國立交通大學

土木工程系

碩 士 論 文

序列複式可展延選擇權 – 都市更新流程之應用

Sequential compound extendible option –
Urban regeneration procedures

研 究 生：洪倉閔

指導教授：黃玉霖 博士

中 華 民 國 一 O 二 年 十 月

序列複式可展延選擇權 － 都市更新流程之應用

Sequential compound extendible option –

Urban regeneration procedures

研　究　生：洪倉閔	Student：Cang-Min Hong
指導教授：黃玉霖	Advisor：Yu-Lin Huang

國　立　交　通　大　學

土木工程學系

碩　士　論　文

A Thesis
Submitted to Department of Civil Engineering
College of Electrical Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Civil Engineering

November 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一Ｏ二年十月

序列複式可展延選擇權 – 都市更新流程之應用

研 究 生：洪倉閔　　　　　　　　　　　　指導教授：黃玉霖　博士

國立交通大學土木工程學系（研究所）

摘要

藉由我國都市更新法令與機制推動所賦予之延長期限權利，建立適合我國都市更新流程之模型與評價方式，用以分析都市更新流程所能提供延期權利之最低經濟價值。都市更新事業，評估的投資結果相當複雜且市場不確定性極高，由於折現現金流量法(Discounted Cash Flow，DCF)無法充分解釋市場不確定性所造成的投資彈性，所以，將利用實質選擇權概念進行評估。

Longstaff 於西元 1990 年針對實務上擁有選擇權性質的金融合約和條件求償證券（contingent claims）可將到期日展延的問題，延伸出一封閉解模型。本研究將從 Longstaff 可展延選擇權的觀點切入，利用平賭法（martingale method），假設在風險中立（risk-neutral）的情況下，折現未來期望現金流量，推導出(Sequential compound extendible option)序列複合可展延選擇權評價模型，並且，針對多階段都市更新獨特的開發流程特性，分析延期彈性所造成的經濟價值變化。

關鍵字：序列複合可展延選擇權、Longstaff 可展延選擇權、都市更新流程、實質選擇權

Sequential compound extendible option –

Urban regeneration procedures

Student：Cang-Min Hong Advisor：Dr. Yu-Lin Huang

Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

According to the urban regeneration policy, this study successful formulated sequential compound extendible option (SCEC) model to evaluate the issue of extendible right. Recently, a generalized valuation model for n-fold sequential compound call/put options is simplified for the evaluation of multi-phase complex projects for which the traditional DCF project evaluation method fails to explicitly incorporate the flexibility of investment decision, so this study uses the concept of real options to assess. Under the martingale method (martingale method), risk neutral (risk-neutral), this study derives SCEC model based on the ideas of Longstaff closed-form expressions for options that can extend and analyzes the economic value created by multi-phase extendible development produces of urban regeneration.

Keywords: Sequential compound extendible option, Longstaff extendible option, urban regeneration procedures, real option

誌　　謝

首先，我要感謝我爸媽，給予我那麼好的環境，使得我在寫論文時，可以專心且放心，在金錢上沒有後顧之憂。其中，在研究的路上，媽媽陸陸續續給了我心靈上的很多建設與鼓勵，讓我不至於想不通、吃不了苦。第二，我想感謝黃玉霖老師，每次跟老師meeting時，老師會一直將走偏的我，矯正回來，使我不會再走太多的冤枉路。第三，我想感謝營管組內的各位老師，在內審時，給我最重的一個打擊，使我知道重點是甚麼，我到底缺甚麼。第四，我想感謝林岑縉學長與畢佳琪學姐，在我最無助的時候，伸手拉了我一把，指引我的方向。第五，要感謝交大前副校長李嘉晃教授，沒有教授的介紹，沒有交大研究所兩年的旅途。最重要的，我要感謝一直對我義氣相挺的好朋友，張曉德，沒有他的相挺，這兩年的旅途一定會乾燥乏味。

閉關了好久！是時候該到江湖上走跳了，是時候該到職場上工作了！說實在話，我很難預測將來的我真正會從事什麼工作，將來所要從事的工作，是否跟我在研究所這兩年裡所學的專業有關。大多數人，很有可能將來所作的工作，跟他當初所學的專業一點關係都沒有，但是，在這兩年研究所生活中我養成了應有的做事習慣：做甚麼事都要有企圖心眼光放遠且都要認真踏實的去做、用最快的時間吸收新的工作並發現其中的重點和須比別人在更短時間內掌握這些重點應用它們。這些做事習慣之所以重要，是因為教授用一句話就能交代清楚並且能被你順利完成的工作，誰願意說三句話甚至半小時交待一個怎麼都不明白的人呢？溝通也是一種成本，溝通的時間越少，內耗越少，人人都喜歡聰明勤奮的學生。我覺得大多數的研究生在畢業後是看不出差距的，但是這兩年我有如此的經歷，也希望可為以後的職業生涯的發展先奠定些基礎。

最後，在研究的路途上，我還要感謝一直陪伴我的三句名言，「自助、人助、天助」、「關關難過、關關過」、「潛能是被逼出來的」。

目　　錄

表　目　錄

圖　目　錄

符 號 說 明

$EC_t^n(\cdot)$	第n層可展延買權於時間點t的價值
S_t	股票在時間點t的價值
$CEC_t^1(\cdot)$	第一層可展延買權於第二層可展延買權中之計算代表式
$CEC_t^2(\cdot)$	第二層可展延買權，標準複式可展延買權
$\bar{S}_{i,n}$	複式買權計算模式，存在$CC_t^n(\cdot)=K$時，股票價值的約當值（equivalent value）
$\bar{H}_{i,n}$	複式買權計算模式，存在$CC_t^n(\cdot)=H$時，股票價值的約當值（equivalent value）
$\bar{L}_{i,n}$	複式買權計算模式，存在$CC_t^n(\cdot)=L$時，股票價值的約當值（equivalent value）
Z_t	時間區間$(t-t_0)$標準常態隨機變數
$h_{n,i*s}$	標準常態分佈下的機率點，為第n層、第i個，移動s個時間區間。
$b_{n,i*s}$	標準常態分佈下的機率點，為第n層、第i個，移動s個時間區間。
$l_{n,i*s}$	標準常態分佈下的機率點，為第n層、第i個，移動s個時間區間。
$\rho_{i,j*s}$	$cov(Z_i,Z_j)$相關係數，移動s個時間區間。
$N_n(\cdot)$	n維標準常態累積機率
A	額外酬金（Additional premium）
H	延期價值（Critical value），判斷是否延期或是執行
L	延期價值（Critical value），判斷是否延期或是放棄
K	每層到期時之履約價
k	每層延期後之履約價

一、緒論

1.1 研究動機與目的

台灣在經歷了六十餘年的都市發展，許多早期開發的地區出現公共設施不足、交通擁擠、環境品質惡化、生活機能不佳的情況，且都會區內的土地大面積低度或不當使用，顯示都市老舊建物問題日漸嚴重，逐漸與現代都會形象相互衝突。

1.1.1 研究動機

都市更新計畫以開發土地做更佳利用或在實質構造方面做改造建全功能外，(游振輝, 2004)指出公共資產的有效利用亦是都市更新一大訴求。市中心衰退，都市範圍向外擴張的情況下，郊區生活機能增加，但也使得政府財政負擔加重及市中心資源低度利用。如何藉由資本再投資，使得都市生命週期不斷循環與更新，促進都市永續發展，是都市更新面臨的重要課題。

1.1.2 研究目的

創造與驗證序列複式可展延買權評價模型（Sequential Compound Extendible Call，SCEC)。藉由國內都市更新法令與機制推動之相關研究，以及實質選擇權理論之回顧，建立適合我國都市更新的模型與評價方式，用以分析都市更新流程提供延期權利所增加的經濟價值。

1.2 研究設定與方法

1.2.1 研究設定

1. 本研究所探討都市更新之實施者為私部門的開發業者（機構），為一理性經濟人，故其以追求機構利潤最大為目標。
2. 本研究將著重於更新計畫的財務影響。影響都市更新案開發與否的因素非常多，如更新基地附近公共用地抵充、公共土地優先分配之順序和都市更新後公用設備完備與否等。
3. 本研究將著重於探討重建辦理都市更新對於計劃價值的影響，對於不動產持有人以及居住品質的影響最大。
4. 本文所探討之都市更新實施流程，是界定於以民間辦理，且委託實施機構辦理。

1.2.2 研究方法

1.文獻回顧

首先，回顧實質選擇權應用於土地價值評估相關研究，包括空地開發以及土地再開發等研究，了解如何評估不動產投資計畫之決策彈性價值與影響價值的重要因素。其後，為評估國內都市更新政策推動對於老舊不動產價值的影響，將針對私部門參與都市更新方法與獎助措施之相關法令與規定進行整理，了解民間參與都市更新收益面、成本面和時間面重要考量因素並納入模型中，使得價值評估模型與國內都市更新流程更相契合。

2.建構模型

將根據開發業者於實務上計算總成本與總收益的過程，建構本研究之模式，並以(Huang & Pi, 2009)之序列複式選擇權評價模型(Sequential Compound Call Option，SCCO）為基礎，作為開發業者分析之決策準則。

3.模擬分析

收集都市更新所需要的相關市場資料，將此資料代入建構後的 SCEC 評價模型中，模擬出包含都市更新流程之選擇權價值。

1.3 研究架構

不動產投資專案的金額龐大與不可回復等特性，使得市場波動對於投資專案影響更為顯著。不動產投資分析中常見的淨現值法屬於靜態分析法，缺乏市場不確定性風險考量，因此易導致投資決策錯誤或未選擇最佳投資方案等情況。有鑑於此，國外學者將金融界之衍生性金融商品「選擇權」的概念引入不動產投資評價，發展出實質選擇權理論做為投資專案評估之工具。但是，不動產之異質性以及不動產市場的不完全，使得參與都市更新獲得的報酬各異，也造成各地區更新速度之不一致，進而影響都市更新之推動成效。因此，本研究將參考國內外實質選擇權之研究，並輔以國內都市更新機制，建構都市更新實質選擇權價值之評價方法，進一步衡量價值與更新時機，以提供投資人參與都市更新之依據，更希望可以提供政府擬定都市更新推動策略相關建議。

二、都市更新流程

2.1　都市更新沿革與實施辦法

早期政府推動都市更新的目的在於改善都市安全與衛生，其後隨著經濟發展與生活品質要求提升，都市更新被定位於促進土地利用、改善都市機能與增進公共福利發展。

2.1.1　都市更新沿革

在「都市更新條例」未實施前，都市更新事業皆由「都市計畫法」加以規範。1983 年「台北市都市更新實施辦法」頒布實施，該法係依「都市計畫法」第 63 條訂定，為國內第一部都市更新專法，然而，對於都市更新的推動，「都市計畫法」僅做原則性的規範無法因應實際需要未有太大成效，例如選定的優先更新地區進度緩慢且規模不大，無法達到復甦都市機能效果。

1998 年公布施行「都市更新條例」，自此都市更新相關法令漸趨完備，賦予更新事業明確的目標與實行方式。其內容包括提供民眾參與機會促使參與者多元化，放寬土地與地上物取得方式以及公有土地強制參與都市更新，降低參與人數面積門檻限制，建立彈性的獎勵容積制度等，顯示政府希望藉由私人參與都市更新事業方式，提高執行力加速為都市發展重新注入生機。(吳秉蓁, 1999)

2.1.2　都市更新實施辦法

依現行「都市更新條例」相關規定，實施都市更新方式、實施對象、作業流程與法律監督管理如下：

1. 都市更新處理方式

依「都市更新條例」第 4 條規定，都市更新處理方式分為下列三種：

（1）重建：係指拆除更新地區內原有建築物，重新建築，住戶安置，改進區內公共設施，並得變更土地使用性質或使用密度。

（2）整建：係指改建、修建更新地區內建築物或充實其設備，並改進區內公共設施。

（3）維護：係指加強更新地區內土地使用及建築管理，改進區內公共設施、以保持其良好狀況。

2. 實施者

實施者係指都市更新事業之推動者，依「都市更新條例」第 3 條規定，實施者包含機關、機構及團體，其說明如下：

（1）機關：係指公部門主管機關。部分地區的更新效益低，私部門辦理更新意願不高，在亟需辦理都市更新的情況下，政府公辦機制存在仍有

其必要性，主要可分為委託機構辦理、自行辦理與同意辦理三種。

（2）機構：係指都市更新事業機構。經劃定應實施更新之地區，主管機關得經由公開評選程序，委託都市更新事業機構辦理都市更新；或由土地及合法建築物所有權人申請辦理都市更新事業核准後，委託都市更新事業機構實施。未經劃定實施更新之地區，亦可由土地及合法建築物所有權人申請辦理都市更新事業核准後，委託其施行辦理。[1]

（3）團體：依「都市更新條例」第 15 條規定，更新單元內之不動產持有者欲自行實施都市更新事業時，可自行組成更新團體，且需包含七人以上之土地及合法建築物所有權人。

3.都市更新作業流程

都市更新作業流程主要分成四大階段，依照「都市更新條例」與相關辦法規定，其說明如下：

（1）都市更新事業概要階段：依「都市更新條例」第 10 條與第 11 條規定，實施者需舉辦概要公聽會，擬具事業概要，取得同意比例，連同公聽會紀錄，申請當地直轄市、縣（市）主管機關核准。[2]

（2）都市更新事業計畫階段：依「都市更新條例」第 19 條與第 22 條規定，都市更新事業計畫由實施者擬訂或變更，在這期間內，應舉辦自辦公聽會，聽取民眾意見，一旦取得事業計畫同意門檻，實施者便可將更新事業計畫報以主管機關審核。經收件審核後，進入另一階段都市更新審議期，期間經主管機關核准給予獎勵之建築容積等基本審查後，更新事業計畫公開展覽 30 天並舉辦公辦公聽會。然後，再經幹事會審查、委員會審查、核定公告實施等過程。

（3）權利變換計畫階段：以權利變換方式實施都市更新時，實施者應於都市更新事業計畫核定發布實施後擬具權利變換計畫，對於不願參與協議合建之土地及合法建築物，得以權利變換方式實施之，或由實施者協議價購。必要時，依「都市更新條例」第 29 條規定，權利變換計畫之擬訂報核，可與都市更新事業計畫一併辦理。相關權利變換實施辦法將在下一節詳述說明。

（4）執行與備查階段：實施者申請建照執照，將土地改良物拆除遷移，依「都市更新條例」第 36 條規定，限期三十日內自行拆除或遷移；屆期不拆除或遷移者，實施者得予代為或請求當地直轄市、縣（市）主管機關代為之，直轄市、縣（市）主管機關有代為拆除或遷移之義務[3]。而後，工程施工，實施者於申領建築物使用執照，並完成自來水、電力、電訊、

[1] 參考都市更新條例第 6、9、10 及 11 條。

[2] 同意比例之申請，應經該更新單元範圍內私有土地及私有合法建築物所有權人均超過十分之一，並其所有土地總面積及合法建築物總樓地板面積均超過十分之一之同意；其同意比例已達第 22 條規定者，得免擬具都市更新事業概要，並依第 15 條及第 19 條規定，逕行擬具都市更新事業計畫辦理。

[3] 直轄市、縣（市）主管機關並應訂定期限辦理強制拆除或遷移，期限以六個月為限。其因情形特殊有正當理由者，得報經中央主管機關核准延長六個月，並以二次為限。

天然氣之配管及埋設等必要公共設施。最後，辦理產權登記、交屋及相關差額價金補償，申請更新後稅金減免及都更成果備查。

4.法律監督與管理

都市更新流程皆有法律監督與管理之，以下將介紹相關法律規定，並非實際上流程之情形並整理於圖 2-1 中。

（1）依「都市更新條例施行細則」第 9 條規定，『直轄市、縣（市）主管機關受理土地及合法建築物所有權人依本條例第十條或第十一條規定申請核准實施都市更新事業之案件，應自受理收件日起六十日內完成審核。但情形特殊者，得延長審核期限一次，最長不得逾六十日。』

（2）事業計畫或是權變計畫申請核定於主管機關應於半年內完成審核，並且，擁有可延長審核期限半年之權利。依「都市更新條例施行細則」第 9-1 條規定『申請核定都市更新事業計畫或權利變換計畫之案件，應自受理收件日起六個月內完成審核。但情形特殊者，得延長審核期限一次，最長不得逾六個月。』

（3）實施都市更新事業計畫，應自獲准之日（都市更新事業概要核准）起兩年內，擬具都市更新事業計畫報核。依「都市更新條例」第 54 條規定，『實施者依第十條或第十一條規定實施都市更新事業計畫，應自獲准之日起一年內，擬具都市更新事業計畫報核；逾期未報核者，直轄市、縣（市）主管機關得撤銷其更新核准。但不可歸責於實施者之事由而遲誤之期間，應予扣除。因故未能於前項期限內擬具都市更新事業計畫報核者，得敘明理由申請展期；展期之期間每次不得超過六個月；並以二次為限。』

（4）自擬定都市更新事業計畫經核定之日至申請建造執照，最多三年，其中，權利變換計畫與都市更新事業計畫需分別報核。依「都市更新條例」第 61-1 條規定，『都市更新案實施者申請建造執照，應自擬定都市更新事業計畫經核定之日起二年內為之。以權利變換計畫實施，且其權利變換計畫與都市更新事業計畫分別報核者，得依前項規定延長一年。』

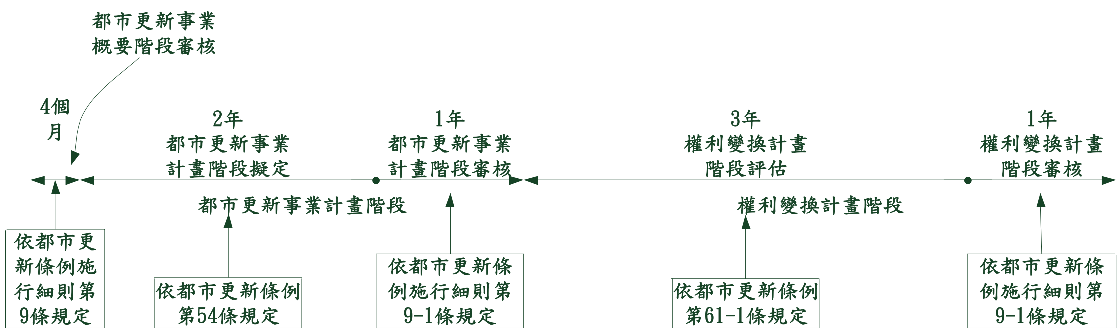

圖 2-1　都市更新流程監督規定（最大年限）

資料來源：本研究整理

2.2 權利變換實施辦法

依「都市更新條例」第25條規定，重建辦理都市更新之實施方式依實施者而異，政府部門辦理者得以徵收、區段徵收或市地重劃方式實施之；其他法律另有規定或經全體土地及合法建築物所有權人同意者，得以協議合建或其他方式實施之。

2.2.1 權利變換辦法

實施者進行權利變換意願調查及土地房產相關協調處理，委託三家以上專業估價師進行查估計算更新前土地權利價值[4]比例和更新後建築物及其土地應有部分之價值。經自辦公聽會分配房產位置及補償金額，依照上述擬定權利變換計畫申請審議。

依「都市更新條例」第 30 條規定，『實施權利變換時，權利變換範圍內除公共使用之用地外，其不足土地與工程費用、權利變換費用、貸款利息、稅捐、管理費用及都市更新事業計畫載明之都市計畫變更負擔、申請各項建築容積獎勵及容積移轉所支付之費用，經各級主管機關核定後，由權利變換範圍內之土地所有權人按其權利價值比例共同負擔，並以權利變換後應分配之土地及建築物折價抵付。』透過立體重劃的概念，解決更新面臨的產權複雜問題，以及在多數決的機制下兼顧少數人的權利。

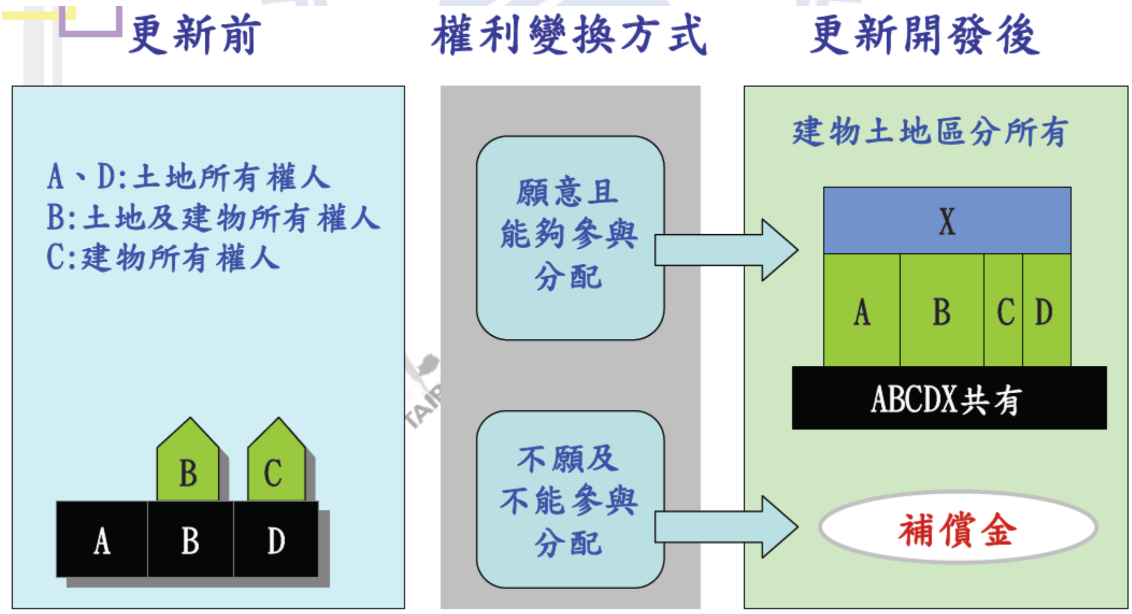

圖 2-2 權利變換示意圖

資料來源：台北市都市更新處

[4] 計算權利變換前權利價值時，依規定不應將建築物價值計入權利價值中。至於建築物則依規定另給予拆遷補償。

2.2.2 權利變換費用

權利變換之相關費用依直轄市、縣（市）主管機關有不同提列標準，但皆分為土地與工程費用、權利變換費用、貸款利息、稅捐、管理費用及都市更新事業計畫載明之都市計畫變更負擔、申請各項建築容積獎勵及容積移轉所支付之費用等，詳細認列說明如下：

1. 工程費用：依「都市更新權利變更實施辦法」第 13 條規定，『包括權利變換地區內道路、溝渠、兒童遊樂場、鄰里公園、廣場、綠地、停車場等公共設施與更新後土地及建築物之規劃設計費、施工費、整地費及材料費、工程管理費、空氣污染防治費及其他必要之工程費用。』並且，依「都市更新權利變更實施辦法」第 21 條規定，『實施權利變換時，權利變換範圍內供自來水、電力、電訊、天然氣等公用事業所需之地下管道、土木工程及其必要設施，各該事業機構應配合權利變換計畫之實施進度，辦理規劃、設計及施工，依規定由使用者分擔者，得列為工程費用。』
2. 權利變換費用：依「都市更新權利變更實施辦法」第 13 條規定，『包括實施權利變換所需之調查費、測量費、依都市更新第三十六條第二項應發給之補償金額、拆遷安置計畫內所定之拆遷安置費、地籍整理費及其他必要之業務費。』其中，依「都市更新條例」第 36 條規定，『因權利變換而拆除或遷移之土地改良物，應補償其價值或建築物之殘餘價值，其補償金額由實施者查定之，代為拆除或遷移費用在應領補償金額內扣回。』
3. 貸款利息：依「都市更新權利變更實施辦法」第 13 條規定，指為支付工程費用及權利變換費用之貸款利息。
4. 管理費用：指為實施權利變換必要之人事、行政及其他管理費用。
5. 不動產估價費：可更新土地的評價方式係由鑑價機構之估價師依循「不動產估價技術規則」評價之。依該規則之規定，估價方法有比較法、收益法、成本法與土地開發分析法。該規則第 87 條規定，對即將進行開發之宗地，可採土地開發分析法進行估價，並參酌應用比較法之評估結果決定其估價額。由於台灣地區更新案例稀少，因而比較法於運用上相對受到限制，以收益法與土地開發分析法的機率較高。兩者之基本精神，皆藉由淨現值法反映未來收益。若以投資者的角度切入，其重視未來收益與現在投入成本。

權利變換計畫中已核定公告之共同負擔各項認列標準應依「都市更新事業及權利變換計畫內有關費用提列標準」提列，換句話說，更新案須依提列總表計算共同負擔部分。實施者部分依提供資金比例分得更新後建築物及其土地之應有部分，此概念與一般買地建房銷售之模式相同，差別在於，第一、一般模式和都市更新的成本差別，一般模式購買土地成本可自由調整，取得土地所有權力，但是都市更新沒有土地成本，主要是都市更新程序（執行階段之前）之費用總合，可看作為取得土地共有權利；第二、

一般模式和都市更新的利潤差別，一般模式可銷售的樓地板面積較都市更新可銷售的樓地板面積大，但是都市更新可利用容積獎勵的增加縮短銷售容積差距。因此，歸納以上兩點，都市更新方式類似取得開發合約，不需負擔土地費用，在合約期限內具有開發權利，可大略解釋土地成本高的地區，實施者皆以都市更新進行開發。

2.3 都市更新獎勵措施

目前台北市都市更新事業的獎助方式包括容積獎勵、稅捐減免、優先辦理興建公共設施、提供民間業者融資和都市更新基金補助。以下將根據「都市更新條例」、「都市更新建築容積獎勵辦法」與「臺北市都市更新自治條例」等相關法令規範進行整理。

2.3.1 台北市容積獎勵

由於獎勵措施為影響私部門參與都市更新的收益因素，為有助於財務分析，故於此對影響私部門參與更新的成本因素一併加以探究。本研究依「都市更新條例」第 44 條和「台北市都市更新自治條例」第 19 條為主條例延伸補充相關子法。

1.依「都市更新建築容積獎勵辦法」第 13 條及「臺北市都市更新自治條例」第 16 條規定，經地方主管機關報中央主管機關核准給予獎勵之建築容積，不得超過各該建築基地一點五倍之法定容積或各該建築基地零點三倍之法定容積再加其原建築容積。

2.△F1：以原建築容積高於法定容積部分核計。

3.△F2：「都市更新條例」第四十四條第一項第五款及「都市更新建築容積獎勵辦法」第十二條規定之獎勵容積。換句話說，當地居住樓地板面積平均水準乘以原戶數後，扣除法定容積之差額核計。

4.△F3：依「都市更新條例」第十一條自行劃定更新單元，公告後，一年內申請實施更新者，給予法定容積之百分之七之獎勵容積；二年內申請實施更新者，給予法定容積之百分之六之獎勵容積；其餘依據「都市更新條例」等相關規定，在「都市更新建築容積獎勵辦法」所定時程內申請實施更新者，給予法定容積之百分之五之獎勵容積。

5.△F4：以下各項措施所需成本經費，除以獎勵樓層單位面積不含建築成本及管銷費用之銷售淨利核算，乘以一點二倍核算：

（1）捐贈公益設施予本市之土地成本、興建成本及管理維護經費，其獎勵額度以法定容積之百分之十五為上限。

（2）協助開闢或管理維護更新單元內或其周邊都市計畫公共設施所需工程、拆遷安置經費及捐贈道路用地成本經費，或協助附近市有建築物進行整建及維護事業所需相關經費，依都市更新建築容積獎勵辦法第五條規定計算獎勵容積，其獎勵額度以法定容積百分之十五為上限。

6.△F5：考量與鄰近地區建築物之量體、造型、色彩、座落方位相互調和之建築設計、開放空間廣場、人行步道、保存具歷史、紀念性或藝術價值之建築及更新單元規模等因素，得依主管機關所訂更新單元規劃設計之獎勵容積評定基準表規定核計應得之獎勵容積。
7.△F6：實施者以現地、異地安置或協議以現金補償基地內舊違章建築戶核計之樓地板面積（每戶不得超過當地樓地板面積平均水準），並應符合都市更新建築容積獎勵辦法相關規定。

2.3.2 其他獎勵措施

興辦都市更新事業尚有其他獎勵措施，如：稅捐抵免、提供民間業者融資、優先配合興建重要公共設施、都市更新基金補助等，然其成效不大，說明如下：

1.都市更新基金補助：依「都市更新建築容積獎勵辦法」第15條規定，容積獎勵，『經各級主管機關審議通過後，實施者應與地方主管機關簽訂協議書，協議書應載明增加之建築容積於扣除更新成本後增加之收益，實施者自願以現金捐贈當地地方主管機關設立之都市更新基金，其捐贈比例以百分之四十為上限，由地方主管機關視地區特性訂定。』此外，依「中央都市更新基金實施都市更新事業作業要點」第2條規定，『經中央都市更新基金管理會審議通過之方式或內政部營建署經公開評選程序委託都市更新事業機構實施皆可運用中央都市更新基金。』

2.容積轉移：依「都市更新條例」第 45 條規定，『更新地區範圍內公共設施保留地、依法應予保存及獲准保留之建築所坐落之土地或街區，或其他為促進更有效利用之土地，其建築容積得一部或全部轉移至其他建築基地建築使用。建築容積經全部轉移至其他建築基地建築使用者，其原為私有之土地應登記為公有。』

3.稅捐減免：「都市更新條例」第 46 條對於都市更新涉及之地價稅、房屋稅、土增稅與契稅等各種稅目訂有減免優惠。

4.優先配合興建重要公共設施：依「都市更新條例」第 30 條規定，『權利變換範圍內供公共使用之道路、溝渠、兒童遊樂場、鄰里公園、廣場、綠地、停車場等七項用地，得以各該原有公共設施用地、未登記地及得無償撥用取得之公有道路、溝渠、河川等公有土地抵充。』前述以外因實施都市更新事業而興修之重要公共設施，依「都市更新條例」第 53 條，『實施者得要求該公共設施之管理者負擔該公共設施興修所需費用之全部或一部。更新地區範圍外必要之關聯性公共設施，各該主管機關應配合更新進度，優先興建，並實施管理。』

5.提供融資協助：依「都市更新事業貸款要點」，都市更新機構或團體得視實際需要申請融資貸款，最高額度上限為實際需要百分之八十為限。依「都市更新條例」第 50 條規定，『證券管理機關得視都市更新事業計畫財源籌

措之需要，核准設立都市更新投資信託公司，發行都市更新投資信託受益憑證，募集都市更新投資信託基金。』其中，都市更新投資信託基金需與都市更新投資信託公司及信託機構之自有財產分別獨立。依「都市更新條例」第 52 條規定，『實施者為經營不動產投資開發之上市公司，為籌措都市更新事業計畫之財源，得發行指定用途之公司債，不受公司法第二百四十七條之限制。』

2.4 私部門參與都市更新之誘因與阻力

2.4.1 私部門參與都市更新之誘因

從實施者的角度觀之，其認為都市更新案與一般土地開發案最大差異在於都市更新案有建築容積獎勵。(丁玟甄, 2008)指出其他獎助措施相對而言成效不大。例如提供融資協助，最高可申貸實際需要資金之百分之八十，然而利率未較一般銀行利率低。而稅捐減免優惠方面，各項土地稅目對土地或建築物長期持有者則較為有利，土增稅與契稅之減免優惠則需至產權移轉時方能顯現，對於配回不動產以居住為目的之參與者直接誘因不大。

2.4.2 私部門參與都市更新之阻力

1. 協商成本高，更新時程長：都市更新條例對於更新事業推動過程有諸多規定，例如參與意願調查、參與門檻限制、權益分配協議、拆遷補償費、違建戶處理方案等事項皆隱含不確定性。此外，都市更新涉及現有建物拆遷工作，建築物殘餘價值的處理亦提高協商的困難度，意見整合過程需花費長時間進行協商，影響資金成本甚鉅，間接影響更新規模。(游振輝, 2004)
2. 資金需求龐大，進入門檻高：都市更新事業所需資金規模少則數十億，多則上百億，對於一般民間業者產生相當限制，更遑論所有權人自主更新。此外，都市更新投資信託制度亦因為設立門檻過高無法適用[5]。(丁玟甄, 2008)
3. 審議流程：由於審議的過程中，尚未獲得建築許可、不能進行開發，然已投入資金於土地的取得，故如審議時程愈久，資金成本愈大，不過此部分的成本較易於掌控，因為一般來說審議時程介於半年至一年。(吳秉蓁, 1999)

[5] 根據「都市更新投資信託公司設置監督及管理辦法」，都更信託公司以股份有限公司組織爲限，其最低實收資本額爲新臺幣 3 億元。此實收資本額門檻與現行投信業者門檻相同，但其發起人須有於國外辦理相同業務的基金法人，或辦理不動產投資的金融保險業占 20%股權才能申請設立。在此前提下，發起人必須符合 1 年投資信託業務平均市值在新臺幣 500 億元以上，國內投信業者無法達到上述門檻。

三、相關理論與文獻回顧

3.1 實質選擇權之定義與類型

1973 年 Black、Scholes 及 Merton 建立一個包含衍生性金融性商品及股票的無風險投資組合，在無套利機會的情況下，該投資組合的報酬會等於無風險利率，推導出 Black-Scholes 選擇權定價模型。

3.1.1 實質選擇權

選擇權（options）是一種衍生性證券（derivate security），當契約買方付出權利金（premium）後，享有在特定期間內向賣方以約定的價格買入或賣出一定數量標的資產（underlying asset）的權利。其中，衍生性商品（derivatives）是一種用來移轉風險的契約。該評價模式是利用標的物價格、履約價格、無風險利率、標的物價格波動率及選擇權距到期日的時間等五個變數來計算一個歐式買權權利金之價值。凡是標的資產為實質資產[6]之選擇權理論評估即是實質選擇權，評估專案的經濟價值。

實質選擇權的評價模型借用財務選擇權的理論，如 Black-Scholes 模型以及 Cox, Ross & Rubinstein （1979）的二項式模型，進行實質資產投資之評價。當公司計畫投資時，即類似持有買權，擁有一個於未來適當時機進行投資的權利而非投資義務。然而，傳統投資分析方法中普遍使用的淨現值法（Net Present Value），當投資收益現值大於投資成本現值時，即可考慮進行投資，但可能因(Dixit & Pindyck, 1994)所指出淨現值法的兩項前提假設與現實投資特性相左導致評價錯誤，也可能因不對稱請求權（asymmetric claims）的特性而錯估價值

實質選擇權概念考慮未來進行投資實質資產的可行性，當投資計畫具備可延遲性與不可回復性時，管理彈性使得投資案可獲得無限的上部報酬以及有限的下部風險損失，因此選擇權價值源自於未來市場的不確定性。當未來市場確定，則投資計畫中的實質選擇權不具任何價值，計畫延後投資並無利益；倘若市場不確定越高，等待更多資訊而延後進行投資，將提升投資的獲利，實質選擇權價值亦隨之增加，因此，當未來市場不確定越高時，實質選擇權的價值越高。所以，欲求取投資專案的真實價值，需將此種管理彈性的價值納入考量，必須注意的事，實質選擇權取得方式會導致不執行權利時，必須負擔損失，在此種情形下，實質選擇權評估也能反映出可能虧損的風險（機率)。故本研究在評估該開發專案的價值時，將採用實質選擇權的方法，考慮投資專案的價值。

[6] 現實中實質資產投資具備下列三個重要特點。第一，投資的沉沒成本（sunk cost）特性，投資具有不可回復性（irreversible)；第二，投資計畫通常具可延遲性，投資計畫具備時間彈性；第三，市場具備不確定性，市場情況的轉變對於投資金額龐大的實質資產投資案未來收益將產生重大影響。

3.1.2 實質選擇權之類型

(Smit & Trigeorgis, 2008)將普遍使用的實質選擇權依據決策特性分成六大類型，說明如下：

1.遞延選擇權(The option to defer)

當市場的前景不明，不確定性很高時，具有不可逆轉(irreversible)特性的投資計畫，公司可將投資決策遞延，直到市場狀況比較明確再做決策。當產業具有相當高進入門檻時，遞延選擇權也相對變得很重要，例如：具有專利權或獨家技術的新產品，市場上尚未有相似替代品，並且競爭對手很難快速仿製。或是，外在競爭下，公司投資機會的價值可能受競爭者策略影響，例如競爭對手推出類似替代產品，或搶攻無進入障礙的新市場。這種情況也稱為共享實質選擇權(shared real options)。可遞延的投資機會可視為一個買權，遞延選擇權價值可表示為：

Expanded NPV = Max [net present value $(Vt - I)$, abandon 0]

此處，標的資產為計畫的預期現金流量現值Vt；履約價格為必要的投資支出I。

2.擴張/緊縮選擇權(options to expand or contract)

在不確定性高的市場推出新產品時，公司管理階層擁有許多決策彈性，如擴張、緊縮、放棄計畫、暫停營運、產品或原料轉換等。當市場狀況比預期好或產品生命週期比預期要長，公司可增加產能或延長該產品的生產，稱為擴充選擇權。反之則稱為緊縮選擇權。當公司購買一大片未開發土地，或在前景看好的新市場中先建立小廠房，公司本質上皆獲得擴張選擇權。選擇廠房時需考慮建造成本與維護成本比率。公司或許偏好選擇低建造成本-高維護成本的廠房，當市場狀況差時，可縮減規模大幅減少維修的變動成本。

