

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

基於流體體積法之兩相流(包含熱質傳)
數值方法及其應用

VOF-Based Algorithms and Their Applications for
Two-Phase Flows (Including Heat and Mass Transfers)

研究生：林仕文

指導教授：崔燕勇教授

中華民國一百零三年一月

基於流體體積法之兩相流(包含熱質傳)數值方法及其應用
VOF-Based Algorithms and Their Applications for
Two-Phase Flows (Including Heat and Mass Transfers)

研究生：林仕文
指導教授：崔燕勇

Student: Shi-Wen Lin
Advisor: Yeng-Yung Tsui

國立交通大學
機械工程學系
博士論文

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem. It features a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized representation of a building or structure with the letters 'E', 'S', and 'A' on it. Below this, the text 'A Thesis' is written. The year '1896' is also visible at the bottom of the inner circle.

Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Doctor of Philosophy
In
Mechanical Engineering
January 2014
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 一 百 零 三 年 一 月

基於流體體積法之兩相流(包含熱質傳)數值方法及其應用

學生：林仕文

指導教授：崔燕勇博士

國立交通大學機械工程學系

摘要

本研究最主要的目標是發展一套可用於非結構性網格中的含相變化的兩相流數值方法。基於流體體積法(VOF)，本文提出兩套相關的計算方法。第一種方法稱為通量混合介面捕捉法(FBICS)，其是透過直接求解流體體積分率的傳輸方程式來捕捉介面的運動。在計算的過程中，為了同時維持介面的鮮明度及體積分率的界限性，本研究是使用通量混合的方式來處理網格控制面上所需要的對流通量，然而本方法的缺點在於其所獲得的介面通常佔據了多個網格的寬度。另外一套方法則稱為守衡內插介面追蹤法(CISIT)，本方法是先以內差的方式重建介面後，再以先預測後修正的方式處理介面的移動。此方法計算後所得的流體體積分率分布，除了介面所在的網格外，其餘皆是 0 或 1 的均勻分布，而且介面只有佔據一個網格的寬度。不同於PLIC法，由於CISIT法的方法相當簡單，因此可輕易地在幾何外觀較為複雜的非結構性網格中使用，而且不需任何複雜的處理便可推展至三維的問題之中。在PLIC法中，其介面重建的方式並非簡單容易處理的，而且在計算面上體積通量時必須考慮許多類型的介面形狀(二維流場中有16種情形而三維則有64種)來進行，因此也造成其介面推移的計算上相當複雜。經由許多問題的測試，可知本研究的兩套數值方法於自由表面流中模擬後所得的結果與理論解或實驗數據都相當吻合並且可在非結構性的網格中所使用。

接著為了能夠模擬含相變化的兩相流問題，本研究特別將相變化所產生的質熱傳效應導入守衡內插介面追蹤法之中。經由介面處質量及能量的跳躍邊界條件可獲得通過介面的質傳量並將此質傳量以源項的方式導入連續方程式之中。然後，對於溫度場而言本研究是將介面視為一組能量內邊界的方式來處理，並且最後將以全隱性的求解方式來計算能量方程式。此外，基於假設介面處溫度及熱傳量連續性的條件來取代跳躍邊界，本方法亦可推展至模擬無相變化的雙流體熱傳問題。將本方法應用於鄰近臨界壓力的水平平板薄膜沸騰問題中，其結果顯示在不同的壁過熱溫度下將有不同的沸騰模式出現。根據不同的壁面過熱度，沸騰的模式主要可分為五種：單氣泡模式 ($\Delta T < 15^\circ\text{C}$)、單/多氣泡模式 ($\Delta T = 15 \sim 19^\circ\text{C}$)、單噴流模式 ($\Delta T = 19 \sim 22^\circ\text{C}$)、雙氣泡模式 ($\Delta T = 22 \sim 27^\circ\text{C}$) 及雙噴流模式 ($\Delta T > 27^\circ\text{C}$)。在單氣泡模式中，模擬所得的時均化 Nusselt 數與半經驗式之結果相當一致。再者，透過模擬水平圓管的薄膜沸騰問題可以證明本文所提出的含相變化之兩相流數值方法可使用於複雜幾何外觀的沸騰流動中。

本文最後將含相變化的守衡內插介面追蹤法修改為可用於計算三維兩相流的流場之中。不同於二維的流場，在網格中本研究是使用多個不共面的三角形介面來進行三維介面的重建。本方法首先透過許多不含相變化的雙流體問題來驗證其在三維流場中對於介面追蹤及預測的能力。另外，也將本方法應用至三維水平平板的薄膜沸騰流動之中。結果顯示利用本方法模擬所獲得的時均化 Nusselt 數與 Klimenko 所提出的半經驗公式之結果相當吻合，尤其是在壁過熱度為 10°C 的情況下。最後，無相變化的熱傳模型也用於模擬油槽內的溶解錫液滴及水中的高溫辛烷噴流之問題中。

VOF-Based Algorithms and Their Applications for Two-Phase Flows (Including Heat and Mass Transfers)

Student: Shi-Wen Lin

Advisor: Dr. Yeng-Yung Tsui

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This paper is aimed at developing a numerical method for two-phase flows with phase change on unstructured grids. In this article, two schemes are presented based on VOF (volume-of-fluid) method. The first scheme is to capture the interface by solving the advection equation of the volume fraction directly, termed as FBICS. In order to maintain the sharpness and boundedness of the interface, the convective flux through each cell face is determined by means of flux blending. The weakness of this method is that the interface region will occupy several grid spaces. In the other scheme (termed as CISIT), the interface is reconstructed first using interpolation practice, following by a predicted-correction procedure to handle the movement of the interface. Except for the interface cells, the VOF distribution is uniform, either in 1 or 0, and the interface occupies only one cell in its width. Unlike the PLIC method, the CISIT can be easily extended to unstructured grids with arbitrary geometry and 3-D problems without causing any further complication because its formulation is very simple. In PLIC, the reconstruction of the interface is not straightforward and the procedure to advance the interface is complicated because a large number of interface configurations (16 configurations for 2-D flows and 64 for 3-D flows) must be considered for determining of the flux across cell faces. Tests on a number of cases reveal that results via these two schemes in this study, which can be used on the unstructured grids, give good agreement with exact solutions or experimental data of free surface flows.

In order to simulate the two-phase flow with phase change, the CISIT method is extended to include heat and mass transfer due to phase change. The mass transfer across the phase boundary is determined by taking into account the mass and energy jump conditions at the interface and added as a source term in the continuity equation. Then, the interface is treated as an internal boundary condition in the temperature field. Finally, the energy equation is solved in an implicit way. Besides, this method is also extended to simulate the heat transfer of two-fluid flows without phase change based on the assumption of the continuity conditions of the temperature and heat flux instead of jump conditions at the interface. Application to film boiling flow on a horizontal plate at a state near the critical pressure shows that the boiling mode will be different at different superheat temperatures. According to different superheat temperatures, the boiling flows can be divided into five modes: single-bubble mode ($\Delta T < 15^\circ C$), single/multiple bubble mode ($\Delta T = 15 \sim 19^\circ C$), single-jet mode ($\Delta T = 19 \sim 22^\circ C$), double-bubble mode ($\Delta T = 22 \sim 27^\circ C$), and double-jet mode ($\Delta T > 27^\circ C$). In the single-bubble mode, good agreement with semi-empirical correlations was obtained in terms of averaged Nusselt number. Furthermore, simulation of film boiling flow on a cylinder demonstrates that this method is applicable to boiling flow with complex geometry.

Finally, the CISIT method with phase change is modified to calculate three-dimensional two-phase flows. Unlike two-dimensional flow, the interface is reconstructed with several non-coplanar triangular interfaces within the grid. First, this method was tested through computations of a number of two-fluid flows without phase change to validate the capability of tracking the interface in three-dimensional flows. In addition, this method was also applied to simulated film boiling flow on a horizontal plate. It can be shown that the space and time averaged Nusselt numbers obtained from the current simulations have good agreement with the semi-empirical correlations of Klimenko, especially for $\Delta T = 10^\circ C$. Finally, the heat transfer model without phase change was used to simulate the molten tin droplet in oil and the octane inlet in water.

誌 謝

首先最需要感謝的當然是指導我七年半的崔燕勇教授，自從碩士班來到交通大學後，很慶幸地遇到了崔老師，在他耐心且用心的指導下才有今日如此紮實的研究內容以及成果。崔老師是我見過做研究最積極且指導學生不遺餘力的教授，而且其對於研究的態度精確且踏實是老師給我最大的影響，將來不管是在業界或是學界相信這種研究態度會讓我受益良多。老師對學生的好實在不是三言兩語在此可以言明，我心中除了感謝還是感謝，非常感謝老師您這一路來的指導與付出。

接著當然是要感謝我的父母，謝謝你們在這一條漫長的路上給我最大的支持及陪伴，如果沒有你們在我背後默默的付出，今天肯定無法到達這條路的終點，再未來的日子裡我一定會努力的回報你們這幾十年來的養育之恩。接著還要感謝的就是這五年來陪我一起走過的女友，在我為了研究繁忙的日子裡，你是我支撐下去的力量，謝謝你的包容及等待。

最後要感謝所以交大機械熱流組的教授們及學長學弟們，這一路下來感謝大家的幫忙及照顧，沒有你們相信我在交大的日子不會這麼精彩快樂，還有要感謝交大資管所及光電系的各位棒球隊的戰友們，讓我在閒暇的時間能夠有棒球可以打，非常謝謝你們，希望以後黑龍旗有機會再跟你們一同出戰。

目 錄

摘 要	i
ABSTRACT	iii
誌 謝	v
目 錄	vi
表目錄	ix
圖目錄	x
符號說明	xv
第一章 緒論	1
1.1 簡介	1
1.1.1 兩相流簡介	1
1.1.2 薄膜沸騰簡介	5
1.2 文獻回顧	11
1.2.1 兩相流之數值方法	11
1.2.1.1 移動網格法 (Moving Grid Method)	11
1.2.1.2 前端追蹤法 (Front-Tracking Method)	11
1.2.1.3 等位函數法 (Level-set method)	12
1.2.1.4 體積追蹤法 (Volume Tracking Method)	13
1.2.1.5 流體體積法 (Volume-of-Fluid Method, VOF)	14
1.2.1.5.1 介面捕捉法 (Interface Capturing Method)	15
1.2.1.5.2 介面重建法 (Interface Reconstruction Method)	17
1.2.1.6 流體體積法與等位函數法之混合	20
1.2.2 薄膜沸騰之數值模擬	21
1.2.2.1 前端追蹤法	21
1.2.2.2 等位函數法	22
1.2.2.3 流體體積法	23
1.3 研究目的	24
第二章 數學模型	34
2.1 簡介	34
2.2 流體體積(VOF)方程式	35
2.3 統御方程式	36
2.4 表面張力模型	38
2.5 相變化之熱質傳模型	39
2.5 無相變化之熱傳模型	41
2.6 邊界條件	42
第三章 通量混合介面捕捉法(FBICS)	45
3.1 簡介	45

3.2	流體體積方程式之離散	46
3.3	通量限制函數	47
3.4	通量混合介面捕捉法	48
第四章	守恆內差介面追蹤法(CISIT)	59
4.1	簡介	59
4.2	介面重建	61
4.3	流體體積分率預測步驟	61
4.4	流體體積分率修正步驟	63
4.4.1	填充過度(over-filling, $\alpha_p > 1$)	64
4.4.2	耗竭過度(over-depleting, $\alpha_p < 0$)	65
4.4.3	填充不足(under-filling, $\alpha_p < 1$)	65
4.4.4	耗竭不足(under-depleting, $\alpha_p > 0$)	66
4.5	CITSIT 計算流程	66
4.6	流體體積分率平滑化	67
第五章	速度場之數值方法	73
5.1	簡介	73
5.2	動量方程式的離散	73
5.2.1	非穩態項	74
5.2.2	對流項	74
5.2.3	擴散項	75
5.2.4	源項	76
5.2.5	動量方程式之代數方程式	78
5.3	速度與壓力之耦合	79
5.3.1	預測步驟 (predictor step)	79
5.3.2	第一次修正步驟 (first corrector step)	80
5.3.3	第二次修正步驟 (second corrector step)	83
5.3.4	PISO 演算法的計算流程	85
5.4	壓力出口邊界之處理	85
第六章	熱傳及質傳之數值方法	88
6.1	簡介	88
6.2	相變化模型之熱傳數值方法	89
6.2.1	介面熱通量之計算	89
6.2.2	能量內邊界之處理	89
6.3	無相變化之熱傳數值方法	90
6.4	能量方程式之離散	91
6.5	兩相流模型之計算流程	93
第七章	FBICS 法之驗證與自由表面流之應用	97
7.1	簡介	97

7.2 介面於均勻速度場之傳輸.....	98
7.3 介面於剪切流(Shear Flow)中之拉伸.....	102
7.4 二維壩體潰堤.....	104
7.5 壩體潰堤流經阻塊.....	107
7.6 水力湧潮 (Hydraulic Bore).....	109
第八章 CISIT 法之驗證與雙流體流場之應用.....	141
8.1 簡介.....	141
8.2 介面於均勻速度場中之傳輸.....	142
8.3 介面於剪切流中之拉伸.....	146
8.4 二維壩體潰堤.....	148
8.5 單一上升氣泡 (Single Rising Bubble).....	150
8.6 雷利-泰勒不穩定性之問題.....	153
第九章 CISIT 法於二維薄膜沸騰分析.....	188
9.1 簡介.....	188
9.2 一維汽化問題.....	189
9.3 水平平板薄膜沸騰.....	192
9.4 水平圓管薄膜沸騰.....	201
9.5 多模式(multi-mode)長平板薄膜沸騰.....	206
第十章 CISIT 法之三維應用.....	236
10.1 簡介.....	236
10.2 CISIT 法之三維化處理.....	238
10.2.1 三維浸潤面積之計算.....	238
10.2.2 三維介面類型及重建.....	239
10.2.3 三維介面處熱通量計算及能量內邊界.....	240
10.2.4 平行化運算.....	242
10.3 三維壩體潰堤.....	244
10.4 氣泡運動分析.....	246
10.4.1 單一上升氣泡.....	246
10.4.2 氣泡融合.....	251
10.5 液滴撞擊薄層液面.....	254
10.6 三維水平平板薄膜沸騰.....	256
10.7 無相變化之熱傳問題.....	260
第十一章 結論.....	294
第十二章 參考文獻.....	298
簡 歷.....	308
論文發表.....	309

表目錄

表一 介面傳輸之 L 誤差與網格收斂速度表(四邊形網格 $u=1$ $v=0$)	155
表二 介面傳輸之 L 誤差與網格收斂速度表(四邊形網格 $u=1$ $v=1$)	155
表三 介面傳輸之 L 誤差與網格收斂速度表(三角形網格 $u=1$ $v=1$)	156
表四 介面於剪切流中之 L 誤差與網格收斂速度表	156
表五 雷利-泰勒不穩定性之 L 誤差與網格收斂速度表	156
表六 二維平板薄膜沸騰於不同網格之氣泡生成周期及時均化 Nusselt 數	210
表七 過熱氣體性質表($P_{sat} = 218bar$, $T_{sat} = 373^{\circ}C$)	210
表八 二維平板薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表	210
表九 二維水平圓管薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表	210
表十 單執行緒與多執行緒平行計算之 CPU 運算時間	264
表十一 單一上升氣泡之終端雷諾數表(*: 2D 模擬結果)	264
表十二 單一上升氣泡底部與頂端沿 z 方向上的壓力變化率	264
表十三 三維平板薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表	264



圖目錄

圖 1.1	兩相流的基本流動形態	26
圖 1.2	兩相流模擬所使用的網格種類	27
圖 1.3	水沸騰曲線	28
圖 1.4	Berenson 假設之薄膜模型	28
圖 1.5	前端追蹤法示意圖	29
圖 1.6	等位函數法示意圖	29
圖 1.7	MAC 法示意圖	30
圖 1.8	流體體積(VOF)法示意圖	30
圖 1.9	SLIC 法沿 X 方向掃視之介面重建示意圖	31
圖 1.10	PLIC 法簡化後介面於網格內分布情形(介面方向與 x 軸之夾角為 $0 \sim \pi/2$)	32
圖 1.11	不同 VOF 之介面重建法比較示意圖	33
圖 2.1	介面曲率大小之示意圖	44
圖 3.1	任意形狀之控制體積與鄰近網格示意圖	54
圖 3.2	網格控制面之上、下游和上上游之示意圖	54
圖 3.3	控制面的上上游格點於非結構性網格中之示意圖	55
圖 3.4	正規化視圖之 CBC 和 TVD 界限準則	56
圖 3.5	FBICS-A 法所使用的非線性通量限制函數	57
圖 3.6	FBICS-B 法所使用的非線性通量限制函數	58
圖 4.1	CISIT 法之介面重建示意圖	69
圖 4.2	介面橫跨不規則網格及所構成的浸潤區域之示意圖(紅色為流體 1)	69
圖 4.3	流動前端介面跨越網格面往鄰近網格推進之示意圖	70
圖 4.4	流動尾端介面跨越網格面離開原網格之示意圖	71
圖 4.5	使用兩次平均平滑化處理後的體積分率分布示意圖	72
圖 5.1	非結構性網格中主格點與鄰近格點及面向量(\vec{S}_f)之示意圖	87
圖 5.2	邊界壓力計算及出口壓力邊界處理方式之示意圖	87
圖 6.1	介面處熱通量計算之示意圖	95
圖 6.2	二維介面處能量內邊界處理之示意圖	95
圖 6.3	兩相流計算流程圖	96
圖 7.1	介面於均勻速度場中所使用的三角網格	111
圖 7.2	介面於均勻速度場中傳輸之理論解	112
圖 7.3	介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.75$, 四邊形網格)	113
圖 7.4	介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.5$, 四邊形網格)	114
圖 7.5	介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.1$, 四邊形網格)	115
圖 7.6	介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.75$, 三角形網格)	116
圖 7.7	介面傳輸之數值誤差與庫倫數關係圖	117

圖 7.8 剪切流中初始介面與速度場分布之示意圖	118
圖 7.9 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=2$).....	119
圖 7.10 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=4$)	120
圖 7.11 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=8$)	121
圖 7.12 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=16$)	122
圖 7.13 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=2$)	123
圖 7.14 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=4$)	124
圖 7.15 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=8$)	125
圖 7.16 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=16$)	126
圖 7.17 介面於剪切流中之數值誤差與庫倫數關係圖.....	127
圖 7.18 二維壩體潰堤之幾何尺寸示意圖	128
圖 7.19 二維壩體潰堤之實驗結果[74]	129
圖 7.20 二維壩體潰堤模擬所使用的三角網格	130
圖 7.21 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 80×50).....	131
圖 7.22 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 120×70).....	132
圖 7.23 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 6218).....	133
圖 7.24 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 9698).....	134
圖 7.25 底部水流前端與時間無因次化關係圖	135
圖 7.26 左側水柱高度與時間無因次化關係圖	135
圖 7.27 壩體潰堤流經阻塊之實驗結果[74]	136
圖 7.28 壩體潰堤流經阻塊隨時間之演進圖	137
圖 7.29 水力湧潮物理模型之示意圖	138
圖 7.30 水力湧潮隨時間之演進圖	139
圖 7.31 水力湧潮右側水位高度與理論解	140
圖 8.1 介面於均勻速度場中所使用的三角網格	157
圖 8.2 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.75$, 四邊形網格)....	158
圖 8.3 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.5$, 四邊形網格)....	159
圖 8.4 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.25$, 四邊形網格)....	160
圖 8.5 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.1$, 四邊形網格)....	161
圖 8.6 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.75$, 四邊形網格)....	162
圖 8.7 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.5$, 四邊形網格)....	163
圖 8.8 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.25$, 四邊形網格)....	164
圖 8.9 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.1$, 四邊形網格)....	165
圖 8.10 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.75$, 三角形網格)...	166
圖 8.11 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.5$, 三角形網格)....	167
圖 8.12 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.25$, 三角形網格)...	168
圖 8.13 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.1$, 三角形網格)....	169
圖 8.14 介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖 ($u=1, v=0$, 四邊形網格)....	170

圖 8.15	介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖 ($u=1, v=1$, 四邊形網格)	171
圖 8.16	介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖 ($u=1, v=1$, 三角形網格)	172
圖 8.17	介面於剪切流中拉伸之結果(四邊形網格)	173
圖 8.18	介面於剪切流中拉伸之結果(三角形網格)	174
圖 8.19	介面於剪切流中誤差與網格數目之關係圖 (四邊形網格)	175
圖 8.20	介面於剪切流中誤差與網格數目之關係圖 (三角形網格)	175
圖 8.21	二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 60x35, 平滑化 1 次)	176
圖 8.22	二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 60x35, 平滑化 2 次)	177
圖 8.23	二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 120x70, 平滑化 1 次)	178
圖 8.24	二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 120x70, 平滑化 2 次)	179
圖 8.25	底部水流前端與時間無因次化關係圖	180
圖 8.26	左側水柱高度與時間無因次化關係圖	180
圖 8.27	氣泡形狀於靜止流體中上升之無因次參數關係圖[77]	181
圖 8.28	上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖($Eo=1, Mo=0.001$)	182
圖 8.29	上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖($Eo=10, Mo=1$)	182
圖 8.30	上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖($Eo=100, Mo=1000$)	183
圖 8.31	氣泡形狀於 $t=0.5$ 秒之局部放大圖	183
圖 8.32	氣泡中心高度隨時間變化之關係圖	184
圖 8.33	雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 48x144)	185
圖 8.34	雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 96x288)	186
圖 8.35	雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 192x576)	187
圖 9.1	一維飽和液體汽化問題之示意圖	211
圖 9.2	一維飽和液體汽化問題之介面位置隨時間變化圖	211
圖 9.3	一維飽和液體汽化問題之溫度分布圖 ($t=1s$)	212
圖 9.4	一維過熱液體汽化問題之示意圖	212
圖 9.5	一維過熱液體汽化問題之介面位置隨時間變化圖	213
圖 9.6	一維過熱液體汽化問題之溫度分布圖 ($t=10s$)	213
圖 9.7	水平平板薄膜沸騰之示意圖	214
圖 9.8	不同網格解析度之氣泡外型比較圖	214
圖 9.9	不同網格解析度之 Nusselt 數隨時間變化圖	215
圖 9.10	在近臨界壓力下不同熱通量的薄膜沸騰之實驗結果[8, 78]	215
圖 9.11	水平平板薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖	216
圖 9.12	水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T=10^{\circ}C$)	217
圖 9.13	介面和速度向量之分布圖($\Delta T=10^{\circ}C$)	218
圖 9.14	水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T=17^{\circ}C$)	219
圖 9.15	水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T=18^{\circ}C$)	220
圖 9.16	水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T=20^{\circ}C$)	221
圖 9.17	水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T=25^{\circ}C$)	222

圖 9.18	水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$)	223
圖 9.19	介面及溫度分布圖	224
圖 9.20	壁面處 Nusselt 數沿 x 軸分布圖	224
圖 9.21	壁面過熱度與時均化 Nusselt 數之關係圖	225
圖 9.22	水平圓管薄膜沸騰之示意圖	226
圖 9.23	水平圓管薄膜沸騰所使用之網格(總數 12200)	226
圖 9.24	水平圓管薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖 ($D = 0.211\text{mm}$)	227
圖 9.25	水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$)	228
圖 9.26	水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 20^{\circ}\text{C}$)	229
圖 9.27	水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$)	230
圖 9.28	水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 21.6\text{mm}$, $\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$)	231
圖 9.29	水平圓管薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖 ($D = 21.6\text{mm}$)	232
圖 9.30	長平板薄膜沸騰之過熱氣體初始介面分布函數	233
圖 9.31	長平板薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間變化圖	233
圖 9.32	長平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$)	234
圖 9.33	長平板薄膜沸騰之溫度分布 ($\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$)	235
圖 10.1	三維網格內浸潤面向量 (\vec{S}_f^w) 之示意圖	265
圖 10.2	三維網格內介面所跨越控制面之類型	265
圖 10.3	介面通過六面體網格之類型	266
圖 10.4	空間中重建後所得的三角形介面之示意圖	267
圖 10.5	三維介面處總熱通量計算之示意圖	267
圖 10.6	三維介面的平均面向量及平均溫度變化量計算之示意圖	268
圖 10.7	三維介面處能量內邊界處理之示意圖	269
圖 10.8	三維壩體潰堤介面之動態圖 ($300 \times 90 \times 90$)	270
圖 10.9	三維壩體潰堤壓力及速度場之動態圖 ($300 \times 90 \times 90$)	271
圖 10.10	底部水流前端與時間無因次化關係圖	272
圖 10.11	水柱高度與時間無因次化關係圖	272
圖 10.12	單一上升氣泡之氣泡外形	273
圖 10.13	單一上升氣泡之動態圖 ($50 \times 50 \times 300$, $0.1 \sim 0.5$ 秒)	274
圖 10.14	氣泡中心高度隨時間變化之關係圖 ($50 \times 50 \times 300$)	274
圖 10.15	氣泡在 $x=0$ 平面上的壓力及流線之分布圖 ($50 \times 50 \times 300$)	275
圖 10.16	氣泡在中心軸上沿 z 方向的壓力變化	276
圖 10.17	在 0.5 秒時氣泡中心位置上沿水平方向的壓力變化	276
圖 10.18	同軸雙氣泡上升融合之動態圖	277
圖 10.19	同軸雙氣泡上升融合之壓力及流線分布圖	278
圖 10.20	不同軸雙氣泡上升融合之動態圖	279
圖 10.21	不同軸雙氣泡上升融合之壓力及流線分布圖	280

圖 10.22	雙氣泡上升融合之實驗結果[88]	281
圖 10.23	液滴撞擊薄層液面之動態圖	282
圖 10.24	環狀水波在 $y=0$ 截面上介面之動態圖($t=0\sim 7\text{ms}$, 間隔為 1ms)	283
圖 10.25	環狀水波半徑隨時間之變化圖	283
圖 10.26	三維水平平板薄膜沸騰平均 Nusselts 數隨時間之變化圖	284
圖 10.27	三維水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T = 5^\circ\text{C}$)	285
圖 10.28	三維平板薄膜沸騰於 $x=0.04\text{m}$ 平面上之溫度分布圖($\Delta T = 5^\circ\text{C}$)	286
圖 10.29	三維水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T = 10^\circ\text{C}$)	287
圖 10.30	三維平板薄膜沸騰於 $x=0.04\text{m}$ 平面上之溫度分布圖($\Delta T = 10^\circ\text{C}$)	288
圖 10.31	壁面過熱度與時均化 Nusselt 數之關係圖	289
圖 10.32	高溫錫液滴於油槽內介面及溫度分布之動態圖	290
圖 10.33	高溫錫液滴於 $x=0$ 平面上之溫度及流線分布	291
圖 10.34	高溫正辛烷注入水槽之動態圖	292
圖 10.35	高溫正辛烷注入水槽於 $x=0$ 平面上之溫度及介面分布圖	293



符號說明

符號	定義
A_p, A_c	主格點係數矩陣, 相鄰格點係數矩陣
C	比熱
C_N	庫倫數
\vec{d}	定義在 $\vec{\delta}_{PC}$ 方向上之向量
d_e	氣泡或液滴初使直徑
D	圓管直徑
Eo	Eovots 數 ($Eo = gd_e^2(\rho_l - \rho_g) / \sigma$)
f_σ	表面張力
F	體積通量
F^C	對流通量
F^D	擴散通量
\vec{g}, g	重力加速度
Gr	Grashof 數 ($Gr = \rho_g(\rho_l - \rho_g)g\lambda^3 / \mu_g^2$)
h_{lg}	汽化潛熱
Ja	Jacob 數 ($Ja = C_g(T_w - T_{sat}) / h_{lg}$)
Ja^*	修正後之 Jacob 數 ($Ja^* = Ja / (1 + 0.34Ja)$)
k	熱傳導係數
\dot{m}	質傳量
Mo	Morton 數 ($Mo = g\mu_l^4 / \rho_l\sigma^3$)
\vec{n}	單位法向量
Nu	Nusselt 數
\overline{Nu}	時均化 Nusselt 數

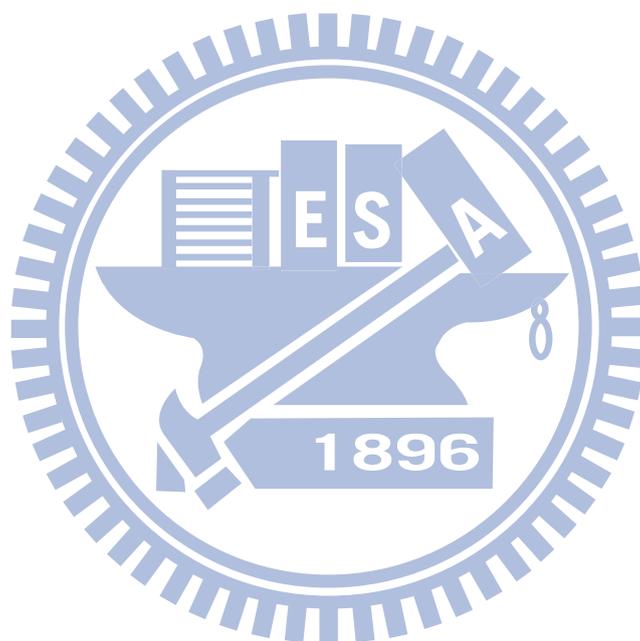
P	壓力
Pr	Prandtl 數($Pr = C_p \mu_g / k_g$)
\dot{q}	熱傳量
Re	雷諾數
S	代數方程之源項
S_M	連續方程式中之源項
\vec{S}_f	控制面之面向量
\vec{S}_f^w	浸潤區域之面向量
t	時間
T	溫度
V, \vec{V}	速度
V_i	在卡式座標系統之速度分量
w	權重因子
x, y, z	卡式座標系統
希臘符號	
α	流體體積分率
$\gamma(r)$	通量限制函數(r 為體積分率梯度比)
κ	平均曲率
λ	薄膜沸騰之特徵長度
λ_{d2}	二維最危險泰勒波長
λ_{d3}	三維最危險泰勒波長
μ	黏滯係數
θ	網格控制面與介面之夾角
ρ	密度



σ	表面張力係數
τ_{ij}	黏性應力張量
$\omega(\theta)$	與 θ 相關的權重因子
ΔA	控制體積內之介面面積
Δl	網格中心或網格面至介面之垂直距離
Δn	沿介面垂直方向上之距離
Δt	時間步階
ΔT	壁面過熱度
ΔV	網格體積
下標	
C	主格點之相鄰格點
D	網格面之下游格點
f	網格控制面
g	氣體
int	液氣介面
l	液體
P	主格點
sat	飽和狀態
U	網格面之上游格點
UU	網格面之上上游格點
v	網格節點
w	壁面
上標	
n	新時階



o	舊時階
—	平均值
~	平均平滑化之值
*,**	預測值及修正後之值
'	修正量



第一章 緒論

1.1 簡介

1.1.1 兩相流簡介

所謂兩相流亦即在同一系統中同時包含兩種不同狀態的物質之流動現象並有一介面存在於兩者之間。當兩種不同性質的物質相互接觸時，交接面處的不連續性將使其產生介面自由能(interface free energy)，此能量係因兩物質內部的分子個別所產生的內聚力相互作用之結果。而為了維持此介面穩定的存在，其介面自由能必須能維持正值，方可避免兩物質在介面處產生混合之行為。因此在雙流體流場中是否發生混合，都是基於兩流體間之介面自由能而定，而在不可混合的兩相流系統中，此介面自由能即大家所熟知的表面張力。

根據物質的基本三態：固體、液體、氣體，兩相流可依其所含物質狀態的種類分成：固液系統、固氣系統、液氣系統、不可混合液-液系統。其中不可混合液-液系統，雖然並不是標準的兩相流，但在處理上由於與液氣系統相近，因此也將其歸類為兩相流的系統之一。此外，根據流動的形態以及介面的結構，兩相流又可分為三種基本的類型(如圖 1.1)：分層流(separated flow)、混合流(mixed flow)、分散流(dispersed flow)[1]。若以一個局部被水填滿的管道流為例，當管道內的水和空氣是分層流動，並且透過介面有明顯的區隔，這是所謂的分層流(圖 1.1(a))。反之，分散

流則是管內的空氣都變成小氣泡而充滿在水中(圖 1.1(c))。至於上述兩者之間的情況則稱為混合流(圖 1.1(b))，其流動過程中包含了空氣和水的分層流動以及小氣泡的產生。不同類型的兩相流，不僅在於介面形狀分布有所不同，而且對於流場整體的質量、動量以及能量的傳遞也有相當大的影響。雖然兩相流系統可分為四大類，但就屬液氣和不可混合液-液系統在工程或是自然界中存在最為廣泛，因此本文所發展的數值方法主要以此兩系統為主，而所分析的流動型態則為分層流，然而當所使用網格之解析度足夠時分散流亦可視為分層流，因此本文所提出的方法也可適用於分散流之中。

兩相流之應用常見於各式的工業系統之中，像是熱傳系統、動力系統、生化系統、微機電系統等等。隨著科技的進步，工業產品的尺寸也逐漸縮小，像是在燃料電池的微流道之中，流體流動時表面張力產生的效應，因為小尺度而顯得更為重要，所以傳統上對於單一流體進行分析的方式已經不再適宜，必須針對兩相流的系統來加以分析。

早期對於兩相流的研究主要是採實驗的方式來得到兩相流中相關的流場流動現象和性質，然而隨著電腦科技的快速發展以及計算流體力學的邁進，利用數值模擬來分析兩相流已經逐漸取代實驗，而一套有效而且準確的兩相流數值方法不僅可節省實驗所需要龐大經費，且對於工業上要求的最佳化設計以及系統安全性的預估都有相當大的幫助。然而在兩相流的數

值計算中，其困難在於它本身有著隨時間移動且多變的介面，且在介面處流體性質存在極大的不連續性，如密度或是黏滯性，理論上此不連續性是以階梯函數的形式來分布。在高密度比或高黏滯係數比的兩相流系統中，此流體性質的不連續性將造成介面處的速度及壓力相當不穩定，進而導致數值方法的發散。故在兩相流數值模擬中，絕大部分的困難來自於介面處不連續的流體性質所造成，因此如何有效的呈現介面處的不連續性同時兼顧計算上的穩定，成為兩相流數值方法中最棘手的問題。

在兩相流或自由表面流的數值模擬中，最困難之處在於必須考慮介面處的跳躍邊界條件(jump condition)。假設兩流體間存在物質的不連續性且不考慮介面處相變化所產生的質傳和熱傳，跳躍邊界可依介面上的質量與動量守恆，分為運動邊界條件(kinematic boundary condition)及動力邊界條件(dynamic boundary condition)，前者代表在介面的垂直方向上，介面兩邊的流體分子與介面沒有相對運動，也就是說流體不能跨越介面；後者則是表示作用在介面的應力必須達成平衡。在計算過程中，若介面位置已知，則只須將上述兩組邊界導入即可。然而在每個計算的時階下，介面位置並不是已知的變量，所以無法直接導入邊界條件，因此通常處理兩相流的數值模擬，必須藉由運動邊界條件來求得介面的位置，再利用動力邊界來滿足介面處的邊界條件。綜合上面所述，在兩相流模擬中，最主要的課題有下列幾點：1. 介面隨時間移動的問題 2. 精確介面位置的預測 3. 處

理介面上流體性質的不連續性 4. 跳躍邊界以及表面張力的計算。

對於兩相流介面的計算方法，主要可根據其使用的網格類型分成兩大類：拉格郎日(Lagrangian)和尤拉(Eulerian)網格法(如圖 1.2)。拉格郎日網格法是透過一組與介面貼齊的網格系統來計算介面隨時間移動的情況，當介面開始變化，網格也隨之產生變形。至於尤拉網格法則是在一套固定的網格之中，透過特殊的方式來追蹤介面運動的情形。前者常用的方法為移動網法(moving grid method)，然而此類的方法不僅在於複雜的流場內網格隨流場嚴重變形而產生極大的誤差，並且對於其移動的邊界條件設定上也是一大困難，因此本方法通常應用於較單純且介面無太大變形的自由表面流之中。至於後者因其方法較為實用，所以發展出許多對於介面處理的特殊方法，如前端追蹤法(front-tracking method)、等位函數法(level-set method)、體積追蹤法(volume tracking method)、流體體積法(volume-of-fluid method)等。上述幾種尤拉網格法中最常被採用的是流體體積法與等位函數法，因此後來又有許多學者擷取了兩者之優點而發展出兩套方法結合的計算方式。而對於流體體積法而言，其根據介面計算的方式不同又可分為介面捕捉法(interface capturing)以及介面重建法(interface reconstruction)。前者是以類似捕捉超音速流中震波之手法來直接計算在介面處流體體積分率跳躍的特性，而後者則採用不同的幾何形狀來重建流體之介面，再透過體積守衡的概念來達成流體介面的推進。

1.1.2 薄膜沸騰簡介

對於一個實際的兩相流系統而言，介面處因熱傳所產生的相變化過程是相當值得分析的問題，而沸騰(boiling)即為其中一種相變化的機制。沸騰現象除了液體轉換為氣體的質傳行為外，更重要的是在相變化過程中，能量以潛熱(latent heat)的形式儲存，使整個系統能夠產生高密度的熱傳。此特點讓沸騰流動在工業應用上扮演著相當重要的角色，例如鍋爐、蒸發器、金屬淬火、核子反應爐的冷卻、電子散熱的熱管等等。

當液體覆蓋於加熱面之上而加熱面的溫度能維持高於液體的飽和溫度時，沸騰現象便會發生。依據流動中是否有強制對流效應，可將其分為兩大類：池沸騰(pool boiling)和強制對流沸騰(forced-convection boiling)。當加熱面沉浸在初始為靜止狀態的液體中且沒有強制對流的效應時，稱之為池沸騰。反之，若有強制對流的效應則為後者。

依照水的沸騰曲線(圖 1.3)，主要可以分為四大區塊，包含自然對流區、核沸騰區、過度沸騰區及薄膜沸騰區。在自然對流區內，因壁面過熱度(加熱面溫度與液體平均溫度之差值)較低且液體的平均溫度低於飽和溫度，雖然可能有極少數的氣泡會在壁面上產生，但此刻整體的熱傳機制仍以液體本身的自然對流為主。當過熱度逐漸地提高，壁面上的小穴孔處將開始產生小氣泡，這些小氣泡稱為汽化核心。此時因相變化所產生的質傳將使小氣泡開始成長而後脫離加熱面並在液體中上升，在氣泡成長的過程中，壁

面上的熱能將以潛熱的形式逐漸被吸收並帶離加熱面，這是沸騰熱傳能有高效率除熱能力的主因，而此階段稱為核沸騰區。隨著過熱度再提高，氣泡的成長速度太快以致於無法順利脫離壁面而開始在壁面處形成氣膜，此時的氣膜不甚穩定很容易形成較大的氣泡而脫離表面，稱為過渡沸騰區。當壁面過熱度持續提高到最低薄膜沸騰溫度(Leidenfrost point, B 點)時，氣膜將穩定的存在並且包覆整個加熱的表面，此刻則由過渡沸騰區轉換為薄膜沸騰。

沸騰狀態屬於低溫核沸騰時，液體不斷與加熱面接觸而產生相變化，此時熱量將透過自然對流和潛熱的形式被移除，進而增加了沸騰熱傳的強度。然而，當熱通量高於臨界熱通量(critical heat flux, A 點)時，將由核沸騰模式轉為過渡沸騰，此時液體因被氣膜所隔絕而鮮少與加熱表面接觸，熱量只能依靠氣體的傳導以及輻射的方式傳遞，然而氣體本身的傳導係數較低，因此熱通量將大大的下降。而在高溫薄膜沸騰中，壁面過熱度的提高將使輻射效應越趨顯著，因此整體的熱通量又逐漸的提升。總而言之，一般工業或是電子元件的操作條件都是期望在較低溫且有高熱通量環境下，因此通常都是將整個熱通量控制在臨界熱通量以下，以維持核沸騰的形式。

在過去的文獻中，已經有相當多關於薄膜沸騰的研究和理論被提出，然而由於薄膜沸騰的許多現象在空間和時間尺度極小，因此大大侷限了實驗

上量測的精確度。雖然實驗上有所限制，不過也有相當多的學者已經提出針對在某些特定條件下薄膜沸騰的半經驗式。而這些半經驗式中，較常被後人所引用的是 Berenson[2]所提出在水平平板上薄膜沸騰的模型和 Bromley[3]所推導出對於水平圓管上的薄膜沸騰之理論模型。

在水平平板的薄膜沸騰中，流體是因重力所產生的介面不穩定性而導致氣體開始以氣泡的型態，週期性地離開平板。因此 Berenson 的理論模型是在水平平板上一個長度為二維最危險泰勒波長(most dangerous Taylor wavelength)的正方形區域內，存在一個半徑為 R 的氣泡並連接均勻厚度 δ 的薄膜(圖 1.4)。而二維最危險泰勒波長定義如下：

$$\lambda_{d2} = 2\pi\sqrt{3}\lambda \quad (1.1)$$

其中 λ 為特徵長度，其值與重力(g)、兩流體密度差($\rho_l - \rho_g$)及表面張力係數(σ)有關，如下式：

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g}} \quad (1.2)$$

位在液體下方的氣體因為薄膜和氣泡兩側的壓力差而開始產生朝向氣泡之流動，Berenson 假設此氣體的流動為層流並忽略液體側的流場影響，同時氣泡間的距離和氣泡半徑與 λ_{d2} 成正比，而導出 Nusselt 數之半經驗式，如下：

$$Nu_B = 0.425\left(\frac{GrPr}{Ja}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.3)$$

此處 Gr 、 Pr 和 Ja 分別為 Grashof、Prandtl 和 Jacob 數，其定義如下：

$$Gr = \frac{\rho_g (\rho_l - \rho_g) g \lambda^3}{\mu_g^2} \quad (1.4)$$

$$Pr = \frac{C_g \mu_g}{k_g} \quad (1.5)$$

$$Ja = \frac{C_g (T_w - T_{sat})}{h_{lg}} \quad (1.6)$$

其中 ρ 為密度， μ 為黏滯係數， g 為重力加速度， C 為比熱， k 為熱傳導係數， T_w 為壁面溫度， T_{sat} 流體飽和溫度， h_{lg} 為汽化潛熱。下標 l 和 g 分別代表液體和氣體。

在與 Berenson 相同的薄膜模型下，Klimenko[4] 利用雷諾類比 (Reynolds analogy) 將模型從層流推展至紊流並，其半經驗式表示如下：

$$Nu_K = \begin{cases} 0.19 Gr^{\frac{1}{3}} Pr^{\frac{1}{3}} f_1 & \text{for } Gr \leq 4.03 \times 10^5 \\ 0.0216 Gr^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} f_2 & \text{for } Gr > 4.03 \times 10^5 \end{cases} \quad (1.7)$$

其中

$$f_1 = \begin{cases} 1 & \text{for } Ja \geq 0.71 \\ 0.89 Ja^{-1/3} & \text{for } Ja < 0.71 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{for } Ja \geq 0.5 \\ 0.71 Ja^{-1/2} & \text{for } Ja < 0.5 \end{cases}$$

上述的半經驗式表示當 Ja 較大的情況下，不需考慮壁面過熱度的影響。然而，當 Ja 較小時則須考慮過熱度來做修正。

至於水平圓管的薄膜沸騰而言，Bromley 是最早提出理論模型的學者。其透過邊界層理論 (boundary layer theory) 所推導出的經驗式如下：

$$Nu_c = 0.62 \left(\frac{GrPr}{Ja} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.9)$$

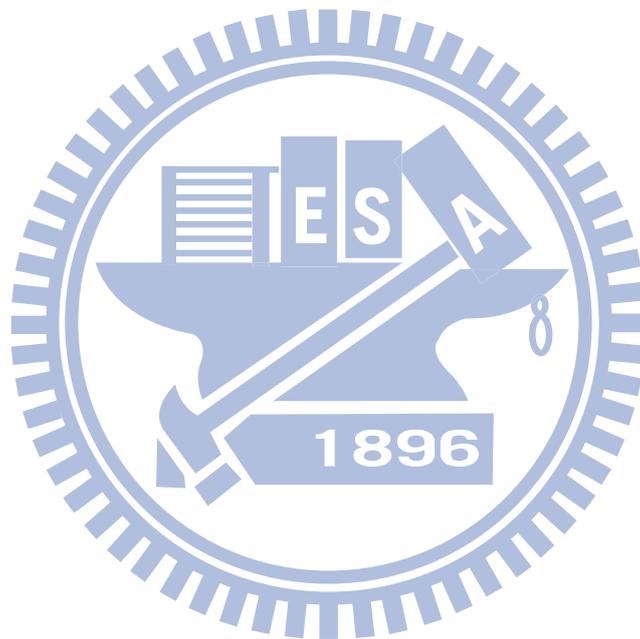
此處 Grashof 數為

$$Gr = \frac{\rho_g (\rho_l - \rho_g) g D^3}{\mu_g^2} \quad (1.10)$$

其中 D 是圓管直徑。上式與平板薄膜沸騰的半經驗式(式 1.3)做比較，可知 Bromley 學者是透過實驗數據將前方係數由 0.425 調整為 0.62 並將特徵長度換為圓管直徑 D 。

兩相流由於介面隨時間的形變及熱傳相變化機制相當複雜，因此早期實驗上，常採用簡化後或特定狀態的模型來分析，對於數值模擬上也如同實驗一般。一個有效而準確的兩相流數值方法，不僅要能夠精確的預測介面的位置和形狀，更要能夠處理介面處動量和能量的跳躍邊界。早期針對兩相流相變化的數值研究，透過假設氣液介面在變化過程中維持球形來模擬。直到 1995 年，Welch[5]採用移動的三角網格，方能模擬二維氣液介面可隨時間任意變形的情况。而 1997 年，Son 和 Dhir[6]則利用座標轉換的方法，模擬一組二維軸對稱的平板薄膜沸騰現象。然而上述此兩種方法雖然能夠維持介面鮮明的程度，然而當計算時間拉長介面開始產生大量變形，此兩方法便無法有效的呈現薄膜沸騰的現象。隨著介面運動計算方法的精進，許多有關薄膜沸騰的數值方法也相繼被提出。常見的方法像是 Juric 和 Tryggvason[7]採用前端追蹤法、Son 和 Dhir[8]使用等位函數法及 Welch 和 Wilson[9]利用流體體積法。基於上述三者的方法，爾後數十年

間發展了相當多有關薄膜沸騰的計算方法，包含二維水平平板及圓管的薄膜沸騰計算乃至於三維的數值模擬。本文將再下一節中，針對兩相流介面運動之數值方法及薄膜沸騰熱傳的數值模擬做更詳盡的文獻回顧及介紹。



1.2 文獻回顧

1.2.1 兩相流之數值方法

1.2.1.1 移動網格法 (Moving Grid Method)

此方法使用一組隨流體運動的網格來計算介面的變化，亦即在所考慮的流體中置入隨時間變形的網格，而網格邊界也就成為了所考慮流體的邊界且各網格內的流體永遠都保持在該網格中[10, 11]。本方法的優點在於其網格邊界就是流體的介面，因此其計算後所獲得之介面可以維持相當好的鮮明度(sharpness)和準確性。然上述的情況只發生在較簡單的流場中，當整個的流體流動造成大量的介面變形(deforming)、破壞(breaking)或是融合(merging)時，將使網格產生極度的扭曲，此舉將帶來計算上極大的數值誤差且大大降低了整個運算的穩定性。在[12]中，Muzaferija 等人透過有限體積法和移動網格配合空間守衡的概念預測自由表面流之介面形狀，雖然在過程中流場內的網格是改以拉格郎日-尤拉法來移動，然而其計算還是侷限在一些簡單且介面無太大變形的流場之中，並無法在一些有介面破碎或翻轉的問題中使用。

1.2.1.2 前端追蹤法 (Front-Tracking Method)

Tryggvason 等人[13, 14]提出了在尤拉網格系統中使用另一組移動的網格來追蹤介面移動的技術，稱之為前端追蹤法。其方法主要是在介面上安排一組相連的網格點(如圖 1.5)，利用這些網格點來追蹤介面運動的情形，

但其速度場則採用尤拉網格系統來求解動量方程式。上述的網格點構成了固定網格系統中的一組移動邊界，此邊界依照所計算物理模型的維度可以是二維曲線或是三維中之曲面。透過在尤拉網格上計算所得到的速度分佈內差之後，可獲得流體前端在拉格朗日系統上所需要的傳播速度，經由此速度可計算出流體前端網格在下一個時間的位置。本方法雖可透過前端網格的分布獲得鮮明之介面，然而在介面傳遞的過程中其兩流體的質量並非守恆，這並不符合流體本身的物理意義。另外，前端上的網格經過計算後可能會被扭曲或拉伸，因此必須隨時執行重置網格(re-meshing)的動作來調整介面上之網格，這將使整個方法變的相當繁複。再者，由於前端與速度場是處在兩套不同的系統網格內，因此計算過程中必須隨時在尤拉和拉格朗日系統之間作轉換，這動作也使程式化上變得相當複雜。

1.2.1.3 等位函數法 (Level-set method)

等位函數法是由 Osher 和 Sethian[15]所提出，其透過定義一組與網格點到介面最短距離有關的連續函數(ϕ)來計算介面的運動，如下式：

$$\phi(x,t) = \begin{cases} -d & x \in gas \\ 0 & x = \Gamma(t) \\ d & x \in liquid \end{cases} \quad (1.11)$$

其中 d 為位置函數、 Γ 表示介面所在位置。此函數根據其所在位置的流體性質不同而具有正負號的形式，其在氣體側通常定義為負而液體側則定義為正，因此介面將落在等位函數為零的位置上(圖 1.6)。由於流體介面是跟隨

著流體流動，因此等位函數法在介面傳輸上是直接計算等位函數的傳輸方程式。不同於上一類的方法，等位函數只須在尤拉網格系統中直接求解此組雙曲型式的傳輸方程式，因此在處理上方便了許多。然而，在直接求解的過程中將會有兩個問題產生，一為數值誤差的問題，另一則是過程中會導致質量不守恆的問題。第一個問題是來自於計算傳輸方程式時對流項之離散所使用的數值方法造成，此問題在介面劇烈拉伸或破裂的情況甚為嚴重。至於第二個問題則是當所定義的距離函數經由傳輸方程式計算一段時間之後，雖然介面的等位函數還是可以維持在零階上，但是其等位函數已無法保持距離函數的特性[16]，尤其是在介面受到扭曲變形或介面融合的情況下。為了改善上述質量無法守恆的問題，因此[17, 18]提出了在每個時間步階下必須針對計算完成後的等位函數進行重距離化(re-distancing)及重初始化(reinitialize)的動作來降低質量不守恆所產生的誤差。此外，由於使用等位函數法計算時，流體的性質受到其分布所影響，在兩流體交界處常會因其密度或是黏滯係數差異過大而導致流場計算的不穩定，因此通常會導入 Heaviside 函數將介面拓展到 1 到 3 網格厚度，來對流體性質作平滑化處理。

1.2.1.4 體積追蹤法 (Volume Tracking Method)

本類的方法主要是在流體中置入標記用的質點，透過計算質點的運動及分布情形來追蹤出流體之介面。較為著名的方法有：Harlow 和 Welch[19]

所提出的標記質點網格法(Marker-and-cell, MAC)以及 Monaghan[20]所法展的光滑流體粒子流體力學法(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)。前者是在一套固定網格系統之中，將無質量的粒子安排在某一特定流體及流體介面上(圖 1.7)，而這些粒子透過其鄰近固定網格上求解動量方程式所獲得之速度來移動。至於後者則是在不需使用網格的情況下，以拉格郎日的計算方式直接求解粒子本身的運動，與後者類似方法還有 Koshizuka[21]等人所提出的移動粒子半隱式法(Moving Particle Semi-implicit, MPH)。這類方法主要的特色在於可直接透過粒子分布的情形獲得介面位置，然而當流體處在高度剪切的流場中，介面因受到拉伸而變形，此時必須使用大量的粒子來處理介面定位之問題，這導致整個計算將相當耗費計算資源與時間，這情況也發生在三維流場的應用上。

1.2.1.5 流體體積法 (Volume-of-Fluid Method, VOF)

