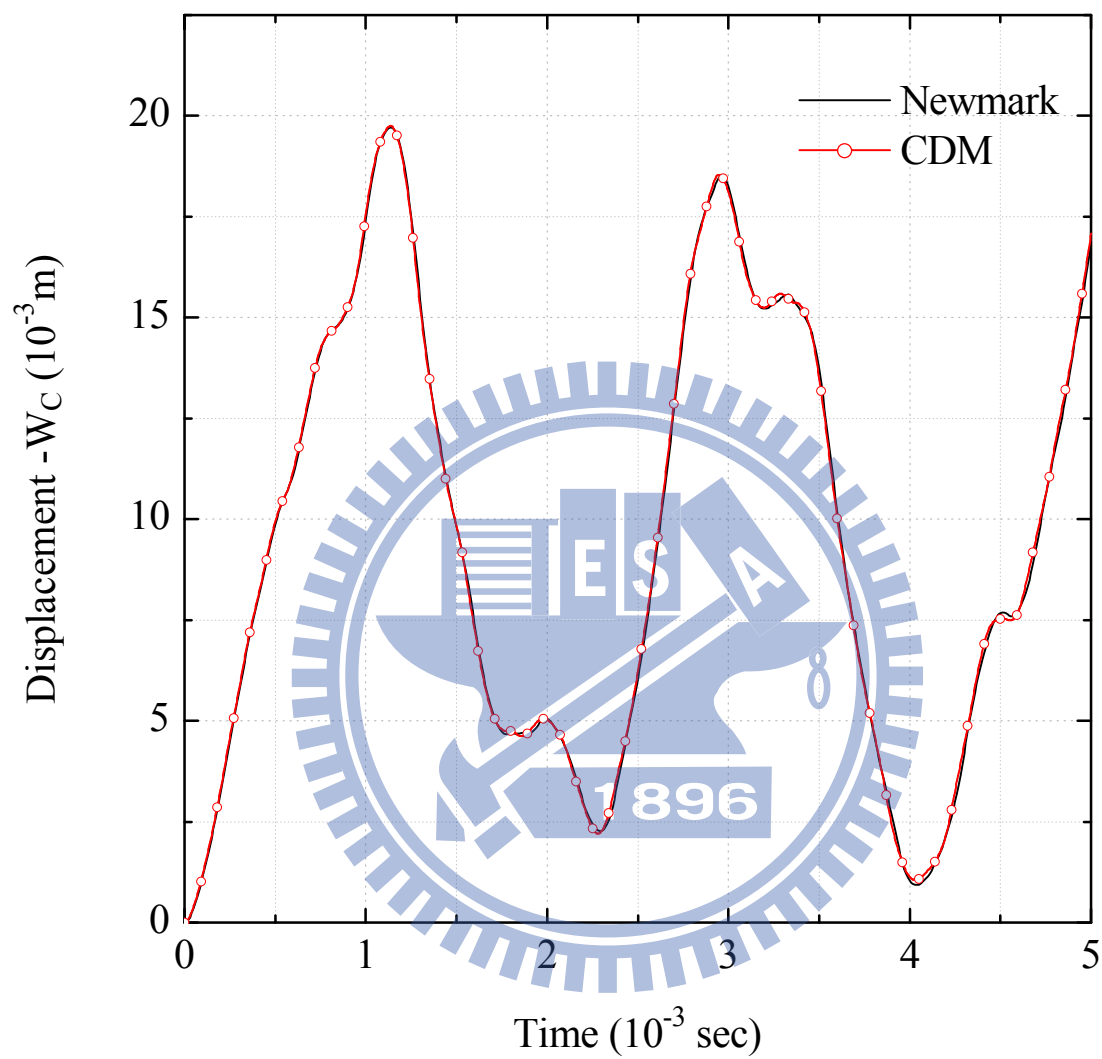
圖四十九 例題七矩形斷面固端梁之幾何及受力圖



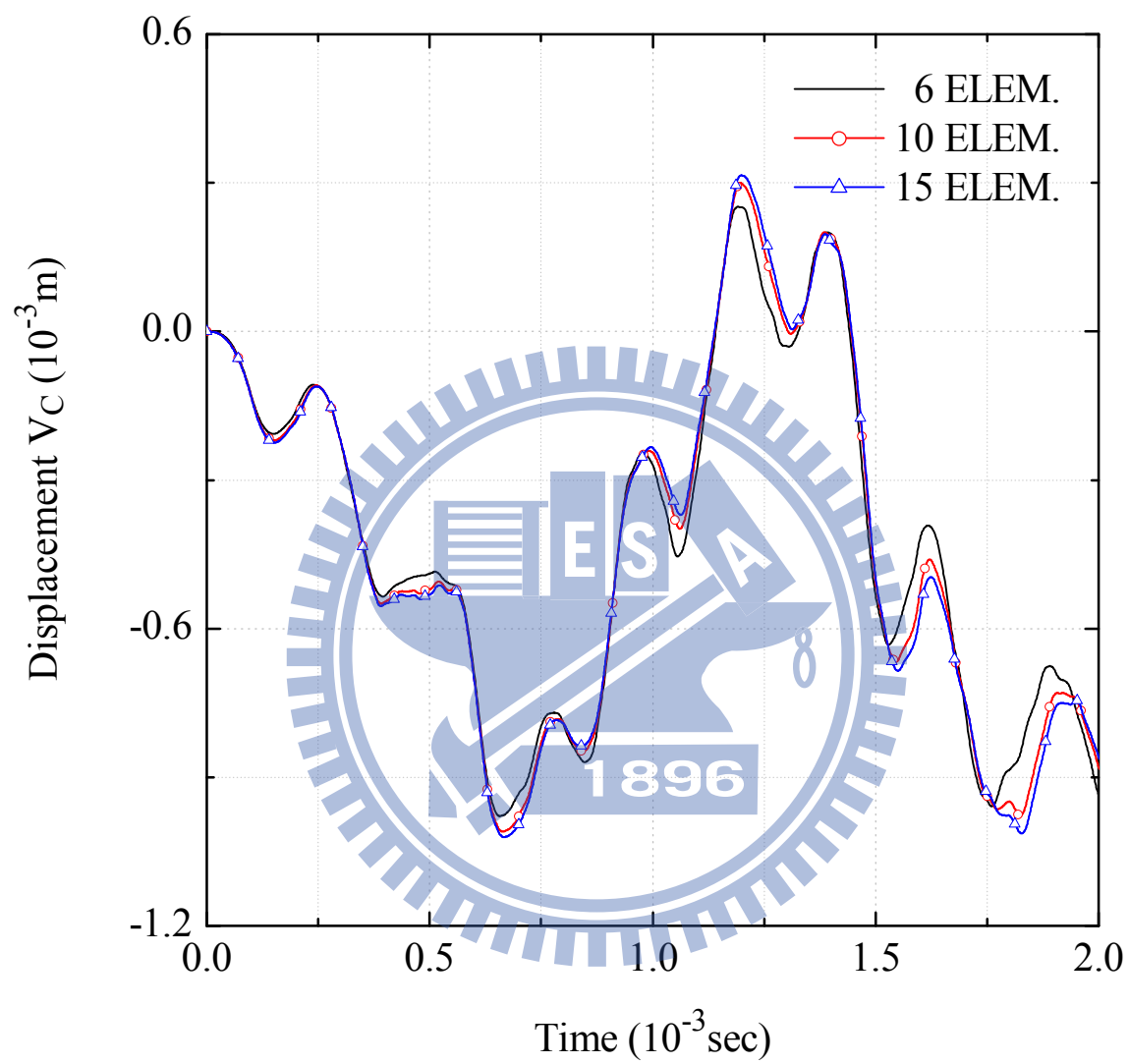
圖五十 例題七中點 C 之位移(Case (a))



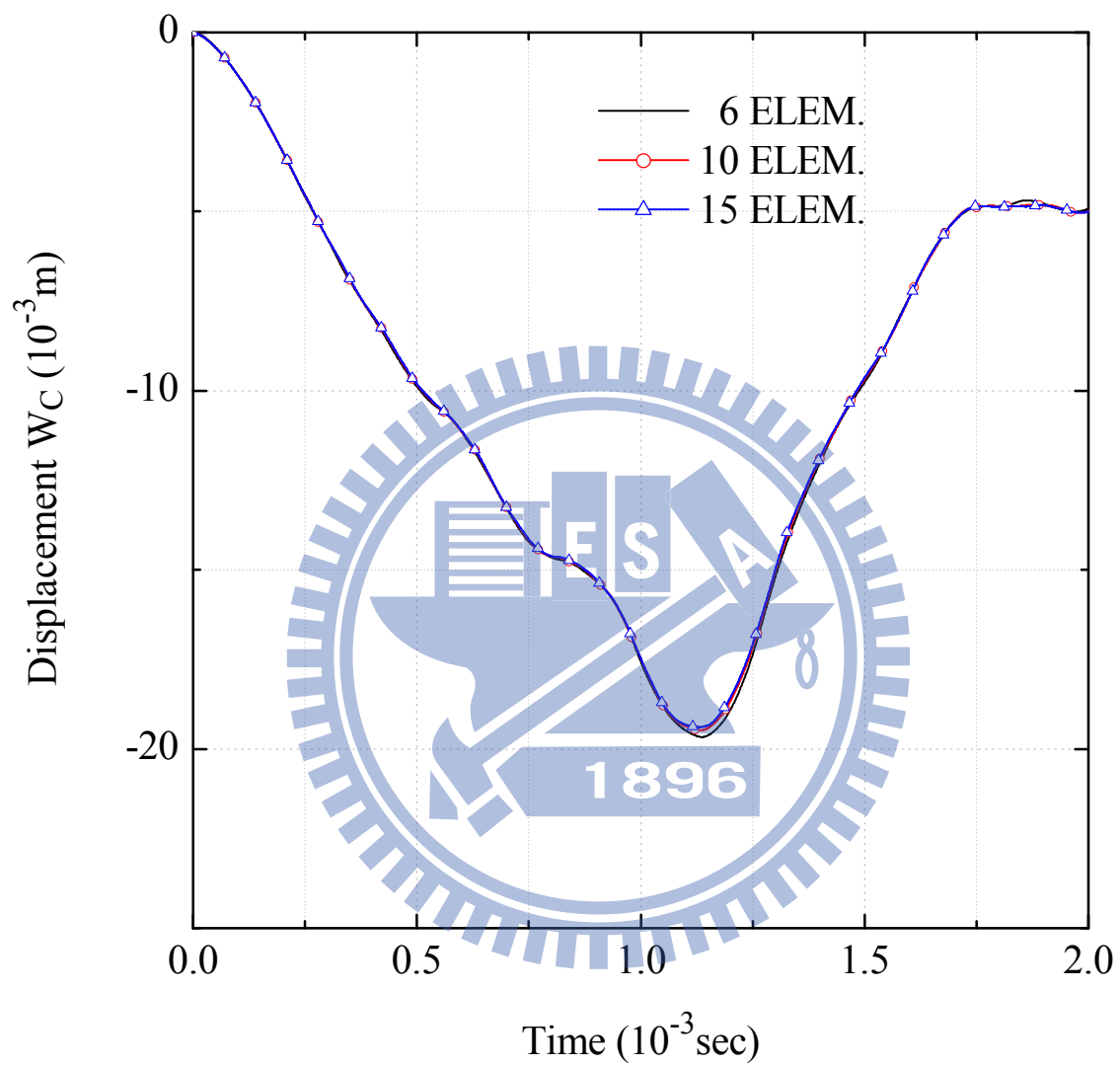
圖五十一 例題七中點 C 之位移至 $t = 3.5 \times 10^{-2}$ (sec) (Case (a))



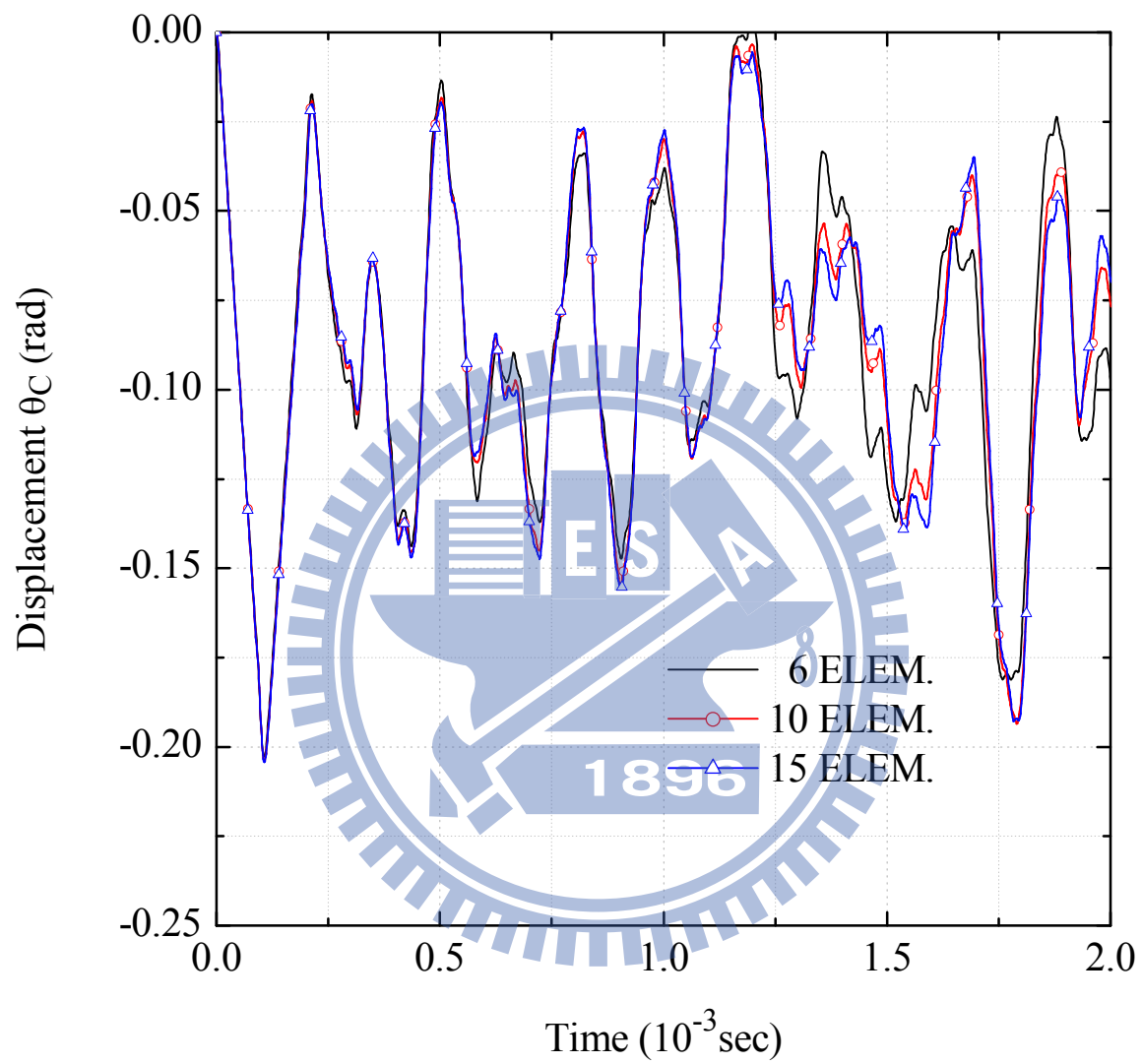
圖五十二 例題七數值方法不同之中點 C 位移(Case (a))