3.放棄選擇權(option to abandon for salvage)

公司在市場狀況不好時，可採取停止整個投資計畫或公司營運，並在次級市場出售資本設備與其他資產等，出售所得可用於其他更好的用途。其中，放棄選擇權適合決策於資本密集、擁有龐大有形資產的產業，而且計畫資產容易轉手，例如航空公司。假設最佳轉售價格(resale value)為A，考慮放棄選擇權後的擴充淨現值為原本淨現值加上一個賣權。

$$\text{Expanded present value} = V + max[(A - V), 0] = max[V, A] = max[(V - A), 0] + A$$

如果轉售價格 A 也同時具有不確定性，則此賣權將成為一個交換選擇權(Exchange Options)。

4.暫停營運選擇權(option to temporarily shut down)

當公司營運情況比預期要差，現金收入無法支付變動成本，並且暫停營運與重新營運間的轉換成本較低時，公司可採取暫停營運，等待時機再

重新營運。

5.轉換選擇權 (options to switch inputs or outputs)

當產品或生產原料(要素)之價格或數量具有不確定性，公司可採取轉換產品或要素的彈性。若將相同的原料轉為生產他種產品，稱為產出轉換選擇權或產品彈性，將更快速反應市場需求變動。相同的，若一種產品可改由其他要素或其他生產製程製造，稱為要素轉換選擇權或製程彈性。其中，轉換選擇權適合需求彈性很大的產業，並且該公司朝向拓展多樣化的產品線，例如消費性電子、製藥、汽車等產業。

6.成長選擇權 (Growth option)

成長選擇權屬於複合選擇權 (compound option, or option on option)。公司先作初期投資(例如研發計畫、租下未開發的土地或油田)，視初期投資情況決定是否投資往後一系列的相關投資計畫，著重於企業成長策略以及此策略下的發展性，帶來未來的成長機會，例如產品或製程的創新、進入新市場、強化產能等。換句話說，牽涉到後續一系列相關投資計畫的產業，例如製藥、電子、石油、化學等產業，也都在成長選擇權研究的範疇中。

3.2 實質選擇權於土地開發分析之應用

為修正淨現值法忽略市場不確定性以及延遲投資的前提假設，實質選擇權乃將已發展出的選擇權觀念延伸到實質資產投資的評價，實質資產包括了土地、建築物、工廠等。其中又以未開發土地投資分析最為廣泛，再開發土地與待更新不動產之相關研究則相對稀少。

3.2.1 實質選擇權於土地開發分析之理論

(Titman, 1985)首先將實質選擇權價值模型運用於不動產價格研究、土地開發與評價。以兩期的 CRR 模型為基礎評估未開發土地問題，強調不應僅考量目前的開發價值，亦需將延後開發之價值加以考量以確保最適開發密度，此將使選擇權價值提升，找出最適投資時機，因此解釋了高度發展都會洛杉磯 Westwood 地區中停車場土地低度利用情形。

(蔡進國, 1997)指出持有未開發土地如同持有一個沒有到期期限的美式買權。分別利用 Quigg、Capozza & Sick 所推導的模型進行實證，研究結果發現未開發土地未達到最適開發時機前才適用實質選擇權模型。影響土地價值的因素中，以開發後收益與開發成本的影響程度最大。另外，在傳統評估中的風險因素認為會降低土地價值，但在實質選擇權模型中卻會增加未開發土地的價值。

以從上述土地開發或土地評價的文獻中得知，學者大都認為未開發土地含有選擇權的價值，進而推導含有選擇權價值的模型，大多著重於未來收益、開發成本、開發強度與密度或者空地維持成本的變化對於選擇權價

值和開發時機的影響。結果多符合實質選擇權的基本論點，當未來不確定增加時，開發選擇權價值將提升且延後開發時機。

3.2.2 實質選擇權於土地開發分析之實證

(Quigg, 1993)為首位利用大量實際交易價格驗證實質選擇權理論與估計未開發土地實質選擇權價值的學者。其融合 Titman(1985)與 Williams(1991)之模型，以美國 Seattle 地區 1977 至 1979 年間 2,700 筆土地交易與 3,200 筆整棟房地交易資料為樣本，以特徵價格法推估已開發土地價值，並設定報酬與開發成本為隨機變數，再以模型估算未開發土地之內含價值與時間價值。其可開發土地價格彈性函數，以不動產單位面積真實成交價格之 log 值為因變數，而以基地面積、建物面積之 log 值，建物高度、建物高度平方值、屋齡以及區位、出售時間等為自變數，依 Quigg 估計，等待開發的選擇權時間價值（time value）佔土地價值百分比平均為 6%。

(梁仁旭, 2007)仿效 Anthony and Roger(2004)實證模型，利用台南市安南區 2001 年至 2005 年 963 筆住宅房地交易資料進行實質選擇權價值的估計，其中包括 125 筆土地與 838 筆房地資料，利用特徵價格法分離未開發土地交易價格之開發時間價值，發現選擇權時間價值約佔空地價值之 11.96%，越接近開發成熟階段，選擇權價值佔空地價值越低。

目前實質選擇權實證分析著重於實質選擇權價值之估算，估計方法大致可區分為以實際交易價格代入選擇權模型計算出選擇權價值，以及特徵價格法兩大類。模型估計方面多以 Quigg(1993)建立模型為基礎，除了計算選擇權價值並驗證實質選擇權價值對市場價值的解釋能力，其結果一致表示土地於開發變更使用前，受開發後使用收益之不確定性及本身具有之延後開發權利，使其具有開發權利之實質選擇權價值。此外，Anthony and Roger(2004)建立特徵價格模型簡化過去實質選擇權估計方式，需要土地與整棟建築物交易價格資料方能進行估算，也解決了實證方式簡化導致無法直接觀察不確定對選擇權價值影響程度。

3.3 實質選擇權於土地再開發分析之應用

土地與建物之耐久財特性使已開發土地具有再開發的權利，部分研究即針對土地再開發行為所產生的實質選擇權進行研究，探討不動產再開發的計畫價值。

(Capozza & Sick, 1991)著重於比較租賃土地價值與所有權土地價值之差異。以實質選擇權解釋其差異，將開發成本視為土地開發密度與每單位資本成本之乘積，複雜了分析模式。研究發現，在美國、加拿大等地區，長期租賃權之財產價值與所有權之財產價值間有 20%到 40%的差距，相較於承租者，所有權者持有無限期的使用權利，而且當土地使用強度增加、收

益或市場價值不確定上升時，兩者差異隨之增加。

(陳奉瑤, 2003)擴展 Capozza and Sick(1991)的模型評估再開發土地價值，分析再開發土地的特性，以凸顯其與未開發土地、再開發土地間之差異。其中，綜合考慮了更新後之開發密度、開發成本、公益設施投入成本、租金成長金額及其變異數和無風險利率。其模型推導結果符合理論預期，開發成本與公益設施投入成本越高，選擇權價值越低；至於關係更新與否的容積獎勵（更新後之開發密度），則是呈正相關。後續建議如能建立公益設施投入成本與建築容積獎勵倍數的連動關係，如此即可根據選擇權價值隨容積獎勵倍數巨幅變動的特徵，反算公益設施投入成本的容受力。

綜上所述，再開發土地選擇權為空地開發選擇權之延伸，由初期空地開發價值擴展至土地重複使用特性所產生再開發決策價值，討論方式與未開發土地選擇權研究類似，大多利用模型推導與模擬分析進行價值分析且能反映出可能虧損的風險(機率)。然而，都市更新專案經常需面臨到所有權人及面積同意書之多寡限制，理性的土地所有權人將會依權利變換後個人所能獲得之價值評估是否繼續同意都市更新的進行，都市更新過程中協商成本與時間成本（不確定性大，風險增大）將會是最大關鍵，以上文獻皆將此特點假設為不影響都市更新時機。換句話說，再開發土地選擇權文獻皆只重視效率的最適更新時機，並未考慮到都市更新流程時間之影響。

3.4　實質選擇權於不同產業分析之應用

3.4.1　荷蘭境外特許權投資分析

(Smit, 1997)將荷蘭近海原油開發專案決策彈性分為下列四階段：申請探勘執照並開始測試性探鑽、評估性油井探鑽決定是否繼續開採、決定是否開發油田和立即放棄計畫階段，一連串計畫視為一個 nested call options。Smit 運用間斷時間二項式模型評價法建構一個投資組合複製買權的未來報酬並利用倒推（backward induction）的過程推算專案價值。利用原油現貨價格計算報酬率標準差，作為布蘭特原油期貨價格年化標準差設為 22%。

$$NPV^* = Max\left[V^* - I, \frac{p \times NPV^+ + (1-p)NPV^-}{1+r}, 0\right]$$

$$p = \frac{(1+r-\delta)S_t - S_{t+1}^-}{S_{t+1}^+ - S_{t+1}^-} = \frac{(1+r-\delta) - d}{u-d}$$

此處，V^*：標的資產為已開採並營運中的油田價值(包含放棄選擇權價值)；$\delta = 便利孳息$。

將$\sigma = 15\%$、22%、30%之下，探究三種海域油田的評價結果。其結論為油價報酬率波動度對計畫價值有正向影響，尤其 Speculative block[7]的彈性

[7] Speculative block：此類海域雖然只有 56%機率發現油礦，但有發現大量蘊藏量的可能性，表示其

價值最大且有最高的擴充淨現值。其主要缺點為在應用上缺少相關金融商品的長期市場價格。

3.4.2 六層複合選擇權新藥開發之專案價值

(Cassimon, Engelen, Thomassen, & Van Wouwe, 2004)利用 Geske 複合選擇權模型推導出一個六層複合選擇權模型的封閉解，將其應用於評價新藥申請專案（new drug applications，NDA）價值。將新藥申請專案決策分為一連串的階段：研發相關研究（R&D）、臨床前試驗、臨床第一期、臨床第二期、臨床第三期、美國食品藥品管理局批准和商業化階段，在美國平均需要 14.2 年的研發製程。其中，Cassimon, Engelen et al.只使用成本、利潤和不同階段時間三種變數和無風險利率及股票的標準差這兩個常數。最後，建議未來相關研究應設定可應用的一個或多個隨機變量（variables stochastic）於複合選擇權模型中。

Cassimon, Engelen et al.還將過去用來計算不確定性與連續決策的方法論（methodologies）做了些比較與建議，說明如下：

1.在 2000 年，SmithKline Beecham 使用決策樹方法分析。然而，決策樹法易於因迅速擴大的樹枝數量難以管理與評價，且設定上易產生折現率問題。

2.在 1994 年，Nicols 利用蒙特卡羅模擬來解釋評價藥品申請的過程。論文裡面提到，蒙特卡羅模擬中電腦程式會重複執行部分設定好的機率分配，極端高或低的機率分佈的模擬值也已經被證明是不可靠的，並使得專案的 NPV 超過特定的級別，且蒙特卡羅很難正確的模擬模型中的相互關係。

3.在 1997 年，Pennings and Lint 改寫了 Black - Scholes 模型，將在研發階段”jumps”的期望數（λ）和”jumps”的期望變量（γ）取代了原 B-S 模型的期望現金流量變異數，並假設為離散時間。此種方法可以不必為固定和不同階段的研發環境，但是對於量化”jumps”的大小是非常困難的。

4.在 2000 年，Kellog and Charnes 使用了二項式選擇權評價模型。其中提到，CRR 模型可清楚地建構不同階段於模型中，但 CRR 模型這個數值計算的方法最終還是會得到一個劣質封閉解。

3.4.3 涉及特定資產的多階 BOT 專案價值

(Huang & Pi, 2009)研究深入探討多期序列複合買權（multifold sequential compound call options）在多期公共工程投資評估之應用，展示特定資產投資需求會減損實質選擇權的評價，印證合約經濟學中對特定資產疑慮並指出選擇權價格和股利發放（本利還款率）在實質選擇權評價模型中，屬於重要的工程投資決策因子，深具工程經濟意涵。此研究結果顯示，分期投資的專案其投資彈性的價值，在競爭的市場是顯著的，給

油礦蘊藏量不確定性很高。

予特許公司在投資、擴張和放棄的權利。重要的是，Huang and Pi 針對多期公共建設獨特的工程投資特性，使用平賭法（martingale method）在風險中立（risk-neutral）的情況下，折現未來期望現金流量，推導出多層複合選擇權評價模型。

$$C_{\{n\},n}(V,t_0) = V_{\{n\},0}e^{-\int_{t0}^{t_n} q(u)du} N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{i,j}\right]_{n\times n}\right\} -$$

$$\sum_{m=1}^{n} e^{-\int_{t0}^{t_n} q(u)du} K_{\{n\},m} N_m\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{m\times 1};\left[\rho_{i,j}\right]_{m\times m}\right\}，\forall\, 1 \leq i < n$$

其中，

$$g_{\{n\},i} = \frac{ln\left(\frac{V_{\{n\},0}}{V_{i,\{n\}}}\right) + \int_0^{t_i}\left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i}\sigma^2(u)du}}$$

$$h_{\{n\},i} = \frac{ln\left(\frac{V_{\{n\},0}}{V_{i,\{n\}}}\right) + \int_0^{t_i}\left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i}\sigma^2(u)du}}$$

實質選擇權的標的資產價格是指投資專案的價值，且因投資專案具有獨特性，沒有歷史資料可供參考，在計算模式參數上面臨挑戰。以 BOT 專案為例，其專案價值為特許年限內各年淨營運收入現值的總和，換句話說，BOT 專案是一系列考慮貨幣時間價值的現金流量的總和。

四、兩層序列複式可展延選擇權

4.1 Black-Scholes 選擇權模型

許多實證分析文獻證明股價、利率、及匯率等變動過程呈現隨機行為，我們常以隨機過程（A Stochastic Process）代表此隨機行為。其中運用於財務工程中的隨機過程包括 Wiener Process(或稱布朗運動，Brownian Motion)、概化 Wiener 隨機過程(Generalized Wiener Process)及更完整的 Itô Process。Black-Scholes 選擇權評價模型即根據 Itô Process 來形容標的物價格（如股價）的隨機行為，表示如下：

在風險環境中某一個瞬間dt內，

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW^P \tag{4.1}$$

$$dS/S = \mu dt + \sigma dW^P \tag{4.2}$$

其中，$dS/S \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$。

此處，S為股票價位，為一隨機變數，μS為股價變量dS的期望值，σS為股價變量dS的標準差，P是風險環境下的機率測度，dW^P為在機率測度P下的 Brownian Motion，$dW^P \sim N(0, dt)$；dS/S為股票的報酬率，μ為股票報酬率的期望值，σ為股票報酬率的標準差。

式(4.1)或式(4.2)不只可以形容股價或報酬率的隨機行為也可得知股價在風險環境中會以期望值μ的比率隨時間成長，證明如下：

$$E(dS/S) = \mu dt \rightarrow \int_0^t E(dS/S) = \int_0^t \mu dt$$
$$\therefore \ln S_t - \ln S_0 = \mu t \rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t} \tag{4.3}$$

所以，在風險環境中的股價除了連續複利（無風險利率）成長外，還會因個股本身風險溢酬影響呈現μ的成長。

在平賭法（Martingale Pricing）中，將利用機率測度轉換關係式將風險環境下的機率測度轉換成為風險中立下的機率測度，機率測度轉換關係式如下：

$$dW^P = dW^Q - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt \tag{4.4}$$

此處，Q為風險中立下的機率測度（或稱等價平賭機率測度（Equivalent Martingale Measure)），dW^Q為在風險中立Q下的 Brownian Motion。

即可得在風險中立下報酬率的隨機過程，表示如下：

$$dS/S = r dt + \sigma dW^Q \tag{4.5}$$

比較式(4.2)和式(4.5)可以得知，由風險環境下的機率測度P轉換至風險中立下的機率測度Q，唯一影響只有資產報酬率隨機過程之期望值μ轉換成r而已。

Black-Scholes 選擇權模型假設條件如下：

(1) 交易費用及稅不存在

(2) 股票交易連續進行，且股票具有可分割性（即可交易任何比率的股票）。

(3) 股價變動過程根據上述 Itô Process 式(4.1)來形容。

(4) 可無限放空股票及充分利用放空得來的資金。

(5) 無風險利率存在，且在到期日前都維持不變。

(6) 標的股在衍生性商品的存續時間不分配現金股息。

Black-Scholes 選擇權評價模型根據 Itô Lemma 來推導衍生性商品價值(如選擇權價值）的變動過程，由 Itô Lemma 推導結果如下：

$$df(S,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW^Q \tag{4.6}$$

此處，$f(S,t) = f$代表衍生性商品價值。

設計一個避險組合$\Pi = -f + \Delta S = -f + \frac{\partial f}{\partial s}S$，使得避險組合為無風險且可求解衍生性商品價值之偏微分方程式。該組合變量$\Delta\Pi$無隨機項dz且無風險報酬為$\Pi r\Delta t$[8]。衍生性商品價值之偏微分方程式(Black-Scholes 的偏微分方程式)如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \tag{4.7}$$

將選擇權到期現金流量做為臨界條件（Boundary Conditions)，對 Black-Scholes 的偏微分方程式求解選擇權的評價模型。以歐式買權為例，(單層，$n = 1$，C_t^n）選擇權評價模型可由下列方程式求得：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rC, C = C_0^1(S_0,t)$$
$$C_T^1(S_0,t) = max(S_T - K, 0) \tag{4.8}$$

此處，$C_T^1(S_0,t) = max(S_T - K, 0)$為歐式買權在到期時$T$的現金流量。

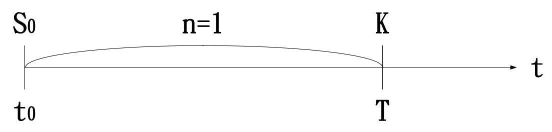

圖 4-1 單層選擇權

資料來源：本研究整理

[8] 請參考陳松男 (2008). 金融工程學, 新陸書局.

Black-Scholes 的研究是透過建立避險組合，使避險組合成為無風險，其報酬率是無風險利率。在無風險下，選擇權到期收益的期望值就可以以無風險利率r來則折現求算選擇權的合理價格。

後續將參入平賭法相關設定，以便本研究之用。在風險中立假設下，歐式買權期初價值為到期日價值的現值，則折現率為無風險利率r。

$$C = C_0^1(S_0,t) = e^{-rT}E^Q[max(S_T-K,0)] = \begin{cases} e^{-rT}E^Q(S_T-K)\text{，若}S_T>K \\ 0\text{，若}S_T\le K \end{cases}$$

歐式買權價值可進一步表示為

$$C_0^1(S_0,t) = e^{-rT}\int_K^{\infty}(S_T-K)f(S_T)dS_T \tag{4.9}$$

Black-Scholes 假設股價的機率分佈呈現對數常態分配，則股價的機率分配函數為

$$f(S_T) = \frac{1}{S_T}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}exp\left[\frac{-(ln\,S_T-E(ln\,S_T))^2}{2\sigma^2T}\right] \tag{4.10}$$

將$f(S_T)$代入式(4.9)可得

$$\begin{aligned} C = {} & e^{-rT}\int_K^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}exp\left[\frac{-(ln\,S_T-E(ln\,S_T))^2}{2\sigma^2T}\right]dS_T \\ & -Ke^{-rT}\int_K^{\infty}\frac{1}{S_T}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}exp\left[\frac{-(ln\,S_T-E(ln\,S_T))^2}{2\sigma^2T}\right]dS_T \end{aligned} \tag{4.11}$$

第一項利用替代變數法（Jocobian Transformation）轉換[9]，令

$$y = [ln\,S_T-(E(ln\,S_T)+\sigma^2T)]/\sigma\sqrt{T}$$

所以可以得到$dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\cdot d\,ln\,S_T = \frac{1}{S_T\sigma\sqrt{T}}dS_T$，故第一項簡化為

$$S_0\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot exp(-y^2/2)dy = S_0[1-N(-d_1)] = S_0\cdot N(d_1) \tag{4.12}$$

其中，積分下限K轉換為

$$y = \frac{ln\,K-(E(ln\,S_T)+\sigma^2T)}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_1$$

第二項利用變數轉換，令

$$w = [ln\,S_T-E(ln\,S_T)]\,/\sigma\sqrt{T}$$

可以得知$dw = \frac{1}{S_T\sigma\sqrt{T}}dS_T$，故第二項簡化為

[9] 詳細轉換與計算請參考陳松男 (2008). 金融工程學, 新陸書局. P.20 ~ P.21

$$Ke^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot exp(-w^2/2)dw \ = Ke^{-rT}\cdot[1-N(-d_2)] \ = \ Ke^{-rT}\cdot N(d_2)$$

(4.13)

其中，積分下限K轉換為

$$w \ = \frac{(ln\,K - E(ln\,S_T))}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{ln\,S_0 - ln\,K + (r+\sigma^2/2)T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \ -d_1 + \ \sigma\sqrt{T}$$
$$= \ d_2$$

最終，將轉換後的式(4.12)和式(4.13)相減，可得 Black-Scholes 歐式買權評價模型如下：

$$C_0^1(S_0,t) \ = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

(4.14)

其中，

$$d_1 \ = \frac{ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 \ = \ d_1 - \ \sigma\sqrt{T} \ = \ \frac{ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

4.2 Longstaff 可展延選擇權模型

(Longstaff, 1990)針對實務上擁有選擇權性質的金融合約和條件求償證券（contingent claims）可將到期日展延的問題，延伸出一封閉解模型。以歐式可展延買權為例，(一層，$n = 1$，EC_t^n）選擇權評價模型假設選擇權持有人在第一個到期日t_1時，擁有一個可藉由支付額外酬金（additional premium）A給選擇權賣家延期履約日至第二個到期日t_2的買權[10]，其可展延買權於第一個到期日t_1的現金流量為

$$EC_{t_1}^1\left(S_{t_0}, K_1, t_1, k_1, t_2, A\right) = max\left(0, C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A, S_{t_1} - K_1\right) \tag{4.15}$$

此處，$C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right)$為一般的歐式買權折現至時間點$t_1$的現值，履約價在延期的時間內將進行調整從$K_1$到$k_1$（$k_1 > K_1$），到期日為$t_2 - t_1$。
或是，(4.15)可以改寫成

$$max\left(max\left(0, C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A\right), max\left(0, S_{t_1} - K_1\right)\right) \tag{4.16}$$

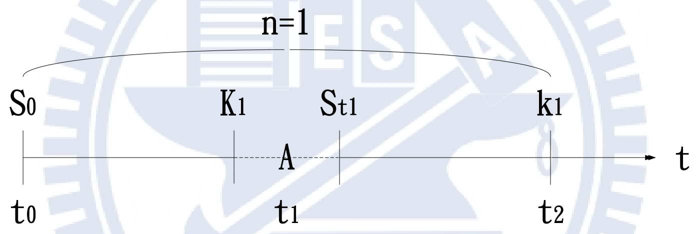

圖 4-2 單層可展延選擇權

資料來源：本研究整理

就可展延買權而言，其第一個到期日t_1的現金流量可分解為傳統買權和買權的買權（複式選擇權），兩者之間取大，但非衍生性商品包含兩個不同標的物結合。

根據可展延選擇權到期日條件性質可以判斷延期的時機。設定L代表時間點t_1上的一延期價值（Critical value），$S_{t_1} < L$，可展延買權為價外（out-of-the-money）就不延期；設定H代表時間點t_1上的一延期值，$S_{t_1} > H$，可展延買權將被執行而非延期。所以，可展延選擇權延期只會發生在S_{t_1}介於區間$[L, H]$中。另外，若選擇延期至時間點t_2時，$S_{t_2} > k_1$，可展延買權才會被執行。而確切的L和H可藉由可展延選擇權特色求得，根據以下等式可以求得L，

$$C_{t_1}\left(L, k_1, t_2 - t_1\right) = A \tag{4.17}$$

此處，$A < k_1 - k_1 e^{-r(t_2 - t_1)}$為$L < K_1$的充分條件，代表$A$若是小於$k_1 - k_1 e^{-r(t_2 - t_1)}$，

---

10 在此說明，根據 Longstaff 可展延選擇權評價模型中設定，當選擇權到期時，若不執行而藉由支付額外酬金 A 延期履約日的話，則代表延期履約日的同時即放棄已知的立即報酬並取得一個新的選擇權，其中新的選擇權報酬則視延期後履約日當時的情況而定。

選擇權必定被延期。$A < K_1$為$L < K_1$的必要條件，代表A若是沒有小於K_1，選擇權便不可能會被延期。

依考量未來延期後所預估之履約價格k_1和A是否大於S_{t_1}，可以得到

$$L = A + k_1 e^{-r(t_2-t_1)} \tag{4.18}$$

同樣地，根據以下等式可以求得H，

$$C_{t_1}(L, k_1, t_2 - t_1) = H - K_1 + A \tag{4.19}$$

依考量未來延期後所預估之履約價格k_1和A是否大於$S_{t_1} - K_1$，可以得到

$$\begin{aligned} L &= H - K_1 + A + k_1 e^{-r(t_2-t_1)} \\ \rightarrow H &= L + K_1 - A - k_1 e^{-r(t_2-t_1)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

所以，可展延買權在兩個到期日t_1和t_2時，現金流量分別如下：

表 4-1　Longstaff 可展延選擇權模型現金流量

情況	$\boldsymbol{t_1}$現金流量	$\boldsymbol{t_2}$現金流量
$S_{t_1} < L$	0	0
$L \le S_{t_1} \le H$且$S_{t_2} < k_1$	−A	0
$L \le S_{t_1} \le H$且$S_{t_2} > k_1$	−A	$S_{t_2} - k_1$
$S_{t_1} > H$	$S_{t_1} - K_1$	0

資料來源：本研究整理

需驗證介於區間$[L, H]$中可延期選擇權現金流量是否$C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A > S_{t_1} - K_1$，證明如下：

根據假設$L \le S_{t_1} \le H$，先由式(4.18)和式(4.20)中取L和H，

$$\begin{aligned} &\because L \le S_{t_1} \le H \\ &\rightarrow \left[L = A + k_1 e^{-r(t_2-t_1)}\right] \le S_{t_1} \le \left[L + K_1 - A - k_1 e^{-r(t_2-t_1)} = H\right] \\ &\rightarrow A + k_1 e^{-r(t_2-t_1)} \le S_{t_1} \le L + K_1 - A - k_1 e^{-r(t_2-t_1)} \\ &\rightarrow L \le S_{t_1} \le K_1 \end{aligned}$$

所以，即可以求得

$$\begin{aligned} &C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A > 0 > S_{t_1} - K_1 \\ &\rightarrow \mathrm{S}_{t_1} N(d_1) + k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N(d_2) - \mathrm{A} > S_{t_1} - K_1 \end{aligned}$$

故可以知道當$L \le S_{t_1} \le H$時，現金流量為最大的$C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A$。

最後，可得知選擇權延期只會發生在S_{t_1}介於區間$[L, H]$中且現金流量為$C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A$。

對於$ln\,S_{t_1}$和$ln\,S_{t_2}$聯合機率分佈可由股價動態過程表示：

$$E\left[ln\,S_{t_i}\right] = ln\,S_{t_0} + (r - \sigma^2/2)(t_i - t_0), i = 1,2$$

$$Cov\left[ln\,S_{t_i}, ln\,S_{t_j}\right] = \sigma^2\left[min(t_i, t_j)\right], i, j = 1,2$$

(4.21)

將可展延買權到期現金流量(4.15)做為臨界條件（Boundary Conditions），對Black-Scholes的偏微分方程式求解可展延買權的評價模型。可展延買權的價格模型可由下列偏微分方程式求得：

$$\frac{\partial EC}{\partial t} + \frac{\partial EC}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 EC}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rEC, EC = EC_0^1\left(S_{t_0}, K_1, t_1, k_1, t_2, A\right)$$

(4.22)

參入平賭法相關設定，在風險中立下，可展延買權期初價值為到期日價值的現值，則折現率為無風險利率r，並可以以下列代表之：[11]

$$\begin{aligned} EC_0^1 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[EC_{t_1}^1(S_0, K_1, t_1, k_1, t_2, A)\right] \\ &= e^{-r(T_1)}E^Q\left[max\left(0, C_{T_1}\left(S_{T_1}, K_2, T_2 - T_1\right) - A, S_{T_1} - K_1\right)\right] \\ &= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[max\left(0, C_{t_1}\left(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1\right) - A, S_{t_1} - K_1\right)\right] f(\mathrm{z})dz \\ &= \mathrm{e}^{-r(t_2-t_0)}\int_a^b\int_c^{\infty}\left(S_{t_2} - k_1\right)f(z_1, z_2, \rho)dz_2\,dz_1 - e^{-r(t_1-t_0)}A\int_a^b f(z_1)dz_1 \\ &\quad + e^{-r(t_1-t_0)}\int_b^{\infty}\left(S_{t_1} - K_1\right)f(z_1)dz_1 \end{aligned}$$

(4.23)

此處，

$f(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z_1)^2/2}, -\infty < z_1 < \infty$，為標準常態分布；

$f(z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}exp[{z_1}^2 + {z_2}^2 - 2z_1z_2\rho], -\infty < z_1, z_2 < \infty$，為標準二維常態分佈。

其中，

$$a = \frac{ln\left(L/S_{t_0}\right) + (-r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_1 - t_0)}};\ b = \frac{ln\left(H/S_{t_0}\right) + (-r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_1 - t_0)}}$$

$$c = \frac{ln\left(k_1/S_{t_0}\right) + (-r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_0)}};\ \rho = cov(z_1, z_2)$$

[11] 推導過程參考 Shevchenko, P. V. (2010). "Correcting the holder-extendible European put formula." arXiv preprint arXiv:1010.0090.

當中所使用的積分公式：

$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(u,v,\rho)\, e^{\alpha u} du dv \;= exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) N_2(a-\alpha, b-\alpha\rho, \rho)$$

$$\int_{a}^{\infty}\int_{b}^{\infty} f(u,v,\rho)\, e^{\alpha u} du dv \;= exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) N_2(\alpha-a, \alpha\rho-b, \rho)$$

$$\int_{a}^{\infty} f(u)\, e^{\alpha u} du \;= exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) N(\alpha-a);\; \int_{-\infty}^{a} f(u)\, e^{\alpha u} du \;= exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) N(a-\alpha)$$

(4.24)

此處，$N(\cdot)$為標準常態累積機率；$N_2(\cdot,\cdot,\rho)$為標準二維常態累積機率。

經轉換$d_1 = \sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)} - b;\ d_2 = \sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)} - a;\ d_3 = \sqrt{\sigma^2(t_2-t_0)} - c;\ d_4 = \sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)} - d$，最後可得 Longstaff 文獻中（單層，$n=1$）可展延（歐式）買權的評價模型：

$$\begin{aligned}
&EC_{t_0}^1(S_{t_0}, K_1, t_1, k_1, t_2, A)\\
&= C_{t_0}^1(S_{t_0}, t_1-t_0) \;+\; S_{t_0} N_2(d_1, d_2, -\infty, d_3, \rho)\\
&- k_1 e^{-r(t_2-t_0)} N_2\left(d_1-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}, d_2-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}, -\infty, d_3-\sqrt{\sigma^2(t_2-t_0)}, \rho\right)\\
&- S_{t_0} N(d_1, d_4) + \;K_1 e^{-r(t_1-t_0)} N\left(d_1-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}, d_4-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}\right)\\
&- A e^{-r(t_1-t_0)} N\left(d_1-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}, d_2-\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}\right)
\end{aligned}$$

(4.25)

其中，

$$\rho \;=\; \sqrt{t_1-t_0/t_2-t_0}$$

$$d_1 \;=\; \frac{ln(S_{t_0}/H) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}};\; d_2 \;=\; \frac{ln(S_{t_0}/L) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}}$$

$$d_3 \;=\; \frac{ln(S_{t_0}/k_1) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_0)}};\; d_4 \;=\; \frac{ln(S_{t_0}/K_1) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sqrt{\sigma^2(t_1-t_0)}}$$

$N(A,B)$為在區間$[\mathrm{A,B}]$內的標準常態分佈的累積機率$N(\cdot)$，而$N(A,B,C,D,\rho)$為在矩型區間$[\mathrm{A,B}]\times[\mathrm{C,D}]$內相關係數$\rho$的二元標準常態分佈的累積機率$N_2(\cdot,\cdot,\rho)$[12]。$C_{t_0}^1(S_{t_0}, t_1-t_0)$為代表一般權利的傳統歐式買權，其到期日$t_1$和履約價$K_1$，其餘項目皆代表延期權利（extension privilege）的價值。

附錄 A 為本研究利用平賭法所推導的單層可展延買權詳細證明。

[12] $N(A,B,C,D,\rho) \;= N_2(B,D,\rho) - \;N_2(A,D,\rho) - \;N_2(B,C,\rho) + \;N_2(A,C,\rho)$，其中，$N_2(\cdot,\cdot,\rho)$爲標準二維常態分布的累積機率。$N(A,B) \;= N(B) - \;N(A)$，其中，$N(\cdot)$爲標準常態分布累積機率。

最後，參考(Chung and Johnson 2011)文獻中利用 Cox and Ross (1976)的方法使可展延買權評價模型一般化之公式，以便本研究延伸複式可展延選擇權。
一般化後單層可展延買權現金流量與折現期望值分析表，如下：

表 4-2　Longstaff 可展延選擇權模型折現期望值

情況	t_1現金流量	t_2現金流量	折現期望值
$S_{t_1} < L$	0	0	0
$L < S_{t_1} < H$且$S_{t_2} < k_1$	-A	0	$-Ae^{-r(t_1-t_0)}prob\left(L < S_{t_1} < H\right)$
$L < S_{t_1} < H$且$S_{t_2} > k_1$	-A	$S_{t_2} - k_1$	$S_{t_0}[N_2(-d_1(H,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho) - N_2(-d_1(L,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)]$ $-k_1e^{-r(t_2-t_0)}prob\left(L < S_{t_1} < HandS_{t_2} > k_1\right)$ $-Ae^{-r(t_1-t_0)}prob\left(L < S_{t_1} < H\right)$
$S_{t_1} > H$	$S_{t_1} - K_1$	0	$S_{t_0}N\left(d_1(H,t_1-t_0)\right) - K_1e^{-r(t_1-t_0)}prob\left(S_{t_1} > H\right)$

資料來源：Chung and Johnson 2011

一層可展延買權的評價模型一般化後為：

$$
\begin{aligned}
&EC_{t_0}^1\left(S_{t_0},K_1,t_1,k_1,t_2,A\right) \; = S_{t_0}N\left(d_1(H,t_1-t_0)\right) - K_1e^{-r(t_1-t_0)}N\left(d_2(H,t_1-t_0)\right) \\
&+S_{t_0}[N_2(-d_1(H,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho) - N_2(-d_1(L,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&-k_1e^{-r(t_2-t_0)}[N_2(-d_2(H,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho) \\
&\qquad\qquad - N_2(-d_2(L,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&-Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-d_2(H,t_1-t_0)\right) - N\left(-d_2(L,t_1-t_0)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

其中，

$$d_1(\cdot,t) \; = \frac{ln\left(S_{t_0}/\cdot\right) + (r+\sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\; d_2(\cdot,t) \; = \; d_1(\cdot,t) - \sqrt{\sigma^2 t}$$

Longstaff 可展延買權擁有以下這些個案特性：

(1) 若$L = 0$且$H = \infty$，選擇權持有者在到期日t_1時被迫選擇延期，其可展延買權價值為到期日t_2履約價k_1的傳統歐式買權價值$C_{t_2}^1\left(S_{t_0},k_1,t_2-t_0\right)$。
(2) 若$L > 0$且$H = \infty$，其可展延買權價值為複式買權$C_{t_1}\left(S_{t_1},k_1,t_2-t_1\right) - A$。
(3) 當$L \to K_1$時，可展延買權價值等同於傳統歐式買權$C_{t_0}^1\left(S_{t_0},t_1-t_0\right)$，延期權利的價值近乎為零。
(4) 若$A = 0$且$k_1 \to \infty$，價值為傳統歐式買權$C_{t_0}^1\left(S_{t_0},t_1-t_0\right)$。

4.3　兩層序列複式可展延選擇權模型

4.3.1　兩層序列複式可展延選擇權模型概要

一般選擇權是以股票、債券、利率或外匯等做為標的物進而衍生選擇權，但複式選擇權卻是以選擇權做為標的物而衍生出來的選擇權。將以(Geske 1979)的兩層複式選擇權觀念為依據，參考(Lajeri-Chaherli 2002)文獻中所使用的平賭法推導過程，推導複式可展延選擇權評價模型，其中，符號以(畢佳琪 2008)為設定依據。在建構想法上，將單層可展延選擇權視為雙層序列可展延選擇權的第一層選擇權，持有第二層可展延選擇權除了原本的買權外，選擇延期，還需再支付額外溢酬A_1才能延期履約日至時間點t_2，最後再支付履約價格k_1才能再擁有下一層的可展延買權。