流體體積法法主要是在一固定網格系統中使用體積分率來標示介面的位置，而體積分率則是由兩流體其中之一的體積佔其網格總體積的比例來定義。根據上述定義，可將整個計算域分為三種型態，當體積分率為 1 表示第一種流體而 0 則表示另一種，至於體積分率介在 0 至 1 之間的網格則表示介面存在的網格(圖 1.8 所示)。經由計算流體體積分率之傳輸方程式(即 VOF 方程式)可以獲得介面隨時間傳遞的情形，雖然此傳輸方程式與等位函數所使用的形式相同，然而處理上卻是複雜很多，這起因於體積分率

分布的情況在介面處會呈現一個階梯函數的形式，相對於等位函數則是呈現連續分布的情況。自從七零年代開始已經有許多關於流體體積法的研究被提出來，而大致上可以分為兩大類：介面捕捉法與介面重建法。前者是以數值離散的觀點來直接求解流體體積方程式，後者則是採幾何的方式來重建介面並配合體積守恆的概念來計算流體介面之推進。以下將針對兩種方式做深入的介紹。

1.2.1.5.1 介面捕捉法 (Interface Capturing Method)

所謂的介面捕捉法亦即利用類似於在高速流動中捕捉可壓縮流震波之數值差分方式來離散 VOF 方程式中的對流項，以此方式直接來獲取流體介面處體積分率跳躍的特性。此類的方法所遭遇到的問題有數值擴散 (numerical diffusion) 以及數值震盪 (numerical dispersion)。前者造成介面跳躍的特性被抹滅 (smearing)，後者則常使介面產生不穩定性且使體積分率產生不合其物理特性的無界限性 (unboundness)。這類方法較低階精度的有一階上風法 (upwind differencing scheme) 和下風法 (downwind differencing scheme)，上風法是擁有強烈數值擴散性的差分法，其可使計算過程相當穩定而不發散，然而此特性將使介面無法達到所需要的鮮明度。而下風法本身具有離散時所給予的反擴散性，因此對於介面有高度的壓縮性，此性質可使介面受到強烈的壓縮而成一階梯 (step) 函數的形式，然此差分法雖然可獲得較鮮明的介面，卻也造成數值震盪近於使整個流場

不穩定並使體積分率無法維持界限性。單獨使用上述的兩種差分方式無法獲得適用於兩相流或雙流體流場之介面，因此 Hirt 和 Nichols [22] 在其研究中提出以主體受體法(donor-acceptor scheme)的方式來混合上風法及下風法，來結合上述兩種差分法之優點。另外，Rudman[23, 24] 提出以通量修正傳輸法(Flux-Corrected Transport, FCT)[25]來計算介面的傳輸，此方法分為兩個步驟，首先利用上風法來求取體積分率之傳輸，而修正步驟則採下風法的方式來減少上風法所造成數值擴散的問題，然而此方法以一維的定理所推出，較不適用於非結構性網格之中。

上述皆使用較為低階的離散方式來處理 VOF 方程式，因此同樣也可採高階的差分方式來計算 VOF 方程式，例如：正規化變數(Normalizes Variables Diagram, NVD)或全變量縮減(Total Variation Diminishing, TVD)之差分法。然而直接採用上述這兩類的差分法並無法完全的避免數值擴散發生，因此衍生了另一套混合(blending)的方法來減少數值擴散以維持介面的鮮明度。此類型的混合法其主要的手法是選用一組高解析度(high-resolution)差分法和另一組壓縮性(compressive)差分法來加以混合，而其混合的方式為使用一個與網格控制面和流動方向之夾角有關的轉換函數來做兩者之間的切換。近年來較著名的有 Ubbink 和 Issa[26] 所提出的壓縮性介面捕捉法(compressive interface capturing scheme for arbitrary meshes, CICSAM)、Muzaferija 和 Peric[27] 的高解析介面捕捉

法(high-resolution interface capturing scheme, HRIC)及 Darwish 和 Moukalled [28] 對流切換介面捕捉法的 (switching technique for advection and capturing surface, STACS) 等。上述的混合法都是符合所謂的對流界限準則(Convection Boundness Criterion, CBC)[29]，屬正規化變數差分法之類型，雖然透過混合的方式可減少數值擴散，然而其所計算出的介面分布通常仍分散於數格網格的厚度之間。

1.2.1.5.2 介面重建法 (Interface Reconstruction Method)

介面重建法主要是經由定義流體介面幾何形狀與介面的法向量，在透過局部體積守恆的概念加以重建介面。在介面重建完成之後，根據局部的速度分布與介面形狀來計算介面推進時所需的體積通量，最後可依體積通量來估算介面移動時所需的傳輸量，進而可獲得新的體積分率。因此本類型之方法主要分為三個步驟：介面幾何重建、網格面上體積通量計算、計算介面傳輸方程式。大部份介面重建法可依所使用的介面幾何形狀和介面法向量定義的方式，主要可分為下列三種：SLIC 法 [30]、Hirt-Nichols' VOF 法 [22] 及 PLIC 法 [31]。

SLIC(simple line interface calculation)法[30]是由 Noh 和 Woodward 所提出。在每個網格中，介面是假設為片段常數(piece-constant)分布之情形，亦即介面幾何是被假設為與網格線平行的直線。本方法是屬於方向分離(direction-split)的演算法。其介面法線方向與所掃視(sweep)的方

向有關，掃視的方向可分為 x 方向掃視(x-sweep)和 y 方向掃視(y-sweep)。對於 x 方向掃視而言，介面法向量是經由介面所在網格的右方和左方的網格之體積分率來決定；同理，y 方向則由上下方鄰近格點來決定。在雙流體流場中，使用 SLIC 法沿單一方向掃視下，其介面分布的情形可分為下列四種情況(圖 1.9)：(1)兩側為不同流體。(2)兩側為同一流體。(3)兩側皆含介面。(4)單側含介面。上述為 SLIC 法中介面重建的方式，當此步驟完成後，接下來便是求取介面移動時所需網格面上的體積通量同樣採用方向分離的方式來進行運算，亦即在當下所掃視的方向來進行面上體積通量的計算。最後必須計算傳輸方程式以得到下一時階的體積分率，在 SLIC 法中通常使用運算子分離(operator split)的方式來處理。

Hirt 和 Nichols' VOF 法[22]中介面重建的方式與 SLIC 同樣是採用水平線或垂直線並將體積分率視為單值函數(single-value function)，然後透過計算主格點周圍九個網格的斜率，由斜率大小來判斷介面的方向並對主格點內的介面做定位。至於面上體積流率的方式則如同前小節所介紹是採用主體受體法來計算，根據重建後介面的方向與流動方向相對關係來決定使用上風法或下風和上風之混合。

PLIC(piecewise linear interface calculation)法[31]是由 Youngs 所提出的一種高階精度的介面重建法。其所假設的介面幾何為兩端點在網格面上的斜直線線段，並定義介面的法向量為體積分率之梯度，經由此法

向量可推導出介面在網格內所截斷的體積，然後透過截斷體積與網格內局部體積分率來進行介面重建。上述的重建過程中，介面所截斷體積必須與網格內所考慮的流體體積相等，因此有直接或疊代[32, 33]求解的方式來重建介面。直接求解以 case-by-case 的方式來重建介面，在一個二維系統中根據介面法向量與 x 座標軸的夾角和網格內所考慮流體之體積可將介面在網格內的分布情形分為 16 種類型(三維可達 64 種情形)，經由翻轉與對稱可分為 4 種基本類型(圖 1.10，夾角為 $0 \sim \pi/2$)，因此當夾角決定後可知介面所屬類型，再進一步由網格所含的流體體積來重建介面。直接求解必須逐一針對包含介面的網格進行判斷，這方式相當的繁瑣，因此有所謂疊代的求解方式來取代之。疊代法主要是透過介面法向量來求取介面的方程式，再由介面方程式推出介面在網格內所截斷的體積，最後獲得截斷體積與網格內流體體積的關係式，經由疊代法計算此關係式以重建介面。當上述介面重建完成之後，同樣必須計算網格面上所需的體積通量，其方式可分為尤拉(Eulerian)式和拉格朗日式(Lagrangian)。所謂尤拉式就是根據尤拉網格系統中的相關已知速度場的資訊配合所重建出的介面幾何形狀來進行計算，而拉格朗日式則是透過直接計算介面移動後的位置來獲取所需的面上體積通量。當計算出介面傳遞時所需的體積通量之後，便可求解介面傳輸方程式。Ashgriz 和 Poo[34]改進 PLIC 法而發展成為 FLAIR(flux line-segment model for advection and interface reconstruction)法，

其方法主要是根據網格面相鄰之兩個網格的體積分率來獲得可穿越網格面的斜直線以進行介面的重建，此介面重建完成後，網格面上所需的體積通量則可直接沿此介面進行積分而得。圖 1.11(a)表示實際流體介面分布的情形，而(b)至(e)則分別顯示使用 x 和 y 方向掃視的 SLIC 法、PLIC 法以及 FLAIR 法所重建後的介面形狀示意圖。

綜觀上述所介紹的介面重建法，其基礎都是來自於介面法向量的定義，此法向量的準確與否將直接影響整個介面重建過程的精準度，間接也影響到整個速度場及表面張力的計算。然而體積分率在計算域中是呈現一個極度不連續的分布，此現象將造成介面法向量在計算上很難達到很高的精確度，因此有許多研究都著重於上述這個困難的突破上。雖然精度較高的 PLIC 法以被使用在相當多的應用上，然而其方法基本上仍有兩個問題，第一是若是在不規則的網格中使用，其介面推進中所需的網格面上體積通量在計算上將會變得相當複雜且困難。如前所述，第二個困難將會發生在三維的流場之中，介面在網格內分佈的情況將會有 64 種，雖然根據對稱及旋轉的簡化可化約 5 種[35]，然而在程式化上的步驟仍然相當繁瑣。針對第一個問題 Mosso[36] 等人透過 Lagrangian-Eulerian 的方式來進行處理，並有許多相關的研究將其應用到三角型的網格系統之中[37, 38]。

1.2.1.6 流體體積法與等位函數法之混合

上述已經談過等位函數法雖然可以得到準確的介面位置並且其函數是呈

現連續性的分布可以有效地計算出界面的曲率以及方向，然而在計算過程中會有質量損失的問題。至於在流體體積法中若使用界面追蹤的方式，將會因為數值擴散的問題導致界面位置不明確，然採用界面追蹤的方式來計算雖可得到確切的界面幾何和形狀，但是由於體積分率在界面處為梯度函數的分布，這將造成在計算界面法向量所需的體積分率梯度及界面曲率上之困難，因此有許多學者提出了結合等位函數及流體體積的方式來進行界面傳輸的計算[39-43]，其方式就是透過求解VOF方程式來計算界面推進的情形而界面曲率及法向量則由等位函數法所計算出。

1.2.2 薄膜沸騰之數值模擬

1.2.2.1 前端追蹤法

1998年，Juric和Tryggvason[7]採取前端追蹤法[13]並在連續及能量方程式中加入界面處跳躍邊界所導出之源項的概念，提出了一些有關二維水平平板薄膜沸騰的計算結果。Shin和Juric[44]採前端追蹤法配合等位面法(level-contour)重建界面的方式，使氣液界面可在三維的流動中有效的合併或破裂，進而模擬三維池沸騰現象。而2004年，Esmaeli和Tryggvason[45, 46]以相同的方法研究有關飽和液態水與過熱蒸汽所形成的池膜沸騰現象，其不僅將二維單顆氣泡之薄膜沸騰推展至三維，並著手研究不同的流體性質對多模式(multi-mode)薄膜沸騰的影響。上述均為平板膜沸騰的問題，而為了能處理幾何外觀較為複雜的圓管薄膜沸騰，

Esmaeeli 和 Tryggvason[47] 導入嵌入邊界法(immersed boundary method) 來處理水平圓管上的沸騰現象。雖然有關前端追蹤法於沸騰熱傳的計算已經有相當程度的發展，但是如同前小節所介紹，此法在兩種座標系統中的轉換是相當困難而且複雜，尤其是在三維的問題之中。

1.2.2.2 等位函數法

有別於使用前端追蹤法，Son 和 Dhir[8] 修改了等位函數法並考慮軸對稱的假設下，來模擬近臨界壓力下薄膜沸騰在不同的壁面過熱度所產生的影響。其發現在低過熱度的情況下，氣體以氣泡的方式離開加熱面。然而，在高過熱度的情況下，則會開始以噴流(jet)的方式離開。Son[48] 引入介面處相變化的效應並改善整體質量守恆的概念修改此法後，模擬在靜止水中上升氣泡及成長的問題。本方法因流體性質不連續性將造成的數值不穩定問題，因此常在氣液介面處加入平滑脈衝函數(smoothed delta function)[17] 以增加介面處的擴散性。然而此舉將使能量的跳躍邊界條件，無法準確的導入整個系統之中。另外一套在等位函數中加入虛擬網格(ghost fluid method)[49, 50] 的方法常被用來改善上述的問題，此方法可有效的維持介面處性質的不連續性。因此許多學者[51-53] 相繼採用這個方式來模擬含有相變化的流場。而 2007 年，Son 和 Dhir[54] 也使用相似概念模擬了二維和三維水平圓管上的薄膜沸騰。更在[55] 的文章中，詳盡地討論圓管管徑及圓管長度對於真實三維水平圓管之薄膜沸騰的影響。

1.2.2.3 流體體積法

Welch 和 Wilson[9]是最早將流體體積法實行於相變化流場的學者，其採用 PLIC 法來重建介面並在連續方程式中導入相變化所產生的質傳量來模擬水平板上薄膜沸騰的行為。在 2002 年，此方法更進一步用於分析包含固體平板和薄膜沸騰之間的热傳現象[56]。Agarwal[57]等人則是利用此法模擬近臨界壓力下的平板薄膜沸騰，在模擬過程中，其考慮液體為飽和態且過熱氣体的熱力性質隨溫度而改變，結果顯示過熱態性質是否為常數，對於整體熱通量的影響甚鉅。2011 年，Guo[58]等人更進一步結合上述的方式，再配合等位函數法求取更精確的介面定位，來模擬不同性質下不同的薄膜沸騰現象。



1.3 研究目的

本研究主要在發展可應用在非結構性網格中之兩相流的數值模擬系統，其主要處理內容包含了介面傳輸的計算、介面運動和動量與能量方程式之結合及相變化所產生的熱傳和質傳行為。

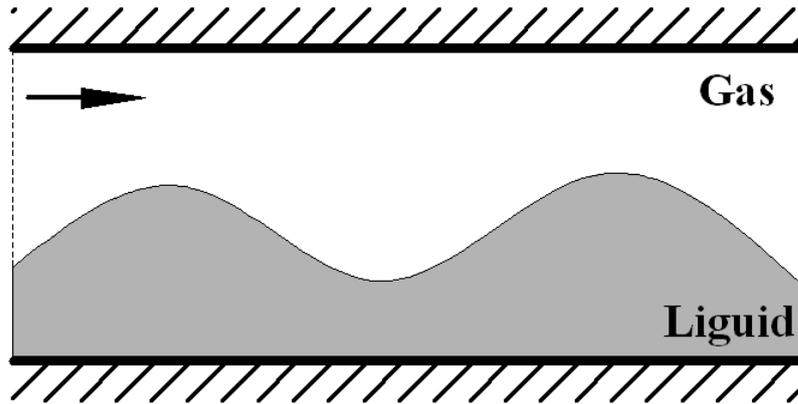
本文將提出兩套基於流體體積法的介面計算方式，包含通量混合介面捕捉法(flux blending interface capturing scheme, FBICS)[59]及守恆內差介面捕捉法(conservative interpolation scheme for interface tracking, CISIT)[60]。前者是類似於捕捉可壓縮流中的震波之方式，直接計算 VOF 方程式中所需要的體積分率的對流通量來計算介面移動的情形，而其對流通量主要採用通量混合的方式，透過一連續性的函數在高解析差分法及壓縮性差分法之間做切換，以同時達到抑制數值擴散和流場穩定之效果。後者則屬於介面追蹤法的範疇，其主要是採用一種簡單且有效的介面重建方式，並透過潤面積的定義來獲取通過網格面之流體體積通量，再以先預測再修正的方式來求解介面傳輸方程式。

本文在流體體積方程式與速度場結合的處理上，主要是考慮整個流場為均質且連續之流體，亦即流體在介面處的速度及壓力是連續的。經由體積分率來控制流場中流體性質的分布情形並在動量方程式中加入由體積分率梯度所表示的表面張力項來模擬雙流體或兩相流流場之流動。至於動量方程式與連續方程式的耦合，則是採用 PISO 演算法的方式來進行。

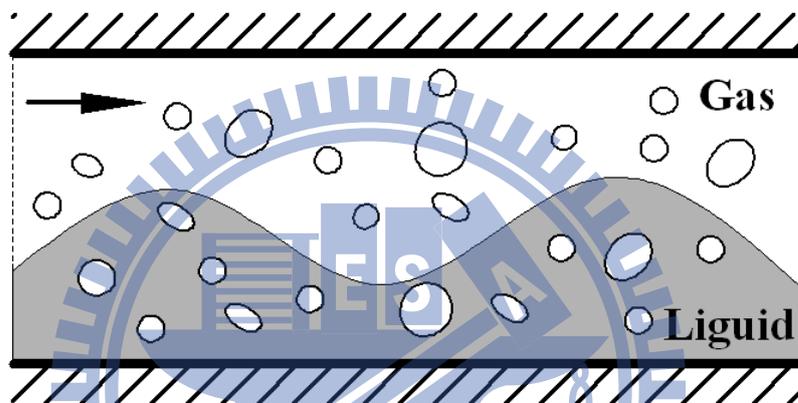
對於含相變化的兩相流之計算則是將相變化模型導入 CISIT 法中來處理。由能量和質量的跳躍邊界條件，推導後可得介面處因相變化所產生的質傳與熱傳關係式，將此質傳量導入連續方程式的源項中即可模擬含相變化的兩相流，而能量方程式則是將 CISIT 法所重建的介面視為能量一組內邊界來處理，再以全隱式法求解離散後的能量方程式。另外，藉由介面處溫度及熱傳量連續性的條件來取代跳躍邊界條件，亦可將本方法推展至無相變化的雙流體熱傳問題之中。下列章節將針對本文所使用的統御方程式及詳細的數值方法做介紹，而結果討論中主要可以分為四大部分：

1. FBICS 法於自由表面流(free surface flows)之應用。
2. CISIT 法於雙流體流場(two-fluid flows)之應用。
3. CISIT 法結合相變化模型於二維薄膜沸騰之模擬分析。
4. CISIT 法於三維兩相流問題之應用。

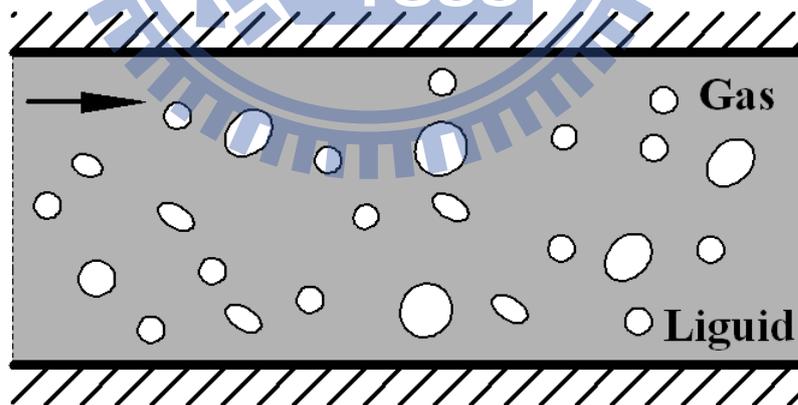
前兩個部分是藉由一些有理論解的模型來驗證兩套方法的精確度，並模擬流場結構較為複雜之實際模型與實驗上的結果作比較，以說明此兩種數值方法於真實流場中的可行性。第三個部份則是將 CISIT 法結合本文所提出的相變化模型及能量場的求解方式，來模擬二維水平平板及圓管之薄膜沸騰現象，驗證本文所提出之相變化模型在實際沸騰問題中的效能。最後的部份則是將整個基於 CISIT 法的模型推展至三維的數值模擬之上，以說明本文提出的數值方法在實際問題的應用分析上之廣泛性。



(a) 分層流

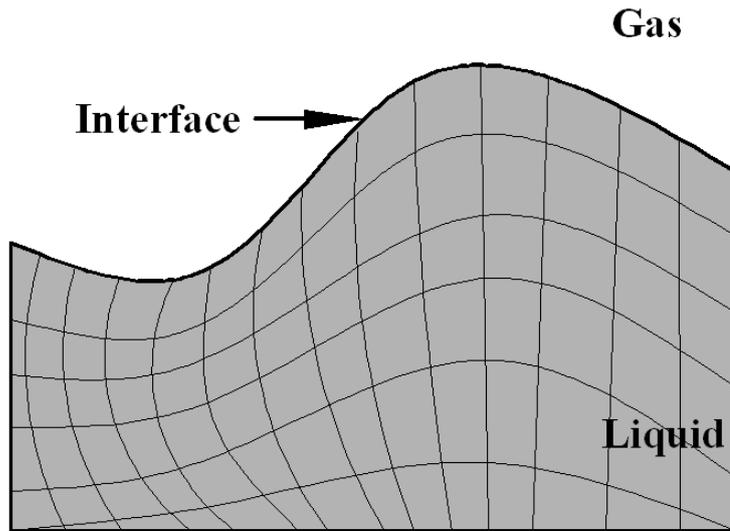


(b) 混合流

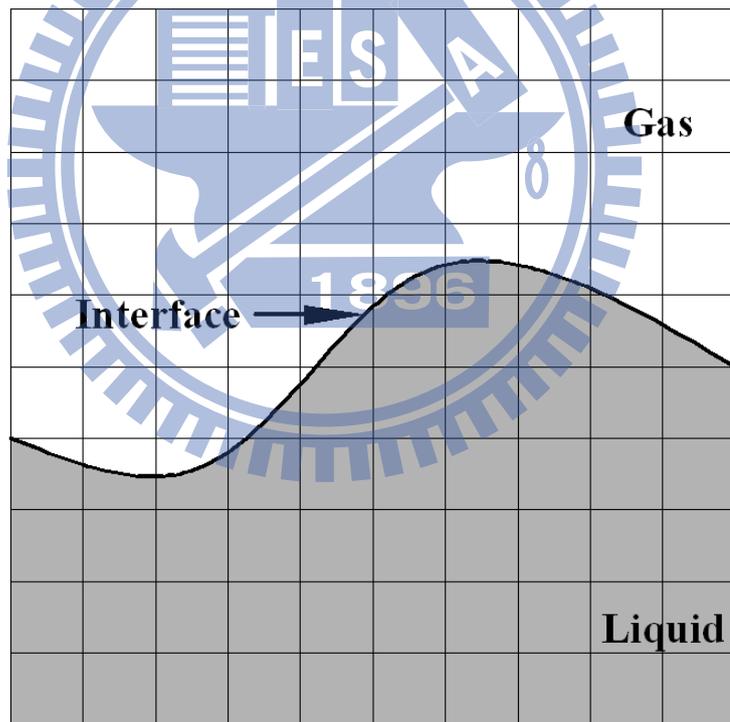


(c) 分散流

圖 1.1 兩相流的基本流動形態



(a) Lagrangian



(b) Eulerian

圖 1.2 兩相流模擬所使用的網格種類

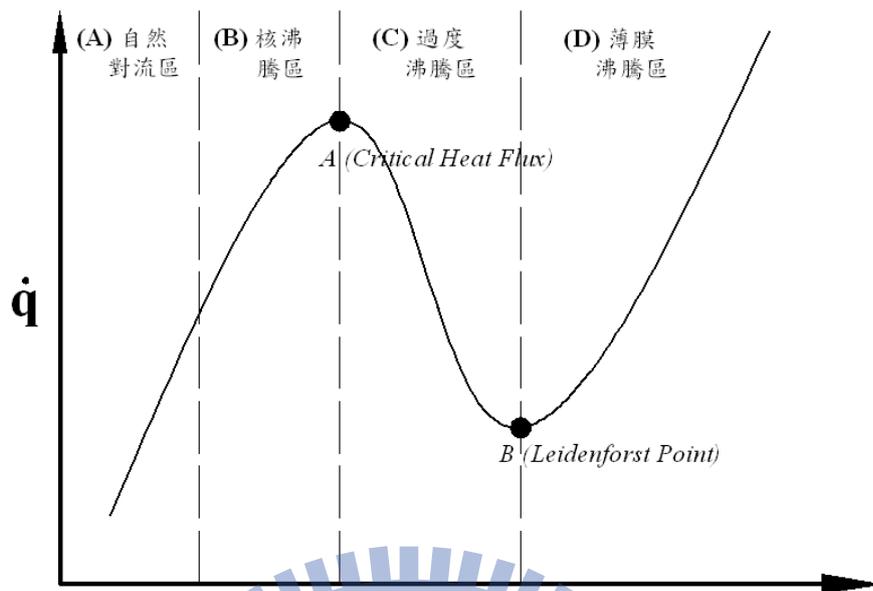


圖 1.3 水沸騰曲線

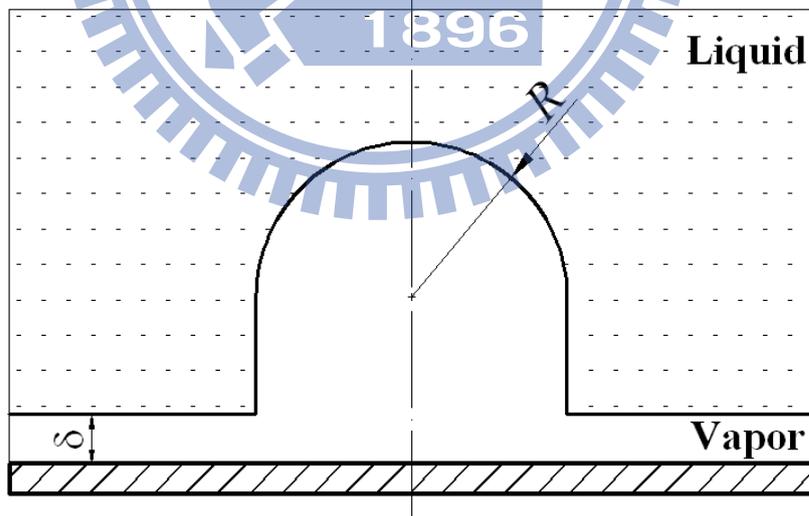


圖 1.4 Berenson 假設之薄膜模型

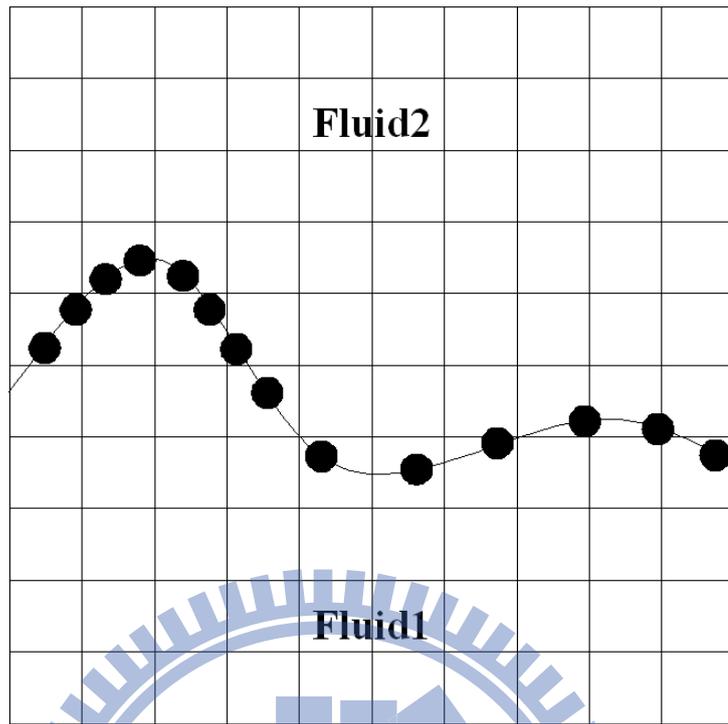


圖 1.5 前端追蹤法示意圖

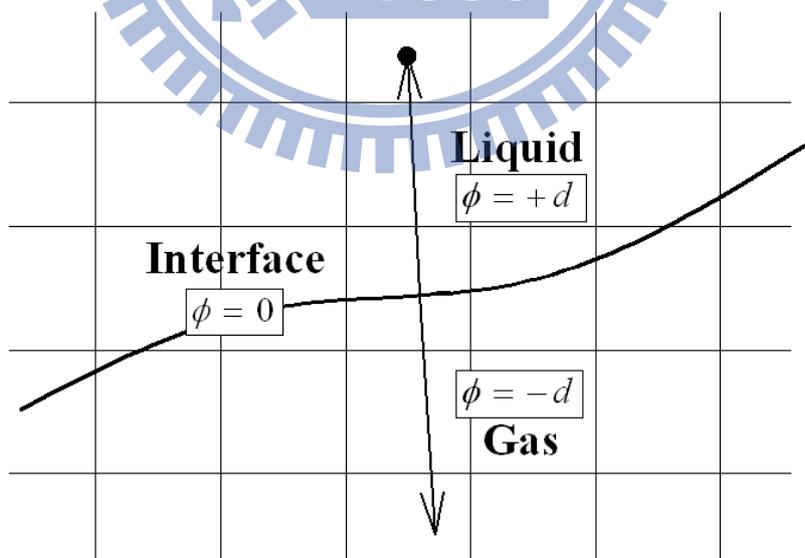


圖 1.6 等位函數法示意圖

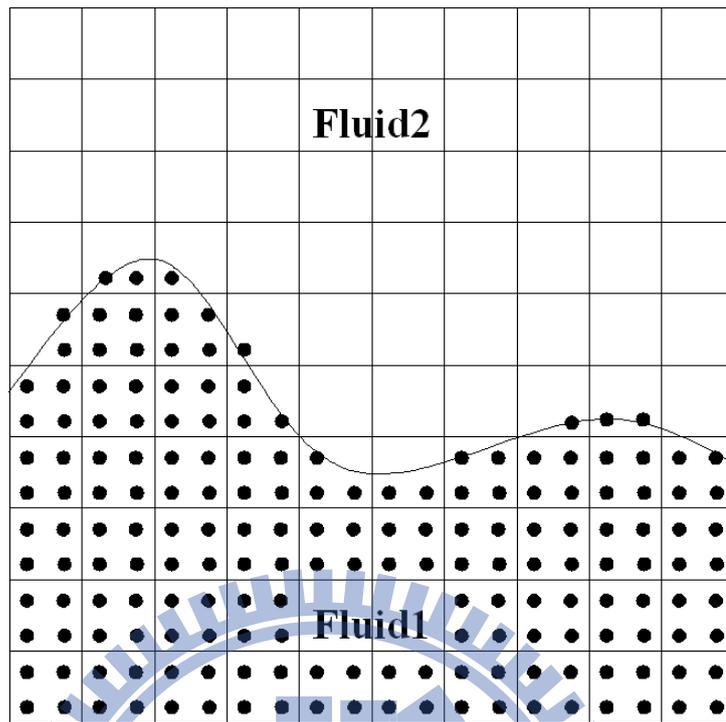


圖 1.7 MAC 法示意圖

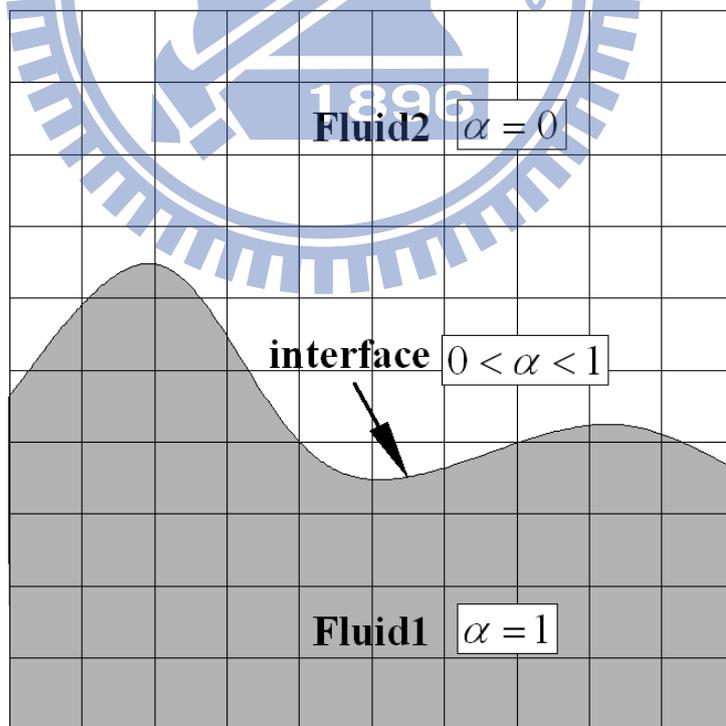
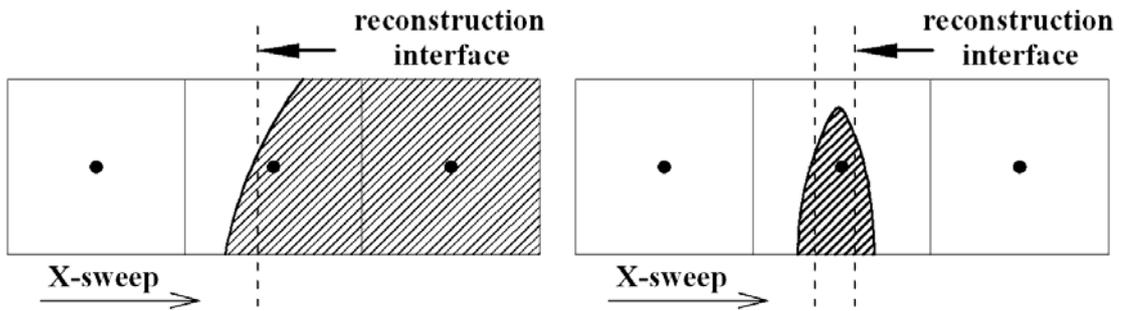
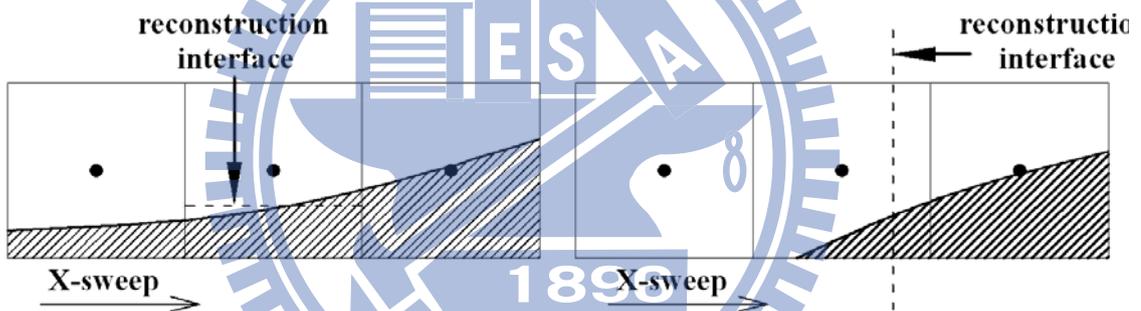


圖 1.8 流體體積(VOF)法示意圖



(1) 兩側為不同流體

(2) 兩側為同一流體



(3) 兩側皆含介面

(4) 單側含介面

圖 1.9 SLIC 法沿 X 方向掃視之介面重建示意圖

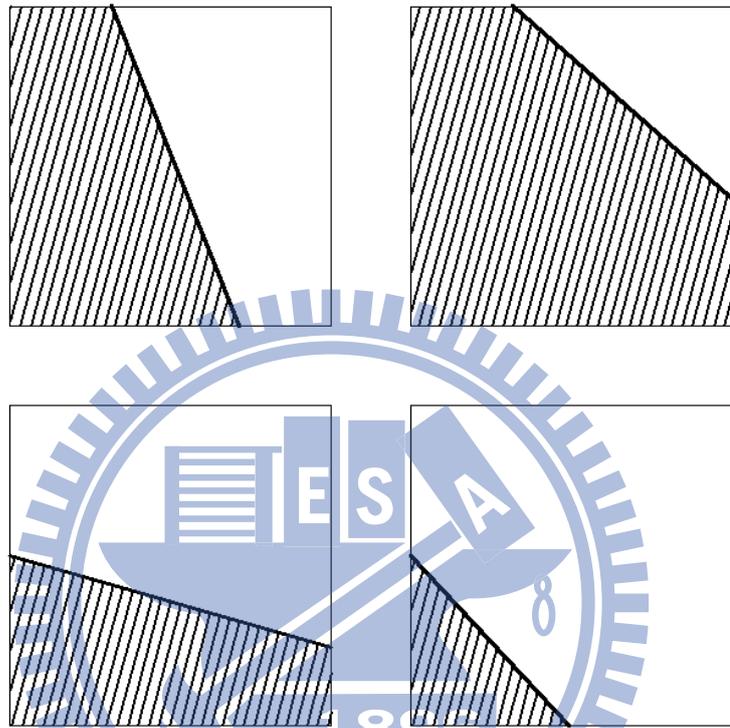
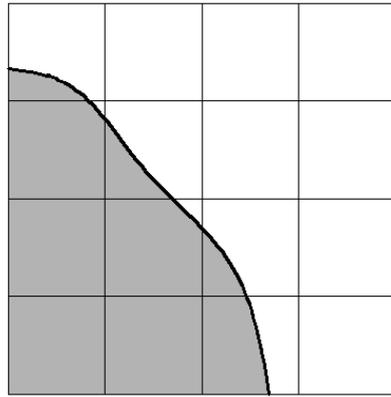
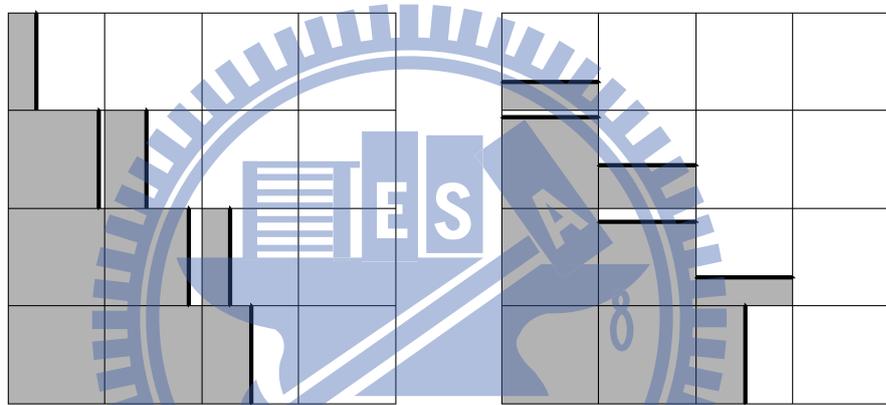


圖 1.10 PLIC 法簡化後介面於網格內分布情形(介面方向與 x 軸之夾角為 $0 \sim \pi/2$)

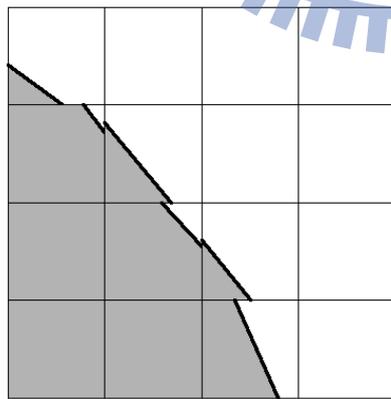


(a) 真實介面

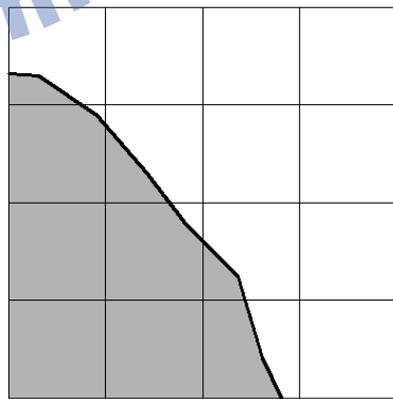


(b) SLIC 法(x-sweep)

(c) SLIC 法(y-sweep)



(d) PLIC 法



(e) FLAIR 法

圖 1.11 不同 VOF 之介面重建法比較示意圖

第二章 數學模型

2.1 簡介

本章節將介紹本文中所使用含相變化之兩相流模型的統御方程式，包含連續方程式、動量方程式、能量方程式及流體體積(Volume-of-Fluid, VOF)方程式。本研究採流體體積分率(volume fraction)來定義兩種不可互溶之流體，並且利用一步階函數(Step function)的流體體積分率來表示兩流體之介面。在動量方程式計算上，將兩流體視為均質且連續來處理，並且透過流體體積分率來使各流體有著不同的流體性質；在介面上則是採用CSF(Continuum Surface Force)表面張力模型[61]，此模型是利用一個表面力的方式來近似兩流體在介面處的跳躍邊界條件(jump condition)。

至於相變化的模型則是假設溫度分布為連續，亦即兩種流體在介面處的溫度相同且與系統壓力對應之飽和溫度相等，如此可由介面兩側流體各別的於介面的法線方向上之溫度變化量來計算介面處的熱通量，再透過潛熱便可獲得介面處因相變化所產生的質傳量，最後將其導入至連續方程式中。

傳統上，對於能量方程式處理的方式有兩種，一者是將上述熱通量視為能量方程式的源項，另一則是透過數值近似直接處理介面處的熱傳。由於介面處常呈現流體及熱力性質極度不連續的情形，此現象造成前者在數值計算上相當不穩定，因此本文採用後者的方式，將介面視為一內邊界的概念來處理。

2.2 流體體積(VOF)方程式

本研究透過流體體積分率之分布來定義不同的流體，並採用流體體積(VOF)法在一組固定網格系統中，來計算體積分率輸送之情況。體積分率的定義如下式：

$$\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{V_{C.V.}} \quad (2.1)$$

其中下標1和2表示兩個不同的流體、C.V.表示控制體積。根據上式對流體體積分率之定義，可將計算中的網格分為液相、氣相及介面三種不同種類的形式(圖 1.8)。

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{the cell is filled with fluid} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{the cell includes interface} \\ 0 & \text{the cell is filled with gas} \end{cases} \quad (2.2)$$

在兩相流的系統之中，體積分率隨著流體傳輸過程中必須達到物質微分(material derivative)為零[22]，因此體積分率標準的輸送方程式如下：

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + V_j \frac{\partial\alpha}{\partial x_j} = 0 \quad (2.3)$$

其中 V_j 表示流體速度。上式為一非保守形式的體積分率傳輸方程式，並不適用於流體的數值計算，因此再引入不可壓縮流之連續方程式($\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$)，

可將上式改寫成保守形式之流體體積方程式，如下式：

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha V_j) = 0 \quad (2.4)$$

經由上式可以理解流體體積法是經由流體體積分率之通量進出控制體積內守衡之概念來獲得介面移動的情況。

2.3 統御方程式

在統御方程式中，本文將兩相流模型中各流體視為均質流體進行計算，而流體在速度及溫度場有著連續的分布，因此各流體皆遵守著相同的質量、動量及能量守恆方程式。由於相變化模型之關係，故將導入相變化所產生的質傳量做為源項以修改連續方程式。基本假設流體之流動型態為暫態、層流及不可壓縮之黏性牛頓流體且外力項考慮重力以及表面張力。而能量方程式則考慮流體速度較低，故忽略黏滯力所造成的能量耗散(energy dissipation)項。基於上述的假設，本文中所使用的統御方程式，可表示如下：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = S_M \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j V_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + f_{\sigma_i} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j T) = \frac{1}{C} \left(\frac{k}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.7)$$

其中為 ρ 密度、 τ_{ij} 為黏性應力張量(viscous stress tensor)、 P 為壓力， g_i 為重力加速度、 f_{σ_i} 則為表面張力、 T 為溫度、 k 為熱傳導係數、 C 為比熱而 S_M 則為相變化所產生的質傳量。其中 f_{σ_i} 和 S_M 是介面處跳躍邊界條件所產生的物理量，因此只存在於介面處。若流體為牛頓流體，則 τ_{ij} 可以表示如下：

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.8)$$

其中 μ 為黏滯係數、 δ_{ij} 為單位張量。經由不可壓縮流及黏滯係數為常數之假

設，可將上方的動量方程式改寫如下式：

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j V_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i + f_{\sigma_i} \quad (2.9)$$

在兩相流之系統中，不論是氣相或液相均可以使用式(2.9)，然其密度及黏滯係數則由體積分率 α 內差而得，如下二式：

$$\rho = \rho_1 \alpha + \rho_2 (1 - \alpha) \quad (2.10)$$

$$\mu = \mu_1 \alpha + \mu_2 (1 - \alpha) \quad (2.11)$$

其中下標1和2分別為不同的流體。經由前面文章所描述 α 的定義，可發現此動量方程式為一個片段連續(piecewise-continuous)的模型，亦即在單一流體處使用該流體之性質，而在介面處則是採用體積分率來混合其流體性質。然而，能量方程式(式(2.7))中的流體性質則是在單流體區域內使用其本身的性質，介面處則視為一內邊界來處理而不採用上述的混合方式。

接著試圖改寫式(2.5)的連續方程式，將其散度項展開並且先不考慮相變化所產生的源項可得到下式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.12)$$

再經由整理並且導入式(2.10)

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right] = \frac{-1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{D[\alpha(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2]}{Dt} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \left(\frac{D\alpha}{Dt} \right) \quad (2.13)$$

依照上一小節所述之體積分率的物質微分為零($\frac{D\alpha}{Dt} = 0$)，因此連續方程式可以改寫成下式：

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.14)$$

透過上式可以表示在兩相流模型中，所考慮的連續方程式乃是體積流率之守恆。最後再將相變化所產生的質傳量引入，可得本文所使用的連續方程式，如下：

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = S_M \quad (2.15)$$

2.4 表面張力模型

當兩種不可混合的流體接觸時，因為其內部各別的分內聚力，造成靠近介面的流體分子受到不同的作用力，使得兩流體在介面處存在介面自由能，此能量通常稱為表面張力。表面張力可依其作用的方向分為沿流體介面之法線或是切線方向。當流體沿著介面的切線方向有著溫度差或是濃度差時，會產生所謂的 Marangoni effect，也就是在流體介面處，沿著切線方向會產生表面張力梯度，此梯度會使介面產生切線的拉力，進而產生 Marangoni convection。然而在本研究中，是假設溫度或濃度沿著介面切線方向並不會有顯著變化，因此表面張力梯度為零，亦即表面張力係數 σ 為一常數，因此在切線方向的作用力會相互抵消，而垂直方向的表面張力則是產生一壓力差，並且提供維持介面曲率所需的能量。壓力差與表面張力和曲率的關係式如下：

$$\Delta P = P_i - P_o = \sigma \kappa \quad (2.16)$$

其中 P_i 為凹面側壓力、 P_o 為凸面側壓力、 κ 為平均曲率。當 $\kappa > 0$ ，表示流體 1 位於介面凹側， $\kappa < 0$ 流體 2 位於介面凹側(圖 2.1)。根據上面所定義之流體體積分率，可將流體 2 指向流體 1 的單位法線向量定義為

$$\vec{n} = \frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|} \quad (2.17)$$

根據 Brackbill[61]所提出的 CSF 模型，介面的平均曲率可表示如下

$$\kappa = -(\nabla \cdot \vec{n}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|} \right) \quad (2.18)$$

將上式散度展開後可改寫為

$$\kappa = \frac{1}{|\nabla\alpha|} \left[\left(\frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|} \cdot \nabla \right) |\nabla\alpha| - (\nabla \cdot \nabla\alpha) \right] \quad (2.19)$$

根據本文的數值運算方式，因式(2.19)所採用計算的格點數多於式(2.18)，其曲率分布的情況較佳且計算上也較為穩定，故本文在計算上採用式(2.19)的方式來近似介面之曲率。將式(2.19)和(2.16)導入動量方程式中的表面張力項，可得

$$\vec{f}_\sigma = \nabla P = \sigma \kappa \nabla\alpha = \sigma \frac{1}{|\nabla\alpha|} \left[\left(\frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|} \cdot \nabla \right) |\nabla\alpha| - (\nabla \cdot \nabla\alpha) \right] \nabla\alpha \quad (2.20)$$

2.5 相變化之熱質傳模型

當兩種性質不同的流體接觸時，因不連續性而在介面處必須滿足跳躍邊界條件，將此邊界分別帶入質量、動量及能量方程式，可獲得在介面處由不連續性所形成的三等式，如下：

$$\dot{m}_{\text{int}} = \rho_g (\vec{V}_g - \vec{V}_{\text{int}}) \cdot \vec{n} = \rho_l (\vec{V}_l - \vec{V}_{\text{int}}) \cdot \vec{n} \quad (2.21)$$

$$(P_g - P_l) \vec{l} \cdot \vec{n} - (\tilde{\tau}_g - \tilde{\tau}_l) \cdot \vec{n} + \dot{m}_{\text{int}} (\vec{V}_g - \vec{V}_l) = \sigma \kappa \vec{n} \quad (2.22)$$

$$\dot{q}_{\text{int}} = \dot{m}_{\text{int}} (C_l T_l - C_g T_g) = (k_g \nabla T_g - k_l \nabla T_l) \cdot \vec{n} \quad (2.23)$$

其中 \dot{q}_{int} 為介面兩側熱通量差所產生的淨熱通量，而 \dot{m}_{int} 則為介面處因相變化所造成的質量通量。下標 l 、 g 和 int 分別代表液相、氣相及介面。對於式(2.23)

中淨熱通量之內能差和法線方向上之溫度變化量可改寫如下：

$$\dot{q}_{\text{int}} = \dot{m}_{\text{int}} h_{lg} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_g - \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_l \quad (2.24)$$

此處 h_{lg} 為汽化潛熱。上式表示介面處所產生的淨熱傳量，將提供液氣間產生相變化所需要的潛熱。對於一含有介面的控制體積而言，其介面處因相變化將使兩側流體產生相對速度進而造成質量通量，故當控制體積產生相變化之連續方程式，可以表示如下：

$$\int_{C.V.} \nabla \cdot \vec{V} dV = \int_{S_c} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{S_i} (\vec{V}_g - \vec{V}_l) \cdot \vec{n} ds \quad (2.25)$$

其中 $C.V.$ 為控制體積、 S_c 為控制面、而 S_i 為控制體積中之液氣介面。上式中兩流體之相對速度可經由式(2.21)整理後而得，如下：

$$(\vec{V}_g - \vec{V}_l) \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l} \right) \dot{m}_{\text{int}} \quad (2.26)$$

再根據式(2.24)所推導出在相變化過程中的質傳與熱傳關係式及配合式(2.26)共同引入式(2.25)中，可得加入相變化模型之連續方程式，如下：

$$\nabla \cdot \vec{V} = S_M = \frac{1}{h_{lg}} \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l} \right) \frac{1}{\Delta V} \int_{S_i} \dot{q}_{\text{int}} dS \quad (2.27)$$

其中 ΔV 為控制體積之體積。

對於流體體積方程式而言，上述因相變化所產生的質量通量亦即液體汽化為蒸汽的量，故將 VOF 方程式在含有介面的控制體積中加以修正，如下：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \bar{V}) = \frac{1}{h_{lg}} \left(-\frac{1}{\rho_l} \right) \frac{1}{\Delta V} \int_{S_i} \dot{q}_{int} dS \quad (2.28)$$

上述的方法即為本文所考慮之相變化模型，其主要由式(2.24)計算所得之介面淨熱通量後，透過跳躍邊界條件將此熱通量轉換為質量通量，最後再以源項的方式來修正連續方程式和流體體積方程式。至於溫度場而言，本文並非利用同樣的手法來修正能量方程式，而是將介面視為一組熱傳的內邊界條件來處理，詳細的計算方式將在爾後的章節做介紹。

2.5 無相變化之熱傳模型

在上述相變化的模型中，通常都是假設介面溫度為飽和溫度並且因跳躍邊界條件使其在介面兩側熱傳量不同而有質傳的發生。然而在無相變化的熱傳問題中，則必須考慮介面兩側溫度的連續性及能量的守衡。因此在無相變化的熱傳問題中，本研究考慮兩流體在介面處的溫度為一常數(T_{int})，並且在介面上兩流體的溫度為連續且等於介面溫度，再者因能量守衡之關係，故介面兩側的熱通量相等。上述兩個介面處的條件可表示如下：

$$T_g = T_l = T_{int} \quad (2.29)$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_g = \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_l \quad (2.30)$$