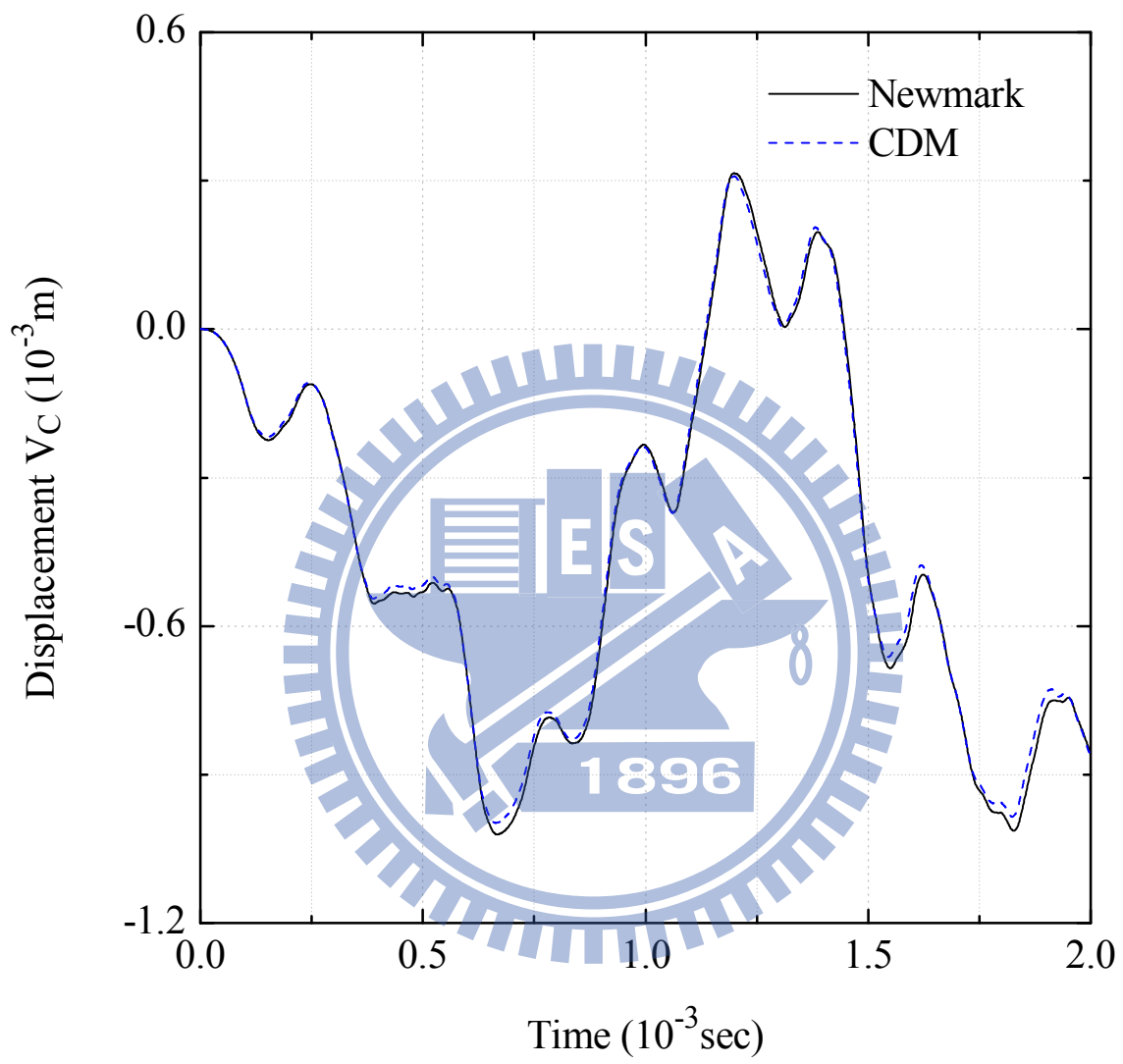
圖五十三 例題七元素數不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b))



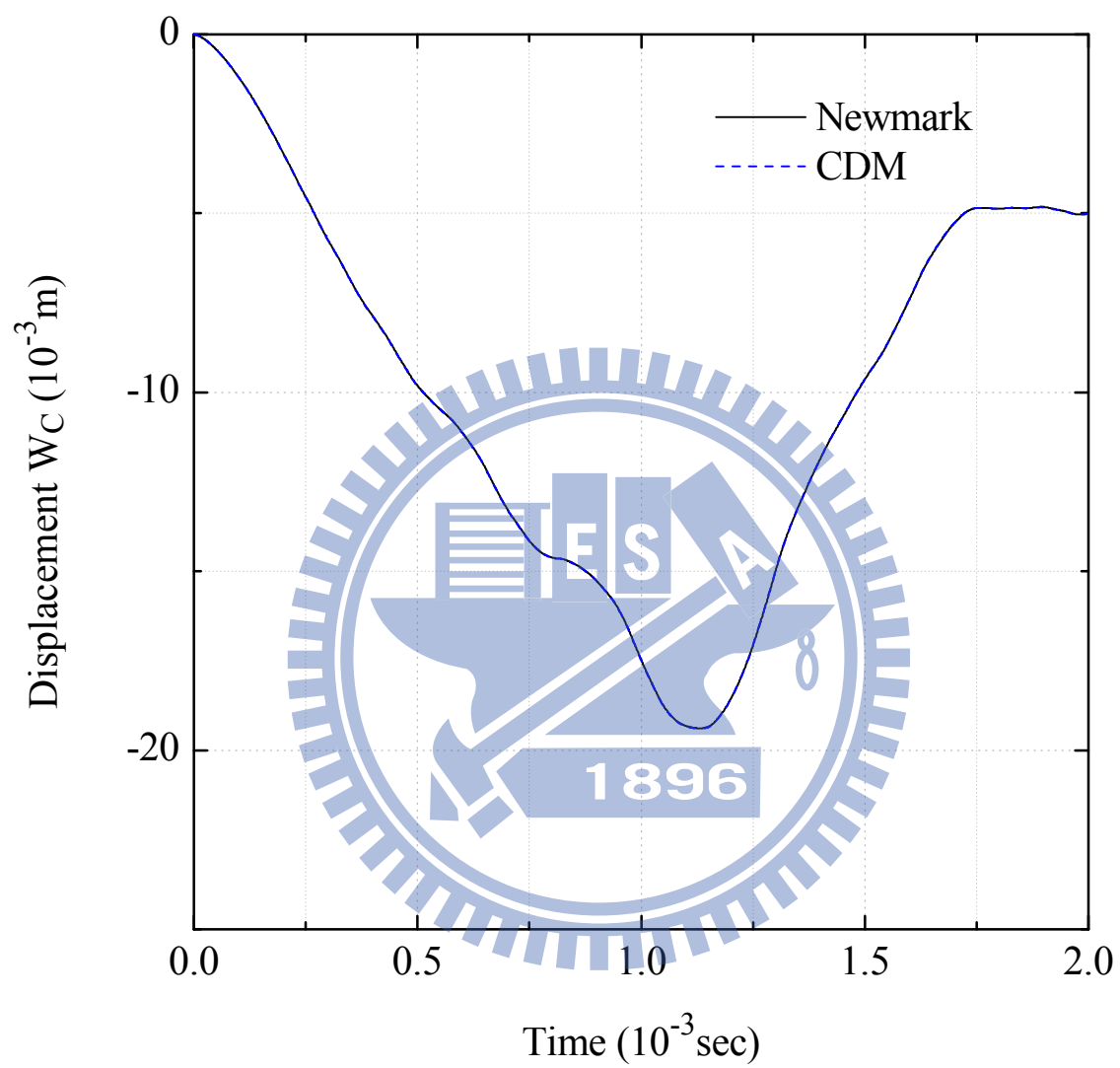
圖五十四 例題七元素數不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b))



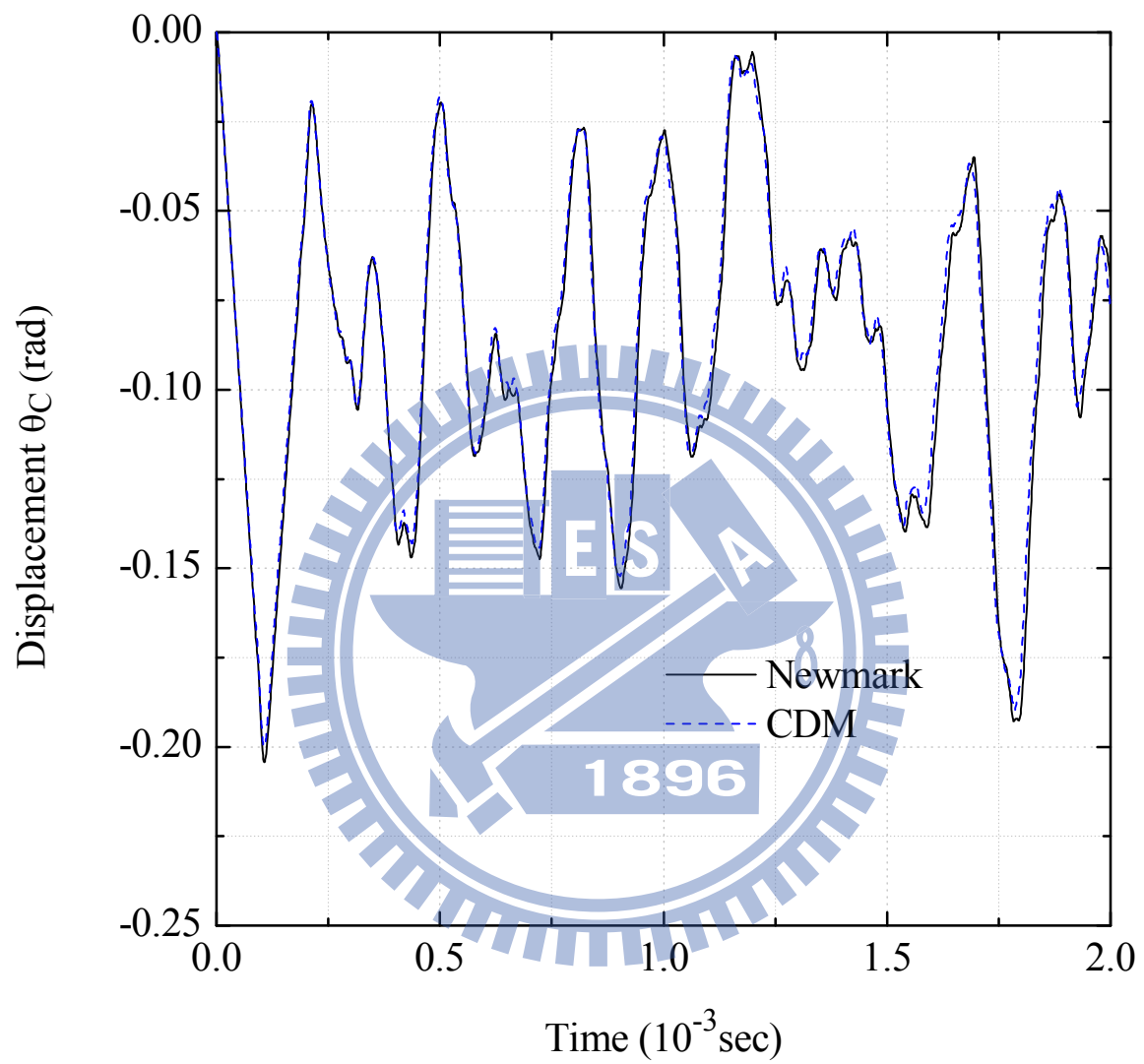
圖五十五 例題七元素數不同中點 C 的轉角(Case (b))



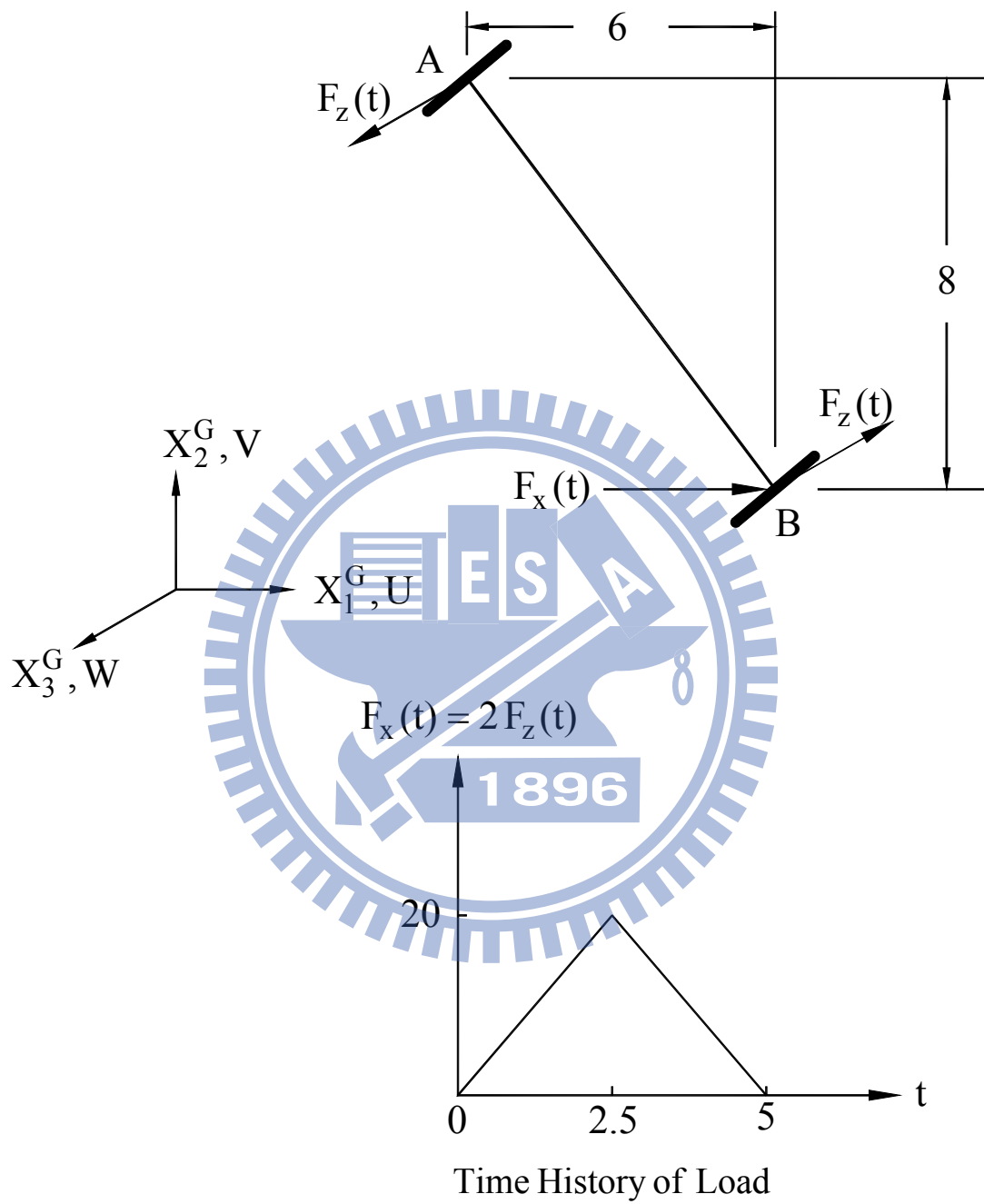
圖五十六 例題七數值方法不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b))