以下為複式序列可展延選擇權之情況圖：

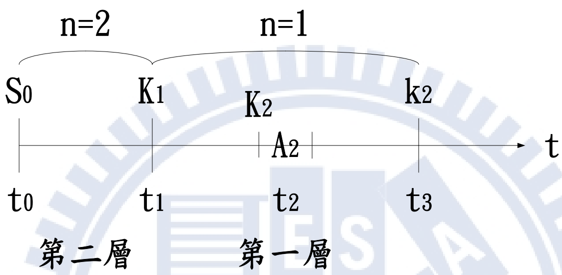

圖 4-3　雙層序列複式可展延選擇權（情況一）

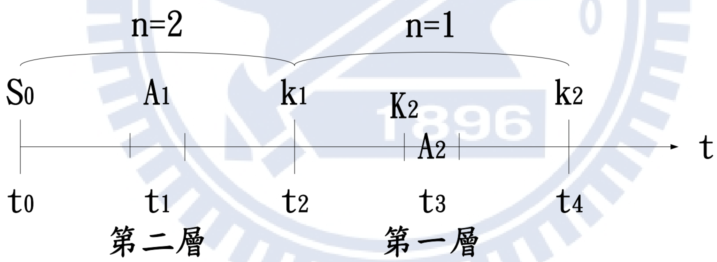

圖 4-4　雙層序列複式可展延選擇權（情況二）

資料來源：本研究整理

第二層可能發生兩種情況，情況一為到第一個到期日即執行或是情況二為選擇延期至第二個到期日，故單層可展延選擇權的起始時間點需分別移動至t_1和t_2，$EC_{t_1}^1(S_{t_1},K_2,t_2,k_2,t_3,A_2)$和$EC_{t_2}^1(S_{t_2},K_2,t_3,k_2,t_4,A_2)$，以模擬兩種情況，其中，$t_1$和$t_2$皆是第二層可展延選擇權的到期日。

情況一，在第一個到期日t_1，唯有標的第一層可展延買權的價值大於H_1，複式可展延買權才有價值，持有人履約取得標的第一層可展延買權。也就是

$$EC_{t_1}^1(S_{t_1},K_2,t_2,k_2,t_3,A_2) > H_1$$

情況二，在第二個到期日t_2，唯有標的第一層可展延買權的價值大於k_1，複式可展延買權才有價值，持有人履約取得標的第一層可展延買權。也就是

$$EC_{t_2}^1(S_{t_2},K_2,t_3,k_2,t_4,A_2) > k_1$$

所以，複式可展延買權在兩個到期日t_1和t_2時，現金流量分別如下：

表 4-3　兩層序列複式可展延選擇權模型現金流量

情況	t_1現金流量	t_2現金流量
$CEC_{t_1}^1 < L_1$	0	0
$L_1 \leq CEC_{t_1}^1 \leq H_1$且$EC_{t_2}^1 < k_1$	$-A_1$	0
$L_1 \leq CEC_{t_1}^1 \leq H_1$且$EC_{t_2}^1 > k_1$	$-A_1$	$EC_{t_2}^1 - k_1$
$EC_{t_1}^1 > H_1$	$EC_{t_1}^1 - K_1$	0

資料來源：本研究整理。

值得注意的是，若是加入考慮可展延買權內部特性的話，其現金流量可再分解為傳統買權和買權的買權（複式選擇權）兩種。所以，為計算過程清楚，本研究往後皆以複式買權計算方式設定替換相關計算，n'為複式買權之層數，共有2^n種情境(Scenario)如下：

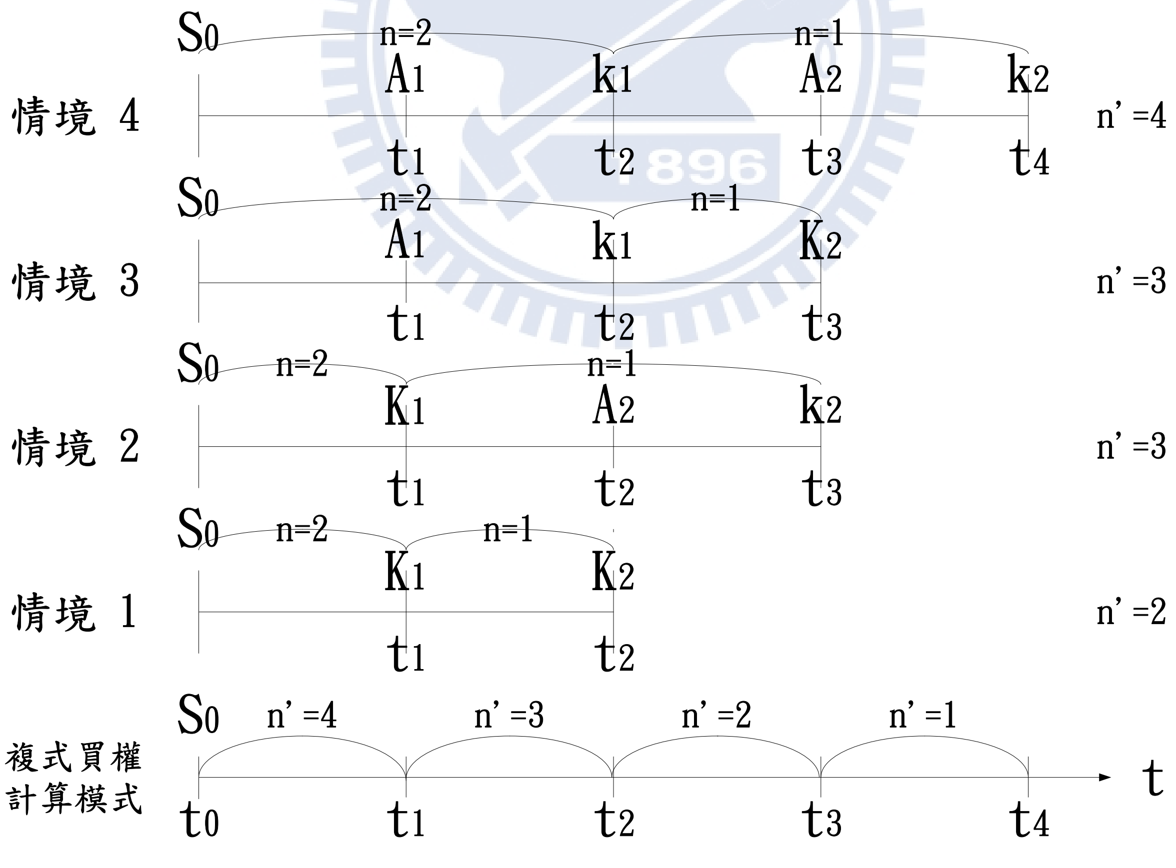

圖 4-5　雙層序列複式可展延選擇權

資料來源：本研究整理

延伸序列複式可展延買權步驟如下，

先考慮情境一、二：

第一層可展延買權於時間點t_2的價值（現金流量）為

$$EC_{t_2}^1(S_{t_1},K_2,t_2,k_2,t_3,A_2) = max(0,C_{t_2}(S_{t_2},k_2,t_3-t_2)-A_2,S_{t_2}-K_2) \tag{4.27}$$

（1）二層複式買權（$n'=2$）計算方式，第二層複式可展延買權於時間點t_1的價值（現金流量）可視為第一層可展延買權價值$EC_{t_1}^1$（一般權利）和K_1之間的差額：

$$\begin{aligned} EC_{t_2}^1 &= max(0,S_{t_2}-K_2) \\ CEC_{t_1}^2 &= max(0,EC_{t_1}^1-K_1) \end{aligned} \tag{4.28}$$

再將第二層複式可展延買權折現至t_0，即可求得$CEC_{t_0}^2$（一般權利）公式解。

（2）三層複式買權（$n'=3$）計算方式，第二層複式可展延買權於時間點t_1的價值（現金流量）可視為第一層可展延買權價值$EC_{t_1}^1$（延期權利）和K_1之間的差額：

$$\begin{aligned} EC_{t_2}^1 &= max(0,C_{t_2}(S_{t_2},k_2,t_3-t_2)-A_2) \\ CEC_{t_1}^2 &= max(0,EC_{t_1}^1-K_1) \end{aligned} \tag{4.29}$$

再將第二層複式可展延買權折現至t_0，即可求得$CEC_{t_0}^2$（延期權利）公式解。

再考慮情境三、四：

第一層可展延買權於時間點t_3的價值（現金流量）為

$$EC_{t_3}^1(S_{t_2},K_2,t_3,k_2,t_4,A_2) = max(0,C_{t_3}(S_{t_3},k_2,t_4-t_3)-A_2,S_{t_3}-K_2) \tag{4.30}$$

（3）三層複式買權（$n'=3$）計算方式，第二層複式可展延買權於時間點t_2的價值（現金流量）可視為第一層可展延買權價值$EC_{t_2}^1$（一般權利）和k_1之間的差額：

$$\begin{aligned} EC_{t_3}^1 &= max(0,S_{t_3}-K_2) \\ CEC_{t_2}^1 &= max(0,EC_{t_2}^1-k_1) = max(0,C_{t_2}(S_{t_2},K_2)-k_1) \\ CEC_{t_1}^2 &= max(0,CEC_{t_1}^1-A_1) \end{aligned} \tag{4.31}$$

再將第二層複式可展延買權折現至t_0，即可求得$CEC_{t_0}^2$（一般權利）公式解。

（4）四層複式買權（$n'=4$）計算方式，第二層複式可展延買權於時間點t_2的價值（現金流量）可視為第一層可展延買權價值$EC_{t_2}^1$（延期權利）和k_1之間的差額：

$$\begin{aligned} EC_{t_3}^1 &= max[0,C_{t_3}(S_{t_3},k_2,t_4-t_3)-A_2] \\ CEC_{t_2}^1 &= max(0,EC_{t_2}^1-k_1) \\ CEC_{t_1}^2 &= max(0,CEC_{t_1}^1-A_1) \end{aligned} \tag{4.32}$$

再將第二層複式可展延買權折現至t_0，即可求得$CEC_{t_0}^2$（延期權利）公式解。

最後，在將兩種情況中的四個情境相加，即可求得雙層序列複式可展延選擇權$CEC_{t_0}^2$所有彈性之價值。

4.3.2　情境一，二層複式買權（$n' = 2$）計算模式，求算如下：

式(4.26)一般權利部分$EC_{t_0}^1$移動至t_1相當於，

$$EC_{t_1}^1 = S_{t_1}N_1\big(d_1(H_2, t_2 - t_1)\big) - K_2 e^{-r(t_2 - t_1)} N_1\big(d_2(H_2, t_2 - t_1)\big) \tag{4.33}$$

其中，

$$d_1(\cdot, t) = \frac{ln\big(S_{t_1}/\cdot\big) + (r + \sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot, t) = d_1(\cdot, t) - \sqrt{\sigma^2 t}$$

此處，$N_1(\cdot)$為標準常態累積機率。

在風險中立設定下，將第二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^2 = e^{-r(t_1 - t_0)} E^Q\big[max\big(0, EC_{t_1}^1 - K_1\big)\big] \tag{4.34}$$

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為

$$S_{t_1} = S_{t_0} exp\big[(r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + \sigma \Delta W_1^Q\big] \tag{4.35}$$

此處，$\Delta W_1 = W_{t_1} - W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0, \mathrm{t}_1 - t_0)$

將布朗運動ΔW_1經變數轉換為標準常態分佈Z：

$$Z_1 = \Delta W_1^Q / \sqrt{t_1 - t_0} \tag{4.36}$$

可於式(4.35)中求出$\Delta \mathrm{W}_1^{\mathrm{Q}}$代入式(4.36)，因此，

$$Z_1 = \frac{ln\big(S_{t_1}/S_{t_0}\big) - (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{4.37}$$

令標的可展延買權在時間點t_1大於延期點H_1履約條件成立時，股價價值為$\overline{H}_{1,2}$，約當值。

$$Z_1 = \frac{ln\big(S_{t_1}/S_{t_0}\big) - (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} = -\left[\frac{ln\big(S_{t_0}/S_{t_1}\big) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\big(S_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\big) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right]$$

令

$$b_{2,1} = \frac{ln\big(\mathrm{S}_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\big) + (r - \sigma^2/2)(\mathrm{t}_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_1 - t_0}} \tag{4.38}$$

則當$\mathrm{S}_{\mathrm{t}_1} > \overline{H}_{1,2}$等價於$\mathrm{Z}_1 > -b_{2,1}$，則得知累積機率下限且複式可展延買權才可被執行。

所以，式(4.34)可以被寫成

$CEC_{t_0}^2 = e^{-r(t_1 - t_0)} E^Q\big[max\big(0, EC_{t_1}^1 - K_1\big)\big]$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{2,1}}^{\infty}\{[S_{t_1}N_1(d_1(H_2,t_2-t_1))-K_2e^{-r(t_2-t_1)}N_1(d_2(H_2,t_2-t_1))] - K_1\}f(Z_1)dZ_1$$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{2,1}}^{\infty}S_{t_1}N_1(d_1(H_2,t_2-t_1))f(Z_1)\,dZ_1 - e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{2,1}}^{\infty}K_2e^{-r(t_2-t_1)}N_1(d_2(H_2,t_2-t_1))f(Z_1)\,dZ_1 - e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{2,1}}^{\infty}K_1f(Z_1)\,dZ_1$$

(4.39)

其中，

$$f(Z_1) = \frac{e^{-{Z_1}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty$$

本研究將把式(4.39)分成三項求算：

<u>第二項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{2,1}}^{\infty}K_2e^{-r(t_2-t_1)}N_1(d_2(H_2,t_2-t_1))f(Z_1)\,dZ_1$$

(4.40)

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為

$$S_{t_2} = S_{t_0}exp[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)+\sigma\Delta W_2^Q]$$

(4.41)

此處，$\Delta W_2 = W_{t_2} - W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0, t_2-t_0)$

布朗運動ΔW_2經變數轉換為標準常態分佈Z：

$$Z_2 = \Delta W_2^Q/\sqrt{t_2-t_0}$$

(4.42)

其可於式(4.41)中求出ΔW_2^Q代入式(4.42)，因此，

$$Z_2 = \frac{ln(S_{t_2}/S_{t_0})-(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

(4.43)

第一層可展延買權在時間點t_2時履約。令履約（$S_{t_2}-H_2=0$）成立時的股價價值H_2。

$$Z_2 = \frac{ln(S_{t_2}/S_{t_0})-(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}} = -\left[\frac{ln(S_{t_0}/S_{t_2})+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln(S_{t_0}/H_2)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$

令

$$b_{2,2} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/H_2\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

(4.44)

則當$\mathrm{S}_{t_2} > H_2$等價於$Z_2 > -b_{2,2}$，可知累積機率之下限。

其中，依照布朗運動的假設，在兩個不重疊的時段中增量是互相獨立的，相關係數為 0

$$cov\left(\Delta W_1^Q, \Delta W_2^Q\right) = var\left(\Delta W_1^Q\right) = t_1 - t_0, t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

$$\rho_{1,2} = cov(Z_1, Z_2) = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}\sqrt{t_2 - t_0}} cov\left(\Delta W_1^Q, \Delta W_2^Q\right) = \sqrt{\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}}$$

(4.45)

將第一層選擇權式(4.33)中$d_2(H_2, t_2 - t_1)$作下式計算：

$$\begin{aligned}
d_2(H_2, t_2 - t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{H_2}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0} + \left[Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} \\
&= \frac{b_{2,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}
\end{aligned}$$

(4.46)

其中，

$$\sqrt{\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1 - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}$$

最後，利用二維累積機率常態分配將第二項式(4.40)改寫成

$$e^{-r(t_1 - t_0)} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} K_2 e^{-r(t_2 - t_1)} N_1\left(d_2(H_2, t_2 - t_1)\right) f(Z_1)\, dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_2 - t_0)} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} N_1\left(\frac{b_{2,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}\right)\left(\frac{e^{-{Z_1}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right) dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_2-t_0)} N_2\left(b_{2,1}, b_{2,2};\ \rho_{1,2}\right)$$

(4.47)

第一項為

$$e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} S_{t_1} N_1\left(d_1(H_2, t_2-t_1)\right) f(Z_1)\, dZ_1$$

(4.48)

依據標的資產對數價格的動態過程，設定一些符號以便本研究使用，

$$E\left[\ln S_{t_1}\right] = \ln S_{t_0} + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)$$
$$u_1 = STD\left[\ln S_{t_1}\right] = \sigma\sqrt{t_1-t_0}$$
$$u_2 = STD\left[\ln S_{t_2}\right] = \sigma\sqrt{t_2-t_0}$$

(4.49)

因此S_{t_1}可以寫成：

$$S_{t_1} = exp\left(E\left[\ln S_{t_1}\right] + u_1 Z_1\right) = S_{t_0} exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0) + \sigma \Delta W_1^Q\right]$$

(4.50)

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0} exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0) + \sigma Z_1\sqrt{t_1-t_0}\right]$代換，可得

$$S_{t_0} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} N\left(d_1(H_2, t_2-t_1)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2} dZ_1$$

(4.51)

第二層選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1{}' = Z_1 - \sigma\sqrt{t_1-t_0} = Z_1 - u_1$（$dZ_1{}' = dZ_1$），同時積分下限移動變更為$-b_{2,1} - \sigma\sqrt{t_1-t_0} = -\left(b_{2,1}+u_1\right) = -c_{2,1}$

則由式(4.38)得知

$$c_{2,1} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,2}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(4.52)

將第一層選擇權式(4.33)中$d_1(H_2, t_2-t_1)$作下式計算：

$$d_1(H_2, t_2-t_1) = \frac{\ln\left(\frac{S_{t_1}}{H_2}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0) + Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}}$$

$$= \frac{\left[\ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0} + \left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$= \frac{c_{2,2} + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}$$

(4.53)

此處，將$Z_1 = Z_1{}' + \sigma\sqrt{t_1 - t_0}$代入整理而得，再將等式分子和分母同除以$\sigma\sqrt{t_2 - t_0}$

其中，式(4.46)

$$\sqrt{\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1 - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}$$

令，也可以從式(4.44)得知$b_{2,2} + u_2 = c_{2,2}$

$$c_{2,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

(4.54)

最後，利用二維累積機率常態分配將第一項式(4.48)改寫成

$$e^{-r(t_1 - t_0)} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} S_{t_1} N_1\big(d_1(H_2, t_2 - t_1)\big) f(Z_1)\, dZ_1$$

$$= S_{t_0} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} N_1\big(d_1(H_2, t_2 - t_1)\big) \frac{exp\{-(Z_1 - u_1)^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} dZ_1$$

$$= S_{t_0} \int_{-c_{2,1}}^{\infty} N_1\left(\frac{c_{2,2} + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}'^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right) dZ_1{}'$$

$$= S_{t_0} N_2\big(c_{2,1}, c_{2,2};\ \rho_{1,2}\big)$$

(4.55)

<u>第三項</u>為

$$e^{-r(t_1 - t_0)} \int_{-b_{2,1}}^{\infty} K_1 f(Z_1)\, dZ_1$$

$$= K_1 e^{-r(t_1 - t_0)} N_1\big(b_{2,1}\big)$$

(4.56)

整合式(4.47)、式(4.55)和式(4.56)之結果，即為兩層序列複式可展延買權$CEC_{t_0}^2$的價值部分（情境一，一般權利）：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_1}^1 - K_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}N_2\left(c_{2,1}, c_{2,2};\ \rho_{1,2}\right) - K_2e^{-r(t_2-t_0)}N_2\left(b_{2,1}, b_{2,2};\ \rho_{1,2}\right) - K_1e^{-r(t_1-t_0)}N_1\left(b_{2,1}\right)
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

其中，

$$
b_{2,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ c_{2,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}
$$

$$
b_{2,2} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/H_2\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ c_{2,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}
$$

$\overline{H}_{1,2}$　為$CEC_{t_1}^2 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。

$N_1(\cdot)$　為一維標準常態累積機率

$N_2(\cdot)$　為二維標準常態累積機率

$\rho_{1,2}$　為兩變數間之相關係數

4.3.3　情境二，三層複式買權（$n'=3$）計算模式，求算如下：

將此案例第一層可展延買權之延期權利部分價值$EC_{t_1}^1$視為第二層可展延買權期末的價值，在風險中立設定下折現回時間點t_0，即可求得兩層序列複式可展延買權$CEC_{t_0}^2$的（情境二，延期權利）價值部分。

計算$EC_{t_1}^1 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, C_{t_2}\left(S_{t_2}, k_2, t_3-t_2\right)-A_2\right)\right]$之結果如下（第一層可展延買權式(4.26)延期權利部分移動至時間點t_1）：

$$\begin{aligned} EC_{t_1}^1 = S_{t_1}\big[&N_2\left(-d_1(H_2, t_2-t_1), d_1(k_2, t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right) \\ &- N_2\left(-d_1(L_2, t_2-t_1), d_1(k_2, t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right)\big] \\ &- k_2 e^{-r(t_3-t_1)}\big[N_2\left(-d_2(H_2, t_2-t_1), d_2(k_2, t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right) \\ &- N_2\left(-d_2(L_2, t_2-t_1), d_2(k_2, t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right)\big] \\ &- A_2 e^{-r(t_2-t_1)}\big[N_1\left(-d_2(H_2, t_2-t_1)\right) - N_1\left(-d_2(L_2, t_2-t_1)\right)\big] \end{aligned} \tag{4.58}$$

其中，

$$d_1(\cdot, t) = \frac{ln\left(S_{t_1}/\cdot\right)+(r+\sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot, t) = d_1(\cdot, t)-\sqrt{\sigma^2 t}$$

在風險中立設定下，將第二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^2 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_1}^1-K_1\right)\right] \tag{4.59}$$

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_1} = S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma\Delta W_1^Q\right]$。此處，$\Delta W_1 = W_{t_1}-W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0, \mathrm{t}_1-t_0)$。將布朗運動$\Delta W_1$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_1 = \Delta W_1^Q/\sqrt{t_1-t_0}$。

令第一層標的可展延買權在時間點t_1為履約（$EC_{t_1}^1-H_1=0$）時，股價價值為$\bar{H}_{1,3}$，約當值。

$$Z_1 = \frac{ln\left(S_{t_1}/S_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_1}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

令

$$b_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} \tag{4.60}$$

則當$\mathrm{S}_{t_1} > \bar{H}_{1,3}$等價於$Z_1 > -b_{3,1}$，則得知累積機率下限，複式可展延買權才可被執行。所以，式(4.59)可以被整理成

$CEC_{t_0}^2 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_1}^1-K_1\right)\right]$

$$
\begin{aligned}
= e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} \Big\{ \Big[& S_{t_1}\big[N_2\big(-d_1(H_2,t_2-t_1), d_1(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big) \\
& - N_2\big(-d_1(L_2,t_2-t_1), d_1(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big)\big] \\
& - k_2 e^{-r(t_3-t_1)}\big[N_2\big(-d_2(H_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big) \\
& - N_2\big(-d_2(L_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big)\big] \\
& - A_2 e^{-r(t_2-t_1)}\big[N_1\big(-d_2(H_2,t_2-t_1)\big) - N_1\big(-d_2(L_2,t_2-t_1)\big)\big]\Big] \\
& - K_1 \Big\} f(Z_1) dZ_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} S_{t_1}\big[N_2\big(-d_1(H_2,t_2-t_1), d_1(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big) \\
& \quad - N_2\big(-d_1(L_2,t_2-t_1), d_1(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big)\big] f(Z_1)\, dZ_1 \\
& - e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} k_2 e^{-r(t_3-t_1)}\big[N_2\big(-d_2(H_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big) \\
& \quad - N_2\big(-d_2(L_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big)\big] f(Z_1)\, dZ_1 \\
& - e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} A_2 e^{-r(t_2-t_1)}\big[N_1\big(-d_2(H_2,t_2-t_1)\big) - N_1\big(-d_2(L_2,t_2-t_1)\big)\big] f(Z_1) dZ_1 \\
& \quad - e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} K_1\, f(Z_1) dZ_1
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

其中，

$$
f(Z_1) = \frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty
$$

本研究將把式(4.61)分成四項求算：

<u>第二項</u>為

$$
\begin{aligned}
e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-b_{3,1}}^{\infty} k_2 e^{-r(t_3-t_1)} & \big[N_2\big(-d_2(H_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big) \\
& - N_2\big(-d_2(L_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\big)\big] f(Z_1)\, dZ_1
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_2} = S_{t_0} exp\big[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)+\sigma\Delta W_2^Q\big]$。此處，$\Delta W_2 = W_{t_2} - W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0, t_2-t_0)$。布朗運動$\Delta W_2$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_2 = \Delta W_2^Q / \sqrt{t_2-t_0}$。

其中，依照布朗運動的假設，在兩個不重疊的時段中增量是互相獨立的，相關係數為0

$$
\rho_{1,2} = \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}
\tag{4.63}
$$

此外，$\rho_{1,2*1}$為移動一個時間區間的$\rho_{1,2}$值，需轉換。

第一層可展延買權在時間點t_2時，延期之情況成立條件為$L_2 < C_{t_2}(S_{t_2}, k_2, t_3 - t_2) < H_2$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{2,3}$，下限為$\bar{L}_{2,3}$，皆為股價價值約當值。

$$Z_2 = \frac{ln(S_{t_2}/S_{t_0}) - (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} = -\left[\frac{ln(S_{t_0}/S_{t_2}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}\right]$$

$$-\left[\frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{2,3}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}\right] < Z_2 < -\left[\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}\right]$$

令

$$b_{3,2} = \frac{\ln(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} \tag{4.64}$$

令

$$l_{3,2} = \frac{\ln(S_{t_0}/\bar{L}_{2,3}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} \tag{4.65}$$

則當$\bar{H}_{2,3} > S_{t_2} > \bar{L}_{2,3}$等價於$-b_{3,2} > Z_2 > -l_{3,2}$，可知累積機率之上下限。此時，第一層可展延買權才會被延期。

由標的資產價格的動態過程為$S_{t_3} = S_{t_0}exp[(r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0) + \sigma\Delta W_3^Q]$；$\Delta W_3 = W_{t_3} - W_{t_0}$，$\Delta W_3 \sim N(0, t_3 - t_0)$可以得知布朗運動$\Delta W_3$經變數轉換為標準常態分佈$Z_3 = \Delta W_3^Q/\sqrt{t_3 - t_0}$。所以可得，

$$\rho_{1,3} = cov(Z_1, Z_3) = \sqrt{t_1 - t_0/t_3 - t_0} \tag{4.66}$$

令第一層可展延買權在時間點t_3時，為價平之情況（$S_{t_3} - k_2 = 0$），股價價值等同於k_2。

$$Z_3 = \frac{ln(S_{t_3}/S_{t_0}) - (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}} = -\left[\frac{ln(S_{t_0}/S_{t_3}) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln(S_{t_0}/k_2) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}\right]$$

令

$$h_{3,3} = \frac{ln(S_{t_0}/k_2) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}} \tag{4.67}$$

則當$S_{t_3} > k_2$等價於$Z_3 > -h_{3,3}$，得知累積機率下限。

將第二項式(4.62)中$d_2(H_2,t_2-t_1)$、$d_2(L_2,t_2-t_1)$和$d_2(k_2,t_3-t_1)$作下式計算：

$$
\begin{aligned}
d_2(H_2,t_2-t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{\overline{H}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{H}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{H}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{H}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \\
&= \frac{b_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2(L_2,t_2-t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{\overline{L}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{L}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{L}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\overline{L}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \\
&= \frac{l_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

其中，

$$\sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_2-t_0}}=\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}=\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}$$

同理，$d_2(k_2,t_3-t_1)$整理如下：

$$d_2(k_2,t_3-t_1) = \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{k_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$= \frac{h_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}$$

(4.70)

其中，

$$\sqrt{\frac{t_3-t_1}{t_3-t_0}} = \sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} = \sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}$$

相關係數需作轉換，依照推倒過程可知，

$$\rho_{1,2*1} = \sqrt{t_2-t_1/t_3-t_1}$$

(4.71)

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式[1]，整理n和$n-1$個變數常態積分，

$$N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\ \left[Q_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{h_{\{n\},s}} N_{n-1}\left\{\left(\left[\frac{h_{\{n\},i}-Q_{\{n\},s,i}Z_s}{\sqrt{1-\left(Q_{\{n\},s,i}\right)^2}}\right]_{n\times 1}\right)^{(-s,)};\left(\left[\frac{Q_{\{n\},i,j}-Q_{\{n\},s,i}Q_{\{n\},s,j}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{n\},s,i}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{n\},s,j}\right)^2}}\right]_{n\times n}\right)^{(-s,-s)}\right\}f(Z_s)dZ_s$$

(4.72)

其中，轉換式為

$$\frac{Q_{\{n\},i,j}-Q_{\{n\},s,i}Q_{\{n\},s,j}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{n\},s,i}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{n\},s,j}\right)^2}} = Q_{\{n-1\},i-1,j-1}$$

$$Q_{\{n\},i,j} = \rho_{i,j} = \sqrt{t_i-t_0/t_j-t_0}; 1 < i \le j \le n$$

[1] Curnow, R.N., Dunnett, C.W., 1962. The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals

此處，$\left[Q_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}$為相關係數矩陣，當中的$Q_{\{n\},i,j}$為$(i,j)$對稱矩陣，$\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$，當$i = j \to \rho_{i,j} = 1$。$\left(\left[Q_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right)^{(-u,-v)}$則為不包括第$u$行和第$v$列的$\left[Q_{\{n\},i,j}\right]_{(n-1)\times(n-1)}$。將$n = 3, s = 1$代入，可得相關係數$\rho_{2,3}$之轉換，轉換如下：

$$\frac{Q_{\{3\},2,3} - Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2}} = Q_{\{2\},1,2} = \rho_{1,2*1} = \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\{3\},2,3} &= Q_{\{2\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2} + Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3} \\
&= \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} + \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} \\
&= \frac{t_2-t_1}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}} + \frac{t_1-t_0}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3} = Q_{\{3\},2,3}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

最後，利用三維累積機率常態分配將第二項式(4.62)改寫

$$\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty} k_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(-d_2(H_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right)\right. \\
&\qquad \left. - N_2\left(-d_2(L_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \rho_{1,2*1}\right)\right] f(Z_1)\,dZ_1 \\
&= k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}\left[N_2\left(-d_2(H_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2*1}\\ \rho_{1,2*1} & 1\end{bmatrix}\right)\right. \\
&\qquad \left. - N_2\left(-d_2(L_2,t_2-t_1), d_2(k_2,t_3-t_1), \begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2*1}\\ \rho_{1,2*1} & 1\end{bmatrix}\right)\right] f(Z_1)\,dZ_1 \\
&= k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}\left[N_2\left(-\frac{b_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}, \frac{h_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}, \begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)\right. \\
&\qquad \left. - N_2\left(-\frac{l_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}, \frac{h_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}, \begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)\right] f(Z_1)\,dZ_1 \\
&= k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}b_{3,1}\\ -b_{3,2}\\ h_{3,3}\end{pmatrix}; \begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}b_{3,1}\\ -l_{3,2}\\ h_{3,3}\end{pmatrix}; \begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]\right\} \\
&= k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}b_{3,1}\\ -b_{3,2}\\ h_{3,3}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}b_{3,1}\\ -l_{3,2}\\ h_{3,3}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

第一項為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty} S_{t_1}\big[N_2\big(-d_1(H_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\big) - N_2\big(-d_1(L_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\big)\big]f(Z_1)\,dZ_1 \tag{4.75}$$

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0}exp\big[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma Z_1\sqrt{t_1-t_0}\big]$代換，可得

$$S_{t_0}\int_{-h_{3,1}}^{\infty}\big[N_2\big(-d_1(H_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\big) - N_2\big(-d_1(L_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\big)\big]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}dZ_1 \tag{4.76}$$

依據標的資產對數價格的動態過程，再設定一些符號以便本研究使用，

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma\sqrt{t_1-t_0} \\ u_2 &= \sigma\sqrt{t_2-t_0} \\ u_3 &= STD\big[ln\,S_{t_3}\big] = \sigma\sqrt{t_3-t_0} \end{aligned} \tag{4.77}$$

第二層選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1{}' = Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = Z_1-u_1$（$\mathrm{d}Z_1{}' = \mathrm{d}Z_1$）同時積分下限移動變更為$-b_{3,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -\big(b_{3,1}+u_1\big) = -c_{3,1}$。

由式(4.60)得知

$$c_{3,1} = \frac{ln\big(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\big)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} \tag{4.78}$$

將第一層選擇權中$d_1(H_2,t_2-t_1)$、$d_1(L_2,t_2-t_1)$和$d_1(k_2,t_3-t_1)$作下式計算：

$$\begin{aligned} d_1(H_2,t_2-t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{\bar{H}_{2,3}}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{H}_{2,3}}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{H}_{2,3}}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\ &= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{H}_{2,3}}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(b_{3,2} + u_2) + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} = \frac{c_{3,2} + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}}$$

(4.79)

其中，

$$c_{3,2} = \frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$d_1(L_2, t_2 - t_1) = \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{\bar{L}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{L}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + Z_1 \sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{L}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0) + Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{L}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0} + \left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$= \frac{(l_{3,2} + u_2) + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} = \frac{m_{3,2} + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}}$$

(4.80)

其中，

$$m_{3,2} = \frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{2,3}) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，$d_1(k_2, t_3 - t_1)$整理如下：

$$d_1(k_2, t_3 - t_1) = \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{k_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3 - t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3 - t_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + Z_1 \sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3 - t_0) + Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$
=\frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_2}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}+\left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}
$$

$$
=\frac{(h_{3,3}+s_3)+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}=\frac{g_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}
$$

(4.81)

其中，

$$
g_{3,3}=\frac{ln(S_{t_0}/k_2)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}
$$

所以，第一項積分式可表示如下：

$$
\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}S_{t_1}\left[N_2\left(-d_1(H_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\right)\right.\\
&\qquad\left.-N_2\left(-d_1(L_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\right)\right]f(Z_1)\,dZ_1\\
&=S_{t_0}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}\left[N_2\left(-d_1(H_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\right)\right.\\
&\qquad\left.-N_2\left(-d_1(L_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\rho_{1,2*1}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Z_1{}'^2/2}\,dZ_1\\
&=S_{t_0}\int_{-c_{3,1}}^{\infty}\left[N_2\left(-d_1(H_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\begin{bmatrix}1&\rho_{1,2*1}\\\rho_{1,2*1}&1\end{bmatrix}\right)\right.\\
&\qquad\left.-N_2\left(-d_1(L_2,t_2-t_1),d_1(k_2,t_3-t_1),\begin{bmatrix}1&\rho_{1,2*1}\\\rho_{1,2*1}&1\end{bmatrix}\right)\right]f(Z_1{}')\,dZ_1{}'\\
&=S_{t_0}\int_{-c_{3,1}}^{\infty}\left[N_2\left(-\frac{c_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}},\frac{g_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}},\begin{bmatrix}1&\rho_{2,3}\\\rho_{2,3}&1\end{bmatrix}\right)\right.\\
&\qquad\left.-N_2\left(-\frac{m_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}},\frac{g_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}},\begin{bmatrix}1&\rho_{2,3}\\\rho_{2,3}&1\end{bmatrix}\right)\right]f(Z_1{}')\,dZ_1{}'\\
&=S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}c_{3,1}\\-c_{3,2}\\g_{3,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1&\rho_{1,2}&\rho_{1,3}\\\rho_{2,1}&1&\rho_{2,3}\\\rho_{3,1}&\rho_{3,2}&1\end{bmatrix}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}c_{3,1}\\-m_{3,2}\\g_{3,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1&\rho_{1,2}&\rho_{1,3}\\\rho_{2,1}&1&\rho_{2,3}\\\rho_{3,1}&\rho_{3,2}&1\end{bmatrix}\right]\right\}\\
&=S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}c_{3,1}\\-c_{3,2}\\g_{3,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}c_{3,1}\\-m_{3,2}\\g_{3,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

(4.82)

<u>第三項</u>為

$$
e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}A_2e^{-r(t_2-t_1)}\left[N_1\left(-d_2(H_2,t_2-t_1)\right)-N_1\left(-d_2(L_2,t_2-t_1)\right)\right]f(Z_1)dZ_1
$$

(4.83)

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_2} = S_{t_0} exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)+\sigma\Delta W_2^Q\right]$。此處，$\Delta W_2 = W_{t_2} - W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0, t_2-t_0)$。布朗運動$\Delta W_2$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_2 = \Delta W_2^Q/\sqrt{t_2-t_0}$。其中，$\rho_{1,2} = \sqrt{t_1-t_0}/\sqrt{t_2-t_0}$。
由附錄一可知形成$d_2(H_2, t_2-t_1)$和$d_2(L_2, t_2-t_1)$為當時之約當值，第一層可展延買權在時間點t_2時，延期之情況成立條件為$L_2 < C_{t_2}\left(S_{t_2}, k_2, t_3-t_2\right) < H_2$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\overline{H}_{2,3}$，下限為$\overline{L}_{2,3}$，皆為股價價值約當值。則當$\overline{H}_{2,3} > S_{t_2} > \overline{L}_{2,3}$等價於$-b_{3,2} > Z_2 > -l_{3,2}$，可知累積機率之上下限，同時，第一層可展延買權才會被延期。將第三項式(4.83)中$d_2(H_2, t_2-t_1)$和$d_2(L_2, t_2-t_1)$作下式計算，同式(4.68)和式(4.69)，如下：

$$d_2(H_2, t_2-t_1) = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{H}_{2,3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} = \frac{b_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}$$

$$d_2(L_2, t_2-t_1) = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{L}_{2,3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} = \frac{l_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}$$