如同相變化模型的處理方式，本研究在處理無相變化的熱傳模型時，亦採

用能量內邊界處理上述兩組介面處的條件。

2.6 邊界條件

對於兩相流之計算而言，除上述的統御方程式外，尚需定義其邊界之速度、壓力、溫度和體積分率。一般而言，其常用的邊界條件有入口、出口、固定壁面及對稱面邊界。以下將對本文中所使用的邊界條件加以描述。

1. 入口邊界：在入口邊界上，本研究是給定一個特定的速度分佈，並且依據流入之流體的性質來定義其體積分率，入口的壓力則是採用外插的方式求得，而入口的溫度條件則為給定的溫度分布。
2. 固體壁面：在本文中所考慮之流體，其分子的平均自由路徑(mean free path)皆遠小於流場的尺度，所以在固體壁面上並不考慮流體分子本身滑動的現象，因此流體與固體邊界之速度在物理上必須是連續的，亦即所謂的無滑移邊界條件(no-slip condition)，如式(2.29)。而在靠近壁面的流體之體積分率則是採用梯度為零的方式外差而得。

$$\vec{V} = \vec{V}_w \quad (2.31)$$

至於溫度場的牆面則可以分為定溫邊界以及定熱通量邊界條件，當壁面熱通量為零則代表絕熱邊界條件。

3. 出口邊界：本文中所使用的出口邊界條件有
 - (a) 零梯度出口邊界：使用速度和流體體積分率梯度為零的出口邊界直接外插而得，而為了使整體的流場維持質量守恆，因此會透過

出入口質量流率之關係，再加以修正出口的速度。

- (b) 壓力出口邊界：在出口邊界上給定一個固定的壓力，並且透過外插方式先求得邊界速度，經由文章後段將介紹的壓力修正方程式所得之流量來修正出口邊界上的速度。

對於體積分率和溫度的邊界條件則是假設梯度為零。

4. 對稱邊界：對於此種邊界的速度條件而言，就是速度沿著邊界的法線方向分量為零且切線方向梯度分量為零，亦即速度場在此邊界兩側對稱且沒有流量流經此邊界。

$$\begin{aligned} V_n &= 0 \\ \frac{\partial V_{//}}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

下標//表示邊界的切線方向、 n 表示邊界的法線方向。然而，對稱邊界上的流體體積分率和溫度則同樣以梯度為零的條件。

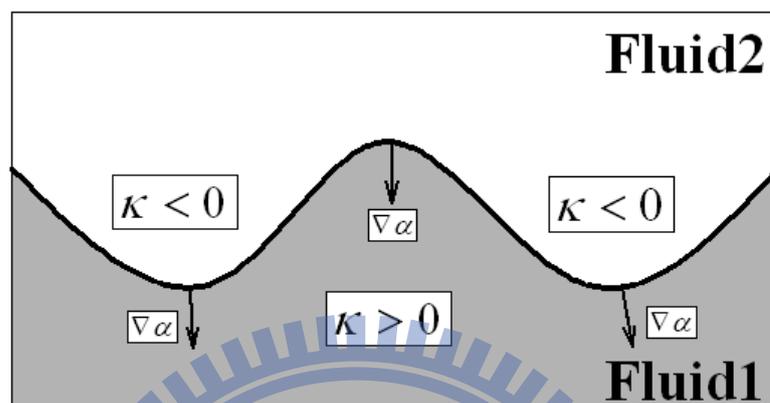


圖 2.1 介面曲率大小之示意圖



第三章 通量混合介面捕捉法(FBICS)

3.1 簡介

本章主要介紹本研究所提出的第一種對於流體體積方程式之計算方法，此法是採用介面捕捉(interface capturing)而不重建介面幾何的方式，來直接求解流體體積的對流方程式以獲得介面移動的位置。傳統上，本類型的方法相當多，像是低階的上風法(UDS)和下風法(DDS)，或是高階的正規化變數法(NVD)和全變量縮減法(TVD)。然而，由於流體體積方程式中包含較難處理的對流項，上述的方法針對此項離散時，大多會造成數值擴散以及數值震盪的問題。舉例來說，使用一階上風法雖然計算的過程不會產生數值震盪的問題而導致流場不穩定，但由於其數值擴散過於嚴重，會導致介面失去其鮮明度(sharpness)而無法維持其階梯函數(step function)的型態；反之，若使用下風法處理對流項，雖然可以避免數值擴散產生的問題，但是介面處會產生激烈的震盪，此現象將使流場不穩定度激增。同樣的情況也會發生在高階解析差分法之中，因此為了兼具維持精確並有界限性的流體介面及數值求解的穩定性，最有效的方式就是透過一個基於流體介面與網格面夾角有關的連續函數來混合高階析差分法與壓縮性差分法。以下將詳細介紹本研究經由通量限制函數配合上述的混合策略所提出的通量混合介面捕捉法(flux blending interface capturing scheme, FBICS) [59]。

3.2 流體體積方程式之離散

首先可將式(2.4)中張量型式的流體體積方程式改寫成散度型式，如下式：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha \vec{V} = 0 \quad (3.1)$$

然後採用有限體積法，對控制體積執行體積分，並將上式中散度型式之項經由高斯散度定理，由體積分再轉換成控制體積上的面積分，可得

$$\iiint_{C.V.} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV + \iint_{C.S.} \alpha \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.2)$$

接著將上式近似成離散的型式：

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} (\alpha_p^n - \alpha_p^o) + \sum_f F_f \alpha_f = 0 \quad (3.3)$$

其中 ΔV 表示網格體積、 Δt 表示時間步階。上標 n 和 o 分別代表新舊時階，下標 p 和 f 分別表示控制體積的中心和與控制體積相鄰之面，而 F_f 則是代表流經控制面的體積通量，如下式：

$$F_f = \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.4)$$

此處 \vec{S}_f 代表控制體積面的法向量(如圖 3.1)， \vec{V}_f 代表面上速度。對於式(3.2)中控制面上的體積分率 α_f ，則採用控制面 f 上下游格點之值與通量限制函數 $\gamma(r)$ 來計算，如下式：

$$\alpha_f = \alpha_U + \frac{\gamma(r)}{2} (\alpha_D - \alpha_U) \quad (3.5)$$

其中下標 U 和 D 分別表示控制面上游及下游的格點(如圖 3.2)，而通量限制函數 $\gamma(r)$ 則為體積分率梯度比 r 之函數，此梯度的定義如下：

$$r = \frac{\alpha_U - \alpha_{UU}}{\alpha_D - \alpha_U} \quad (3.6)$$

其中下標 UU 表示控制面 f 上上游的格點(如圖 3.2)。在式(3.5)中，等號右邊兩項分別為上風項及反擴散(anti-diffusion)項，為了使求解的過程更加穩定快速，在這邊採取 Crank-Nicolson 的方式來加以處理上風項，而反擴散項使用顯性(explicit)解法，所以式(3.5)可以改寫如下：

$$\alpha_f = \left[\frac{1}{2}(\alpha_U^n + \alpha_U^o) + \frac{\gamma(r)}{2}(\alpha_D^o - \alpha_U^o) \right] \quad (3.7)$$

將上述所提到的離散方程式代入式(3.3)中，即可得到本方法所用來離散流體體積方程式之代數方程式，如下：

$$A_P \alpha_P^n = \sum_C A_C \alpha_C^n + S_\alpha \quad (3.8)$$

$$A_P = \sum_C A_C + \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.9)$$

$$A_C = \frac{1}{2} \max(-F_f, 0) \quad (3.10)$$

$$S_\alpha = \sum_f \left[-\frac{1}{2} F_f \alpha_U^o - \frac{\gamma(r)}{2} (\alpha_D^o - \alpha_U^o) F_f \right] + \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \alpha_P^o \quad (3.11)$$

其中下標 P 表示控制體積之中心、 C 表示控制體積鄰近格點(如圖 3.1)。

3.3 通量限制函數

在過去已有許多有關計算對流項的差分法被提出，其主要可以分為線性及非線性的差分法。依式(3.5)可知一般常見的線性差分法皆可利用通量限制函數來表達[62, 63]，若通量限制函數 $\gamma(r)=0$ 則表示一階上風法(UDS)、 $\gamma(r)=1$ 為中央差分法(CDS)而 $\gamma(r)=2$ 即為下風法(DDS)。其他類似的線性函數，像是 $\gamma(r)=r$ 為線性上風法(LUS)、 $\gamma(r)=r/4+3/4$ 為 QUICK 法、

$\gamma(r) = r/2 + 1/2$ 為 Fromm's 法等等。一般而言，在上述的線性差分法中，除了一階上風法(UDS)外，其他線性的函數通常會產生無界限性的結果，雖然可以得到較精確的介面位置，但是在體積分率梯度變化較大的區域，會產生激烈的數值震盪，以致於介面產生不穩定的現象。雖然上風法並不會產生數值震盪的問題，然而其強烈的數值擴散將導致流體介面失去階梯函數的特性。因此有許多加入 CBC[29]及 TVD[64]界限條件的非線性差分法相繼衍生而出。所謂的非線性差分法就是導入界限性的限制條件，讓整體體積分率分布符合界限性並且使介面不產生數值震盪的問題。根據其所使用的界限條件，可分為 NVD 以及 TVD 差分法，而這些非線性的差分法同樣可利用通量限制函數表示為體積分率梯度的方程式[63]。雖然非線性的差分法可有效的避免無界限性所造成的數值震盪，但是經由一些簡單的模型測試，可發現這些非線性差分法還是會失去介面的鮮明度，即便是採用這類方法中最不具擴散性的 SUPERBEE 法[65]也無法避免。

3.4 通量混合介面捕捉法

由前文可知單獨使用單種的通量限制函數將無法同時避免數值擴散或震盪之問題，因此本研究提出以基於流體介面與網格格線夾角有關的連續函數 ($\omega(\theta)$) 來混合兩種通量限制函數，包含高解析差分法 (High-resolution scheme, HR) 以及有界下風法 (Bounded Downwind scheme, BD)，可表示如下式：

$$\gamma^{FBICS-A} = [1 - \omega(\theta)]\gamma^{HR} + \omega(\theta)\gamma^{BD} \quad (3.12)$$

上式即為本文所提出的通量混合介面捕捉法(FBICS)[59]。其中所使用的高解析差分法和有界下風法的通量限制函數可表示如下：

$$\gamma^{HR} = \max \left[0, \min \left(4r, \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}, 2 \right) \right] \quad (3.13)$$

$$\gamma^{BD} = \max [0, \min(4r, 2)] \quad (3.14)$$

其中 HR 法是以 Fromm's 法做為基底函數。有別於一階上風法，下風法是一種具有高壓縮性的差分法，此差分法會使介面處產生明顯的震盪現象及增加流場不穩定性，這起因於數值離散後所造成的反擴散性，然而這種性質卻有利於壓縮介面而形成階梯函數的型式[66]，因此本研究採用有界下風法來增加介面捕捉時的鮮明性。式(3.12)中所採用的混合原則是當介面與網格控制面平行時，採用有界下風法來計算；反之，當介面垂直於控制面時，則改為使用高解析差分法。在過去的文獻中[26, 27]，此種混合的手法也被使用於 NVD 形式的差分法中。至於混合所使用的函數本研究則採用[26]中所提出的函數：

$$\omega(\theta) = \cos^4(\theta) \quad (3.15)$$

其中

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\nabla \alpha_f \cdot \vec{\delta}_{UD}}{|\nabla \alpha_f| |\vec{\delta}_{UD}|} \quad (3.16)$$

此處 $\vec{\delta}_{UD}$ 表示控制面上游網格 U 至下游 D 的距離向量(如圖 3.3)。

為了更清楚說明 FBICS 法中用以混合兩組通量限制函數，以下將透過

Leonard[67]所提出的正規化變數(normalized variable formulation, NVF)

來加以分析。其定義如下：

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_{UU}}{\alpha_D - \alpha_{UU}} \quad (3.17)$$

其中下標 UU 表示控制面 f 上上游的格點(如圖 3.2)。將上式的定義導入式

(3.5)及(3.6)中可得正規化處理後的面上體積分率，如下：

$$\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U + \frac{\gamma(r)}{2}(1 - \tilde{\alpha}_U) \quad (3.18)$$

且體積分率梯度為

$$r = \frac{\tilde{\alpha}_U}{1 - \tilde{\alpha}_U} \quad (3.19)$$

由上式可知控制面上的體積分率僅和正規化後的上游之值有關。

所謂的NVD差分法所遵守的限制條件是由Gaskell與Lau[29]所提出的對流界限準則(Convection Boundness Criterion, CBC)，其條件為

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U & \text{for } \tilde{\alpha}_U < 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U > 1 \\ \tilde{\alpha}_U \leq \tilde{\alpha}_f \leq 1 & \text{for } 0 \leq \tilde{\alpha}_U \leq 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

可將其範圍在NVD圖上標出(如圖 3.4(a))。相較於NVD法，TVD差分法則是更嚴謹的定義界限性的範圍[64](如圖 3.4(b))，如下式

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U & \text{for } \tilde{\alpha}_U < 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U > 1 \\ \tilde{\alpha}_U \leq \tilde{\alpha}_f \leq 2\tilde{\alpha}_U & \text{for } 0 \leq \tilde{\alpha}_U \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\alpha}_U \leq \tilde{\alpha}_f \leq 1 & \text{for } \frac{1}{2} \leq \tilde{\alpha}_U \leq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

根據正規化變數可將FBICS法中所使用的高解析差分法及有界下風法表示如下：

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} 3\tilde{\alpha}_U & 0 < \tilde{\alpha}_U \leq \frac{1}{8} \\ \tilde{\alpha}_U + \frac{1}{4} & \frac{1}{8} < \tilde{\alpha}_U \leq \frac{3}{4} \quad (FDS) \\ 1 & \frac{3}{4} < \tilde{\alpha}_U \leq 1 \quad (DDS) \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \quad (UDS) \end{cases} \quad \text{for HR scheme} \quad (3.22)$$

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} 3\tilde{\alpha}_U & 0 < \tilde{\alpha}_U \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} < \tilde{\alpha}_U \leq 1 \quad (DDS) \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \quad (UDS) \end{cases} \quad \text{for BD scheme} \quad (3.23)$$

其中 FDS 表示 Fromm's 法。此兩種非線性差分法在 NVD 中分布的情形，如圖 3.5 所示。由圖 3.4 與 3.5 比較後可看出本文所採用的兩種方法皆落 TVD 界限外而在 CBC 界限內，在上述區域內的非線性差分法因為計算過程中所產生的數值擴散較小，所以較有利於維持介面的鮮明性。這是由於在 NVD 圖中，其對角線表示一階上風法 ($\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U$)，而上方水平線 ($\tilde{\alpha}_f = 1$) 則表示下風法。因此當所使用的差分法越接近對角線時，其將產生較強的數值擴散；反之，當其越接近上方水平線或左側的垂直線 ($\tilde{\alpha}_f = 0$)，其將有較高的壓縮性。FBICS 法將在結果討論中將與 CICSIM 法 [26] 及 HRIC 法 [27] 做比較，此兩種方法是以 NVF 形式來混合。HRIC 法是由有界下風法及一階上風法之混合，其 NVF 可表示如下：

$$\tilde{\alpha}_f^{HRIC} = \begin{cases} \omega(\theta)\tilde{\alpha}_f^{BD} + (1-\omega(\theta))\tilde{\alpha}_f^{UDS}, & C_N < 0.3 \\ \left\{ \begin{aligned} &\omega(\theta)\tilde{\alpha}_f^{BD} + (1-\omega(\theta))\tilde{\alpha}_f^{UDS} + \\ &\left[\omega(\theta)\tilde{\alpha}_f^{BD} + (1-\omega(\theta))\tilde{\alpha}_f^{UDS} - \tilde{\alpha}_f^{UDS} \right] \frac{0.7-C_N}{0.7-0.3} \end{aligned} \right\}, & 0.3 < C_N < 0.7 \\ \tilde{\alpha}_f^{UDS}, & C_N > 0.7 \end{cases} \quad (3.24)$$

而至於 CICSAM 法則是採用 HYPER-C 法[68]及 ULTIMATE-QUICKEST(UQ)法來混合，其 NVF 可分別表示如下：

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} \min\left(1, \frac{\tilde{\alpha}_U}{C_N}\right) & 0 \leq \tilde{\alpha}_U \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{for HYPER-C scheme} \\ \text{(UDS)} \end{array} \quad (3.25)$$

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} \min\left\{\frac{8C_N\tilde{\alpha}_U + (1-C_N)(6\tilde{\alpha}_U + 3)}{8}, \min\left\{1, \frac{\tilde{\alpha}_U}{C_N}\right\}\right\} & 0 \leq \tilde{\alpha}_U \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{for UQ scheme} \\ \text{(UDS)} \end{array} \quad (3.26)$$

其中 C_N 為局部的庫倫數(local Courant number)。在 NVD 圖中，此方法由於其左側界限隨著庫倫數變化($\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U / C_N$)，當庫倫數趨近於零時，左界限將會接近於垂直線，使其有極高的壓縮性；反之，當庫倫數趨近於 1，則會貼近於對角線，也就是本方法會近似於一階上風法，使其不僅沒增加壓縮性反而提高了數值擴散，這個現象在之後本文的結果討論中可以清楚的發現。為了使本文所提出的 FBICS 法於較小庫倫數下能有較佳壓縮介面能力，因此本文採取類似 CICSAM 法的策略，特別將 HR 及 BD 的通量限制函數透過庫倫數來加以調整，如下式：

$$\gamma^{HR} = \max\left[0, \min\left(\max\left(2\left(\frac{1}{C_N} - 1\right)r, 4r\right), \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}, 2\right)\right] \quad (3.27)$$

$$\gamma^{BD} = \max\left[0, \min\left(\max\left(2\left(\frac{1}{C_N} - 1\right)r, 4r\right), 2\right)\right] \quad (3.28)$$

再透過與第一種方法相同的混合函數，因此 FBICS 法修改後可表示如下：

$$\gamma^{FBICS-B} = [1 - \omega(\theta)]\gamma^{HR} + \omega(\theta)\gamma^{BD} \quad (3.29)$$

而上述兩種通量限制函數其 NVF 的形式可表示如下：

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} \max(\frac{1}{C_N}, 3)\tilde{\alpha}_U & 0 < \tilde{\alpha}_U \leq \min(\frac{C_N}{4(1-C_N)}, \frac{1}{8}) \\ \tilde{\alpha}_U + \frac{1}{4} & \min(\frac{C_N}{4(1-C_N)}, \frac{1}{8}) < \tilde{\alpha}_U \leq \frac{3}{4} \quad (FDS) \\ 1 & \frac{3}{4} < \tilde{\alpha}_U \leq 1 \quad (DDS) \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \quad (UDS) \end{cases} \quad \text{for HR scheme} \quad (3.30)$$

$$\tilde{\alpha}_f = \begin{cases} \max(\frac{1}{C_N}, 3)\tilde{\alpha}_U & 0 < \tilde{\alpha}_U \leq \min(C_N, \frac{1}{3}) \\ 1 & \min(C_N, \frac{1}{3}) < \tilde{\alpha}_U \leq 1 \quad (DDS) \\ \tilde{\alpha}_U & \tilde{\alpha}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\alpha}_U \geq 1 \quad (UDS) \end{cases} \quad \text{for BD scheme} \quad (3.31)$$

圖(3.6(a))和(3.6(b))分別表示其 NVD 分布。由上列方程式可知，當 $C_N > 1/3$ 時使用 $\tilde{\alpha}_f = 3\tilde{\alpha}_U$ 作為界限，而 $C_N < 1/3$ 則改用 $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U / C_N$ 當做界限。上述處理的方式不僅可以在低庫倫數下達到提高壓縮性之目的，更可以避免在高庫倫數時，CICSAM 所遭遇到數值擴散的問題。總結本文所提出的兩種通量混合介面捕捉法，其最主要的差別就是在低庫倫數下，第二種差分法透過庫倫數之調整來提高其壓縮介面的能力，如此可以得到更精確的介面位置。

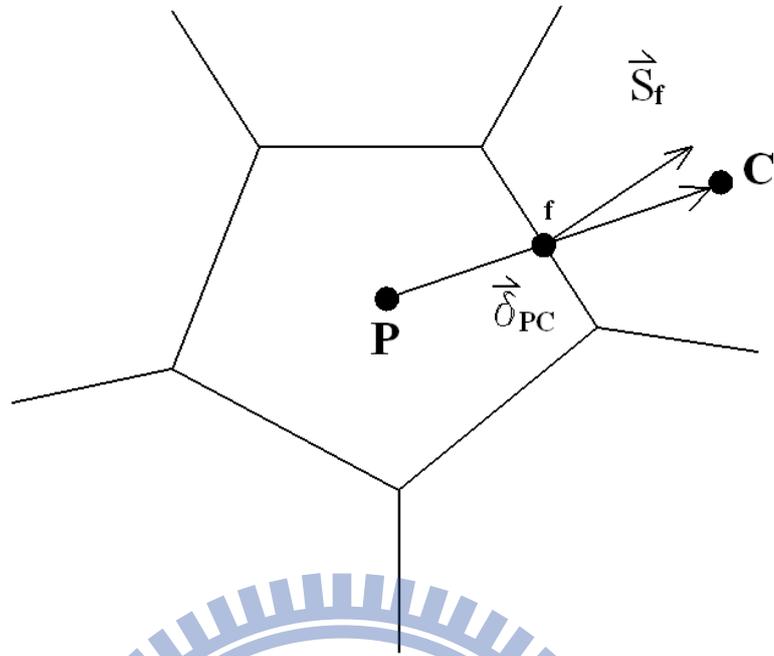


圖 3.1 任意形狀之控制體積與鄰近網格示意圖

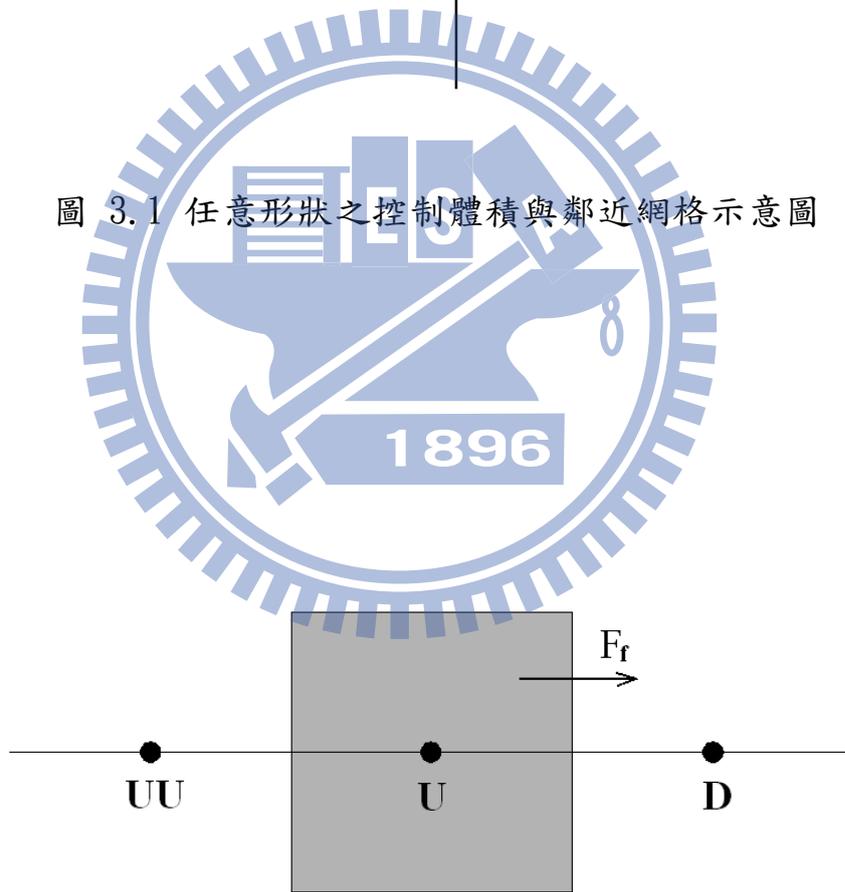


圖 3.2 網格控制面之上、下游和上上游之示意圖

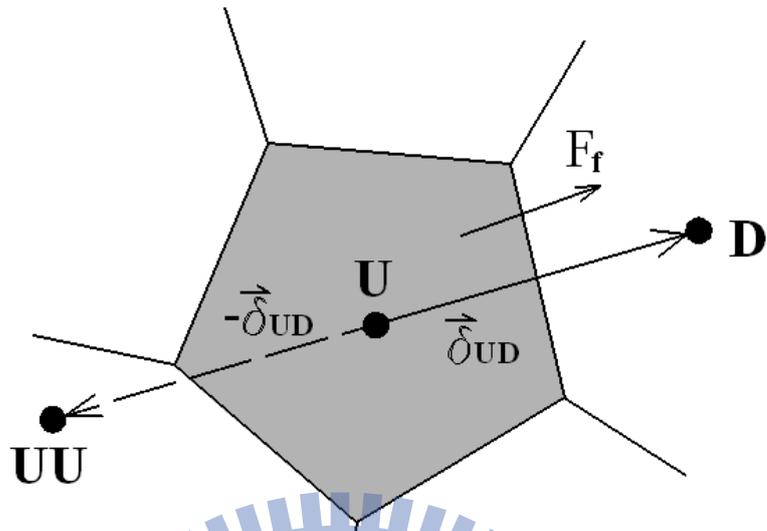
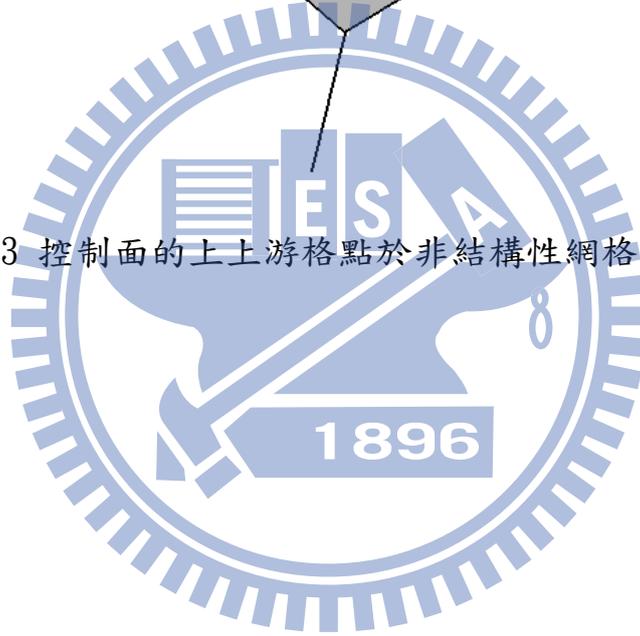
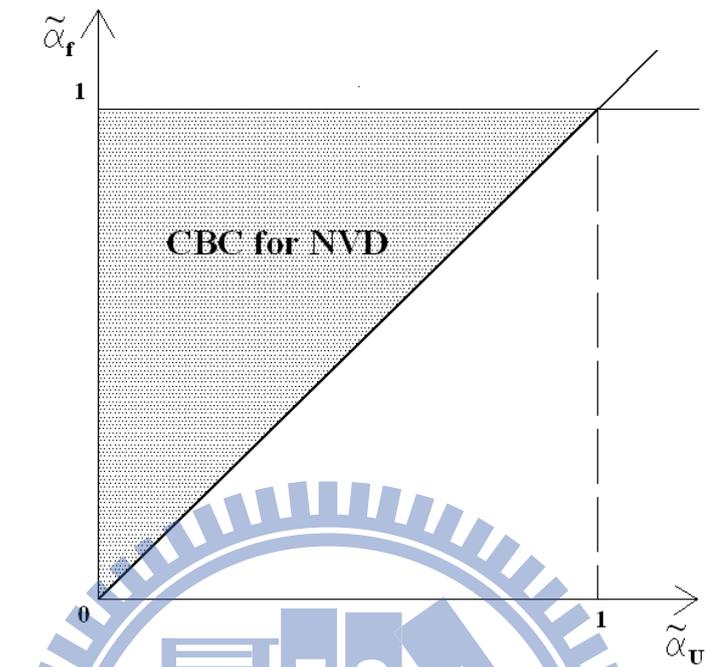
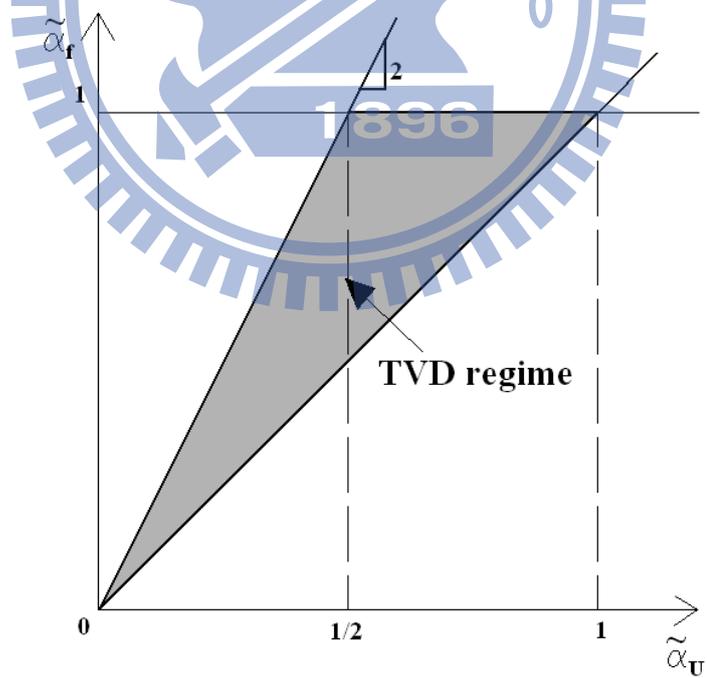


圖 3.3 控制面的上上游格點於非結構性網格中之示意圖



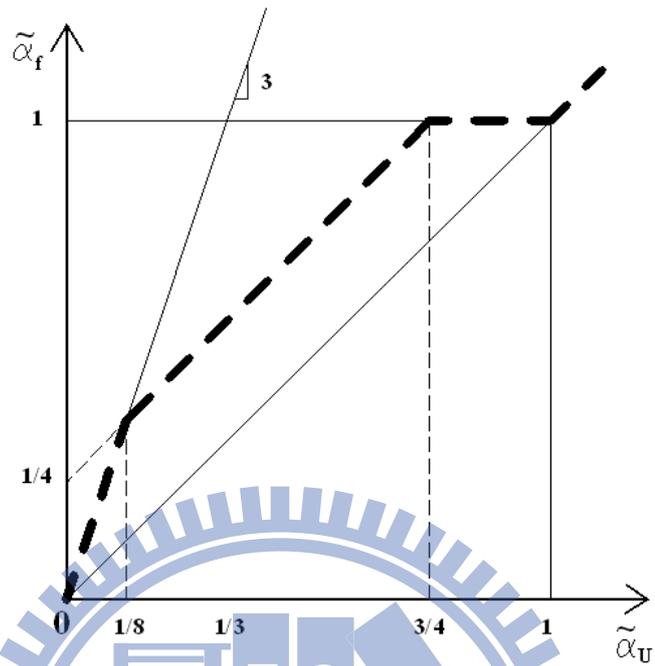


(a) CBC 界限準則

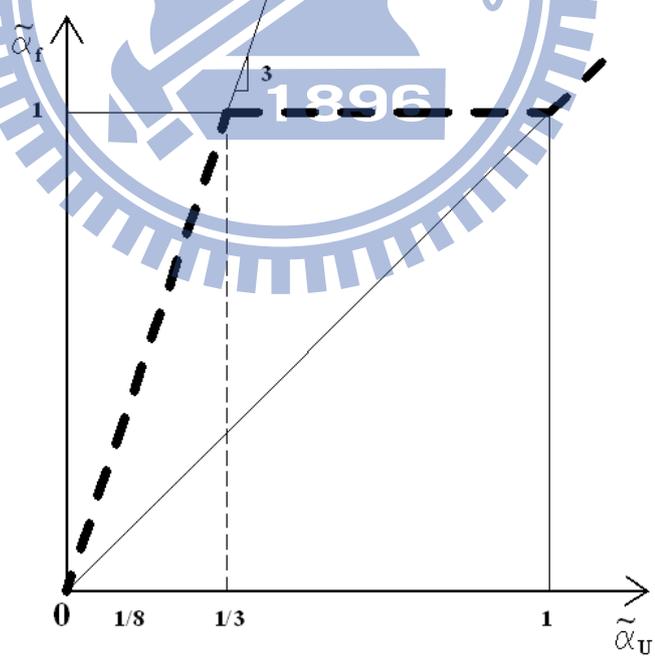


(b) TVD 界限準則

圖 3.4 正規化視圖之 CBC 和 TVD 界限準則

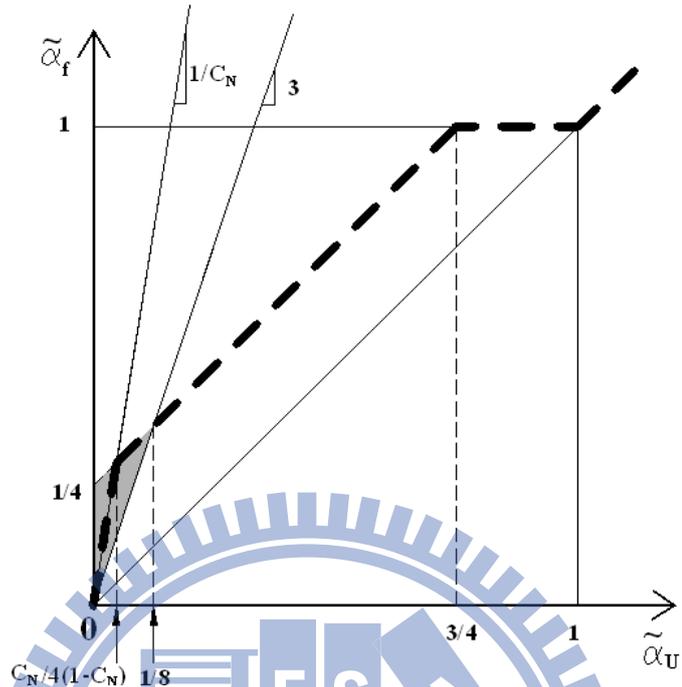


(a) 高解析差分法 (high-resolution scheme)

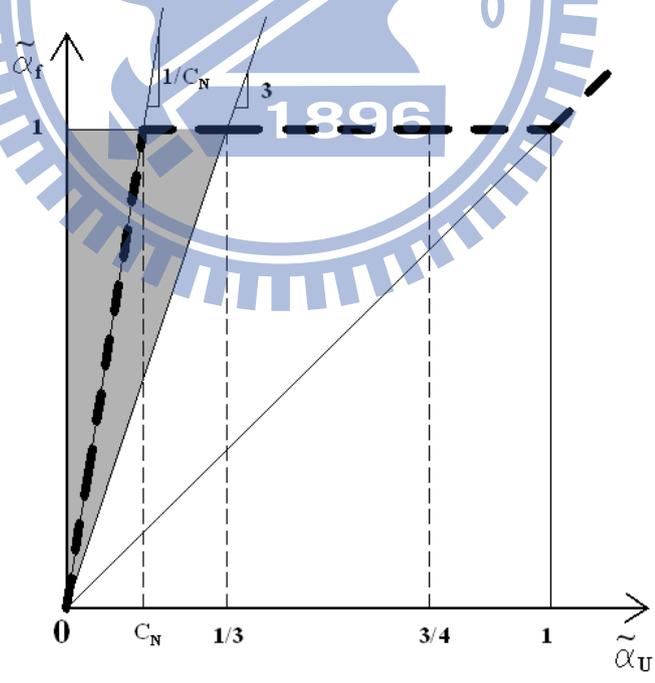


(b) 有界下風法 (bounded downwind scheme)

圖 3.5 FBICS-A 法所使用的非線性通量限制函數



(a) 高解析差分法 (high-resolution scheme)



(b) 有界下風法 (bounded downwind scheme)

圖 3.6 FBICS-B 法所使用的非線性通量限制函數

第四章 守恆內差介面追蹤法(CISIT)

4.1 簡介

在實際的兩相流問題中，介面處常伴隨著相變化所衍生的質傳和熱傳現象，此類的問題分析上都必須使用到介面處局部的資訊來處理，因此如何取得精確的介面位置變成是相當重要的課題。然而前章所描述的處理方式，不管是單獨使用高階非線性或是通量混合的差分法來捕捉介面移動的情況，或多或少皆會產生數值擴散的問題，導致介面分佈通常會有數個網格的厚度，如此便無法取得確切的介面的位置及形狀的分布，因此這類型的方法並不太適用於含有相變化的兩相流系統之中。

本章將提出另一種適合實際兩相流計算所使用的介面追蹤法(interface tracking)，此法同樣是基於流體體積分率方程式並加入介面重建的概念所推導而成。在[69, 70]中，Yeh 提出一套使用有限元素法計算兩相流(VOF-FEM)之方法，其方法首先是依照不同流體所在的網格定義其流體體積分率並且儲存在網格中心，然後經由節點周圍相關網格中心之值內差該節點的體積分率，並且定義介面在節點體積分率等於 0.5 之處，當介面的位置定義完成之後，再將網格所有的節點區分為兩種流體並重新給定其體積分率為 1 或 0，而其介面的傳輸方程則是透過有限元素法來計算。上述的方法對於介面位置的處理雖然已經避免了數值擴散的問題，然而在局部上卻無法遵守流體體積守恆的概念，因此本文所要提出的守恆內差介面

追蹤法(Conservation Interpolation Scheme for Interface Tracking, CISIT)便是要同時避開數值擴散並且遵守體積守恆的處理方式。本方法主要的步驟有三：

一、介面重建：根據上個時階體積分率的分布並定義流體介面在於 $\alpha=0.5$ (二維為等位線、三維則為等位面)之處，來對介面進行重建。

二、流體體積分率之預測：介面位置計算完成之後，透過有限體積法的離散來計算流體體積方程式，進而得到初步的流體體積分率之分布。

三、流體體積分率之修正：對於步驟二的體積分率進行調整，使其避免產生無界限性以及不合物理現象的問題，經過調整後可以得到下個時階新的體積分率。

然而本方法所得到的介面分布為一組步階函數的形式，此舉將導致在計算動量方程式中所使用的流體性質呈現極度的不連續而導致數值計算上的不穩定，因此本方法針對此問題特別導入平滑化的處理，以便在求解動量方程式時可以得到較穩定的結果。

以下將針對本方法在二維的兩相流系統的數值方法做詳盡的介紹，而本文所提出的方法同時亦可推展到三維的流場之中。雖然基本上二維和三維的介面計算之理論相同，但實際上在幾何的處理上仍然有所區別。因此本章先著重於二維流場的理論模型建立為主，而對於三維上的處理則將在第十章中做說明。

4.2 介面重建

對於一個的兩相流流場而言，本文採用 $\alpha=0.5$ 來定義介面位置，並透過一個內差的方式來進行介面的重建。初始的流體體積分率儲存在網格中心的位置，可以透過下列線性權重的方式加以差分至網格節點上。

$$\alpha_v = \frac{\sum_j w_j \alpha_j}{\sum_j w_j} \quad (4.1)$$

其中下 v 標表示網格節點、下標 j 表示節點 v 周圍相關的網格。 w_j 表示網格 j 所含的權重因子，而 w_j 可以是節點周圍網格體積或距離之倒數。經由上式可以得到所有節點的體積分率值，接著透過 α_v 之值判斷網格各個邊上是否有流體介面通過。當邊上的兩個節點值存在一點 $\alpha_v > 0.5$ 同時另一點為 $\alpha_v < 0.5$ 時，則表示介面通過此邊，而利用此兩節點且透過線性的內差方式可以得到介面 ($\alpha=0.5$) 所在的位置 (如圖 4.1 所示)。將整個計算區域的網格都進行上述步驟之計算，便可以得到一組連續且片段線性的流體介面。本重建法的處理方式不管是在二維或三維的流場之中都可以快速簡便地獲取介面的分布。

4.3 流體體積分率預測步驟

依前一章所描述，在一個固定網格的系統之中，可使用有限體積法將保守型式的流體體積方程式離散，而其對流項離散後的對流通量如下：

$$F_f \alpha_f = (\vec{V}_f \cdot \vec{S}_f) \alpha_f \quad (4.2)$$

前面所提的介面捕捉法(interface capturing)是直接使用控制面的鄰近網格之資訊來對上式中的面上體積分率值(α_f)做近似，因此選用合宜的差分方式，可以適度減少數值擴散及數值震盪所衍伸的問題。而本章所述之介面追蹤法(interface tracking)，對於式(4.2)則是選用流體 1 流經浸潤區域(wetted area)的體積流率來取代介面捕捉的處理方式，如下式：

$$F_f \alpha_f = \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f^w \quad (4.3)$$

此處 \bar{S}_f^w 表示浸潤區域的面向量。如圖(4.2)所示紅色區域表示流體 1，介面橫跨一個不規則的網格，並且分別在三個網格面上構成浸潤區域，而根據圖上所標示的速度分布，浸潤區域相對於控制體積而言可分為流體 1 的入口($f1, f2$)或出口($f3$)。將式(4.3)導入後可將式(3.3)改寫成：

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} (\alpha_p^n - \alpha_p^o) + \sum_j \bar{V}_{fj} \cdot \bar{S}_{fj}^w = 0 \quad (4.4)$$

其中下標 j 代表控制體積的所有控制面。

在時間推進的方式上，視其所選用的對流通量($\bar{V}_f \cdot \bar{S}_f^w$)為舊時階或新時階，可採用顯式(explicit)或隱式(implicit)的解法，經由測試發現顯式解法的結果在介面上較不會產生震盪的問題，所以本方法中選用顯式之解法來處理，如下：

$$\alpha_p^n = \alpha_p^o - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_j (\bar{V}_{fj} \cdot \bar{S}_{fj}^w)^o \quad (4.5)$$

此方程式表示在一個時階內，控制體積內體積分率的增加量相當於所有浸潤區域流體 1 流進流出的淨總和所佔網格體積之比例。上述程序只需要透

過內差後的介面位置即可獲得浸潤區域進而計算新的體積分率分布，如此便可避開介面捕捉法中所須處理的 α_f 項，故採取本方法並不會有數值擴散的問題發生。此外，本方法在計算時的 CFL 限制條件基本上是不超過 1 為原則。

上述的流體體積方程式並不考慮相變化所造成體積分率須修正的量，因此再導入第二章所描述的修正方式，可將 CISIT 法在相變化模組下完整的離散方程式表示如下：

$$\alpha_p^n = \alpha_p^o - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_j (\bar{V}_{ij} \cdot \bar{S}_{ij}^w)^o + \frac{1}{h_{lg}} \left(-\frac{1}{\rho_l} \right) \frac{\dot{q}_{int} \Delta A_{int}}{\Delta V} \quad (4.6)$$

其中 ΔA_{int} 為控制體積中氣液介面的面積。

4.4 流體體積分率修正步驟

上述的計算方式是將流體體積分率之推進視為完全理想的狀況，亦即介面只佔據一個網格的寬度，除了介面所在的網格以外，其他非介面的網格視為靜止不動且其體積分率分別為 1 或 0。然而在實際的數值計算中，上述的理想狀況並不存在，因此必須對非理想的狀況加以修正。這些非理想的狀況通常發生在流體介面準備跨越網格面時產生，其主要的狀況有四種，依其發生位置在於流體流動前端或是尾端分為兩大類：第一種是在流動前端介面往下一個網格推進的過程中所發生，如填充過度(over-filling)和填充不足(under-filling)；另一種則是在流動尾端介面離開原屬網格之過程中所發生的情況，如耗竭過度(over-depleting)、耗竭不足

(under-depleting)。上述的狀況通常會使介面流動時，產生非界限性以及不符合介面連續流動的問題，因此以下將針對四種不同的情況以及修正的方式加以說明。

4.4.1 填充過度(over-filling, $\alpha_p > 1$)

在流動前端介面準備跨越網格面往下一個網格推進的時，可能會產生 $\alpha_p > 1$ 的情況，稱之為填充過度。以一維的流動為例(如圖 4.3(a))，實線和虛線分別表示舊時階和新時階下的介面位置。圖中介面因流場速度而開始往右邊網格推進，當介面在實線的位置時，左側為浸潤區而右側為非浸潤區，根據式(4.5)可知此時左側開始有流體 1 流入而右側則無流體進出，隨著介面逐漸地推進，主格點的體積分率(α_p)會逐漸上升。當流體介面開始由主格點 P 跨越右邊的網格面到下一個網格 N_1 ，此時主格點體積分率將會超過 1，因此必須以強制流動的方式修正，讓介面可以順利跨越網格面，而其修正的方式就是將主格點過多的體積分率($\Delta\alpha = \alpha_p - 1$)重新分配至下游網格 N_1 。對於一個多維度的流動而言(圖 4.3(b))，其主格點過多的部份則必須往下游 N_1 和 N_2 修正，而其修正時所依循的比例則採相對於主格點為流出面之流量與總流出量之比值，如下：

$$w_{N_1} = \frac{F_{f_1}}{F_{f_1} + F_{f_2}}, \quad w_{N_2} = \frac{F_{f_2}}{F_{f_1} + F_{f_2}} \quad (4.7)$$

此處 F_{f_i} 和 w_{N_i} 分別表示在網格面 f_i 上的體積通量和所用以修正的比例。依照對於控制體積流出為正的原則，可將上式改寫成通用於所有鄰近網格的計

算方式：

$$w_{Ni} = \frac{\max(F_{fi}, 0)}{\sum_j \max(F_{fj}, 0)} \quad (4.8)$$

由上式可知本修正只是針對下游的網格，而上游的修正比例則為零。因此下游網格的流體體積分率(α_{Ni})可以用下式加以調整

$$\alpha_{Ni} = \alpha_{Ni} + w_{Ni}(\alpha_p - 1) \frac{\Delta V_p}{\Delta V_{Ni}} \quad (4.9)$$

經上式的修正後，再將發生填充過度的網格其體積分率重置為1($\alpha_p = 1$)。

4.4.2 耗竭過度(over-depleting, $\alpha_p < 0$)

耗竭過度通常發生在流動尾端介面即將離開原網格的情況下，如圖 4.4(a)所示。當介面流經右邊網格面離開主格點 P 至下游網格 N_1 時，會因從網格面流出的體積流率過大，而發生主格點之體積分率值失真($\alpha_p < 0$)的情況，因此必須透過下游網格的體積分率來加以修正主格點過度耗竭之值。如同填充過度的情況，在多維度的流動中(圖 4.4(b))，一樣可以使用式(4.8)來做為下游網格(N_1, N_2)所需要修正的比例，因此可將下游網格修正的方程式表示如下：

$$\alpha_{Ni} = \alpha_{Ni} + w_{Ni}\alpha_p \frac{\Delta V_p}{\Delta V_{Ni}} \quad (4.10)$$

上式由於 α_p 為負值，所以其意義是將原本由主格點所流出過多的體積通量，透過下游網格體積分率之調整來修正。當上述的修正完成之後，同樣再將主格點之值重置成0($\alpha_p = 0$)。

4.4.3 填充不足(under-filling, $\alpha_p < 1$)

當兩相流之介面存在於剪切流(shear flow)之中，由於流場沿著介面切線方向有極大的速度梯度，因此在流體流動的前端，雖然介面已經跨越網格面離開主格點(圖 4.3(b))，然而此時卻發生主格點的體積分率不足 1 ($\alpha_p < 1$) 的情況，稱之為填充不足。如前節所述，因為介面定義在 $\alpha_v = 0.5$ 之處，因此可透過主格點的節點之值來判斷介面是否已經由主格點前進到下游網格。當主格點任一個節點之值小於 0.5，表示介面尚在主格點內；當其所有節點之值皆超過 0.5 ($\alpha_{vi} > 0.5$ ，下標 Vi 表示主格點 P 的節點)，則表示介面已經通過主格點，此時若是主格點之值小於 1，則必須透過下游網格之體積分率來調整，而其下游網格體積分率之修正方式和比例則採與式(4.8)和(4.9)相同之手法，最後再將主格點之值調整為 1。

4.4.4 耗竭不足(under-depleting, $\alpha_p > 0$)

與填充不足類似的情況，也會發生在流場流動的尾端，稱之為耗竭不足。其主要的狀況是當介面已經遠離主格點(圖 4.4(b))，然而主格點之值卻大於零 ($\alpha_p > 0$)，這情形並不符合理想狀況的體積分率分佈，因此也必須修正。相對於填充不足，本修正是視主網格所有節點之值都小於 0.5 ($\alpha_{vi} < 0.5$) 來判斷介面是否已經離開主格點，而其下游網格體積分率的修正方式則改用式(4.8)和(4.10)，並將主格點之值修正為 0。

4.5 CITSIT 計算流程

上述已經將整個守恆內差介面追蹤法的每個步驟詳細介紹，以下是在一

個時階下，其主要的計算流程：

- (1) 經由舊時階的體積分率值來進行介面重建。
- (2) 在包含介面的網格上，利用式(4.6)來預測其新時階下的體積分率。
- (3) 對於步驟(2)所預測的體積分率分別進行填充過度及耗竭過度修正。
- (4) 進行填充不足及耗竭不足之修正。

在步驟(4)執行完成之後，有可能會再度發生填充過度以及耗竭過度的情況，因此同一個時階下在完成步驟(1)和(2)之後，會重覆兩次(3)到(4)的步驟。

透過上方所描述的步驟和流程可知，守恆內差介面追蹤法不論是在預測或是修正的部分都滿足質量守恆的概念並且能夠有效的避免數值擴散進而將介面控制在單一網格的厚度內，此結果不僅可以獲得較精確的介面位置，更能方便的使用在處理真實兩相流的問題之中。

4.6 流體體積分率平滑化

本文在動量方程式上是將流體視為一均質連續的流體，並且透過體積分率來給定其各種流體性質(密度(ρ)或黏滯係數(μ))。本章所提出的守恆內差介面追蹤法，雖然可以有效的控制介面在一個網格的寬度，然而因為介面處密度或黏滯係數的不連續性，將使得此種介面分布的型態並不利於動量方程式上的計算。根據式(2.10)和(2.11)對密度和黏滯係數的定義，可知當介面如上述只佔據一個網格時，介面兩側的流體性質將存在極大的不

連續性，此不連續性將使介面處的梯度產生劇烈的變化，嚴重的影響數值計算的穩定性，尤其是在高密度比的流場中更為嚴重。因此為了使 CISIT 法所取得的體積分率分布可以更穩定而有效的在動量方程式中使用，則必須以人工的方式將其作平滑化處理。在[17, 20, 71]中，都有提出各種的平滑化處理的技術，而本文將採用平均平滑化(averaging smoother)的方式來處理。其方法是將經由 CISIT 法計算後儲存在網格中心的體積分率，透過式(4.1)差分至網格節點，再將節點之值使用同樣平均的方式來獲得新的網格中心之值。每經一次上述的處理，都可將介面往外多拓展兩個網格的寬度，而本文使用最多不超過兩次的平均平滑處理(如圖 4.5)。透過上述的處理可得到梯度變化較平緩之體積分率分布，再將平滑後的體積分率導入動量方程式中的密度、黏滯係數以及表面張力中的曲率，如下：

$$\rho = \rho_1 \tilde{\alpha} + \rho_2 (1 - \tilde{\alpha}) \quad (4.11)$$

$$\mu = \mu_1 \tilde{\alpha} + \mu_2 (1 - \tilde{\alpha}) \quad (4.12)$$

$$\kappa = \frac{1}{|\nabla \tilde{\alpha}|} \left[\left(\frac{\nabla \tilde{\alpha}}{|\nabla \tilde{\alpha}|} \cdot \nabla \right) |\nabla \tilde{\alpha}| - (\nabla \cdot \nabla \tilde{\alpha}) \right] \quad (4.13)$$

其中 $\tilde{\alpha}$ 表示平滑化體積分率。此方式大大改善了 CISIT 法在高密度比流場中因介面處不連續性所造成的數值不穩定現象，進而提高了其使用上的廣泛性。