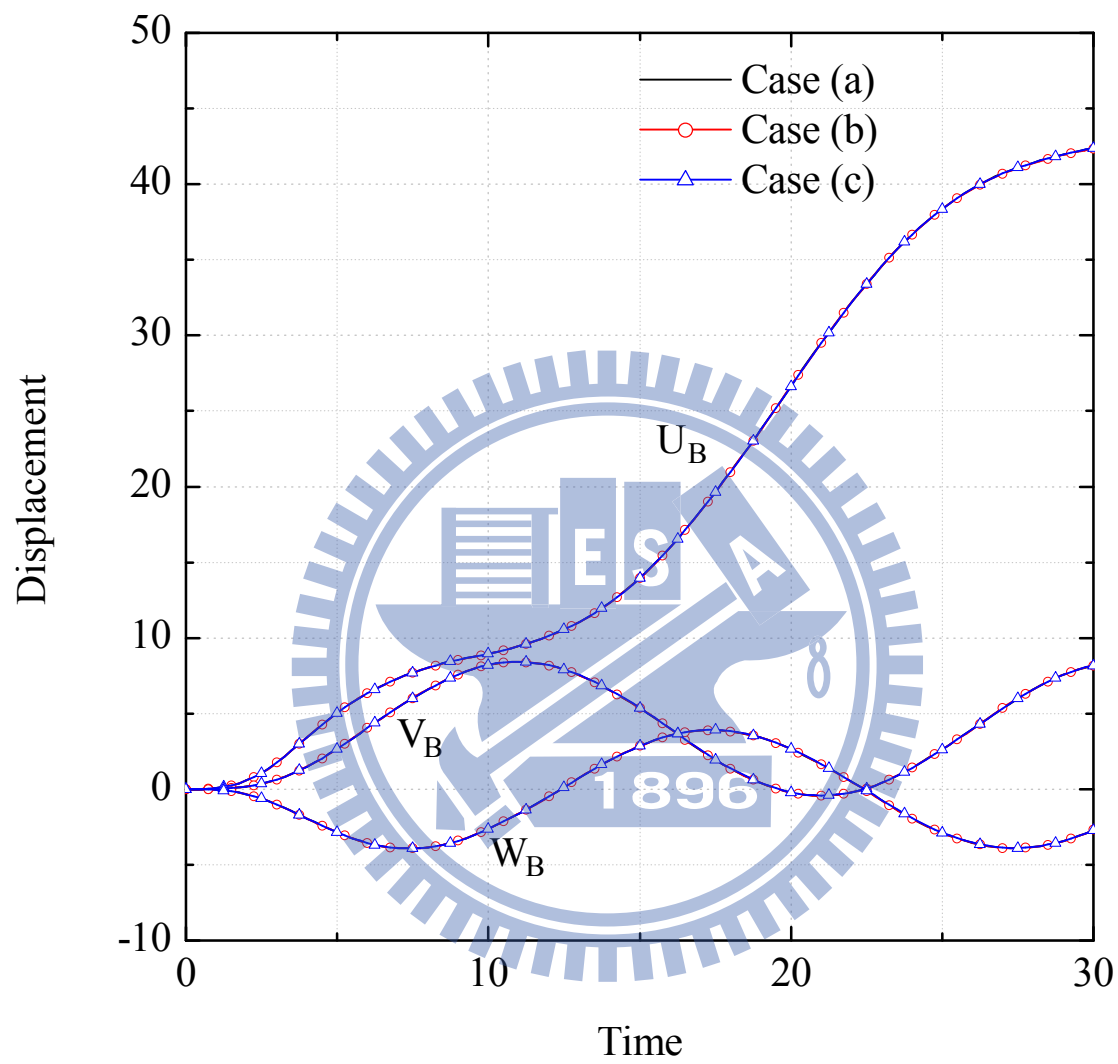
圖五十七 例題七數值方法不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b))



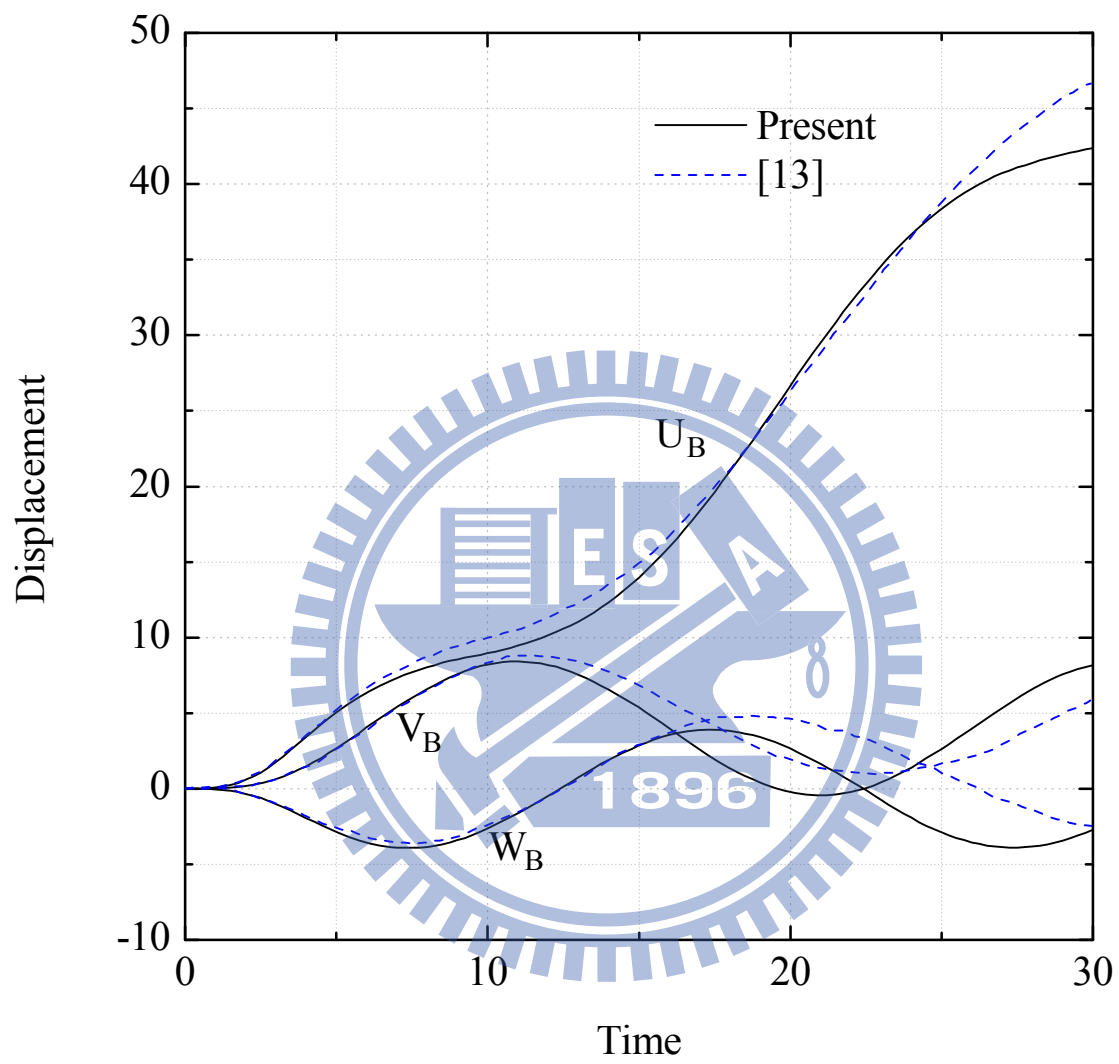
圖五十八 例題七數值方法不同中點 C 的轉角(Case (b))