最後，利用二維累積機率常態分配將第三項式(4.83)改寫

$$\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty} A_2 e^{-r(t_2-t_1)}\left[N_1\left(-d_2(H_2,t_2-t_1)\right)-N_1\left(-d_2(L_2,t_2-t_1)\right)\right]f(Z_1)dZ_1\\
&= A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty}\left[N_1\left(-d_2(H_2,t_2-t_1)\right)-N_1\left(-d_2(L_2,t_2-t_1)\right)\right]\left(\frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1\\
&= A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\left[\int_{-b_{3,1}}^{\infty} N_1\left(-\frac{b_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}\right)f(Z_1)dZ_1\right.\\
&\qquad\left.-\int_{-b_{3,1}}^{\infty} N_1\left(-\frac{l_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}\right)f(Z_1)dZ_1\right]\\
&= A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(b_{3,1},-b_{3,2};\rho_{1,2}\right)-N_2\left(b_{3,1},-l_{3,2};\rho_{1,2}\right)\right]
\end{aligned}$$

(4.84)

第四項為

$$\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{3,1}}^{\infty} K_1 f(Z_1)dZ_1\\
&= K_1 e^{-r(t_1-t_0)} N_1\left(b_{3,1}\right)
\end{aligned}$$

(4.85)

整合式(4.74)、式(4.82)、式(4.84)和式(4.85)之結果，即為兩層複式序列可展延買權$CEC_{t_0}^2$的價值部分（情境二，延期權利）：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_1}^1 - K_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1} \\ -c_{3,2} \\ g_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1} \\ -m_{3,2} \\ g_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&\quad -k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1} \\ -b_{3,2} \\ h_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1} \\ -l_{3,2} \\ h_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&\quad -A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(b_{3,1}, -b_{3,2}; \rho_{1,2}\right) - N_2\left(b_{3,1}, -l_{3,2}; \rho_{1,2}\right)\right] - K_1 e^{-r(t_1-t_0)} N_1\left(b_{3,1}\right)
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

其中，

$$c_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$c_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ b_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$m_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,3}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ l_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$g_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ h_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$\bar{H}_{1,3}$　為$CEC_{t_1}^2 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。

$\bar{H}_{2,3}$　為$CEC_{t_2}^2 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。

$\bar{L}_{2,3}$　為$CEC_{t_2}^2 = L_2$時的股價價值，股價價值約當值。

$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率

$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

4.3.4 情境三，三層複式買權（$n' = 3$）計算方式，求算如下：

此案例第一層可展延買權之一般權利部分價值$EC_{t_2}^1$可視為第二層可展延買權期末的價值，為第一層可展延買權價值$EC_{t_2}^1$（一般權利）和k_1之間的差額，由式(4.31)可知：

$$CEC_{t_2}^1 = max\left(0, EC_{t_2}^1 - k_1\right) = max\left(0, C_{t_2}\left(S_{t_2}, K_2\right) - k_1\right)$$

可知求算$CEC_{t_1}^1$計算過程同於兩層複式買權，將大略提及重要計算結果：

將式(4.14)移動至t_2相當於一般權利部分價值$EC_{t_2}^1$。

$$EC_{t_2}^1 = S_{t_2} N_1\left(d_1(H_2, t_3 - t_2)\right) - K_2 e^{-r(t_3 - t_2)} N_1\left(d_2(H_2, t_3 - t_2)\right) \tag{4.87}$$

其中，

$$d_1(\cdot, t) = \frac{ln\left(S_{t_2}/\cdot\right) + (r + \sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot, t) = d_1(\cdot, t) - \sqrt{\sigma^2 t}$$

令標的可展延買權在時間點t_2為價平（$EC_{t_2}^1 = k_1$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,3}$。

$$h_{2,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} \tag{4.88}$$

則當$S_{t_2} > \bar{S}_{2,3}$等價於$Z > -h_{2,1*1}$，則得知累積機率下限且複式可展延買權才可被執行。而且，第一層可展延買權在時間點t_3時，履約之情況。令履約（$S_{t_3} = H_2$）成立時的股價價值H_2。

$$b_{2,2*1} = \frac{\ln\left(S_{t_1}/H_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} \tag{4.89}$$

則當$S_{t_3} > H_2$等價於$Z > -b_{2,2*1}$，可知累積機率之下限。

其中，

$$d_2(H_2, t_3 - t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/H_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_2)}} = \frac{b_{2,2*1} + \rho_{1,2*1} Z}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{4.90}$$

第二層選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{2,1*1} - \sigma\sqrt{t_2 - t_1} = -g_{2,1*1}$

$$g_{2,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} \tag{4.91}$$

將$d_1(H_2, t_3 - t_2)$進行整理，

$$d_1(H_2, t_3 - t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/H_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_2)}} = \frac{c_{2,2*1} + \rho_{1,2*1} Z'}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{4.92}$$

其中，

$$c_{2,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}}$$

(4.93)

所以，結果如下，

$$\begin{aligned} CEC_{t_1}^1 &= e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_2}^1 - k_1\right)\right] \\ &= S_{t_1}N_2\left(g_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - K_2e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) \\ &\quad - k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{2,1*1}\right) \end{aligned}$$

(4.94)

在風險中立設定下，將第一層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^2 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)\right]$$

(4.95)

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_1} = S_{t_0}exp\left[(r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + \sigma\Delta W_1^Q\right]$。此處，$\Delta W_1 = W_{t_1} - W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0, t_1 - t_0)$。將布朗運動$\Delta W_1$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_1 = \Delta W_1^Q/\sqrt{t_1 - t_0}$。

第二層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^1 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\overline{H}_{1,3}$，下限為$\overline{L}_{1,3}$，皆為股價價值約當值。

$$Z_1 = \frac{ln\left(S_{t_1}/S_{t_0}\right) - (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_1}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right]$$

$$-\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right] < Z_1 < -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right]$$

令

$$b_{3,1} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(4.96)

令

$$l_{3,1} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(4.97)

即是$L_1 < CEC_{t_1}^1 < H_1$的成立條件為$\overline{H}_{1,3} > S_{t_1} > \overline{L}_{1,3}$，且$\overline{H}_{1,3} > S_{t_1} > \overline{L}_{1,3}$等價於$-b_{3,1} > Z_1 > -l_{3,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第二層可展延買權才會被延期。

所以，式(4.95)可以被整理成

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)\right] \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}\Big[S_{t_1}N_2\left(g_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - K_2e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) \\
&\qquad - k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{2,1*1}\right) - A_1\Big]f(Z_1)dZ_1 \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}S_{t_1}N_2\left(g_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)f(Z_1)dZ_1 \\
&\quad -e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}K_2e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)f(Z_1)dZ_1 \\
&\quad -e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{2,1*1}\right)f(Z_1)dZ_1 - e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}A_1\,f(Z_1)dZ_1
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

其中，

$$
f(Z_1) = \frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty
$$

本研究將把式(4.98)分成四項求算：

<u>第二項</u>為

$$
e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}}K_2e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)f(Z_1)dZ_1
\tag{4.99}
$$

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_2} = S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0) + \sigma\Delta W_2^Q\right]$。此處，$\Delta W_2 = W_{t_2} - W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0, t_2 - t_0)$。布朗運動$\Delta W_2$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_2 = \Delta W_2^Q/\sqrt{t_2 - t_0}$。其中，依照布朗運動的假設，在兩個不重疊的時段中增量是互相獨立的，$\rho_{1,2} = \sqrt{t_1 - t_0}/\sqrt{t_2 - t_0}$。 此處，$\rho_{1,2*1}$為移動一個時間區間的$\rho_{1,2}$值，需轉換。

第一層可展延買權在時間點t_2時為價平（$EC_{t_2}^1 - k_1 = 0$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,3}$，約當值。

$$
Z_2 = \frac{ln\left(S_{t_2}/S_{t_0}\right) - (r-\sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_2}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}\right]
$$

$$
> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}\right]
$$

令

$$
h_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}
\tag{4.100}
$$

則當$S_{t_2} > \bar{S}_{2,3}$等價於$Z_2 > -h_{3,2}$，則得知累積機率下限，複式可展延買權才可被執行。

由標的資產價格的動態過程為$S_{t_3} = S_{t_0} exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)+\sigma\Delta W_3^Q\right]$；$\Delta W_3 = W_{t_3} - W_{t_0}$，$\Delta W_3 \sim N(0, t_3-t_0)$可以得知布朗運動$\Delta W_3$經變數轉換為標準常態分佈$Z_3 = \Delta W_3^Q/\sqrt{t_3-t_0}$。兩個不重疊的時段中增量是互相獨立，$\rho_{1,3} = \sqrt{t_1-t_0}/\sqrt{t_3-t_0}$。令第一層可展延買權在時間點$t_3$時，為履約之情況（$S_{t_3} > H_2$），股價價值等同於$H_2$。

$$Z_3 = \frac{ln\left(S_{t_3}/S_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\right]$$

令

$$b_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}} \tag{4.101}$$

則當$S_{t_3} > H_2$等價於$\mathrm{Z}_3 > -b_{3,3}$，得知累積機率下限。

將第二項式(4.99)中$h_{2,1*1}$和$b_{2,2*1}$作下式計算：

$$\begin{aligned}
h_{2,1*1} &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{\bar{S}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \\
&= \frac{h_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

其中，

$$\sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_2-t_0}} = \sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}} = \sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}$$

同理，

$$
\begin{aligned}
b_{2,2*1} &= \frac{\ln\left(\frac{S_{t_1}}{H_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}} \\
&= \frac{b_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}
\end{aligned}
$$

(4.103)

其中，

$$
\sqrt{\frac{t_3-t_1}{t_3-t_0}} = \sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} = \sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}
$$

相關係數需作轉換，依照推倒過程可知，

$$
\rho_{1,2*1} = \sqrt{t_2-t_1/t_3-t_1}
$$

(4.104)

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，將$n=3, s=1$代入，可得相關係數$\rho_{2,3}$。

$$
\frac{Q_{\{3\},2,3}-Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2}} = Q_{\{2\},1,2} = \rho_{1,2*1} = \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\{3\},2,3} &= Q_{\{2\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2}+Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3} \\
&= \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}}+\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} \\
&= \frac{t_2-t_1}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}}+\frac{t_1-t_0}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3} = Q_{\{3\},2,3}
\end{aligned}
$$

(4.105)

最後，利用三維累積機率常態分配將第二項式(4.99)改寫

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} K_2 e^{-r(t_3-t_1)} N_2(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}) f(Z_1) dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} N_2\left(h_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2*1} \\ \rho_{1,2*1} & 1 \end{bmatrix}\right) f(Z_1) dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} N_2\left[\frac{h_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}, \frac{b_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix}\right] f(Z_1) dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-\infty}^{-b_{3,1}} N_2\left[\frac{h_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}, \frac{b_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix}\right] f(Z_1) dZ_1$$

$$- K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-\infty}^{-l_{3,1}} N_2\left[\frac{h_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}, \frac{b_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix}\right] f(Z_1) dZ_1$$

$$= K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -b_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{bmatrix}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -l_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{bmatrix}\right]\right\}$$

$$= K_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -b_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -l_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times 3}\right]\right\}$$

(4.106)

第一項為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} S_{t_1} N_2(g_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}) f(Z_1) dZ_1$$

(4.107)

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma Z_1\sqrt{t_1-t_0}\right]$代換，可得

$$S_{t_0}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} N_2(g_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2} dZ_1$$

(4.108)

依據標的資產對數價格的動態過程，再設定一些符號以便本研究使用，

$$u_1 = \sigma\sqrt{t_1-t_0}$$
$$u_2 = \sigma\sqrt{t_2-t_0}$$
$$u_3 = \sigma\sqrt{t_3-t_0}$$

(4.109)

第二層選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1{}' = Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = Z_1-u_1$($\mathrm{d}Z_1{}' = \mathrm{d}Z_1$)。同時積分上下限移動變更為$-b_{3,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -(b_{3,1}+u_1) = -c_{3,1}$; $-l_{3,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -(l_{3,1}+u_1) = -m_{3,1}$。

則由式(4.96)和式(4.97)得知

$$c_{3,1} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (\mathrm{r} + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{4.110}$$

$$m_{3,1} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{1,3}\right) + (\mathrm{r} + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{4.111}$$

將式(4.107)中$g_{2,1*1}$和$c_{2,2*1}$作下式計算：

$$\begin{aligned} g_{2,1*1} &= \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0) + Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}} \\ &= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{\bar{S}_{2,3}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0} + \left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} \\ &= \frac{(h_{3,2} + u_2) + \rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} = \frac{g_{3,2} + \rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \end{aligned} \tag{4.112}$$

其中，

$$g_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$\begin{aligned} c_{2,2*1} &= \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_1}/H_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3 - t_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}} \\ &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3 - t_0) + Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{H_2}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}+\left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$= \frac{(b_{3,3}+u_3)+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} = \frac{c_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}$$

(4.113)

其中，

$$c_{3,3} = \frac{ln(S_{t_0}/H_2)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

所以，第一項積分式可表示如下：

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} S_{t_1}N_2\left(g_{2,1*1},c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)f(Z_1)dZ_1$$

$$= S_{t_0}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} N_2\left(g_{2,1*1},c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}dZ_1$$

$$= S_{t_0}\int_{-m_{3,1}}^{-c_{3,1}} N_2\left(g_{2,1*1},c_{2,2*1};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2*1}\\ \rho_{1,2*1} & 1\end{bmatrix}\right)f(Z_1{}')dZ_1{}'$$

$$= S_{t_0}\int_{-m_{3,1}}^{-c_{3,1}} N_2\left(\frac{g_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}},\frac{c_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)f(Z_1{}')dZ_1{}'$$

$$= S_{t_0}\left\{\int_{-\infty}^{-c_{3,1}} N_2\left(\frac{g_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}},\frac{c_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)f(Z_1{}')dZ_1{}' - \int_{-\infty}^{-m_{3,1}} N_2\left(\frac{g_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}},\frac{c_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}};\begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)f(Z_1{}')dZ_1{}'\right\}$$

$$= S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-c_{3,1}\\ g_{3,2}\\ c_{3,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-m_{3,1}\\ g_{3,2}\\ c_{3,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]\right\}$$

$$= S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-c_{3,1}\\ g_{3,2}\\ c_{3,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-m_{3,1}\\ g_{3,2}\\ c_{3,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right\}$$

(4.114)

<u>第三項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{2,1*1}\right)f(Z_1)dZ_1$$

(4.115)

由式(4.88)可知形成$h_{2,1*1}$為當時之約當值，第一層可展延買權在時間點t_2時，執行之情況成立條件為$EC_{t_2}^1 > k_1$。令$EC_{t_2}^1 = k_1$條件成立時的股價價值為$\bar{S}_{2,3}$，股價價值約當值。則當$EC_{t_2}^1 > k_1$成立時，$S_{t_2} > \bar{S}_{2,3}$等價於$Z_2 > -h_{3,2}$，可知累積機率之下限。

由式(4.100)可知

$$h_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

將第三項式(4.115)中$h_{2,1*1}$作下式計算，同式(4.102)，如下：

$$h_{2,1*1} = \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_1}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(\mathrm{t}_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_2 - t_1}} = \frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}$$

最後，利用二維累積機率常態分配將第三項式(4.115)改寫

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{2,1*1}\right) f(Z_1) dZ_1$$

$$= k_1 e^{-r(t_2-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} N_1\left(h_{2,1*1}\right) f(Z_1) dZ_1$$

$$= k_1 e^{-r(t_2-t_0)}\left[\int_{-\infty}^{-b_{3,1}} N_1\left(\frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}\right) f(Z_1) dZ_1 - \int_{-\infty}^{-l_{3,1}} N_1\left(\frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}\right) f(Z_1) dZ_1\right]$$

$$= k_1 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{3,1}, h_{3,2};\ \rho_{1,2}\right) - N_2\left(-l_{3,1}, h_{3,2};\ \rho_{1,2}\right)\right] \tag{4.116}$$

<u>第四項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{3,1}}^{-b_{3,1}} A_1 f(Z_1) dZ_1$$

$$= A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\left[\int_{-\infty}^{-b_{3,1}} f(Z_1)\, dZ_1 - \int_{-\infty}^{-l_{3,1}} f(Z_1)\, dZ_1\right]$$

$$= A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1\left(-b_{3,1}\right) - N_1\left(-l_{3,1}\right)\right] \tag{4.117}$$

整合式(4.106)、式(4.114)、式(4.116)和式(4.117)之結果，即為兩層序列複式可展延買權$CEC_{t_0}^2$的價值部分（情境三，一般權利）：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 \ &= \ e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -c_{3,1} \\ g_{3,2} \\ c_{3,3} \end{pmatrix}; \ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -m_{3,1} \\ g_{3,2} \\ c_{3,3} \end{pmatrix}; \ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-K_2e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -b_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix}; \ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -l_{3,1} \\ h_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix}; \ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{3,1}, h_{3,2}; \ \rho_{1,2}\right) - N_2\left(-l_{3,1}, h_{3,2}; \ \rho_{1,2}\right)\right] \\
&-A_1e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1\left(-b_{3,1}\right) - N_1\left(-l_{3,1}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

其中，

$$c_{3,1} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}; \ b_{3,1} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

$$m_{3,1} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}; \ l_{3,1} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

$$g_{3,2} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}; \ h_{3,2} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,3}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$c_{3,3} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}; \ b_{3,3} \ = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$\bar{H}_{1,3}$　為$CEC_{t_1}^2 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。

$\bar{L}_{1,3}$　為$CEC_{t_1}^2 = L_1$時的股價價值，股價價值約當值。

$\bar{S}_{2,3}$　為$CEC_{t_2}^2 = k_1$時的股價價值，股價價值約當值。

$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率

$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

4.3.5 情境四，四層複式買權（$n' = 4$）計算方式，求算如下：

此案例第一層可展延買權之延期權利部分價值$EC_{t_2}^1$可視為第二層可展延買權期末的價值，為第一層可展延買權價值$EC_{t_2}^1$（延期權利）和k_1之間的差額，由式(4.32)可知：

$$EC_{t_3}^1 = max\left[0, C_{t_3}\left(S_{t_3}, k_2, t_4 - t_3\right) - A_2\right]$$

$$CEC_{t_2}^1 = max\left(0, EC_{t_2}^1 - k_1\right)$$

將上節整理出來的式(4.26)延期權利部分移動至時間點t_2，相當於

$$\begin{aligned} EC_{t_2}^1 = {} & S_{t_2}\Big[N_2\big(-d_1(H_2, t_3 - t_2), d_1(k_2, t_4 - t_2), \rho_{1,2*2}\big) \\ & \quad - N_2\big(-d_1(L_2, t_3 - t_2), d_1(k_2, t_4 - t_2), \rho_{1,2*2}\big)\Big] \\ & -k_2 e^{-r(t_4 - t_2)}\Big[N_2\big(-d_2(H_2, t_3 - t_2), d_2(k_2, t_4 - t_2), \rho_{1,2*2}\big) \\ & \quad - N_2\big(-d_2(L_2, t_3 - t_2), d_2(k_2, t_4 - t_2), \rho_{1,2*2}\big)\Big] \\ & -A_2 e^{-r(t_3 - t_2)}\Big[N\big(-d_2(H_2, t_3 - t_2)\big) - N\big(-d_2(L_2, t_3 - t_2)\big)\Big] \end{aligned} \tag{4.119}$$

其中，

$$d_1(\cdot, t) = \frac{ln\left(S_{t_0}/\cdot\right) + (r + \sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot, t) = d_1(\cdot, t) - \sqrt{\sigma^2 t}$$

可知求算$CEC_{t_1}^1$計算過程如同三層複式買權，將大略提及重要計算結果：

$$CEC_{t_1}^1 = e^{-r(t_2 - t_1)} E^Q\left[max\left(0, EC_{t_2}^1 - k_1\right)\right]$$

令標的可展延買權在時間點t_2為價平（$EC_{t_2}^1 - k_1 = 0$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,4}$。

$$h_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} \tag{4.120}$$

則當$S_{t_2} > \bar{S}_{2,4}$等價於$Z > -h_{3,1*1}$，則得知累積機率下限，複式可展延買權才可被執行。令第一層可展延買權在時間點t_3時，延期之情況成立條件為$L_2 < C_{t_3}\left(S_{t_3}, k_2, t_4 - t_3\right) < H_2$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{3,4}$，下限為$\bar{L}_{3,4}$，皆為股價價值約當值。

$$b_{3,2*1} = \frac{\ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} \tag{4.121}$$

$$l_{3,2*1} = \frac{\ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} \tag{4.122}$$

則當$\bar{H}_{3,4} > S_{t_3} > \bar{L}_{3,4}$等價於$-b_{3,2*1} > Z > -l_{3,2*1}$，可知累積機率之上下限。令第一層可展延買權在時間點t_4時，為價平之情況（$S_{t_4} - k_2 = 0$），股價價值等同於k_2。

$$h_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} \tag{4.123}$$

則當$S_{t_4} > k_2$等價於$Z > -h_{3,3*1}$，得知累積機率下限。

其中，

$$d_2(H_2,t_3-t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{b_{3,2*1}+\rho_{1,2*1}Z}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(4.124)

$$d_2(L_2,t_3-t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_2)}} = \frac{l_{3,2*1}+\rho_{1,2*1}Z}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(4.125)

$$d_2(k_2,t_4-t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/k_2\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_4-t_2)}} = \frac{h_{3,3*1}+\rho_{1,3*1}Z}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}}$$

(4.126)

相關係數需作轉換，依照推倒過程可知，

$$\rho_{1,2*2} = \sqrt{t_3-t_2/t_4-t_2}$$

(4.127)

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式：

$$\rho_{2,3*1} = \sqrt{t_3-t_1/t_4-t_1}$$

(4.128)

第二層選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{3,1*1}-\sigma\sqrt{t_2-t_1} = -g_{3,1*1}$

$$g_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(\mathrm{t}_2-t_1)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_2-t_1}}$$

(4.129)

將$d_1(H_2,t_3-t_2)$、$d_1(L_2,t_3-t_2)$和$d_1(k_2,t_4-t_2)$進行整理，

$$d_1(H_2,t_3-t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_2)}} = \frac{c_{3,2*1}+\rho_{1,2*1}\mathrm{Z}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(4.130)

其中，

$$c_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$d_1(L_2,t_3-t_2) = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_2)}} = \frac{m_{3,2*1}+\rho_{1,2*1}\mathrm{Z}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(4.131)

其中，

$$m_{3,2*1} = \frac{ln(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$d_1(k_2, t_4-t_2) = \frac{ln(S_{t_2}/k_2) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_4-t_2)}} = \frac{g_{3,3*1}+\rho_{1,3*1}Z'}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}}$$

(4.132)

其中，

$$g_{3,3*1} = \frac{ln(S_{t_1}/k_2) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

整合結果，即為第二層複式可展延買權$CEC_{t_1}^1$的價值部分：

$$\begin{aligned}
CEC_{t_1}^1 &= e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, EC_{t_2}^1-k_1\right)\right] \\
&= S_{t_1}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -c_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -m_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-k_2e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-A_2e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{3,1*1}, -b_{3,2*1}; \rho_{1,2*1}\right) - N_2\left(h_{3,1*1}, -l_{3,2*1}; \rho_{1,2*1}\right)\right] \\
&-k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{3,1*1}\right)
\end{aligned}$$

(4.133)

在風險中立設定下，將第一層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_1}^2 = max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)$$

(4.134)

再將第二層複式可展延買權折現至t_0，即可求得$CEC_{t_0}^2$（延期權利）公式解。

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_1} = S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma\Delta W_1^Q\right]$。此處，$\Delta W_1 = W_{t_1}-W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0, \mathrm{t}_1-t_0)$。將布朗運動$\Delta W_1$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_1 = \Delta W_1^Q/\sqrt{t_1-t_0}$。

第二層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^1 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{1,4}$，下限為$\bar{L}_{1,4}$，皆為股價價值約當值。

$$Z_1 = \frac{ln(\mathrm{S}_{t_1}/\mathrm{S}_{t_0}) - (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = -\left[\frac{ln(\mathrm{S}_{t_0}/\mathrm{S}_{t_1}) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

$$-\left[\frac{ln(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{1,4}) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right] < Z_1 < -\left[\frac{ln(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{1,4}) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

令

$$b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(4.135)

令

$$l_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(4.136)

即是 $L_1 < CEC_{t_1}^1 < H_1$ 的成立條件為 $\bar{H}_{1,4} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,4}$，且 $\bar{H}_{1,4} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,4}$ 等價於 $-b_{4,1} > Z_1 > -l_{4,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第二層可展延買權才會被延期。所以，式(4.134)可以被整理成

$$\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)\right] \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} S_{t_1}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -c_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -m_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right]\right\} f(Z_1)dZ_1 \\
&- e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} k_2 e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right]\right\} f(Z_1)dZ_1 \\
&- e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} A_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{3,1*1}, -b_{3,2*1}; \rho_{1,2*1}\right)\right. \\
&\qquad \left. - N_2\left(h_{3,1*1}, -l_{3,2*1}; \rho_{1,2*1}\right)\right] f(Z_1)dZ_1 \\
&- e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{3,1*1}\right) f(Z_1)dZ_1 \\
&- e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} A_1 f(Z_1)dZ_1
\end{aligned}$$

(4.137)

其中，

$$f(Z_1) = \frac{e^{-{Z_1}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty$$

本研究將把式(4.137)分成五項求算：

<u>第二項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} k_2 e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times 3}\right]\right.$$
$$\left.-N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times 3}\right]\right\}f(Z_1)dZ_1$$

(4.138)

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_2}\ =\ S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)+\sigma\Delta W_2^Q\right]$。此處，$\Delta W_2=W_{t_2}-W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0,t_2-t_0)$。布朗運動$\Delta W_2$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_2\ =\ \Delta W_2^Q/\sqrt{t_2-t_0}$。其中，在兩個不重疊的時段中增量是互相獨立的，$\rho_{1,2}=\sqrt{t_1-t_0}/\sqrt{t_2-t_0}$。此處，$[\rho_{i,j*1}]_{3\times 3}$為移動一個時間區間的$\rho_{i,j}$值，需轉換。第一層可展延買權在時間點$t_2$時為價平（$EC_{t_2}^1-k_1=0$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,4}$，約當值。

$$Z_2\ =\ \frac{ln\left(S_{t_2}/S_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\ =-\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_2}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$
$$>-\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$

令

$$h_{4,2}\ =\ \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

(4.139)

則當$\mathrm{S}_{t_2}>\bar{S}_{2,4}$等價於$Z_2>-h_{4,2}$，則得知累積機率下限，複式可展延買權才可被執行。由標的資產價格的動態過程為$S_{t_3}\ =\ S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)+\sigma\Delta W_3^Q\right]$；$\Delta W_3=W_{t_3}-W_{t_0}$，$\Delta W_3 \sim N(0,t_3-t_0)$可以得知布朗運動$\Delta W_3$經變數轉換為標準常態分佈$Z_3\ =\ \Delta W_3^Q/\sqrt{t_3-t_0}$。兩個不重疊的時段中增量是互相獨立，$\rho_{1,3}\ =\ \sqrt{t_1-t_0}/\sqrt{t_3-t_0}$。令第一層可展延買權在時間點$t_3$時，為延期之情況成立條件為$L_2<C_{t_3}\left(S_{t_3},k_2,\mathrm{t}_4-\mathrm{t}_3\right)<H_2$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{3,4}$，下限為$\bar{L}_{3,4}$，皆為股價價值約當值。。

$$Z_3\ =\ \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_3}/\mathrm{S}_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\ =-\left[\frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\mathrm{S}_{t_3}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\right]$$

$$-\left[\frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\right]<\ Z_3\ <-\left[\frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}\right]$$

令

$$b_{4,3} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

(4.140)

令

$$l_{4,3} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

(4.141)

即是$L_2 < C_{t_3}\left(S_{t_3}, k_2, t_4 - t_3\right) < H_2$的成立條件為$\bar{H}_{3,4} > S_{t_3} > \bar{L}_{3,4}$，且$\bar{H}_{3,4} > S_{t_3} > \bar{L}_{3,4}$等價於$-b_{4,3} > Z_3 > -l_{4,3}$，可知累積機率之上下限。此時，第一層可展延買權才會被延期。由標的資產價格的動態過程為$S_{t_4} = S_{t_0}exp\left[(r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0) + \sigma\Delta W_4^Q\right]$；$\Delta W_4 = W_{t_4} - W_{t_0}$，$\Delta W_4 \sim N(0, t_4 - t_0)$可以得知布朗運動$\Delta W_3$經變數轉換為標準常態分佈$Z_4 = \Delta W_4^Q/\sqrt{t_4 - t_0}$。兩個不重疊的時段中增量是互相獨立，$\rho_{1,4} = \sqrt{t_1 - t_0}/\sqrt{t_4 - t_0}$。令第一層可展延買權在時間點$t_4$時，為執行之情況（$S_{t_4} > k_2$），股價價值等同於$k_2$

$$Z_4 = \frac{ln\left(S_{t_4}/S_{t_0}\right) - (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}\right]$$

令

$$h_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

(4.142)

則當$S_{t_4} > k_2$等價於$Z_4 > -h_{3,4}$，得知累積機率下限。

將第二項式(4.138)中$h_{3,1*1}$、$b_{3,2*1}$、$l_{3,2*1}$和$h_{3,3*1}$作下式計算：

由式(4.120)可知，

$$h_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0} + \left[Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$= \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}$$

(4.143)

其中，

$$\sqrt{\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1 - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}} = \sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}$$

由式(4.121)可知，

$$b_{3,2*1} = \frac{\ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0} + \left[Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$= \frac{b_{4,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(4.144)

由式(4.122)可知，

$$l_{3,2*1} = \frac{\ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0} + \left[Z_1\sigma\sqrt{t_1 - t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$= \frac{l_{4,3} + \rho_{1,3} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(4.145)

其中，

$$\sqrt{\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_0}} = \sqrt{1 - \frac{t_1 - t_0}{t_3 - t_0}} = \sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}$$

由式(4.123)可知，

$$h_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}}{\sqrt{\sigma^2(t_4 - t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0) + Z_1\sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}}{\sqrt{\sigma^2(t_4 - t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_4 - t_0} + \left[Z_1\sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}\right]/\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_4 - t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

$$= \frac{h_{4,4} + \rho_{1,4} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}}$$

(4.146)

其中，

$$\sqrt{\frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_0}} = \sqrt{1 - \frac{t_1 - t_0}{t_4 - t_0}} = \sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}$進行整理，過程如下：

$$\frac{Q_{\{n\},i,j} - Q_{\{n\},s,i} Q_{\{n\},s,j}}{\sqrt{1 - \left(Q_{\{n\},s,i}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{n\},s,j}\right)^2}} = Q_{\{n-1\},i-1,j-1}$$

$$Q_{\{n\},i,j} = \rho_{i,j} = \frac{\sqrt{t_i - t_0}}{\sqrt{t_j - t_0}}; 1 < i \le j \le n$$

將$n = 4, s = 1$代入，

$$Q_{\{3\},1,2} = \frac{Q_{\{4\},2,3} - Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,3}}{\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}} = \rho_{1,2*1}$$

所以，

$$
\begin{aligned}
Q_{\{4\},2,3} &= Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}+Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} \\
&= \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}}+\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}} \\
&= \frac{t_2-t_1}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}}+\frac{t_1-t_0}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_3-t_0}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3} = Q_{\{4\},2,3}
\end{aligned}
\tag{4.147}
$$

下一個，

$$
Q_{\{3\},1,3}=\frac{Q_{\{4\},2,4}-Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}}=\rho_{1,3*1}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\{4\},2,4} &= Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}+Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} \\
&= \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_4-t_1}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_4-t_0}}+\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_4-t_0}} \\
&= \frac{t_2-t_1}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_4-t_0}}+\frac{t_1-t_0}{\sqrt{t_2-t_0}\sqrt{t_4-t_0}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4} = Q_{\{4\},2,4}
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

下一個，

$$
Q_{\{3\},2,3}=\frac{Q_{\{4\},3,4}-Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4}}{\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}}=\rho_{2,3*1}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\{4\},3,4} &= Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}+Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} \\
&= \sqrt{\frac{t_3-t_1}{t_4-t_1}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}}\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_4-t_0}}+\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_3-t_0}}\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_4-t_0}} \\
&= \frac{t_3-t_1}{\sqrt{t_3-t_0}\sqrt{t_4-t_0}}+\frac{t_1-t_0}{\sqrt{t_3-t_0}\sqrt{t_4-t_0}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sqrt{t_3 - t_0}}{\sqrt{t_4 - t_0}} = \rho_{3,4} = Q_{\{4\},3,4}$$

(4.149)

最後，利用四維累積機率常態分配將第二項式(4.138)改寫

$$e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} k_2 e^{-r(t_4-t_1)} \left\{ N_3 \left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3} \right] - N_3 \left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3} \right] \right\} f(Z_1) dZ_1$$

$$= k_2 e^{-r(t_4-t_0)} \int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} \left\{ N_3 \left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2*1} & \rho_{1,3*1} \\ \rho_{2,1*1} & 1 & \rho_{2,3*1} \\ \rho_{3,1*1} & \rho_{3,2*1} & 1 \end{bmatrix} \right] \right.$$

$$\left. - N_3 \left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2*1} & \rho_{1,3*1} \\ \rho_{2,1*1} & 1 & \rho_{2,3*1} \\ \rho_{3,1*1} & \rho_{3,2*1} & 1 \end{bmatrix} \right] \right\} f(Z_1) dZ_1$$

$$= k_2 e^{-r(t_4-t_0)} \int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} \left\{ N_3 \left[\begin{pmatrix} \dfrac{h_{4,2} + \rho_{1,2} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} \\ -\dfrac{b_{4,3} + \rho_{1,3} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \\ \dfrac{h_{4,4} + \rho_{1,4} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] \right.$$

$$\left. - N_3 \left[\begin{pmatrix} \dfrac{h_{4,2} + \rho_{1,2} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} \\ -\dfrac{l_{4,3} + \rho_{1,3} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \\ \dfrac{h_{4,4} + \rho_{1,4} Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] \right\} f(Z_1) d$$

$$= k_2 e^{-r(t_4-t_0)} \left\{ N_4 \left[\begin{pmatrix} -b_{4,1} \\ h_{4,2} \\ -b_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right] - N_4 \left[\begin{pmatrix} -b_{4,1} \\ h_{4,2} \\ -l_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right] \right.$$

$$\left. - N_4 \left[\begin{pmatrix} -l_{4,1} \\ h_{4,2} \\ -b_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right] + N_4 \left[\begin{pmatrix} -l_{4,1} \\ h_{4,2} \\ -l_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right] \right\}$$

$$= k_2 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right.$$
$$\left. - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right\}$$

(4.150)

<u>第一項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} S_{t_1}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}g_{3,1*1}\\ -c_{3,2*1}\\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}g_{3,1*1}\\ -m_{3,2*1}\\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\} f(Z_1)dZ_1$$

(4.151)

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma Z_1\sqrt{t_1-t_0}\right]$代換，可得

$$S_{t_0}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}g_{3,1*1}\\ -c_{3,2*1}\\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right.$$
$$\left. - N_3\left[\begin{pmatrix}g_{3,1*1}\\ -m_{3,2*1}\\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}dZ_1$$

(4.152)

依據標的資產對數價格的動態過程，再設定一些符號以便本研究使用，

$$u_1 = \sigma\sqrt{t_1-t_0};\ u_2 = \sigma\sqrt{t_2-t_0}$$
$$u_3 = \sigma\sqrt{t_3-t_0};\ u_4 = \sigma\sqrt{t_4-t_0}$$

(4.153)

第二層選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1{}' = Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = Z_1-u_1$($\mathrm{d}Z_1{}' = \mathrm{d}Z_1$)。同時積分上下限移動變更為$-b_{4,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -(b_{4,1}+u_1) = -c_{4,1}$; $-l_{4,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -(l_{4,1}+u_1) = -m_{4,1}$。

則由式(4.135)和式(4.136)得知

$$c_{4,1} = \frac{ln(\mathrm{S}_{t_0}/\overline{H}_{1,4})+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(4.154)

$$m_{4,1} = \frac{ln(\mathrm{S}_{t_0}/\overline{L}_{1,4})+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(4.155)

將式(4.151)中$g_{3,1*1}$、$c_{3,2*1}$、$m_{3,2*1}$和$g_{3,3*1}$作下式轉換：

$$
\begin{aligned}
g_{3,1*1} &= \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(\mathrm{t}_2-t_1)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_2-t_1}} \\
&= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)+Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \\
&= \frac{(h_{4,2}+u_2)+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} = \frac{g_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}
\end{aligned}
\tag{4.156}
$$

其中，

$$
g_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
c_{3,2*1} &= \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} \\
&= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)+Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}+\left[Z_1{}'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}} \\
&= \frac{(b_{4,3}+u_3)+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} = \frac{c_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

其中，

$$
c_{4,3} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right)+(\mathrm{r}+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}
$$

同理，

$$m_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0) + Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0} + \left[Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_3-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$= \frac{(l_{4,3}+u_3) + \rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} = \frac{m_{4,3} + \rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \tag{4.158}$$

其中，

$$m_{4,3} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (\mathrm{r}+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