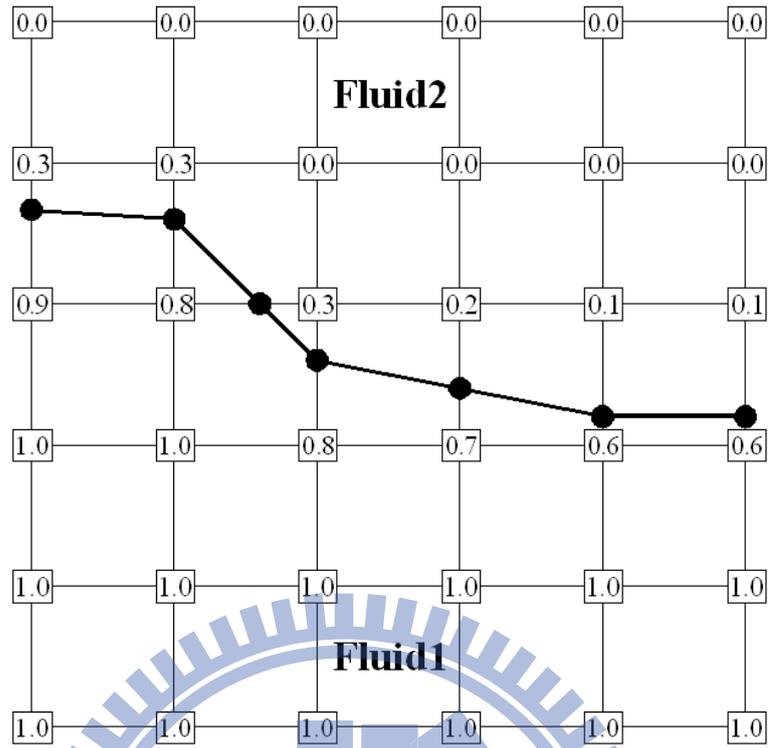


圖 4.1 CISIT 法之介面重建示意圖

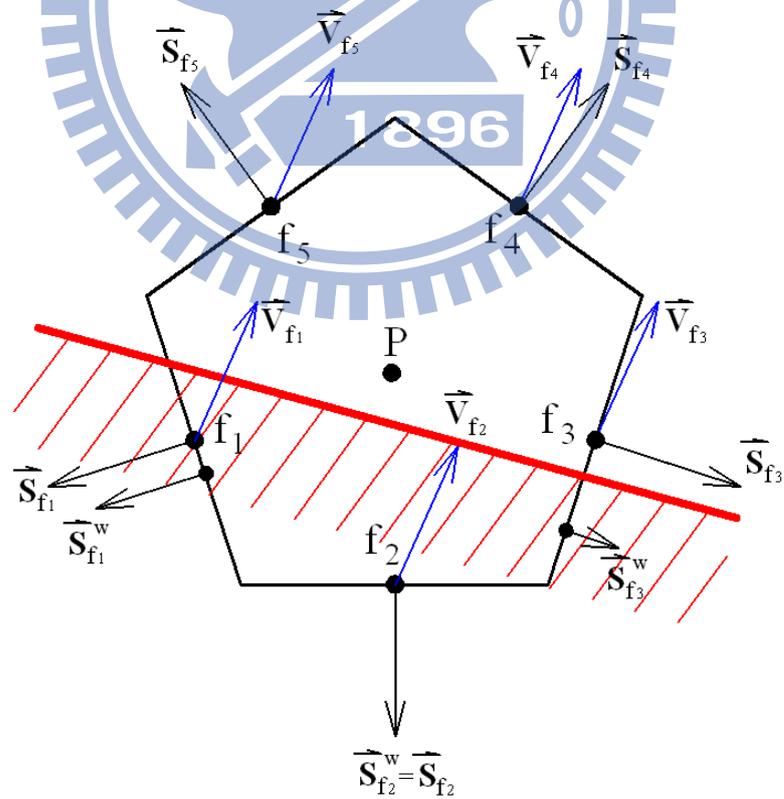
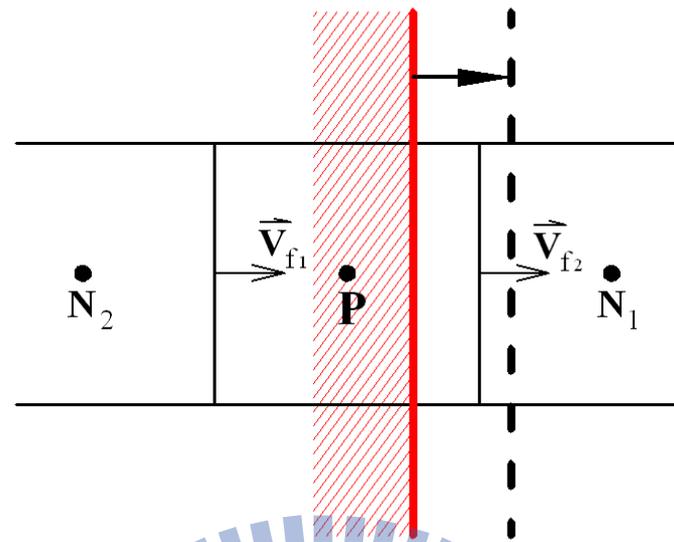
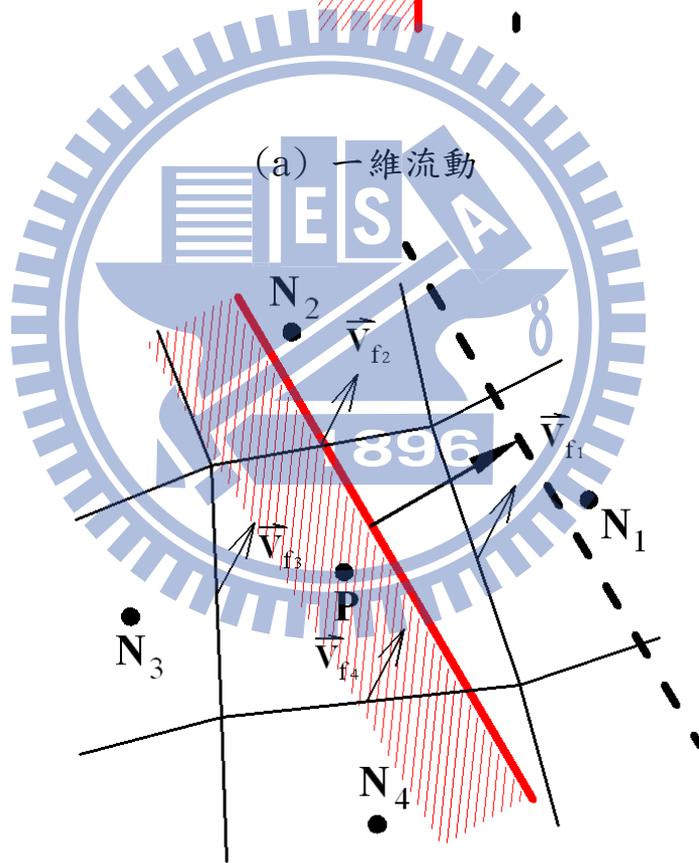


圖 4.2 介面橫跨不規則網格及所構成的浸潤區域之示意圖(紅色為流體 1)

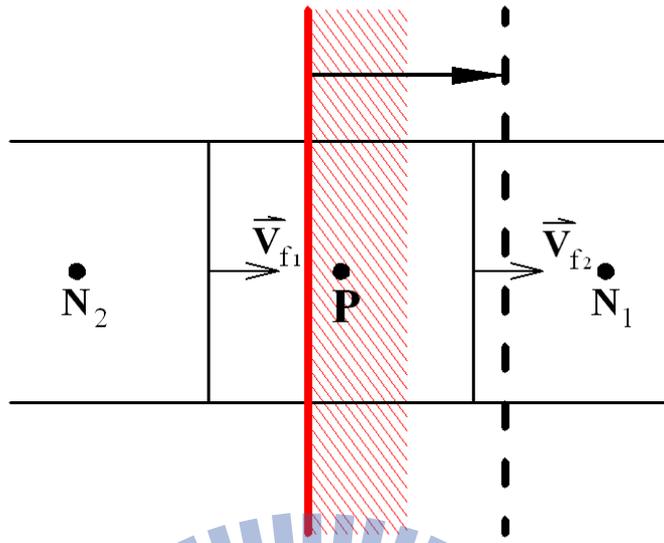


(a) 一維流動

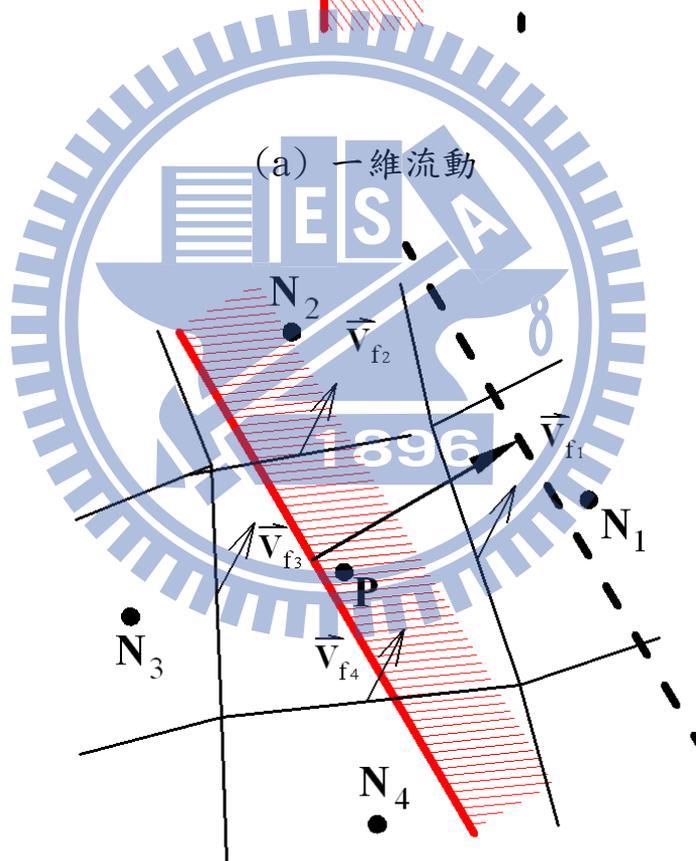


(b) 二維流動

圖 4.3 流動前端介面跨越網格面往鄰近網格推進之示意圖



(a) 一維流動



(b) 二維流動

圖 4.4 流動尾端介面跨越網格面離開原網格之示意圖

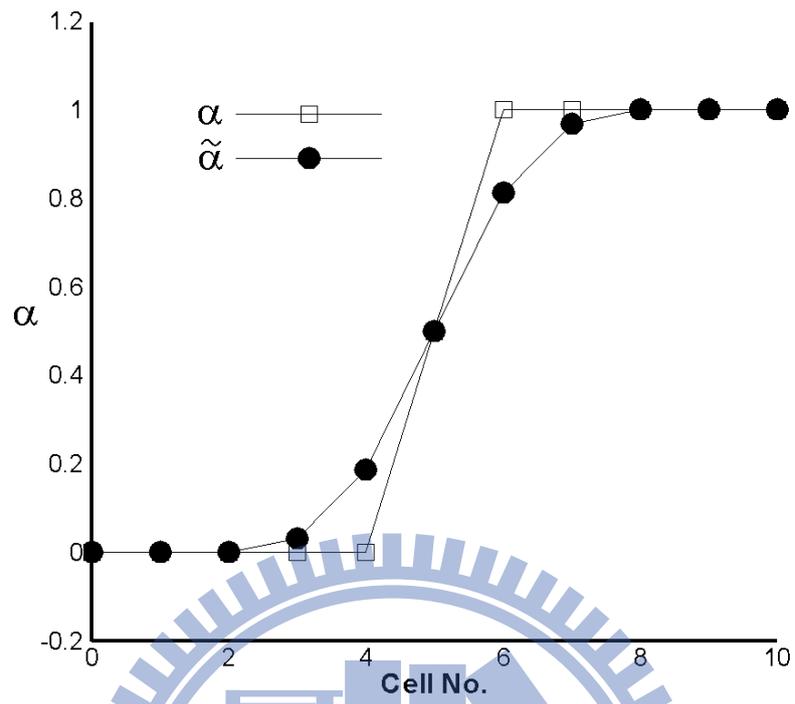


圖 4.5 使用兩次平均平滑化處理後的體積分率分布示意圖

第五章 速度場之數值方法

5.1 簡介

本文所發展兩相流計算模型在速度及壓力場中是將流體視為單一均質流體，因此可以採用同一組動量方程式和連續方程式並由流體體積分率控制其流體性質來計算整體流動的情況。至於動量方程式的離散本文則是在非結構性網格中使用有限體積法來進行。離散後的動量方程是將成為一組線性代數方程式，進而可以獲得速度分布，然而此速度分布並不能滿足連續方程式，因此必須透過離散後的動量方程式來獲得壓力和速度的修正方程式。本文在此採用 Issa [72] 所提出的 PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) 演算法來耦合動量和連續方程式，進而取得符合質量守衡的速度及壓力場。對於前文所敘述的相變化模型，可知當流場內因溫度的影響而在介面處開始產生相變化時，所使用的連續方程式必須加入源項來修正(式 2.27)，因此本章節中所離散的連續方程式中將導入此項來計算相變化的情形。

以下將針對動量方程式中各項的離散加以說明，並且介紹 PISO 演算法的詳細流程以及壓力在出口邊界上的處理方式。

5.2 動量方程式的離散

依據第二章所介紹的張量型式的動量方程式可以改寫如下：

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + Q_{\phi} \quad (5.1)$$

其中 ϕ 表示直角座標的速度分量、 Q_ϕ 表示動量方程式中的源項。本文採用有限體積法對控制體積 (C.V.) 做體積分並且透過高斯散度定理將體積分轉為面積分，如下：

$$\iiint_{C.V.} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\forall + \iint_{C.S.} (\rho \vec{V} \phi) d\vec{S} = \iint_{C.S.} (\mu \nabla \phi) d\vec{S} + \iiint_{C.V.} Q_\phi d\forall \quad (5.2)$$

上式中左邊兩式為非穩態項以及對流項，右邊分別為擴散項及源項，以下將針對各項的離散做詳細的說明。

5.2.1 非穩態項

式(5.2)中的非穩態項，採用順向(forward)的差分方式，其離散式如下：

$$\iiint_{C.V.} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\forall = \frac{\rho_p \Delta \forall}{\Delta t} (\phi_p^n - \phi_p^o) \quad (5.3)$$

其中上標 n 和 o 分別表示新舊時階、下標 P 表示主網格。

5.2.2 對流項

對流項經由均值定理可將面積分轉換成差分方程式，如下：

$$\iint_{C.S.} (\rho \vec{V} \phi) d\vec{S} = \sum_f (\rho \vec{V} \phi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f \rho_f F_f \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (5.4)$$

其中 F_f 表示面上的體積通量，而 F_f^C 則表示動量對流通量。至於面上的速度分量 ϕ_f ，則使用第三章所介紹的通量限制函數，依式(3.5)其值可表示為：

$$\phi_f = \phi_u + \frac{\gamma(r)}{2} (\phi_D - \phi_u) \quad (5.5)$$

下標 U 和 D 分別表示控制面上游及下游網格(如圖 3.3)。本文在動量方程式中所使用的通量限制函數為 Van Leer 法，其通量限制函數以及 NVF 的方程式可表示如下：

$$\gamma(r) = \frac{r+|r|}{r+1} \quad (5.6)$$

$$\tilde{\phi}_f = \begin{cases} 2\tilde{\phi}_U - \tilde{\phi}_U^2 & 0 \leq \tilde{\phi}_U \leq 1 \\ \tilde{\phi}_U & \tilde{\phi}_U \leq 0 \text{ or } \tilde{\phi}_U \geq 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

而在動量方程式的對流項當中，本文對於式(5.5)中的上風項採用全隱性法，反擴散項則使用顯性法求解，如下：

$$\phi_f = \phi_U^n + \frac{\gamma(r)}{2}(\phi_D^o - \phi_U^o) \quad (5.8)$$

對於上式中的上風項其值取決於控制面上游的網格，因此在非結構性網格中(如圖 5.1)可改寫如下：

$$\phi_U^n = \begin{cases} \phi_P^n & (F_f > 0) \\ \phi_C^n & (F_f < 0) \end{cases} \quad (5.9)$$

其中下標 P 和 C 分別表示主格點和相鄰格點。依據式(5.8)和(5.9)可將式(5.4)中的動量對流通量完整表示如下：

$$F_f^C = \left[\rho_f \max(F_f, 0) \phi_P^n - \rho_f \max(-F_f, 0) \phi_C^n \right] + \rho_f F_f \frac{\gamma(r)}{2} (\phi_D^o - \phi_U^o) \quad (5.10)$$

5.2.3 擴散項

擴散項的面積分則採下列方程式進行差分：

$$\iint_{c.s.} (\mu \nabla \phi) d\vec{S} = \sum_f (\mu \nabla \phi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (5.11)$$

其中 F_f^D 表示動量擴散通量。對於非結構性網格而言，為了使計算的穩定度增加，所以在此採用 over-relaxed 的方式來進行離散，將面向量 \vec{S}_f 改寫成正交向量以及非正交向量之和：

$$\vec{S}_f = \vec{d} + (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (5.12)$$

其中 \vec{d} 為正交向量，是主格點 P 至鄰近格點 C 的方向上之向量(圖 5.1)，其定義如下：

$$\vec{d} \equiv \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_{PC} \quad (5.13)$$

其中 $\vec{\delta}_{PC}$ 表示格點 P 至格點 C 之向量。將式(5.12)代入(5.11)中，可將擴散通量改寫如下：

$$F_f^D = \mu_f \nabla \phi_f \cdot \vec{d} + \mu_f \nabla \phi_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (5.14)$$

上式右邊兩項分為正交項及非正交項，本文在正交項上使用隱性法；非正交項則採顯性解法，其中所使用面上的速度梯度則由主格點 P 與鄰近格點 C 的梯度線性內差而得，如下：

$$\nabla \phi_f = (1-w) \nabla \phi_C + w \nabla \phi_P \quad (5.15)$$

其中 w 為權重因子。將上述的方程式整理後，則擴散通量完整的差分方程式可表示如下：

$$F_f^D = \frac{\mu_f |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (\phi_C^n - \phi_P^n) + \mu_f \nabla \phi_f^o \cdot \left(\vec{S}_f - \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_{PC} \right) \quad (5.16)$$

上式中若在正交的網格系統之中，非正交項之值為零。

5.2.4 源項

對於式(5.2)中源項 Q_ϕ 的體積分，其差分方程式可表示如下：

$$\iiint_{C.V.} Q_\phi dV = (q_\phi)_P \Delta V \quad (5.17)$$

其中 q_ϕ 表示控制體積內產生的源項。本項在處理上都使用顯性的方式，亦

即 q_ϕ 均使用上個時階之值。在兩相流計算模型中，其考慮的源項包含有：

壓力項、重力項、表面張力項，以下將針對各項來進行介紹。

壓力項

對於動量方程式中壓力梯度項可採用高斯散度定理來處理。首先對壓力梯度做體積分再除以其控制體積，經散度定理可將體積分轉為面積分，因此壓力項的離散式可表示如下：

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{C.V.} \nabla P dV = \frac{1}{\Delta V} \iint_{C.S.} P d\vec{S} = \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f \vec{S}_f \quad (5.18)$$

其在 \vec{e}_i 方向上的分量可以表示為：

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{C.V.} (\nabla^i P) dV = \frac{1}{\Delta V} \iint_{C.S.} P (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f (\vec{e}_i \cdot \vec{S}_f) \quad (5.19)$$

因此壓力梯度在動量方程式中 \vec{e}_i 方向上的體積分可以改寫如下：

$$\iiint_{C.V.} (\nabla^i P) dV = \frac{\partial P}{\partial x_i} \Delta V = \sum_f P_f (\vec{e}_i \cdot \vec{S}_f) \quad (5.20)$$

上式中壓力皆使用舊時階下的值，因此所有內部控制面上的壓力都需透過線性內差的方式來計算，至於邊界上的壓力值則採用下列方式計算。如圖

5.2， P 和 b 分別為主格點和邊界的格點，而 $\vec{\delta}_{pb}$ 則代表 P 至 b 的距離向量，

因此邊界上壓力可由下式來獲得：

$$P_b = P_p + \nabla P_p \cdot \vec{\delta}_{pb} \quad (5.21)$$

將式(5.18)改寫：

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V} \sum_f P_f \vec{S}_f = \frac{1}{\Delta V} \left[P_b \vec{S}_b + \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \right] \quad (5.22)$$

再將式(5.22)代回式(5.2)整理可得

$$P_b = \frac{P_p + \frac{1}{\Delta V} \left(\sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta}_{pb} \right)}{1 - \frac{1}{\Delta V} (\vec{S}_b \cdot \vec{\delta}_{pb})} \quad (5.23)$$

重力項

對於重力項的體積分其近似方法表示如下：

$$\iiint_{C.V.} \rho \vec{g} d\forall = \rho_p \vec{g} \Delta V \quad (5.24)$$

表面張力項

對於表面張力項而言，其不管表面張力係數、曲率或是體積分率梯度皆使用舊時階下的值計算而得，因此其體積分轉差分方程式可表示如下：

$$\iiint_{C.V.} (\sigma \kappa \nabla \alpha) d\forall = (\sigma \kappa \nabla \alpha)_p \Delta V \quad (5.25)$$

上式中所需要的 $\nabla \alpha$ 可經由式(5.18)相同的處理方式取得，如下：

$$\nabla \alpha = \frac{1}{\Delta V} \sum_f \alpha_f \vec{S}_f \quad (5.26)$$

此處所使用的面上體積分率值僅使用線性內差的方式取得，而非第三章所述之方法。

5.2.5 動量方程式之代數方程式

可將上面所列出的非穩態項、對流項、擴散項以及各個源項的差分方程式，整理後可得動量方程式之代數方程式，如下：

$$A_p \phi_p^n = \sum_C A_C \phi_C^n + S_\phi - \nabla P_p^o \Delta V \quad (5.27)$$

其中 S_ϕ 表示動量方程式所使用的所有源項，包含有對流、擴散等。而所有的係數分別表示如下：

$$\begin{aligned}
A_p &= \sum_c A_c + \frac{\rho_p \Delta \nabla}{\Delta t} \\
A_c &= \frac{\mu_f |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} + \rho_f \max(-F_f, 0) \\
S_\phi &= \sum_f \left\{ -\rho_f F_f \frac{\gamma(r)}{2} (\phi_D^o - \phi_U^o) + \mu_f \nabla \phi_f^o \cdot \left(\vec{S}_f - \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_{PC} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\rho_p \Delta \nabla}{\Delta t} \phi_p^o + \rho_p \bar{g} \Delta \nabla + (\sigma \kappa \nabla \alpha)_p^o \Delta \nabla
\end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3 速度與壓力之耦合

上一節所推導的動量之代數方程式是使用前一個時階下的壓力場來獲得速度分布，其壓力並未更新且速度也未必滿足連續方程式，因此必須將速度和壓力加以修正使其滿足連續方程式。由動量方程式的離散式可以推導出壓力和速度的耦合關係式，然後透過內差的方式來獲取面上的速度，接著使所有控制面滿足體積流率守恆之調整便可獲得壓力修正方程式。而本文對於速度和壓力耦合之計算方式是採用有利於增加暫態流場求解速度的 PISO 演算法[72]，此方法是採用一種先預測再修正之方法，其特色在於不需反覆疊代便可求得所需的速度和壓力場。其主要的步驟是在同一個時階下進行一次壓力預測，並透過兩次的壓力修正來獲取滿足連續方程式之壓力和速度場，以下將針對 PISO 演算法的步驟詳細介紹。

5.3.1 預測步驟 (predictor step)

預測步驟便是透過前一個時階下的壓力場來求取不滿足連續方程式的速度分布(\vec{V}_p^*)，可將式(5.27)改寫如下：

$$A_p \vec{V}_p^* = \sum_C A_C \vec{V}_C^* + (S_\phi - \nabla P_p^o \Delta \nabla) \quad (5.29)$$

將上式同除 A_p 得

$$\vec{V}_p^* = \frac{\sum_C A_C \vec{V}_C^*}{A_p} + \frac{S_\phi}{A_p} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^o \quad (5.30)$$

令

$$\vec{H}_p^* = \frac{\sum_C A_C \vec{V}_C^* + S_\phi}{A_p} \quad (5.31)$$

因此式(5.30)可改寫為

$$\vec{V}_p^* = \vec{H}_p^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^o \quad (5.32)$$

5.3.2 第一次修正步驟 (first corrector step)

此修正步驟是將體積守恆的概念導入以獲取更新後的速度及壓力場，如下：

$$A_p \vec{V}_p^{**} = \sum_C A_C \vec{V}_C^* + (S_\phi - \nabla P_p^* \Delta \nabla) \quad (5.33)$$

其中 \vec{V}_p^{**} 表示第一次修正後的速度、 P_p^* 則表示修正後的壓力。同樣將上式同除 A_p 可得

$$\vec{V}_p^{**} = \frac{\sum_C A_C \vec{V}_C^*}{A_p} + \frac{S_\phi}{A_p} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^* = \vec{H}_p^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^* \quad (5.34)$$

經由 $V' \equiv V^{**} - V^*$ 和 $P' \equiv P^* - P^o$ 之定義可得第一次速度修正方程式如下：

$$\vec{V}_p' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p' \quad (5.35)$$

而面上速度的修正式也可透過式(5.35)而得。

$$\vec{V}'_f = -\left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P'_f \quad (5.36)$$

因此面上的體積流率的修正式可表示如下：

$$\dot{V}'_f = \vec{V}'_f \cdot \vec{S}_f = \left[-\left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P'_f \right] \cdot \vec{S}_f \quad (5.37)$$

再依據前一節擴散通量處理上所提過的 over-relaxed 的處理方式，取

$\bar{d} = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \delta_{PC}$ 且 $\vec{S}_f = \bar{d} + (\vec{S}_f - \bar{d})$ ，可將上式改寫如下：

$$\dot{V}'_f = -\left[\left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (\nabla P'_f \cdot \vec{\delta}_{PC}) + \left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P'_f \cdot (\vec{S}_f - \bar{d}) \right] \quad (5.38)$$

將 $\nabla P'_f \cdot \vec{\delta}_{PC}$ 改寫成 $P'_C - P'_P$ 得

$$\dot{V}'_f = -\left[\left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (P'_C - P'_P) + \left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P'_f \cdot (\vec{S}_f - \bar{d}) \right] \quad (5.39)$$

再依照上述所定義 $V' \equiv V^{**} - V^*$ ，可得到第一次修正後的體積通量，表示如下：

$$\dot{V}^{**}_f = \dot{V}^*_f - \left[\left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (P'_C - P'_P) + \left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P'_f \cdot (\vec{S}_f - \bar{d}) \right] \quad (5.40)$$

對於上式中所含的 \dot{V}^*_f 則可透過下列方式而得，如同式(5.32)控制面上的速度可近似如下：

$$\vec{V}^*_f = \vec{H}^*_f - \left(\frac{\Delta\nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_f \quad (5.41)$$

此處上標“-”示表示由主格點 P 與鄰近格點 C 之值根據權重因子內差而得。

而

$$\overline{\vec{H}}_f^* = \overline{\vec{V}}_f^* + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f^o \quad (5.42)$$

其中 $\overline{\vec{V}}_f^*$ 和 $\overline{\nabla P}_f^o$ 分別可由前述之內差的方式來取得，如下：

$$\begin{aligned} \overline{\vec{V}}_f^* &= w_f \vec{V}_C^* + (1-w_f) \vec{V}_P^* \\ \overline{\nabla P}_f^o &= w_f \nabla P_C^o + (1-w_f) \nabla P_P^o \end{aligned} \quad (5.43)$$

此處 w_f 表示該控制面上的權重因子。將式(5.42)代回式(5.41)可得：

$$\vec{V}_f^* = \left[\overline{\vec{V}}_f^* + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \overline{\nabla P}_f^o \right] - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^o \quad (5.44)$$

其中 $\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f$ 則採用主格點與鄰近格點之平均值。

$$\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_P + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_C \right] \quad (5.45)$$

然後可以得到控制面上體積通量為：

$$\begin{aligned} \dot{V}_f^* &= \vec{V}_f^* \cdot \vec{S}_f = \overline{\vec{V}}_f^* \cdot \vec{S}_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f (\nabla P_f^o - \overline{\nabla P}_f^o) \cdot \vec{S}_f \\ &\approx \overline{\vec{V}}_f^* \cdot \vec{S}_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f (\nabla P_f^o - \overline{\nabla P}_f^o) \cdot \vec{d} \\ &= \overline{\vec{V}}_f^* \cdot \vec{S}_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \left[(P_C^o - P_P^o) - \overline{\nabla P}_f^o \cdot \vec{\delta}_{PC} \right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

而對一個控制體積的所有控制面而言，連續方程式可以離散如下：

$$\sum_f \dot{V}_f^{**} = \sum_f \dot{V}_f^* + \sum_f \dot{V}_f' = \frac{1}{h_{lg}} \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l} \right) \dot{q}_{int} \Delta A_{int} \quad (5.47)$$

上式中等號最右邊為相變化之修正量。若流場本身並無相變化機制，則 \dot{q}_{int} 之值為零，亦即不考慮此源項。最後將式(5.40)代入上式之中，可以整理成

下列線性代數方程式，如下：

$$A_p^p P_p' = \sum_f A_C^p P_C' + S_{p1}^1 + S_{p2}^1 \quad (5.48)$$

其中 S_{p1}^1 和 S_{p2}^1 分別表示第一次修正中之正交與非正交修正的源項。而代數方

程式的各項系數分別為：

$$\begin{aligned} A_p^p &= \sum_f A_C^p \\ A_C^p &= \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{PC} \cdot \bar{S}_f} \\ S_{p1}^1 &= \frac{1}{h_g} \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l} \right) \dot{q}_{\text{int}} \Delta A_{\text{int}} - \sum_f \dot{V}_f^* \\ S_{p2}^1 &= \sum_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \end{aligned} \quad (5.49)$$

5.3.3 第二次修正步驟 (second corrector step)

經由式(5.48)得到第一次壓力修正量後，進而可獲得修正後的速度 \vec{V}_p^{**} 以及壓力 P_p^* ，接著將進行第二次修正。如同第一次修正，其動量方程式表示如下：

$$A_p \vec{V}_p^{***} = \sum_C A_C \vec{V}_C^{**} + (S_\phi - \nabla P_p^{**} \Delta \nabla) \quad (5.50)$$

其中 \vec{V}_p^{***} 和 P_p^{**} 分別代表第二次修正後所得到的速度及壓力。由上式整理可得第二次修正中速度與壓力的關係式：

$$\vec{V}_p^{***} = \frac{\sum_C A_C \vec{V}_C^{**}}{A_p} + \frac{S_\phi}{A_p} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^{**} \quad (5.51)$$

此處同樣定義 $V'' \equiv V^{***} - V^{**}$, $V' \equiv V^{**} - V^*$, $P'' \equiv P^{**} - P^*$ ，將式(5.51)與(5.34)合

併得第二次速度修正方程式如下：

$$\vec{V}_p'' = \frac{\sum A_c \vec{V}_c'}{A_p} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p'' \quad (5.52)$$

因此第二次面上的速度修正方程式為

$$\vec{V}_f'' = \left(\frac{\sum A_c \vec{V}_c'}{A_p} \right)_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \quad (5.53)$$

因此可得到第二次體積通量修正方程式如下：

$$\dot{V}_f'' = \left[\left(\frac{\sum A_c \vec{V}_c'}{A_p} \right)_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \right] \cdot \vec{S}_f = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot \vec{S}_f + \left(\frac{\sum A_c \vec{V}_c'}{A_p} \right)_f \cdot \vec{S}_f \quad (5.54)$$

再依照定義 $V'' \equiv V^{***} - V^{**}$ ，可得第二次修正後的面上體積通量，如下：

$$\dot{V}_f^{***} = \dot{V}_f^{**} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot \vec{d} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) + \left(\frac{\sum A_c \vec{V}_c'}{A_p} \right)_f \cdot \vec{S}_f \quad (5.55)$$

為了滿足連續方程式，因此控制體積所有控制面淨流量等於零：

$$\sum_f \dot{V}_f^{***} = \sum_f \dot{V}_f^{**} + \sum_f \dot{V}_f'' = 0 \quad (5.56)$$

將式(5.47)中 $\sum_f \dot{V}_f^{**} = 0$ 導入上式得

$$\sum_f \dot{V}_f^{***} = \sum_f \dot{V}_f'' = 0 \quad (5.57)$$

將式(5.55)與式(5.57)整理，可將第二次壓力修正的代數方程式表示如下：

$$A_p^p P_p'' = \sum_f A_c^p P_c'' + S_{p1}^2 + S_{p2}^2 \quad (5.58)$$

其中

$$\begin{aligned}
A_p^P &= \sum_f A_C^P \\
A_C^P &= \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \\
S_{P1}^2 &= - \left(\frac{\sum_C A_C \vec{V}'_C}{A_p} \right)_f \cdot \vec{S}_f \\
S_{P2}^2 &= \sum_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})
\end{aligned} \tag{5.59}$$

5.3.4 PISO 演算法的計算流程

以計算一個時階為例，PISO 主要的流程有下列幾個步驟：

1. 讀取上個時階下的速度壓力值。
2. 經由上個時階之壓力值來求解式(5.29)以獲得預測步驟中的 \vec{V}^* 。
3. 計算式(5.48)以得到第一次壓力修正值，依據壓力修正值進而更新速度及壓力 (\vec{V}^{**} 和 P^*)。
4. 求解式(5.58)的第二次修正方程式，再次修正而獲得符合體積守衡之壓力及速度分布。

5.4 壓力出口邊界之處理

在兩相流的系統中，出口處通常在出口處會假設為固定壓力，並且透過此特定的壓力來推算出口邊界上的流量。因此在本文中使用的體積守恆的概念來處理壓力邊界上的問題。圖 5.2 為一個靠近邊界的控制體積，首先須給定其網格中心的壓力為 $P_p = P_0$ ，然後根據式(5.21)和(5.22)的外差方式可以得到邊界上的壓力，如下

$$P_b = \frac{P_0 + \frac{1}{\Delta V} \left(\sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta}_{Pb} \right)}{1 - \frac{1}{\Delta V} (\vec{S}_b \cdot \vec{\delta}_{Pb})} \quad (5.60)$$

其中 P_0 為定值。出口邊界上的壓力給定之後，計算域內部所有的網格中心的速度便可根據上述的方法求得，並且把速度內差到內部的所有控制面上，便可以得到內部面上的體積流率，而出口邊界上的體積流率 (\dot{V}_b) 則是使用體積流率守恆的概念可以獲得

$$\dot{V}_b + \sum_{f \neq b} \dot{V}_f = 0 \quad (5.61)$$

上式表示出口邊界上的體積流率是根據控制體積內部控制面的淨流量而得 (如圖 5.2)。制於邊界上的流體體積分率以及速度則採對流邊界條件 (convective boundary condition) 外差，如下：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (5.62)$$

其中 n 表示邊界的法線方向， u_c 表示邊界上局部之速度。將上式離散後可得：

$$\frac{\phi_b^n - \phi_b^o}{\Delta t} + u_c \frac{\phi_b^o - \phi_P^o}{\Delta n} = 0 \quad (5.63)$$

經整理

$$\phi_b^n = \frac{\phi_b^o + C_N \phi_P^o}{1 + C_N} \quad (5.64)$$

其中 C_N 庫倫數，在此的定義為

$$C_N = \frac{u_c \Delta t}{\Delta n} \quad (5.65)$$

最後以式(5.61)之體積流率為基準，將上述所外差的邊界速度加以修正使其體積流率一致。

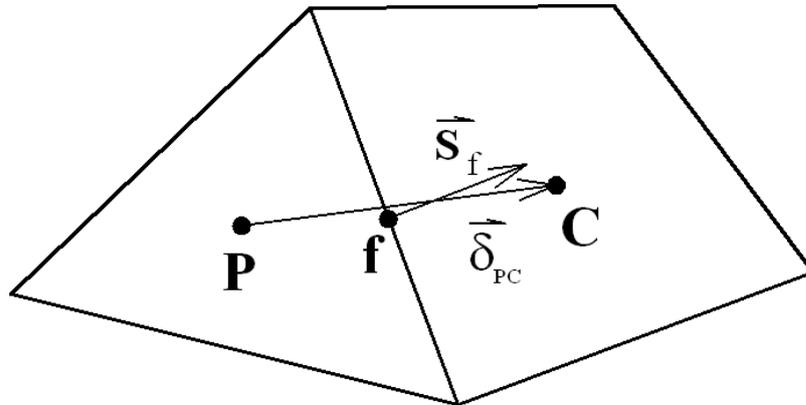


圖 5.1 非結構性網格中主格點與鄰近格點及面向量(\vec{S}_f)之示意圖

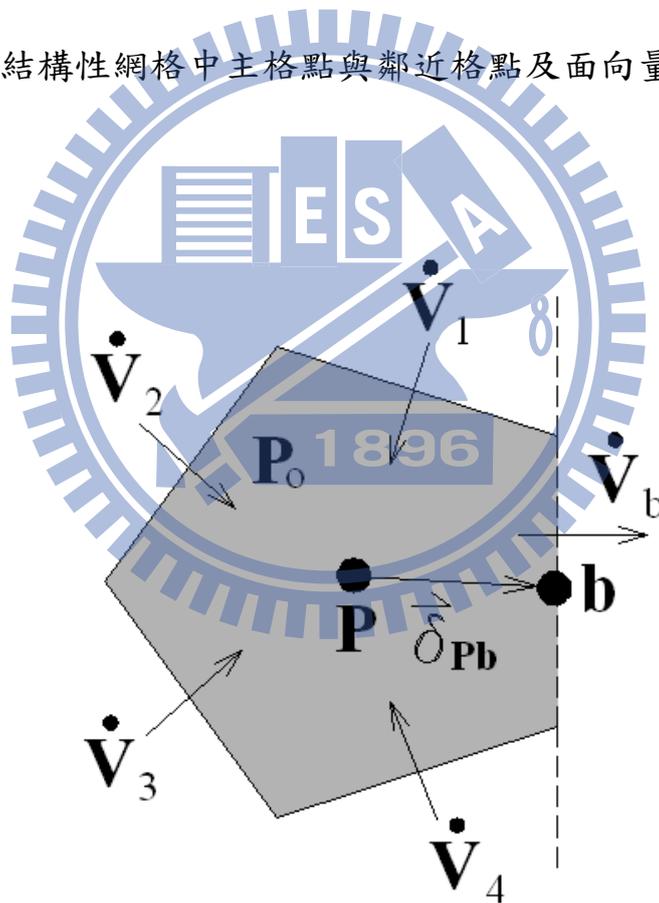


圖 5.2 邊界壓力計算及出口壓力邊界處理方式之示意圖

第六章 熱傳及質傳之數值方法

6.1 簡介

對於本文所提出的相變化模型而言，其最重要的部份在於介面處質傳通量之計算。依質量和能量的跳躍邊界條件所推出的質傳與熱傳之關係(式 2.24)，可發現若介面處的淨熱通量已知即可獲得介面處的質傳通量。在計算介面處的熱通量時，則必須先行計算介面兩側流體各別於介面法線方向上之溫度變化量。為了維持介面處質傳率的精度，本文採用單側差分法(one-sided difference)來求取溫度變化量後，再使用兩流體各自的熱力性質來獲得熱通量。傳統上，針對含相變化之能量方程式的計算可分為兩大類，一者是將介面處因不連續性所產生的熱通量導入能量方程式之中，直接視作源項來處理。另一種則是將介面視為內邊界，不同的流體各自使用其熱力性質及邊界條件來計算能量方程式。前者是將兩種流體視為單一均質流體，並透過標記的函數定義流體性質來計算同一組能量方程式，由於熱力性質或密度在介面處極度不連續，因此常使用平滑化的技巧來處理以避免數值不穩定的發生，然而這類的處理手法將導致介面處熱傳通量的計算失去精確度。基於上述原因，本文在能量方程式的計算上採用後者的概念，將介面處的能量跳躍邊界視為一組內邊界來處理。以下將詳細介紹本文在介面熱通量的計算方式及能量方程式的離散和內邊界的處理，最後總結本文所提出的含相變化之兩相流的計算流程。

6.2 相變化模型之熱傳數值方法

6.2.1 介面熱通量之計算

在流體產生相變化的過程中，因為能量的跳躍邊界條件，所以會在氣液介面處產生熱通量，如下：

$$\dot{q}_{\text{int}} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_g - \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_l \quad (6.1)$$

為了將上式離散化，本文在此採用單側內差的方式來處理並且考慮溫度是以連續的型態跨越氣液介面，亦即介面處氣液兩相的溫度相等且等於介面溫度(T_{int})，而介面溫度為系統壓力(P_0)所對應之飽和溫度($T_{\text{int}} = T_{\text{sat}}(P_0)$)，因此可將介面熱通量離散如下：

$$\dot{q}_{\text{int}} = k_g \frac{T_g - T_{\text{int}}}{\Delta n} - k_l \frac{T_{\text{int}} - T_l}{\Delta n} \quad (6.2)$$

其中 Δn 為局部網格寬度的 1.5 倍長(如圖 6.1)。圖中的介面是經由 CISIT 法所重建，而 T_l 和 T_g 分別表示介面兩側垂直距離為 Δn 的位置上之液體和氣體溫度，其值是透過該位置處周圍相關的節點溫度 T_v (同式(4.1))內差而得。當介面熱通量計算完成後，經由式(2.24)便可獲得介面處起因於相變化所產生的質傳量，進而可導入連續方程式(式 2.27)及流體體積方程式(式 2.28)之中。

6.2.2 能量內邊界之處理

本文在計算能量方程式時，是將介面處能量的跳躍邊界視為內部的邊界條件來處理。為了使鄰近介面的網格能夠適當地計算所需的溫度梯度以估

計能量方程式中對流及擴散通量，因此必須利用式(6.2)所計算出的法線方向上之溫度變化量以線性外差的方式獲得介面所屬網格中心或網格面上的溫度。

介面所屬的網格主要可依其中心位於氣相或液相之中分為兩大類(圖 6.2)。若以氣體側能量內邊界的計算方式為例，上述須由線性外差所計算的溫度將會有兩種情況(圖 6.2(a)和(b))。第一類情況是需要計算出網格中心之溫度(T_p)，而第二種則是須計算出網格面上之溫度(T_f)。其計算的方式是假設介面上任一點沿法線方向上單位長度的溫度變化量相等，再配合網格中心或網格面至介面的垂直距離 Δl 及介面溫度 T_{int} 線性外差而得，其中 T_p 可表示如下：

$$T_p = T_{int} + \left(\frac{T_g - T_{int}}{\Delta n} \right) \Delta l \quad (6.3)$$

同理亦可得 T_f 。本節所描述的乃是介面附近氣體側能量內邊界的處理方式，至於液體側也是採用同樣的手法。經由上面處理方式所得到的 T_p 和 T_f ，將分別在氣體與液體側各產生一組 Dirichlet 的邊界條件，以供氣液兩相各別求解溫度場時所使用。

6.3 無相變化之熱傳數值方法

不同於相變化模型於介面的跳躍邊界條件，在無相變化的熱傳問題中，其介面處兩側流體的熱傳量必須守衡且兩流體在介面處的溫度相等，如式(2.29)及(2.30)。

$$T_g = T_l = T_{int} \quad (2.29)$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_g = \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_l \quad (2.30)$$

如同式(6.2)計算相變化過程所需的介面熱通量，式(2.30)中介面兩側的熱通量可經由單側內差法的方式來處理，故可以將式(2.30)離散後改寫如下式：

$$k_g \frac{T_g - T_{int}}{\Delta n} = k_l \frac{T_{int} - T_l}{\Delta n} \quad (6.4)$$

其中 T_l 和 T_g 的計算方式與相變化模型中的方法相同，是表示介面往兩側垂直距離為 Δn 之位置上的液體及氣體溫度。將此溫度導入式(6.4)中，再將其整理後可得介面處的溫度，如下式：

$$T_{int} = \frac{k_l T_l + k_g T_g}{k_l + k_g} \quad (6.5)$$

如同相變化模型的處理一般，在無相變化熱傳的模型中同樣將介面視為一組能量內邊界的方式來處理。當上述的介面溫度透過介面兩側熱傳量相等的方式計算獲得後，即可根據此介面溫度及式(6.4)計算出介面兩側於介面法線方向上的溫度變化量，再由前節所述的能量內邊界的處理方式，透過式(6.3)以線性外差的方式計算出鄰近介面附近網格中心或網面上的溫度，再將其導入能量方程式中以作為兩流體個別的Dirichlet的邊界條件。

6.4 能量方程式之離散

依本研究所使用的能量方程式(式 2.7)，在控制體積中經體積分後，再由高斯散度定理轉為面積分，可表示如下：

$$\iiint_{C.V.} \frac{\partial \rho T}{\partial t} dV + \iint_{C.S.} (\rho \vec{V} T) d\vec{S} = \iint_{C.S.} \left(\frac{k}{C} \nabla T \right) d\vec{S} \quad (6.6)$$

上式包含了非穩態項、對流項及擴散項，針對各項的離散手法均與動量方程式的離散化相同，其中非穩態項採順向差分、對流項則是採用 Van Leer 法、至於擴散項則使用 Over-relaxed，詳細的離散式可參考 4.2 節。整理各項離散後的係數，可得能量代數方程式。如下：

$$A_p T_p^n = \sum_c A_c T_c^n + S_T \quad (6.7)$$

其中

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_c A_c + \frac{\rho_p \Delta V}{\Delta t} \\ A_c &= \left(\frac{k}{C} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} + \rho_f \max(-F_f, 0) \\ S_T &= \sum_f \left\{ -\rho_f F_f \frac{\gamma(r)}{2} (T_D^o - T_U^o) + \left(\frac{k}{C} \right)_f \nabla T_f^o \cdot \left(\vec{S}_f - \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_{PC} \right) \right\} + \frac{\rho_p \Delta V}{\Delta t} T_p^o \end{aligned} \quad (6.8)$$

上述為單相網格所使用的代數方程式，至於介面所屬的網格則需另外處理。根據上述的能量內邊界的處理方法可知本文在包含介面的網格其中心溫度 (T_p) 已透過介面法線方向上的溫度變化量線性外差而得。不同別於過去文獻皆是採顯式求解法來計算含內邊界的能量方程式，本文於此將採用全隱式的方式來求解能量方程式。為了採用全隱式的方式且將介面所屬網格中心的溫度固定必須將其代數式中的係數做修改，其修改的方式如下：

$$A_p = G, \quad A_c = 0, \quad S = GT_p \quad (6.9)$$

其中 G 為一個極大值。

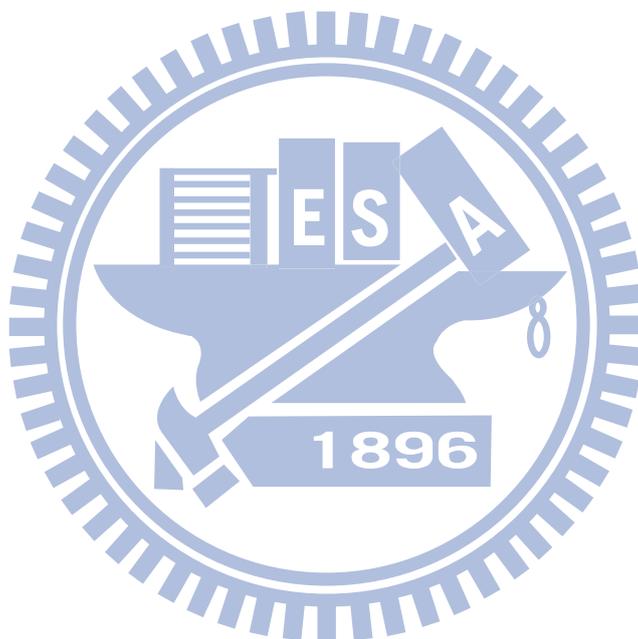
6.5 兩相流模型之計算流程

綜合上面幾個章節，已將本研究所使用的統御方程式之數值方法做完整的介紹。本文主要所模擬的流場包含三大類，一者是不考慮相變化及溫度場的雙流體流場，二者則為含完整相變化之兩相流流場，三則為無相變化的熱傳雙流體問題。前者採用 FBICS 法或是 CISIT 法來計算體積分率方程式，而後二者因需要界面的詳細定位故只能採用 CISIT 法。以下將以圖 6.3 介紹後者的計算流程。

含相變化的兩相流模型之計算流程：

1. 給定各個變數的初始條件及邊界條件(α 、 \bar{V} 、 P 、 T)。
2. 根據溫度分布計算介面兩側之溫度梯度，並根據此溫度梯度外差介面所屬網格的溫度(T_p 或 T_f)，以作為內邊界供能量方程式求解時使用。
3. 計算能量方程式以獲取新的溫度分布。
4. 依新的溫度分布求取介面兩側的溫度梯度以獲取介面處的熱傳通量，進而轉換為質傳通量。
5. 由體積分率之分布計算動量方程式中所需的流體性質(ρ 、 μ 、 κ)。
6. 求解動量方程式以獲取速度場。
7. 根據 PISO 法求解壓力修正方程式以獲取新的速度及壓力分布。
8. 採用 CISIT 法求解流體體積分率方程式以獲取新的介面分布。

重複上述 2 到 8 的步驟，直到所需求解的時間為止。上述為完整含相變化的兩相流之計算流程。若為不考慮熱傳及相變化的雙流體流場之模擬，則是略過 2 到 4 的步驟且在步驟 8 中可採用 CISIT 法或是 FBICS 法來計算流體體積方程式。另外，對於無相變化的熱傳問題則是於步驟 2 中，透過式 (6.5) 先行計算出介面溫度再進行能量內邊界的處理。然而，由於介面處熱傳量相等，故忽略步驟 4 的動作。



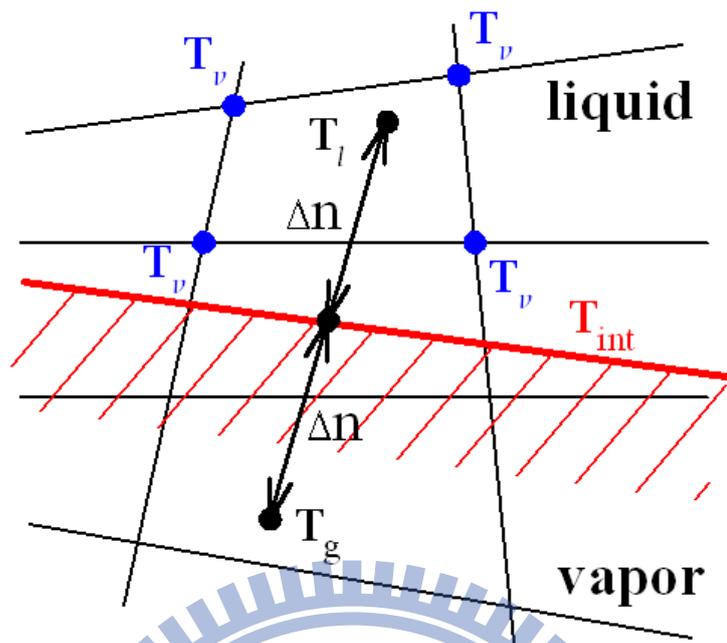
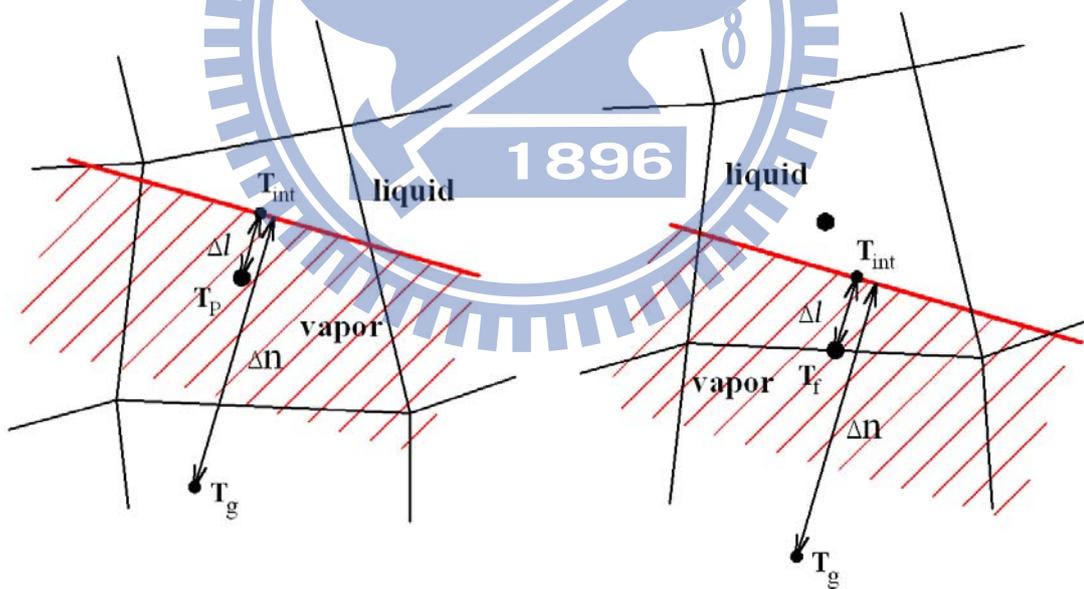