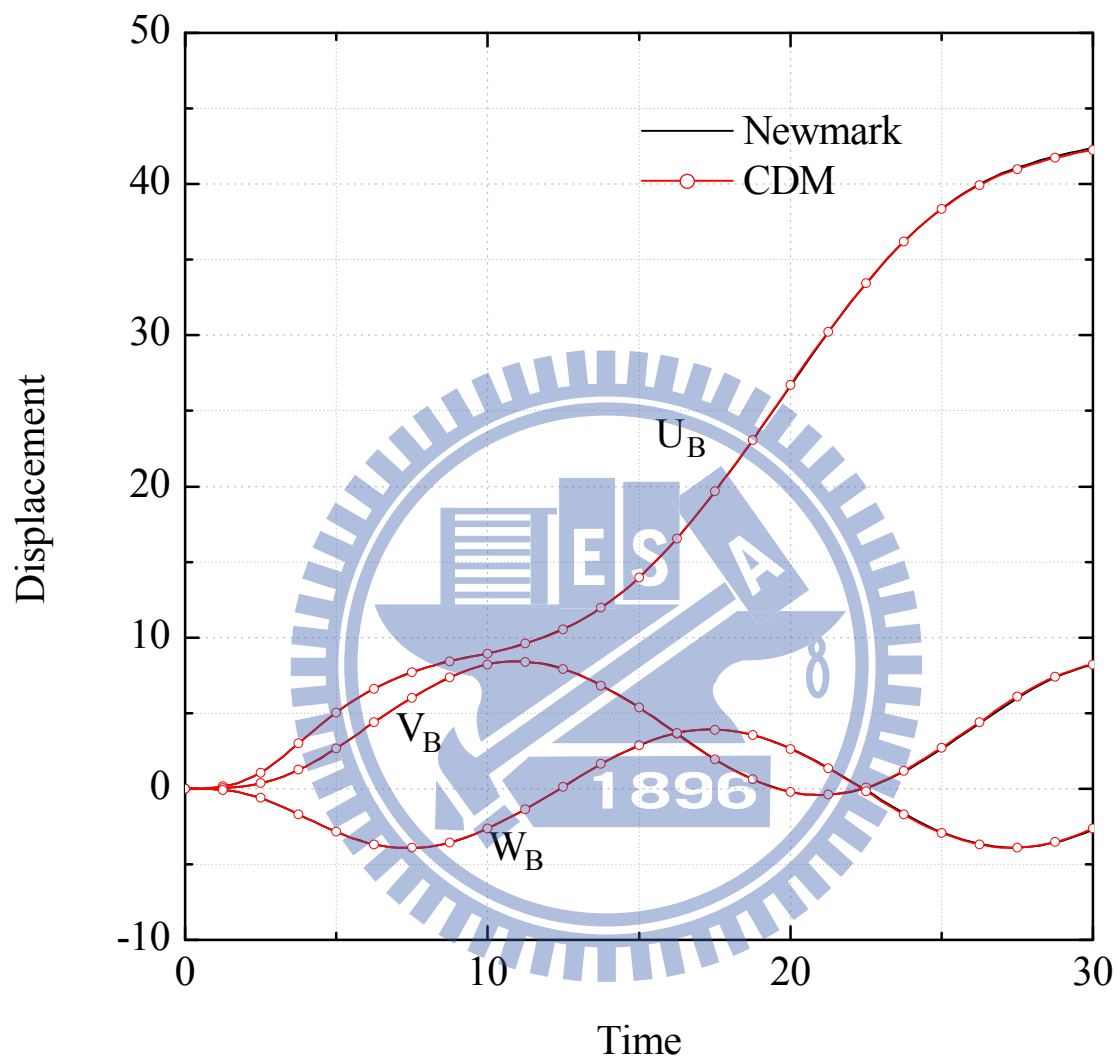
圖五十九 例題八兩端加圓盤之自由梁之幾何及受力圖



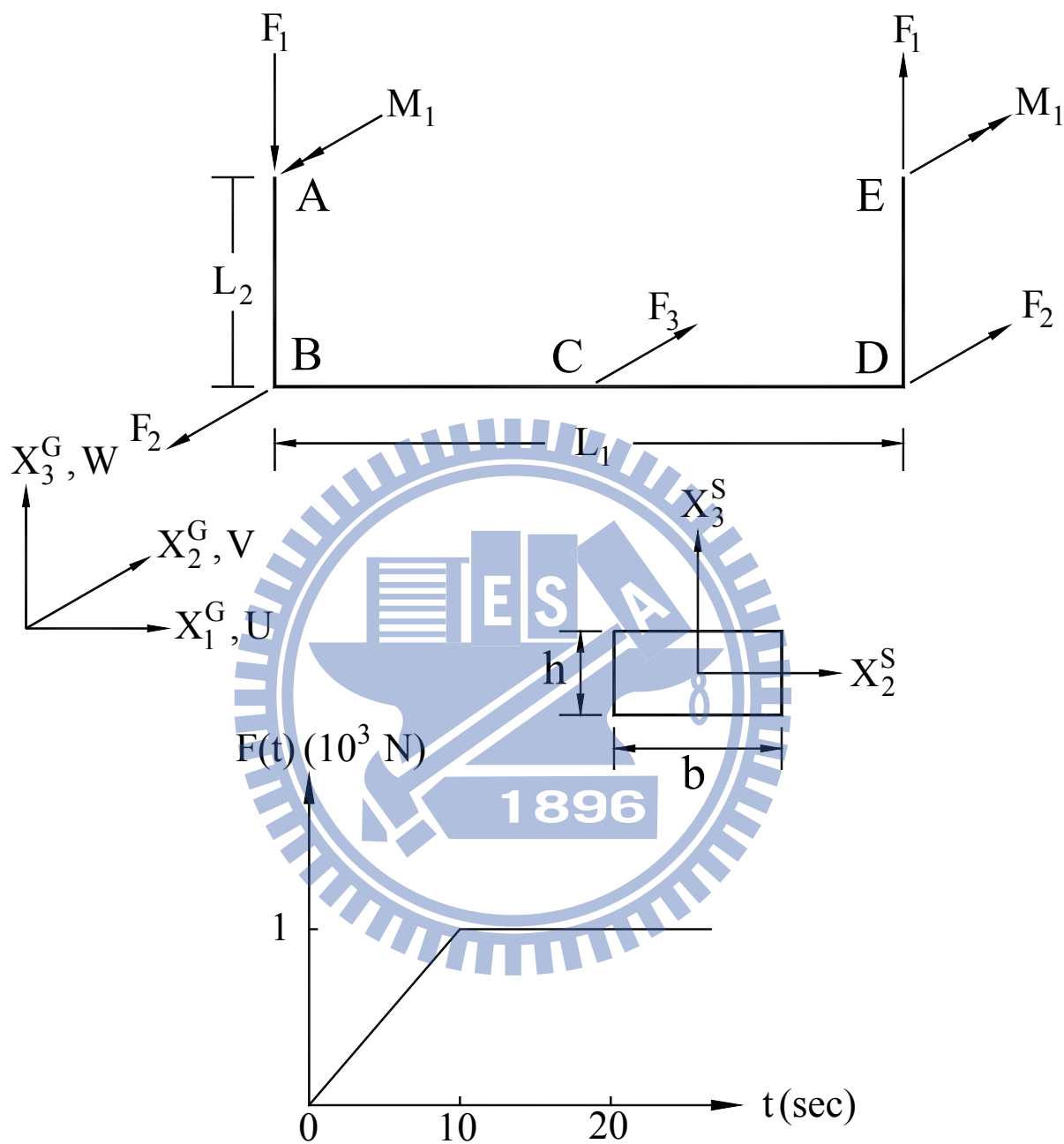
圖六十 例題八 Newmark 法 B 點之位移



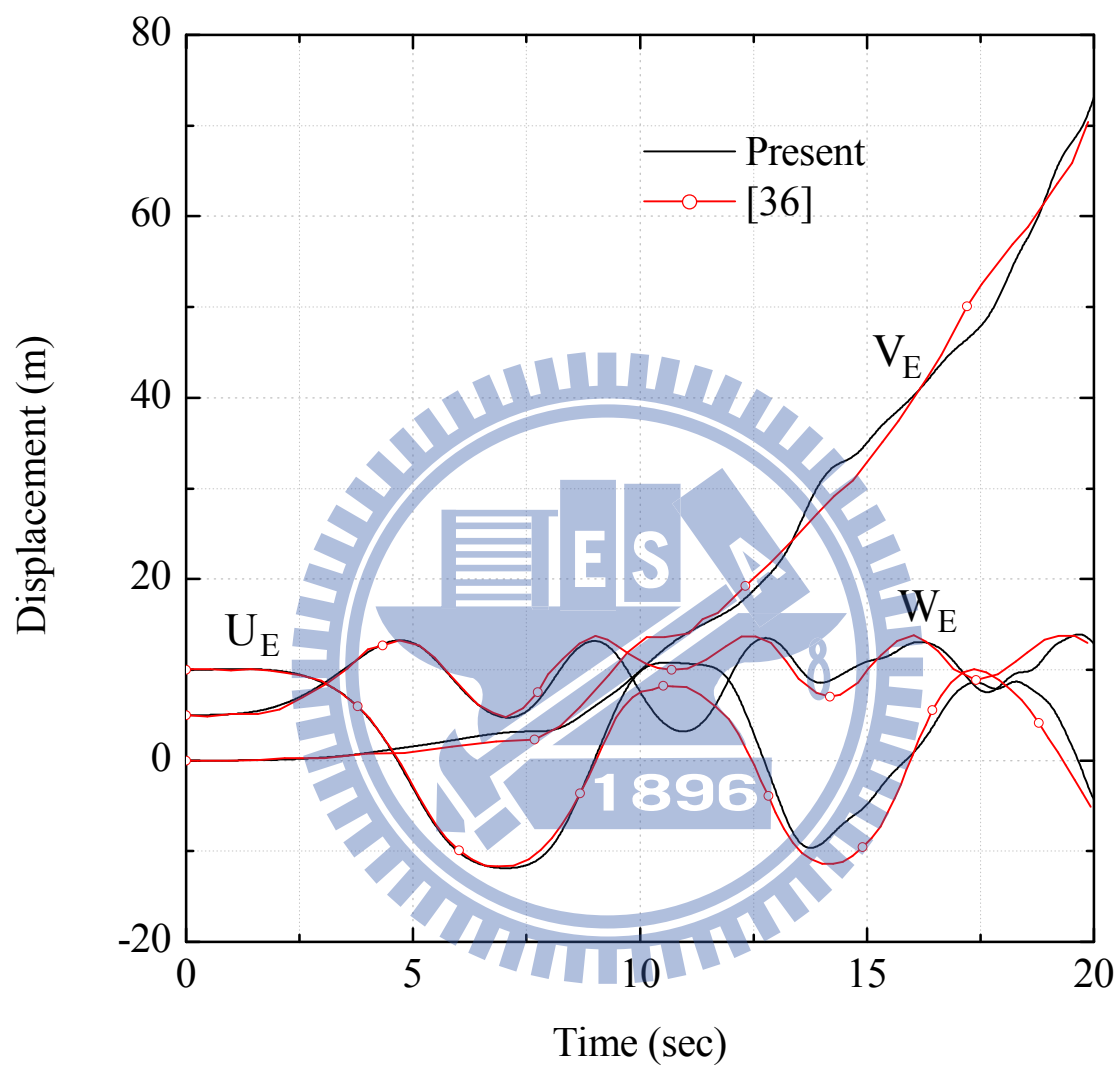
圖六十一 例題八 Newmark 法 B 點之位移



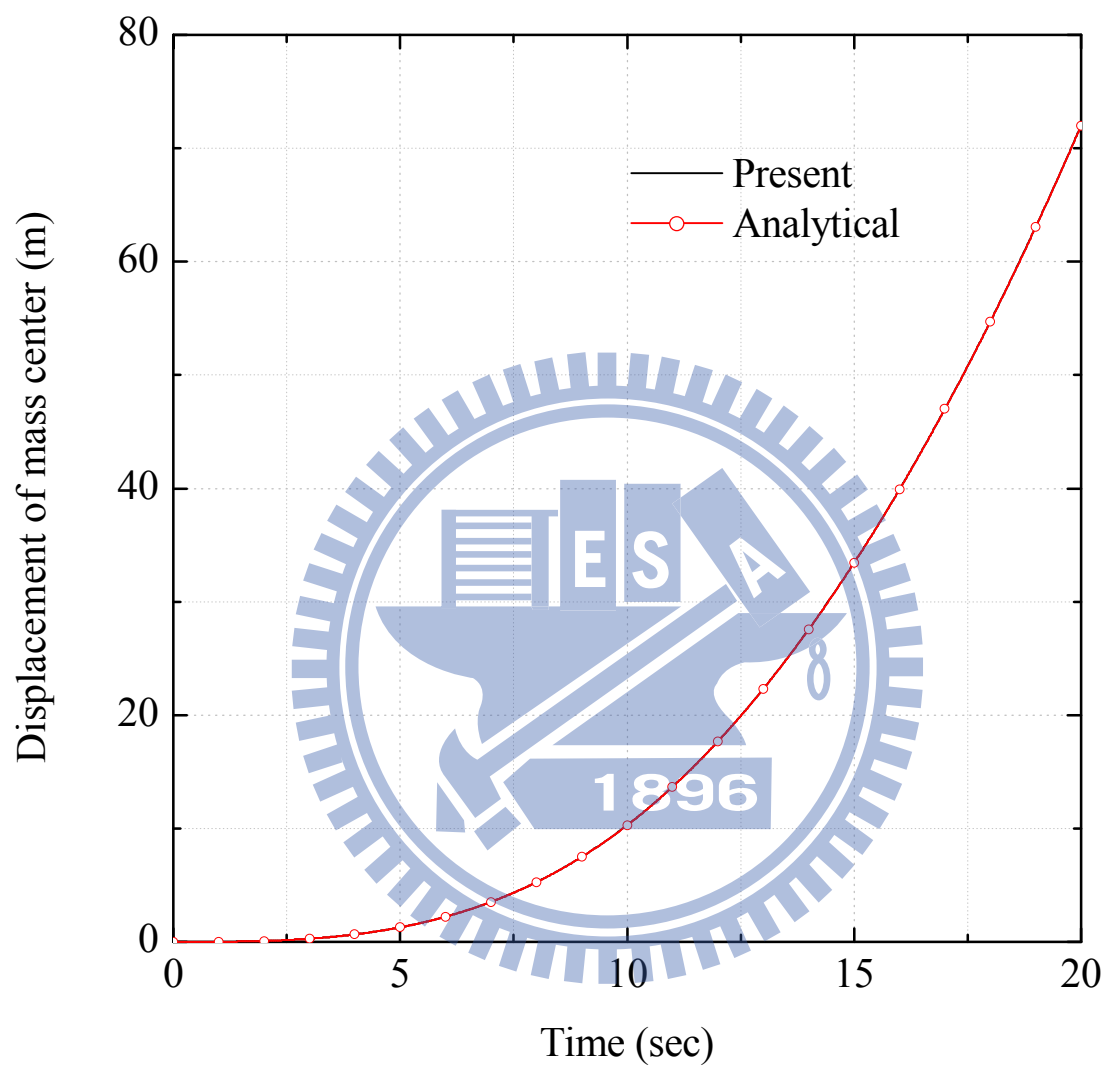
圖六十二 例題八數值方法不同之 B 點之位移



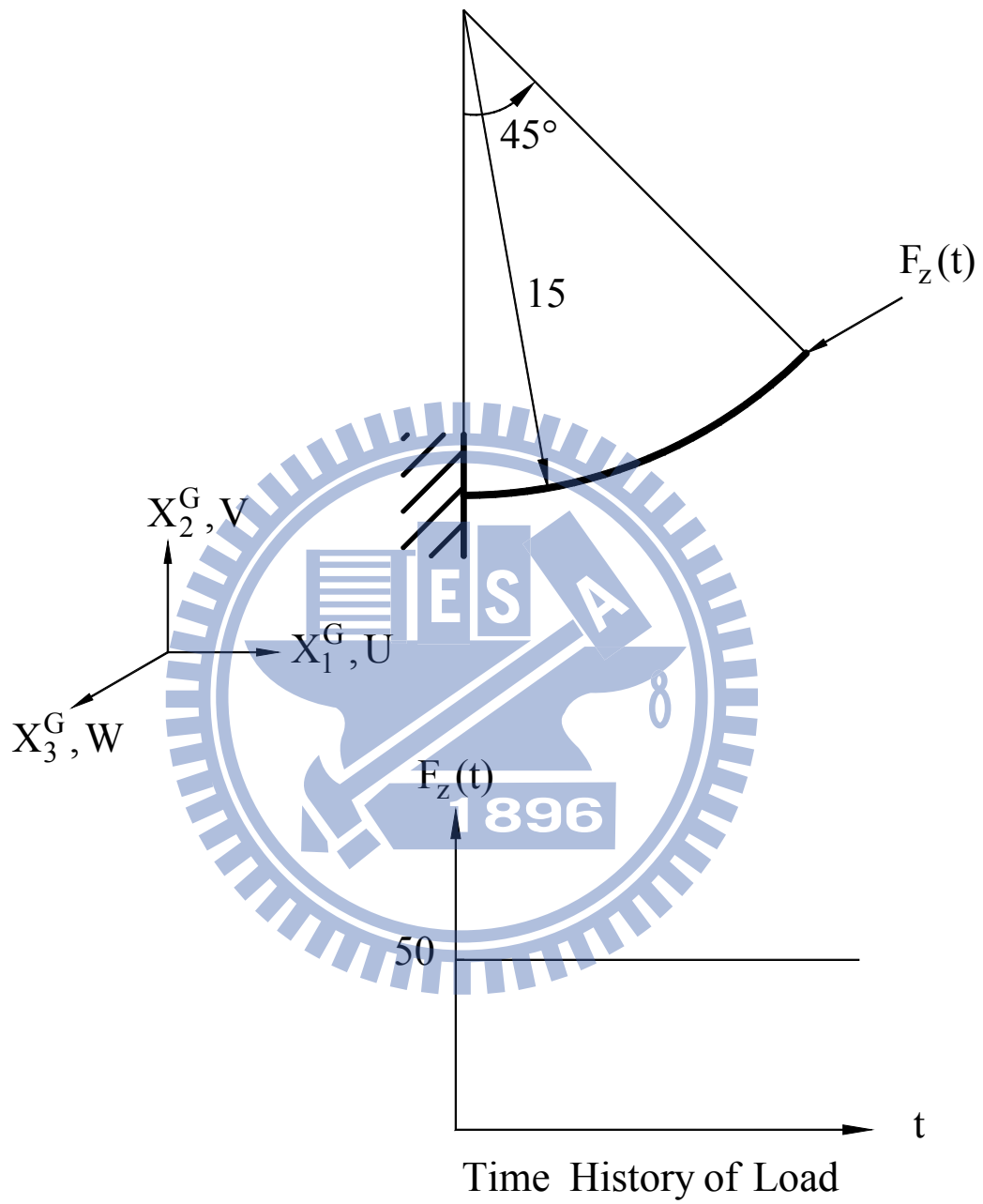
圖六十三 例題九三維矩形斷面梁之幾何及受力圖



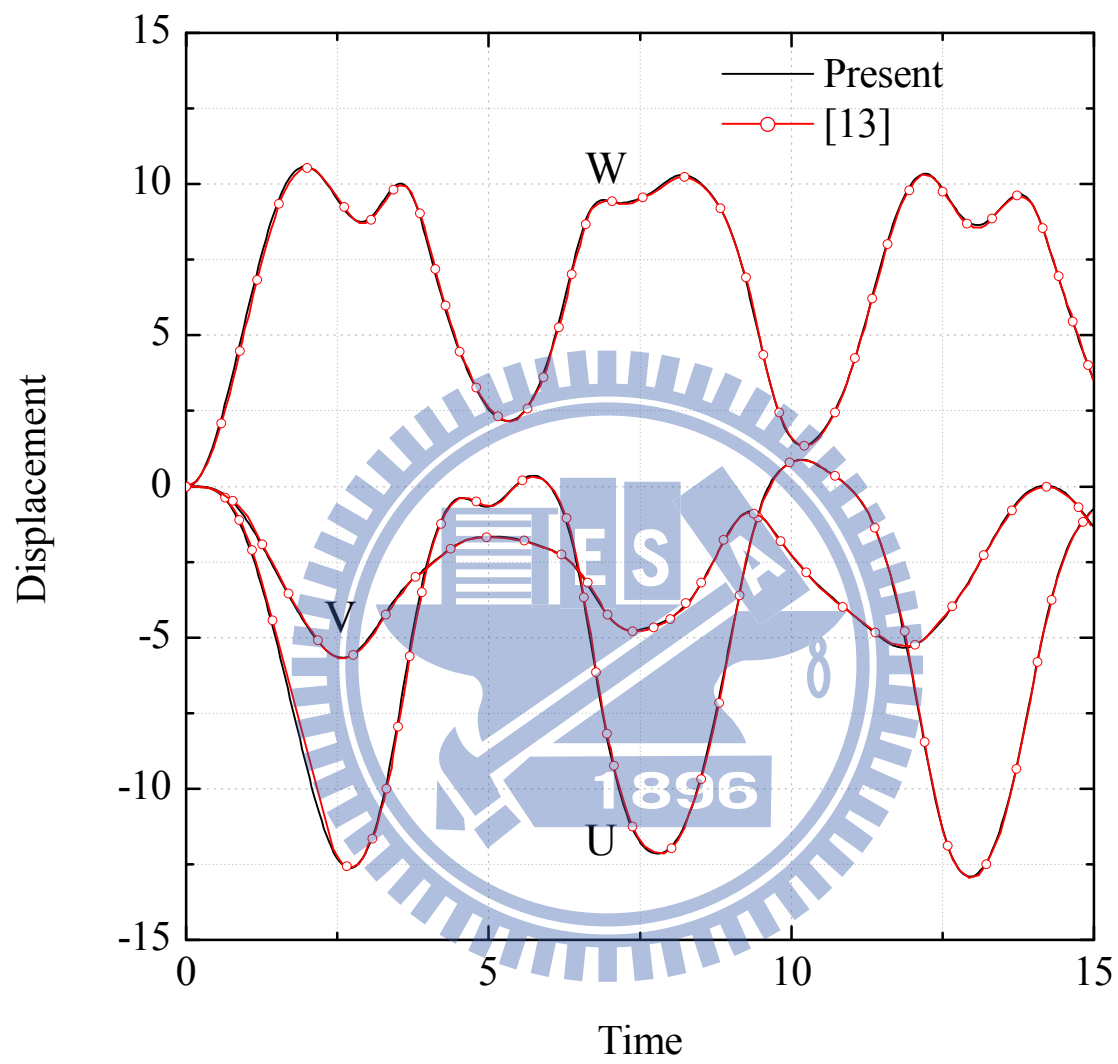
圖六十四 例題九 E 點之位移



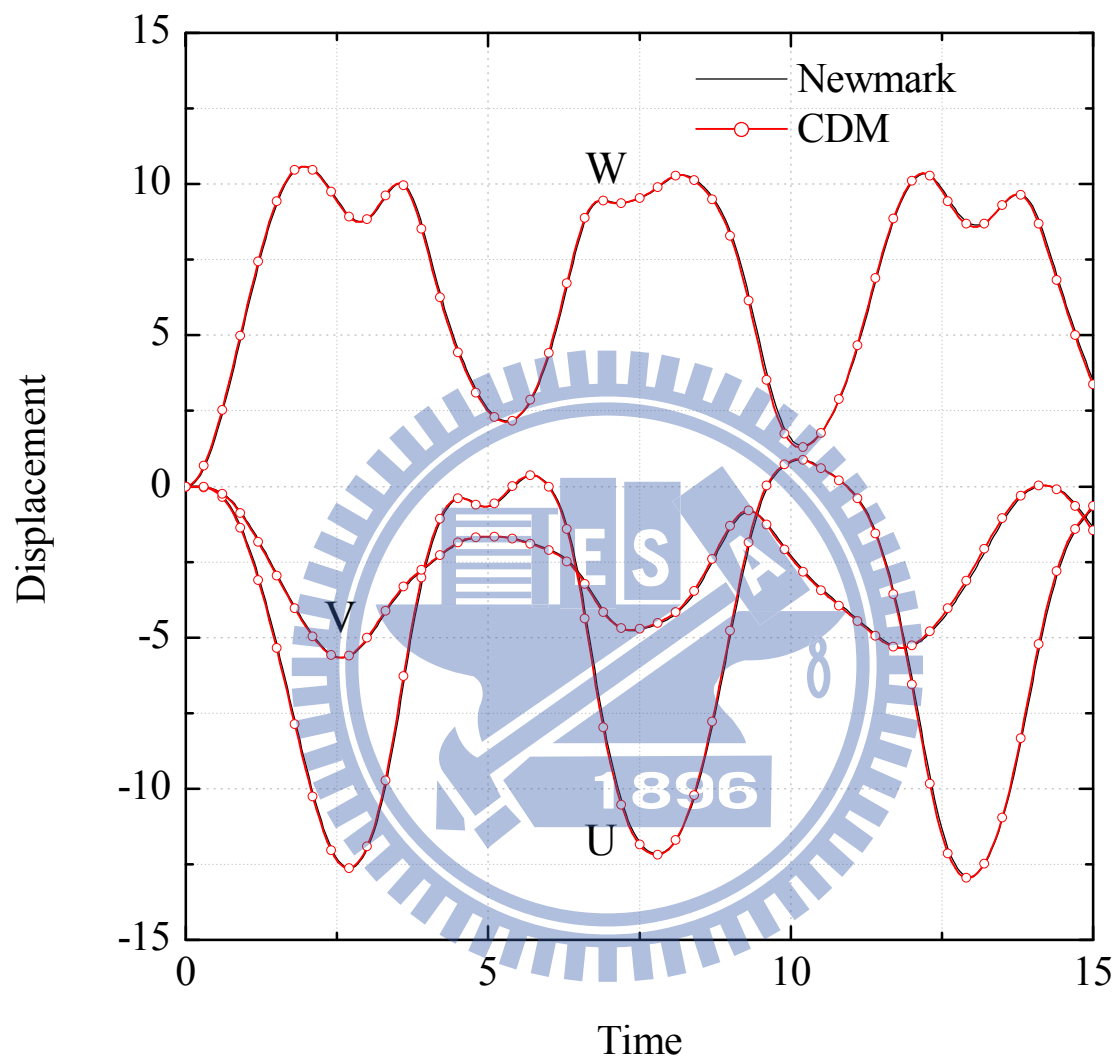
圖六十五 例題九質心在 X_2^G 位移



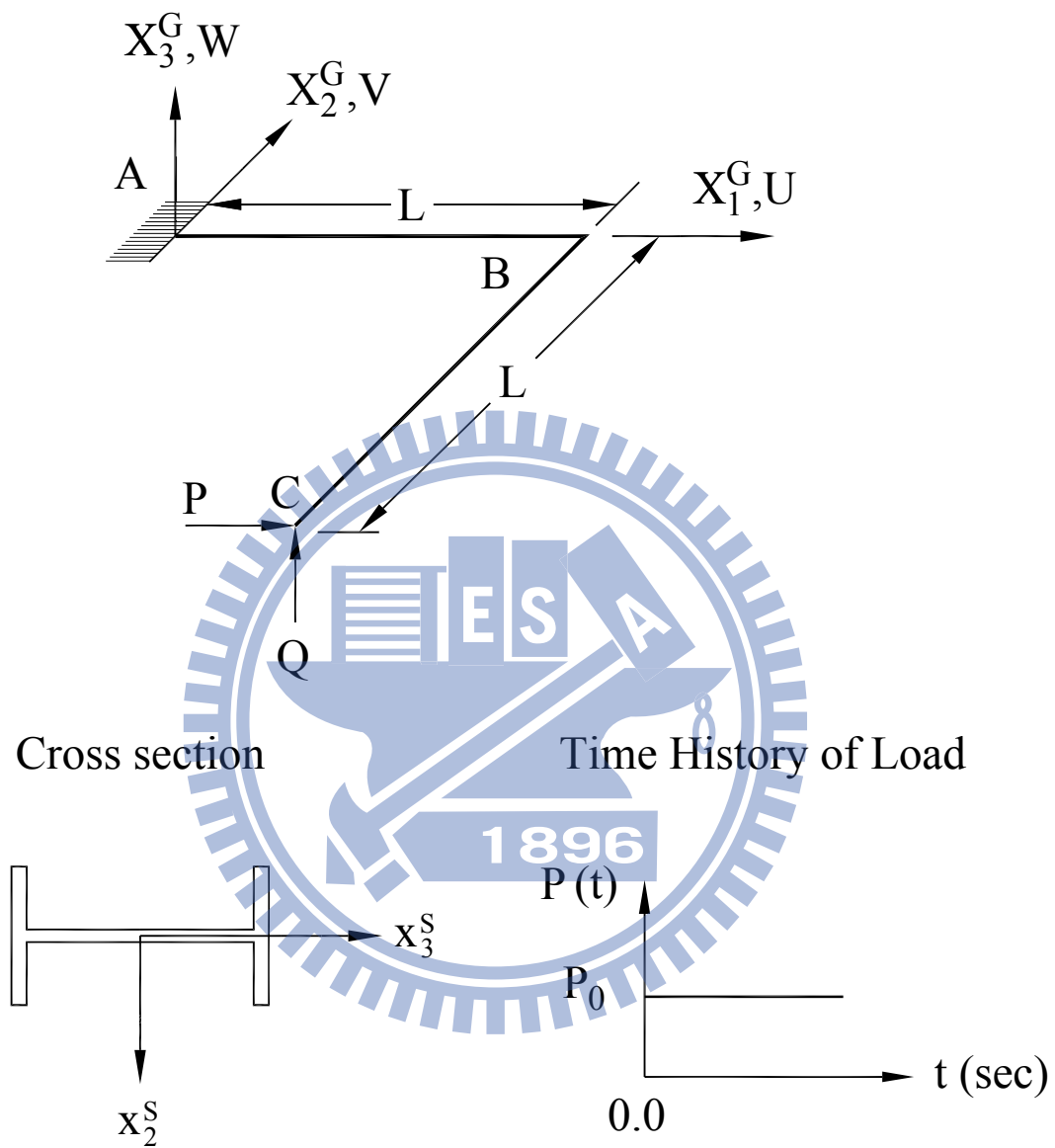