同理，

$$g_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0) + Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_4-t_1)}}$$

$$= \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0) + Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_4-t_1)}}$$

$$= \frac{\left[ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_4-t_0} + \left[Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_4-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_4-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$$= \frac{(h_{4,4}+u_4) + \rho_{1,4}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}} = \frac{g_{4,4} + \rho_{1,4}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}} \tag{4.159}$$

其中，

$$g_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

所以，第一項積分式可表示如下：

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} S_{t_1}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -c_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -m_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\}f(Z_1)dZ_1$$

$$= S_{t_0}\int_{-m_{4,1}}^{-c_{4,1}}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -c_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ -m_{3,2*1} \\ g_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\}f(Z_1')dZ_1'$$

$$= S_{t_0}\int_{-m_{4,1}}^{-c_{4,1}}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} \\ -\dfrac{c_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \\ \dfrac{g_{4,4}+\rho_{1,4}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}}\end{pmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1\end{bmatrix}\right]\right.$$

$$\left.-N_3\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} \\ -\dfrac{m_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \\ \dfrac{g_{4,4}+\rho_{1,4}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}}\end{pmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1\end{bmatrix}\right]\right\}f(Z_1')dZ_1'$$

$$= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} -c_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -c_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1\end{bmatrix}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix} -c_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -m_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1\end{bmatrix}\right]\right.$$

$$\left.-N_4\left[\begin{pmatrix} -m_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -c_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1\end{bmatrix}\right]+N_4\left[\begin{pmatrix} -m_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -m_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1\end{bmatrix}\right]\right\}$$

$$= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} -c_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -c_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix} -c_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -m_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix} -m_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -c_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right.$$
$$\left.+N_4\left[\begin{pmatrix} -m_{4,1} \\ g_{4,2} \\ -m_{4,3} \\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right\} \tag{4.160}$$

第三項為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} A_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{3,1*1},-b_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right.$$
$$\left.-N_2\left(h_{3,1*1},-l_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right] f(Z_1)dZ_1 \tag{4.161}$$

推導過程同於式(4.143)、式(4.144)和式(4.145)，

$$h_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(\mathrm{t}_2-t_1)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_2-t_1}} = \frac{h_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

$$b_{3,2*1} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right)+(\mathrm{r}-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{b_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3}}^2}}$$

$$l_{3,2*1} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right)+(\mathrm{r}-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{l_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3}}^2}}$$

相關係數轉換為

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}+Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

所以，第三項積分式整理可成

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} A_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{3,1*1},-b_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right.$$
$$\left.-N_2\left(h_{3,1*1},-l_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right] f(Z_1)dZ_1$$
$$= A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}}\left[N_2\left(h_{3,1*1},-b_{3,2*1};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2*1}\\ \rho_{1,2*1} & 1\end{bmatrix}\right)\right.$$
$$\left.-N_2\left(h_{3,1*1},-l_{3,2*1};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2*1}\\ \rho_{1,2*1} & 1\end{bmatrix}\right)\right] f(Z_1)dZ_1$$
$$= A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}}\left[N_2\left(\frac{h_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}},-\frac{b_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3}}^2}};\begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)\right.$$
$$\left.-N_2\left(\frac{h_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}},-\frac{l_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3}}^2}};\begin{bmatrix}1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{2,3} & 1\end{bmatrix}\right)\right] f(Z_1)dZ_1$$
$$= A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]\right.$$
$$\left.-N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]+N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\begin{bmatrix}1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3}\\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3}\\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1\end{bmatrix}\right]\right\}$$

$$= A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right.$$

$$\left.-N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]+N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right\}$$

(4.162)

<u>第四項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} K_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{3,1*1}\right) f(Z_1)dZ_1$$

(4.163)

代入式(4.143)之結果

$$h_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(\mathrm{t}_2-t_1)}{\sigma\sqrt{\mathrm{t}_2-t_1}} = \frac{h_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

第四項最後可以整理成

$$\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} K_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{3,1*1}\right) f(Z_1)dZ_1\\
&= K_1 e^{-r(t_2-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} N_1\left(h_{3,1*1}\right) f(Z_1)dZ_1\\
&= K_1 e^{-r(t_2-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} N_1\left(\frac{h_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}\right) f(Z_1)dZ_1\\
&= K_1 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{4,1},h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right)-N_2\left(-l_{4,1},h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right)\right]
\end{aligned}$$

(4.164)

<u>第五項</u>為

$$\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} A_1\, f(Z_1)dZ_1\\
&= A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{4,1}}^{-b_{4,1}} f(Z_1)\, dZ_1\\
&= A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\left[\mathrm{N}_1\left(-b_{4,1}\right)-\mathrm{N}_1\left(-l_{4,1}\right)\right]
\end{aligned}$$

(4.165)

整合式(4.150)、式(4.160)、式(4.162)、式(4.164)和式(4.165)即可得兩層序列複式可展延買權$CEC_{t_0}^2$的價值部分（情境四，延期權利）：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^2 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^1 - A_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1}\\ g_{4,2}\\ -c_{4,3}\\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1}\\ g_{4,2}\\ -m_{4,3}\\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1}\\ g_{4,2}\\ -c_{4,3}\\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right. \\
&\qquad \left. + N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1}\\ g_{4,2}\\ -m_{4,3}\\ g_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\} \\
&- k_2 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\\ h_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\} \\
&- A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -b_{4,3}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] + N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ -l_{4,3}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&- k_1 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{4,1}, h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right) - N_2\left(-l_{4,1}, h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right)\right] \\
&- A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\left[\mathrm{N}_1\left(-b_{4,1}\right) - \mathrm{N}_1\left(-l_{4,1}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.166}
$$

其中，

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}};\ b_{4,1} = \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

$$m_{4,1} = \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{1,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}};\ l_{4,1} = \frac{ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{1,4}\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

$$g_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}};\ h_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$c_{4,3} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (\mathrm{r} + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}};\ b_{4,3} = \frac{\ln\left(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (\mathrm{r} - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$m_{4,3} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}};\ l_{4,3} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$g_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}};\ h_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_2\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

$\bar{H}_{1,4}$ 為$CEC_{t_1}^2 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{1,4}$ 為$CEC_{t_1}^2 = L_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{2,4}$ 為$CEC_{t_2}^2 = k_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{3,4}$ 為$CEC_{t_3}^2 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{3,4}$ 為$CEC_{t_3}^2 = L_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$ 為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$ 為兩變數間之相關係數

五、三層序列複式可展延選擇權

5.1　三層序列複式可展延選擇權概要

在建構想法上，將二層可展延選擇權視為第三層可展延選擇權的標的選擇權，持有第三層可展延選擇權除了原本的買權外，選擇延期，還需再支付額外溢酬A_1才能延期履約日至時間點t_2，最後再支付履約價格k_1才能再擁有下一層的可展延買權。

第三層可能發生兩種情況，情況一為到第一個到期日即執行或是情況二為選擇延期至第二個到期日，故二層可展延選擇權的起始時間點需分別移動至t_1和t_2，$CEC_{t_1}^2$和$CEC_{t_2}^2$，以模擬兩種情況，其中，t_1和t_2皆是第三層可展延選擇權的到期日。

以下為三層複式可展延選擇權之情況圖：

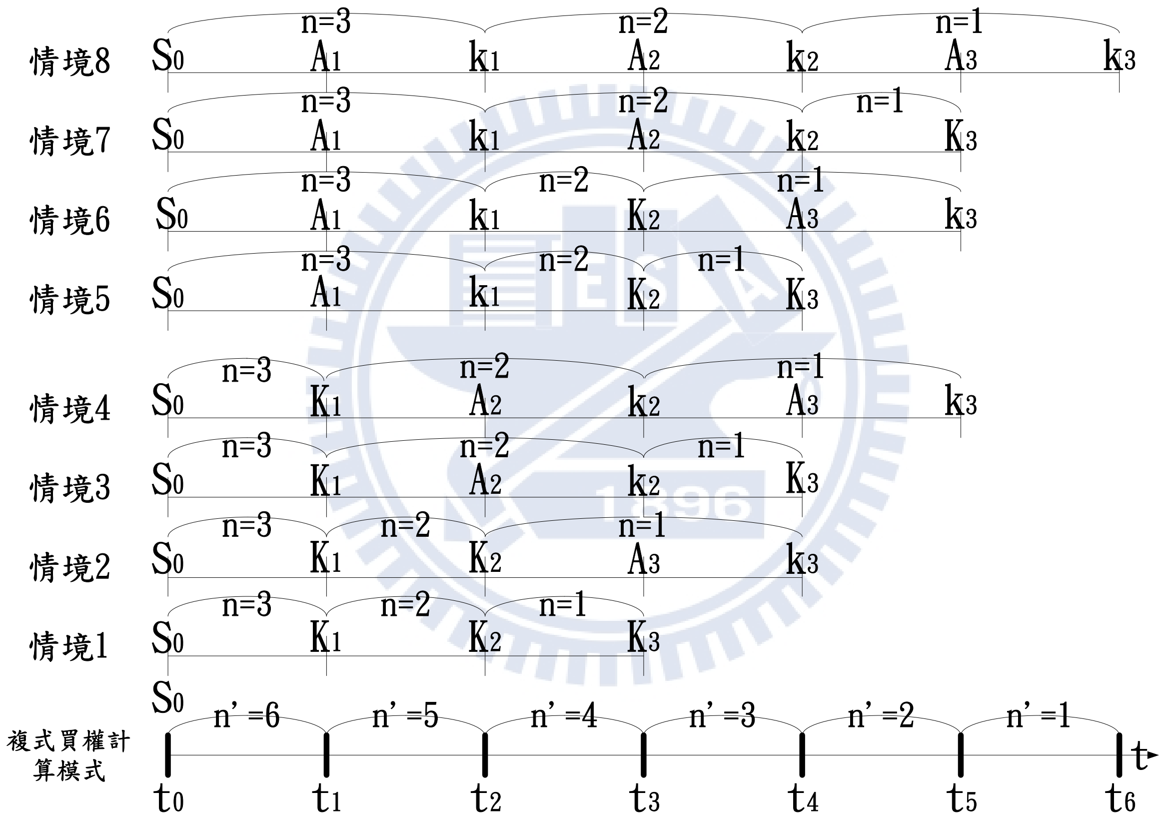

圖 5-1　三層序列複式可展延選擇權

資料來源：本研究整理

情況一，在第一個到期日t_1，唯有標的二層可展延買權的價值大於H_1，複式可展延買權才有價值，持有人履約取得標的二層可展延買權。也就是

$$CEC_{t_1}^2 > H_1$$

情況二，在第二個到期日t_2，唯有標的二層可展延買權的價值大於k_1，複式可展延買權才有價值，持有人履約取得標的二層可展延買權。也就是

$$CEC_{t_2}^2 > k_1$$

此處，n'為複式買權之層數。

5.2　三層序列複式可展延選擇權可能之情境

先考慮情況一，將第四章式(4.167)二層可展延買權移至時間點t_1，為計算清楚方便，將分為四個情境計算，分別為第二層選擇延期或不延期和第一層選擇延期或不延期所產生之案例：

5.2.1　<u>第一情境</u>為（第二層選擇不延期且第一層也選擇不延期）

三層複式可展延買權於時間點t_1的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_1}^2$部分價值和K_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}N_2\left(c_{2,1*1}, c_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - K_3e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(b_{2,1*1}, b_{2,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - K_2e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(b_{2,1*1}\right) \tag{5.1}$$

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right] \tag{5.2}$$

令標的二層可展延買權在時間點t_1為履約（$CEC_{t_1}^2 > H_1$）時，股價價值為$\bar{H}_{1,3}$。

$$b_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} \tag{5.3}$$

則當$S_{t_1} > \bar{H}_{1,3}$等價於$Z_1 > -b_{3,1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。將式(5.1)中$b_{2,1*1}$和$b_{2,2*1}$作下式轉換：

$$b_{2,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{b_{3,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}} \tag{5.4}$$

其中，

$$b_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$b_{2,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{b_{3,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.5}$$

其中，

$$b_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

相關係數需作轉換，依照推倒過程可知，

$$\rho_{1,2*1} = \sqrt{t_2 - t_1/t_3 - t_1}$$

(5.6)

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，將$n = 3, s = 1$代入，可得相關係數$\rho_{2,3}$。

$$Q_{\{3\},2,3} = Q_{\{2\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2} + Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_3 - t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.7)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{3,1} - \sigma\sqrt{t_1 - t_0} = -c_{3,1}$

$$c_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(5.8)

將式(5.1)中$c_{2,1*1}$和$c_{2,2*1}$作下式轉換：

$$c_{2,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{H}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{c_{3,2} + \rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}}$$

(5.9)

其中，

$$c_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,3}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$c_{2,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{c_{3,3} + \rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(5.10)

其中，

$$c_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1} \\ c_{3,2} \\ c_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - K_3 e^{-r(t_3-t_0)}N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1} \\ b_{3,2} \\ b_{3,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] \\
&\quad - K_2 e^{-r(t_2-t_0)}N_2\left(b_{3,1}, b_{3,2}; \rho_{1,2}\right) - K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N_1\left(b_{3,1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

其中，

$$
c_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,3}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{3,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}
$$

$$
c_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,3}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ b_{3,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,3}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}
$$

$$
c_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ b_{3,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}
$$

$\overline{H}_{1,3}$　為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\overline{H}_{2,3}$　為$CEC_{t_2}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

5.2.2 第二情境為（第二層選擇不延期但第一層選擇延期）

三層複式可展延買權於時間點t_1的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_1}^2$部分價值和K_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}&\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1*1} \\ -c_{3,2*1} \\ g_{3,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1*1} \\ -m_{3,2*1} \\ g_{3,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right]\right\} \\
&-k_3 e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1*1} \\ -b_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1*1} \\ -l_{3,2*1} \\ h_{3,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right]\right\} \\
&-A_3 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(b_{3,1*1}, -b_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - N_2\left(b_{3,1*1}, -l_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right] \\
&-K_2 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(b_{3,1*1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

$$
CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right] \tag{5.13}
$$

令標的二層可展延買權在時間點t_1為履約（$CEC_{t_1}^2 > H_1$）時，股價價值為$\overline{H}_{1,4}$。

$$
b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{5.14}
$$

則當$S_{t_1} > \overline{H}_{1,4}$等價於$Z_1 > -b_{4,1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。將式(5.12)中$b_{3,1*1}$、$b_{3,2*1}$、$l_{3,2*1}$和$h_{3,3*1}$作下式轉換：

$$
b_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{H}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{b_{4,2} + \rho_{1,2} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}} \tag{5.15}
$$

其中，

$$
b_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}
$$

同理，

$$
b_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{b_{4,3} + \rho_{1,3} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.16}
$$

其中，

$$
b_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}
$$

同理，

$$l_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{l_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}}$$

(5.17)

其中，

$$l_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

同理，

$$h_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}} = \frac{h_{4,4}+\rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}}$$

(5.18)

其中，

$$h_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}$進行整理，過程如下：將$n=4, s=1$代入，

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.19)

$$Q_{\{4\},2,4} = Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.20)

$$Q_{\{4\},3,4} = Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.21)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{4,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -c_{4,1}$

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.22)

將式(5.12)中$c_{3,1*1}$、$c_{3,2*1}$、$m_{3,2*1}$和$g_{3,3*1}$作下式轉換：

$$c_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{c_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.23}$$

其中，

$$c_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$c_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{c_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.24}$$

其中，

$$c_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

同理，

$$m_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}} = \frac{m_{4,3}+\rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.25}$$

其中，

$$m_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

同理，

$$g_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}} = \frac{g_{4,4}+\rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.26}$$

其中，

$$g_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

整合最後結果，

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ c_{4,2} \\ -c_{4,3} \\ g_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ c_{4,2} \\ -m_{4,3} \\ g_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\} \\
&\quad - k_3 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} b_{4,1} \\ b_{4,2} \\ -b_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} b_{4,1} \\ b_{4,2} \\ -l_{4,3} \\ h_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\} \\
&\quad - A_3 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} b_{4,1} \\ b_{4,2} \\ -b_{4,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} b_{4,1} \\ b_{4,2} \\ -l_{4,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&\quad - K_2 e^{-r(t_2-t_0)}N_2\left(b_{4,1}, b_{4,2};\ \rho_{1,2}\right) - K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N_1\left(b_{4,1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

其中，

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$c_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ b_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$c_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ b_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$m_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ l_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$g_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ h_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$\bar{H}_{1,4}$　為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{2,4}$　為$CEC_{t_2}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{3,4}$　為$CEC_{t_3}^3 = H_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{3,4}$　為$CEC_{t_3}^3 = L_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

5.2.3　第三情境為（第二層選擇延期但第一層選擇不延期）

三層複式可展延買權於時間點t_1的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_1}^2$部分價值和K_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}&\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-c_{3,1*1}\\ g_{3,2*1}\\ c_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-m_{3,1*1}\\ g_{3,2*1}\\ c_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\}\\
&-K_3e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{3,1*1}\\ h_{3,2*1}\\ b_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{3,1*1}\\ h_{3,2*1}\\ b_{3,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right\}\\
&-k_2e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(-b_{3,1*1},h_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)-N_2\left(-l_{3,1*1},h_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right]\\
&-A_2e^{-r(t_2-t_1)}\left[N_1\left(-b_{3,1*1}\right)-N_1\left(-l_{3,1*1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(5.28)

$$CEC_{t_0}^3 \ = \ e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0,CEC_{t_1}^2-K_1\right)\right]$$

(5.29)

令標的二層可展延買權在時間點t_1為履約（$CEC_{t_1}^2=H_1$）時，股價價值為$\bar{H}_{1,4}$。

$$b_{4,1} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.30)

則當$S_{t_1}>\bar{H}_{1,4}$等價於$Z_1>-b_{4,1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。將式(5.28)中$b_{3,1*1}$、$l_{3,1*1}$、$h_{3,2*1}$和$b_{3,3*1}$作下式轉換：

$$b_{3,1*1} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{b_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

(5.31)

其中，

$$b_{4,2} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$l_{3,1*1} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{l_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

(5.32)

其中，

$$l_{4,2} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$h_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(5.33)

其中，

$$h_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$b_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{b_{4,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}}$$

(5.34)

其中，

$$b_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}$進行整理，過程如下：將$n = 4, s = 1$代入，

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_3 - t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.35)

$$Q_{\{4\},2,4} = Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_4 - t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.36)

$$Q_{\{4\},3,4} = Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3 - t_0}}{\sqrt{t_4 - t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.37)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{4,1} - \sigma\sqrt{t_1 - t_0} = -c_{4,1}$

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(5.38)

將式(5.28)中$c_{3,1*1}$、$m_{3,1*1}$、$g_{3,2*1}$和$c_{3,3*1}$作下式轉換：

$$c_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{c_{4,2} + \rho_{1,2} Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.39}$$

其中，

$$c_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$m_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{m_{4,2} + \rho_{1,2} Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.40}$$

其中，

$$m_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$g_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{g_{4,3} + \rho_{1,3} Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.41}$$

其中，

$$g_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$c_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{c_{4,4} + \rho_{1,4} Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.42}$$

其中，

$$c_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -c_{4,2} \\ g_{4,3} \\ c_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -m_{4,2} \\ g_{4,3} \\ c_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right]\right\} \\
&- K_3 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -b_{4,2} \\ h_{4,3} \\ b_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -l_{4,2} \\ h_{4,3} \\ b_{4,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right]\right\} \\
&- k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -b_{4,2} \\ h_{4,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -l_{4,2} \\ h_{4,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times 3}\right]\right\} \\
&- A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(c_{4,1}, -b_{4,2}; \rho_{1,2}\right) - N_2\left(c_{4,1}, -l_{4,2}; \rho_{1,2}\right)\right] - K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N_1\left(c_{4,1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

其中，

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$c_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ b_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$m_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ l_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$g_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ h_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$c_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ b_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$\bar{H}_{1,4}$　為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{2,4}$　為$CEC_{t_2}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{2,4}$　為$CEC_{t_2}^3 = L_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{3,4}$　為$CEC_{t_3}^3 = k_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

5.2.4 第四情境為（第二層選擇延期且第一層也選擇延期）

三層複式可展延買權於時間點t_1的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_1}^2$部分價值和K_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}\Bigg\{ & N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1*1}\\ g_{4,2*1}\\ -c_{4,3*1}\\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1*1}\\ g_{4,2*1}\\ -m_{4,3*1}\\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] \\
& - N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1*1}\\ g_{4,2*1}\\ -c_{4,3*1}\\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1*1}\\ g_{4,2*1}\\ -m_{4,3*1}\\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\Bigg\} \\
- k_3 e^{-r(t_5-t_1)}\Bigg\{ & N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -b_{4,3*1}\\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -l_{4,3*1}\\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] \\
& - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -b_{4,3*1}\\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -l_{4,3*1}\\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\Bigg\} \\
- A_3 e^{-r(t_4-t_1)}\Bigg\{ & N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -b_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -l_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] \\
& - N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -b_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] + N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*1}\\ h_{4,2*1}\\ -l_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\Bigg\} \\
& - k_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2(-b_{4,1*1}, h_{4,2*1};\ \rho_{1,2*1}) - N_2(-l_{4,1*1}, h_{4,2*1};\ \rho_{1,2*1})\right] \\
& - A_2 e^{-r(t_2-t_1)}\left[N_1(-b_{4,1*1}) - N_1(-l_{4,1*1})\right]
\end{aligned}
$$

(5.44)

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right]$$

(5.45)

令標的二層可展延買權在時間點t_1為履約（$CEC_{t_1}^2 > H_1$）時，股價價值為$\overline{H}_{1,5}$。

$$b_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(5.46)

則當$S_{t_1} > \overline{H}_{1,5}$等價於$Z_1 > -b_{5,1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。

將式(5.44)中$b_{4,1*1}$、$l_{4,1*1}$、$h_{4,2*1}$、$b_{4,3*1}$、$l_{4,3*1}$和$h_{4,4*1}$作下式轉換：

$$b_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{b_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.47}$$

其中，

$$b_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$l_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{l_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.48}$$

其中，

$$l_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$h_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{h_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.49}$$

其中，

$$h_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$b_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{b_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.50}$$

其中，

$$b_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$l_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}} = \frac{l_{5,4}+\rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,4}}^2}}$$

(5.51)

其中，

$$l_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

同理，

$$h_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}} = \frac{h_{5,5}+\rho_{1,5}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,5}}^2}}$$

(5.52)

其中，

$$h_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_0)}{\sigma\sqrt{t_5-t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2*1} & \rho_{1,3*1} & \rho_{1,4*1} \\ & 1 & \rho_{2,3*1} & \rho_{2,4*1} \\ & & 1 & \rho_{3,4*1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$進行整理，過程如下：將$n=5, s=1$代入，

$$Q_{\{5\},2,3} = Q_{\{4\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.53)

$$Q_{\{5\},2,4} = Q_{\{4\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.54)

$$Q_{\{5\},2,5} = Q_{\{4\},1,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{2,5}$$

(5.55)

$$Q_{\{5\},3,4} = Q_{\{4\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}+Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.56)

$$Q_{\{5\},3,5} = Q_{\{4\},2,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{3,5}$$

(5.57)

$$Q_{\{5\},4,5} = Q_{\{4\},3,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,4}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_4-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{4,5}$$

(5.58)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{5,1} - \sigma\sqrt{t_1 - t_0} = -c_{5,1}$

$$c_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(5.59)

將式(5.44)中$c_{4,1*1}$、$m_{4,1*1}$、$g_{4,2*1}$、$c_{4,3*1}$、$m_{4,3*1}$和$g_{4,4*1}$作下式轉換：

$$c_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{c_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}}$$

(5.60)

其中，

$$c_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$m_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{m_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}}$$

(5.61)

其中，

$$m_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$g_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{g_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}}$$

(5.62)

其中，

$$g_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$c_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{c_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}}$$

(5.63)

其中，

$$c_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$m_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{m_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}}$$

(5.64)

其中，

$$m_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$g_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{g_{5,5} + \rho_{1,5}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,5}{}^2}}$$

(5.65)

其中，

$$g_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - K_1\right)\right]$$

$$= S_{t_0}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} c_{5,1} \\ -c_{5,2} \\ g_{5,3} \\ -c_{5,4} \\ g_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} c_{5,1} \\ -c_{5,2} \\ g_{5,3} \\ -m_{5,4} \\ g_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} c_{5,1} \\ -m_{5,2} \\ g_{5,3} \\ -c_{5,4} \\ g_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right.$$

$$\left. + N_5\left[\begin{pmatrix} c_{5,1} \\ -m_{5,2} \\ g_{5,3} \\ -m_{5,4} \\ g_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\}$$

$$- k_3 e^{-r(t_5-t_0)}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -b_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -b_{5,4} \\ h_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -b_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -l_{5,4} \\ h_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right.$$

$$\left. - N_5\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -l_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -b_{5,4} \\ h_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] + N_5\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -l_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -l_{5,4} \\ h_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\}$$

$$- A_3 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -b_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -b_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -b_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -l_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right.$$

$$\left. - N_4\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -l_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -b_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -l_{5,2} \\ h_{5,3} \\ -l_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\}$$

$$- k_2 e^{-r(t_3-t_0)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -b_{5,2} \\ h_{5,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} b_{5,1} \\ -l_{5,2} \\ h_{5,3} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3}\right]\right]$$

$$- A_2 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(b_{5,1}, -b_{5,2};\ \rho_{1,2}\right) - N_1\left(b_{5,1}, -l_{5,2};\ \rho_{1,2}\right)\right] - K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N_1\left(b_{5,1}\right) \tag{5.66}$$

其中，

$$c_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}};\ b_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

$$c_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}};\ b_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$m_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}};\ l_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

$$g_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}};\ h_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$c_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}};\ b_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

$$m_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}};\ l_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

$$g_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}};\ h_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

$\overline{H}_{1,5}$　為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\overline{H}_{2,5}$　為$CEC_{t_2}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{2,5}$　為$CEC_{t_2}^3 = L_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{3,5}$　為$CEC_{t_3}^3 = k_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\overline{H}_{4,5}$　為$CEC_{t_2}^3 = H_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{4,5}$　為$CEC_{t_2}^3 = L_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

再考慮情況二，將第四章式(4.167)二層可展延買權移至時間點t_2，為計算清楚方便，將再分為四個情境計算，分別為第二層選擇延期或不延期和第一層選擇延期或不延期所產生之案例：

5.2.5　第五情境為（第二層選擇不延期且第一層也選擇不延期）

三層複式可展延買權於時間點t_2的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_2}^2$部分價值和k_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_2折現至t_1，求算如下：

$$\begin{aligned}CEC_{t_2}^2 \;=\; & S_{t_2}N_2\left(c_{2,1*2}, c_{2,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right) - K_3 e^{-r(t_4-t_2)} N_2\left(b_{2,1*2}, b_{2,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right) \\ & - K_2 e^{-r(t_3-t_2)} N_1\left(b_{2,1*2}\right)\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$CEC_{t_1}^2 \;=\; e^{-r(t_2-t_1)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right] \tag{5.67}$$

令標的二層可展延買權在時間點t_2為價平（$CEC_{t_2}^2 = k_1$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,4}$。

$$h_{3,1*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \tag{5.68}$$

則當$\mathrm{S}_{\mathrm{t}_2} > \bar{S}_{2,4}$等價於$Z_1 > -h_{3,1*1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。

將式(5.66)中$b_{2,1*2}$和$b_{2,2*2}$作下式轉換：

$$b_{2,1*2} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{b_{3,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{5.69}$$

其中，

$$b_{3,2*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$b_{2,2*2} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_2}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{b_{3,3*1} + \rho_{1,3*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3*1}}^2}} \tag{5.70}$$

其中，

$$b_{3,3*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

相關係數需作轉換，依照推倒過程可知，

$$\rho_{1,2*2} \;=\; \sqrt{t_3-t_2/t_4-t_2} \tag{5.71}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，將$n = 3, s = 1$代入，可得相關係數$\rho_{2,3*1}$。

$$Q_{\{3\},2,3} = Q_{\{2\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{3\},1,3}\right)^2} + Q_{\{3\},1,2}Q_{\{3\},1,3} = \frac{\sqrt{t_3-t_1}}{\sqrt{t_4-t_1}} = \rho_{2,3*1} \tag{5.72}$$

選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{3,1*1} - \sigma\sqrt{t_2-t_1} = -g_{3,1*1}$

$$g_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \tag{5.73}$$

將式(5.66)中$c_{2,1*2}$和$c_{2,2*2}$作下式轉換：

$$c_{2,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{c_{3,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}} \tag{5.74}$$

其中，

$$c_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$c_{2,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/H_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{c_{3,3*1} + \rho_{1,3*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}} \tag{5.75}$$

其中，

$$c_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

所以，結果如下，

$$\begin{aligned} CEC_{t_1}^2 &= e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right] \\ &= S_{t_1}N_3\left[\begin{pmatrix} g_{3,1*1} \\ c_{3,2*1} \\ c_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right] - K_3e^{-r(t_4-t_1)}N_3\left[\begin{pmatrix} h_{3,1*1} \\ b_{3,2*1} \\ b_{3,3*1}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times3}\right] \\ &\quad -K_2e^{-r(t_3-t_1)}N_2\left(h_{3,1*1}, b_{3,2*1}; \rho_{1,2*1}\right) - k_1e^{-r(t_2-t_1)}N_1\left(h_{3,1*1}\right) \end{aligned} \tag{5.76}$$

在風險中立設定下，將第三層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right] \tag{5.77}$$

第三層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{1,4}$，下限為$\bar{L}_{1,4}$，皆為股價價值約當值。

$$b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{5.78}$$

$$l_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} \tag{5.79}$$

即是$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$的成立條件為$\bar{H}_{1,4} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,4}$，且$\bar{H}_{1,4} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,4}$等價於$-b_{4,1} > Z_1 > -l_{4,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第三層可展延買權才會被延期。將式(5.76)中$h_{3,1*1}$、$b_{3,2*1}$和$b_{3,3*1}$作下式轉換：

$$h_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}} \tag{5.80}$$

其中，

$$h_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$b_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{b_{4,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.81}$$

其中，

$$b_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,4}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$b_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{b_{4,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}} \tag{5.82}$$

其中，

$$b_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}$進行整理，過程如下：將$n=4, s=1$代入，

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.83)

$$Q_{\{4\},2,4} = Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.84)

$$Q_{\{4\},3,4} = Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.85)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{4,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -c_{4,1}$; $-l_{4,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -m_{4,1}$

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.86)

$$m_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.87)

將式(5.76)中$g_{3,1*1}$、$c_{3,2*1}$和$c_{3,3*1}$作下式轉換：

$$g_{3,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{g_{4,2}+\rho_{1,2}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,2}{}^2}}$$

(5.88)

其中，

$$g_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$c_{3,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{c_{4,3} + \rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(5.89)

其中，

$$c_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$c_{3,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{c_{4,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}}$$

(5.90)

其中，

$$c_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1}\\ g_{4,2}\\ c_{4,3}\\ c_{4,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1}\\ g_{4,2}\\ c_{4,3}\\ c_{4,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right]\right\} \\
&\quad - K_3e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ b_{4,3}\\ b_{4,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ b_{4,3}\\ b_{4,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times 4}\right]\right\} \\
&\quad - K_2e^{-r(t_3-t_0)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1}\\ h_{4,2}\\ b_{4,3}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1}\\ h_{4,2}\\ b_{4,3}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times 3}\right]\right\} \\
&\quad - k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{4,1}, h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right) - N_2\left(-l_{4,1}, h_{4,2};\ \rho_{1,2}\right)\right] \\
&\quad - A_1e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1\left(-b_{4,1}\right) - N_1\left(-l_{4,1}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{5.91}
$$

其中，

$$c_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$m_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ l_{4,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$g_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ h_{4,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$c_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ b_{4,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{3,4}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$c_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ b_{4,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$\overline{H}_{1,4}$　為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\overline{L}_{1,4}$　為$CEC_{t_1}^3 = L_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{2,4}$　為$CEC_{t_2}^3 = k_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\overline{H}_{3,4}$　為$CEC_{t_3}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

5.2.6　第六情境為（第二層選擇不延期但第一層選擇延期）

三層複式可展延買權於時間點t_2的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_2}^2$部分價值和k_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_2折現至t_1，求算如下：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_2}^2 = S_{t_2}&\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1*2} \\ -c_{3,2*2} \\ g_{3,3*2} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} c_{3,1*2} \\ -m_{3,2*2} \\ g_{3,3*2} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-k_3 e^{-r(t_5-t_2)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1*2} \\ -b_{3,2*2} \\ h_{3,3*2} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} b_{3,1*2} \\ -l_{3,2*2} \\ h_{3,3*2} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right]\right\} \\
&-A_3 e^{-r(t_4-t_2)}\left[N_2\left(b_{3,1*2}, -b_{3,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right) - N_2\left(b_{3,1*2}, -l_{3,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right)\right] \\
&-K_2 e^{-r(t_3-t_2)} N_1\left(b_{3,1*2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.92}
$$

$$
CEC_{t_1}^2 \;=\; e^{-r(t_2-t_1)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right] \tag{5.93}
$$

令標的二層可展延買權在時間點t_2為價平（$CEC_{t_2}^2 = k_1$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,5}$。

$$
h_{4,1*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \tag{5.94}
$$

則當$S_{t_2} > \bar{S}_{2,5}$等價於$Z_1 > -h_{4,1*1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。

將式(5.92)中$b_{3,1*2}$、$b_{3,2*2}$、$l_{3,2*2}$和$h_{3,3*2}$作下式轉換：

$$
b_{3,1*2} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{b_{4,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{5.95}
$$

其中，

$$
b_{4,2*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}
$$

同理，

$$
b_{3,2*2} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{b_{4,3*1} + \rho_{1,3*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3*1}}^2}} \tag{5.96}
$$

其中，

$$
b_{4,3*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}
$$

同理，

$$l_{3,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{l_{4,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}} \tag{5.97}$$

其中，

$$l_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$h_{3,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/k_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{b_{4,4*1}+\rho_{1,4*1}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}} \tag{5.98}$$

其中，

$$h_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}$進行整理，過程如下：將$n=4, s=1$代入，

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}+Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_3-t_1}}{\sqrt{t_4-t_1}} = \rho_{2,3*1} \tag{5.99}$$

$$Q_{\{4\},2,4} = Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}+Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_1}}{\sqrt{t_5-t_1}} = \rho_{2,4*1} \tag{5.100}$$

$$Q_{\{4\},3,4} = Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2}+Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_4-t_1}}{\sqrt{t_5-t_1}} = \rho_{3,4*1} \tag{5.101}$$

選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{4,1*1}-\sigma\sqrt{t_2-t_1} = -g_{4,1*1}$

$$g_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \tag{5.102}$$

將式(5.92)中$c_{3,1*2}$、$c_{3,2*2}$、$m_{3,2*2}$和$g_{3,3*2}$作下式轉換：

$$c_{3,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{c_{4,2*1}+\rho_{1,2*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}} \tag{5.103}$$

其中，

$$c_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$c_{3,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{c_{4,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}} \tag{5.104}$$

其中，

$$c_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$m_{3,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{m_{4,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}} \tag{5.105}$$

其中，

$$m_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$g_{3,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/k_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{g_{4,4*1}+\rho_{1,4*1}Z_1'}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}} \tag{5.106}$$

其中，

$$g_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

所以，結果如下，

$$CEC_{t_1}^2 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2-k_1\right)\right]$$

$$= S_{t_1}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} g_{4,1*1} \\ c_{4,2*1} \\ -c_{4,3*1} \\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} g_{4,1*1} \\ c_{4,2*1} \\ -m_{4,3*1} \\ g_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\right\}$$

$$-k_3 e^{-r(t_5-t_1)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ b_{4,2*1} \\ -b_{4,3*1} \\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ b_{4,2*1} \\ -l_{4,3*1} \\ h_{4,4*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\right\}$$

$$-A_3 e^{-r(t_4-t_1)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ b_{4,2*1} \\ -b_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ b_{4,2*1} \\ -l_{4,3*1}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right]$$

$$-K_2 e^{-r(t_3-t_1)} N_2\left(h_{4,1*1}, b_{4,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{4,1*1}\right)$$

(5.107)

在風險中立設定下，將第三層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^3 \;=\; e^{-r(t_1-t_0)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right]$$

(5.108)

第三層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{1,5}$，下限為$\bar{L}_{1,5}$，皆為股價價值約當值。

$$b_{5,1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.109)

$$l_{5,1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.110)

即是$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$的成立條件為$\bar{H}_{1,5} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,5}$，且$\bar{H}_{1,5} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,5}$等價於$-b_{5,1} > Z_1 > -l_{5,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第三層可展延買權才會被延期。將式(5.107)中$h_{4,1*1}$、$b_{4,2*1}$、$b_{4,3*1}$、$l_{4,3*1}$和$h_{4,4*1}$作下式轉換：

$$h_{4,1*1} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \;=\; \frac{h_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

(5.111)

其中，

$$h_{5,2} \;=\; \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$b_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{b_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.112}$$

其中，

$$b_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$b_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{b_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}} \tag{5.113}$$

其中，

$$b_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$l_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{l_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}} \tag{5.114}$$

其中，

$$l_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$h_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{h_{5,5} + \rho_{1,5}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,5}}^2}} \tag{5.115}$$

其中，

$$h_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times4}$進行整理，過程如下：將$n=5,s=1$代入，

$$Q_{\{5\},2,3} = Q_{\{4\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.116)

$$Q_{\{5\},2,4} = Q_{\{4\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.117)

$$Q_{\{5\},2,5} = Q_{\{4\},1,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2}+Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{2,5}$$