圖 6.1 介面處熱通量計算之示意圖



(a) 網格中心之值

(b) 網格面之值

圖 6.2 二維介面處能量內邊界處理之示意圖

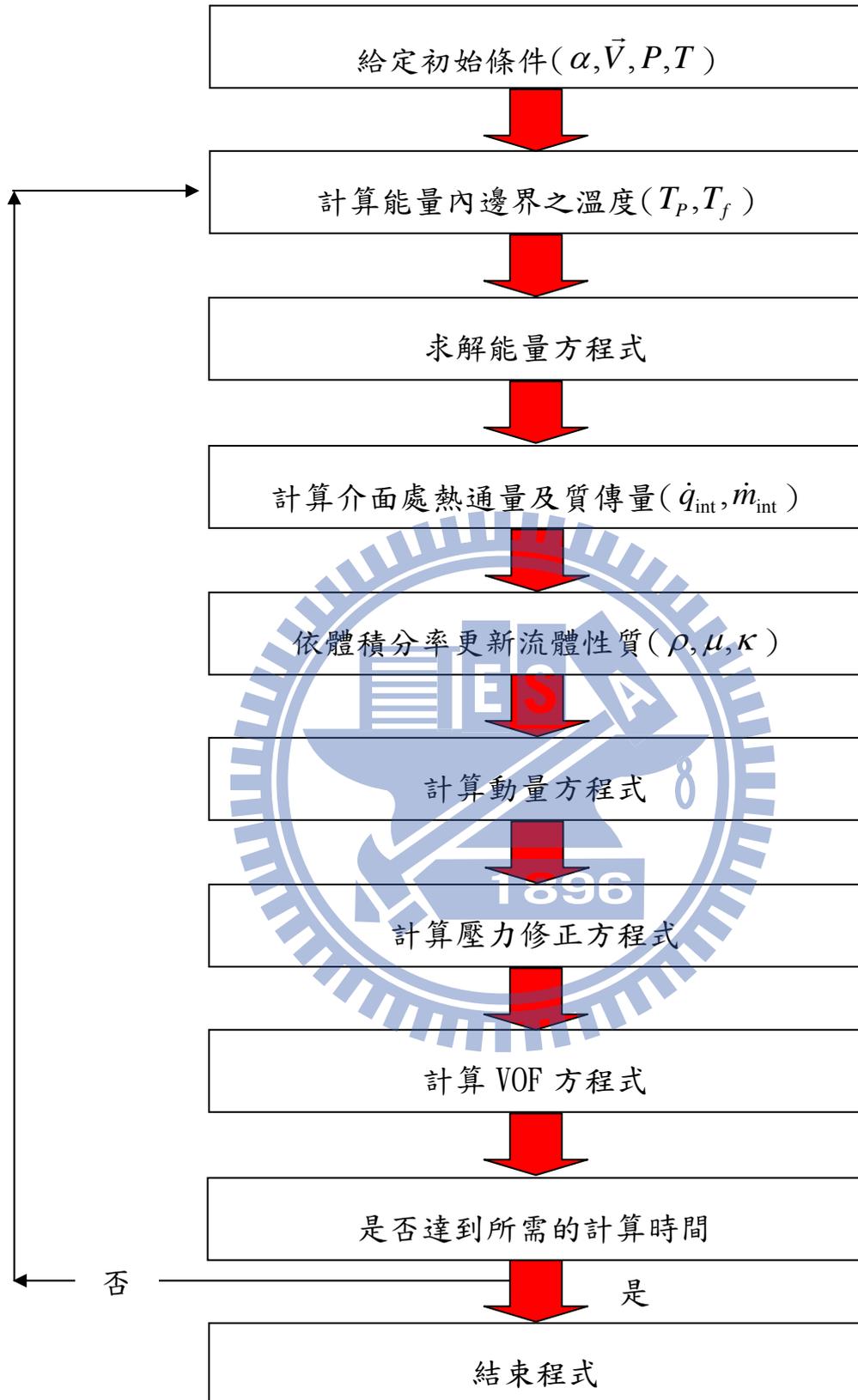


圖 6.3 兩相流計算流程圖

第七章 FBICS 法之驗證與自由表面流之應用

7.1 簡介

本文在第三章已經將通量混合介面捕捉法的數值方法詳細的介紹，而對於動量方程式的求解方式也在第五章中作過說明。如前文所述，通量混合介面捕捉法較適用於雙流體流動中而非包含相變化之兩相流，因此在本章中，首先將透過一些簡單且有理論解之介面傳輸或拉伸的問題，來對本介面捕捉法進行性能的測試與分析，並在最後透過模擬自由表面流(free surface flow)之流場來驗證本方法在實際應用上的可行性。本文所選用測試的例題有：

- (1) 介面於均勻速度場中之傳輸。
- (2) 介面於剪切流中之拉伸。
- (3) 二維壩體潰堤之問題。
- (4) 壩體潰堤流經阻塊之問題。
- (5) 水力湧潮之問題。

上面選用的問題當中，前兩個是在已知速度場而不需求解動量方程式的情況下，單獨計算流體體積方程式以驗證 FBICS 對於介面捕捉之效能。第三個壩體潰堤的例題則是與實驗結果搭配，來證明整套 FBICS 雙流體系統在真實流場中的準確度。最後經由模擬兩個自由表面流之問題，來加以證明本方法在實際流場中應用的可行性。

7.2 介面於均勻速度場之傳輸

對於雙流體流場的數值方法而言，通常會將不同形狀分布的流體介面置於已知的速度場之中，來驗證其方法對於介面推進的精確度。因此本節將透過計算兩種不同形狀之流體介面在均勻速度場中傳輸的情況，來說明本文所提出的兩套介面捕捉法之性能。

在此所選用的流體介面包含一個外部寬 0.8 且內部寬 0.4 的方型環以及一個外徑與內徑分別為 0.8 和 0.4 的圓形環，分別將其放置於一組 4x4 大小的計算域內，並透過一個固定的速度場($\vec{V} = 2\vec{i} + \vec{j}$)，使兩個流體介面在單位時間內，由初始的中心位置(0.8, 0.8)傳輸到(2.8, 1.8)的位置上。計算所使用的網格分別為 100x100 的四邊型網格及總數為 22478 的三角形網格(如圖 7.1 所示)。以下將針對本文第三章所描述的四種不同的方法，包含 Ubbink 和 Issa[26]所發展的 CICSAM 法、Muzaferija[27]等人所發展的 HRIC 法以及本文所提出的兩種方法(式(3.12)與(3.29))，對於其介面傳輸後的結果與誤差來做分析與比較。

就理論上而言，在均勻速度場中傳輸的流體介面並不會因為隨時間的傳遞而造成介面的變形，因此其理論解如圖(7.2)所示。因此其 L^1 誤差計算之方式可以定義如下式：

$$E = \frac{\sum_i |\alpha_i^n \Delta V - \alpha_i^e \Delta V|}{\sum_i \alpha_i^i \Delta V} \quad (7.1)$$

其中上標 n 表示數值解、 e 表示理論解及 i 則表示初始體積分率之分布，而其

累加是表示整個計算域中所有網格之加總。

圖(7.3)到(7.5)分別表示在四邊型網格中，兩種介面在使用四種不同方法以及不同庫倫數($C_N = 0.75$ 、 $C_N = 0.5$ 和 $C_N = 0.1$)下，其傳輸單位時間後的結果。圖中所使用的等位線為 0.05 到 0.95，其間格為 0.1 的大小。而本文所定義的庫倫數為

$$C_N = \frac{\sum \max(F_f, 0)\Delta t}{\Delta V} \quad (7.2)$$

其中 F_f 表示控制面上的體積通量，而其累加表示對控制體積所有控制面之加總。此處的庫倫數是對整個控制體積而言，而非對單一個控制面的庫倫數($C_N = F_f \Delta t / \Delta V$) [27]，一般而言前者會較後者大許多，因此本文在處理 HRIC 法的情況上與原文稍有差異。

由圖(7.3)可知，CICSAM 的方法並不適用於 $C_N = 0.75$ ，這是因為此方法在 NVD 圖中其左側的界限是使用 $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U / C_N$ ，因此當庫倫數接近 1 時，其方法會近似於一階上風法，此舉將產生極強的擴散性而失去其介面的鮮明度，而相較於 FBICS-B 則僅有在 $C_N < 1/3$ 的情況下使用 $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U / C_N$ ，因此並不會在高庫倫數下產生過度的擴散現象，至於 HRIC 法則是在 $C_N > 0.7$ 下採用上風法，因此同樣不適用於較高庫倫數的情況。對於 FBICS-A 與 FBICS-B 而言，由於當 $C_N > 1/3$ 時，其兩者的定義是完全一樣，因此在圖(7.3)中其結果並無差距。

圖(7.5)則是在 $C_N = 0.1$ 的情況下之結果，在低庫倫數下四種方法對於介

面的捕捉都可達到一定程度的效果。然而 HRIC 法因為在 $C_N < 0.3$ 的情況下，仍然採用有界下風法與一階上風法之混合，所以其結果還是產生一定程度的數值擴散而造成介面的模糊。對於方型環的結果而言，可發現 CICSAM 法所獲得的介面相當鮮明，這是因為其在低庫倫數下擁有極高的壓縮性，然而在圓形環中，卻也因此特性而造成其外形變成八邊形。至於 FBICS-A 法在方形環的結果中，可以清楚發現其最外層的等位線因數值擴散而遠離其他等位線，因此 FBICS-B 法則是透過類似於 CICSAM 法的方式 ($\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_u / C_N$) 來修正，以提高 FBICS-A 的壓縮性，其結果顯示效果相當不錯。而此兩種方法在圓形環中，同樣可以發現因介面壓縮而呈現八邊形，但其結果卻不若 CICSAM 和 HRIC 法如此嚴重變形。

圖(7.6)則表示在三角網格中且 $C_N = 0.75$ 之結果。由於固定速度場分布在三角形網格中的庫倫數並不是定值，因此本文在此只呈現 $C_N = 0.75$ 的結果。在三角網格中所選用的 $C_N = 0.75$ 是取整個計算域中最大的庫倫數為 0.75，然而經由庫倫數分布顯示，大部份網格的值都落在 0.4 到 0.5 的區間內。而本文所建立的三角形網格，其網格體積大約為四邊形網格之一半，於是在相同的庫倫數之條件下，其都必須選用比四邊形網格還小的時間步階。基於上述原因，因此圖(7.6)中顯示即使是 $C_N = 0.75$ 的情況下，CICSAM 和 HRIC 也不至於發生明顯的數值擴散現象。

圖 7.7(a)和(b)分別表示在四邊形網格中，方型環與圓形環所產生的誤

差與庫倫數的關係圖。結果顯示 HRIC 法不管是庫倫數的大小，其所產生的誤差都來得比其他三種方法大，起因於 HRIC 法是使用一階上風法與有界下風法來進行通量混合，所以上風法所帶來強烈的擴散性造成介面模糊化而產生較大的誤差。至於 CICSAM 法，當庫倫數較小時可以達到不錯的精確度，然而其使用 $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\alpha}_U / C_N$ 做為界限，因此隨著庫倫數上升其方法就越接近一階上風法，所以其誤差也隨之遽增。而 FBICS-A 與 FBICS-B 則與於上述兩種方法大大的不同，由圖(7.7)明顯的顯示出此兩種方法不僅可得到相當不錯的精準度且不易受庫倫數的大小所影響。圖中也可清楚看出 A 和 B 兩種方法在 $C_N > 1/3$ 時其結果是完全相同，而在低庫倫數的情況下，雖然 FBICS-A 之誤差略高於 CICSAM 法，然將 FBICS-A 加入界限條件而成為 FBICS-B 後，便可使誤差略優於 CICSAM 法。

7.3 介面於剪切流(Shear Flow)中之拉伸

在真實的流場當中，流體介面容易受到流場的拉伸而導致介面的變形，尤其是在沿著介面切線方向有極大速度梯度的剪切流之中，流體介面常常會因此剪應力而產生破碎或是變形的情況。為了進一步證實本文所提出的兩套介面捕捉法可有效地適用於較複雜的流場之中，因此本節將在一個大小為 π 見方的計算域中，模擬一組圓形介面受到剪切流而拉伸的現象(圖 7.8)，而其所採用的速度分佈，如下式：

$$\vec{V} = \sin x \cdot \cos y \vec{i} - \cos x \cdot \sin y \vec{j} \quad (7.3)$$

上式為一個逆時針旋轉之速度場且速度隨著位置遠離計算域中心而逐漸加大，因此在沿著流場旋轉的方向上會有一個極大的剪應力產生，此剪力將使流體介面隨著時間逐漸被拉伸。

本問題中所使用的網格是一組 100×100 的四邊形網格，而其初始的介面形狀分布為一個中心位於 $(\pi/2, (1+\pi)/5)$ 且半徑為 0.2π 之圓形。此圓形介面將在上述的速度場中逆時針傳輸 N 個單位時間之後，再將速度場反向，在同樣 N 個單位時間內進行順時針的傳輸。前半段的時間內，流體介面因受到剪力的拉伸而產生變形，而後半段的時間則是以完全相反的速度來傳輸同樣的時間，因此理論上介面會在最後回到初始的狀態。然而在數值運算上，隨著傳輸的時間拉長，由於誤差會逐漸累積，使得介面變形而無法在最後完全回到初始的形狀。以下將針對上節所討論的四種方法在不同庫

倫數以及傳輸時間之結果做分析比較。

圖 7.9 至 7.12 分別是在 $C_N = 0.75$ 在情況下， $N=2、4、8、16$ 之結果。結果顯示 CICSAM 與 HRIC 法在此庫倫數下，因為有較強的數值擴散產生，所以即便是在 $N=2$ 的情況下，其介面都無法維持其鮮明度，而在 $N=16$ 反轉之後的圖形中，更可以發現這兩種方法最後的結果都已完全的失真。對於 FBICS-A 和 FBICS-B 來說，雖然傳輸時間拉長會造成介面稍為變形，然而其不受庫倫數高而產生數值擴散是顯而易見的。

圖 7.13 至 7.16 則是在 $C_N = 0.25$ 之結果。在此條件下，除了 HRIC 法隨著計算時間的拉長會產生較明顯的擴散問題以外，另外三者皆可維持其介面鮮明度。而在 $N=16$ 的結果中，顯示 FBICS-A 優於 CICSAM 與 FBICS-B，這是因為後兩者在低庫倫數下採用高壓縮性的手法來捕捉介面，所以介面產生變形。

圖 7.17 顯示在 $N=16$ 之數值誤差與庫倫數關係圖。誤差計算方式乃是根據式(7.1)所計算而得，如同上述可取初始的介面分布作為其理論解。HRIC 法其誤差在 $C_N > 0.3$ 區間內會開始急速的上升，而 CICSAM 則在 $C_N > 0.5$ 往後的區域，其誤差隨庫倫數增加的幅度開始變大。至於本文所提出的 FBICS-A 與 FBICS-B 所產生的誤差，很明顯地並不會隨著庫倫數的增減而有太大的變化。

7.4 二維壩體潰堤

二維壩體潰堤的問題廣泛地被用來驗證雙流體流動系統之數值模擬的準確性，本研究同樣使用此簡單的二維模型來分析文中所提出的通量混合介面捕捉法和動量方程式數值方法結合後，在模擬真實的自由表面流之準確度。一般而言，此問題的數值結果，通常是引用[73, 74]所提供流動前端速度及水位下降高度的實驗數據來做比較。

Koshizuka[74]等人所使用的實驗模型是將一個寬0.146m高0.292m的水柱，置於寬和高分別為0.584m和0.34m的長方形水槽中(如圖 7.18)。位於左下角的水柱因有隔板阻擋其流動所以流體呈現靜止狀態，此時水柱正處在一個位能相對高的狀態上。在實驗開始後將隔板移開，水柱因為重力的關係開始產生潰決並往最低位能的狀態流動，而其底部流動前端開始向右邊的牆面衝撞而去，之後逐漸地填滿水槽的底部，最後由於流體本身黏滯性的關係而使水面趨於靜止的狀態。在[74]實驗中，其水柱崩解隨時間變化的照片，如圖 7.19 所示。

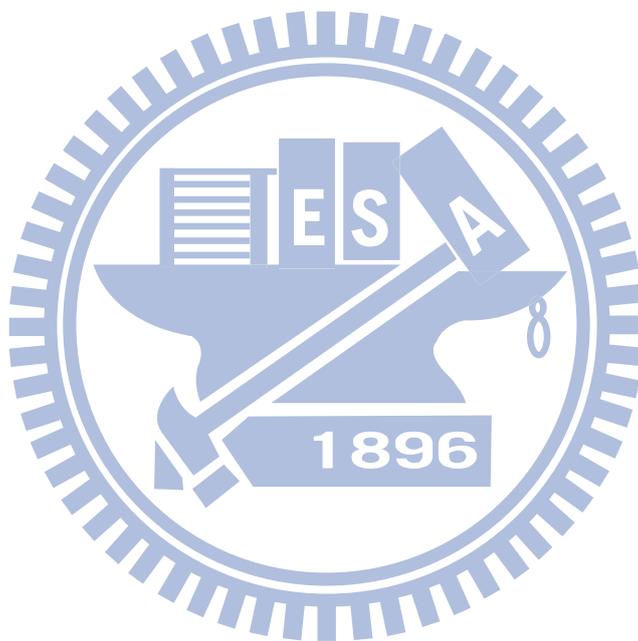
本文所考慮的計算模型，其計算域大小以及水柱的初始狀態分布與上述的實驗一致且兩種流體的性質分別選用為水 ($\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_l = 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{sec}$)和空氣($\rho_g = 1 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_g = 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{sec}$)，而整個流動過程考慮重力影響但由於此流動的尺度較大因此不考慮表面張力的效應。水槽上方設定為開放出口邊界且壓力為 1atm，其餘三面則為無滑移(no-slip)

的牆邊界。在本問題中，採用 FBICS-A 的方式來計算介面的推進，並且分別在 80x50 及 120x70 的四邊形網格和總數為 6218 與 9698 的三角形網格(如圖 7.20)中進行模擬，所選用的時間步階則是以整個計算過程中所有網格的 最大庫倫數 不超過 0.25 為基準。

圖(7.21)和(7.22)分別顯示在兩組四邊形網格下，其流體介面與速度場隨時間演進的情形，而圖(7.23)和(7.24)則為使用三角網格的情形。由圖中可以觀測出整個二維水壩潰堤的模擬結果與實驗的照片非常相近。在初期水柱受到重力的影響開始產生潰堤的現象，然後隨著時間水流因其慣性作用開始往右牆移動，在 $t=0.2$ 秒時，水流前端已經來到底部大約 $3/4$ 的位置上，之後流體開始衝擊右邊的牆面而因受到阻力開始向上爬升，到了 $t=0.6$ 秒流體因為重力的作用再次垮下並產生所謂的重力波(gravity wave)，當時間繼續推進水流開始往回流動並在過程中將部分的空氣包覆到水中形成氣泡，直到 $t=1.0$ 秒時，水流前端再次衝擊到左方牆面。經由四種網格的結果比較可以發現，前期在還沒產生包覆的氣泡時，四種網格下的結果類似，並無太大的差距，然而後期不同網格所包覆之氣泡的個數、大小、位置都不太一致，這是由於不同網格對於氣泡的解析度不同所造成。

圖(7.25)與(7.26)分別為底部水流前端與左側水柱高度與時間無因次化之關係圖。在圖(7.25)中，Exp. 1.125” 和 Exp2. 25” 分別表示[73]中所提出的兩組不同大小尺寸之實驗數據。在水流前端的變化圖上顯示模擬與實

驗結果相近，然而本文所計算出的前端速度略比實驗快，這種情況在[74，75]中也有遭遇到相同的情形，這是因為水流前端正確的位置較難量測所導致的誤差。至於在左側水柱高度的變化上，本文四組網格的結果都與實驗結果幾乎貼齊。



7.5 壩體潰堤流經阻塊

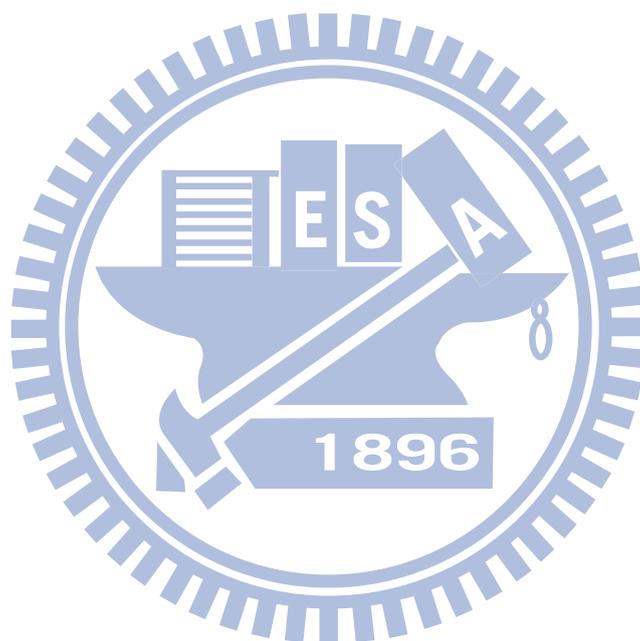
前節所探討的壩體潰堤屬於流場較為簡單的模型，然而當在槽底水流前端放置一阻塊時，將會使整體的流場變得相當複雜。因此 Koshizuka[74] 等人將一個大小為 $0.024 \times 0.048\text{m}$ 的小阻塊，放置於前節所描述之水槽底部的中央來進行實驗，其結果如圖 7.27。

本文在模擬此問題時所使用的計算域是將前節的模型加高而成為一個邊長為 0.584m 的正方形區域，並在與上述實驗相同的位置上放置同樣大小的阻塊，而計算所使用的網格為 200×200 的正方形網格且使用 FBICS-A 的方法來計算介面移動的情形，至於邊界條件的設定上仍然與前節相同。

圖 7.28 中分別顯示隨時間輸出的流體介面以及速度場之計算結果，其間隔為 0.1 秒。由圖中可知在水流前端還未接觸到阻塊前水流沿著槽底流動。在 $t=0.2$ 秒時水流前端碰觸到阻塊時，因此在前端處開始產生了阻力而使水流開始往上抬升。到了 $t=0.3$ 秒，水流已經濺灑成舌狀的水花並且往右側的牆面噴去。當 $t=0.4$ 秒時舌狀水花已經接觸到右側牆面並且在其下側已經包覆了大量的空氣，此時在水花下側部位也因為重力的影響而開始產生極度不穩定的雷利-泰勒不穩定性(Rayleigh-Taylor Instability)的波浪狀介面。此波浪狀的介面持續受到重力的作用下，在 $t=0.5$ 秒時已發展成為雷利-泰勒手指(Rayleigh-Taylor Fingers)。最後到了 $t=0.6$ 秒時，由於重力的持續作用的關係導致舌狀水花的介面完全的崩解，進而使

得整體的介面變得相當不規則。在計算的過程中，可以清楚的發現水花噴濺後，空氣速度受其影響極大因而產生了相當多的回流。

將圖(7.28)與(7.27)做比較，可以清楚發現本模擬的結果不管是舌狀水花噴濺、雷利泰勒不穩定性或是介面破壞的情況都與文獻中的實驗結果相當接近，因此透過本問題的模擬可證實本研究所提出的方法可適用於相當複雜的自由表面流的模擬之中。



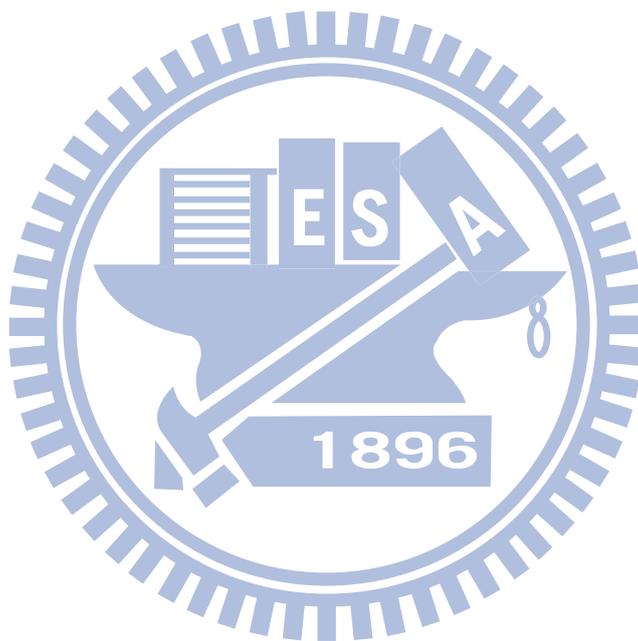
7.6 水力湧潮 (Hydraulic Bore)

當流體以水平的速度朝向垂直的壁面撞擊時將會有湧潮的產生，此湧潮產生後將朝遠離牆面的方向移動，移動的過程中若流體的速度夠快，則在湧潮的前端將產生破碎的現象。在這種流體流動的過程中，要準確的透過模擬來獲取準確的介面形狀是相當困難的，然而可透過 Stoker[76]經由動量及連續方程式所推導出的牆上水位高度的理論解來驗證數值計算的結果。

本文在此問題所採用的計算域是一個寬 12.5m 且高 4m 的長方形水槽並在其左下方有一個高度為 1m 的入口，而上方為一個開放出口邊界，其餘邊界則為滑動邊界(如圖 7.29)。所考慮的兩種流體都是假設不具有黏性且其密度分別為水($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$)和空氣($\rho=1 \text{ kg/m}^3$)，而重力加速度則是假設為單位大小。初始的水槽內注滿深度為 1m 的水，並且以單位大小的速度開始往右方垂直牆移動，而在入口處則是有水以單位速度注入水槽之中。在此使用 125x40 的正方形網格以及 FBICS-A 的方法來進行計算。

圖(7.30)分別表示在 $t=2.0$ 、 3.5 、 5.0 、 6.5 及 8.0 秒下的數值模擬結果。在 $t=2$ 秒時水流因朝向垂直牆面撞擊而開始爬升，到了 $t=3.5$ 秒時則因受重力的影響而開始產生重力波並且開始往左側運動而遠離牆面。隨著時間的推進，水波開始包覆空氣而開始在水中產生氣泡($t=5.0\sim 6.5$)。到了 $t=8.0$ 時，圖中已經可以發現因為水波前端開始產生碎裂的現象。至於圖

(7.31)則是將[76]所推導出右側牆面水位高度的理論解與本文模擬的結果做比較，結果顯示水位高度在兩秒以前急速地上升，過了兩秒後因重力波的產生而開始下降，然後在四秒後因慣性的作用開始產生震盪，而其震盪的區間介於 0.23m 至 0.22m，其結果與理論解的結果 2.19m 將當的接近。



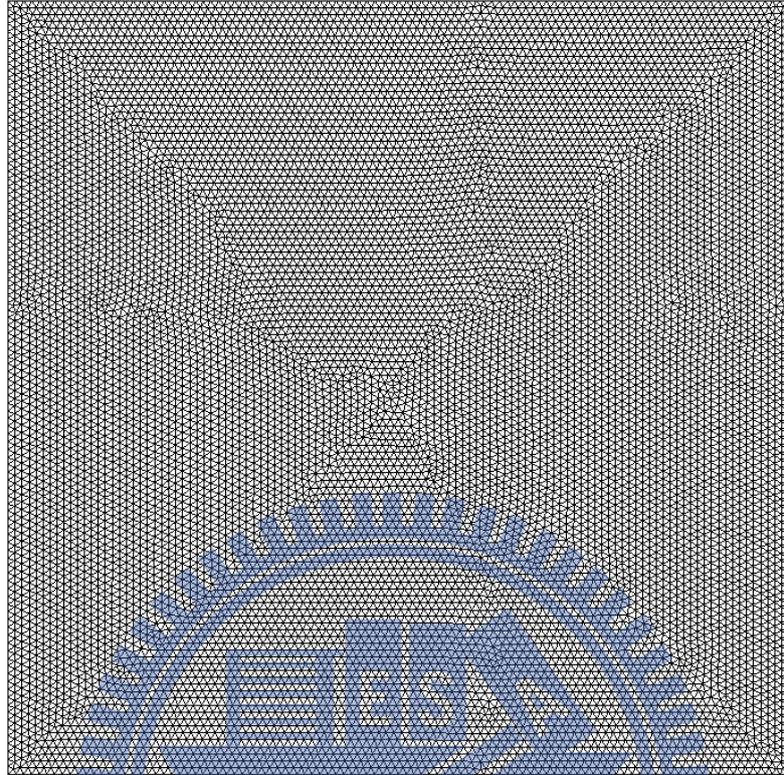
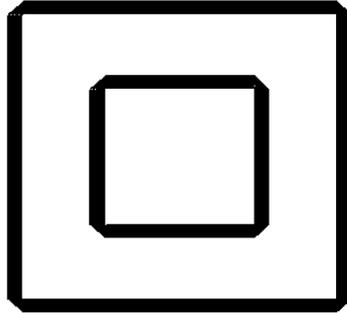


圖 7.1 介面於均勻速度場中所使用的三角網格



(b) 圓形環

圖 7.2 介面於均勻速度場中傳輸之理論解

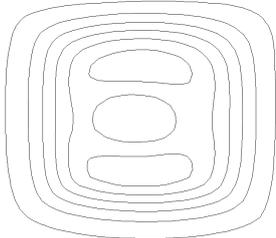
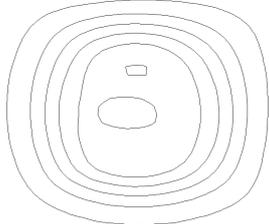
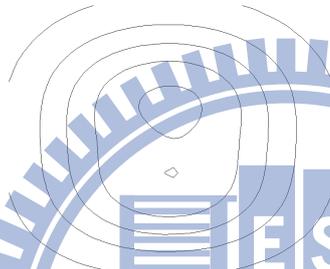
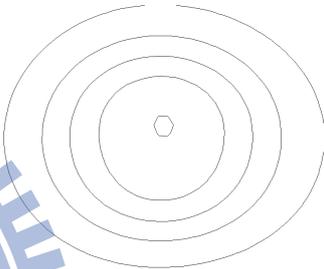
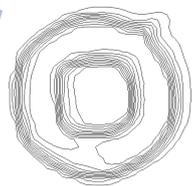
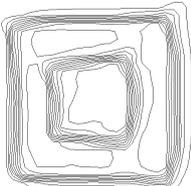
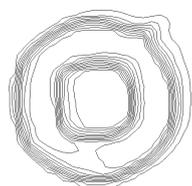
$C_N = 0.75$ (Rectangular mesh)		
Schemes	Square	Circle
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.3 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.75$ ，四邊形網格)

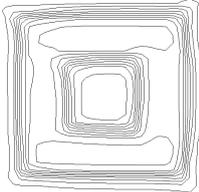
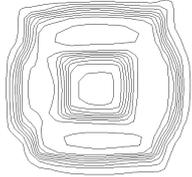
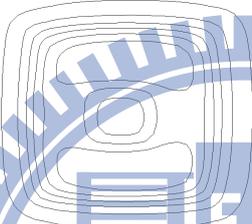
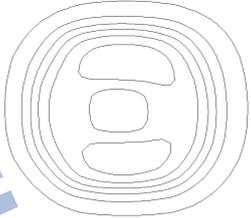
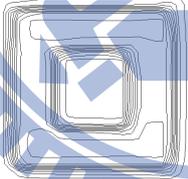
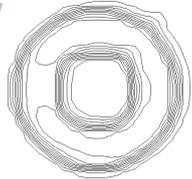
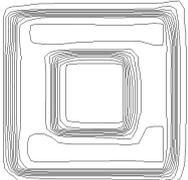
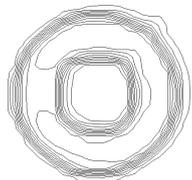
$C_N = 0.5$ (Rectangular mesh)		
Schemes	Square	Circle
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.4 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.5$ ，四邊形網格)

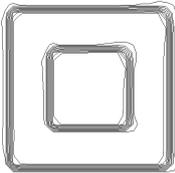
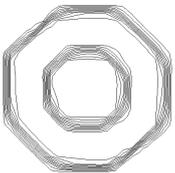
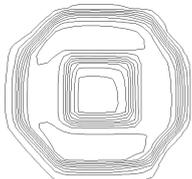
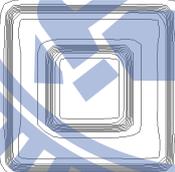
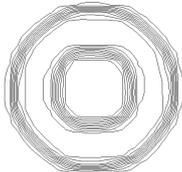
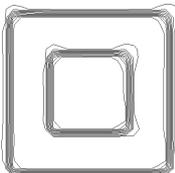
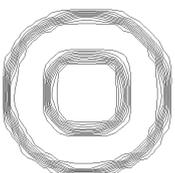
$C_N = 0.1$ (Rectangular mesh)		
Schemes	Square	Circle
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.5 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.1$ ，四邊形網格)

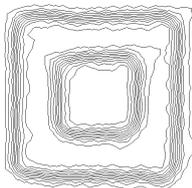
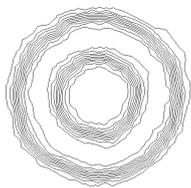
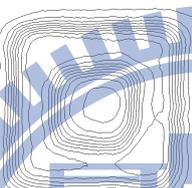
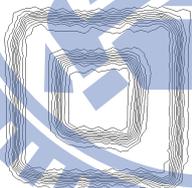
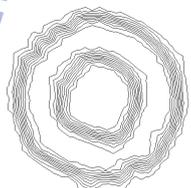
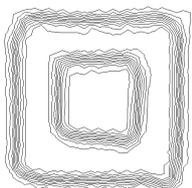
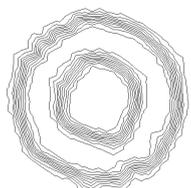
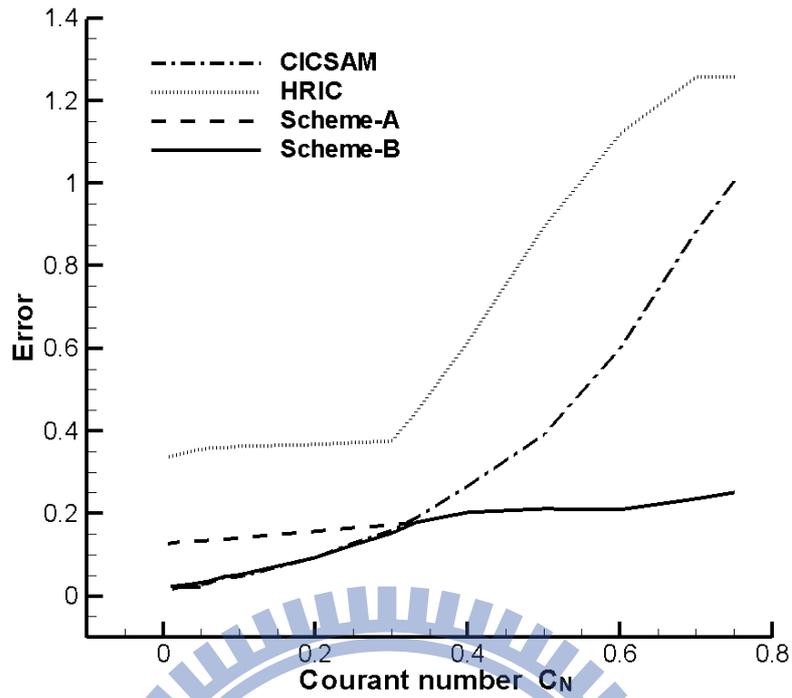
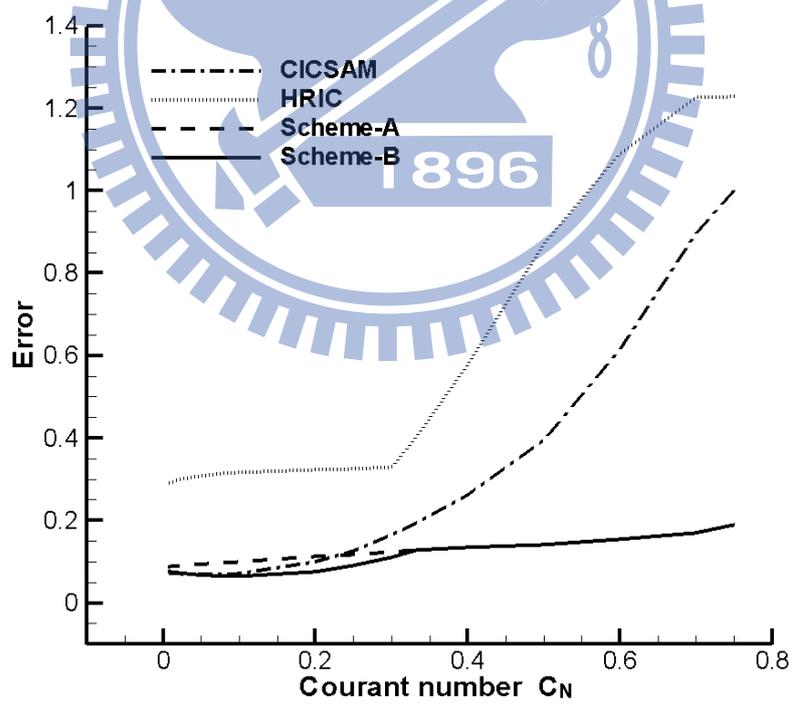
$C_N = 0.75$ (Triangular mesh)		
Schemes	Square	Circle
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.6 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($C_N = 0.75$ ，三角形網格)



(a) 方型環



(b) 圓形環

圖 7.7 介面傳輸之數值誤差與庫倫數關係圖

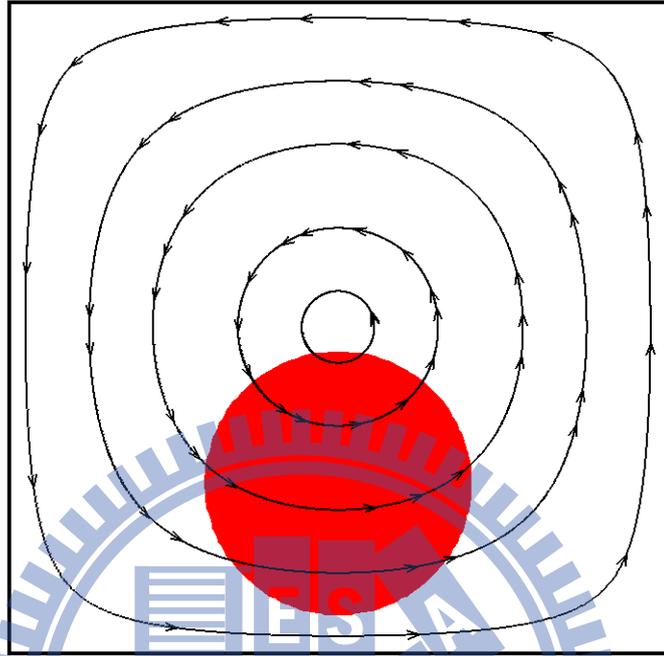


圖 7.8 剪切流中初始介面與速度場分布之示意圖

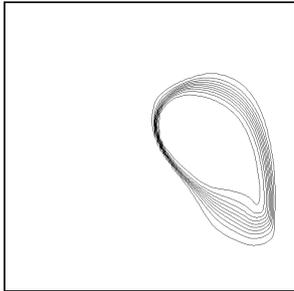
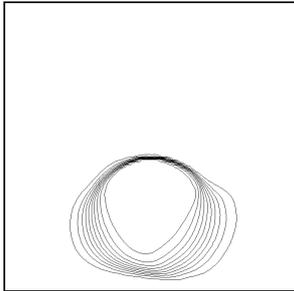
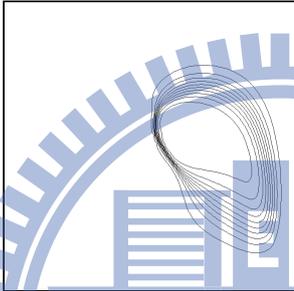
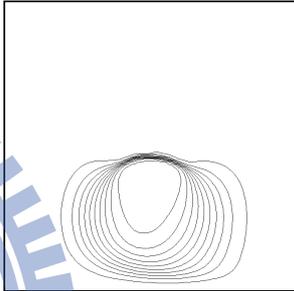
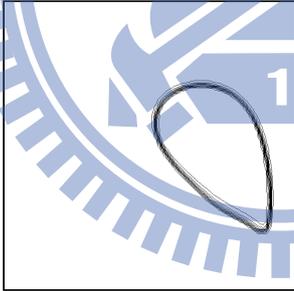
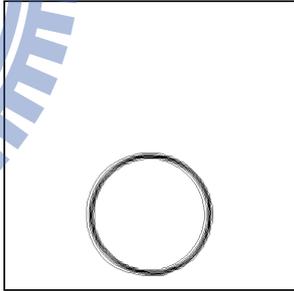
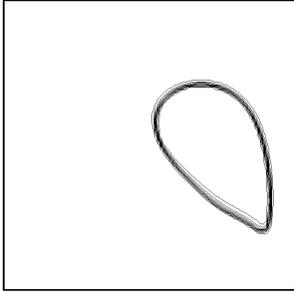
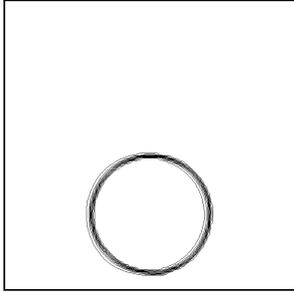
$C_N = 0.75$		
Schemes	Forward N=2	Backward N=2
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.9 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=2$)

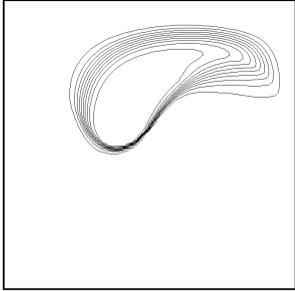
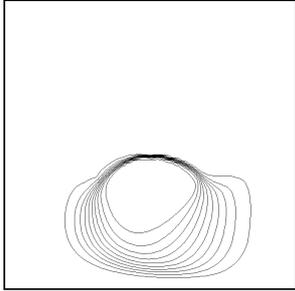
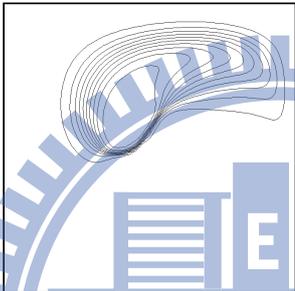
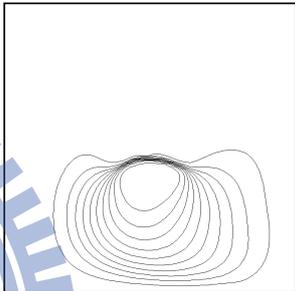
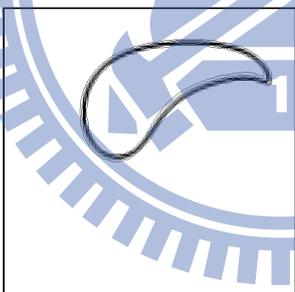
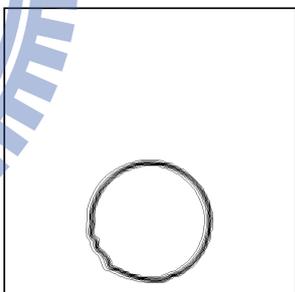
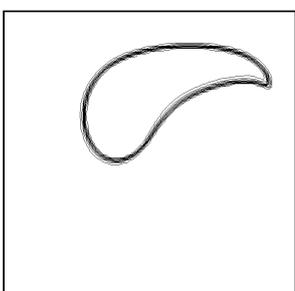
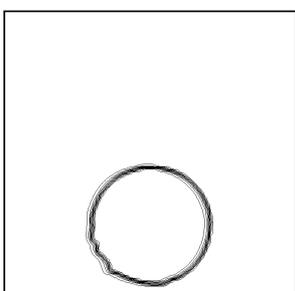
$C_N = 0.75$		
Schemes	Forward N=4	Backward N=4
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.10 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=4$)

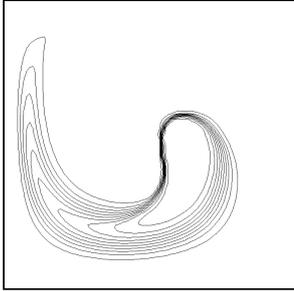
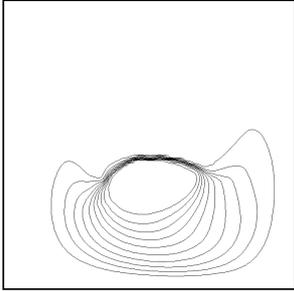
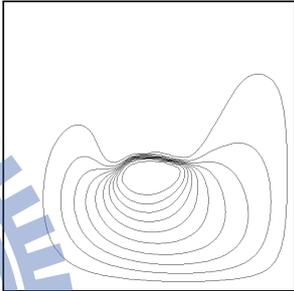
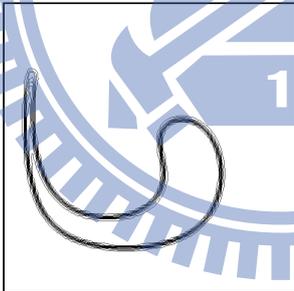
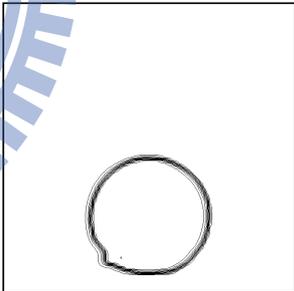
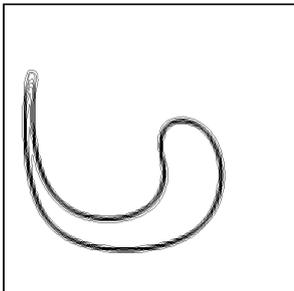
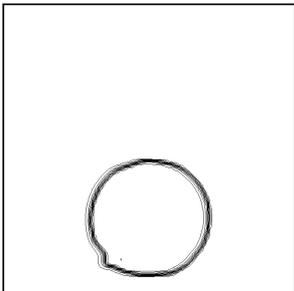
$C_N = 0.75$		
Schemes	Forward N=8	Backward N=8
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.11 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=8$)

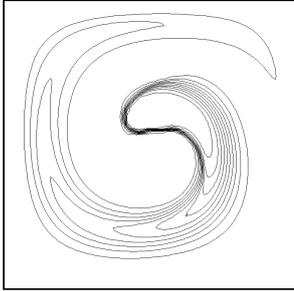
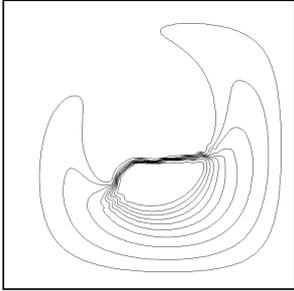
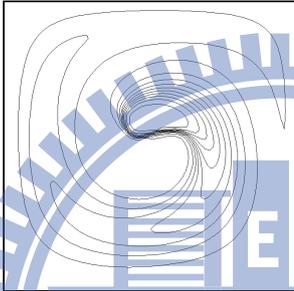
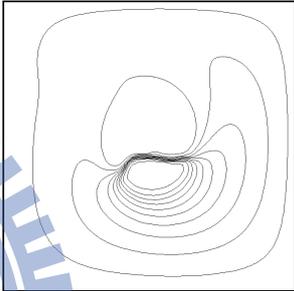
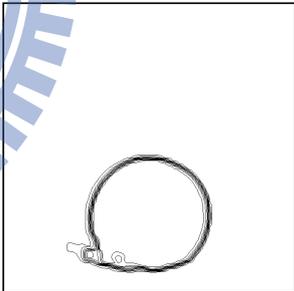
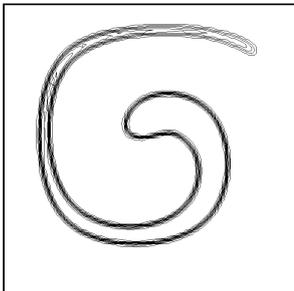
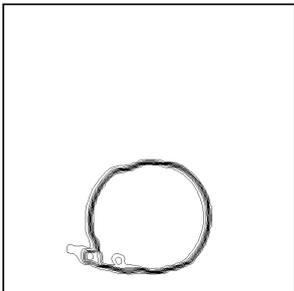
$C_N = 0.75$		
Schemes	Forward N=16	Backward N=16
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.12 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.75$, $N=16$)

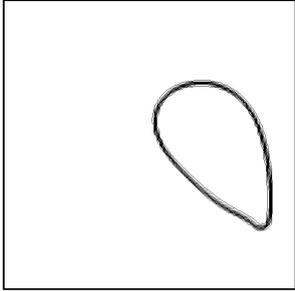
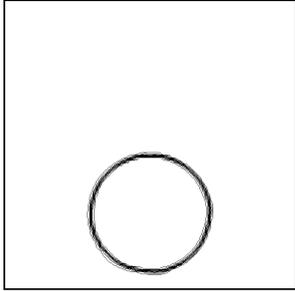
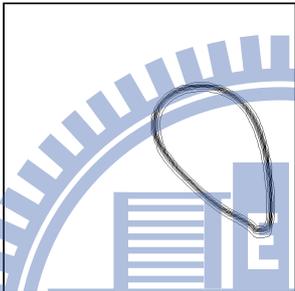
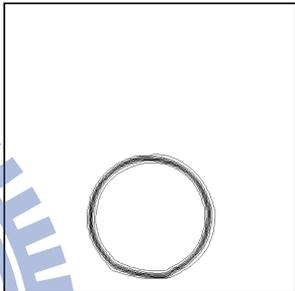
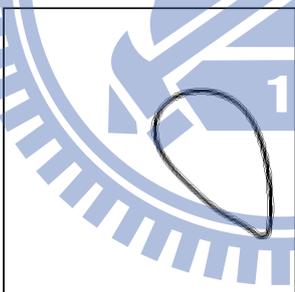
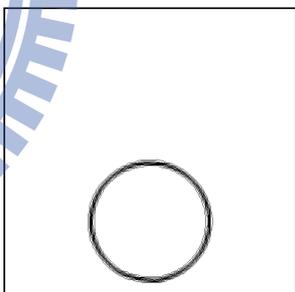
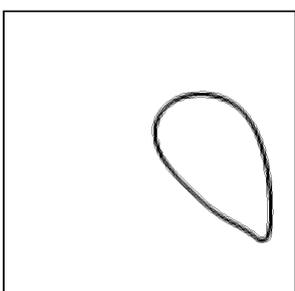
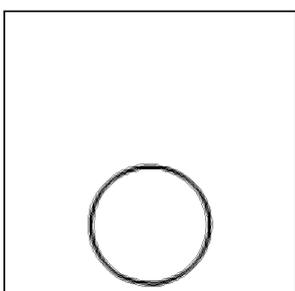
$C_N = 0.25$		
Schemes	Forward N=2	Backward N=2
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.13 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=2$)