圖六十六 例題十懸臂彎曲梁之幾何及受力圖



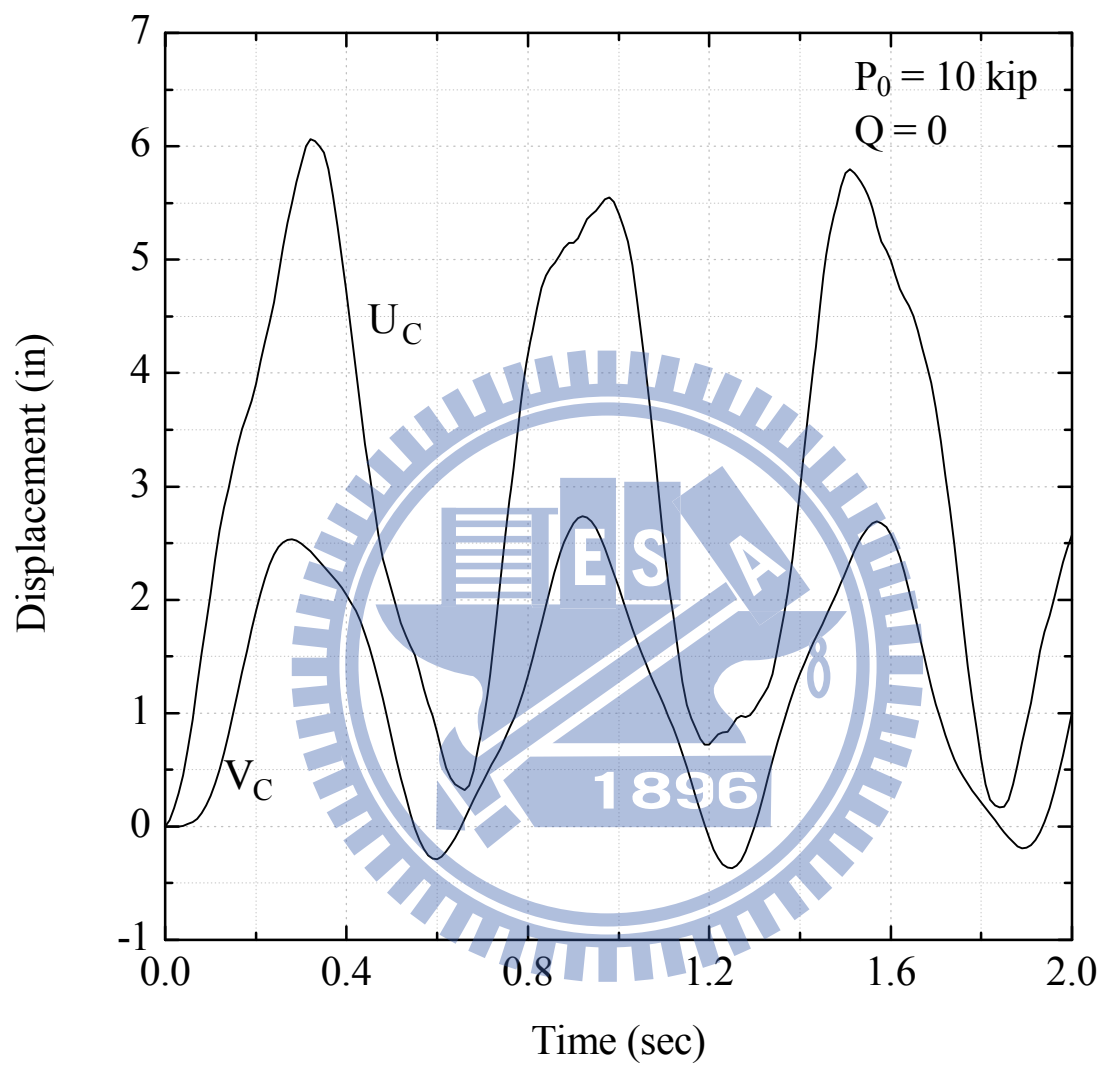
圖六十七 例題十 Newmark 法自由端之位移



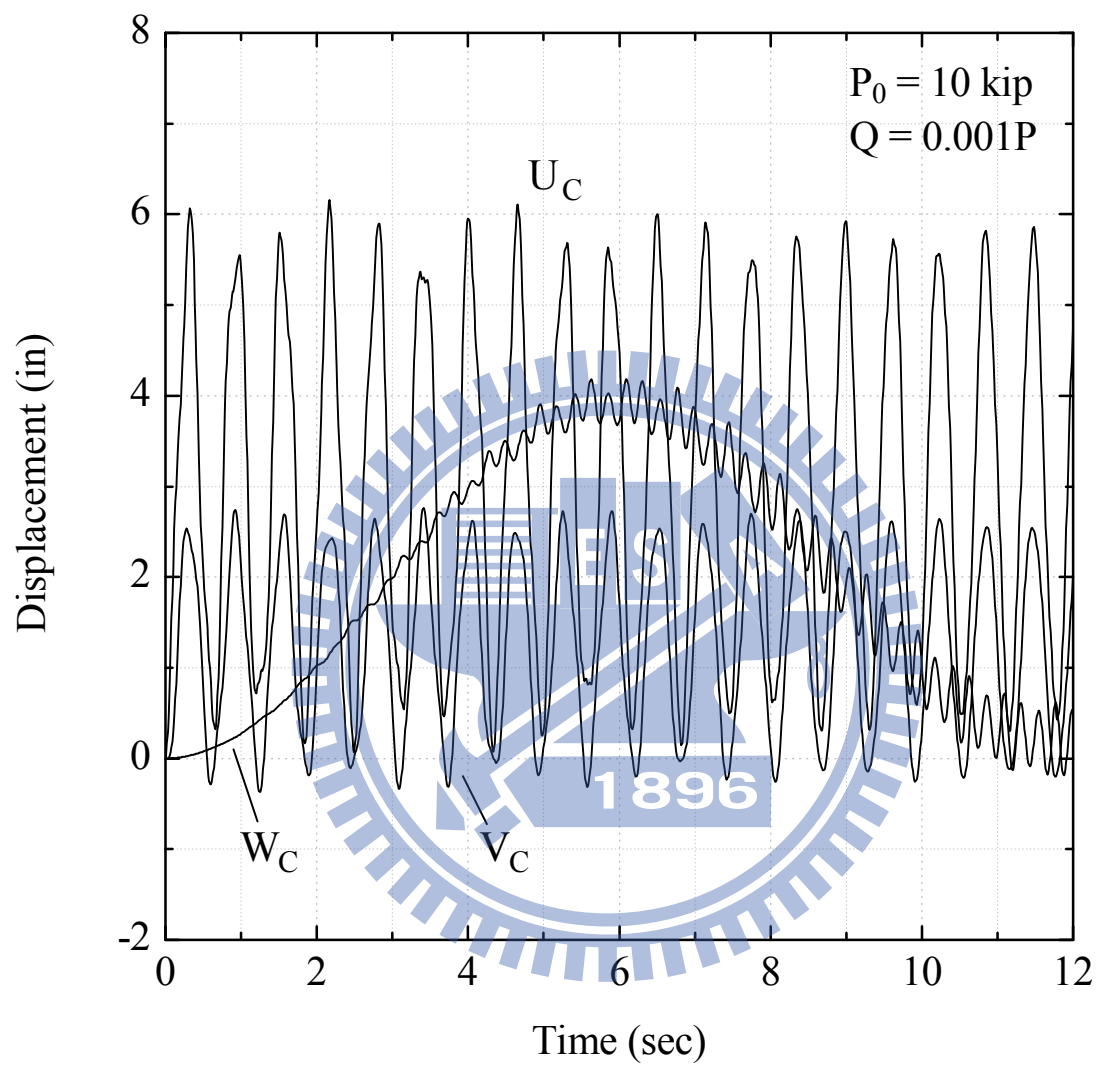
圖六十八 例題十數值方法不同之自由端位移



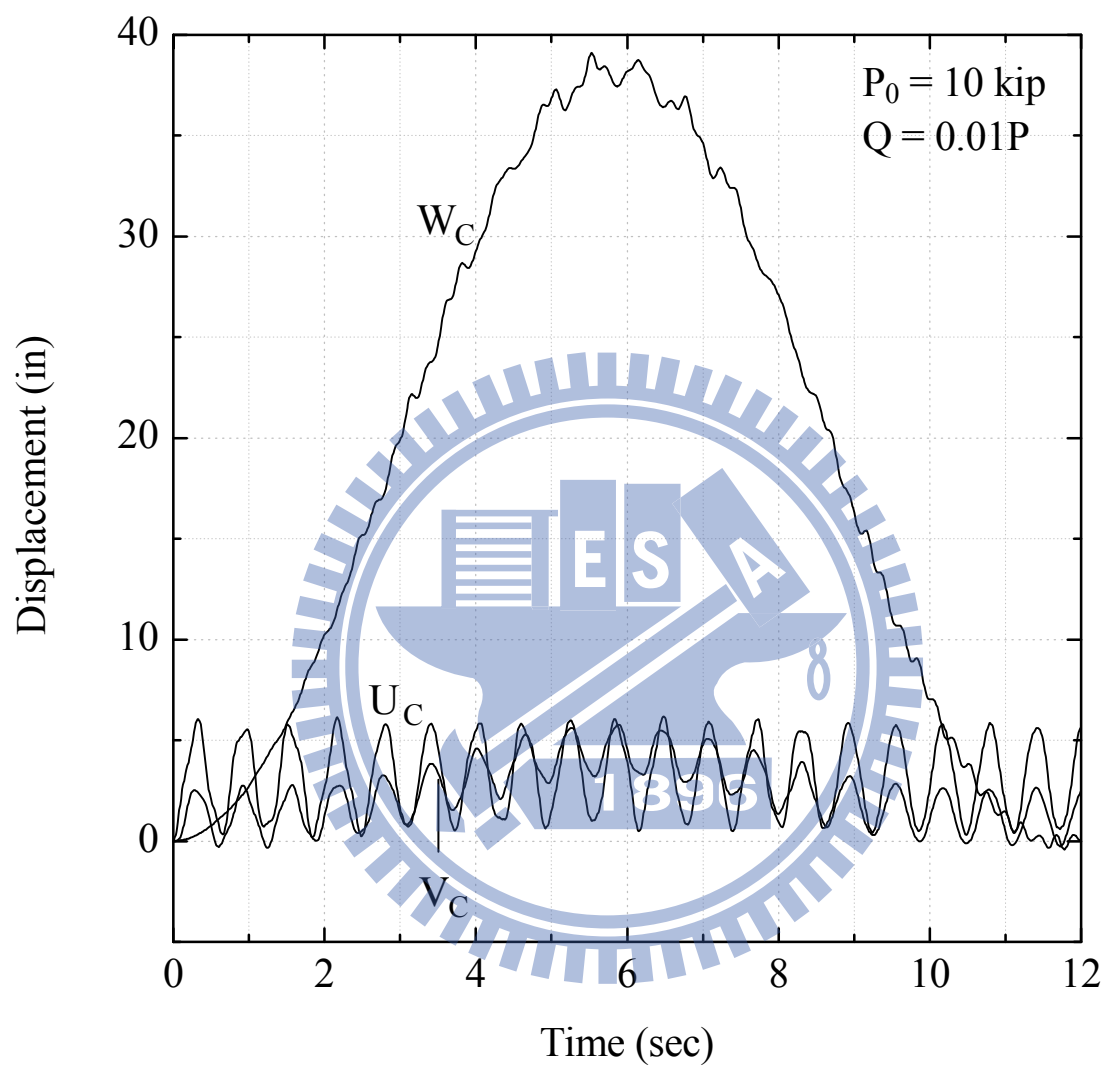
圖六十九 例題十一直角懸臂梁之幾何及受力圖



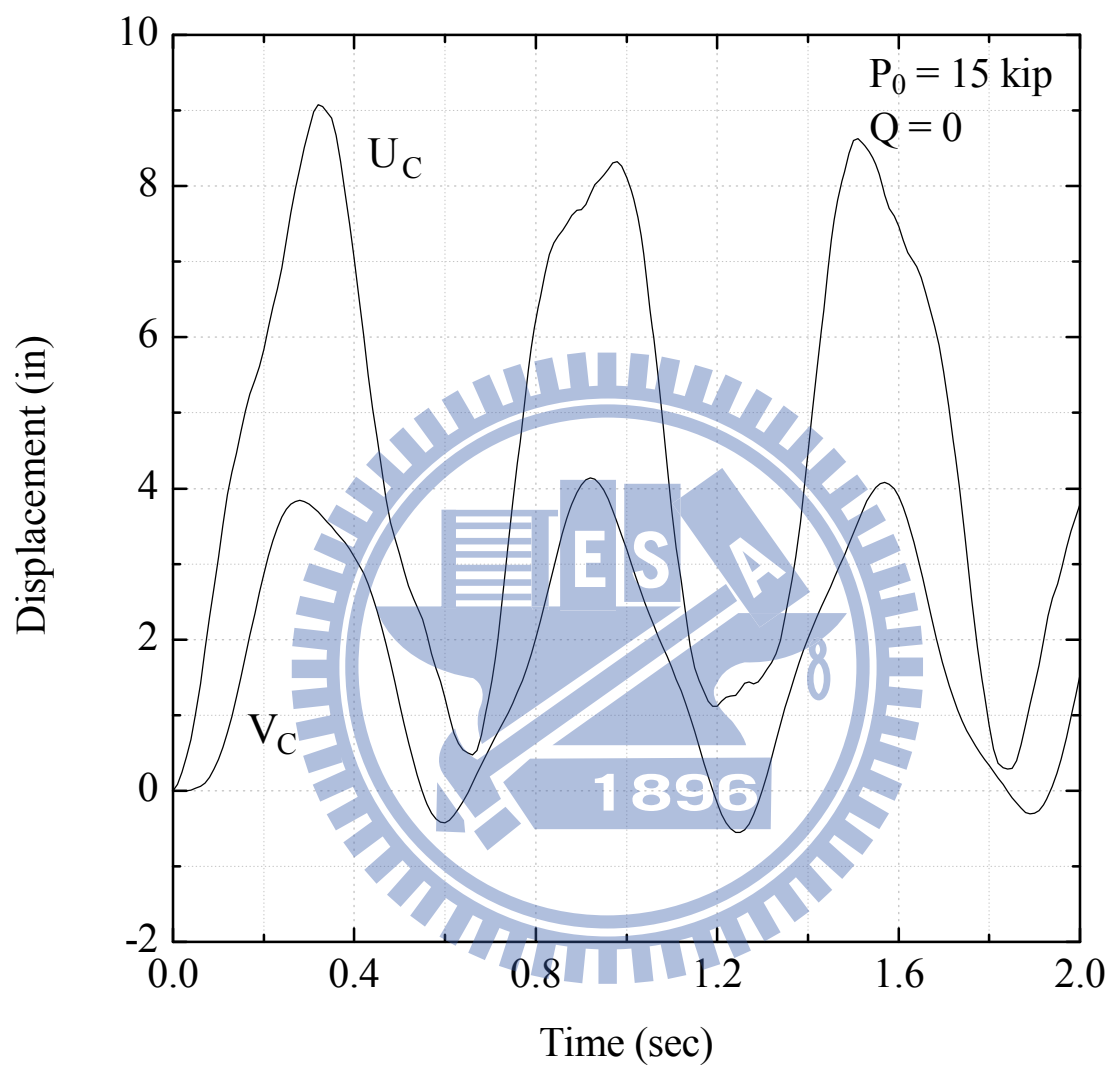
圖七十 例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$)



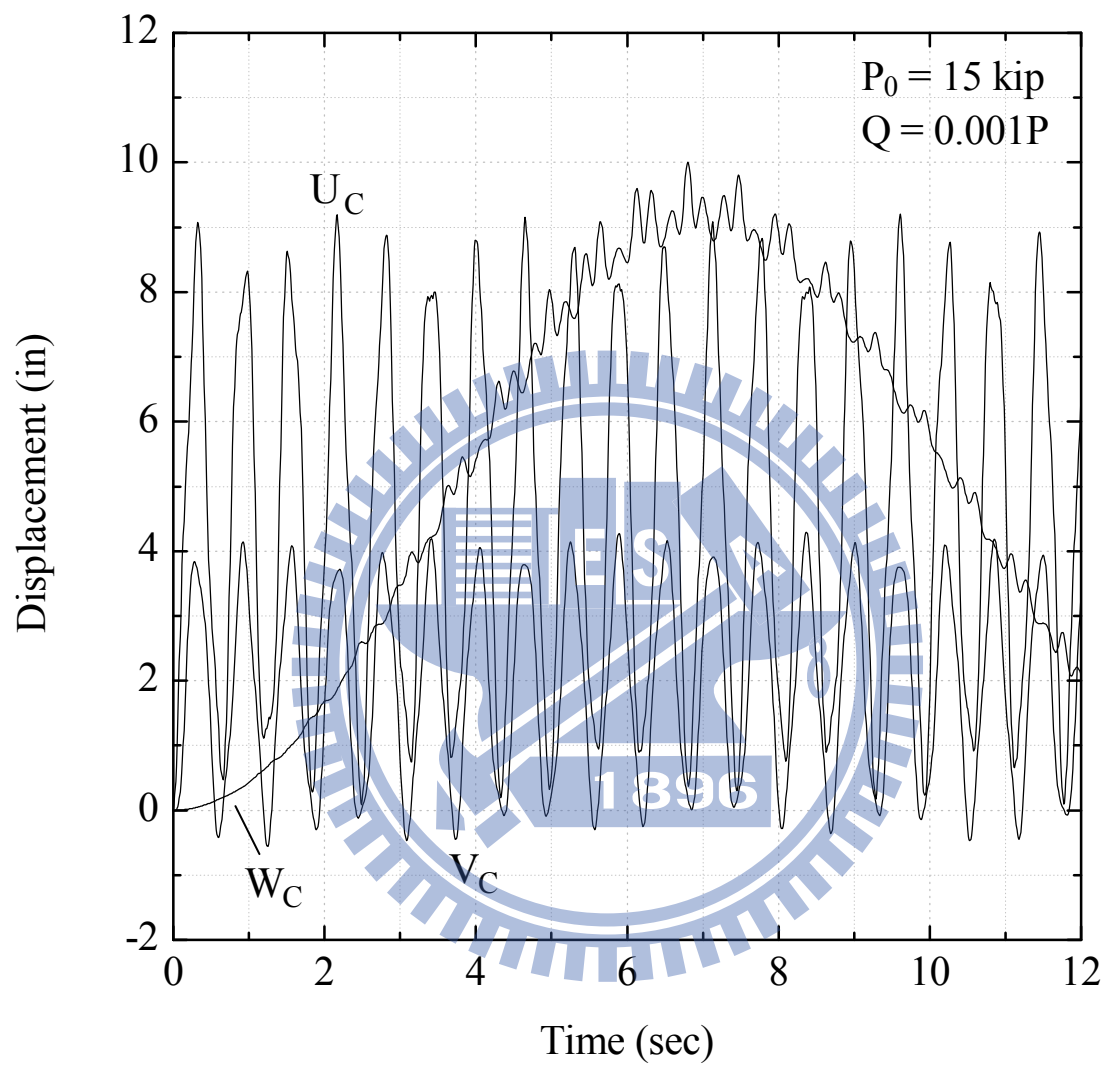
圖七十一 例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$ $Q = 0.001P$)



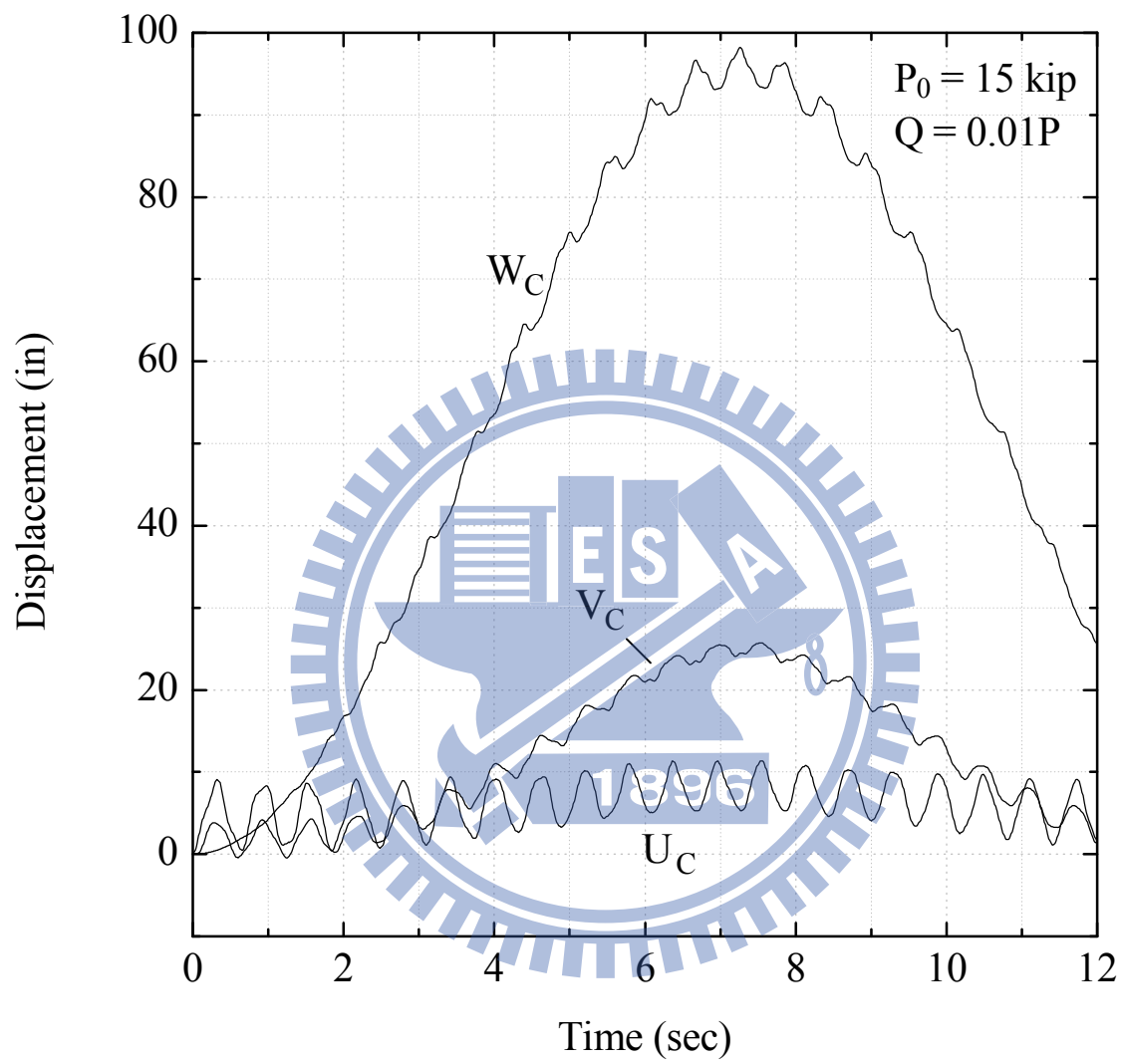
圖七十二 例題十一 C 點之位移($P_0 = 10 \text{ kip}$ $Q = 0.01P$)