(5.118)

$$Q_{\{5\},3,4} = Q_{\{4\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}+Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.119)

$$Q_{\{5\},3,5} = Q_{\{4\},2,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2}+Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{3,5}$$

(5.120)

$$Q_{\{5\},4,5} = Q_{\{4\},3,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2}+Q_{\{5\},1,4}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_4-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{4,5}$$

(5.121)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{5,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -c_{5,1}$; $-l_{5,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -m_{5,1}$

$$c_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.122)

$$m_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.123)

將式(5.107)中$g_{4,1*1}$、$c_{4,2*1}$、$c_{4,3*1}$、$m_{4,3*1}$和$g_{4,4*1}$作下式轉換：

$$g_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{g_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.124}$$

其中，

$$g_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$c_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{c_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.125}$$

其中，

$$c_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$c_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{c_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.126}$$

其中，

$$c_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$m_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{m_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.127}$$

其中，

$$m_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$g_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{g_{5,5} + \rho_{1,5}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,5}{}^2}}$$

(5.128)

其中，

$$g_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix}-c_{5,1}\\ g_{5,2}\\ c_{5,3}\\ -c_{5,4}\\ g_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix}-c_{5,1}\\ g_{5,2}\\ c_{5,3}\\ -m_{5,4}\\ g_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix}-m_{5,1}\\ g_{5,2}\\ c_{5,3}\\ -c_{5,4}\\ g_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right. \\
&\qquad \left. + N_5\left[\begin{pmatrix}-m_{5,1}\\ g_{5,2}\\ c_{5,3}\\ -m_{5,4}\\ g_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\} \\
&\quad -k_3e^{-r(t_5-t_0)}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -b_{5,4}\\ h_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -l_{5,4}\\ h_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -b_{5,4}\\ h_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] + N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -l_{5,4}\\ h_{5,5}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\} \\
&\quad -A_3e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -b_{5,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -l_{5,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -b_{5,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\\ -l_{5,4}\end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$-K_2e^{-r(t_3-t_0)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ b_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right]$$
$$-k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2(-b_{5,1},h_{5,2};\ \rho_{1,2})-N_2(-l_{5,1},h_{5,2};\ \rho_{1,2})\right]$$
$$-A_1e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1(-b_{5,1})-N_1(-l_{5,1})\right]$$

(5.129)

其中，

$$c_{5,1}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5})+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{5,1}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5})+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$m_{5,1}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5})+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ l_{5,1}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5})+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$g_{5,2}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5})+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ h_{5,2}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5})+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$c_{5,3}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5})+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ b_{5,3}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5})+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$c_{5,4}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5})+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ b_{5,4}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{H}_{4,5})+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$$m_{5,4}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5})+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ l_{5,4}=\frac{ln(S_{t_0}/\bar{L}_{4,5})+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$$g_{5,5}=\frac{ln(S_{t_0}/k_3)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_0)}{\sigma\sqrt{t_5-t_0}};\ h_{5,5}=\frac{ln(S_{t_0}/k_3)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_0)}{\sigma\sqrt{t_5-t_0}}$$

$\bar{H}_{1,5}$　為$CEC_{t_1}^3=H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{1,5}$　為$CEC_{t_1}^3=L_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{2,5}$　為$CEC_{t_2}^3=k_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{3,5}$　為$CEC_{t_3}^3=H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{4,5}$　為$CEC_{t_4}^3=H_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{4,5}$　為$CEC_{t_4}^3=L_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$　為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$　為兩變數間之相關係數

5.2.7 第七情境為（第二層選擇延期但第一層選擇不延期）

三層複式可展延買權於時間點t_2的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_2}^2$部分價值和k_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_2折現至t_1，求算如下：

$$CEC_{t_2}^2 = S_{t_2}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-c_{3,1*2}\\ g_{3,2*2}\\ c_{3,3*2}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-m_{3,1*2}\\ g_{3,2*2}\\ c_{3,3*2}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right]\right\}$$
$$-K_3e^{-r(t_5-t_2)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{3,1*2}\\ h_{3,2*2}\\ b_{3,3*2}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{3,1*2}\\ h_{3,2*2}\\ b_{3,3*2}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}\right]\right\}$$
$$-k_2e^{-r(t_4-t_2)}\left[N_2\left(-b_{3,1*2}, h_{3,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right) - N_2\left(-l_{3,1*2}, h_{3,2*2};\ \rho_{1,2*2}\right)\right]$$
$$-A_2e^{-r(t_3-t_2)}\left[N_1\left(-b_{3,1*2}\right) - N_1\left(-l_{3,1*2}\right)\right]$$

(5.130)

$$CEC_{t_1}^2 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right]$$

(5.131)

令標的二層可展延買權在時間點t_2為價平（$CEC_{t_2}^2 = k_1$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,5}$。

$$h_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}$$

(5.132)

則當$S_{t_2} > \bar{S}_{2,5}$等價於$Z_1 > -h_{4,1*1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。

將式(5.130)中$b_{3,1*2}$、$l_{3,1*2}$、$h_{3,2*2}$和$b_{3,3*2}$作下式轉換：

$$b_{3,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_2)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_2}} = \frac{b_{4,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(5.133)

其中，

$$b_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}}$$

同理，

$$l_{3,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_2)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_2}} = \frac{l_{4,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,2*1}{}^2}}$$

(5.134)

其中，

$$l_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}}$$

同理，

$$h_{3,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{h_{4,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}}$$

(5.135)

其中，

$$h_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$b_{3,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{b_{4,4*1}+\rho_{1,4*1}Z_1}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}}$$

(5.136)

其中，

$$b_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*2}\right]_{3\times3}$進行整理，過程如下：將$n=4, s=1$代入，

$$Q_{\{4\},2,3} = Q_{\{3\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,3} = \frac{\sqrt{t_3-t_1}}{\sqrt{t_4-t_1}} = \rho_{2,3*1}$$

(5.137)

$$Q_{\{4\},2,4} = Q_{\{3\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,2}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_1}}{\sqrt{t_5-t_1}} = \rho_{2,4*1}$$

(5.138)

$$Q_{\{4\},3,4} = Q_{\{3\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{4\},1,4}\right)^2} + Q_{\{4\},1,3}Q_{\{4\},1,4} = \frac{\sqrt{t_4-t_1}}{\sqrt{t_5-t_1}} = \rho_{3,4*1}$$

(5.139)

選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{4,1*1} - \sigma\sqrt{t_2-t_1} = -g_{4,1*1}$

$$g_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}}$$

(5.140)

將式(5.130)中$c_{3,1*2}$、$m_{3,1*2}$、$g_{3,2*2}$和$c_{3,3*2}$作下式轉換：

$$c_{3,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{c_{4,2*1}+\rho_{1,2*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}} \tag{5.141}$$

其中，

$$c_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$m_{3,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{m_{4,2*1}+\rho_{1,2*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,2*1}{}^2}} \tag{5.142}$$

其中，

$$m_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$g_{3,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{S}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{g_{4,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,3*1}{}^2}} \tag{5.143}$$

其中，

$$g_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$c_{3,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_5}/H_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{c_{4,4*1}+\rho_{1,4*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}} \tag{5.144}$$

其中，

$$c_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

所以，結果如下，

$CEC_{t_1}^2 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2-k_1\right)\right]$

$$CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} g_{4,1*1} \\ -c_{4,2*1} \\ g_{4,3*1} \\ c_{4,4*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} g_{4,1*1} \\ -m_{4,2*1} \\ g_{4,3*1} \\ c_{4,4*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times 4}\right]\right\}$$
$$-K_3 e^{-r(t_5-t_1)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ -b_{4,2*1} \\ h_{4,3*1} \\ b_{4,4*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times 4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ -l_{4,2*1} \\ h_{4,3*1} \\ b_{4,4*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times 4}\right]\right\}$$
$$-k_2 e^{-r(t_4-t_1)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ -b_{4,2*1} \\ h_{4,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} h_{4,1*1} \\ -l_{4,2*1} \\ h_{4,3*1} \end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j*1}\right]_{3\times 3}\right]\right]$$
$$-A_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{4,1*1}, -b_{4,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - N_2\left(h_{4,1*1}, -l_{4,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right]$$
$$-k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{4,1*1}\right)$$

(5.145)

在風險中立設定下，將第三層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right]$$

(5.146)

第三層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\overline{H}_{1,5}$，下限為$\overline{L}_{1,5}$，皆為股價價值約當值。

$$b_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.147)

$$l_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.148)

即是$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$的成立條件為$\overline{H}_{1,5} > S_{t_1} > \overline{L}_{1,5}$，且$\overline{H}_{1,5} > S_{t_1} > \overline{L}_{1,5}$等價於$-b_{5,1} > Z_1 > -l_{5,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第三層可展延買權才會被延期。將式(5.145)中$h_{4,1*1}$、$b_{4,2*1}$、$l_{4,2*1}$、$h_{4,3*1}$和$b_{4,4*1}$作下式轉換：

$$h_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} = \frac{h_{5,2} + \rho_{1,2} Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2}}^2}}$$

(5.149)

其中，

$$h_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

同理，

$$b_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{b_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(5.150)

其中，

$$b_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$l_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{l_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}}$$

(5.151)

其中，

$$l_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$h_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{h_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}}$$

(5.152)

其中，

$$h_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$b_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{b_{5,5} + \rho_{1,5}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,5}}^2}}$$

(5.153)

其中，

$$b_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{4\times 4}$進行整理，過程如下：將$n = 5, s = 1$代入，

$$Q_{\{5\},2,3} = Q_{\{4\},1,2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_3-t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.154)

$$Q_{\{5\},2,4} = Q_{\{4\},1,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.155)

$$Q_{\{5\},2,5} = Q_{\{4\},1,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{2,5}$$

(5.156)

$$Q_{\{5\},3,4} = Q_{\{4\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2} + Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} = \rho_{3,4}$$

(5.157)

$$Q_{\{5\},3,5} = Q_{\{4\},2,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{3,5}$$

(5.158)

$$Q_{\{5\},4,5} = Q_{\{4\},3,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,4}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_4-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} = \rho_{4,5}$$

(5.159)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{5,1} - \sigma\sqrt{t_1-t_0} = -c_{5,1}$; $-l_{5,1} - \sigma\sqrt{t_1-t_0} = -m_{5,1}$

$$c_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.160)

$$m_{5,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.161)

將式(5.145)中$g_{4,1*1}$、$c_{4,2*1}$、$m_{4,2*1}$、$g_{4,3*1}$和$c_{4,4*1}$作下式轉換：

$$g_{4,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{g_{5,2} + \rho_{1,2}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}} \tag{5.162}$$

其中，

$$g_{5,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$c_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{c_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.163}$$

其中，

$$c_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$m_{4,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{m_{5,3} + \rho_{1,3}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}} \tag{5.164}$$

其中，

$$m_{5,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$g_{4,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{g_{5,4} + \rho_{1,4}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}} \tag{5.165}$$

其中，

$$g_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,5}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$c_{4,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{c_{5,5} + \rho_{1,5} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,5}{}^2}}$$

(5.166)

其中，

$$c_{5,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$\begin{aligned}
CEC_{t_0}^3 &= e^{-r(t_1-t_0)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right] \\
&= S_{t_0}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} -c_{5,1} \\ g_{5,2} \\ -c_{5,3} \\ g_{5,4} \\ c_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} -c_{5,1} \\ g_{5,2} \\ -m_{5,3} \\ g_{5,4} \\ c_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} -m_{5,1} \\ g_{5,2} \\ -c_{5,3} \\ g_{5,4} \\ c_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right. \\
&\qquad \left. + N_5\left[\begin{pmatrix} -m_{5,1} \\ g_{5,2} \\ -m_{5,3} \\ g_{5,4} \\ c_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\} \\
&\qquad -K_3 e^{-r(t_5-t_0)}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} -b_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -b_{5,3} \\ h_{5,4} \\ b_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} -b_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -l_{5,3} \\ h_{5,4} \\ b_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_5\left[\begin{pmatrix} -l_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -b_{5,3} \\ h_{5,4} \\ b_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right] + N_5\left[\begin{pmatrix} -l_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -l_{5,3} \\ h_{5,4} \\ b_{5,5} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{5\times5}\right]\right\} \\
&\qquad -k_2 e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} -b_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -b_{5,3} \\ h_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} -b_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -l_{5,3} \\ h_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right. \\
&\qquad \left. - N_4\left[\begin{pmatrix} -l_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -b_{5,3} \\ h_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix} -l_{5,1} \\ h_{5,2} \\ -l_{5,3} \\ h_{5,4} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-A_2 e^{-r(t_3-t_0)}\Bigg[N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ -b_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{5,1}\\ h_{5,2}\\ -l_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\\
&\qquad -N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ -b_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]+N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{5,1}\\ h_{5,2}\\ -l_{5,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\Bigg]\\
&-k_1 e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2(-b_{5,1},h_{5,2};\ \rho_{1,2})-N_2(-l_{5,1},h_{5,2};\ \rho_{1,2})\right]\\
&-A_1 e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1(-b_{5,1})-N_1(-l_{5,1})\right]
\end{aligned}
\tag{5.167}
$$

其中，

$$c_{5,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{5,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$m_{5,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ l_{5,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$g_{5,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ h_{5,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$c_{5,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ b_{5,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$m_{5,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ l_{5,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$g_{5,4}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,5}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ h_{5,4}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,5}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

$$c_{5,5}=\frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_5-t_0)}{\sigma\sqrt{t_5-t_0}};\ b_{5,5}=\frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_5-t_0)}{\sigma\sqrt{t_5-t_0}}$$

$\bar{H}_{1,5}$ 為$CEC_{t_1}^3=H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{1,5}$ 為$CEC_{t_1}^3=L_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{2,5}$ 為$CEC_{t_2}^3=k_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{3,5}$ 為$CEC_{t_3}^3=H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{3,5}$ 為$CEC_{t_3}^3=L_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{4,5}$ 為$CEC_{t_4}^3=k_2$時的股價價值，股價價值約當值。

5.2.8 第八情境為（第二層選擇延期且第一層也選擇延期）

三層複式可展延買權於時間點t_2的價值為標的二層可展延買權$CEC_{t_2}^2$部分價值和k_1之間的差額，在風險中立設定下，將二層複式可展延買權現金流量於時間點t_2折現至t_1，求算如下：

$$
\begin{aligned}
CEC_{t_2}^2 = S_{t_2}\Bigg\{ & N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1*2}\\ g_{4,2*2}\\ -c_{4,3*2}\\ g_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-c_{4,1*2}\\ g_{4,2*2}\\ -m_{4,3*2}\\ g_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] \\
& - N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1*2}\\ g_{4,2*2}\\ -c_{4,3*2}\\ g_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-m_{4,1*2}\\ g_{4,2*2}\\ -m_{4,3*2}\\ g_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right]\Bigg\} \\
& - k_3 e^{-r(t_6-t_2)}\Bigg\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -b_{4,3*2}\\ h_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -l_{4,3*2}\\ h_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] \\
& - N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -b_{4,3*2}\\ h_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -l_{4,3*2}\\ h_{4,4*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{4\times4}\right]\Bigg\} \\
& - A_3 e^{-r(t_5-t_2)}\Bigg\{N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -b_{4,3*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -l_{4,3*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{3\times3}\right] \\
& - N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -b_{4,3*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{3\times3}\right] + N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{4,1*2}\\ h_{4,2*2}\\ -l_{4,3*2}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*2}]_{3\times3}\right]\Bigg\} \\
& - k_2 e^{-r(t_4-t_2)}\left[N_2(-b_{4,1*2}, h_{4,2*2};\ \rho_{1,2*2}) - N_2(-l_{4,1*2}, h_{4,2*2};\ \rho_{1,2*2})\right] \\
& - A_2 e^{-r(t_3-t_2)}\left[N_1(-b_{4,1*2}) - N_1(-l_{4,1*2})\right]
\end{aligned}
\tag{5.168}
$$

$$CEC_{t_1}^2 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right] \tag{5.169}$$

令標的二層可展延買權在時間點t_2為價平（$CEC_{t_2}^2 = k_1$）時，股價價值為$\bar{S}_{2,6}$。

$$h_{5,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}} \tag{5.170}$$

則當$\mathrm{S}_{\mathrm{t}_2} > \bar{S}_{2,6}$等價於$Z_1 > -h_{5,1*1}$，得知累積機率下限，三層複式可展延買權才可被執行。

將式(5.168)中$b_{4,1*2}$、$l_{4,1*2}$、$h_{4,2*2}$、$b_{4,3*2}$、$l_{4,3*2}$和$h_{4,4*2}$作下式轉換：

$$b_{4,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{b_{5,2*1}+\rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{5.171}$$

其中，

$$b_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$l_{4,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{l_{5,2*1}+\rho_{1,2*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}} \tag{5.172}$$

其中，

$$l_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$h_{4,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{h_{5,3*1}+\rho_{1,3*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,3*1}}^2}} \tag{5.173}$$

其中，

$$h_{5,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$b_{4,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{b_{5,4*1}+\rho_{1,4*1}Z_1}{\sqrt{1-{\rho_{1,4*1}}^2}} \tag{5.174}$$

其中，

$$b_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

同理，

$$l_{4,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_2)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_2}} = \frac{l_{5,4*1} + \rho_{1,4*1}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,4*1}{}^2}}$$

(5.175)

其中，

$$l_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}}$$

同理，

$$h_{4,4*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_6 - t_2)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_2}} = \frac{h_{5,5*1} + \rho_{1,5*1}Z_1}{\sqrt{1 - \rho_{1,5*1}{}^2}}$$

(5.176)

其中，

$$h_{5,5*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_6 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_1}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*2}\right]_{4\times4}$進行整理，過程如下：將$n = 5, s = 1$代入，

$$Q_{\{5\},2,3} = Q_{\{4\},1,2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,3} = \frac{\sqrt{t_3 - t_1}}{\sqrt{t_4 - t_1}} = \rho_{2,3*1}$$

(5.177)

$$Q_{\{5\},2,4} = Q_{\{4\},1,3}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_3 - t_1}}{\sqrt{t_5 - t_1}} = \rho_{2,4*1}$$

(5.178)

$$Q_{\{5\},2,5} = Q_{\{4\},1,4}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,2}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_3 - t_1}}{\sqrt{t_6 - t_1}} = \rho_{2,5*1}$$

(5.179)

$$Q_{\{5\},3,4} = Q_{\{4\},2,3}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2} + Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,4} = \frac{\sqrt{t_4 - t_1}}{\sqrt{t_5 - t_1}} = \rho_{3,4*1}$$

(5.180)

$$Q_{\{5\},3,5} = Q_{\{4\},2,4}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,3}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,3}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_4 - t_1}}{\sqrt{t_6 - t_1}} = \rho_{3,5*1}$$

(5.181)

$$Q_{\{5\},4,5} = Q_{\{4\},3,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{5\},1,5}\right)^2} + Q_{\{5\},1,4}Q_{\{5\},1,5} = \frac{\sqrt{t_5-t_1}}{\sqrt{t_6-t_1}} = \rho_{4,5*1}$$

(5.182)

選擇權進行參數轉換與整理，$-h_{5,1*1} - \sigma\sqrt{t_2-t_1} = -g_{5,1*1}$

$$g_{5,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}}$$

(5.183)

將式(5.168)中$c_{4,1*2}$、$m_{4,1*2}$、$g_{4,2*2}$、$c_{4,3*2}$、$m_{4,3*2}$和$g_{4,4*2}$作下式轉換：

$$c_{4,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{c_{5,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1'}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}}$$

(5.184)

其中，

$$c_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$m_{4,1*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}} = \frac{m_{5,2*1} + \rho_{1,2*1}Z_1'}{\sqrt{1-{\rho_{1,2*1}}^2}}$$

(5.185)

其中，

$$m_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

同理，

$$g_{4,2*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}} = \frac{g_{5,3*1} + \rho_{1,3*1}Z_1'}{\sqrt{1-{\rho_{1,3*1}}^2}}$$

(5.186)

其中，

$$g_{5,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

同理，

$$c_{4,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{c_{5,4*1} + \rho_{1,4*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}} \tag{5.187}$$

其中，

$$c_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

同理，

$$m_{4,3*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5-t_2)}{\sigma\sqrt{t_5-t_2}} = \frac{m_{5,4*1} + \rho_{1,4*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,4*1}{}^2}} \tag{5.188}$$

其中，

$$m_{5,4} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5-t_1)}{\sigma\sqrt{t_5-t_1}}$$

同理，

$$g_{4,4*2} = \frac{ln\left(S_{t_2}/k_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_6-t_2)}{\sigma\sqrt{t_6-t_2}} = \frac{g_{5,5*1} + \rho_{1,5*1}Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho_{1,5*1}{}^2}} \tag{5.189}$$

其中，

$$g_{5,5*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_6-t_1)}{\sigma\sqrt{t_6-t_1}}$$

所以，結果如下，

$$CEC_{t_1}^2 = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_2}^2 - k_1\right)\right]$$

$$= S_{t_1}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} g_{5,1*1} \\ -c_{5,2*1} \\ g_{5,3*1} \\ -c_{5,4*1} \\ g_{5,5*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} g_{5,1*1} \\ -c_{5,2*1} \\ g_{5,3*1} \\ -m_{5,4*1} \\ g_{5,5*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{5\times5}\right]\right.$$

$$\left. - N_5\left[\begin{pmatrix} g_{5,1*1} \\ -m_{5,2*1} \\ g_{5,3*1} \\ -c_{5,4*1} \\ g_{5,5*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{5\times5}\right] + N_5\left[\begin{pmatrix} g_{5,1*1} \\ -m_{5,2*1} \\ g_{5,3*1} \\ -m_{5,4*1} \\ g_{5,5*1} \end{pmatrix}; \left[\rho_{i,j*1}\right]_{5\times5}\right]\right\}$$

$$
-k_3 e^{-r(t_6-t_1)}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -b_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -b_{5,4*1} \\ h_{5,5*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{5\times5}\right] - N_5\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -b_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -l_{5,4*1} \\ h_{5,5*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{5\times5}\right]\right.
$$

$$
\left. - N_5\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -l_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -b_{5,4*1} \\ h_{5,5*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{5\times5}\right] + N_5\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -l_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -l_{5,4*1} \\ h_{5,5*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{5\times5}\right]\right\}
$$

$$
-A_3 e^{-r(t_5-t_1)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -b_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -b_{5,4*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] - N_4\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -b_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -l_{5,4*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\right.
$$

$$
\left. - N_4\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -l_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -b_{5,4*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right] + N_4\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -l_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \\ -l_{5,4*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{4\times4}\right]\right\}
$$

$$
-k_2 e^{-r(t_4-t_1)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -b_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} h_{5,1*1} \\ -l_{5,2*1} \\ h_{5,3*1} \end{pmatrix};\ [\rho_{i,j*1}]_{3\times3}\right]\right]
$$

$$
-A_2 e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(h_{5,1*1}, -b_{5,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right) - N_1\left(h_{5,1*1}, -l_{5,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right]
$$

$$
-k_1 e^{-r(t_2-t_1)} N_1\left(h_{5,1*1}\right)
$$

(5.190)

在風險中立設定下，將第三層複式可展延買權現金流量於時間點t_1折現至t_0，求算如下：

$$
CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)} E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right]
$$

(5.191)

第三層可展延買權延期之情況成立條件為$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\overline{H}_{1,6}$，下限為$\overline{L}_{1,6}$，皆為股價價值約當值。

$$
b_{6,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}
$$

(5.192)

$$
l_{6,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}
$$

(5.193)

即是$L_1 < CEC_{t_1}^2 < H_1$的成立條件為$\bar{H}_{1,6} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,6}$，且$\bar{H}_{1,6} > S_{t_1} > \bar{L}_{1,6}$等價於$-b_{6,1} > Z_1 > -l_{6,1}$，可知累積機率之上下限。此時，第三層可展延買權才會被延期。

將式(5.190)中$h_{5,1*1}$、$b_{5,2*1}$、$l_{5,2*1}$、$h_{5,3*1}$、$b_{5,4*1}$、$l_{5,4*1}$和$h_{5,5*1}$作下式轉換：

$$h_{5,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{h_{6,2} + \rho_{1,2}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}} \tag{5.194}$$

其中，

$$h_{6,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$b_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{b_{6,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.195}$$

其中，

$$b_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$l_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{l_{6,3} + \rho_{1,3}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2}} \tag{5.196}$$

其中，

$$l_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$h_{5,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{h_{6,4} + \rho_{1,4}Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,4}}^2}} \tag{5.197}$$

其中，

$$h_{6,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$b_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{b_{6,5} + \rho_{1,5} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,5}}^2}}$$

(5.198)

其中，

$$b_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

同理，

$$l_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{l_{6,5} + \rho_{1,5} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,5}}^2}}$$

(5.199)

其中，

$$l_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r - \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

同理，

$$h_{5,5*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_6 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_1}} = \frac{h_{6,6} + \rho_{1,6} Z_1}{\sqrt{1 - {\rho_{1,6}}^2}}$$

(5.200)

其中，

$$h_{6,6} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r - \sigma^2/2)(t_6 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_0}}$$

利用(Lee, Yeh et al. 2008)定理 1.(a)關係式，可將相關係數$\left[\rho_{i,j*1}\right]_{5\times 5}$進行整理，過程如下：將$n = 6, s = 1$代入，

$$Q_{\{6\},2,3} = Q_{\{5\},1,2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{6\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{6\},1,3}\right)^2} + Q_{\{6\},1,2}Q_{\{6\},1,3} = \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_3 - t_0}} = \rho_{2,3}$$

(5.201)

$$Q_{\{6\},2,4} = Q_{\{5\},1,3}\sqrt{1 - \left(Q_{\{6\},1,2}\right)^2}\sqrt{1 - \left(Q_{\{6\},1,4}\right)^2} + Q_{\{6\},1,2}Q_{\{6\},1,4} = \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_4 - t_0}} = \rho_{2,4}$$

(5.202)

$$Q_{\{6\},2,5} \ = \ Q_{\{5\},1,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,5}\right)^2}+Q_{\{6\},1,2}Q_{\{6\},1,5}=\frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} \ = \ \rho_{2,5}$$

(5.203)

$$Q_{\{6\},2,6} \ = \ Q_{\{5\},1,5}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,2}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,6}\right)^2}+Q_{\{6\},1,2}Q_{\{6\},1,6}=\frac{\sqrt{t_2-t_0}}{\sqrt{t_6-t_0}} \ = \ \rho_{2,6}$$

(5.204)

$$Q_{\{6\},3,4} \ = \ Q_{\{5\},2,3}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,4}\right)^2}+Q_{\{6\},1,3}Q_{\{6\},1,4}=\frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_4-t_0}} \ = \ \rho_{3,4}$$

(5.205)

$$Q_{\{6\},3,5} \ = \ Q_{\{5\},2,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,5}\right)^2}+Q_{\{6\},1,3}Q_{\{6\},1,5}=\frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} \ = \ \rho_{3,5}$$

(5.206)

$$Q_{\{6\},3,6} \ = \ Q_{\{5\},2,5}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,3}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,6}\right)^2}+Q_{\{6\},1,3}Q_{\{6\},1,6}=\frac{\sqrt{t_3-t_0}}{\sqrt{t_6-t_0}} \ = \ \rho_{3,6}$$

(5.207)

$$Q_{\{6\},4,5} \ = \ Q_{\{5\},3,4}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,5}\right)^2}+Q_{\{6\},1,4}Q_{\{6\},1,5}=\frac{\sqrt{t_4-t_0}}{\sqrt{t_5-t_0}} \ = \ \rho_{4,5}$$

(5.208)

$$Q_{\{6\},4,6} \ = \ Q_{\{5\},3,5}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,4}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,6}\right)^2}+Q_{\{6\},1,4}Q_{\{6\},1,6}=\frac{\sqrt{t_4-t_0}}{\sqrt{t_6-t_0}} \ = \ \rho_{4,6}$$

(5.209)

$$Q_{\{6\},5,6} \ = \ Q_{\{5\},4,5}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,5}\right)^2}\sqrt{1-\left(Q_{\{6\},1,6}\right)^2}+Q_{\{6\},1,5}Q_{\{6\},1,6}=\frac{\sqrt{t_5-t_0}}{\sqrt{t_6-t_0}} \ = \ \rho_{5,6}$$

(5.210)

選擇權進行參數轉換與整理，$-b_{6,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} \ = \ -c_{6,1}$; $-l_{6,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} \ = \ -m_{6,1}$

$$c_{6,1} \ = \ \frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,6}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(5.211)

$$m_{6,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}$$

(5.212)

將式(5.190)中$g_{5,1*1}$、$c_{5,2*1}$、$m_{5,2*1}$、$g_{5,3*1}$、$c_{5,4*1}$、$m_{5,4*1}$和$g_{5,5*1}$作下式轉換：

$$g_{5,1*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} = \frac{g_{6,2} + \rho_{1,2} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}{}^2}}$$

(5.213)

其中，

$$g_{6,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}$$

同理，

$$c_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{c_{6,3} + \rho_{1,3} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}}$$

(5.214)

其中，

$$c_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$m_{5,2*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_1}} = \frac{m_{6,3} + \rho_{1,3} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}{}^2}}$$

(5.215)

其中，

$$m_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

同理，

$$g_{5,3*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_1}} = \frac{g_{6,4} + \rho_{1,4} Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}{}^2}}$$

(5.216)

其中，

$$g_{6,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

同理，

$$c_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{c_{6,5} + \rho_{1,5}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,5}{}^2}} \tag{5.217}$$

其中，

$$c_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

同理，

$$m_{5,4*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_1}} = \frac{m_{6,5} + \rho_{1,5}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,5}{}^2}} \tag{5.218}$$

其中，

$$m_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r + \sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

同理，

$$g_{5,5*1} = \frac{ln\left(S_{t_1}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_6 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_1}} = \frac{g_{6,6} + \rho_{1,6}Z_1{}'}{\sqrt{1 - \rho_{1,6}{}^2}} \tag{5.219}$$

其中，

$$g_{6,6} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r + \sigma^2/2)(t_6 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_0}}$$

整合最後結果，

$$CEC_{t_0}^3 = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0, CEC_{t_1}^2 - A_1\right)\right]$$

$$= S_{t_0}\left\{N_6\left[\begin{pmatrix}-c_{6,1}\\g_{6,2}\\-c_{6,3}\\g_{6,4}\\-c_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-c_{6,1}\\g_{6,2}\\-c_{6,3}\\g_{6,4}\\-m_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-c_{6,1}\\g_{6,2}\\-m_{6,3}\\g_{6,4}\\-c_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]\right.$$

$$+ N_6\left[\begin{pmatrix}-c_{6,1}\\g_{6,2}\\-m_{6,3}\\g_{6,4}\\-m_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-m_{6,1}\\g_{6,2}\\-c_{6,3}\\g_{6,4}\\-c_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] + N_6\left[\begin{pmatrix}-m_{6,1}\\g_{6,2}\\-c_{6,3}\\g_{6,4}\\-m_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]$$

$$\left.+ N_6\left[\begin{pmatrix}-m_{6,1}\\g_{6,2}\\-m_{6,3}\\g_{6,4}\\-c_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-m_{6,1}\\g_{6,2}\\-m_{6,3}\\g_{6,4}\\-m_{6,5}\\g_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]\right\}$$

$$- k_3e^{-r(t_6-t_0)}\left\{N_6\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]\right.$$

$$+ N_6\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] + N_6\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]$$

$$\left.+ N_6\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right] - N_6\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\\h_{6,6}\end{pmatrix}; [\rho_{i,j}]_{6\times6}\right]\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-A_3e^{-r(t_5-t_0)}\left\{N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]-N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]-N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]\right.\\
&\quad+N_5\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]-N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]+N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]\\
&\quad\left.+N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-b_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]-N_5\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\\-l_{6,5}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{5\times5}\right]\right\}\\
&-k_2e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\\h_{6,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right.\\
&\quad\left.+N_4\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\\h_{6,4}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{4\times4}\right]\right\}\\
&-A_2e^{-r(t_3-t_0)}\left[N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-b_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]-N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-b_{6,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right.\\
&\quad\left.+N_3\left[\begin{pmatrix}-l_{6,1}\\h_{6,2}\\-l_{6,3}\end{pmatrix};\ [\rho_{i,j}]_{3\times3}\right]\right]\\
&-k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\left(-b_{6,1},h_{6,2};\ \rho_{1,2}\right)-N_1\left(-l_{6,1},h_{6,2};\ \rho_{1,2}\right)\right]\\
&-A_1e^{-r(t_1-t_0)}\left[N_1\left(-b_{6,1}\right)-N_1\left(-l_{6,1}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{5.220}
$$

其中，

$$
c_{6,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,6}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{6,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,6}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}
$$

$$
m_{6,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,6}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ l_{6,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{1,6}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}
$$

$$
g_{6,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,6}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ h_{6,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{2,6}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}
$$

$$c_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}};\ b_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$m_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}};\ l_{6,3} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{3,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_3 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_3 - t_0}}$$

$$g_{6,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}};\ h_{6,4} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{4,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_4 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_4 - t_0}}$$

$$c_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}};\ b_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{5,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

$$m_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r+\sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}};\ l_{6,5} = \frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{5,6}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_5 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_5 - t_0}}$$

$$g_{6,6} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r+\sigma^2/2)(t_6 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_0}};\ h_{6,6} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_3\right) + (r-\sigma^2/2)(t_6 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_6 - t_0}}$$

$\bar{H}_{1,6}$ 為$CEC_{t_1}^3 = H_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{1,6}$ 為$CEC_{t_1}^3 = L_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{2,6}$ 為$CEC_{t_2}^3 = k_1$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{3,6}$ 為$CEC_{t_3}^3 = H_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{3,6}$ 為$CEC_{t_3}^3 = L_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{S}_{4,6}$ 為$CEC_{t_4}^3 = k_2$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{H}_{5,6}$ 為$CEC_{t_5}^3 = H_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$\bar{L}_{5,6}$ 為$CEC_{t_5}^3 = L_3$時的股價價值，股價價值約當值。
$N_n(\cdot)$ 為n維標準常態累積機率
$\rho_{i,j}$ 為兩變數間之相關係數

六、案例模擬

根據「都市更新條例施行細則」及「都市更新條例」之監督與管理權利建構本研究之序列複式可展延選擇權評價模型之模擬案例，輔以 Longstaff 於文獻中所提起可展延選擇權之特性，以證明此模型可應用於都市更新流程中法規面給予最低價值依據。

6.1 都市更新案例現況

6.1.1 計畫範圍與現況

1. 計畫範圍

此更新案於 102 年 1 月 28 日公告更新單元範圍。更新單元位於中山北路一段 83 巷以南、天津街以西、長安東路一段以北、長安東路一段 11 巷以東街廓內，總面積為 1,219m^2（368.75 坪）。計畫範圍內計有 8 棟加強磚造三或四層之建築物及 1 棟七層鋼筋混凝土之建築物，屋齡多超過 40 年，現況為住宅與店面混合使用，西北側空地則為停車場使用。臨近道路狀況為 12 米天津街、6.2 米中山北路一段 83 巷和 4 米長安東路一段 11 巷。

2. 不動產市場資訊

中山區內推出的建案種類相當多元，加上中山區地段優越、商業色彩濃厚，區內生活條件成熟，因此本區個案價格均能保持抗跌性及良好的銷售成績。本地區所處的位置主要屬於中山區西側長安東路一段之舊有街區區塊，周圍推案量較少，且多屬於小面積基地改建案，平均單價多維持在 96 萬元/坪以上水準。以下為中山區新成屋參考個案表 6-1：

表 6-1 中山區新成屋參考個案

	祥德大直	三輝白宮	長安一品	遠宏香榭
基地位置	明水路 526 巷 58 弄 8 號	復興北路 426 號	長安東路二段 109 號	龍江路 356 巷 50 號
規劃用途	電梯住宅	電梯住宅	電梯住宅	電梯住宅
投資興建	祥德開發	三輝建設	永富開發 吉美建設	遠宏建設
建築設計	廖國誠	三門	黃翔龍	許世偉
基地面積	364 坪	503 坪	250 坪	121 坪
樓層規劃	6F/B2	14F/B4	15F/B5	8F/B2

規劃戶數	8 戶	46 戶	39 戶	22 戶
建蔽率	39%	45%	65%	45%
平均單價	186 萬元/坪	170 萬元/坪	130 萬元/坪	88 萬元/坪
總銷金額	23 億元	25 億元	25 億元	6 億元

資料來源：住展房屋網，本研究整理；更新日期：民國 102 年 8 月 27 日

3. 土地與建築物權屬

更新單元內計有台北市中山區正義段三小段 418（部分）、419、420、421、422、423、424、425、426、427 地號等 10 筆土地，面積 1,219m^2，土地權屬於 23 位所有權人，全為私有。範圍內計有 9 棟建物，門牌為天津街 42、44、46、48、50、52 號，長安東路一段 11 巷 1 號、1 之 1 號、3 號、5 號，建物權屬於 22 位合法建築物所有權人，合法建築物總面積為 3,868.36m^2，皆屬私有合法建築物。其公私有土地面積權屬及合法建築物面積權屬如下：