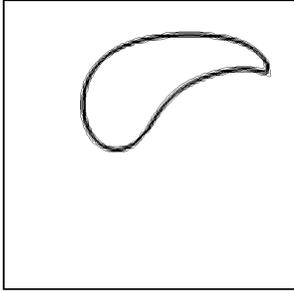
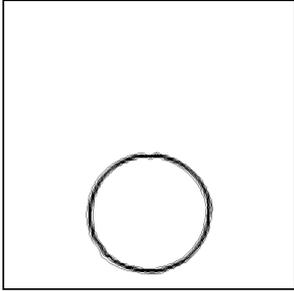
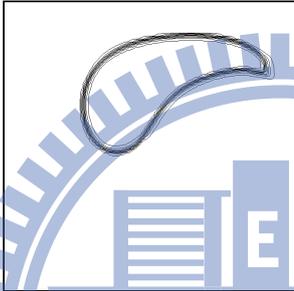
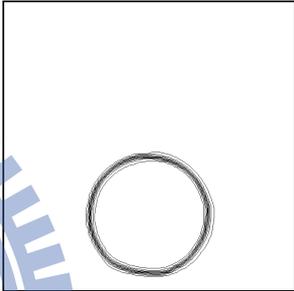
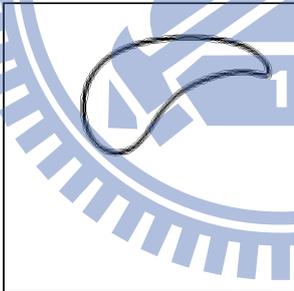
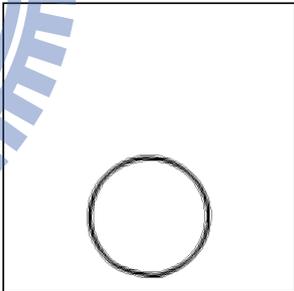
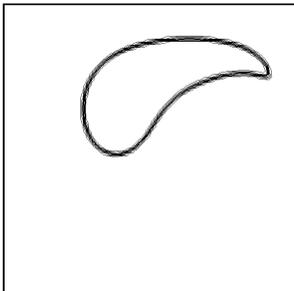
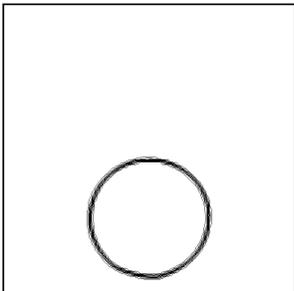
$C_N = 0.25$		
Schemes	Forward N=4	Backward N=4
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.14 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=4$)

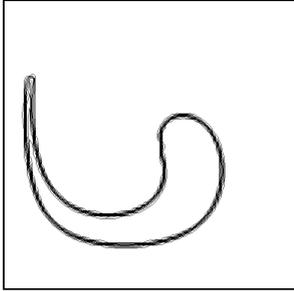
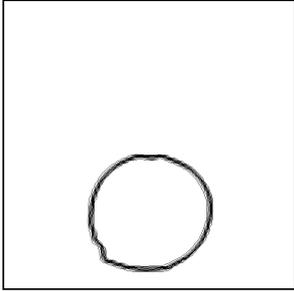
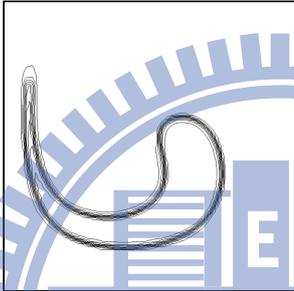
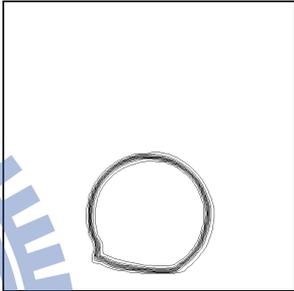
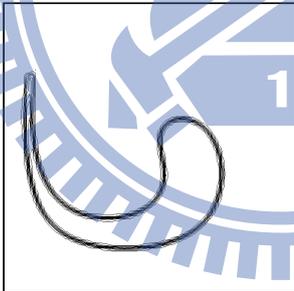
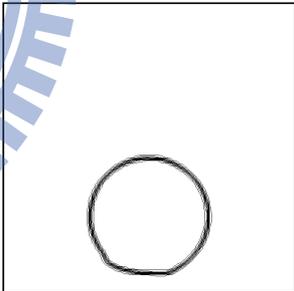
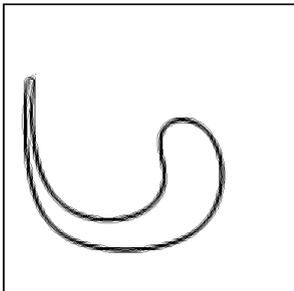
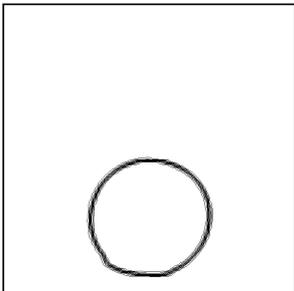
$C_N = 0.25$		
Schemes	Forward N=8	Backward N=8
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.15 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=8$)

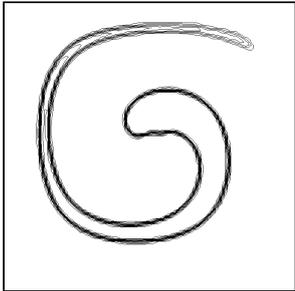
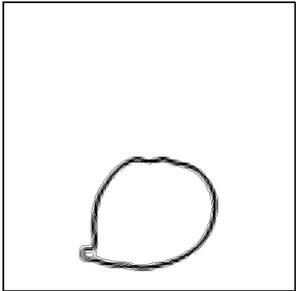
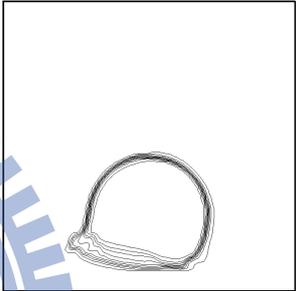
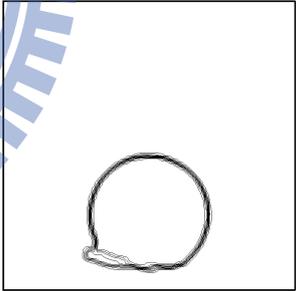
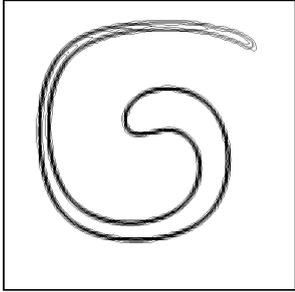
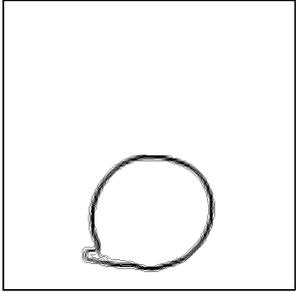
$C_N = 0.25$		
Schemes	Forward N=16	Backward N=16
CICSAM		
HRIC		
FBICS-A		
FBICS-B		

圖 7.16 剪切流中介面正轉與反轉之結果($C_N = 0.25$, $N=16$)

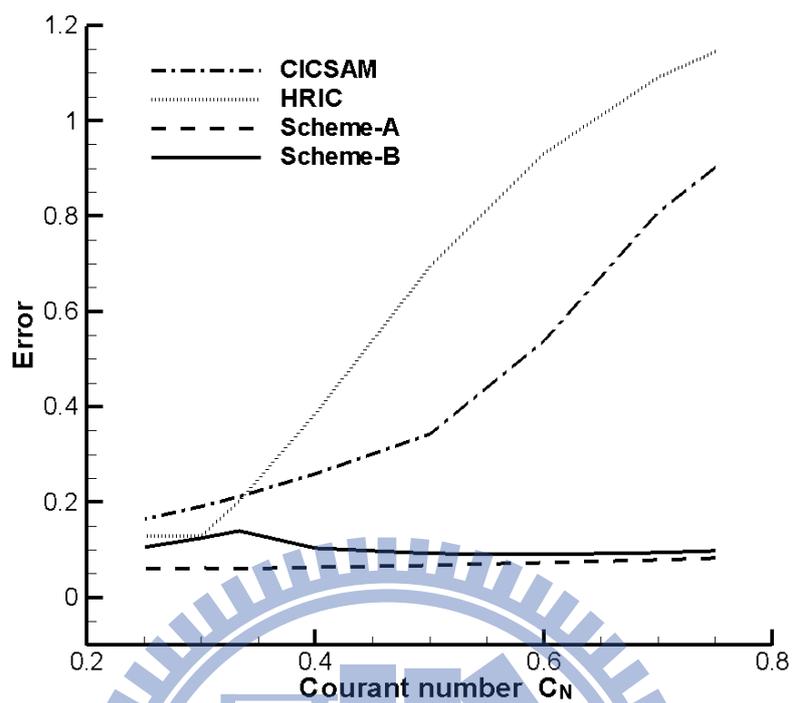


圖 7.17 介面於剪切流中之數值誤差與庫倫數關係圖

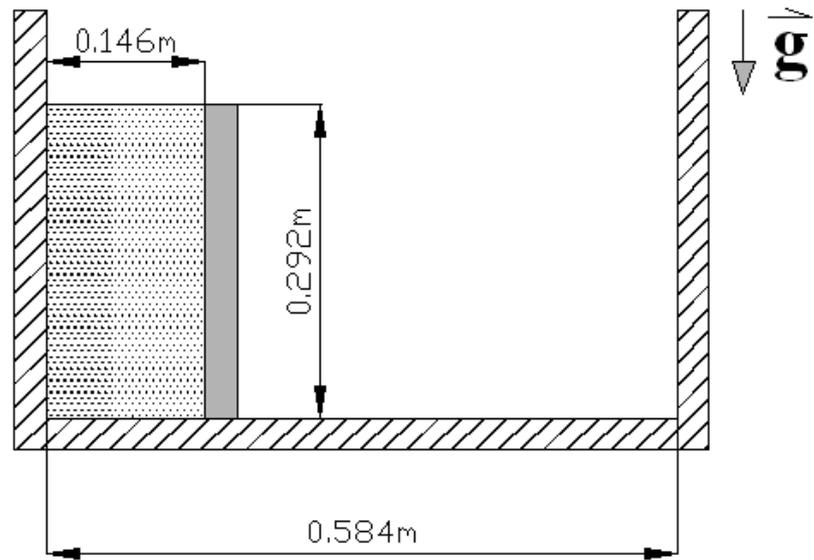


圖 7.18 二維壩體潰堤之幾何尺寸示意圖



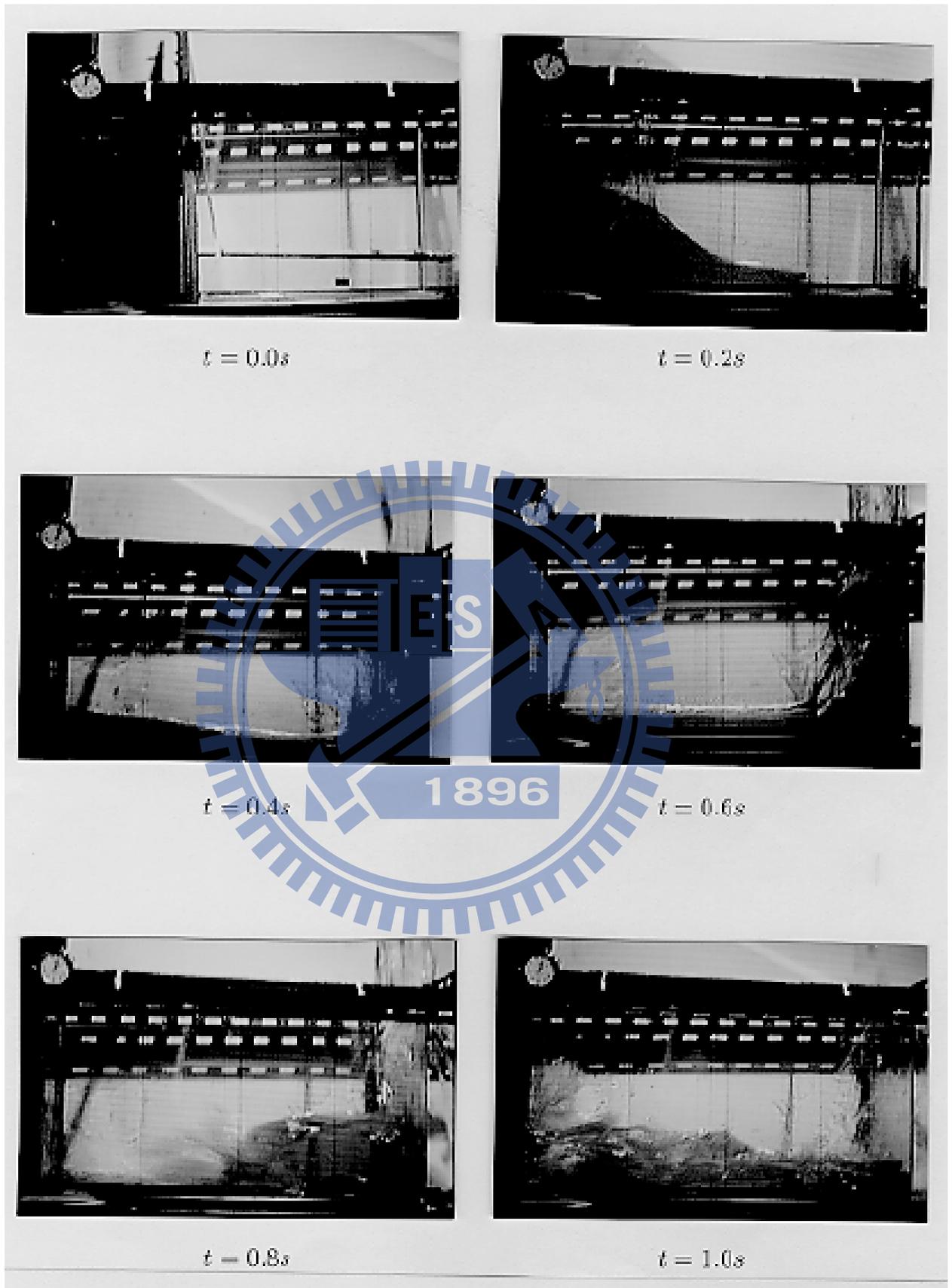
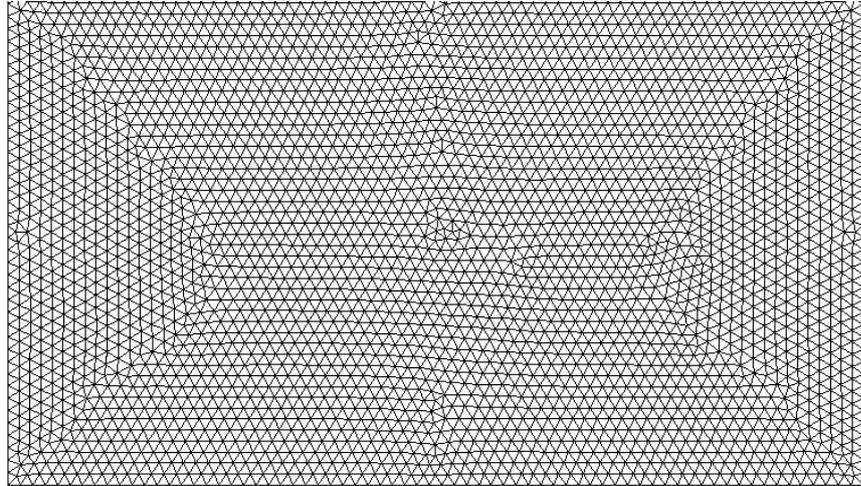
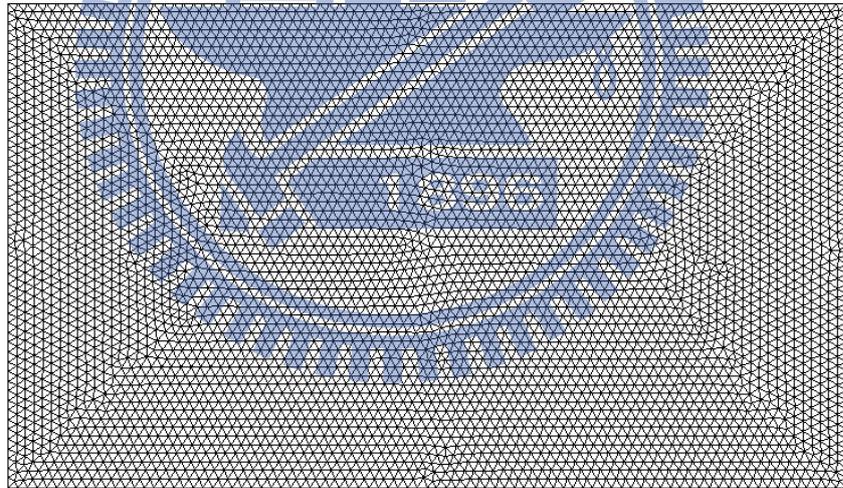


圖 7.19 二維壩體潰堤之實驗結果[74]



(a) 網格數 6218



(b) 網格數 9698

圖 7.20 二維壩體潰堤模擬所使用的三角網格

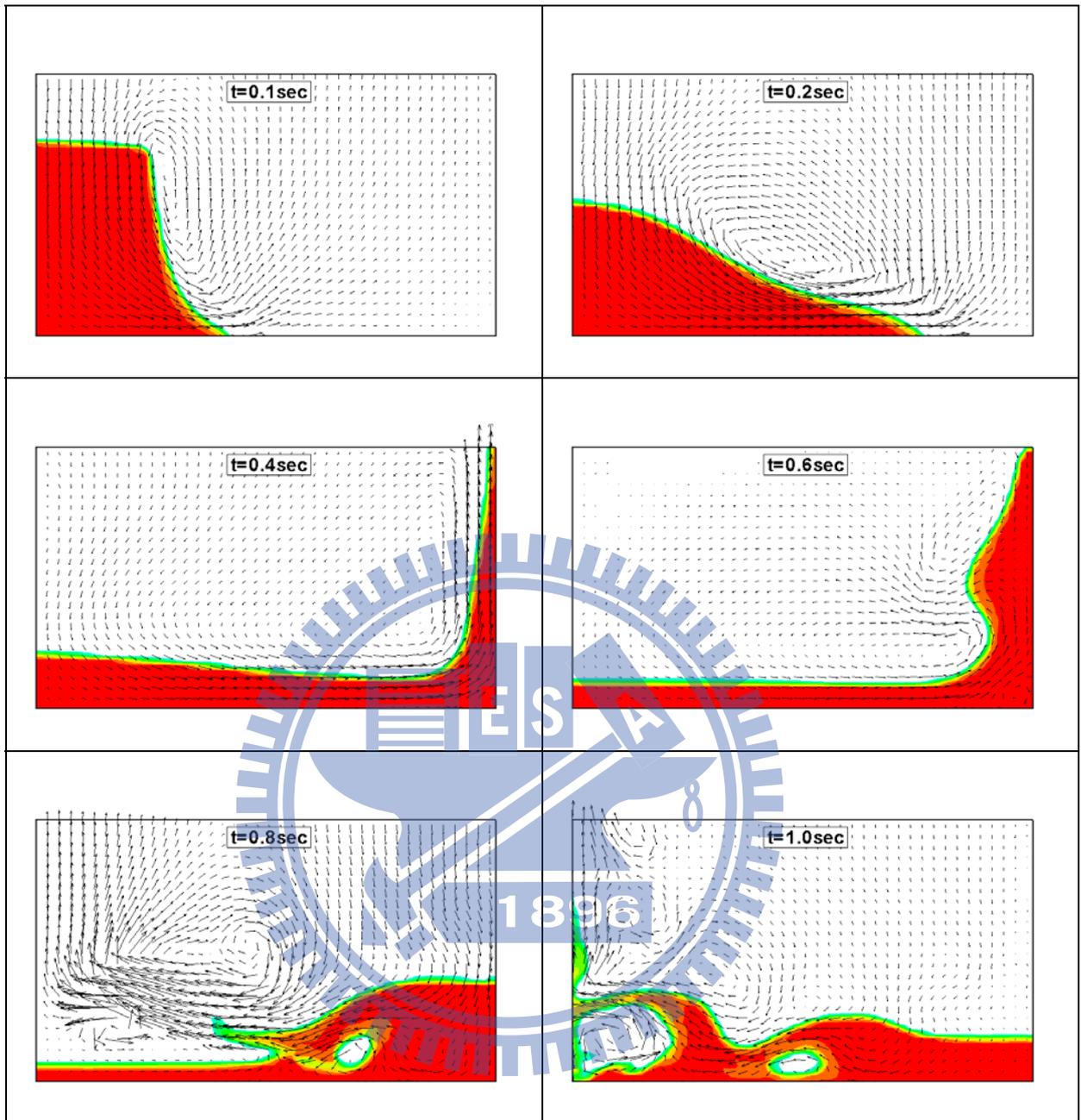


圖 7.21 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 80x50）

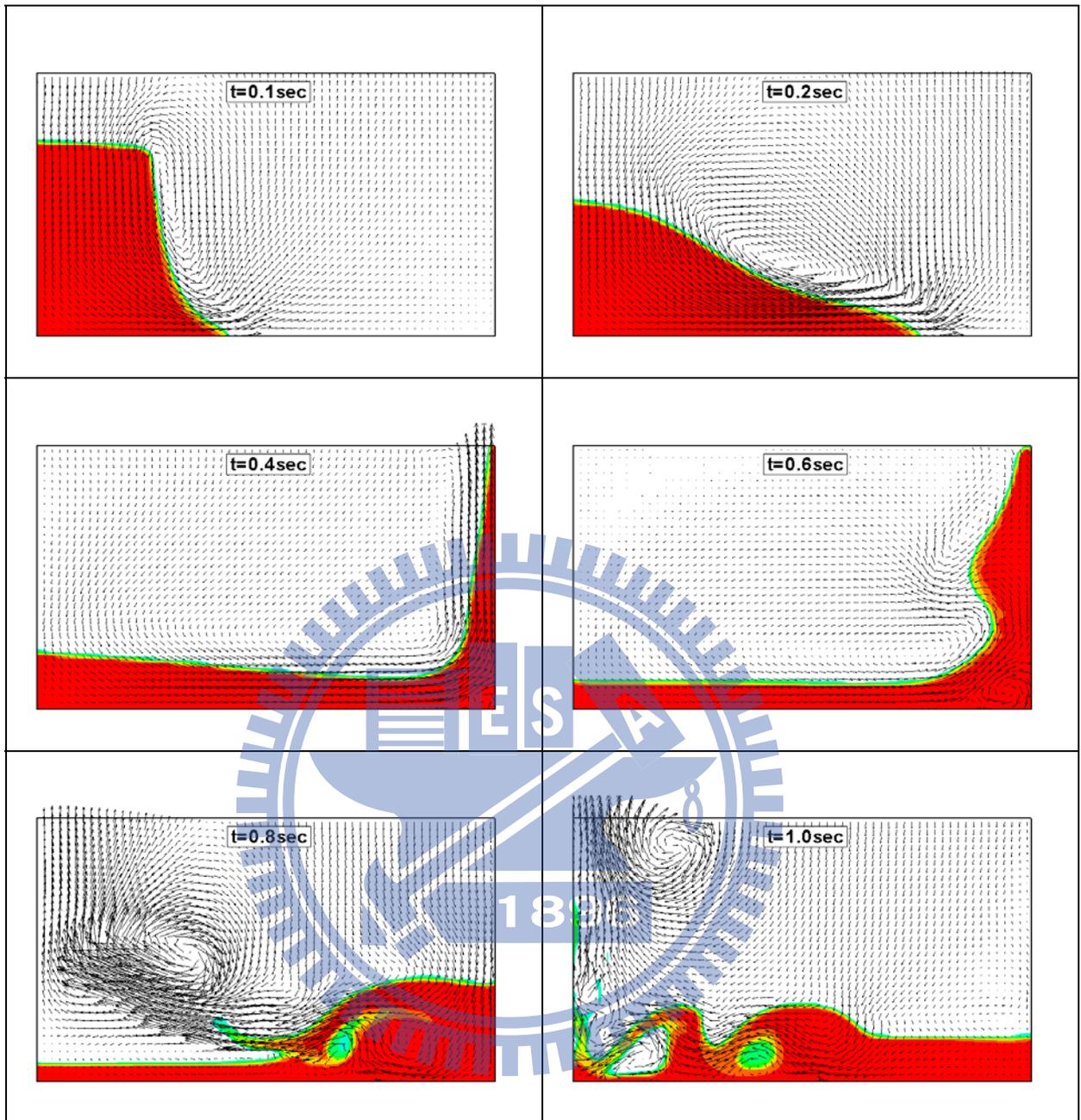


圖 7.22 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 120x70)

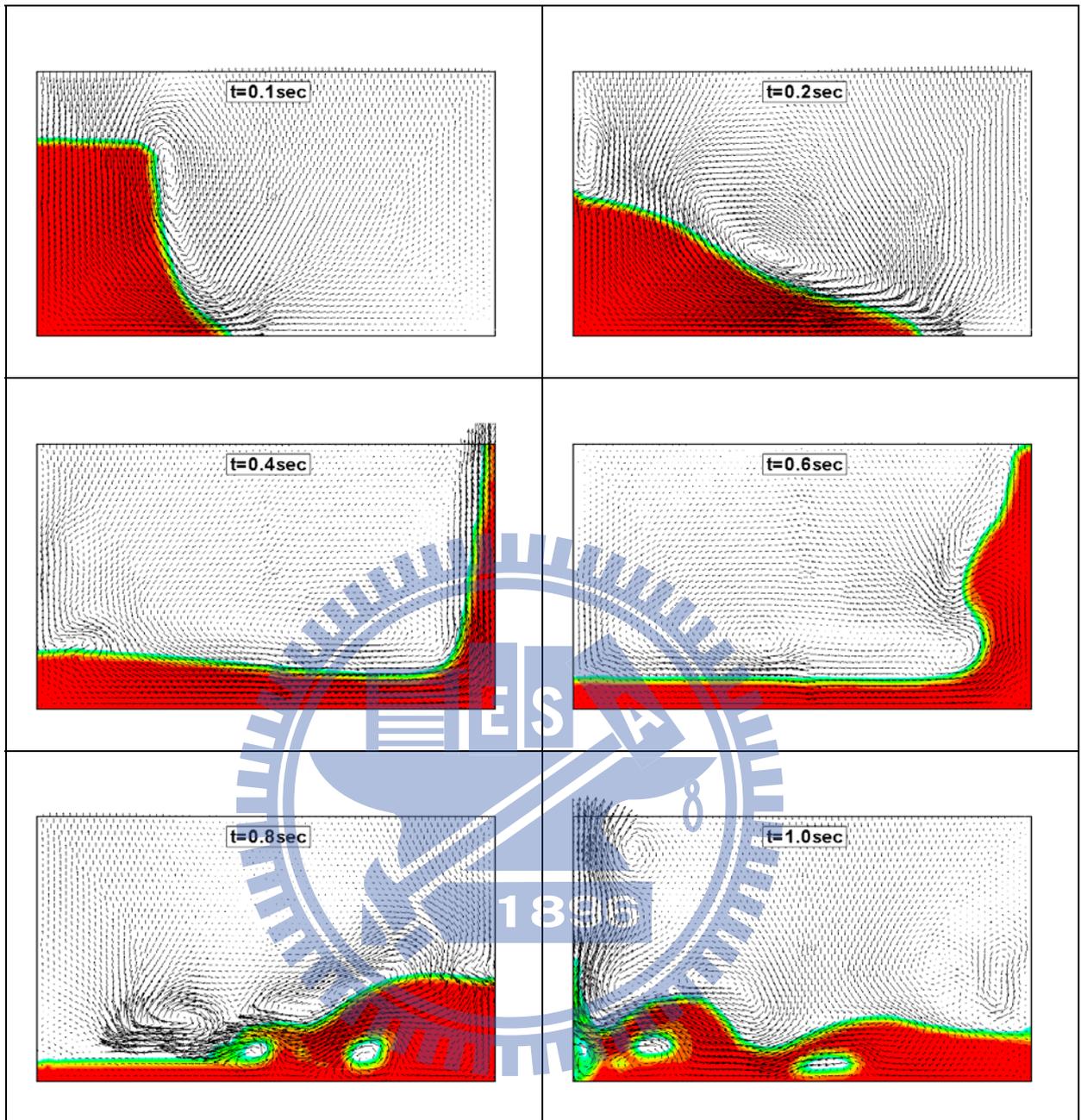


圖 7.23 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 6218）

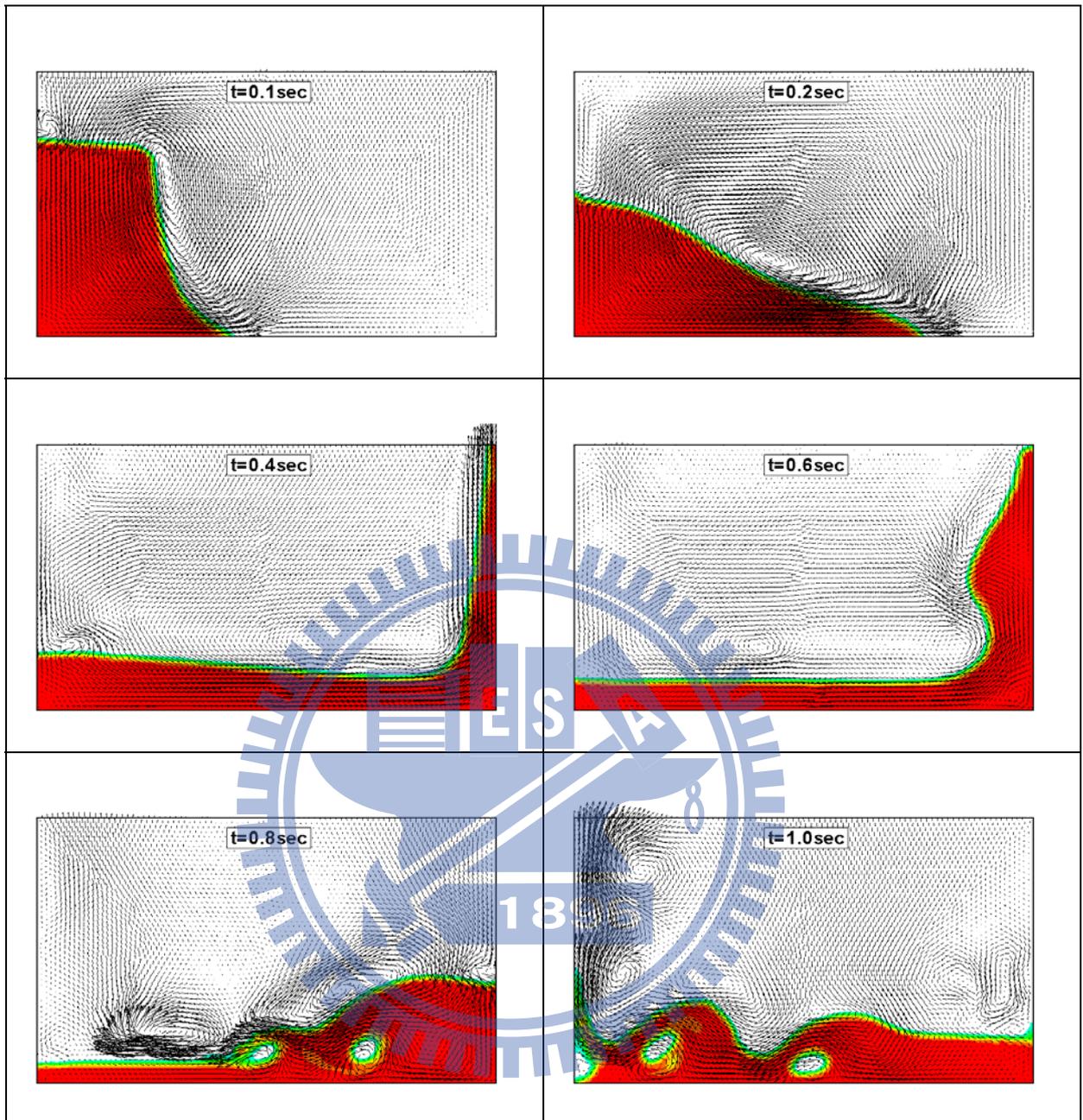


圖 7.24 二維壩體潰堤隨時間之演進圖 (網格 9698)

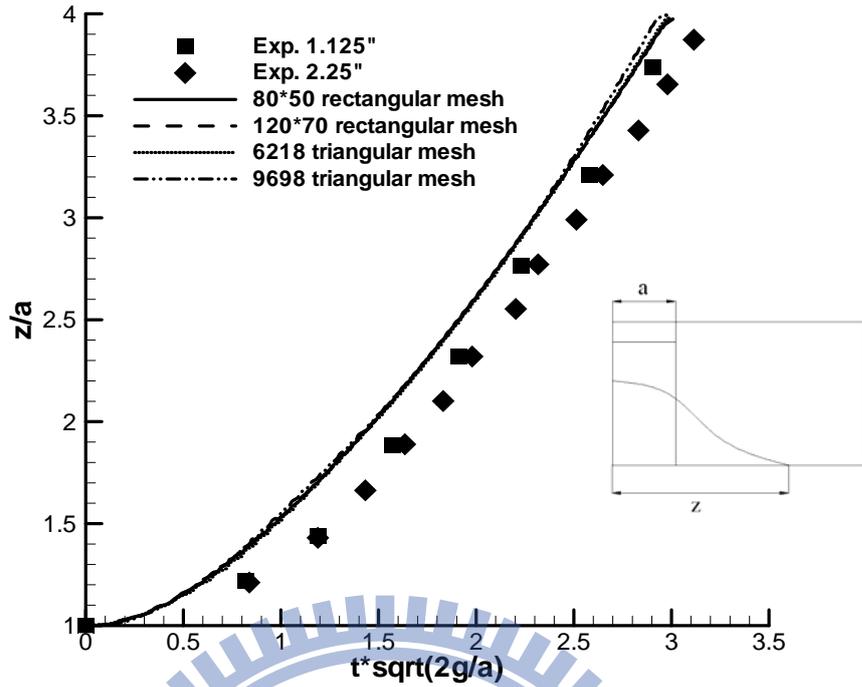


圖 7.25 底部水流前端與時間無因次化關係圖

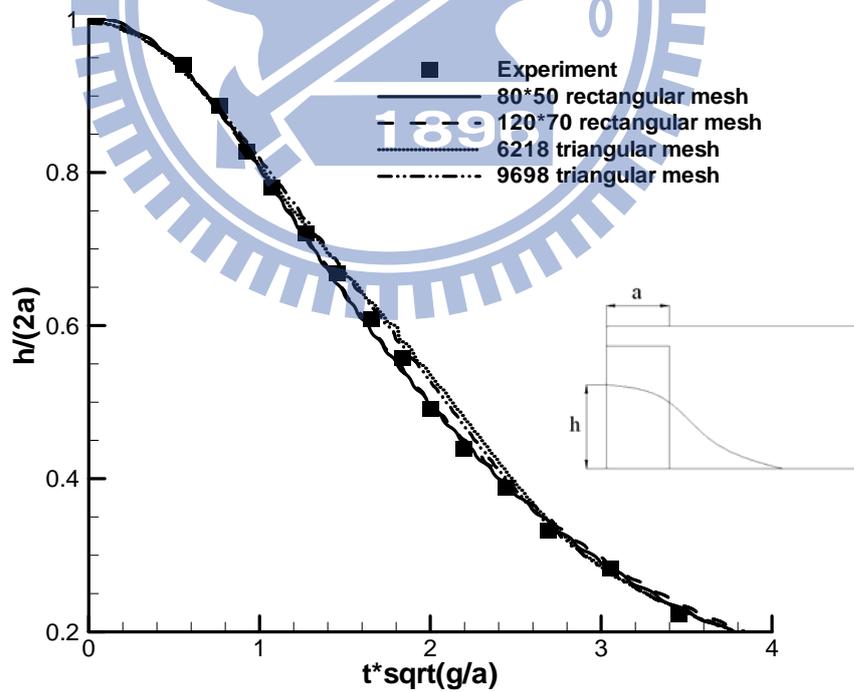


圖 7.26 左側水柱高度與時間無因次化關係圖

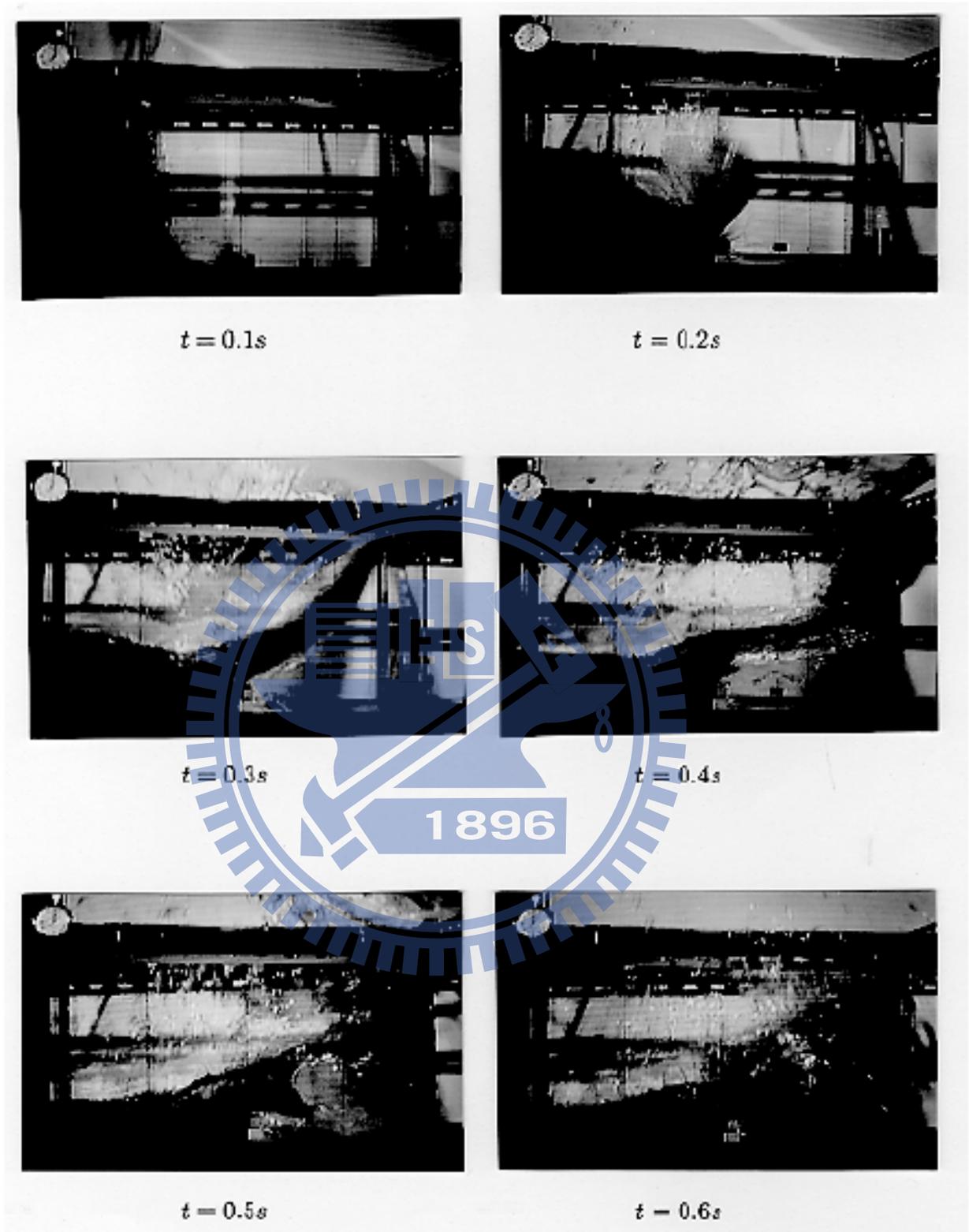


圖 7.27 壩體潰堤流經阻塊之實驗結果[74]

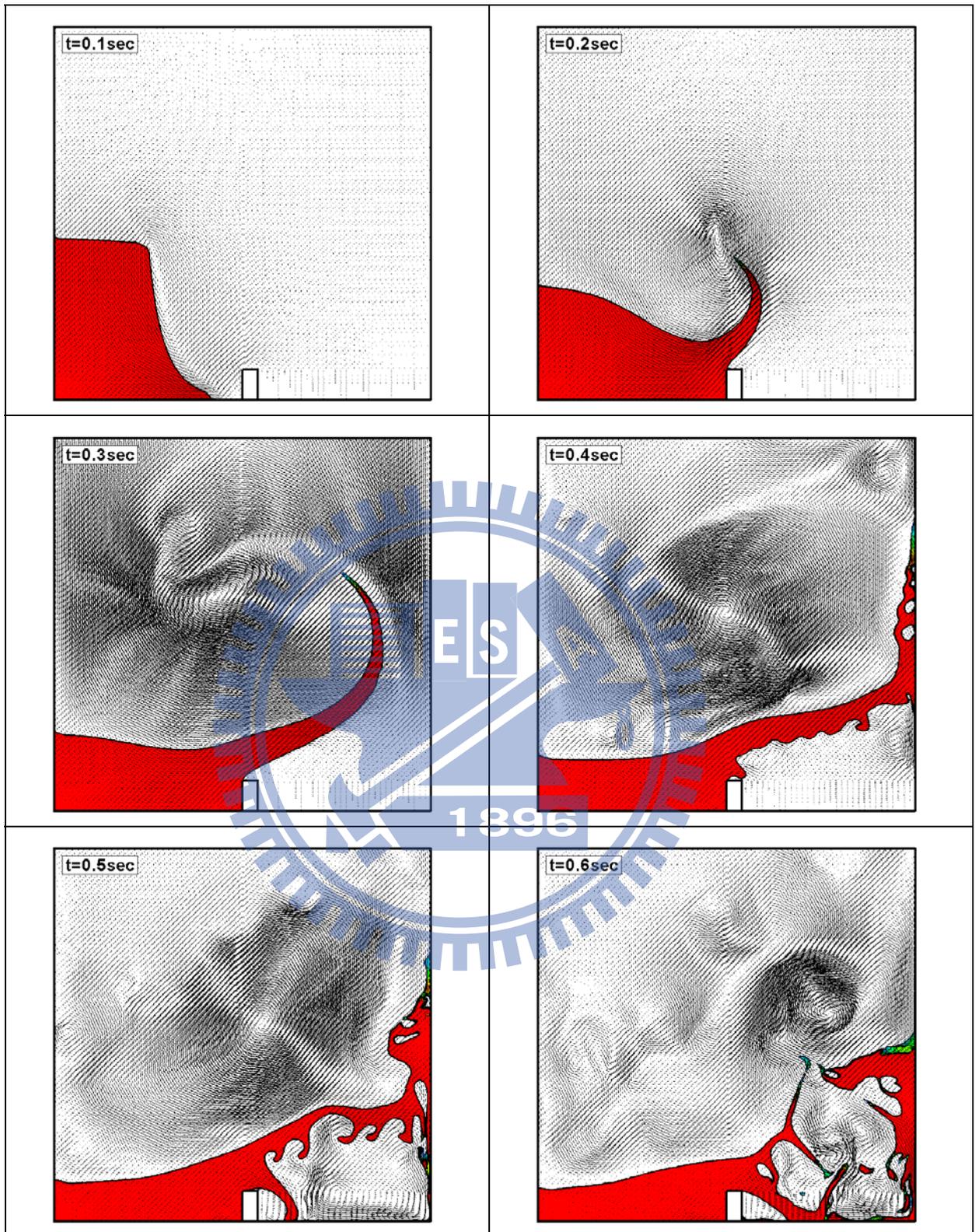


圖 7.28 壩體潰堤流經阻塊隨時間之演進圖

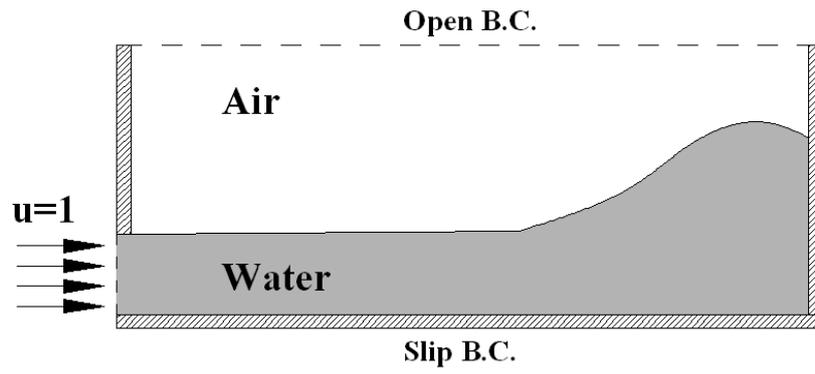
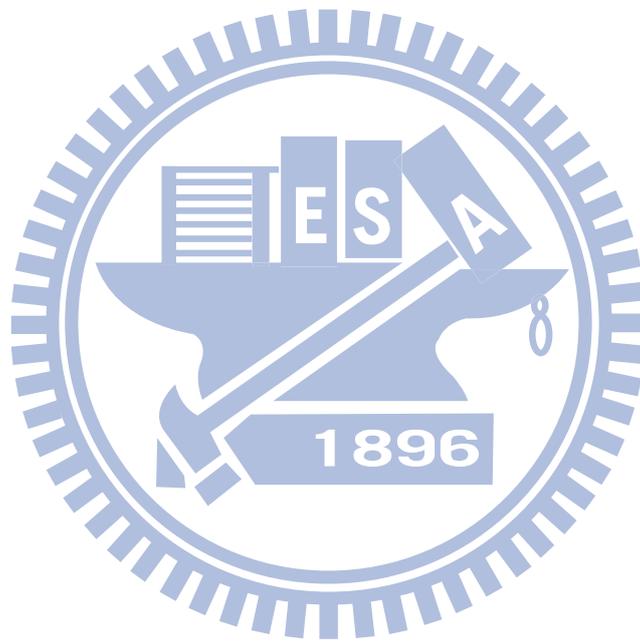


圖 7.29 水力湧潮物理模型之示意圖



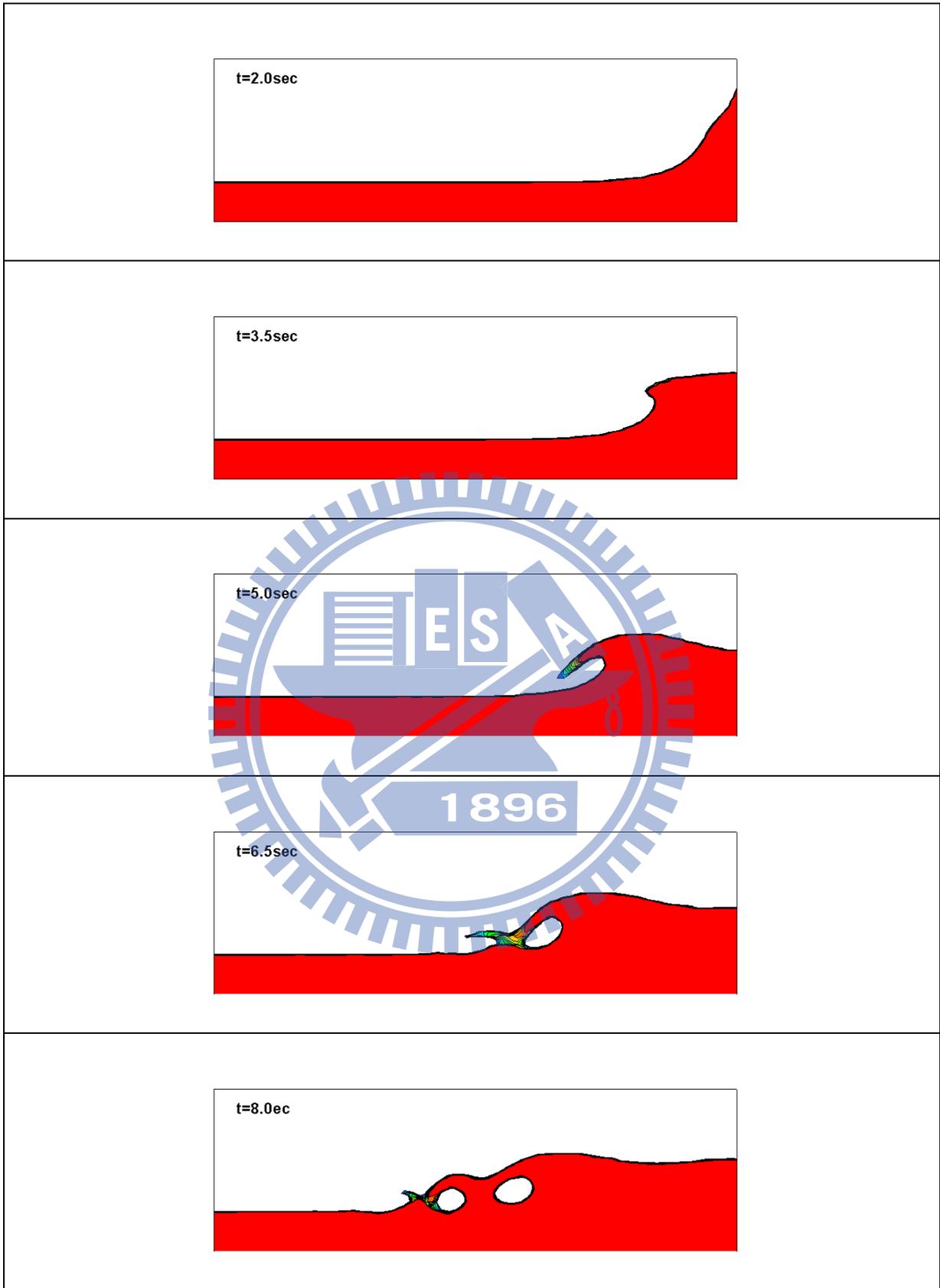


圖 7.30 水力湧潮隨時間之演進圖

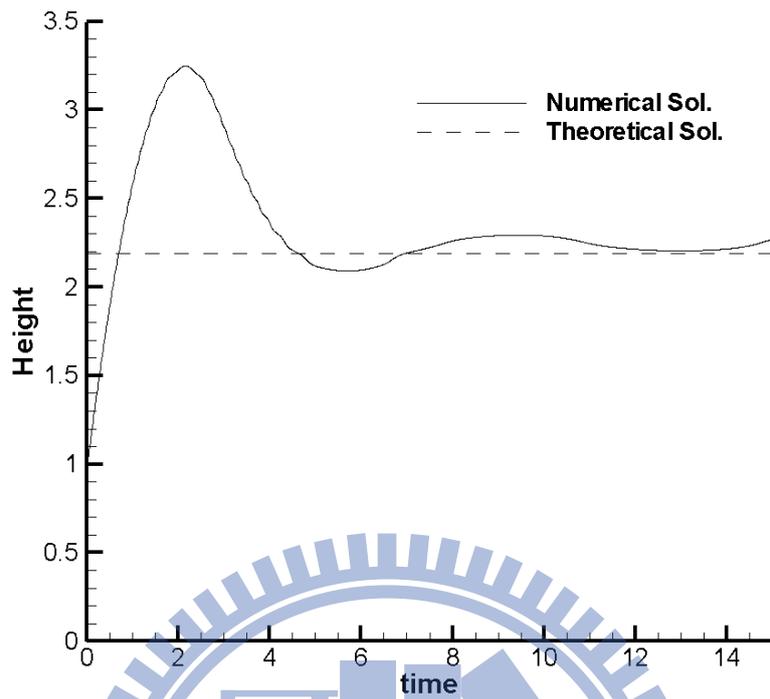
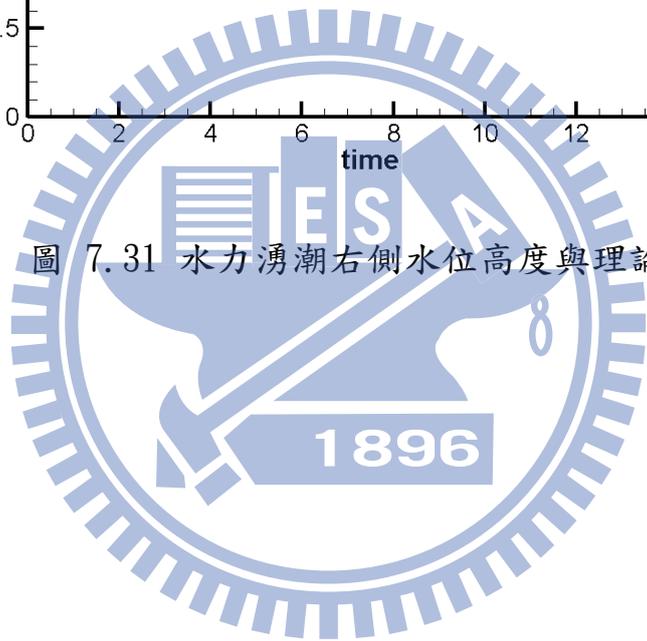