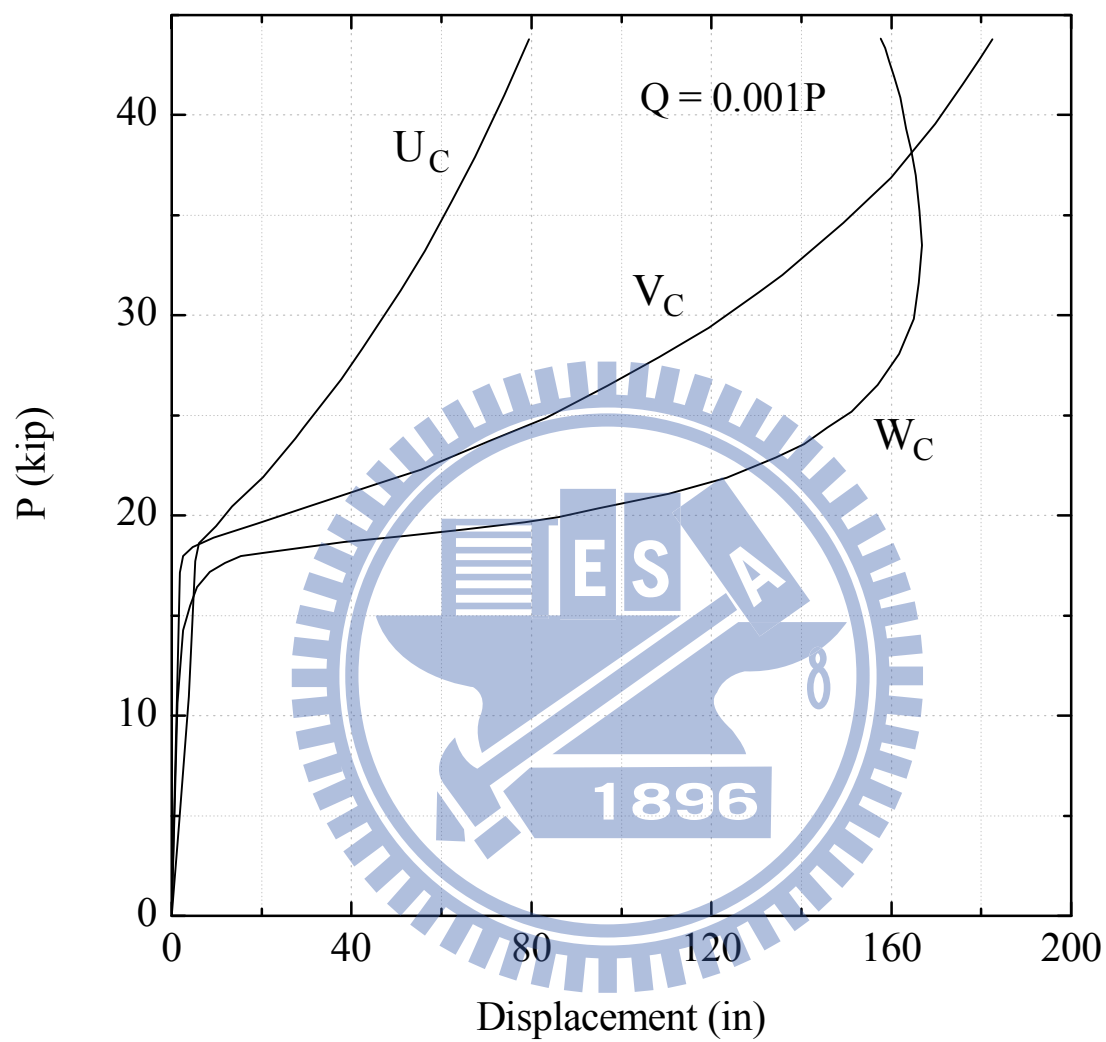
圖七十三 例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$)



圖七十四 例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$ $Q = 0.001P$)



圖七十五 例題十一 C 點之位移($P_0 = 15 \text{ kip}$ $Q = 0.01P$)



圖七十六 例題十一 C 點之負荷—位移曲線圖

附錄 A 角速度與旋轉向量之關係

令 $\mathbf{r} = \phi \mathbf{e}$ 為一旋轉向量，其中 \mathbf{e} 為旋轉軸方向的單位向量， ϕ 為繞旋轉軸轉角的大小，利用(2.3.1)式及

$$\mathbf{e} \times \mathbf{A} = (\mathbf{e} \times \mathbf{I})\mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