表 6-2　公私有土地權屬

土地權屬	土地面積（m^2）	比例（%）	土地筆數	所有權人數
公有土地	0	0	0	0
私有土地	1,219	100	10	23
小計	1,219	100	10	23

資料來源：財團法人都市更新研究發展基金會，本研究整理

表 6-3　合法建築物權屬

建物權屬	建物面積（m^2）	比例（%）	建物數目	所有權人數
公有合法建築物	0	0	0	0
私有合法建築物	3,868.36	100	34	22
小計	3,868.36	100	34	22

資料來源：財團法人都市更新研究發展基金會，本研究整理

6.1.2 計畫實施內容

1.同意參與都市更新事業比例

此更新單元內土地及合法建築物所有權人，同意參與都市更新事業計畫之人數及面積比例均高於「都市更新條例」第 22 條規定之法定門檻。依「都市更新條例」第 22 條：本案位於自行劃定更新單元範圍內，事業計畫同意比例『應經更新單元範圍內私有土地及私有合法建築物所有權人均超過三分之二，並其所有土地總面積及合法建築物總樓地板面積均超過四分之三之同意』，如下表 6-4：

表 6-4 所有權人及樓地板面積同意門檻

	土地部分		合法建物部分	
	面積（m^2）	所有權人數	面積（m^2）	所有權人數
全區總和	1219	23	3,868.36	22
公有	0	0	0	0
私有	1219	23	3,868.36	22
已取得同意數	1009.14	17	2,966.94	16
已取得同意比例	82.78%	73.91%	76.70%	72.73%
法定同意比例	75.00%	66.7%	75.0%	66.7%

資料來源：此為事業權變公辦公聽會資料，本研究整理

2.申請容積獎勵項目及額度

此案欲申請都市更新容積獎勵面積為 1,572.85m^2，容積獎勵額度為法定容積之 23.04%。使用分區作為第四種商業區使用，其建蔽率與容積率應以第三種商業區之規定為準[1]，建蔽率 65%、容積率 560%，故法定容積為 6,826.40m^2。本案依「都市更新條例」第 44 條、「都市更新建築容積獎勵辦法」第 4 條、第 7 條、第 8 條、第 9 條與「台北市都市更新自治條例」第 19 條相關規定，依法申請容積獎勵。其中，「都市更新建築容積獎勵辦法」第 13 條規定：依都市更新條例第 44 條辦理之建築容積申請，其獎勵後建築容積不得超過各該建築基地 1.5 倍之法定容積，換句話說，都市更新容積獎勵所能增加上限為法定容積 50%，6,826.40m^2 ×0.5＝3,413.20m^2。各項容積獎勵說明如下表 6-5：

[1] 本計畫範圍屬中華民國 75 年 11 月 4 日 75 府工二字第 119797 號公告「修定南京東路、松江路、忠孝東路、中山北路所圍地區細部計畫（通盤檢討）暨配合修訂主要計畫案」範圍內。

表 6-5　容積獎勵項目

項目	容積額度（%）	面積m²	備註
ΔF1原建築容積高於法定容積	–	–	–
ΔF2更新後分配樓地板低於當地平均水準	–	–	–
ΔF3更新時程	5.37%	366.41	–
ΔF4考量地區環境狀況	0.29%	20.04	捐贈道路用地
ΔF5量體、造型、色彩與環境調和	6.00%	409.58	上限 6%
ΔF5人行步道	5.38%	367.24	臨計畫道路留設 3~6 公尺步道
ΔF5綠建築	6.00%	409.58	銀級綠建築
ΔF6處理占有他人土地之舊違建	–	–	–
總計	23.04%	1,572.85	475.79 坪

資料來源：財團法人都市更新研究發展基金會，本研究整理，實際規劃設計以未來臺北市政府核定之事業計畫為準

3. 建築設計說明

此案擬規劃地上 18 層地下 5 層之店面辦公住宅大樓，建材結構為鋼骨造第三級標準，汽車停車位 94 部（法定 88 部），機車停車位 103 部（法定 103 部）之大樓，依「台北市都市更新事業建築物工程造價要項」規定之工程造價為 189,100、地下室第四層 245,800、地下室第五層 264,700（元/坪）。由黃模村建築師事務所設計。總銷售面積約為 4087.34 坪，詳細如下表 6-6：

表 6-6　總銷售面積

項目	數量
基地總面積	1,219m²（368.75 坪）
建蔽率/容積率	65%/560%
建築面積	720.74m²（218.02 坪）
法定容積面積	6,826.40m²（2,064.99 坪）

容積獎勵額度	23.04%
營建樓地板面積	約 4,741.36 坪
總銷售面積	約 4,087.34 坪

資料來源：此為事業權變公辦公聽會資料，本研究整理，實際規劃設計以未來臺北市政府核定之事業計畫為準

圖 6-1　日間透視模擬圖（天津街側）

資料來源：此為事業權變公辦公聽會資料

6.2 計畫實施內容

此都市更新事業採權利變換方式辦理，結合信託機制（土地與興建資金信託），保障地主權益，有效降低本案籌資風險，避免地主擔心實施者以土地申辦貸款之疑慮。

6.2.1 收入估計

選擇宏大不動產估價師聯合事務所以比較法及土地開發分析法之估價結果，所估更新後總價值最高為 37 億 4297 萬元，地主可分回價值最大，對地主較為有利。依「都市更新權利變換實施辦法」第 6 條分別委託宏大不動產估價師聯合事務所、巨秉不動產估價師聯合事務所與東融不動產估價師聯合事務所查估。此案估價基準日民國 102 年 1 月 15 日，符合「都市更新權利變換實施辦法」第 8 條，為權利變換計畫報核日前六個月內之日期，但應本研究將都市更新流程時間重新假設，故其總價值僅為參考之用。詳細參考下表 6-7：

表 6-7 估價結果

	102 年 1 月 15 日	宏大	巨秉	東融
更新前	土地單價（萬元/坪）	438.00	416.00	385.00
	更新前土地總價（萬元）	16 億 1511 萬元	15 億 3399 萬元	14 億 1968 萬元
更新後	店面均價（萬元/坪）	182.33	176.30	173.96
	辦公室均價（萬元/坪）	72.30	70.10	81.79
	住宅平均單價（萬元/坪）	84.60	82.20	82.79
	車位平均單價（萬元/部）	300.85	290.00	264.89
	更新後房地總價值（萬元）	37 億 4297 萬元	36 億 3952 萬元	36 億 6929 萬元

資料來源：此為事業權變公辦公聽會資料，本研究整理，實際以市府核定公告內容為準

6.2.2 成本估計

依據臺北市「都市更新事業及權利變換計畫內有關費用提列總表」認列，此案共同負擔總額為 15 億 3270 萬元，其中包含工程費用 10 億 8500 萬元、權利變換費 8541 萬元、貸款利息 5716 萬元、稅捐 1741 萬元與管理費用為 2 億 8772 萬元等五大總項目。以下為各項目費用之提列說明及表格，

1.工程費用為 10 億 8500 萬元

（1）重建費用（A）為 10 億 8170 萬元

包括新建工程與其他必要費用：新建工程提列部分包含營造費用、特殊建材設備、建築設計費用、鑑界費、鑽探費用與建築相關規費；其他必要費用提列部分包含公寓大廈管理基金、外接水、電、瓦斯管線工程費用與鄰房鑑定費。

（2）公共設施費用（B）為 330 萬元

僅提列公共設施工程開闢費用，為捐贈道路用地

2.權利變換費用（C）為 8541 萬元

（1）都市更新規劃費

指辦理都市更新各階段之相關規劃、擬定事業計畫及權利變換計畫送審，以及計畫核定之後續協助執行等費用，包含舉辦公聽會、說明會費用與營業稅。

（2）不動產估價及技師簽證費用

以實際合約金額認列，並應檢具合約影本佐證。

（3）更新前測量及技師簽證費用

以實際合約金額認列，並應檢具合約影本佐證。

（4）土地改良物拆遷補償及安置費用為 7524 萬元

包括合法建築物拆遷補償費與合法建築物拆遷安置費：合法建築物拆遷補償費為因權利變換而拆除或遷移之土地改良物，應補償其價值或建築物之殘餘價值；合法建築物拆遷安置費為原合法建築物之住戶、營業行為無法繼續居住或營業，補貼其租金及搬遷費用。

（5）地籍整理費

更新後委由地政士辦理之費用、以及地政機關收取之相關規費。

3.貸款利息（D）為 5716 萬元

指實施者為實施更新事業所須辦理融資或自有資金之成本，主要是工程費用及權利變換費用之貸款利息。貸款年利率為自有資金比例×「郵政儲金一年期定存利率」＋融資比例×「五大銀行平均基準利率」，依提列標準中一般開發商拆分三成自有資金及七成融資。

4.稅捐（E）為 1741 萬元

包括印花稅與營業稅：含承攬契據、讓售不動產契據之印花稅；依土地所有權人分回房屋現值所課徵之營業稅。

5.管理費用（F）為 2 億 8772 萬元

（1）人事行政管理費（F1）為 6138 萬元

指實施者從更新案的啟動至更新完成期間，所進行土地整合，人事、庶務等行政作業、各項法律、會計等支出所需費用。

（2）營建工程管理費（F2）

指實施者為保障施工品質及施工進度所需支付之營建工程管理費。

（3）銷售管理費用（F3）為 7470 萬元

實施者為銷售更新後取得之折價抵付房地之費用（變現成本），採「包銷方式」，即包括廣告、企劃、及銷售等成本費用。

（4）風險管理費（F4）為 1 億 4696 萬元

可視為實施者投入資本、創意、管理技術與風險承擔所應獲取對應之報酬。

（5）信託管理費（F5）為 468 萬元

指為確保更新案可依計畫進行，將更新單元內不動產、實施經費信託予信託機構所需之費用。

表 6-8　都市更新事業及權利變換計畫內有關費用提列標準

<table>
<tr><th>項目</th><th colspan="2">細項</th><th>複價（元）</th><th>提列說明</th></tr>
<tr><td rowspan="9">重建費用（A）</td><td rowspan="6">新建工程</td><td>營造費用</td><td rowspan="6">10 億 7090 萬</td><td rowspan="9">1. 營建費用=總樓地版面積×平均工程造價
2. 本案以市府標準鋼骨造 16-20F 第 3 級 18.91 萬/坪為基礎，依物價指數、地下室加成調整提列
3. 因應基地特性提列特殊大地工程、制震壁、空調
4. 建築設計、鑑界、鑽探、規費、管理基金等依實際合約或政府標準提列</td></tr>
<tr><td>特殊建材設備</td></tr>
<tr><td>建築設計費用</td></tr>
<tr><td>鑑界費</td></tr>
<tr><td>鑽探費用</td></tr>
<tr><td>建築相關規費</td></tr>
<tr><td rowspan="3">其他必要費用</td><td>公寓大廈管理基金</td><td rowspan="3">1080 萬</td></tr>
<tr><td>鄰房鑑定費</td></tr>
<tr><td>外接水、電、瓦斯管線工程費用</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>公共設施費用（B）</td><td>協助公共設施開闢</td><td>公共設施工程開闢費用</td><td>330 萬</td><td>捐贈道路用地</td></tr>
<tr><td colspan="3">壹、工程費用合計(A)+(B)：</td><td colspan="2">10 億 8500 萬元</td></tr>
<tr><td colspan="3">都市更新規劃費</td><td rowspan="4">1017 萬</td><td rowspan="4">依實際合約提列</td></tr>
<tr><td colspan="3">不動產估價及技師簽證費用</td></tr>
<tr><td colspan="3">更新前測量及技師簽證費用</td></tr>
<tr><td colspan="3">地籍整理費</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">土地改良物拆遷補償及安置費用</td><td>合法建築物拆遷補償費</td><td rowspan="2">7524 萬</td><td rowspan="2">1. 拆遷補償：依屋齡折舊補償計算，含拆除費用
2. 拆遷安置：住家、店面補貼，預估期間 42 月</td></tr>
<tr><td>合法建築物拆遷安置費</td></tr>
<tr><td colspan="3">貳、權利變換費用（C)：</td><td colspan="2">8541 萬元</td></tr>
<tr><td colspan="3">貸款利息</td><td>5716 萬</td><td>1. 相關所需費用依照年利率×年期計算（依性質部分折半）
2. 以自有資金 30% 、利率 1.34% 、貸款 70% 、利率 2.88% ，計算平均利率為 2.418%
3. 年期以 4 年估計</td></tr>
<tr><td colspan="3">參、貸款利息（D)：</td><td colspan="2">5716 萬元</td></tr>
<tr><td colspan="3">印花稅</td><td rowspan="2">1741 萬</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">營業稅</td></tr>
<tr><td colspan="3">肆、稅捐（E)：</td><td colspan="2">1741 萬元</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>人事行政管理費（F1）</td><td>6138 萬</td><td rowspan="5">1. 人事行政管理費提列 5%
2. 銷售管理費用依法提列 6%
3. 風險管理費依法提列 11.25%
4. 信託費用依銀行報價提列</td></tr>
<tr><td>營建工程管理費（F2）</td><td>—</td></tr>
<tr><td>銷售管理費用（F3）</td><td>7470 萬</td></tr>
<tr><td>風險管理費（F4）</td><td>1 億 4696 萬</td></tr>
<tr><td>信託管理費（F5）</td><td>468 萬</td></tr>
<tr><td>伍、管理費用（F）：</td><td colspan="2">2 億 8772 萬元</td></tr>
</table>

資料來源：此為事業權變公辦公聽會資料，本研究整理，實際以市府核定公告內容為準

6.3 序列複式可展延選擇權應用

淨現值法適合可預測且固定現金流量之計算，實質選擇權法則較適合不確定性現金流量之專案。

6.3.1 都市更新模擬實施流程

都市更新事業作業流程中主要分為都市更新事業概要階段、都市更新事業計畫及權利變換計畫階段與審核階段等三大階段。

1.實施者

本研究依據法規假設實施者受土地及合法建築物所有權人委託實施都市更新事業。依據「都市更新條例」第 11 條規定，『申請當地直轄市、縣（市）主管機關核准，自行組織更新團體實施該地區之都市更新事業，或委託都市更新事業機構為實施者實施之』。

2.計畫起始年（基年）

本研究依據法規假設實施者開始實施都市更新事業之時間為t_0。

3.法令依據

為縮短更新審議時程，依「都市更新條例」第 29 條規定，實施者擬具都市更新事業計畫及權利變換計畫一併報請主管機關審議核定。

4.都市更新事業之監督與管理

（1）都市更新概要審核階段

本研究假設流程符合都市更新概要審核六十日內完成之規定，並且，選擇實施延長審核期限六十日之權利。依「都市更新條例施行細則」第 9 條規定，『直轄市、縣（市）主管機關受理土地及合法建築物所有權人依本條例第十條或第十一條規定申請核准實施都市更新事業之案件，應自受理收件日起六十日內完成審核。但情形特殊者，得延長審核期限一次，最長不得逾六十日。』

（2）事業權變計畫擬定階段

本研究假設流程符合都市更新事業計畫擬定一年內須報核之規定，並且，選擇實施延長報核期限兩個半年之權利。依「都市更新條例」第 54 條規定，『實施者依第十條或第十一條規定實施都市更新事業計畫，應自獲准之日起一年內，擬具都市更新事業計畫報核；逾期未報核者，直轄市、縣（市）主管機關得撤銷其更新核准。因故未能於前項期限內擬具都市更新事業計畫報核者，得敘明理由申請展期；展期之期間每次不得超過六個月；並以二次為限。』

（3）事業權變計畫審查階段

本研究假設流程符合事業權變計畫申請核定於一年內完成審核，並且，選擇延長審核期限半年之權利。依「都市更新條例施行細則」第 9-1 條規定『申請核定都市更新事業計畫或權利變換計畫之案件，應自受理收件日起六個月內完成審核。但情形特殊者，得延長審核期限一次，最長不得逾六個月。』

表 6-9　假設都市更新流程時間

階段	作業	年度
自行劃定更新單元	更新單元公告	102.01.28
都市更新概要審核（4 個月）	都市更新概要申請、審核、核准	102.02~102.04
	都市更新概要延長審核	102.04~102.06
事業權變計畫擬定（24 個月）	事業權變計畫擬定、公聽會	102.06~103.06
	事業權變計畫延長擬定	103.06~104.06
事業權變計畫審核（18 個月）	事業權變計畫申請、審核、核定	104.06~105.06
	事業權變計畫延長審核	105.06~105.12

資料來源：本研究整理

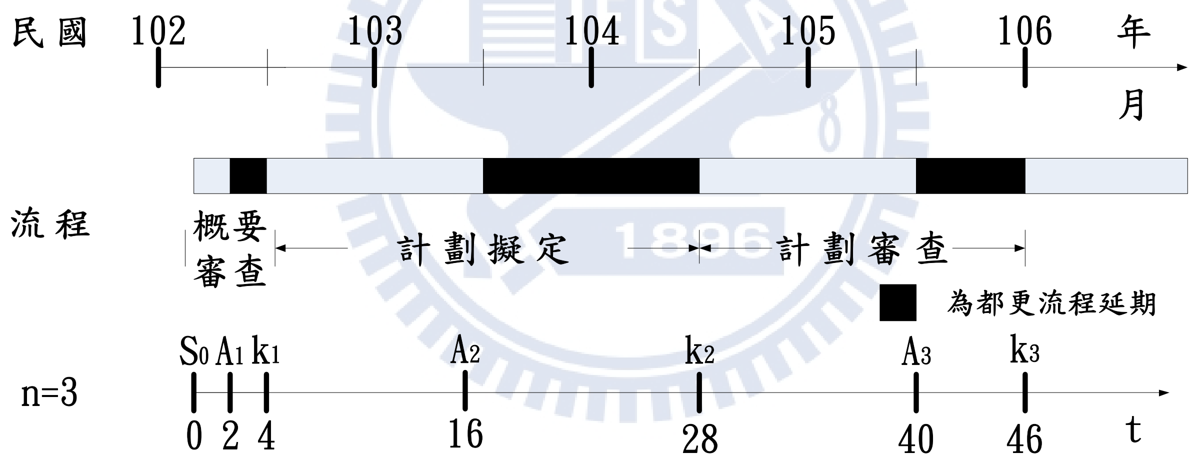

圖 6-2　假設進度相對示意圖

資料來源：本研究整理

6.3.2　評價模型參數設定

進行序列複式可展延選擇權評價模型的模擬案例應用時，本研究將不考慮股東籌資的融資活動項目之影響，只單從計畫的角度考量並評估投資計畫之價值。主要參數的假設，列舉如下：

1.折現率

以資本資產定價模型（Capital asset pricing model）訂定本研究之折現率，折現率公式為：$E(r) = r_f + \beta \times (r_m - r_f)$

此處，r_f為政府公債利率平均值 3.69%；r_m為台灣股市平均年報酬率 18.90%；β則取營造建材類指數與大盤之相關係數 0.8934，詳細內容如表 6-10、表 6-11 及附錄 B。最後計算出之期望報酬率為 17.28%，以此期望報酬率作為本案例現值之折現率，其中，月複利之名義利率（報酬率）為1.44%（17.28% ÷ 12）。

表 6-10　十年期中央政府公債次級市場（集中市場）利率

民國	%	民國	%
83	7.24	93	2.66
84	6.79	94	2.05
85	6.04	95	1.98
86	6.14	96	2.32
87	5.99	97	2.29
88	5.80	98	1.51
89	5.63	99	1.37
90	4.03	100	1.38
91	3.46	101	1.21
92	2.16	平均	3.69

說明；係指距到期日接近十年之政府公債殖利率，本研究整理，資料來源係根據櫃檯買賣中心資料再加權平均

表 6-11　股票集中市場總市值、投資報酬率、本益比、殖利率

年度	98 年底（2009）	99 年底（2010）	100 年底（2011）	101 年底（2012）
上市家數（股票）	741	758	790	809
總市值（百萬元）	21,033,640	23,811,416	19,216,183	21,352,161
本益比（倍）	110.54	16.04	15.76	23.62
殖利率（%）	2.76	3.58	5.65	4.12
當年度平均投資報酬率（%）	78.34	9.58	-21.18	8.87
當年底至目前累積平均投資報酬率（%）	-5.97	-14.19	8.87	

資料來源：台灣證券交易所，本研究整理

2. 無風險利率（r_f，r）

利用十年期中央政府公債之利率作為無風險利率計算 0.308%(3.69%／12)。

3.資產變異數（σ^2）

整理營造建材類上市公司相關發行量加權股票指數，計算出股票報酬率的年標準差 0.4212、月標準差 0.1226，詳細參考附錄 B。

4.期初資產價值（S_{t_0}）

假設期初資產價值為 8,000,000，但是，實務上取得建築執照並非獲得都市更新事業之價值還須經過後續工程期間預售及完工後之銷售過程，故以模擬方式進行評估。

5.履約價格（K）

假設每月有相同資金支出，以實際案例現金流量表（附錄 C）作為序列複合可展延選擇權評價模型之各階段履約價格之參考。

6.額外酬金（A）

為「都市更新條例」第 54 條及「都市更新條例施行細則」第 9-1 條規定之合法權利，所以不須額外酬金，各階段之A_i設為零。

7.延期價值（L、H）

延期時機只會發生在價值介於區間$[L,H]$中，計算方式為：

$$L_i = A_i + k_i e^{-r(t)}$$

$$H_i = L_i + K_i - A_i - k_i e^{-r(t)}$$

此處，t為第i階段中所延期之時間間距。

延期價值（L、H）作為未來判斷是否展延或是執行之依據。

6.3.3 序列複式可展延選擇權之模擬

1.序列成本之模擬

將部分沉默成本（更新前測量及技師簽證費用、建築師設計費、都市更新規劃費與人事行政管理費）進行階段支出之拆解提列假設。凡是在第一階段為了後續階段考量而增加的相關成本，應該分別提列為後續各階段支出。

表 6-12 資產價值、履約價格與延期價值

參數	備註	第一階段	第二階段	第三階段
資產價值S	8,000,000			
延期價值H		8,000,000	16,000,000	26,000,000
延期價值L		7,959,816	15,901,292	25,916,608
履約價格	一般權利K	8,000,000	16,000,000	26,000,000
	延期權利k	8,009,000	16,500,000	26,400,000

資料來源：本研究整理

此處，模擬原則為每階段之延期期間履約價k_i必須大於一般期間之履約價K_i，並且可慮$L_i = A_i + k_i e^{-r(t)}$之設定，是否折現後大於$H_i$。每階段至決策是否延期時皆考量未來延期後所需支付之履約價（累積成本）。

2.序列複式可展延選擇權之結果

本都市更新案例為一個三層之序列複式可展延選擇權。本案例計畫之選擇權價值為各階段一般權利價值和延期權利價值加總，詳細參考下圖 6-3（值得一提的事，當在計算各種延期情境時，還需考慮本來一般權利之價值去設定約當值，才符合 Longstaff 之模型設定)。經由評價模型計算出都市更新事業計畫價值為 49,928,000 元（4.9928e+007），模型以 MATLAB 編寫，附錄 D 有三層模型程式說明。

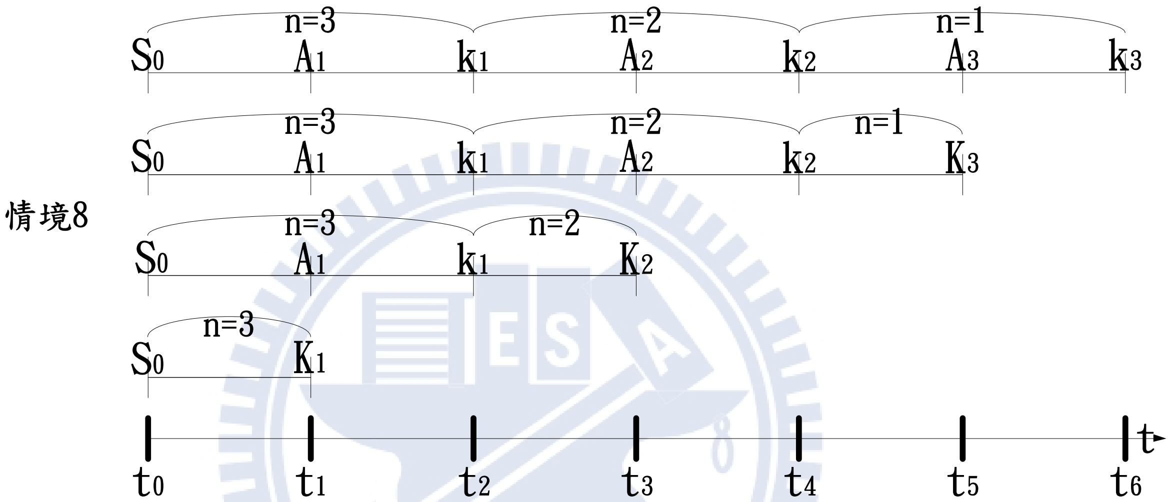

圖 6-3　情境八之所有權利價值

資料來源：本研究整理

表 6-13　參數說明與結果

項目	參數	價值
期初資產價值	S	8,000,000
履約價值	K	詳細參考表 6-12
延期價值	H 、L	詳細參考表 6-12
無風險利率	r	0.308%
資產價值變異之標準差	σ	0.1226
$SCEC_{t_0}^{3}$		49,928,000元

資料來源：本研究整理

6.4 參數分析與結論

藉由參數分析和 Longstaff 於文獻中所提起可展延選擇權基本特性，以證明序列複式可展延選擇權模型符合基本可展延選擇權特性。

6.4.1 序列複式可展延選擇權之參數分析

本研究將針對Longstaff於文獻中所提起比較靜態分析之各參數或特殊性質進行說明與驗證。各參數對於「可延期買權」價值的影響：

（1）對於S、t、r和σ^2來說，可延期買權價值為一遞增函數，但對於K則相反，以上參數之影響相似於一般歐式買權參數之影響。

（2）對於變數S，可延期買權在價外時，比一般歐式買權較易波動，相反地，可延期買權在價內時，比一般歐式買權較不易波動。

（3）對於延期時間點來說，可延期買權價值為一遞增函數，對於A和k來說，則是一個遞減函數。

本研究針對標的資產期初價值S進行分析呼應 Longstaff 於文獻中所提起之價內可延期買權比一般歐式買權較易波動。

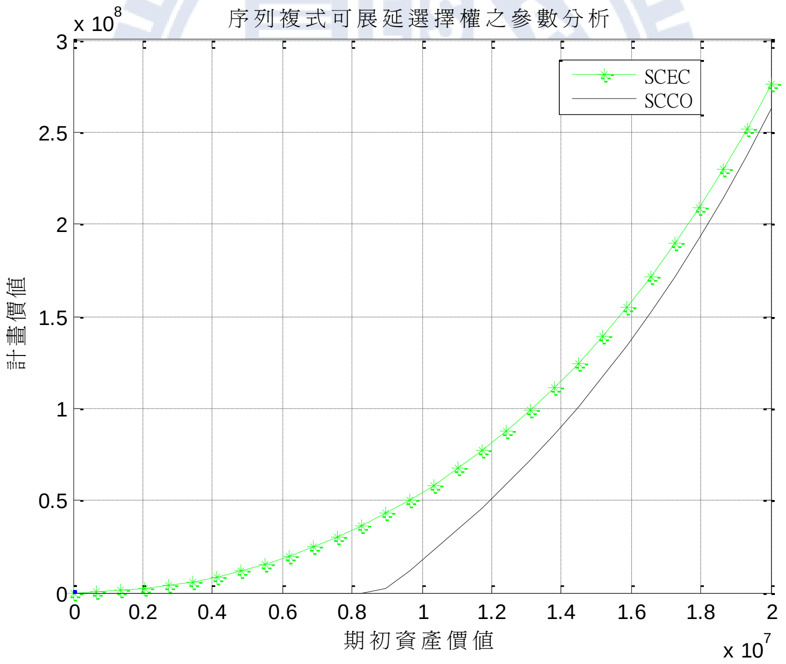

圖 6-4　期初價值對計畫價值之影響

資料來源：本研究整理

此處，經由序列複合可展延選擇權評價模型評估之計畫總價值又會比序列複合選擇權評價模型所評估出的計畫價值更高，主要原因在於延期權利所額外產生之經濟價值

本研究針對資產價值變異之無風險利率r進行分析，結果呼應 Longstaff 於文獻中所提起之可展延買權對於r為遞增函數之性質。

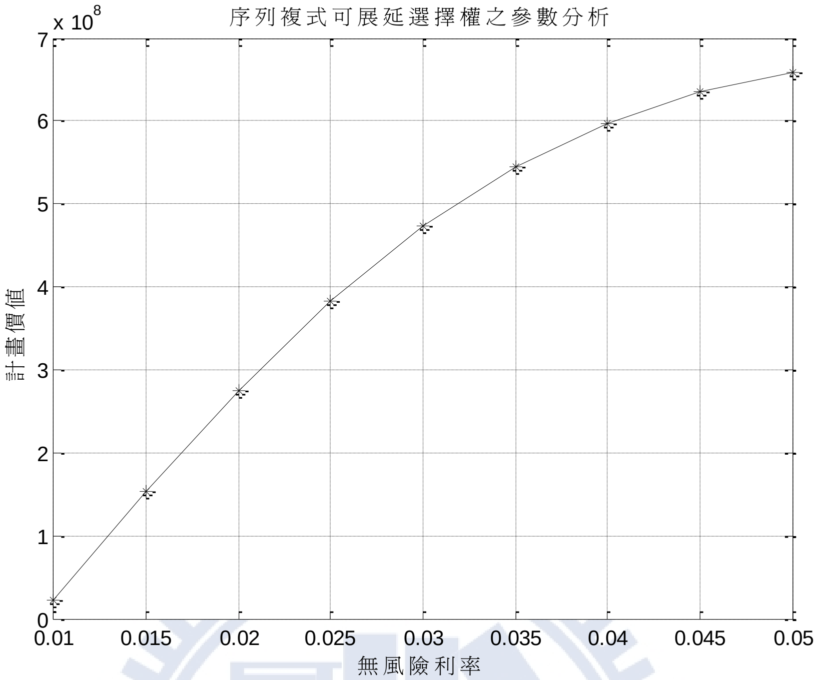

圖 6-5　無風險利率對計畫價值之影響

資料來源：本研究整理

本研究針對資產價值變異之標準差σ進行分析，結果呼應 Longstaff 於文獻中所提起之可展延買權對為遞增函數之性質。

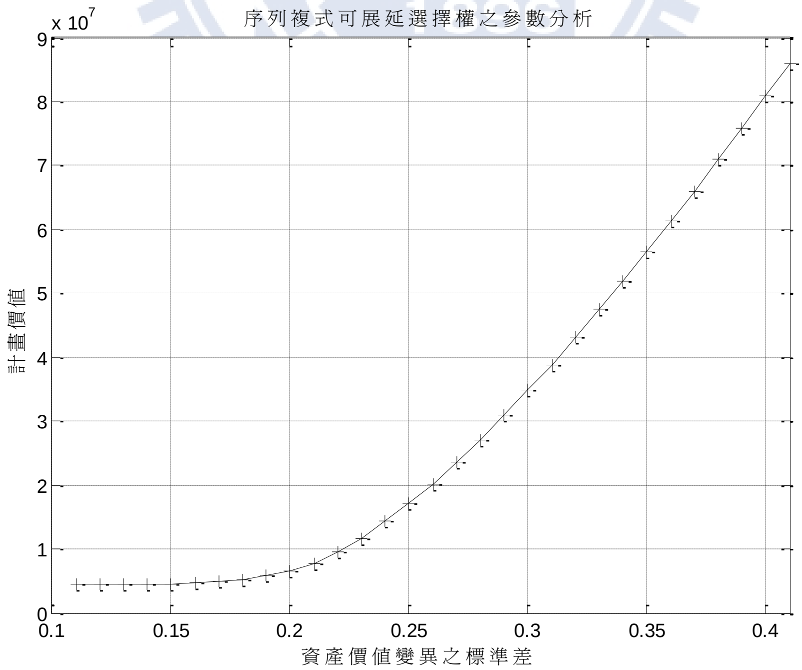

圖 6-6　標準差對計畫價值之影響

資料來源：本研究整理

此處，選擇權的管理彈性使得投資案可獲得無限的上部報酬以及有限的下部風險損失，價值源自於未來市場的不確定性，所以，資產價值之標準差愈大，亦即風險愈高的專案計畫，經由選擇權評價模型評估之專案的總價值會愈高。

6.4.2 結論

序列複式可展延選擇權符合複式選擇權所有特性，唯一差別在於延期權利所產生之經濟價值。本研究以我國內都市更新機制，建構都市更新實質選擇權價值之評價方法，進一步了解政府制定都市更新流程延期時機，間接提供了投資人參與都市更新之誘因，雖然，此誘因並非如建築容積獎勵般為實質回饋，但是，也相對給予實施者更多彈性空間完成都市更新流程以便取得售屋收益。此外，依照本研究模型之設定，可將H和L之延期價值（Critical value）當作實施者於每一階段是否延期之依據。最後，都市更新協商成本高，更新流程相當長，實際流程時間皆超出預定計畫時間，故，本研究之序列複式可展延選擇權評價結果可提供實施者於財務分析上之最低經濟價值，以評估都市更新流程取得建照執照（取得開發土地權利）之價值。

6.4.3 後續研究

1. 多層序列複式可展延選擇權之封閉解

對於大於三層序列複式可展延選擇權之情境封閉解，未來只要可以找到其累積機率點之變化規律，依層數設定迴圈自動嵌入計算，並且，解決累積機率上下限所產生之發散問題，應可求得多層序列複式可展延選擇權之封閉解。

2. 複式可展延多期選擇權模型

參考(Chung and Johnson 2011)文獻中所提之延期多次之模型，相較於Longstaff 可展延選擇權模型只能延期一次，應該可將其模型再次變化。其模型與本研究模型最大差別在於只加最後一次的延期權利價值，其餘皆為複式選擇權累加。

3. 時間參數為隨機變數之選擇權模型

都市更新流程在時間不確定不可預測下，時間是一個變數，可以參考模擬的方式，如：產品來到時間、等候時間、加工時間、運輸時間等等，常常會使用統計分配來代表該時間。(蔡政軒 2009)以 Cassimon et al. 新藥開發為例，透過接受棄卻法(Acceptance/Rejection Method)產生隨機履約價、隨機到期日並運用蒙地卡羅法模擬選擇權價值。論文中提到運用蒙地卡羅法模擬選擇權價值具備高度彈性可就不同狀況作調整、可解決難以處理的選擇權封閉解，並且可增加模擬次數已達到所要求的精確度。

4. 賣方展延選擇權

Longstaff 文獻中有提到藉由賣方（option writer）所延期之金融合約或條件求償證券（contingent claims）。賣方展延選擇權之現金流量與可展延選擇權現金流量截然不同，然而，評價模型差別只在於需增加限制條件。

參 考 文 獻

Anthony, Y. and E. Roger (2004). "Value of the option to develop residential land: An empirical estimate." Real Estate Review **34**(4): 60-66.

Capozza, D. R. and G. A. Sick (1991). "Valuing long-term leases: The option to redevelop." The Journal of Real Estate Finance and Economics **4**(2): 209-223.

Cassimon, D., P.-J. Engelen, et al. (2004). "The valuation of a NDA using a 6-fold compound option." Research Policy **33**(1): 41-51.

Chung, Y. P. and H. Johnson (2011). "Extendible options: The general case." Finance Research Letters **8**(1): 15-20.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994). Investment under uncertainty, Princeton university press.

Geske, R. (1979). "The valuation of compound options." Journal of financial economics **7**(1): 63-81.

Gukhal, C. R. (2004). "The compound option approach to American options on jump-diffusions." Journal of Economic Dynamics and Control **28**(10): 2055-2074.

Huang, Y. L. and C. C. Pi (2009). "Valuation of multi-stage BOT projects involving dedicated asset investments: a sequential compound option approach." Construction Management and Economics **27**(7): 653-666.

Lajeri-Chaherli, F. (2002). "A note on the valuation of compound options." Journal of Futures Markets **22**(11): 1103-1115.

Lee, M.-Y., F.-B. Yeh, et al. (2008). "The generalized sequential compound options pricing and sensitivity analysis." Mathematical Social Sciences **55**(1): 38-54.

Longstaff, F. A. (1990). "Pricing options with extendible maturities: Analysis and applications." The Journal of Finance **45**(3): 935-957.

Quigg, L. (1993). "Empirical testing of real option-pricing models." The Journal of Finance **48**(2): 621-640.

Shevchenko, P. V. (2010). "Correcting the holder-extendible European put formula." arXiv preprint arXiv:1010.0090.

Smit, H. T. (1997). "Investment analysis of offshore concessions in the Netherlands." Financial Management: 5-17.

Smit, H. T. and L. Trigeorgis (2008). Strategic investment: Real options and games, Princeton University Press.

Titman, S. (1985). "Urban land prices under uncertainty." The American Economic Review **75**(3): 505-514.

Williams, J. T. (1991). "Real estate development as an option." The Journal of Real Estate Finance and Economics **4**(2): 191-208.

Williams, J. T. (1997). "Redevelopment of real assets." Real Estate Economics **25**(3): 387-407.

畢佳琪 (2008). 多層序列複合買權之平賭解及其在多期污水下水道系統投資評估之應用. 土木工程系所. 新竹市, 國立交通大學. **碩士:** 119.