圖 7.31 水力湧潮右側水位高度與理論解



第八章 CISIT 法之驗證與雙流體流場之應用

8.1 簡介

前章已經將比較適用於自由表面流計算所使用的通量限制混合法做分析與應用，本章將針對文中所提出的第二種較適合處理兩相流流場計算的守恆內差介面追蹤法(CISIT)來進行分析。首先，將採用與上一章所選用的前兩個基本測試問題，來分析介面守恆追蹤法在純粹介面傳輸與拉伸的問題中所能夠達到的精準度。再藉由二維壩體潰堤的問題，來進一步結合 CISIT 法與本文所用以計算動量方程式的方法，同時說明介面追蹤法在與速度場連結時，由於介面處密度或是黏滯性的不連續性，因此必須透過本文第四章所提出的平均平滑化的處理方式來解決計算上所遭遇的不穩定性問題。最後將針對兩組常見的雙流體流場之問題來加以驗證 CISIT 法之應用的廣泛性。本章節所要測試的問題如下：

- (1) 介面於均勻速度場中之傳輸
- (2) 介面於剪切流中之拉伸
- (3) 二維壩體潰堤之問題
- (4) 單一上升氣泡之問題
- (5) 雷利-泰勒不穩定性(Rayleigh-Taylor Instability)之問題

前兩組為擁有一理論解之問題，可以直接對本方法進行網格收斂性之分析，至於第五個問題則可將高解析度網格之結果視為理論解來做驗證。

8.2 介面於均勻速度場中之傳輸

如同前章所敘述，當介面在均勻且固定的速度場中傳輸時，理論上其介面形狀將不會有所改變，因此本節將透過這種流場的特性，在不同的網格數、庫倫數及速度場中，來針對 CISIT 法的效能與精度進行測試。

本節所選用來測試的介面形狀包含了一個長為 0.3 的正方形與直徑為 0.3 的圓形，並將兩者放置於大小為單位長度的正方形計算域內。兩組介面中心的初始位置在(0.25, 0.25)，並受到固定且均勻的速度場($\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$)而傳輸，開始由初始位置移動到相對於 $x=0.75$ 之位置上。

前章式(7.1)所定義的 L 誤差，在本節中同樣適用，因此本節用以計算誤差的方程式如下式：

$$E = \frac{\sum_i |\alpha_i^n \Delta V - \alpha_i^e \Delta V|}{\sum_i \alpha_i^i \Delta V} \quad (7.1)$$

而在本節用來控制時間步階大小所使用的庫倫數，其定義如式(6.2)，如下：

$$C_N = \frac{\sum \max(F_f, 0) \Delta t}{\Delta V} \quad (7.2)$$

依據上方之描述，以下將使用三組四邊形網格(分別為 50x50、100x100、200x200)分別在 45 度角的速度場($u,v)=(1,1)$)和水平的速度場($u,v)=(1,0)$)中，計算介面的傳輸與誤差分析，而對於三角形網格(總數為 1404、5620、22474(如圖 8.1)則選用在($u,v)=(1,1)$)之速度場中進行測試，而其所使用的庫倫數大小分別為 0.75、0.5、0.25 及 0.1。

首先探討在速度場為 $u=1$ $v=0$ 的情況下使用四邊形網格之結果。圖(8.2)

至(8.5)分別表示不同庫倫數下方形與圓形介面傳輸後之結果，圖中紅線表示介面所在的位置，其餘線條則代表所使用的網格。由圖中顯示圓形介面隨著網格加密或是庫倫數下降，可改善介面變形的情况。而方形介面在使用網格 200x200 進行計算時，不管庫倫數的大小都可以維持相當好的介面形狀。至於網格 50x50 的結果中顯示介面在低庫倫數下會在角落上產生輕微的變形，然而此變形卻隨著庫倫數的提高而逐漸消失，這與圓形介面的情况有所差異。

圖 8.14 表示在此速度場中，介面於不同庫倫數下傳輸後所產生的誤差與網格密度的關係圖，而其誤差詳細的數值和收斂速度可見表 1。由圖 8.14 顯示圓形介面的誤差大致上隨網格加密而下降，而方形介面的誤差在相同的條件下都比圓形介面小。表 1 中更顯示方形介面的收斂速度可達到二階的精度，遠遠大於只有一階精度的圓形介面。這種情况起因於方形介面在此種速度場的條件下將成為一個一維的流動，其透過有限體積法離散後所產生的誤差正好為二階精度，並且此種近似於一維波動方程式的流動形態，在庫倫數趨近於 1 時會達到理論解，這也就是前段所敘述的方形介面隨庫倫數上升會使角落介面變形消失的主要原因。

圖 8.6 至 8.9 顯示兩種介面在 $u=1$ $v=1$ 下之結果，而圖 8.15 則表示誤差與網格密度關係圖，其誤差與收斂速度則列在表二之中。由介面分布的圖形可清楚看出，雖然在網格 50x50 與 $C_N > 0.5$ 的情況下介面容易產生變

形，但是隨著網格密度的逐漸增加以及庫倫數的下降都可以提高維持介面形狀的效能。

根據表二所列出誤差與網格大小的收斂速度可知本方法大致上可以維持在一階精度左右，這與 CISIT 法中用以估計濕潤區域所通過的流體 1 體積的方式有關，其方式是在一個時間步階內透過面上速度與濕潤區域的面積之乘積來近似在此面上所通過的流體 1 之體積 ($\Delta V_1 = \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f^w \Delta t$)，這方式與一般 PLIC 法經由積分整個重建後的介面形狀有所不同。

比較圖 8.15(a)和(b)可發現圓形介面所產生的誤差都比方形介面低，這個現象可由介面傳輸最後所得到的圖形來加以分析。在圖 8.7 與 8.9 中，可看出方形介面不管是在 $C_N = 0.5$ 或 $C_N = 0.1$ 的情況下，其左上角以及右下角都會因為其斜率的不連續性而產生其大的誤差而產生了波浪狀的介面，此現象也就是造成方形介面之結果的準確性較差之原因，另外也可發現透過庫倫數的下降可改善此角落處所帶來之影響。雖然圓形介面並沒有斜率如此不連續的地方發生，但是庫倫數較大的時還是會產生不甚平滑的介面形狀(如圖 8.6 和 8.7)。

至於圖 8.10 到 8.13 則分別表示在速度場 $u=1$ $v=1$ 中使用三角網格計算之結果，從圖中也可看出網格數加密能改善介面產生變形之情況，但是庫倫數下降則沒有太明顯的改變，這種情況也可在誤差與網格的關係圖中發現(如圖 8.16)，這應該是因為前章所提過在三角網格中的均勻速度場，其

庫倫數並不是定值所導致。而表三也顯示本方法在使用三角網格計算時，其隨網格大小的收斂速度也可達至一階精度左右。

總而言之，CISIT 法在介面於均勻速度場傳輸的問題中，透過網格密度的增加或是時間步階的縮小(庫倫數下降)皆可提高本方法對於介面追蹤的準確性，並且隨網格大小收斂的速度也都可達到一階精度左右。至於透過在此傳輸問題中使用三角網格所獲得的結果也顯示本方法可有效地應用在不規則形狀的網格之中，這優勢有利於 CISIT 法在幾何形狀較為複雜的問題上所使用。



8.3 介面於剪切流中之拉伸

在剪切流之中，流場沿介面的切線方向會存在相當大的速度梯度，此舉不僅會使介面因為拉伸產生破裂或是變形而且在執行 CISIT 法時常會發生第四章所提到的填充不足(under-filling)與耗竭不足(under-depleted)之現象必須透過對體積分率之修正來改善此類型的問題。因此在本節中，將採上前一章所假設的逆時針旋轉之速度分布來測試 CISIT 法在剪切流之中的性能，其速度隨位置的分布如下：

$$\vec{V} = \sin x \cdot \cos y \vec{i} - \cos x \cdot \sin y \vec{j} \quad (7.3)$$

所採用的計算域也是長度 π 為的正方形區域，並在 $(\pi/2, (1+\pi)/5)$ 的位置上放置一個直徑為 0.4π 的圓形介面，而不同於前章所採用的計算時間，本節只針對 $N=16$ 來進行測試，亦即逆時針旋轉 16 個單位時間在順時針旋轉同樣的時間而回到初始的位置上，至於本節所使用時間步階則是以整個計算域中最大庫倫數不超過 0.1 為基準。以下將分別對四邊形及三角形網格之結果與誤差作分析。

圖 8.17 分別代表在網格為 50×50 、 100×100 、 200×200 及 300×300 之結果，而其誤差與網格數相關的圖形與表，如圖 8.19 和表四。由介面分布的情況可發現，介面隨時間逐漸被拉伸而成一個蛇狀的分布，最後又以相反的速度順時針旋轉回到最初的形狀。然而圖 8.17 顯示在使用網格 50×50 時，其蛇狀介面的尾端會變短許多且因為部份介面產生破碎而使其與主體

分離，此現象進一步使得之後順時針旋轉所得到的介面無法維持圓形，由圖中可明顯看出其介面呈現相當不規則。當網格的解析度開始提高時，可發現上述蛇狀尾端所發生的情況將會逐步的改善。此外在使用 100x100 的網格時，介面計算完成後其右下角處可以會發現有不平滑之波浪狀介面產生，此問題在使用 300x300 的網格時將明顯地紓解。至於隨網格大小之收斂速度，由表四可知在四邊形網格中除了網格 50x50 因其結果失真而導致收斂速度到達二階精度以外，其於條件下皆有一階以上。

比較圖(8.19)與(8.20)可知三角形網格的結果不若四邊形之精確，由表四中也可發現，但其收斂精度也可達到一階以上。而圖 8.18 則顯示三角網格中介面旋轉後之結果，其結果顯示網格密度較低時，其蛇狀尾部將會變短且最後所得的介面形狀也會產生扭曲，此狀況如同四邊形網格一般可透過網格密度的提高來改善。

將本節與上章使用 FBICS 法之結果比較，可發現 CISIT 法在低庫倫數及高密度的網格下，可獲得比 FBICS 法更佳之介面形狀並且可避免在離散對流項所產生的數值擴散問題。

8.4 二維壩體潰堤

前兩節透過兩種以之速度場之問題，已經對 CISIT 的介面追蹤法做了基本的性能測試與誤差分析。本節同樣將採前章所介紹的二維壩體潰堤問題，來分析 CISIT 法與動量方程式結合後在實際流場模擬上的準確性。在此所使用的物理模型如同 7.4 小節所描述，是將高寬分別為 0.292m 與 0.146m 的水柱，放置於 0.584m*0.340m 得長方形水槽內並考慮重力 ($g=9.8$) 的影響來使水柱產生潰堤的流動現象(如圖 7.18)。在本問題中所使用的網格為 60x35 及 120x70 的四邊形網格，而所考慮的流體分別為水和空氣。由於水和空氣的密度比接近 1000 左右，因此介面兩側的密度差極大，此密度差將造成數值計算上的極度不穩定，為了解決此種不穩定的問題，在此將導入 4.6 節所提出的平滑化處理來改善。以下將針對不同網格及平滑化一次和兩次之結果作詳細的討論。

圖 8.21 和 8.22 分別顯示在網格為 60x35 下平滑化 1 次與 2 次之介面位置與速度分布的結果。以 $t=0.2$ 秒為例比較兩張圖之結果可發現，當只採用平滑化處理 1 次時，位於介面附近的空氣相當不穩定導致速度發生不規則的擾動，圖中更清楚地顯示介面兩側的速度場是相當混亂且複雜，而在整個水槽的左側處更出現了次渦流，這些現象都導致整體計算上的穩定度大大的降低。至於在平滑化 2 次之後的結果中，這些介面不穩定以及震盪的現象都將大大的改善。圖 8.23 和 8.24 則分別表示在網格為 120x70 之結

果，比較後發現同樣的問題也會發生在一次平滑處理之中，而經由兩次平滑化之後可獲得比較穩定的速度場與介面分布。

將兩種不同網格及平滑化次數之底部前端位置與右側水位高度隨時間變化之結果與前章所提到的實驗數據[73]作比較，如圖(8.25)和(8.26)所示。圖(8.25)顯示所計算出的水槽底部水流前端之結果都比實驗稍快，起因於實驗上無法確實量測前端的位置所致，這結果與上一章所說明的情況雷同。至於圖(8.26)中，在平滑化兩次之後所得到的左側水柱高度都與實驗結果相當接近，然而在只做一次平滑處理的結果中可發現其水位高度有隨時間震盪的現象，此現象與前段所描敘因流場不穩定而產生的次渦流有關。

經由本問題的分析與探討可知使用 CISIT 法與動量方程式結合時，由於 CISIT 法所得到的介面佔有一個網格的大小，因此在高密度比的問題中，若不作平滑化處理將使介面處流體性質極度不連續而導致整個流場不穩定性上升，進而影響了整個雙流體流場之模擬結果。基於上述的原因，本文在使用 CISIT 法來模擬實際雙流體的問題時，都將採用兩次平滑化的處理方式來維持整套數值方法之穩定性。

8.5 單一上升氣泡 (Single Rising Bubble)

本節將使用 CISIT 的計算方法來模擬單一氣泡於靜止的液體中上升之行為。Grace[77]統合了許多與單一上升氣泡有關的實驗數據，並且根據相關流體的物理性質與終端速度(terminal velocity)，推導出靜止液體中單一上升氣泡問題與以下五個無因次參數有關：

$$\begin{aligned} Eo &= \frac{gd_e^2(\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \\ Mo &= \frac{g\mu_l^4}{\rho_l\sigma^3} \\ \kappa &= \frac{\mu_l}{\mu_g} \\ \gamma &= \frac{\rho_l}{\rho_g} \\ Re &= \frac{\rho_l d_e U}{\mu_l} \end{aligned} \tag{8.1}$$

其中 d_e 表示初始氣泡的直徑，下標 l 和 g 分別表示液體與氣體。 Eo 表示 Eovots 數、 Mo 表示 Morton 數、 κ 表示黏性比、 γ 表示密度比。此處 U 為上升氣泡的終端速度，而其雷諾數以液體性質來與初始氣泡直徑和終端速度來定義。Grace 根據上述的資料，將整個上升氣泡的行為繪製成 Eo 、 Mo 和 Re 的關係圖(如圖 8.27)，其並在圖中將氣泡上升後的形狀分為三大區塊包含球形(spherical bubble)、橢圓形(ellipsoidal bubble)以及圓帽形(spherical-cap bubble)。以下將針對上述的無因次參數來進行上升氣泡的模擬並且透過 Grace 所提供的圖形來作詳細的分析比對。

本文選用初始氣泡的大小為直徑 0.01m 的圓且置於寬高分別為 0.05m 和

0.15m 方型的靜止流體內，而初始氣泡則在(0.025m, 0.02m) 的位置上。所使用的網格為 100x300，而方形區域的四面為滑移牆邊界條件。根據上述的無因次參數，本為所測試的三個問題皆將密度比與黏性比固定為 1000($\gamma=1000, \kappa=1000$)，而根據所選用的表面張力可知三個問題中所對應的 Eotvos 和 Morton 數分別為 $Eo=1, Mo=0.001$ 、 $Eo=10, Mo=1$ 以及 $Eo=100, Mo=1000$ 。

圖 8.28 至 8.30 分別表示上升氣泡隨時間介面與速度場的演進之情形，而圖 8.31 則是氣泡形狀在 $t=0.5$ 秒的局部放大圖。三組測試問題隨著 Eotvos 和 Morton 數的變大意味著表面張力逐漸變小，而表面張力對於氣泡的作用是在上升過程中使氣泡達至最小的面積，因此在第一組表面張力較大的測試中，由圖 8.31 可知氣泡形狀幾乎維持球形的狀態。隨著 Eotvos 數逐漸加大，可由第二組測試中發現球形的氣泡已經逐漸變成橢圓形，到了第三個測試問題，由於表面張力相對的小，因此氣泡已經無法維持其外形而成為所謂的圓帽形之氣泡。上述三組無因次參數下所獲得的氣泡形狀與圖 8.27 所歸納之結果相當吻合。

圖 8.32 則顯示氣泡中心高度隨時間變化之關係圖。由圖可知氣泡起初一小段時間內以較低的速度上升，之後馬上加快上升速度，最後因黏滯力、表面張力及浮力的交互作用下，其速度會達到一定值，此速度即為上述所提過的終端速度。三組條件下所獲得的氣泡終端速度分別為 0.165、0.122、

0.115，而其相對所得到的雷諾數則分別為 2.981、2.188、2.073。隨著 Eotvos 數的上升意味著表面張力逐漸變小而使氣泡開始產生變形，因此氣泡將因為其外型而導致產生越來越大的形狀阻力(form drag)，此阻力將使的氣泡的終端速度逐漸變慢。至於所得到的雷諾數與圖 8.27 作比較，可知本計算結果稍大於實驗結果但相去不遠，其誤差產生的原因有二，一者歸因於二維數值模擬中表面張力估算上將會與三維有所差異，而另一者則是模擬所選用的密度比和黏滯係數比與實驗不盡相同所導致。



8.6 雷利-泰勒不穩定性之問題

雙流體流場的數值方法由於必須結合介面與動量方程式的計算，因此介面計算所產生誤差勢必影響動量方程式之結果。而 CISIT 法之雙流體模型中，是經由體積分率來控制動量方程式中所使用的密度分佈，因此 CISIT 法之誤差將直接影響整體速度及壓力之結果，故要驗證本方法在實際流場應用的準確性，可藉由因密度差驅使(density-driven)流體產生攪動之雷利-泰勒不穩定性(Rayleigh-Taylor instability)問題來達成。

其所考慮的物理模型為 1x3 大小的長方形容器，初始介面位於

$$y=2+0.02 \cos[(1+x)\pi] \quad (8.2)$$

上式為半個餘弦擾動，其振幅為 0.02 且波長為 2。初始介面上的半部充滿密度較大之流體($\rho=1.2$)，下半部則為另一種流體($\rho=1.0$)。在本問題中，僅考慮體積分率分布對密度之影響(如式 4.10)而不考慮黏滯係數(式 4.11)，至於外力項僅考慮重力而不考慮表面張力之影響，因此在動量方程式計算上設定福祿數($Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$)為 0.5 來決定重力加速度之大小並考慮兩流體的黏性相同，根據雷諾數為 500($Re = \frac{\rho UL}{\mu}$)來決定兩流體之黏滯係數。在邊界條件的設定上，除了左側牆面為對稱邊界外，其餘的邊界都為無滑移牆。而所選用的網格包含三組不同解析度之四邊形網格：48x144、96x288、192x576，且考慮整個計算過程中最大庫倫數不超過 0.1 以決定時階步階之大小。由於本問題的速度場是隨時間受體積分率所影響而成一個動態分

布，因此並無確切的理論解，故本文在此考慮 192x576 解析度下的結果為理論解來分析 CISIT 法與動量方程式結合後之誤差與收斂速度。

圖 8.33 至 8.35 分別表示在時間 8 秒內，使用不同網格所得到介面分布隨時間變化之情形。圖中顯示初期因介面擾動使流體結構相當不穩定，而流體受到重力作用下，左側密度較大的流體開始往另一流體中延伸並且在介面處發展成主要回流(t=4 秒)。隨時間的推進，左側下沉之流體開始向上捲曲(t=5 秒)，而在 t=6 秒時可發現左側發生了二次捲曲且右上角處開始產生次要回流，到了 t=8 秒密度較大之流體繼續向回流中心延伸並且在左上角區域開始產生第三個回流。初期介面分布的情形，在三組網格之中大致相同，但當次要回流產生之後可清楚發現，採用的網格解析度較低時，其捲曲的現象較不明顯。其誤差與網格收斂速度列於表五之中，由表中可發現其誤差隨著計算時間拉長而逐漸提高，而由收斂速度觀察可知其精度也是隨著計算時間拉長而下降，但其精度仍然可維持在一階以上。

Square $u=1$ $v=0$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Rec. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
50x50	2.0E-3	/	4.8E-3	/	7.2E-3	/	6.9E-3	/
100x100	5.0E-4	2.0	1.2E-3	2.0	1.8E-3	2.0	1.7E-3	2.0
200x200	1.2E-4	2.0	3.0E-4	2.0	4.6E-4	2.0	4.2E-4	2.0

Circle $u=1$ $v=0$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Rec. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
50x50	2.0E-2	/	1.7E-2	/	1.1E-2	/	1.2E-2	/
100x100	1.4E-2	0.5	6.7E-3	1.3	5.2E-3	1.1	3.5E-3	1.8
200x200	1.3E-2	0.1	4.4E-3	0.6	2.8E-3	0.9	1.4E-3	1.3

表一 介面傳輸之 L^1 誤差與網格收斂速度表(四邊形網格 $u=1$ $v=0$)

Square $u=1$ $v=1$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Rec. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
50x50	1.5E-1	/	1.1E-1	/	8.6E-2	/	6.3E-2	/
100x100	8.9E-2	0.8	5.2E-2	1.1	3.4E-2	1.3	2.6E-2	1.3
200x200	5.2E-2	0.7	2.5E-2	1.1	1.4E-2	1.3	1.0E-2	1.4

Circle $u=1$ $v=1$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Rec. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
50x50	1.1E-1	/	7.5E-2	/	4.8E-2	/	4.0E-2	/
100x100	6.3E-2	0.8	4.3E-2	0.8	2.3E-2	1.1	1.1E-2	1.9
200x200	4.3E-2	0.6	2.6E-2	0.7	1.4E-2	0.7	6.3E-3	0.8

表二 介面傳輸之 L^1 誤差與網格收斂速度表(四邊形網格 $u=1$ $v=1$)

Square $u=1 \ v=1$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Tri. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
1404	1.4E-1	/	1.3E-1	/	1.4E-1	/	1.5E-1	/
5620	9.1E-2	0.6	7.8E-2	0.7	7.7E-2	0.9	7.8E-2	0.9
22474	4.8E-2	0.9	3.8E-2	1.0	3.5E-2	1.1	3.6E-2	1.1
Circle $u=1 \ v=1$								
$C_N = 0.75$		$C_N = 0.5$		$C_N = 0.25$		$C_N = 0.1$		
Tri. Grids	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate	error	Conv. rate
1404	1.3E-1	/	1.1E-1	/	1.0E-1	/	1.1E-1	/
5620	5.9E-2	1.1	5.4E-2	1.0	5.4E-2	0.9	5.7E-2	0.9
22474	3.5E-2	0.8	2.8E-2	0.9	2.4E-2	1.2	2.4E-2	1.2

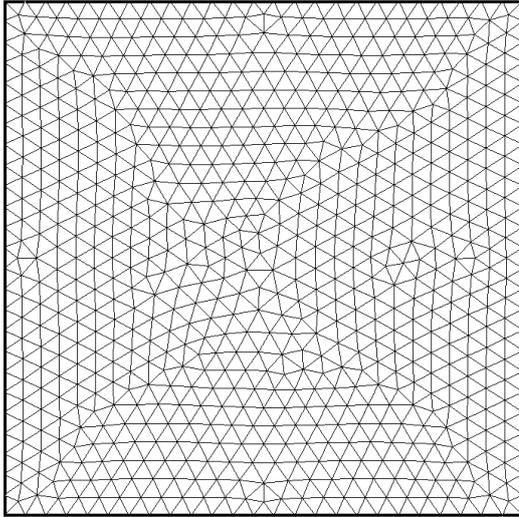
表三 介面傳輸之 L^1 誤差與網格收斂速度表(三角形網格 $u=1 \ v=1$)

Rec. Grids	error	Conv. rate	Tri. Grids	error	Conv. rate
50x50	1.3E-1	/	5626	3.5E-1	/
100x100	3.4E-2	1.9	22550	1.5E-1	1.2
200x200	1.4E-2	1.3	50658	7.9E-2	1.6
300x300	8.6E-3	1.2	89776	5.8E-2	1.1

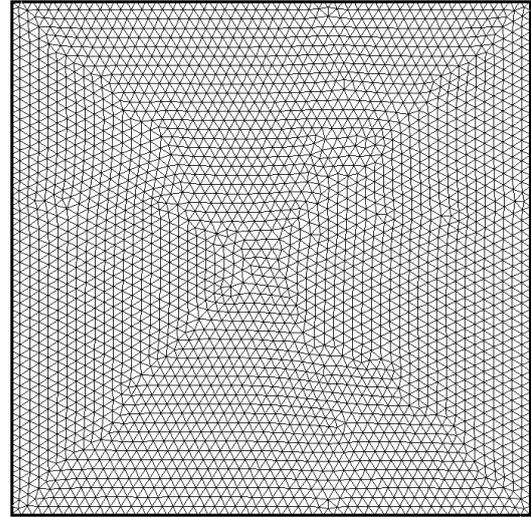
表四 介面於剪切流中之 L^1 誤差與網格收斂速度表

Grids	2 sec		4 sec		6 sec		8 sec	
	error	Conv. rate						
48x144	3.2E-3	/	2.1E-2	/	1.2E-1	/	3.4E-1	/
96x288	3.3E-4	3.3	5.2E-3	2.0	4.4E-2	1.4	1.6E-1	1.2

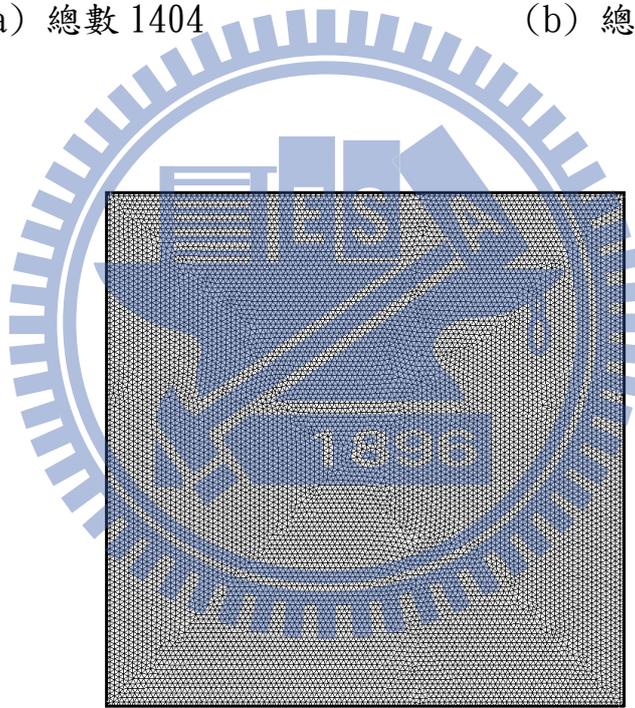
表五 雷利-泰勒不穩定性之 L^1 誤差與網格收斂速度表



(a) 總數 1404



(b) 總數 5620



(c) 總數 22474

圖 8.1 介面於均勻速度場中所使用的三角網格

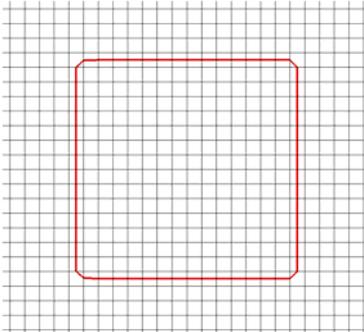
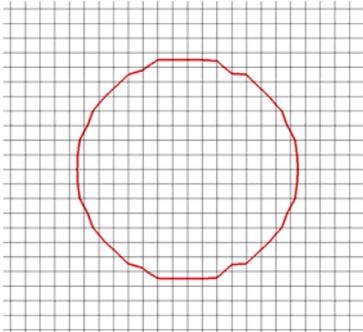
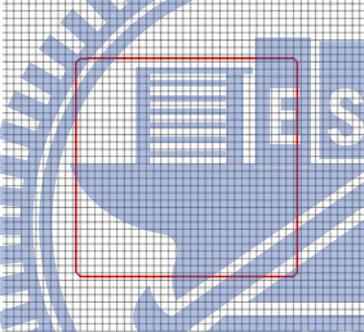
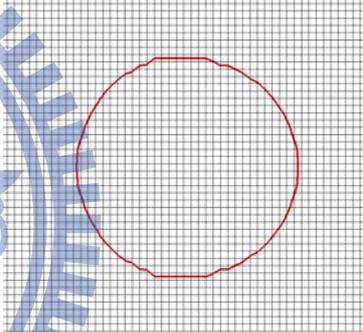
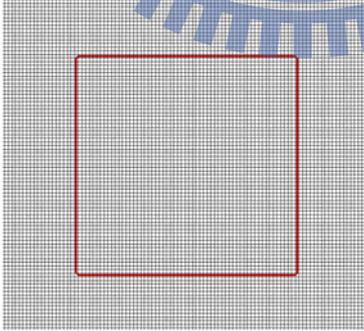
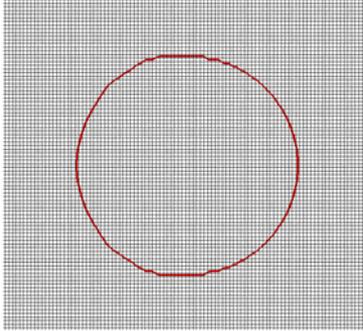
$u = 1 \quad v = 0 \quad C_N = 0.75$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.2 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.75$ ，四邊形網格)

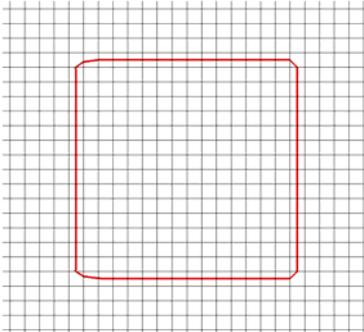
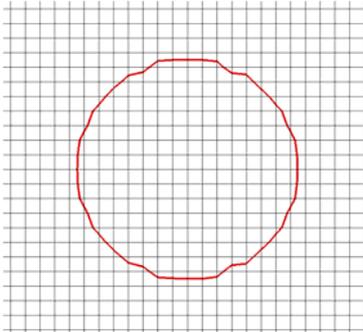
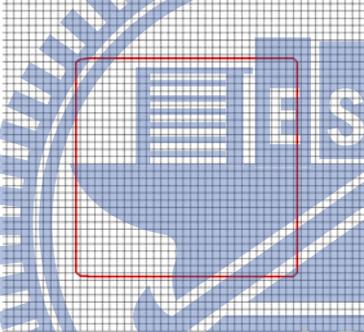
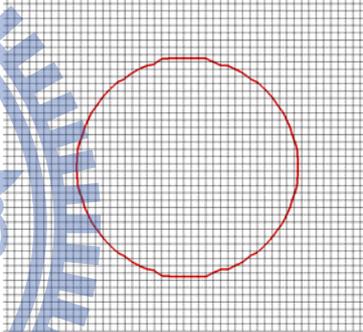
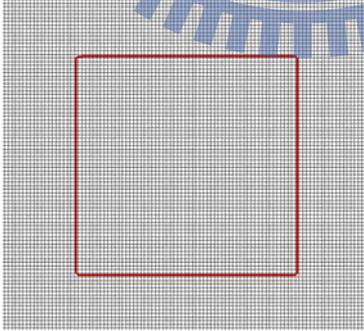
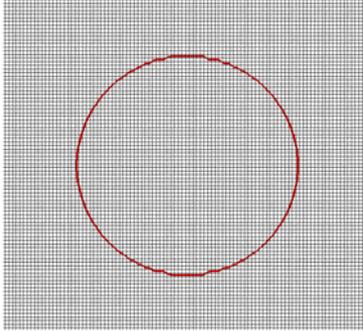
$u = 1 \quad v = 0 \quad C_N = 0.5$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.3 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.5$ ，四邊形網格)

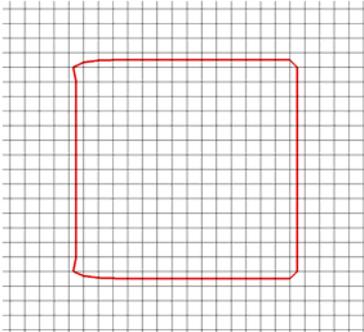
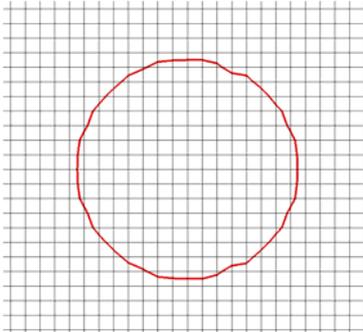
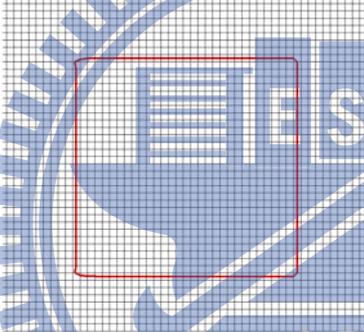
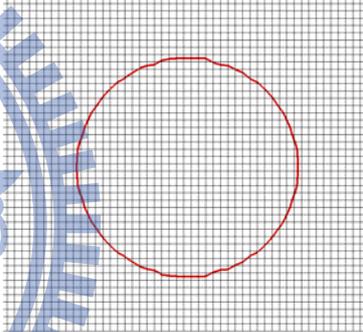
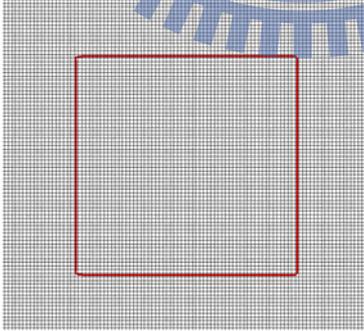
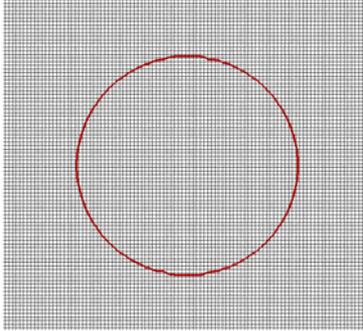
$u = 1 \quad v = 0 \quad C_N = 0.25$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.4 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.25$ ，四邊形網格)

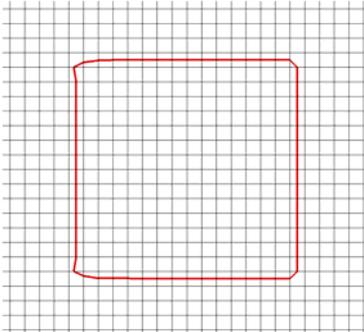
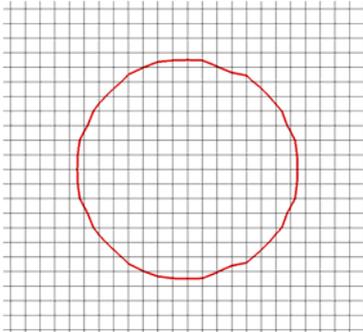
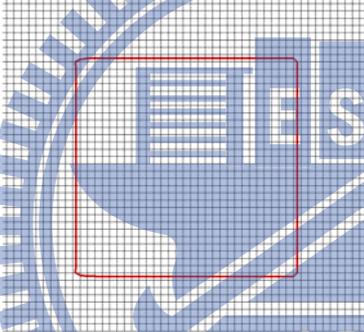
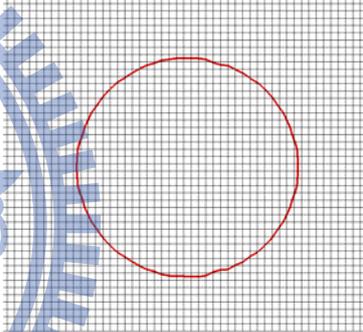
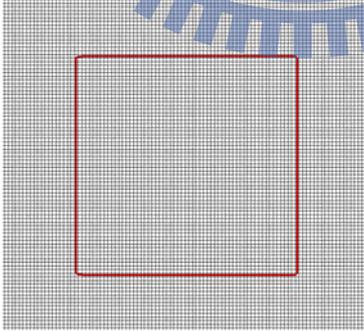
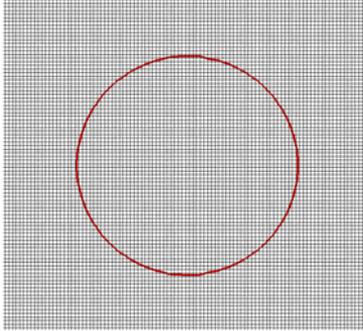
$u = 1 \quad v = 0 \quad C_N = 0.1$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.5 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=0, C_N=0.1$ ，四邊形網格)

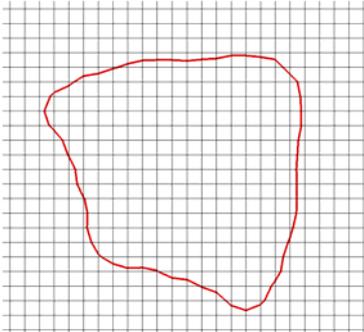
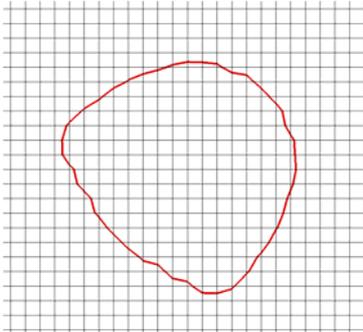
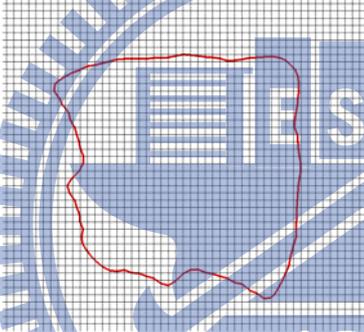
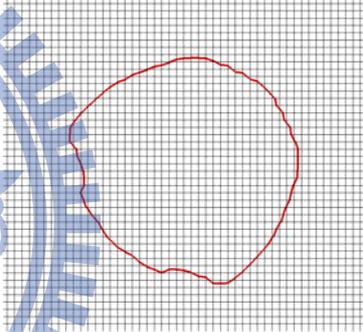
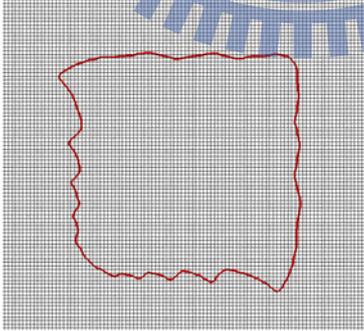
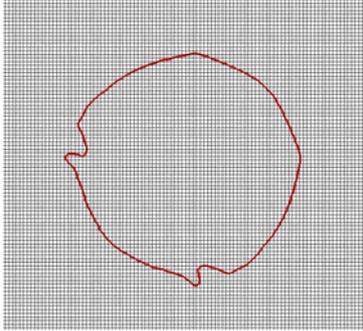
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.75$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.6 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.75$, 四邊形網格)

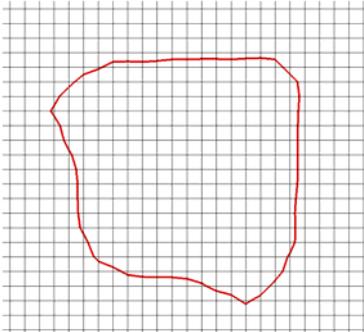
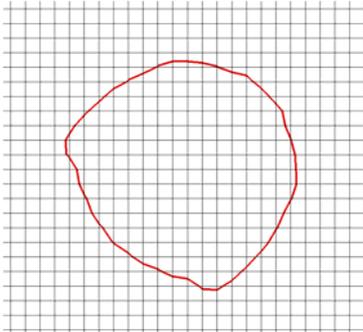
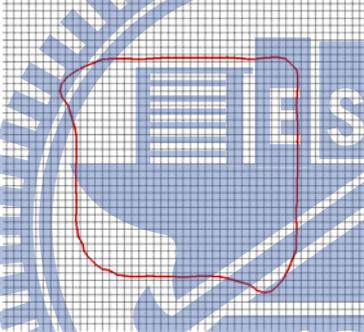
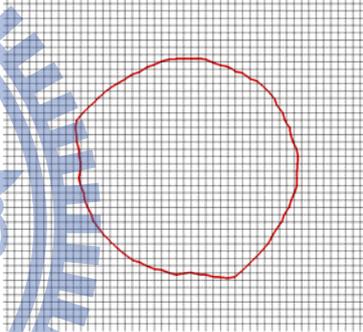
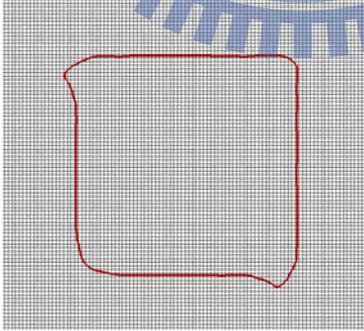
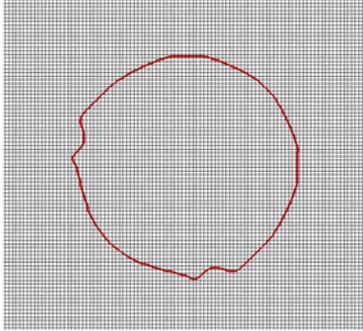
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.5$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.7 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.5$, 四邊形網格)

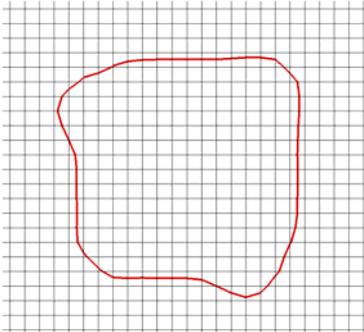
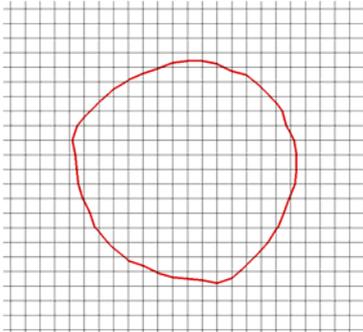
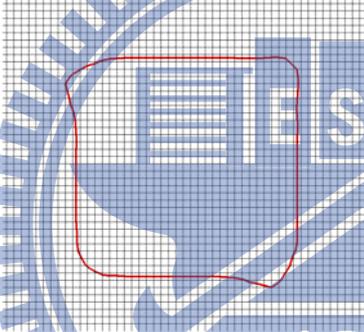
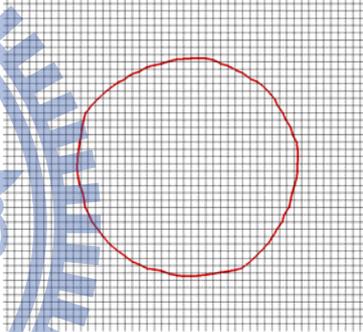
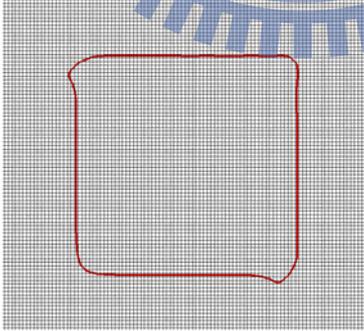
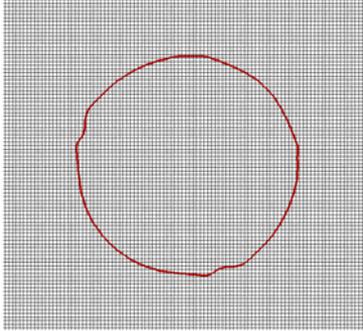
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.25$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.8 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.25$, 四邊形網格)

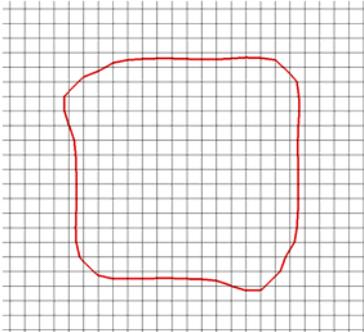
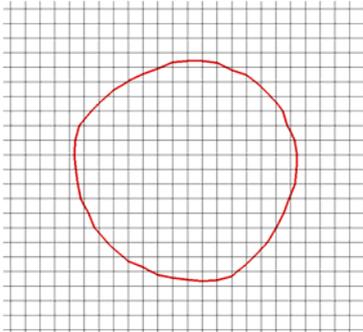
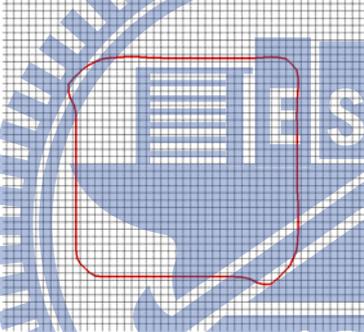
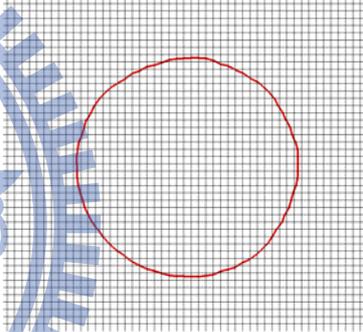
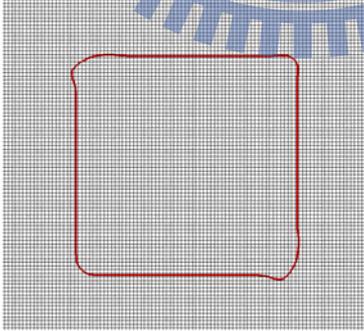
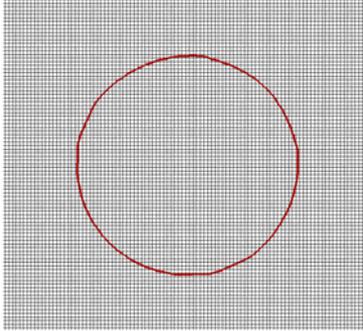
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.1$ (Rectangular mesh)		
Grids	Square	Circle
50x50		
100x100		
200x200		

圖 8.9 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.1$ ，四邊形網格)

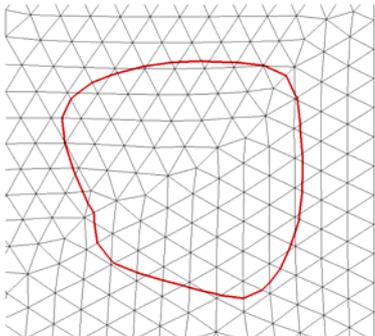
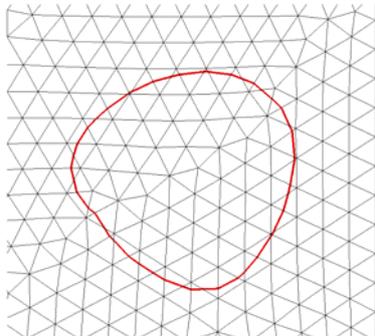
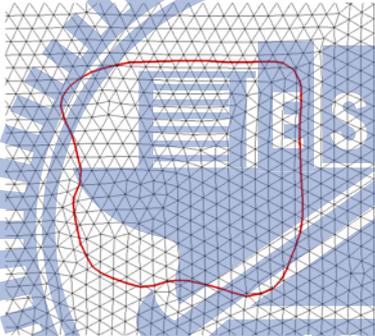
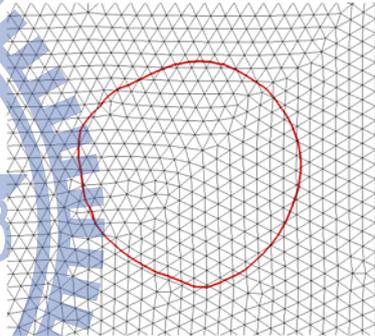
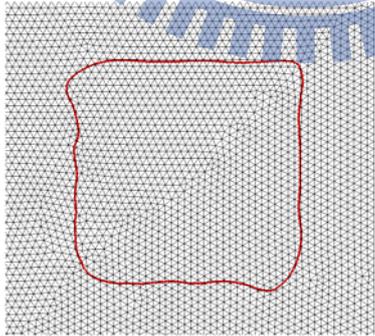
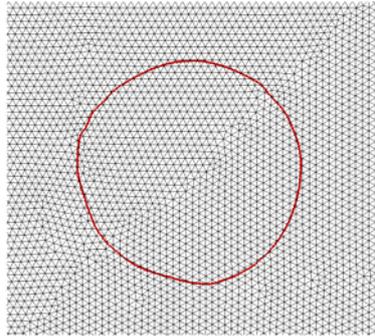
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.75$ (Triangular mesh)		
Grids	Square	Circle
1404		
5620		
22474		

圖 8.10 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.75$, 三角形網格)

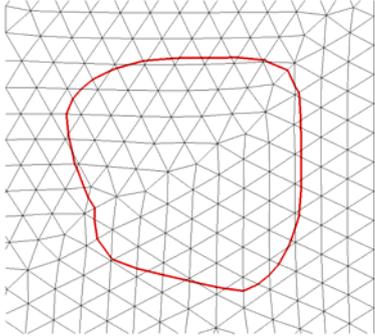
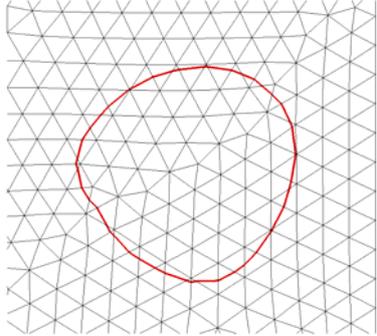
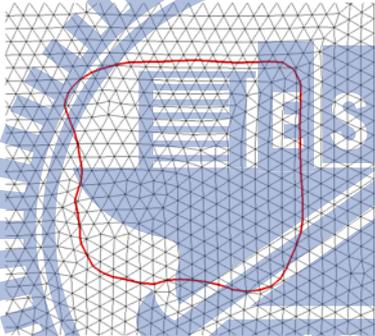
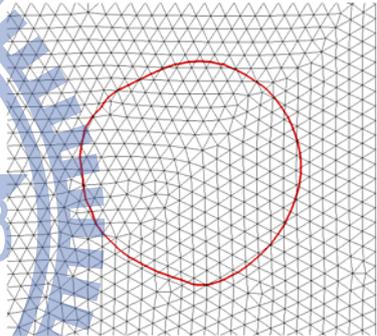
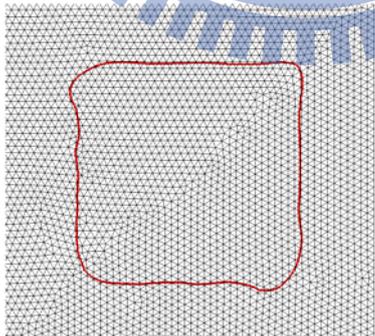
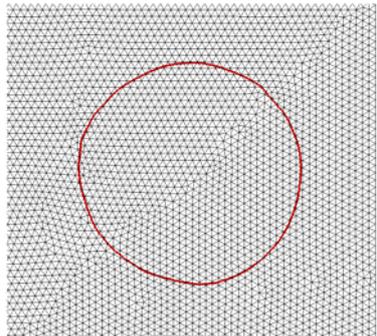
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.5$ (Triangular mesh)		
Grids	Square	Circle
1404		
5620		
22474		

圖 8.11 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.5$, 三角形網格)

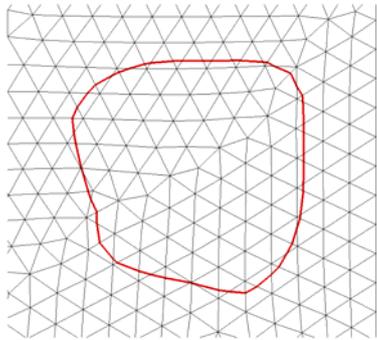
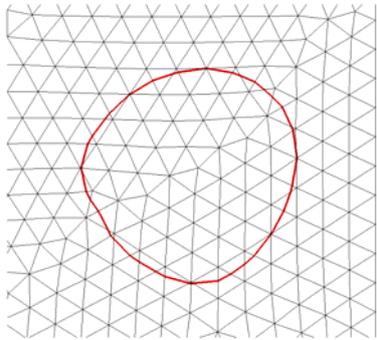
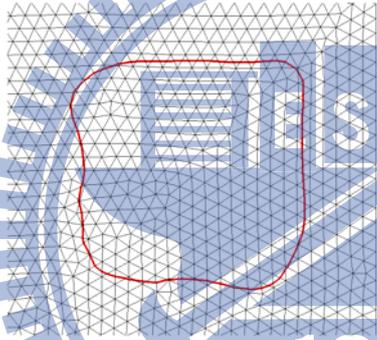
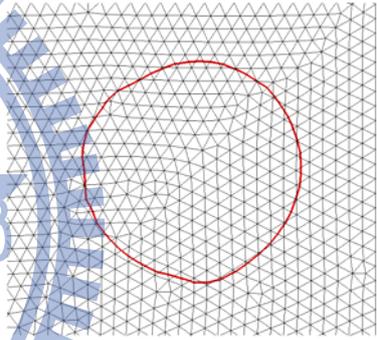
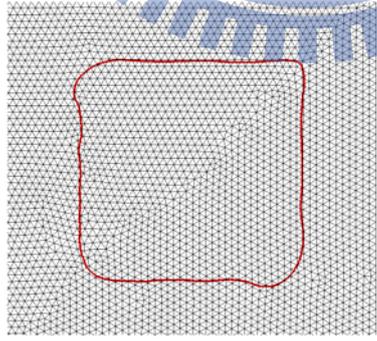
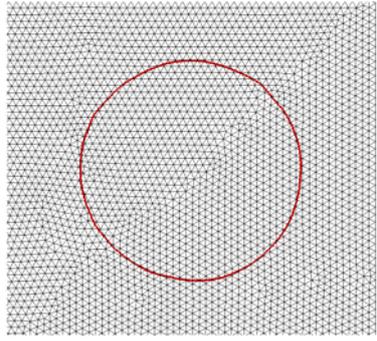
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.25$ (Triangular mesh)		
Grids	Square	Circle
1404		
5620		
22474		