其中 \mathbf{I} 為 3×3 的單位矩陣， \mathbf{A} 為任意 3×1 的向量，或是 3×3 的向量則與 \mathbf{r} 對應的旋轉矩陣 \mathbf{R} 可表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin \phi (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

或是表示成 \mathbf{r} 的函數

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \quad (\text{A.3})$$

因 \mathbf{R}_1 為一反對稱矩陣， \mathbf{R}_2 為一對稱矩陣，所以 \mathbf{R} 的轉置矩陣可表示如下：

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{I} - \frac{\sin \phi}{\phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \quad (\text{A.4})$$

由(A.2)式 \mathbf{R} 對時間的微分可表示如下：

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_1 + \dot{\mathbf{R}}_2 \quad (\text{A.5})$$

其中

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \cos \phi \dot{\phi} (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) + \sin \phi \dot{\phi} (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \sin \phi (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) + (1 - \cos \phi) [\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) + \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})] \quad (\text{A.7})$$

由(2.3.4)式、(A.5)式~(A.7)式可得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t = \dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}^t + \dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}^t \quad (\text{A.8})$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}^t = & \dot{\phi}[\cos\phi(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) - \cos\phi \sin\phi(\mathbf{e} \times \mathbf{I})(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \\ & + \cos\phi(1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \times \mathbf{I})(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) \\ & + \sin\phi(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) - \sin^2\phi(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I}))(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \\ & + \sin\phi(1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I}))^2] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}^t = & \sin\phi(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) - \sin^2\phi(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \\ & + \sin\phi(1 - \cos\phi)(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) \\ & + (1 - \cos\phi)[(\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) + \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})] \\ & - (1 - \cos\phi)\sin\phi[(\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) + \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})](\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \\ & + (1 - \cos\phi)^2[(\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) + \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I})](\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I})) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

又利用向量恆等式

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ 及 (A.1) 式可以將 (A.9) 式及 (A.10) 式化簡成

$$\dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}^t = \dot{\phi}(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}^t = \sin\phi(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) + (1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \times \mathbf{I} \quad (\text{A.12})$$

將 (A.1) 式及 (A.2) 式代入 (A.8) 式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t &= \dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}^t + \dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}^t \\ &= [\dot{\phi}\mathbf{e} + \sin\phi\dot{\mathbf{e}} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})] \times \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

由 (A.13) 式可知

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{e} + \sin\phi\dot{\mathbf{e}} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \quad (\text{A.14})$$

利用 $\mathbf{r} = \phi\mathbf{e}$ ， $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\phi}\mathbf{e} + \phi\dot{\mathbf{e}}$ 及 $\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})$ (A.14) 式可改寫成

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\
&= \left[\mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I})) \right] \dot{\mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

由(A.15)式知(2.3.6)式中的 $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r})$ 為

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}) &= \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right) \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) \\
&= \mathbf{I} + a_1 (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + b_1 \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I})
\end{aligned} \tag{A.16}$$

其中 $a_1 = \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}$, $b_1 = \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{\sin \phi}\right)$

將(A.16)式對時間微分可得

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\dot{\mathbf{r}}) = \dot{a}_1 (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \dot{b}_1 (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I})) + a_1 (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{I}) + b_1 (\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{I}) + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{I})) \tag{A.17}$$

當 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 時, $\lim_{\phi \rightarrow 0} a_1 = \frac{1}{2}$, $\lim_{\phi \rightarrow 0} b_1 = \frac{1}{6}$ 所以 $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ (A.18)

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathbf{0}) = a_1 (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}_3 & \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 & 0 & -\dot{\phi}_1 \\ -\dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

由(2.3.6)式、(2.3.10) 式、(A.18) 式及(A.19) 式知, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 時

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\mathbf{r}} \tag{A.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \ddot{\mathbf{r}} \tag{A.21}$$

附錄 B $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 及 $\mathbf{T}_{\varphi\phi}$ 之顯式

本附錄為 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 、 $\mathbf{T}_{\varphi\phi}$ 矩陣之顯式(explicit form)， $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 可寫成

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \mathbf{T}_{\theta\varphi} \mathbf{T}_{\varphi\phi} = \mathbf{T}_{\theta\varphi} (\mathbf{I}_{14} + \mathbf{T}_{\varphi\phi}^1) = \mathbf{T}_{\theta\varphi} + \mathbf{T}_{\varphi\phi}^1 \circ$$

$$\mathbf{T}_{\theta\varphi} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\theta_{31}}{2} & -\frac{\theta_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{21}}{L} & 0 & 0 & -\theta_{31} & 1+\varepsilon_c & 0 & 0 & \frac{\theta_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{31}}{L} & 0 & 0 & \theta_{21} & 0 & 1+\varepsilon_c & 0 & -\frac{\theta_{32}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\theta_{32}}{2} & -\frac{\theta_{22}}{2} & 0 \\ -\frac{\theta_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_{22}}{L} & 0 & 0 & -\theta_{32} & 1+\varepsilon_c & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{32}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta_{32}}{L} & 0 & 0 & \theta_{22} & 0 & 1+\varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\varphi\varphi} = \mathbf{I}_{14} + \mathbf{T}_{\varphi\varphi}^1$$

$$\mathbf{T}_{\varphi\varphi}^1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi_{31}}{2} & \frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\phi_{31}}{2} & 0 & -\frac{\phi_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi_{21}}{2} & \frac{\phi_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi_{32}}{2} & \frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\phi_{32}}{2} & 0 & -\frac{\phi_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi_{22}}{2} & \frac{\phi_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

附錄 C 元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 詳細推導

切線剛度矩陣定義為節點內力對節點位移的一次微分，為使推導能更清楚，將(2.6.7)式之 $\delta \mathbf{q}$ 以 $\delta \mathbf{q}_\phi$ ，(2.6.4)式 \mathbf{f}^D 以 \mathbf{f}_ϕ^D 表示。本文中推導節點內力時，由(2.6.3)式至(2.6.12)式之定義，配合虛功原理先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ^D 對 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f}^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係。由(2.6.9)式， $\delta \mathbf{q}_\theta$ 與 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 以及 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 與 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 的關係分別表示如下

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}_\phi \quad (\text{C.1})$$

$$\delta \mathbf{q}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\phi} \delta \mathbf{q}_\phi \quad (\text{C.2})$$

由(2.6.12)式， \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 以及 \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_ϕ^D 的關係分別表示如下

$$\mathbf{f}_\phi^D = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{f}_\phi^D = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^D \quad (\text{C.4})$$

將(C.3)式及(C.4)式保留到變形參數的二次項可表示成

$$\mathbf{f}_\phi^D = \mathbf{f}_\theta^D + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\theta^{D1} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{f}_\phi^D = \mathbf{f}_\phi^D + (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\phi^{D1} \quad (\text{C.6})$$

將(C.3)對 \mathbf{q}_ϕ 偏微，並保留變形參數到一次項可得

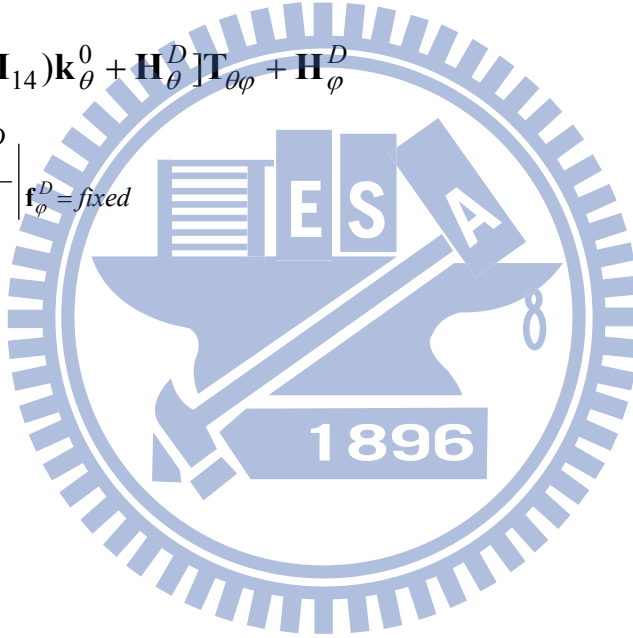
$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \mathbf{T}_{\theta\phi} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \bigg|_{\mathbf{f}_\theta^D} \right) \mathbf{T}_{\theta\phi} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} + \frac{\partial (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\theta^{D1}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right) \mathbf{T}_{\theta\phi} \\ &= [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_\theta^D] \mathbf{T}_{\theta\phi} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

其中 $\mathbf{H}_\theta^D = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \Big|_{\mathbf{f}_\theta^D = \text{fixed}}$

將(C.5)對 \mathbf{q}_ϕ 偏微配合(C.7)式，並保留變形參數到一次項可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \frac{\partial \mathbf{q}_\phi}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \mathbf{T}_{\phi\phi} \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi^D} \right) \mathbf{T}_{\phi\phi} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} + \frac{\partial (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\phi^{D1}}{\partial \mathbf{q}_\phi} \right) \mathbf{T}_{\phi\phi} \\
 &= [\mathbf{k}_\phi + \mathbf{T}_{\phi\phi}^{1t} \mathbf{k}_\phi^0 + \mathbf{H}_\phi^D] \mathbf{T}_{\phi\phi} \\
 &= \mathbf{k}_\phi + \mathbf{H}_\phi^D \\
 &= [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_\theta^D] \mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{H}_\phi^D
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

其中 $\mathbf{H}_\phi^D = \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \Big|_{\mathbf{f}_\phi^D = \text{fixed}}$



附錄 D \mathbf{H}_θ^η 、 \mathbf{H}_ϕ^η 及 \mathbf{H}_c 之顯式

本附錄之 \mathbf{H}_θ^η 矩陣 ($\eta = D, I$)，當 $\eta = D$ ，見(2.7.3)式，矩陣內的 $m_{2j}^{\theta\eta}$ 、 $m_{3j}^{\theta\eta}$ ($j = 1, 2$) 為節點變形力，見(2.6.15)式， $\eta = I$ ，則取慣性力，見(2.7.9)式，矩陣內的 $m_{2j}^{\theta\eta}$ 、 $m_{3j}^{\theta\eta}$ ($j = 1, 2$) 為節點慣性力，見(2.6.19)式。

$\mathbf{H}_\theta^\eta =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}}{L} & -\frac{m_{31}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}}{L} & -\frac{m_{32}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{31} & -m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{21}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}}{2} & 0 & \frac{m_{21}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{31}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}}{2} & 0 & 0 & \frac{m_{31}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{21}}{L} & \frac{m_{31}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}}{L} & \frac{m_{32}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{32} & -m_{22} & 0 \\ -\frac{m_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}}{2} & 0 \\ -\frac{m_{32}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\theta\eta}$$

本附錄之 \mathbf{H}_ϕ^η 矩陣($\eta = D, I$)，當 $\eta = D$ ，見(2.7.3)式，矩陣內的 $m_{2j}^{\phi\eta}$ 、 $m_{3j}^{\phi\eta}$ ($j = 1, 2$)為節點變形力，由(2.6.16)式並配合(2.6.12)式可得， $\eta = I$ ，則取慣性力，見(2.7.9)式，矩陣內的 $m_{2j}^{\theta\eta}$ 、 $m_{3j}^{\theta\eta}$ ($j = 1, 2$) 為節點慣性力，由(2.6.19)式並配合(2.6.12)式可得。

$$\mathbf{H}_\phi^\eta =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{31}}{2} & \frac{m_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_{31}}{2} & 0 & -\frac{m_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}}{2} & \frac{m_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{32}}{2} & \frac{m_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}}{2} & 0 & -\frac{m_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}}{2} & \frac{m_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\phi\eta}$$

本附錄之 \mathbf{H}_c 矩陣，矩陣內的 m^b 、 m^c 為(2.7.14)式中之元素質量矩陣

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_{\theta}^{I1}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\phi}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_1 & 0 & 0 & m_{12}^b \dot{\phi}_{21} & m_{12}^b \dot{\phi}_{11} & 2m_{12}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 & B_1 & 0 & 0 & m_{14}^b \dot{\phi}_{22} & m_{14}^b \dot{\phi}_{12} & 2m_{14}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & -m_{12}^c \dot{\phi}_{31} & 2m_{12}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{12}^c \dot{\phi}_{11} & 0 & C_1 & 0 & 0 & -m_{14}^c \dot{\phi}_{32} & 2m_{14}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{14}^c \dot{\phi}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & 0 & -m_{22}^c \dot{\phi}_{31} & 2m_{22}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{22}^c \dot{\phi}_{11} & 0 & C_2 & 0 & 0 & -m_{24}^c \dot{\phi}_{32} & 2m_{24}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{24}^c \dot{\phi}_{12} & 0 \\ -B_2 & 0 & 0 & m_{22}^b \dot{\phi}_{21} & m_{22}^b \dot{\phi}_{11} & 2m_{22}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 & B_2 & 0 & 0 & m_{24}^b \dot{\phi}_{22} & m_{24}^b \dot{\phi}_{12} & 2m_{24}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_3 & 0 & 0 & m_{32}^b \dot{\phi}_{21} & m_{32}^b \dot{\phi}_{11} & 2m_{32}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 & B_3 & 0 & 0 & m_{34}^b \dot{\phi}_{22} & m_{34}^b \dot{\phi}_{12} & 2m_{34}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 \\ -C_3 & 0 & 0 & -m_{32}^c \dot{\phi}_{31} & 2m_{32}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{32}^c \dot{\phi}_{11} & 0 & C_3 & 0 & 0 & -m_{34}^c \dot{\phi}_{32} & 2m_{34}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{34}^c \dot{\phi}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_4 & 0 & 0 & -m_{42}^c \dot{\phi}_{31} & 2m_{42}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{42}^c \dot{\phi}_{11} & 0 & C_4 & 0 & 0 & -m_{44}^c \dot{\phi}_{32} & 2m_{44}^c \dot{\varepsilon}_c & -m_{44}^c \dot{\phi}_{12} & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & m_{42}^b \dot{\phi}_{21} & m_{42}^b \dot{\phi}_{11} & 2m_{42}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 & B_4 & 0 & 0 & m_{44}^b \dot{\phi}_{22} & m_{44}^b \dot{\phi}_{12} & 2m_{44}^b \dot{\varepsilon}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $B_j = 2\left(\frac{m_{j2}^b \dot{\phi}_{31}}{L} + \frac{m_{j4}^b \dot{\phi}_{32}}{L}\right)$ ， $C_j = 2\left(\frac{m_{j2}^c \dot{\phi}_{21}}{L} + \frac{m_{j4}^c \dot{\phi}_{22}}{L}\right)$

附錄 E 慣性矩陣之推導

元素的慣性矩陣為 $\delta \mathbf{f}^I$ 與 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 、 $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ 的關係矩陣，本附錄為推導之清楚，將 \mathbf{q} 、 $\dot{\mathbf{q}}$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}$ 以 \mathbf{q}_ϕ 、 $\dot{\mathbf{q}}_\phi$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\phi$ 表示。由(2.6.10)、(2.6.12)及(2.6.17)式可以知道元素節點慣性力 \mathbf{f}^I 與元素節點位移向量 \mathbf{q}_ϕ 、 \mathbf{q}_θ 及其對時間的微分 $\dot{\mathbf{q}}_\phi$ 、 $\dot{\mathbf{q}}_\theta$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\phi$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\theta$ 有關，(\mathbf{f}^I 是 \mathbf{q}_ϕ 、 \mathbf{q}_θ 及 \mathbf{f}_θ^I 的函數，而 \mathbf{f}_θ^I 是 $\dot{\mathbf{q}}_\theta$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\theta$ 的函數)，所以須先求出 \mathbf{q}_ϕ 、 $\dot{\mathbf{q}}_\phi$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\phi$ 與 \mathbf{q}_θ 、 $\dot{\mathbf{q}}_\theta$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\theta$ 之間的關係。

將(2.6.10)式，兩邊除以微小時間 Δt 可得

$$\dot{\mathbf{q}}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.1})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.2})$$