陳松男 (2008). 金融工程學, 新陸書局.

蔡政軒 (2009). 隨機履約價、隨機到期日選擇權於專案鑑價之應用—以新藥開發為例. 管理研究所(Graduate School of Business Administration). 嘉義市, 國立嘉義大學. **碩士:** 98.

李孟育 (2007). "序列複合選擇權之評價, 分析, 計算與應用."

丁玟甄 (2008). 待更新不動產之實質選擇權價值分析. 臺北大學不動產與城鄉環境學系學位論文, 臺北大學**:** 1-92.

吳秉蓁 (1999). 都市更新容積獎勵對開發時機的影響. 地政研究所, 國立政治大學. **碩士:** 60.

孫維潔 (1991). 台北市獎勵民間參與都市更新制度之研究. 地政研究所. 台北市, 國立政治大學. **碩士:** 0.

梁仁旭 (2007). "不動產開發選擇權時間價值比之實證分析." 都市與計劃 **34**(1): 1-12.

陳奉瑤 (2003). "可更新土地開發價值之研究." Journal of Taiwan Land Research **6**(1): 116.

游振輝 (2004). "都市更新權利變換前價值評估之探討." 土地問題研究季刊 **3**(4): 129-136.

蔡進國 (1997). 實質選擇權在土地評價上之應用: 傳統評估方法與實質選擇權法之分析比較, National Taiwan University Department of Finance.

錢學陶 (1978). "都市計畫學導論." 茂榮圖書公司. 民國 67 年 **8**.

附錄A　證明 Chung and Johnson 一般式

Chung and Johnson 一般式：

$$
\begin{aligned}
&EC_{t_0}^1\left(S_{t_0}, K_1, t_1, k_1, t_2, A\right) = S_{t_0}N\left(d_1(H, t_1 - t_0)\right) - K_1e^{-r(t_1-t_0)}N\left(d_2(H, t_1 - t_0)\right) \\
&+S_{t_0}[N_2(-d_1(H, t_1 - t_0), d_1(k_1, t_2 - t_0), \rho) - N_2(-d_1(L, t_1 - t_0), d_1(k_1, t_2 - t_0), \rho)] \\
&-k_1e^{-r(t_2-t_0)}[N_2(-d_2(H, t_1 - t_0), d_2(k_1, t_2 - t_0), \rho) \\
&\qquad\qquad - N_2(-d_2(L, t_1 - t_0), d_2(k_1, t_2 - t_0), \rho)] \\
&-Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-d_2(H, t_1 - t_0)\right) - N\left(-d_2(L, t_1 - t_0)\right)\right]
\end{aligned}
$$

(A.1)

其中，

$$d_1(\cdot, t) = \frac{ln\left(S_{t_0}/\cdot\right) + (r + \sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot, t) = d_1(\cdot, t) - \sqrt{\sigma^2 t}$$

證明：

在風險中立下，可展延買權期初價值為到期日價值之現值，以無風險利率r折現，並以下列公式代表之：

$$
\begin{aligned}
&EC_{t_0}^1\left(S_{t_0}, K_1, t_1, k_1, t_2, A\right) \\
&\quad = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1} - K_1\right)1_{\{S_{t_1}>H\}}\right] + e^{-r(t_2-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_2} - k_1\right)1_{\{L<S_{t_1}<H \& S_{t_2}>k_1\}}\right]
\end{aligned}
$$

(A.2)

此處，$1_{\{\cdot\}}$代表指標函數（Indicator Function），其定義如下：

$$1_{\{\cdot\}} = \begin{cases} 1 \text{ 若事件}\{\cdot\}\text{成立(或出現)} \\ 0 \text{ 若事件}\{\cdot\}\text{不成立(或不出現)} \end{cases}$$

先考慮代表一般權利的傳統買權，

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1} - K_1\right)1_{\{S_{t_1}>H\}}\right]$$

(A.3)

在風險中立Q測度下，標的資產價格動態過程為

$$S_{t_1} = S_{t_0}exp\left[(r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + \sigma\Delta W_1^Q\right]$$

(A.4)

此處，$\Delta W_1 = W_{t_1} - W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0, \mathrm{t}_1 - t_0)$

將布朗運動ΔW_1經變數轉換為標準常態分佈Z：

$$Z_1 = \Delta W_1^Q/\sqrt{t_1 - t_0}$$

(A.5)

可於式(A.4)中求出ΔW_1^Q代入式(A.5)，因此，

$$Z_1 = \frac{ln\left(S_{t_1}/S_{t_0}\right) - (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

(A.6)

一般權利在時間點t_1時履約。令履約（$S_{t_1}-H=0$）成立時的股價價值H。

$$Z_1 = \frac{ln\left(S_{t_1}/S_{t_0}\right) - (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_1}\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/H\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

令

$$b_{1,1} = \frac{ln\left(S_{t_0}/H\right) + (r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = d_2(H, t_1-t_0)$$

(A.7)

則當$S_{t_1} > H$等價於$Z_1 > -b_{1,1}$，可知累積機率之下限。
所以，式(A.3)可以寫成

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1}-K_1\right)1_{\{S_{t_1}>H\}}\right] = e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}\left(S_{t_1}-K_1\right)f(Z_1)dZ_1$$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}S_{t_1}f(Z_1)\,dZ_1 - e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}K_1 f(Z_1)\,dZ_1$$

(A.8)

其中，

$$f(Z_1) = \frac{e^{-{Z_1}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty$$

將把式(A.8)分成二項求算：

<u>第二項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}K_1 f(Z_1)\,dZ_1 = K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N\left(b_{1,1}\right) = K_1 e^{-r(t_1-t_0)}N\left(d_2(H, t_1-t_0)\right)$$

(A.9)

<u>第一項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}S_{t_1}f(Z_1)\,dZ_1$$

(A.10)

依據標的資產對數價格的動態過程，設定一些符號以便本研究使用，

$$E[ln S_{t_1}] = ln S_{t_0} + (r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0)$$

$$u_1 = STD[ln S_{t_1}] = \sigma\sqrt{t_1 - t_0}$$

(A.11)

因此S_{t_1}可以寫成：

$$S_{t_1} = exp\left(E[ln S_{t_1}] + u_1 Z_1\right) = S_{t_0} exp\left[(r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + \sigma \Delta W_1^Q\right]$$

(A.12)

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0}exp\left[(r - \sigma^2/2)(t_1 - t_0) + \sigma Z_1\sqrt{t_1 - t_0}\right]$代換，可得

$$S_{t_0}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}\,dZ_1$$

(A.13)

選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1{}' = Z_1 - \sigma\sqrt{t_1 - t_0} = Z_1 - u_1$（$dZ_1{}' = dZ_1$），同時積分下限移動變更為$-b_{1,1} - \sigma\sqrt{t_1 - t_0} = -(b_{1,1} + u_1) = -c_{1,1}$

則由式(A.7)得知

$$c_{1,1} = \frac{ln(S_{t_0}/H) + (r + \sigma^2/2)(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} = d_1(H, t_1 - t_0)$$

(A.14)

所以，

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}S_{t_1}f(Z_1)\,dZ_1 = S_{t_0}\int_{-b_{1,1}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-[Z_1-u_1]^2/2}\,dZ_1 =$$

$$= S_{t_0}\int_{-c_{1,1}}^{\infty}\left(\frac{e^{-Z_1{}'^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1{}' = S_{t_0}N(c_{1,1}) = S_{t_0}N\left(d_1(H, t_1 - t_0)\right)$$

(A.15)

最後，整合式(A.7)和式(A.15)可以得證 Chung and Johnson 一般式之一般權利部分，

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[(S_{t_1} - K_1)1_{\{S_{t_1}>H\}}\right]$$

$$= S_{t_0}N\left(d_1(H, t_1 - t_0)\right) - K_1e^{-r(t_1-t_0)}N\left(d_2(H, t_1 - t_0)\right)$$

(A.16)

再考慮代表延期權利的買權的買權，

$$e^{-r(t_2-t_0)}E^Q\left[(S_{t_2} - k_1)1_{\{L<S_{t_1}<H\&S_{t_2}>k_1\}}\right]$$

(A.17)

可展延買權延期權利部分於時間點t_1的價值折現回時間點t_0為

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(C_{t_1}(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1) - A, 0\right)\right]$$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(C_{t_1}(S_{t_1}, k_1, t_2 - t_1) - A\right)1_{\{L<S_{t_1}<H\}}\right]$$

其中，

$$C_{t_1}\left(S_{t_1},k_1,t_2-t_1\right) = e^{-r(t_2-t_1)}E^Q\left[\left(S_{t_2}-k_1\right)1_{\{S_{t_2}>k_1\}}\right]$$
$$= S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)-k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)$$

所以，

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(C_{t_1}\left(S_{t_1},k_1,t_2-t_1\right)-A,0\right)\right]$$
$$= e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)-k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)-A\right)1_{\{L<S_{t_1}<H\}}\right] \tag{A.18}$$

其中，

$$d_1(\cdot,t) = \frac{ln\left(S_{t_0}/\cdot\right)+(r+\sigma^2/2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}};\ d_2(\cdot,t) = d_1(\cdot,t)-\sqrt{\sigma^2 t}$$

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_1} = S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma\Delta W_1^Q\right]$。此處，$\Delta W_1 = W_{t_1}-W_{t_0}$，$\Delta W_1 \sim N(0,t_1-t_0)$。將布朗運動$\Delta W_1$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_1 = \Delta W_1^Q/\sqrt{t_1-t_0}$。

標的買權延期之情況成立條件為$L<C_{t_1}<H$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\overline{H}_{1,2}$，下限為$\overline{L}_{1,2}$，皆為股價價值約當值。

$$Z_1 = \frac{ln\left(S_{t_1}/S_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_1}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

$$-\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,2}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right] < Z_1 < -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}\right]$$

令

$$b_{2,1} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\overline{H}_{1,2}\right)+(\mathrm{r}-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = d_2(H,t_1-t_0) \tag{A.19}$$

令

$$l_{2,1} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/\overline{L}_{1,2}\right)+(\mathrm{r}-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = d_2(L,t_1-t_0) \tag{A.20}$$

即是$L<C_{t_1}<H$的成立條件為$\overline{H}_{1,2}>S_{t_1}>\overline{L}_{1,2}$，且$\overline{H}_{1,2}>S_{t_1}>\overline{L}_{1,2}$等價於$-b_{2,1}>Z_1>-l_{2,1}$，可知累積機率之上下限。此時，買權的買權才會被延期。

所以，式(A.18)可以被整理成

$$e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)-k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)-A\right)1_{\{L<S_{t_1}<H\}}\right]$$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}\left(S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)-k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)-A\right)f(Z_1)dZ_1$$

$$= e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)f(Z_1)dZ_1$$

$$-e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)f(Z_1)dZ_1 - e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}A\,f(Z_1)dZ_1$$

(A.21)

其中，

$$f(Z_1) = \frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, -\infty < Z_1 < \infty$$

本研究將把式(A.21)分成三項求算：

<u>第二項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\left(d_2(k_1,t_2-t_1)\right)f(Z_1)dZ_1$$

(A.22)

在風險中立Q測度下，標的資產價格的動態過程為$S_{t_2} = S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)+\sigma\Delta W_2^Q\right]$。此處，$\Delta W_2 = W_{t_2}-W_{t_0}$，$\Delta W_2 \sim N(0,t_2-t_0)$。布朗運動$\Delta W_2$經變數轉換為標準常態分佈Z：$Z_2 = \Delta W_2^Q/\sqrt{t_2-t_0}$。
標的買權在時間點t_2時履約。令履約（$S_{t_2}-k_1=0$）成立時的股價價值k_1。

$$Z_2 = \frac{ln\left(S_{t_2}/S_{t_0}\right)-(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}} = -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/S_{t_2}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$

$$> -\left[\frac{ln\left(S_{t_0}/k_1\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}\right]$$

令

$$h_{2,2} = \frac{\ln\left(S_{t_0}/k_1\right)+(\mathrm{r}-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}} = d_2(k_1,t_2-t_0)$$

(A.23)

則當$S_{t_2} > k_1$等價於$Z_2 > -h_{2,2}$，可知累積機率之下限。
其中，依照布朗運動的假設，在兩個不重疊的時段中增量是互相獨立的，相關係數為0

$$cov\left(\Delta W_1^Q,\Delta W_2^Q\right) = var\left(\Delta W_1^Q\right) = t_1-t_0, t_0 < t_1 < t_2$$

$$\rho = cov(Z_1,Z_2) = \frac{1}{\sqrt{t_1-t_0}\sqrt{t_2-t_0}}cov\left(\Delta W_1^Q,\Delta W_2^Q\right) = \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}$$

(A.24)

將式(A.18)中$d_2(k_1,t_2-t_1)$作下式計算：

$$
\begin{aligned}
d_2(k_1,t_2-t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{k_1}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}} \\
&= \frac{h_{2,2}+\rho Z_1}{\sqrt{1-\rho^2}}
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

其中，

$$\sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_2-t_0}}=\sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}}=\sqrt{1-\rho^2}$$

最後，利用二維累積機率常態分配將第二項式(A.22)改寫成

$$
\begin{aligned}
&e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}k_1e^{-r(t_2-t_1)}N\big(d_2(k_1,t_2-t_1)\big)f(Z_1)dZ_1 \\
&= k_1e^{-r(t_2-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}}N\left(\frac{h_{2,2}+\rho Z_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1 \\
&= k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[\int_{-\infty}^{-b_{2,1}}N\left(\frac{h_{2,2}+\rho Z_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1\right. \\
&\qquad\left.-\int_{-\infty}^{-l_{2,1}}N\left(\frac{h_{2,2}+\rho Z_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1\right] \\
&= k_1e^{-r(t_2-t_0)}\left[N_2\big(-b_{2,1},h_{2,2};\ \rho\big)-N_2\big(-l_{2,1},h_{2,2};\ \rho\big)\right] \\
&= k_1e^{-r(t_2-t_0)}[N_2(-d_2(H,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho) \\
&\qquad-N_2(-d_2(L,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho)]
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

此處，$N(\cdot)$　為一維標準常態累積機率；$N_2(\cdot)$　為二維標準常態累積機率

第一項為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} S_{t_1}N\big(d_1(k_1,t_2-t_1)\big)f(Z_1)dZ_1$$

(A.27)

將第一項中S_{t_1}以$S_{t_0}exp\left[(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)+\sigma Z_1\sqrt{t_1-t_0}\right]$代換，可得

$$S_{t_0}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} N\big(d_1(k_1,t_2-t_1)\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}dZ_1$$

(A.28)

依據標的資產對數價格的動態過程，再設定一些符號以便本研究使用，

$$u_1 = \sigma\sqrt{t_1-t_0}$$
$$u_2 = \sigma\sqrt{t_2-t_0}$$

(A.29)

第二層選擇權進行參數轉換與整理，令$Z_1' = Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = Z_1-u_1$（$\mathrm{d}Z_1' = \mathrm{d}Z_1$）。同時積分上下限移動變更為$-b_{2,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -\big(b_{2,1}+u_1\big) = -c_{2,1}$; $-l_{2,1}-\sigma\sqrt{t_1-t_0} = -\big(l_{2,1}+u_1\big) = -m_{2,1}$。
則由式(A.19)和式(A.20)得知

$$c_{2,1} = b_{2,1}+u_1 = \frac{\ln\big(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{H}_{1,2}\big)+(\mathrm{r}+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = d_1(H,t_1-t_0)$$

(A.30)

$$m_{2,1} = l_{2,1}+u_1 = \frac{\ln\big(\mathrm{S}_{t_0}/\bar{L}_{1,2}\big)+(\mathrm{r}+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}} = d_1(L,t_1-t_0)$$

(A.31)

將式(A.18)中$d_1(k_1,t_2-t_1)$作下式計算：

$$\begin{aligned}
d_2(k_1,t_2-t_1) &= \frac{ln\left(\frac{S_{t_1}}{k_1}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_1)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+Z_1\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)+Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}}{\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}} \\
&= \frac{\left[ln\left(\frac{S_{t_0}}{k_1}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t_0)\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}+\left[Z_1'\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}{\left[\sqrt{\sigma^2(t_2-t_1)}\right]/\sigma\sqrt{t_2-t_0}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(h_{2,2}+u_2\right)+\rho Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{g_{2,2}+\rho Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

(A.32)

此處，將$Z_1 = Z_1{}' + \sigma\sqrt{t_1-t_0}$代入整理而得，再將等式分子和分母同除以$\sigma\sqrt{t_2-t_0}$其中，式(A.25)

$$\sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_2-t_0}} = \sqrt{1-\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}} = \sqrt{1-\rho^2}$$

令，也可以從式(A.23)得知$h_{2,2}+u_2 = g_{2,2}$

$$g_{2,2} = \frac{ln\left(S_{t_0}/k_1\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}} = d_1(k_1,t_2-t_0)$$

(A.33)

所以，利用二維累積機率常態分配將第一項式(A.27)改寫成

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} S_{t_1}N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)f(Z_1)dZ_1$$

$$= S_{t_0}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} N\left(d_1(k_1,t_2-t_1)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left[Z_1-\sigma\sqrt{t_1-t_0}\right]^2/2}dZ_1$$

$$= S_{t_0}\int_{-m_{2,1}}^{-c_{2,1}} N\left(\frac{g_{2,2}+\rho Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}'^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1{}'$$

$$= S_{t_0}\left[\int_{-\infty}^{-c_{2,1}} N\left(\frac{g_{2,2}+\rho Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}'^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1{}' - \int_{-\infty}^{-m_{2,1}} N\left(\frac{g_{2,2}+\rho Z_1{}'}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(\frac{e^{-Z_1{}'^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)dZ_1{}'\right]$$

$$= S_{t_0}\left[N_2\left(-c_{2,1},g_{2,2};\ \rho\right)-N_2\left(-m_{2,1},g_{2,2};\ \rho\right)\right]$$

$$= S_{t_0}[N_2(-d_1(H,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)-N_2(-d_1(L,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)]$$

(A.34)

<u>第三項</u>為

$$e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} A\,f(Z_1)dZ_1 = Ae^{-r(t_1-t_0)}\int_{-l_{2,1}}^{-b_{2,1}} f(Z_1)\,dZ_1$$

$$= Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[\int_{-\infty}^{-b_{2,1}} f(Z_1)\,dZ_1 - \int_{-\infty}^{-l_{2,1}} f(Z_1)\,dZ_1\right]$$

$$= Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-b_{2,1}\right)-N\left(-l_{2,1}\right)\right]$$

$$= Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-d_2(H,t_1-t_0)\right)-N\left(-d_2(L,t_1-t_0)\right)\right]$$

(A.35)

整合式(A.26)、式(A.34)和式(A.35)之結果，可以得證 Chung and Johnson 一般式之延期權利部分，

$$
\begin{aligned}
&e^{-r(t_2-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_2}-k_1\right)1_{\{L<S_{t_1}<H\&S_{t_2}>k_1\}}\right] \\
&\quad = S_{t_0}[N_2(-d_1(H,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)-N_2(-d_1(L,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&\quad -k_1e^{-r(t_2-t_0)}[N_2(-d_2(H,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho) \\
&\qquad\qquad -N_2(-d_2(L,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&\quad -Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-d_2(H,t_1-t_0)\right)-N\left(-d_2(L,t_1-t_0)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

最後，將式(A.16)和式(A.36)相加，得證 Chung and Johnson 一般式，

$$
\begin{aligned}
&EC_{t_0}^1\left(S_{t_0},K_1,t_1,k_1,t_2,A\right) \\
&\quad = e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_1}-K_1\right)1_{\{S_{t_1}>H\}}\right]+e^{-r(t_2-t_0)}E^Q\left[\left(S_{t_2}-k_1\right)1_{\{L<S_{t_1}<H\&S_{t_2}>k_1\}}\right] \\
&\quad = S_{t_0}N\left(d_1(H,t_1-t_0)\right)-K_1e^{-r(t_1-t_0)}N\left(d_2(H,t_1-t_0)\right) \\
&\quad +S_{t_0}[N_2(-d_1(H,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)-N_2(-d_1(L,t_1-t_0),d_1(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&\quad -k_1e^{-r(t_2-t_0)}[N_2(-d_2(H,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho) \\
&\qquad\qquad -N_2(-d_2(L,t_1-t_0),d_2(k_1,t_2-t_0),\rho)] \\
&\quad -Ae^{-r(t_1-t_0)}\left[N\left(-d_2(H,t_1-t_0)\right)-N\left(-d_2(L,t_1-t_0)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$N(\cdot)$　為一維標準常態累積機率

$N_2(\cdot)$　為二維標準常態累積機率

ρ　為兩變數間之相關係數

附錄 B　營造建材類與大盤之聯動性

利用營造事業之相關股票指數，包括：達欣工(2535)、興富發(2542)、日勝生(2547)、遠雄建設（5522）、鄉林建設（5531）等三十九間上市公司於 2008 至 2012 年間的發行量加權股價指數計算月報酬率之標準差，以此作為資產變異數之標準差的參考基值。

2008 至 2012 年發行量加權股價指數-營造建材類

日期	營造建材類		日期	營造建材類	
	指數	報酬率		指數	報酬率
2008/01	277.18		2010/07	271.63	2%
2008/02	315.80	14%	2010/08	292.61	8%
2008/03	353.45	12%	2010/09	310.81	6%
2008/04	412.82	17%	2010/10	321.44	3%
2008/05	400.07	-3%	2010/11	339.05	5%
2008/06	339.28	-15%	2010/12	354.40	5%
2008/07	266.05	-22%	2011/01	360.82	2%
2008/08	224.21	-16%	2011/02	335.12	-7%
2008/09	169.44	-24%	2011/03	295.29	-12%
2008/10	118.16	-30%	2011/04	311.17	5%
2008/11	112.39	-5%	2011/05	323.45	4%
2008/12	116.64	4%	2011/06	328.63	2%
2009/01	120.25	3%	2011/07	349.49	6%
2009/02	114.58	-5%	2011/08	305.24	-13%
2009/03	127.62	11%	2011/09	269.82	-12%
2009/04	180.36	41%	2011/10	264.02	-2%
2009/05	253.02	40%	2011/11	258.35	-2%
2009/06	268.38	6%	2011/12	228.75	-11%
2009/07	283.64	6%	2012/01	234.42	2%
2009/08	259.87	-8%	2012/02	271.81	16%
2009/09	279.68	8%	2012/03	285.83	5%
2009/10	299.22	7%	2012/04	268.89	-6%
2009/11	281.01	-6%	2012/05	259.08	-4%
2009/12	283.11	1%	2012/06	251.95	-3%
2010/01	302.59	7%	2012/07	250.23	-1%
2010/02	265.85	-12%	2012/08	261.20	4%
2010/03	277.13	4%	2012/09	285.68	9%
2010/04	293.75	6%	2012/10	273.39	-4%
2010/05	267.82	-9%	2012/11	265.32	-3%

2010/06	266.92	0%	2012/12	277.36	5%
報酬率之標準差為 0.1226（月）或是 0.4212（年）					

資料來源：台灣證券交易所，本研究整理。

2008 至 2012 年發行量加權股價指數（TAIEX）

日期	TAIEX		日期	TAIEX	
	指數	報酬率		指數	報酬率
2008/01	7,922.65		2010/07	7,638.86	3%
2008/02	7,999.48	1%	2010/08	7,883.91	3%
2008/03	8,439.59	6%	2010/09	8,039.50	2%
2008/04	8,877.98	5%	2010/10	8,210.02	2%
2008/05	8,910.21	0%	2010/11	8,350.26	2%
2008/06	8,180.00	-8%	2010/12	8,777.11	5%
2008/07	7,127.70	-13%	2011/01	8,970.76	2%
2008/08	7,071.13	-1%	2011/02	8,742.56	-3%
2008/09	6,203.77	-12%	2011/03	8,575.49	-2%
2008/10	5,043.05	-19%	2011/04	8,860.92	3%
2008/11	4,509.53	-11%	2011/05	8,910.55	1%
2008/12	4,496.38	0%	2011/06	8,748.67	-2%
2009/01	4,475.14	0%	2011/07	8,681.24	-1%
2009/02	4,476.87	0%	2011/08	7,763.33	-11%
2009/03	4,925.88	10%	2011/09	7,385.14	-5%
2009/04	5,724.36	16%	2011/10	7,345.08	-1%
2009/05	6,586.30	15%	2011/11	7,275.44	-1%
2009/06	6,495.99	-1%	2011/12	6,969.15	-4%
2009/07	6,834.54	5%	2012/01	7,176.74	3%
2009/08	6,855.82	0%	2012/02	7,855.93	9%
2009/09	7,321.12	7%	2012/03	8,020.00	2%
2009/10	7,588.72	4%	2012/04	7,620.82	-5%
2009/11	7,611.73	0%	2012/05	7,356.84	-3%
2009/12	7,836.69	3%	2012/06	7,142.52	-3%
2010/01	8,098.58	3%	2012/07	7,187.14	1%
2010/02	7,431.71	-8%	2012/08	7,409.60	3%
2010/03	7,775.16	5%	2012/09	7,610.38	3%
2010/04	8,052.45	4%	2012/10	7,438.14	-2%
2010/05	7,525.68	-7%	2012/11	7,255.63	-2%

2010/06	7,383.42	-2%	2012/12	7,630.81	5%
報酬率之標準差為 0.0616（月）或是 0.2133（年）					

資料來源：台灣證券交易所，本研究整理。

最後，依照月報酬率可以求得營造建材類與大盤之相關係數為 0.8934。

附錄三　現金流量表

年度				102.02~102.05	102.06~103.12	104.01~104.02	104.03~104.05	104.06~106.12	107.01~107.03	107.04~107.06		107.07~108.06	
都市更新流程				事業權變計畫擬定	事業權變計畫報核、審查、核定	申請拆除及建築執照	地上物拆除、殘餘價值補償	建築工程開工、預售	申請使用執照、產權登記	主管機關備查	總計金額	銷售	小計
總項目	項目	細項		資金流出									
壹、工程費用	一、重建費用	（二）、新建工程	1.營建費用			47,781,777	191,127,108	668,944,878	47,781,777		955,635,540		
			2.特殊建材設備				23,818,760	83,365,660	5,954,690		113,139,110		
			3.建築師設計費	571,662	190,554	381,108	95,277	476,385	95,277	95,277	1,905,541		
			4.鑑界費			46,000					46,000		
			5.鑽探費用				150,000				150,000		
			6.建築相關規費			23,819					23,819		1,070,900,010
		（三）、其他必要費用	1.公寓大廈管理基金							407,289	407,289		
			3.外接水、電、瓦斯管線工程費用						5,325,000		5,325,000		
			4.鄰房鑑定費				5,067,711				5,067,711		10,800,000
	二、公共設施費用	（一）、協助公共設施開闢	3.公共設施工程開闢費用			165,000	660,000	2,310,000	165,000		3,300,000		1,085,000,010
貳、權利變換費用	一、都市更新規劃費			3,717,392		2,703,558				337,945	6,758,894		
	二、不動產估價及技師簽證費用			1,791,107							1,791,107		
	三、更新前測量及技師簽證費用			200,000							200,000		
	四、土地改良物拆遷補償及安置費	（一）、合法建築物拆遷補償費				1,137,867	1,137,867				2,275,734		
		（二）、合法建築物拆遷安置費				8,107,141	8,107,141	40,535,704	8,107,141	8,107,141	72,964,266		75,240,000
	五、地籍整理費					1,420,000					1,420,000		85,410,001
參、貸款利息						3,175,556	12,702,222	31,755,556	6,351,111	3,175,556	57,160,001		57,160,001
肆、稅捐					146,920	631,755	2,145,029	7,081,534	675,831	6,728,927	17,409,996		17,409,996
伍、管理費用	一、人事行政管理費			8,294,595	2,764,865	5,529,730	5,529,730	27,648,649	5,529,730	6,082,703	61,380,000		
	二、營建工程管理費												
	三、銷售管理費用						9,337,500	46,687,500	9,337,500	9,337,500	74,700,000		
	四、風險管理費			20,040,000	6,680,000	13,360,000	13,360,000	66,800,000	13,360,000	13,360,000	146,960,000		
	五、信託管理費					4,680,000					4,680,000		287,720,000
當期總支出				34,614,755	9,782,339	89,143,310	273,238,345	975,605,866	102,683,057	47,632,337	1,532,700,008		1,532,700,008
當期累積總支出				34,614,755	44,397,094	133,540,404	406,778,749	1,382,384,615	1,485,067,671	1,532,700,008			
當期總成本（不含貸款利息）				34,614,755	9,782,339	85,967,754	260,536,123	943,850,310	96,331,946	44,456,781	1,475,540,007		1,475,540,007
當期累積總成本（不含貸款利息）				34,614,755	44,397,094	130,364,848	390,900,971	1,334,751,281	1,431,083,226	1,475,540,007			
當期總支出				- 34,614,755	- 9,782,339	- 89,143,310	- 273,238,345	- 975,605,866	- 102,683,057	- 47,632,337			
更新後償還貸款												- 1,168,887,380	
折舊費用												- 24,551,400	
總項目	項目	細項		資金流入									
經費	自有資金（30%）			52,108,324	21,164,445	58,384,677	49,626,975	305,643,781			486,928,202		
	融資（70%）	建築融資70%；信用貸款30%				103,475,939	360,096,266	569,117,662	103,475,939		1,136,165,805		
當期總收入				52,108,324	21,164,445	161,860,615	409,723,241	874,761,443	103,475,939	-	1,623,094,008		1,623,094,007
當期累積總收入				52,108,324	73,272,769	235,133,384	644,856,625	1,519,618,068	1,623,094,007	1,623,094,007			
更新後銷售金額												1,709,309,000	

附錄 D　情境三之 MATLAB CODE 編寫說明

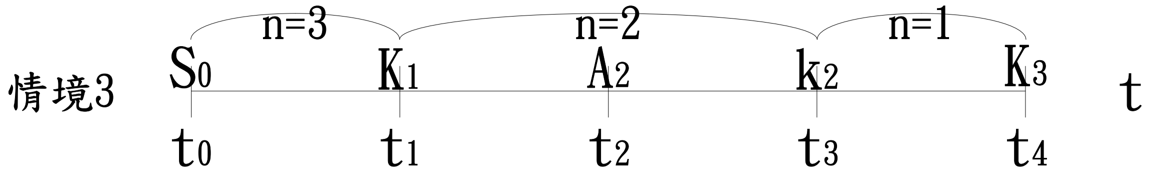

圖 E-1 三層序列複式可展延選擇權之情境三
資料來源：本研究整理

令標的可展延買權$EC_{t_3}^1$在時間點t_3為價平（$EC_{t_3}^1 = k_2$）時，股價約當值為$\bar{S}_{3,4}$。可知第一層可展延買權之一般權利部分價值$EC_{t_3}^1$：

$$EC_{t_3}^1 \;=\; S_{t_3}N_1\big(c_{1,1*3}\big) - K_3e^{-r(t_4-t_3)}N_1\big(b_{1,1*3}\big) \tag{D.1}$$

其中，

$$c_{1,1*3} \;=\; \frac{ln\big(S_{t_3}/H_3\big) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_3)}{\sigma\sqrt{t_4-t_3}};\; b_{1,1*3} \;=\; \frac{ln\big(S_{t_3}/H_3\big) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_3)}{\sigma\sqrt{t_4-t_3}}$$

利用二分法計算可得股價約當值$\bar{S}_{3,4}$，誤差為10^{-6}。

第二層可展延買權在時間點t_2延期之情況成立條件為$L_2 < CEC_{t_2}^1 < H_2$。令延期條件成立時的股價價值之上限為$\bar{H}_{2,4}$，下限為$\bar{L}_{2,4}$，皆為股價價值約當值。

$$\begin{aligned} CEC_{t_2}^1 \;=\; & S_{t_2}N_2\big(g_{2,1*2}, c_{2,2*2};\, \rho_{1,2*2}\big) - K_3e^{-r(t_4-t_2)}N_2\big(h_{2,1*2}, b_{2,2*2};\, \rho_{1,2*2}\big) \\ & - k_2e^{-r(t_3-t_2)}N_1\big(h_{2,1*2}\big) \end{aligned} \tag{D.2}$$

其中，

$$g_{2,1*2} \;=\frac{ln\big(S_{t_2}/\bar{S}_{3,4}\big) + (r+\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}};\; h_{2,1*2} \;=\frac{ln\big(S_{t_2}/\bar{S}_{3,4}\big) + (r-\sigma^2/2)(t_3-t_2)}{\sigma\sqrt{t_3-t_2}}$$

$$c_{2,2*1} \;=\; \frac{ln\big(S_{t_2}/H_3\big) + (r+\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}};\; b_{2,2*2} \;=\; \frac{ln\big(S_{t_2}/H_3\big) + (r-\sigma^2/2)(t_4-t_2)}{\sigma\sqrt{t_4-t_2}}$$

利用二分法計算可得股價約當值$\bar{H}_{2,4}$及$\bar{L}_{2,4}$，誤差為10^{-6}。

令標的兩層可展延買權在時間點t_1為履約（$CEC_{t_1}^2 = H_1$）時，股價價值為$\bar{H}_{1,4}$。

$$CEC_{t_1}^2 = S_{t_1}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -c_{3,1*1} \\ g_{3,2*1} \\ c_{3,3*1} \end{pmatrix};\, \big[\rho_{i,j*1}\big]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -m_{3,1*1} \\ g_{3,2*1} \\ c_{3,3*1} \end{pmatrix};\, \big[\rho_{i,j*1}\big]_{3\times3}\right]\right\}$$

$$-K_3e^{-r(t_4-t_1)}\left\{N_3\left[\begin{pmatrix} -b_{3,1*1} \\ h_{3,2*1} \\ b_{3,3*1} \end{pmatrix};\, \big[\rho_{i,j*1}\big]_{3\times3}\right] - N_3\left[\begin{pmatrix} -l_{3,1*1} \\ h_{3,2*1} \\ b_{3,3*1} \end{pmatrix};\, \big[\rho_{i,j*1}\big]_{3\times3}\right]\right\}$$

$$-k_2e^{-r(t_3-t_1)}\left[N_2\left(-b_{3,1*1},h_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)-N_2\left(-l_{3,1*1},h_{3,2*1};\ \rho_{1,2*1}\right)\right]$$
$$-A_2e^{-r(t_2-t_1)}\left[N_1\left(-b_{3,1*1}\right)-N_1\left(-l_{3,1*1}\right)\right]$$

(D.3)

其中，

$$c_{3,1*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}};\ b_{3,1*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}}$$

$$m_{3,1*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}};\ l_{3,1*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}{\sigma\sqrt{t_2-t_1}}$$

$$g_{3,2*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}};\ h_{3,2*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/\bar{S}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_1)}{\sigma\sqrt{t_3-t_1}}$$

$$c_{3,3*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}};\ b_{3,3*1}=\frac{ln\left(S_{t_1}/H_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_1)}{\sigma\sqrt{t_4-t_1}}$$

利用二分法計算可得股價約當值$\bar{H}_{1,4}$，誤差為10^{-6}。

最後，可以算出

$$c_{4,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}};\ b_{4,1}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{1,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_1-t_0)}{\sigma\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$c_{4,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ b_{4,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{H}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$m_{4,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}};\ l_{4,2}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{L}_{2,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_0)}{\sigma\sqrt{t_2-t_0}}$$

$$g_{4,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right)+(r+\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}};\ h_{4,3}=\frac{ln\left(S_{t_0}/\bar{S}_{3,4}\right)+(r-\sigma^2/2)(t_3-t_0)}{\sigma\sqrt{t_3-t_0}}$$

$$c_{4,4}=\frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right)+(r+\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}};\ b_{4,4}=\frac{ln\left(S_{t_0}/H_3\right)+(r-\sigma^2/2)(t_4-t_0)}{\sigma\sqrt{t_4-t_0}}$$

以及，

$$CEC_{t_0}^3=e^{-r(t_1-t_0)}E^Q\left[max\left(0,CEC_{t_1}^2-K_1\right)\right]$$
$$=S_{t_0}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}c_{4,1}\\-c_{4,2}\\g_{4,3}\\c_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix}c_{4,1}\\-m_{4,2}\\g_{4,3}\\c_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\}$$
$$-K_3e^{-r(t_4-t_0)}\left\{N_4\left[\begin{pmatrix}c_{4,1}\\-b_{4,2}\\h_{4,3}\\b_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]-N_4\left[\begin{pmatrix}c_{4,1}\\-l_{4,2}\\h_{4,3}\\b_{4,4}\end{pmatrix};\ \left[\rho_{i,j}\right]_{4\times4}\right]\right\}$$

$$
- k_2 e^{-r(t_3-t_0)} \left\{ N_3 \left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -b_{4,2} \\ h_{4,3} \end{pmatrix} ;\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3} \right] - N_3 \left[\begin{pmatrix} c_{4,1} \\ -l_{4,2} \\ h_{4,3} \end{pmatrix} ;\ \left[\rho_{i,j}\right]_{3\times3} \right] \right\}
$$

$$
- A_2 e^{-r(t_2-t_0)} \left[N_2\left(c_{4,1}, -b_{4,2};\ \rho_{1,2}\right) - N_2\left(c_{4,1}, -l_{4,2};\ \rho_{1,2}\right) \right] - K_1 e^{-r(t_1-t_0)} N_1\left(c_{4,1}\right) \tag{D.4}
$$