分別將(E.1)式及(E.2)式對時間微分可得

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{T}_{\theta\phi} \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.3})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \dot{\mathbf{T}}_{\phi\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{T}_{\phi\phi} \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.4})$$

因 $\mathbf{T}_{\phi\phi} = \mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{T}}_{\phi\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi = \mathbf{0}$ ，所以(E.2)、(E.4)式可以表示成

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.5})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.6})$$

由(E.3)、(E.5)、(E.6)式可得

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{T}_{\theta\phi} \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.7})$$

(2.6.19)式之慣性力可分成慣性力加速度項 \mathbf{f}_θ^{I1} 及慣性力速度項 \mathbf{f}_θ^{I2} ，並分別表示成

$$\mathbf{f}_\theta^{I1} = \sum \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}}_\theta \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbf{f}_\theta^{I2} = \mathbf{f}_\theta^{I2}(\dot{\mathbf{q}}_\theta) = \sum \mathbf{f}_{\theta i}^{I2}(\dot{\mathbf{u}}_i) \quad (\text{E.9})$$

由(E.8)、(E.9)式，(2.6.12)式之 \mathbf{f}_ϕ^I 與 \mathbf{f}_θ^I 以及 \mathbf{f}_ϕ^I 與 \mathbf{f}_ϕ^I 的關係分別表示如下

$$\mathbf{f}_\phi^I = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^I = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t (\mathbf{f}_\theta^{I1} + \mathbf{f}_\theta^{I2}) \quad (\text{E.10})$$

$$\mathbf{f}_\phi^I = \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^I \quad (\text{E.11})$$

對(E.11)式變分可得

$$\delta \mathbf{f}_\phi^I = \delta (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^I) = (\delta \mathbf{T}_{\phi\phi}^t) \mathbf{f}_\phi^I + \mathbf{T}_{\phi\phi}^t (\delta \mathbf{f}_\phi^I) = \mathbf{H}_\phi^I \delta \mathbf{q}_\phi + \delta \mathbf{f}_\phi^I \quad (\text{E.12})$$

$$\mathbf{H}_\phi^I = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \right|_{\mathbf{f}_\phi^I = \text{fixed}} \quad (\text{E.13})$$

對(E.10)式變分可得

$$\delta \mathbf{f}_\phi^I = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \delta \mathbf{q}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{E.14})$$

利用(2.6.10)式，(E.14)式中， \mathbf{f}_ϕ^I 對 \mathbf{q}_ϕ 偏微可表示成

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \right|_{\mathbf{f}_\theta^I = \text{fixed}} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta^I = \text{fixed}} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} = \mathbf{H}_\theta^I \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (\text{E.15})$$

$$\mathbf{H}_\theta^I = \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta^I = \text{fixed}} \quad (\text{E.16})$$

利用(E.1)式及(E.3)式，(E.14)式中， \mathbf{f}_φ^I 對 $\dot{\mathbf{q}}_\varphi$ 偏微可表示成

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} &= \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \left(\frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} + \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} \right) = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \left(\frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi} + \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \dot{\mathbf{q}}_\varphi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} \right) \\
 &= \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi} + \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \left(\dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} + \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \dot{\mathbf{q}}_\varphi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} \right) \bigg|_{\dot{\mathbf{q}}_\varphi = \text{fixed}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} \\
 &= \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{c}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} + \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} + \mathbf{H}_{c\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi}) \\
 &= \mathbf{c} + \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} + \mathbf{H}_{c\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi}) \\
 &= \mathbf{c} + \mathbf{H}_c
 \end{aligned} \tag{E.17}$$

$$\mathbf{H}_{c\theta} = \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} \dot{\mathbf{q}}_\varphi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \bigg|_{\dot{\mathbf{q}}_\varphi = \text{fixed}} \tag{E.18}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{c}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} \tag{E.19}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} + \mathbf{H}_{c\theta} \mathbf{T}_{\theta\varphi}) \tag{E.20}$$

(E.19)式中， \mathbf{c} 為陀螺矩陣。

若忽略(2.6.10)式中 $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 與變形的耦合關係，則(E.20)式可簡化成

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{m}_\theta (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\varphi} + \mathbf{H}_{c\theta}) \tag{E.21}$$

利用(E.3)式，(E.14)式中 \mathbf{f}_φ^I 對 $\ddot{\mathbf{q}}_\varphi$ 偏微可表示成

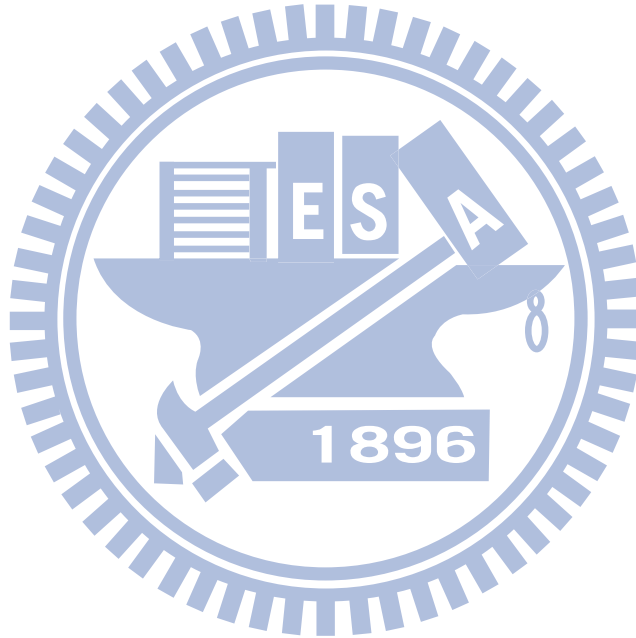
$$\frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\varphi} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\varphi} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\varphi} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} = \mathbf{m} \tag{E.22}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} \tag{E.23}$$

(E.22)式中， \mathbf{m} 為質量矩陣。

將(E.14)式，配合(E.15)、(E.17)及(E.22)式可得

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{f}_\varphi^I &= \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^I}{\partial \mathbf{q}_\varphi} \delta \mathbf{q}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\varphi} \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\varphi} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi \\
 &= \mathbf{H}_\theta^I \mathbf{T}_{\theta\varphi} \delta \mathbf{q}_\varphi + (\mathbf{H}_c + \mathbf{c}) \delta \dot{\mathbf{q}}_\varphi + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\varphi
 \end{aligned} \tag{E.24}$$



附錄F 有效剛度矩陣

本文中(3.1.5)式使用的系統有效剛度矩陣是由元素之有效剛度矩陣所組合成的，本附錄為使推導能更清楚，將(2.6.7)式之 \mathbf{q} 、 $\dot{\mathbf{q}}$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}$ 以 \mathbf{q}_ϕ 、 $\dot{\mathbf{q}}_\phi$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_\phi$ 表示，(2.6.4)式之 \mathbf{f}^D 、 \mathbf{f}^I 以 \mathbf{f}_ϕ^D 、 \mathbf{f}_ϕ^I 表示。

將(2.6.4)式變分可得

$$\delta \mathbf{f}_\phi = \delta \mathbf{f}_\phi^D + \delta \mathbf{f}_\phi^I \quad (\text{F.1})$$

將(2.7.1)式之全微分改成變分，再利用(2.7.3)式可得

$$\delta \mathbf{f}_\phi^D = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} \delta \mathbf{q}_\phi = \mathbf{k}_\phi \delta \mathbf{q}_\phi = \mathbf{H}_\phi^D \delta \mathbf{q}_\phi + (\mathbf{H}_\theta^D + \mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0) \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}_\phi \quad (\text{F.2})$$

$\delta \mathbf{f}_\phi^I$ 為慣性力之變分，在(2.7.8)式及(2.7.9)式已推導，並重複表示如下

$$\delta \mathbf{f}_\phi^I = \delta (\mathbf{T}_{\phi\phi}^t \mathbf{f}_\phi^I) = \mathbf{H}_\phi^I \delta \mathbf{q}_\phi + \delta \mathbf{f}_\phi^I \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_\phi^I &= \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \mathbf{q}_\phi} \delta \mathbf{q}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \\ &= \mathbf{H}_\theta^I \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}_\phi + \mathbf{H}_c \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{c} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

由(2.6.9)式、 $\mathbf{T}_{\phi\phi} = \mathbf{I}_{14}$ 、(E.4)式至(E.5)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\phi = \mathbf{T}_{\phi\phi} \delta \mathbf{q}_\phi = \delta \mathbf{q}_\phi \quad (\text{F.5})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{F.6})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \ddot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{F.7})$$

將(F.2)式至(F.7)式及 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^{lt} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}$ 代入(F.1)式可得

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{f}_\phi &= (\mathbf{H}_\phi^D + \mathbf{H}_\phi^I) \delta \mathbf{q}_\phi + (\mathbf{H}_\theta^D + \mathbf{H}_\theta^I + \mathbf{k}_\theta + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} \mathbf{k}_\theta^0) \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}_\phi \\
&\quad + (\mathbf{c} + \mathbf{H}_c) \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi \\
&= \hat{\mathbf{k}}_\phi \delta \mathbf{q}_\phi + \mathbf{c}_\phi \delta \dot{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{m}_\phi \delta \ddot{\mathbf{q}}_\phi
\end{aligned} \tag{F.8}$$

其中

$$\hat{\mathbf{k}}_\phi = \mathbf{H}_\phi + (\mathbf{H}_\theta + (\mathbf{k}_\theta + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} \mathbf{k}_\theta^0) \mathbf{T}_{\theta\phi}) \tag{F.9}$$

$$\mathbf{H}_\phi = \mathbf{H}_\phi^D + \mathbf{H}_\phi^I \tag{F.10}$$

$$\mathbf{H}_\theta = \mathbf{H}_\theta^D + \mathbf{H}_\theta^I \tag{F.11}$$

$$\mathbf{c}_\phi = \mathbf{c} + \mathbf{H}_c \tag{F.11}$$

$$\mathbf{m}_\phi = \mathbf{m} \tag{F.12}$$

由(F.6)式至(F.9)式可得元素之有效剛度矩陣

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{m}_\phi + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c}_\phi + \hat{\mathbf{k}}_\phi \tag{F.13}$$

將所有元素之有效剛度矩陣轉到總體座標系統，即可組合成(3.1.5)式的系統

有效剛度矩陣。

附錄 G 中央差分法速度與加速度推導

中央差分法之速度及加速度，其推導由 Taylor 級數展開式而得。在時間 t_n 時刻下其位移 $U_n = U(t)$ ，時間 t_{n+1} 時刻下的位移為 $U_{n+1} = U(t + \Delta t)$ ，時間 t_{n-1} 時刻下的位移 $U_{n-1} = U(t - \Delta t)$ ，其 t_{n+1} 及 t_{n-1} 位移由 Taylor 級數可表示成

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \dot{U}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{U}(t)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\ddot{\ddot{U}}(t)(\Delta t)^3 + \dots \quad (G.1)$$

$$U(t - \Delta t) = U(t) - \dot{U}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{U}(t)(\Delta t)^2 - \frac{1}{6}\ddot{\ddot{U}}(t)(\Delta t)^3 + \dots \quad (G.2)$$

將(G.1)式減去(G.2)式並取到微分一次項，可得 t_n 時刻下之速度

$$U(t + \Delta t) - U(t - \Delta t) = 2\dot{U}(t)\Delta t + \frac{1}{3}\ddot{\ddot{U}}(t)(\Delta t)^3 + \dots$$
$$\dot{U}(t) = \frac{U(t + \Delta t) - U(t - \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\Delta t} \quad (G.3)$$

將(G.1)式(G.2)式相加並取到微分二次項，可得 t_n 時刻下之加速度

$$U(t + \Delta t) + U(t - \Delta t) = 2U(t) + \ddot{U}(t)(\Delta t)^2 + \dots$$
$$\ddot{U}(t) = \frac{U(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (G.4)$$

附錄 H 梁元素質心位置推導

梁元素質心位置的計算，令 x_c 、 y_c 、 z_c 分別代表在當前元素座標系統 x_i ($i=1,2,3$) 的質心位置， $M = \rho AL$ 為梁元素質量， ρ 為梁元素密度， A, L 為梁元素的斷面積及長度， $V = AL$ 為梁元素未變形前的體積，梁元素座標可表示成

$$x_c = \frac{\int x_p \rho dV}{M} = \frac{\int x_p dx}{L} \quad (\text{H.1.a})$$

$$y_c = \frac{\int y_p \rho dV}{M} = \frac{\int y_p dx}{L} \quad (\text{H.1.b})$$

$$z_c = \frac{\int z_p \rho dV}{M} = \frac{\int z_p dx}{L} \quad (\text{H.1.c})$$

$\int dx$ 積分的範圍為 0 到 L ， x_p, y_p, z_p 為形心軸上任意點 P 在當前元素座標的座標值，由(2.4.9)、(2.4.24)及(2.4.25)式可知

$$x_p = \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \quad (\text{H.2})$$

$$y_p = v(x) = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (\text{H.3})$$

$$z_p = w(x) = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (\text{H.4})$$

將(H.3)、(H.4)式代入(H.2)式可得 x_c 質心位置

$$\begin{aligned} x_p &= \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \\ &= \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2} (\mathbf{N}_b'^t \mathbf{u}_b)^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{N}_c'^t \mathbf{u}_c)^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}(\mathbf{N}'_2 v'_1 + \mathbf{N}'_4 v'_2)^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{N}'_2 w'_1 + \mathbf{N}'_4 w'_2)^2) dx \\
&= \int_0^x \{1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}[\frac{1}{4}(-1 - 2\xi + 3\xi^2)(1 + \varepsilon_o)\theta_{31} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-1 + 2\xi + 3\xi^2)(1 + \varepsilon_o)\theta_{32}]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}[-\frac{1}{4}(-1 - 2\xi + 3\xi^2)(1 + \varepsilon_o)\theta_{21} \\
&\quad - \frac{1}{4}(-1 + 2\xi + 3\xi^2)(1 + \varepsilon_o)\theta_{22}]^2\} dx \\
&= (1 + \varepsilon_o)x + (1 + \varepsilon_o)^2(-\frac{L}{32})(\xi - \frac{10}{3}\xi^2 + \frac{9}{5}\xi^4 - \frac{8}{15})(\theta_{31}\theta_{32} + \theta_{21}\theta_{22}) \\
&\quad + (1 + \varepsilon_o)^2(\frac{L}{2})(-\frac{1}{32})(\frac{47}{15} + \xi + 2\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 - 3\xi^4 + \frac{9}{5}\xi^5)(\theta_{21}^2 + \theta_{31}^2) \\
&\quad + (1 + \varepsilon_o)^2(\frac{L}{2})(-\frac{1}{32})(\frac{17}{15} + \xi - 2\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + 3\xi^4 + \frac{9}{5}\xi^5)(\theta_{22}^2 + \theta_{32}^2)
\end{aligned} \tag{H.5}$$

將(H.5)式代入(H.1.a)可得 x_c 質心位置

$$x_c = \frac{L(1 + \varepsilon_o)}{2} + \frac{(1 + \varepsilon_o)^2 L}{60} ((\theta_{21}\theta_{22} + \theta_{31}\theta_{32}) - 4(\theta_2^2 + \theta_3^2) - 4(\theta_{22}^2 + \theta_{32}^2)) \tag{H.6}$$

將(H.3)式代入(H.1.b)可得 y_c 質心位置

$$\begin{aligned}
y_c &= (1 + \varepsilon_o) \frac{1}{L} \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_2 \theta_{31} + \mathbf{N}_4 \theta_{32}) \frac{L}{2} d\xi \\
&= \frac{L}{12} (1 + \varepsilon_o) (\theta_{31} - \theta_{32})
\end{aligned} \tag{H.7}$$

將(H.4)式代入(H.1.c)可得 z_c 質心位置

$$z_c = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 (-\mathbf{N}_2 \theta_{21} - \mathbf{N}_4 \theta_{22}) \frac{L}{2} d\xi$$

$$= \frac{L}{12}(1 + \varepsilon_o)(\theta_{22} - \theta_{21}) \quad (\text{H.8})$$