圖 8.12 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.25$, 三角形網格)

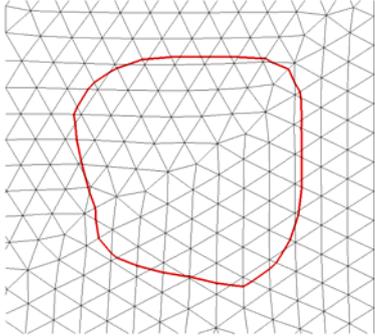
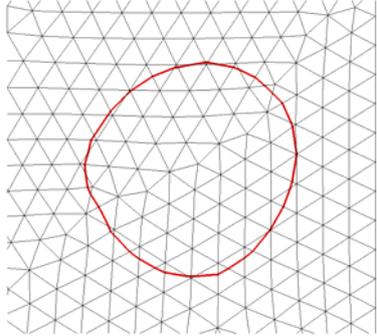
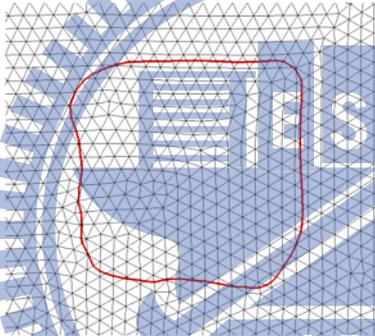
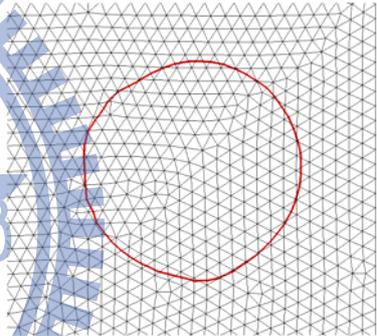
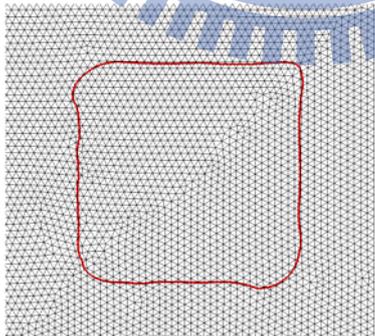
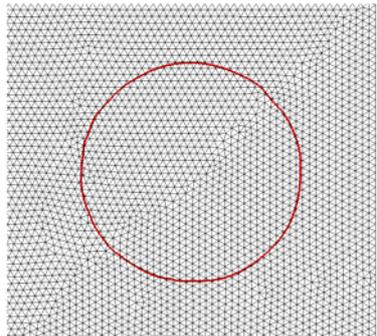
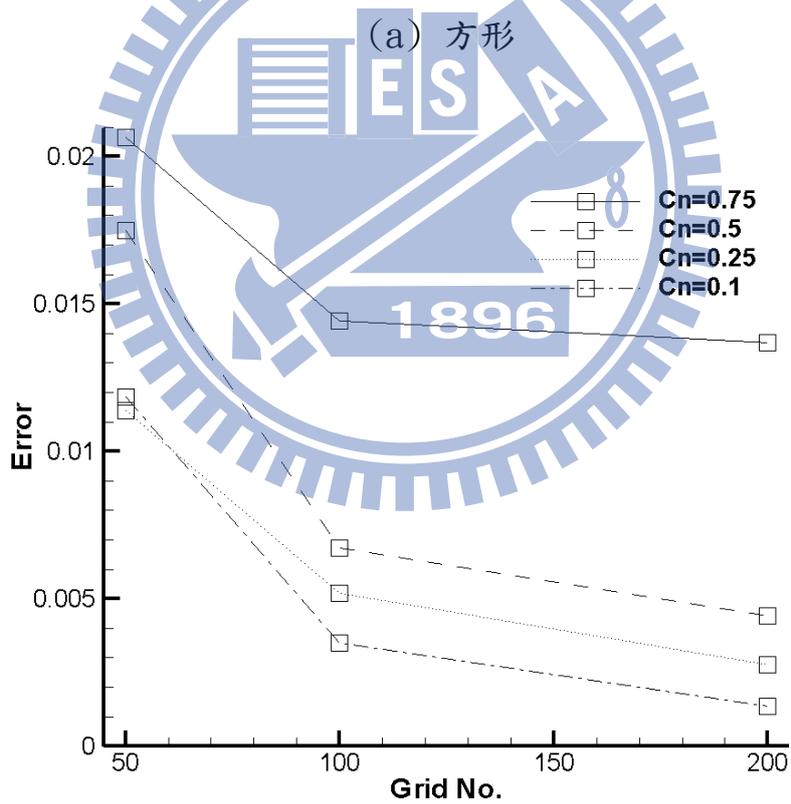
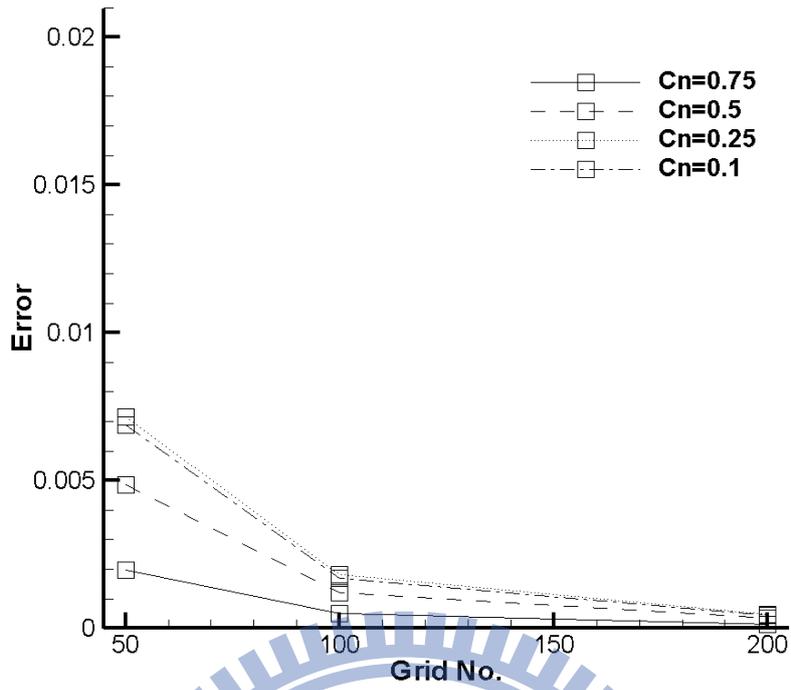
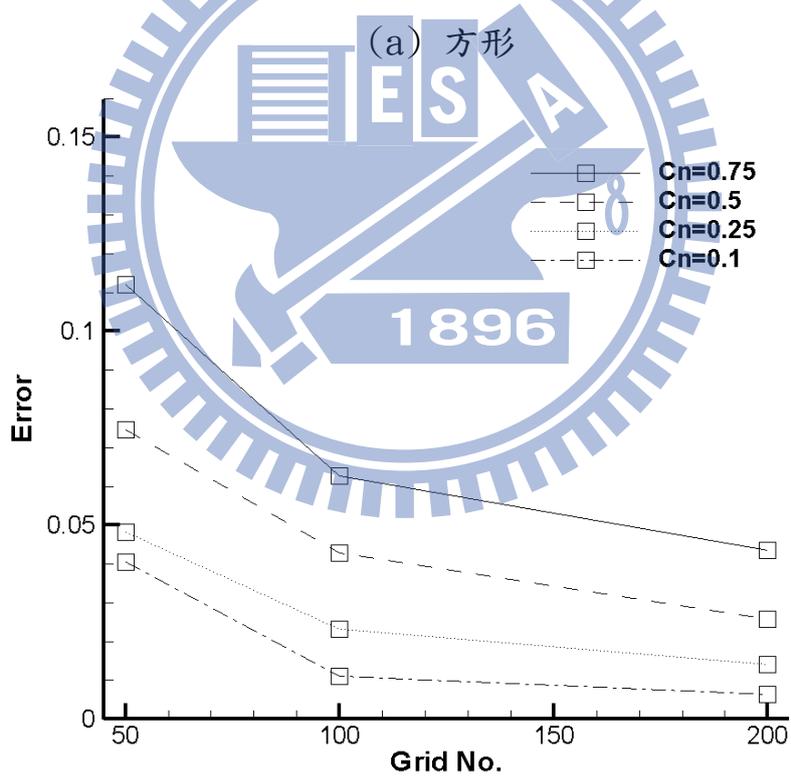
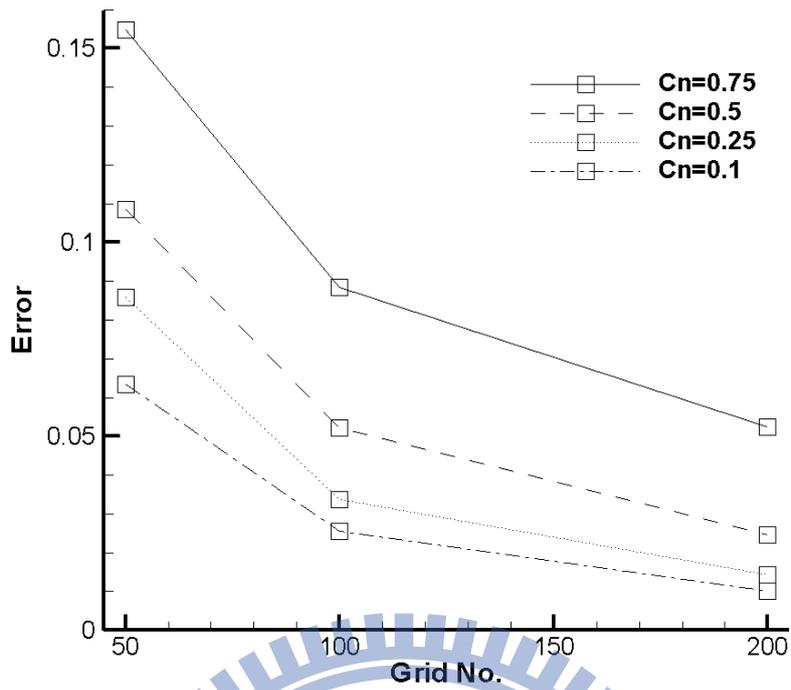
$u = 1 \quad v = 1 \quad C_N = 0.1$ (Triangular mesh)		
Grids	Square	Circle
1404		
5620		
22474		

圖 8.13 介面於均勻速度場中傳輸之結果 ($u=1, v=1, C_N=0.1$ ，三角形網格)



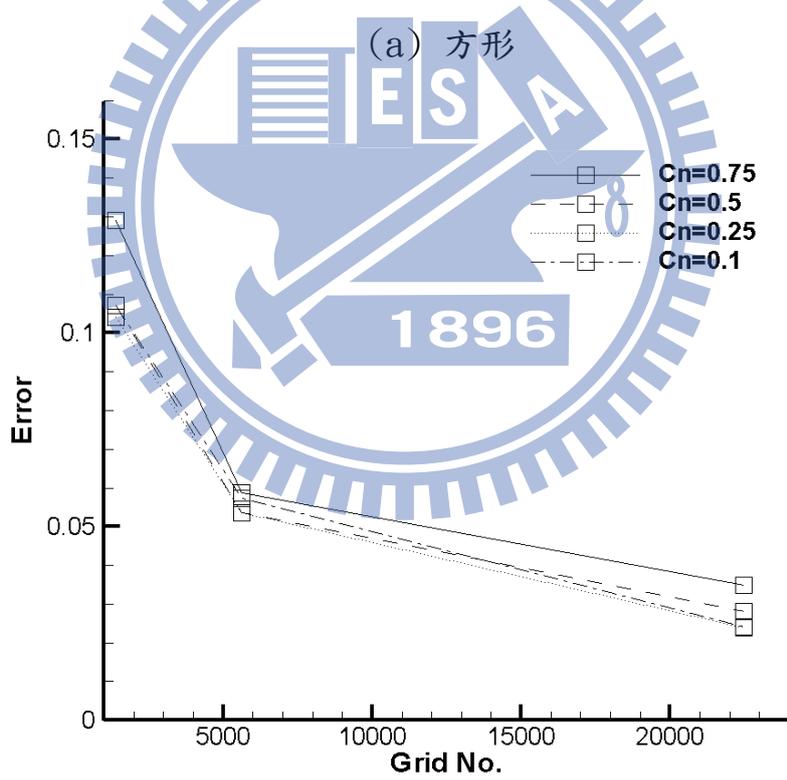
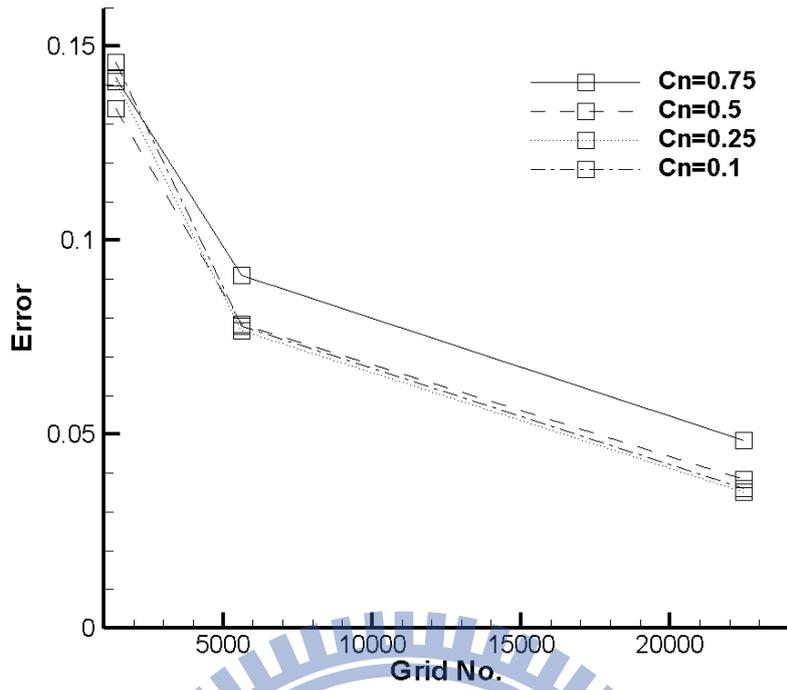
(b) 圓形

圖 8.14 介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖($u=1, v=0$, 四邊形網格)



(b) 圓形

圖 8.15 介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖 ($u=1, v=1$, 四邊形網格)



(b) 圓形

圖 8.16 介面傳輸之數值誤差與網格數目之關係圖 ($u=1, v=1$, 三角形網格)

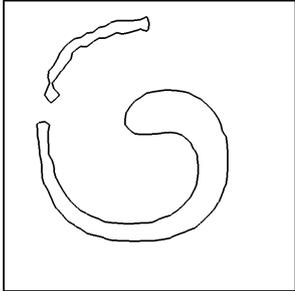
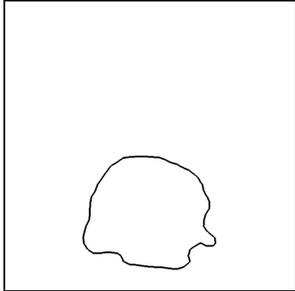
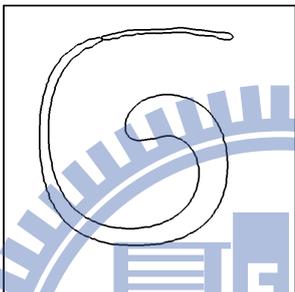
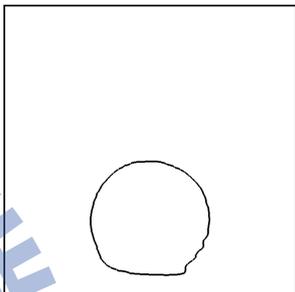
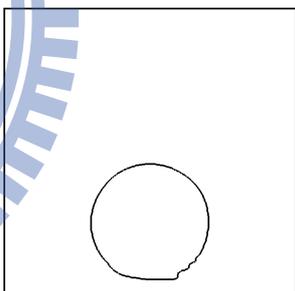
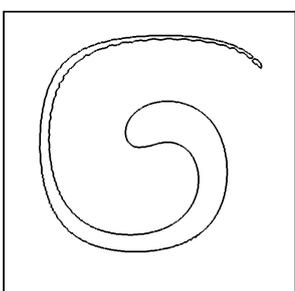
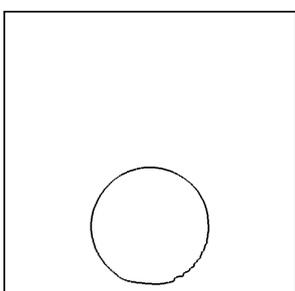
Rectangular grids		
Grids	Forward N=16	Backward N=16
50x50		
100x100		
200x200		
300x300		

圖 8.17 介面於剪切流中拉伸之結果(四邊形網格)

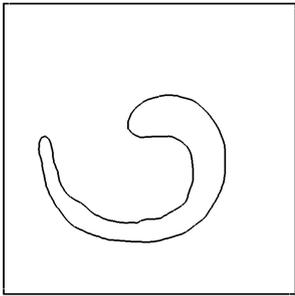
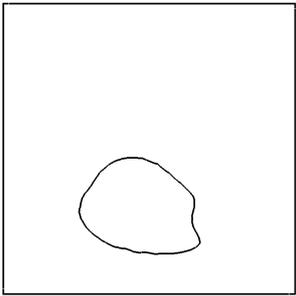
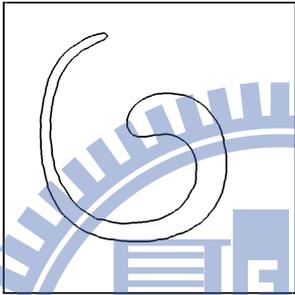
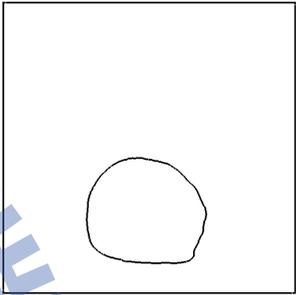
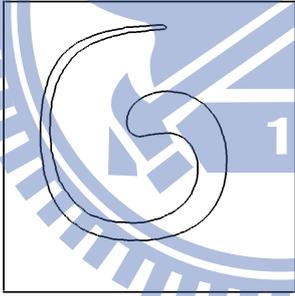
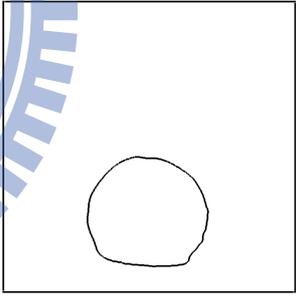
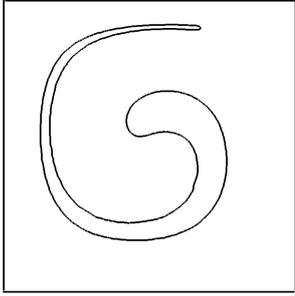
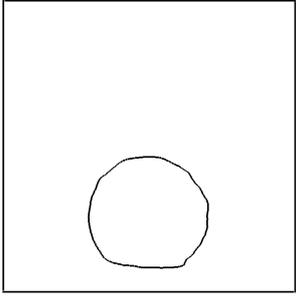
Triangular grids		
Grids	Forward N=16	Backward N=16
5626		
22550		
50658		
89776		

圖 8.18 介面於剪切流中拉伸之結果(三角形網格)

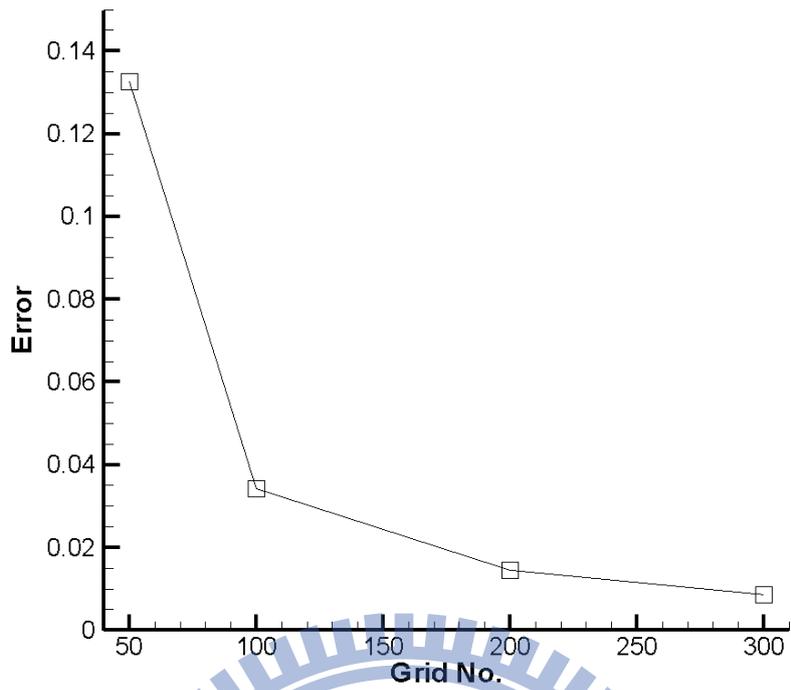


圖 8.19 介面於剪切流中誤差與網格數目之關係圖（四邊形網格）

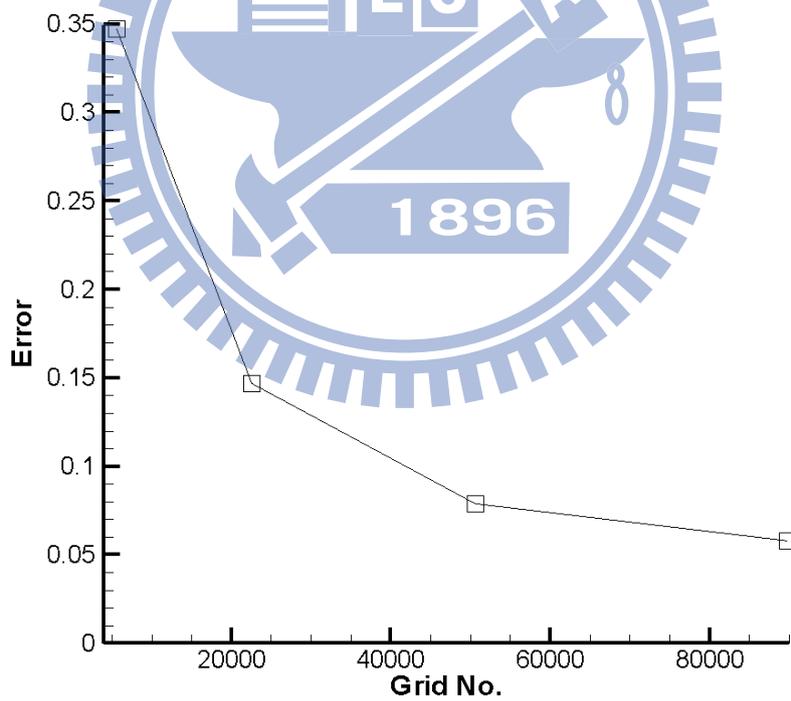


圖 8.20 介面於剪切流中誤差與網格數目之關係圖（三角形網格）

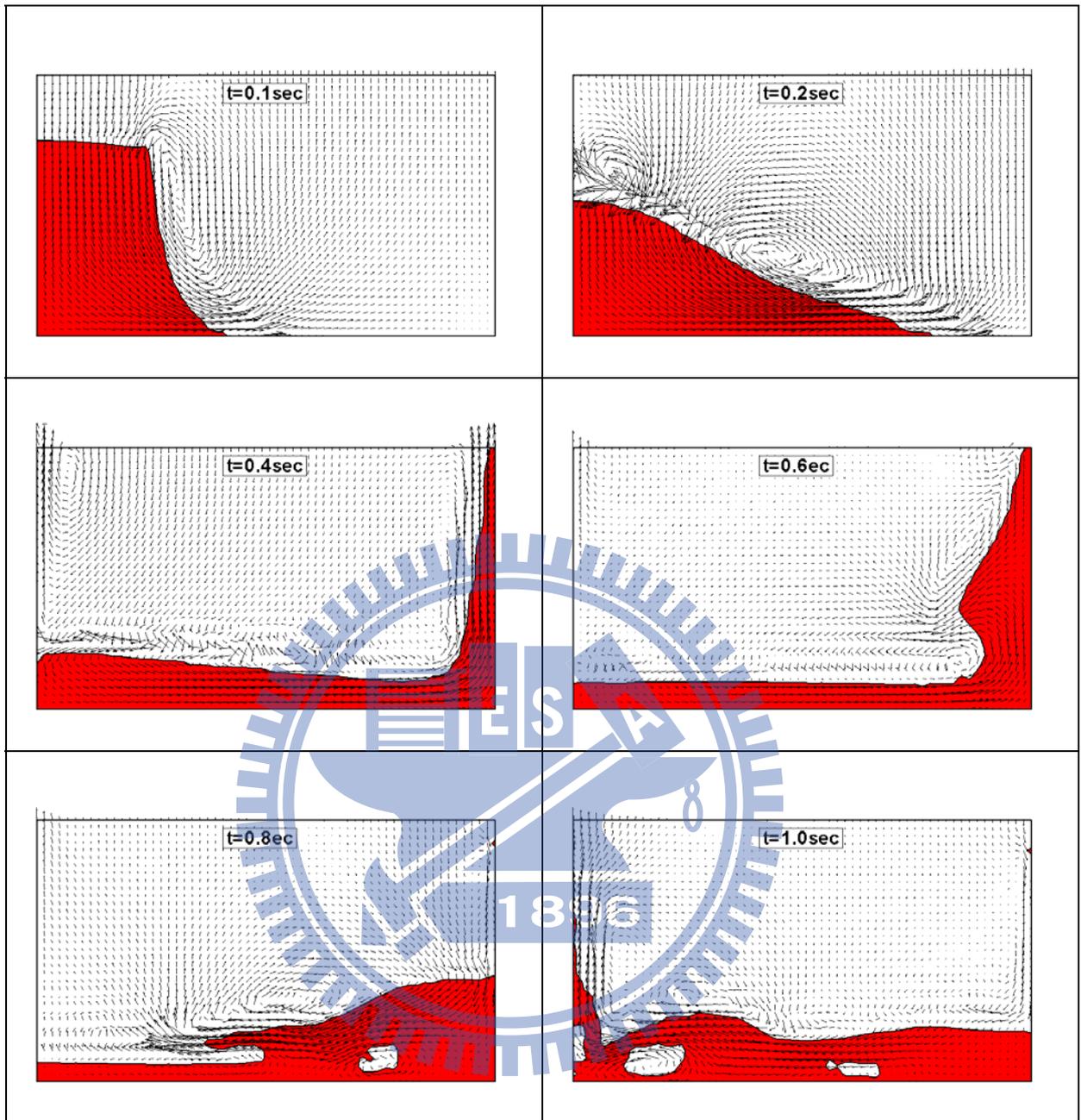


圖 8.21 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 60x35，平滑化 1 次）

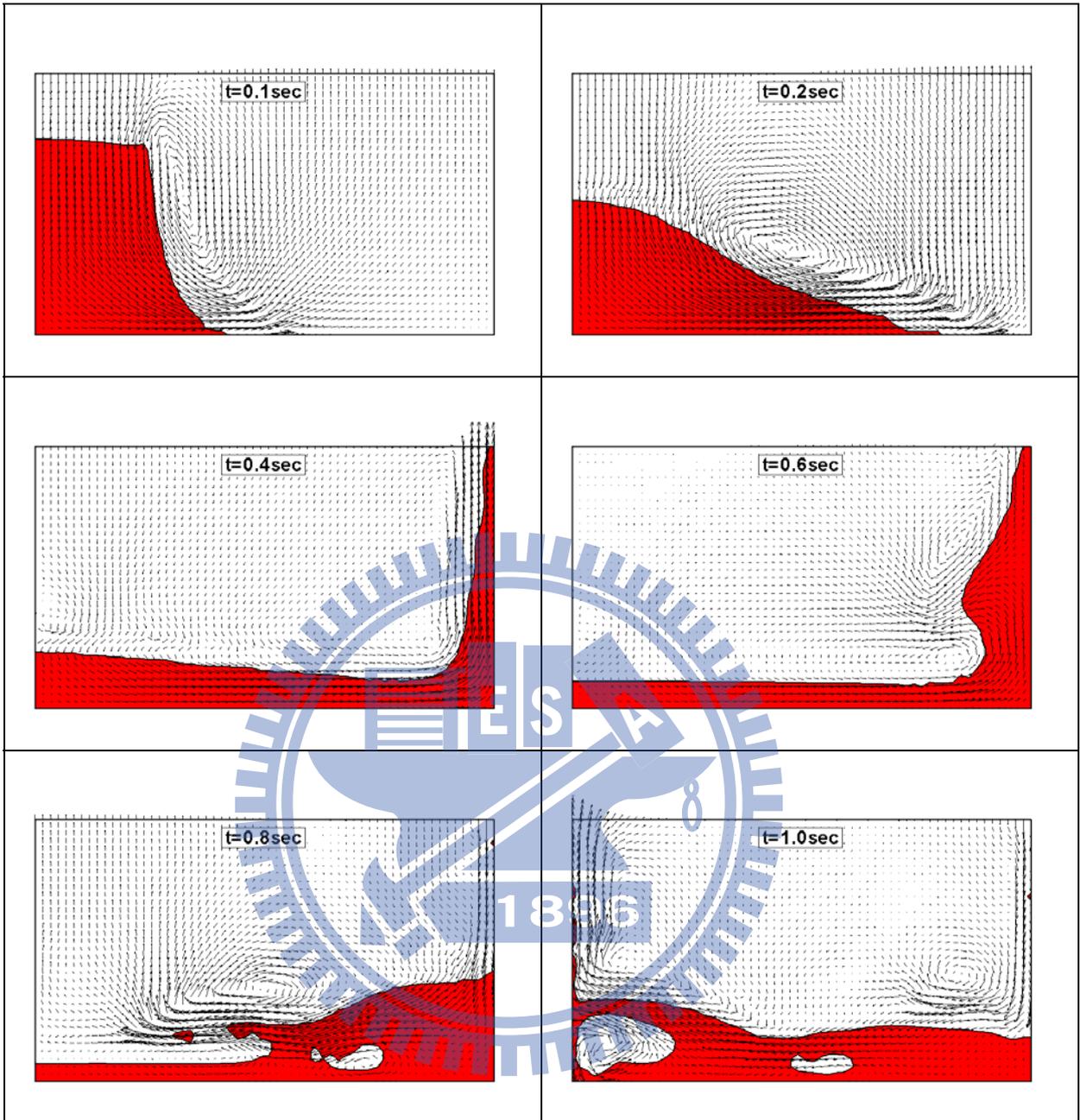


圖 8.22 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 60x35，平滑化 2 次）

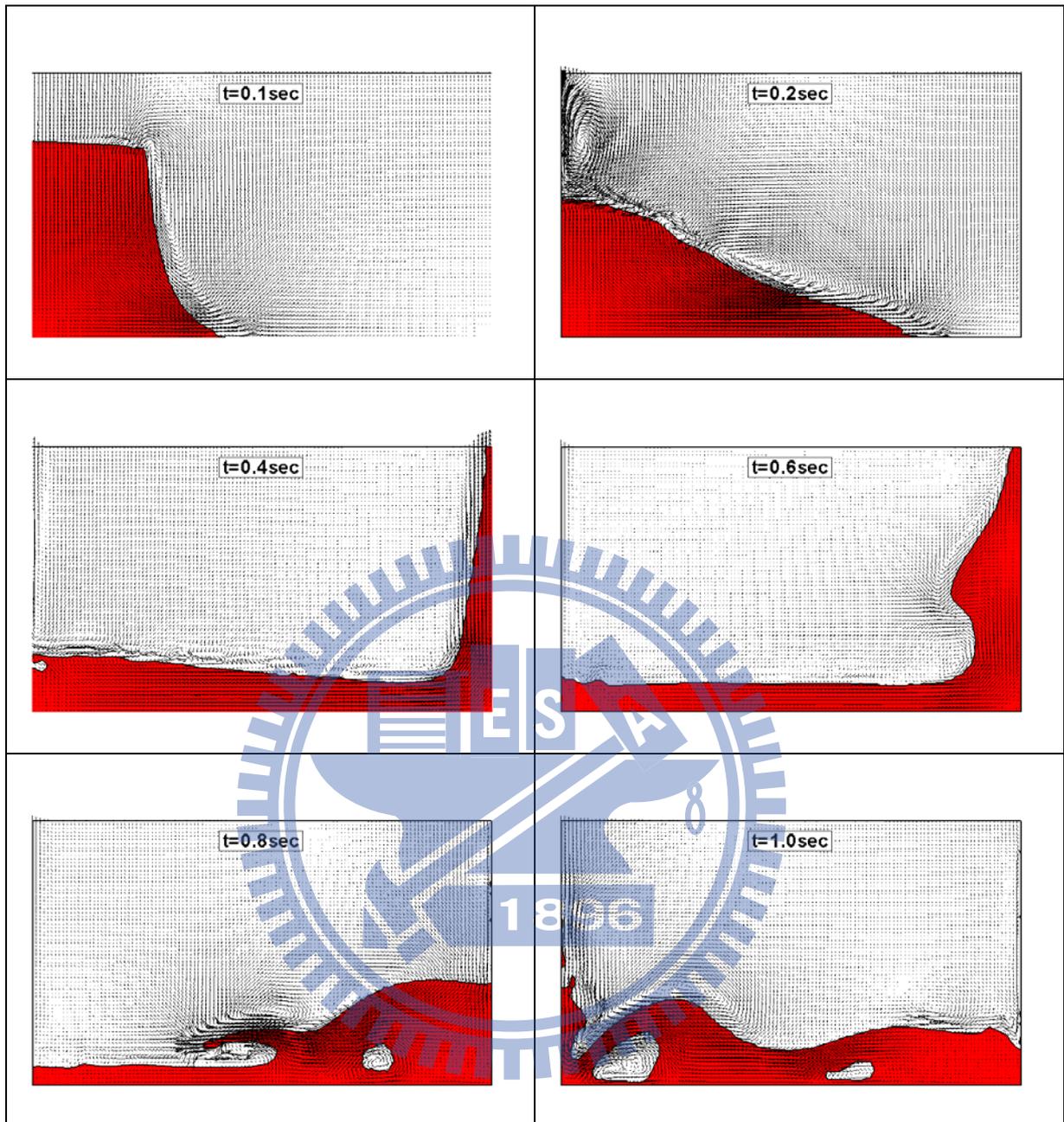


圖 8.23 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 120x70，平滑化 1 次）

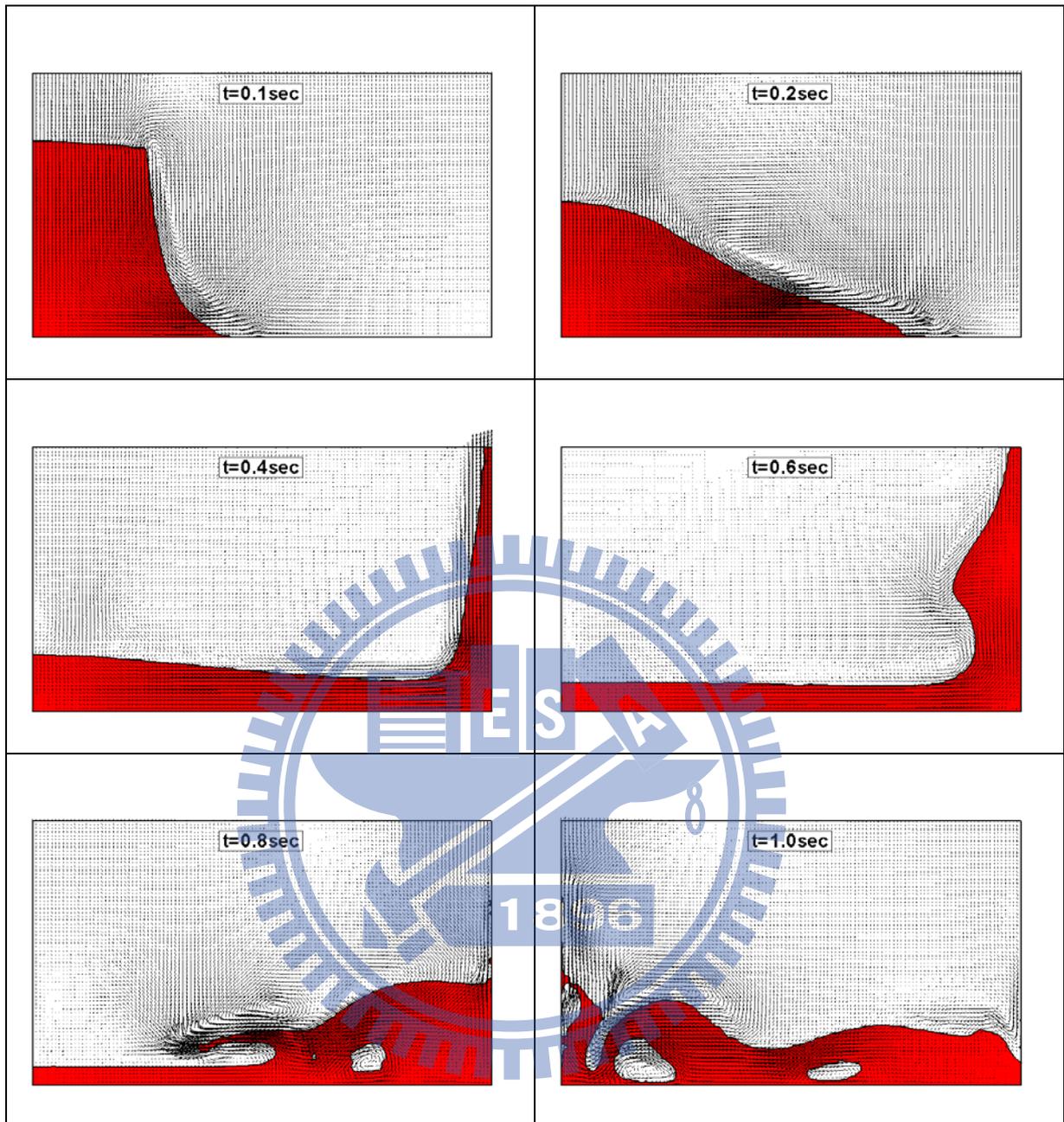


圖 8.24 二維壩體潰堤隨時間之演進圖（網格 120x70，平滑化 2 次）

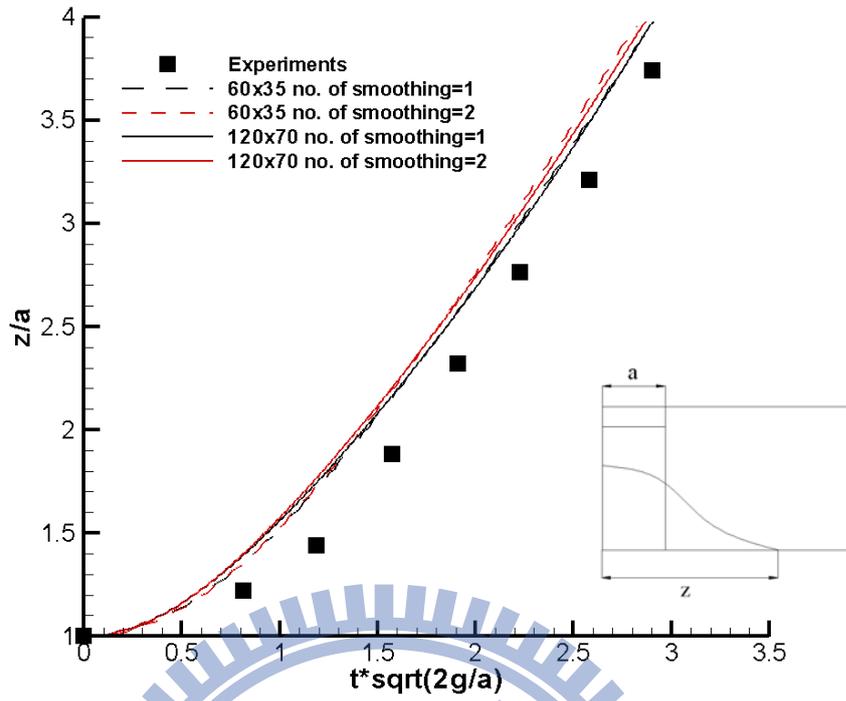


圖 8.25 底部水流前端與時間無因次化關係圖

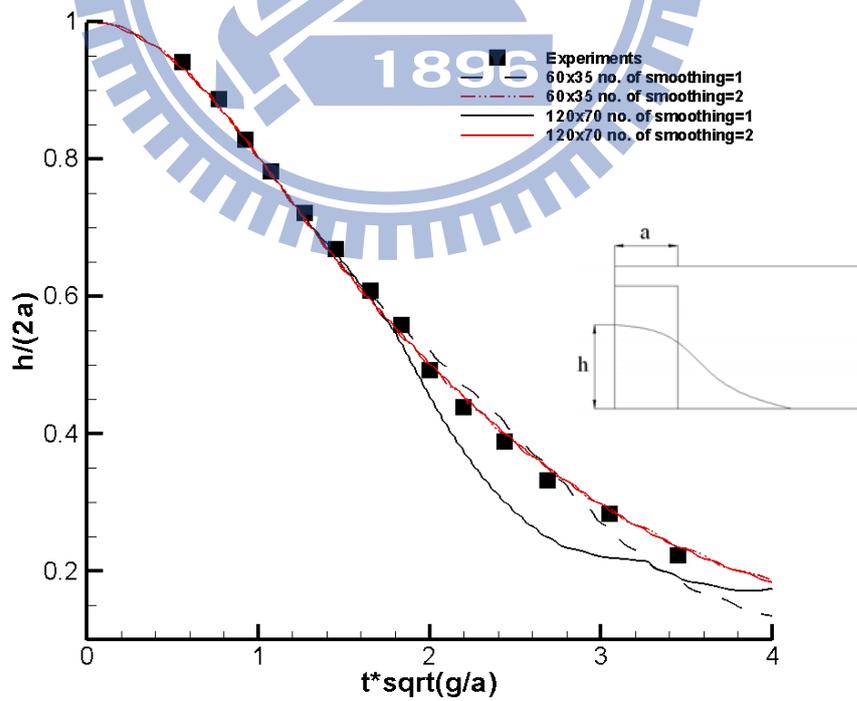


圖 8.26 左側水柱高度與時間無因次化關係圖

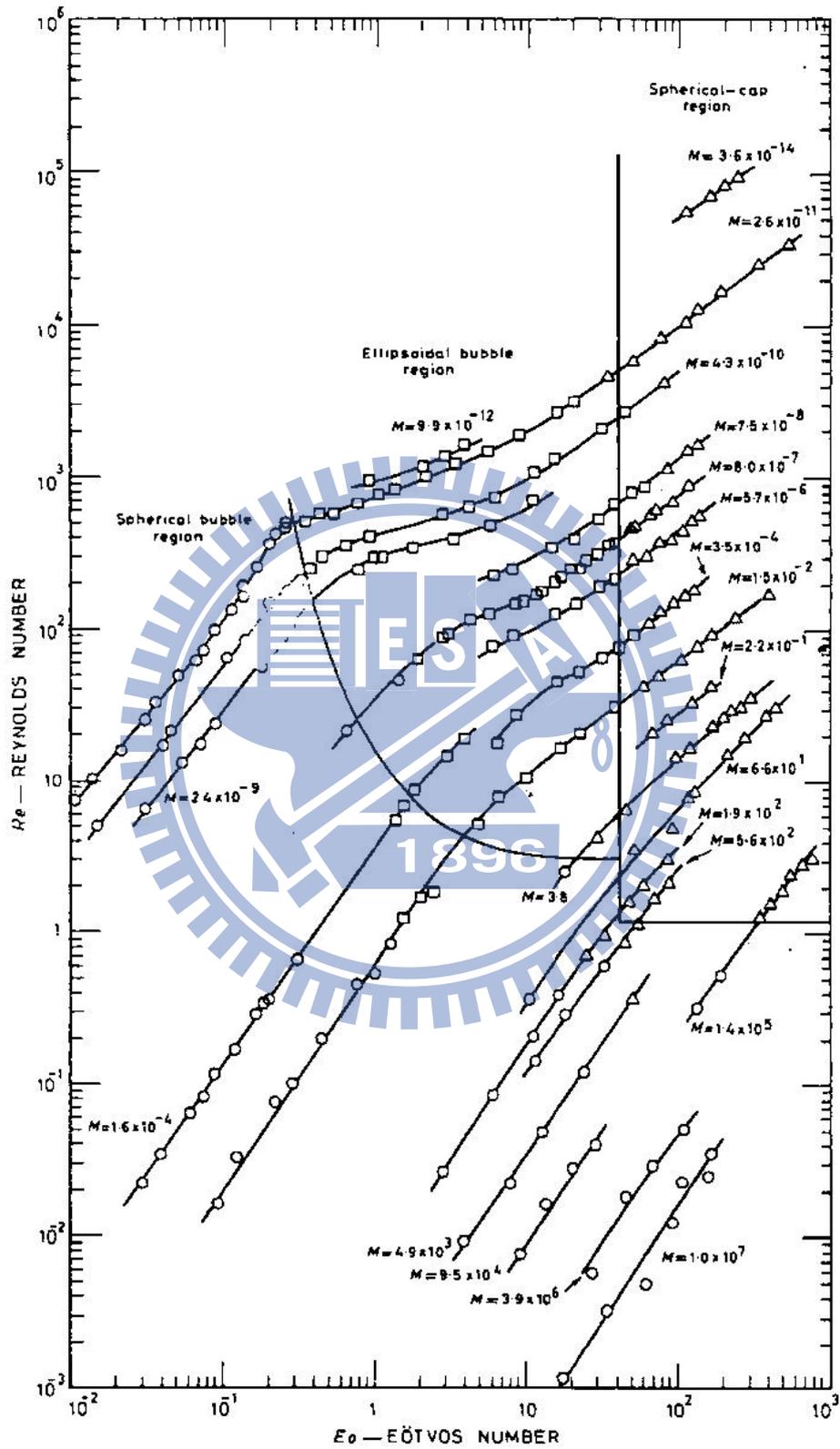


圖 8.27 氣泡形狀於靜止流體中上升之無因次參數關係圖 [77]

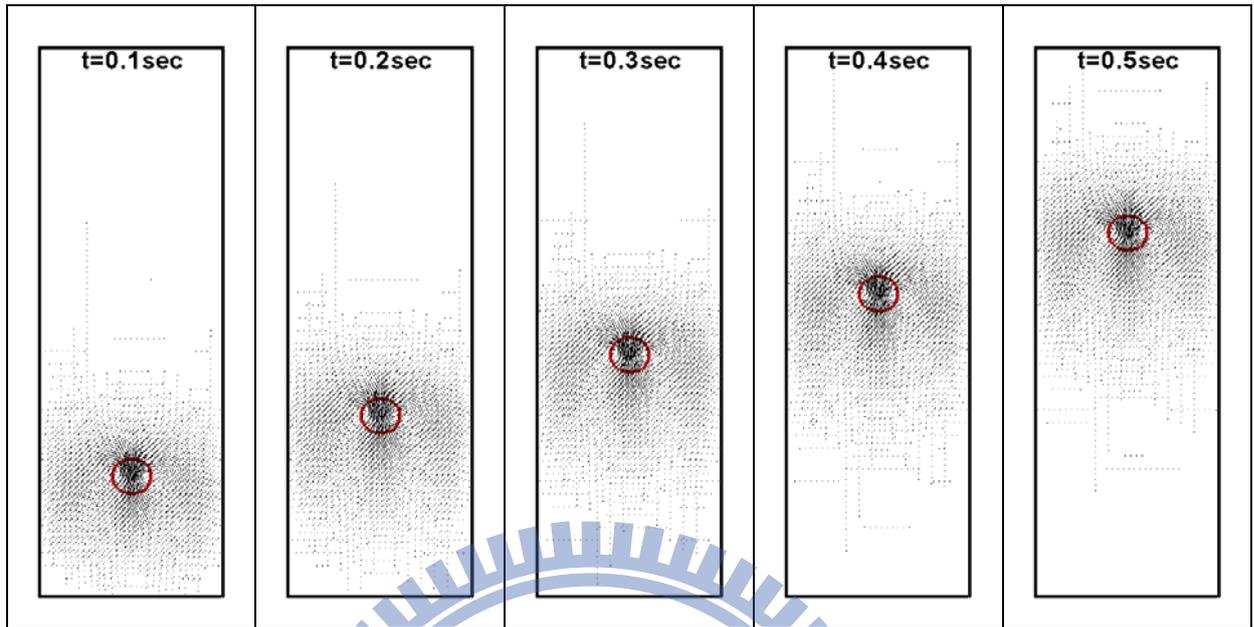


圖 8.28 上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖 ($Eo=1, Mo=0.001$)

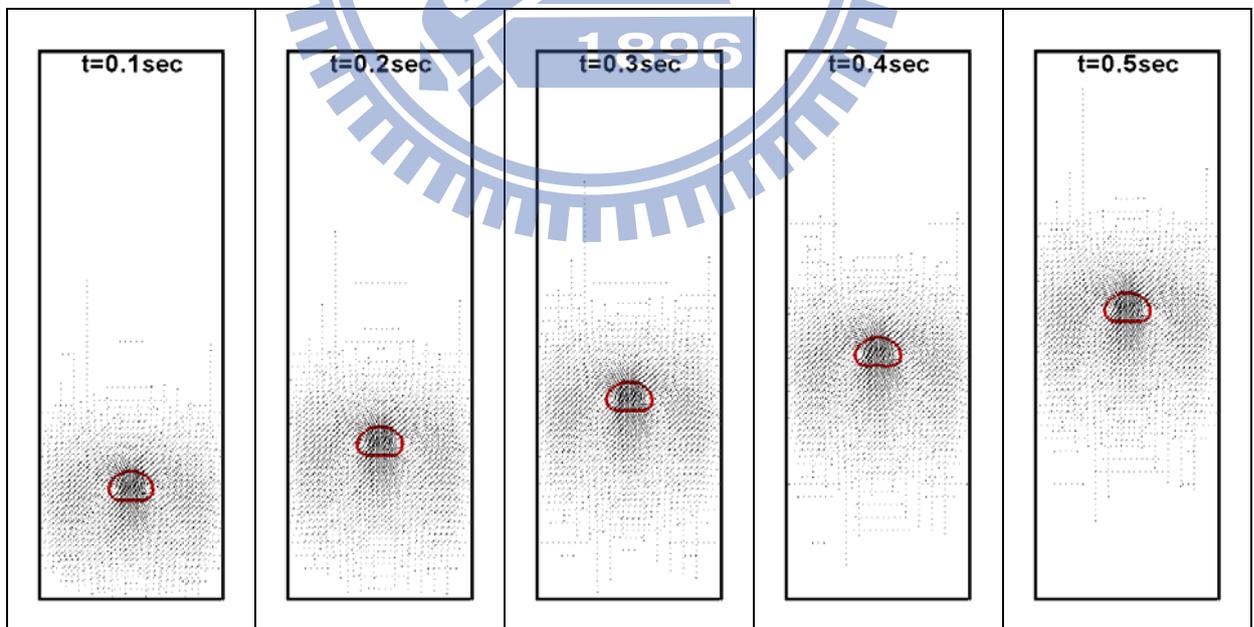


圖 8.29 上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖 ($Eo=10, Mo=1$)

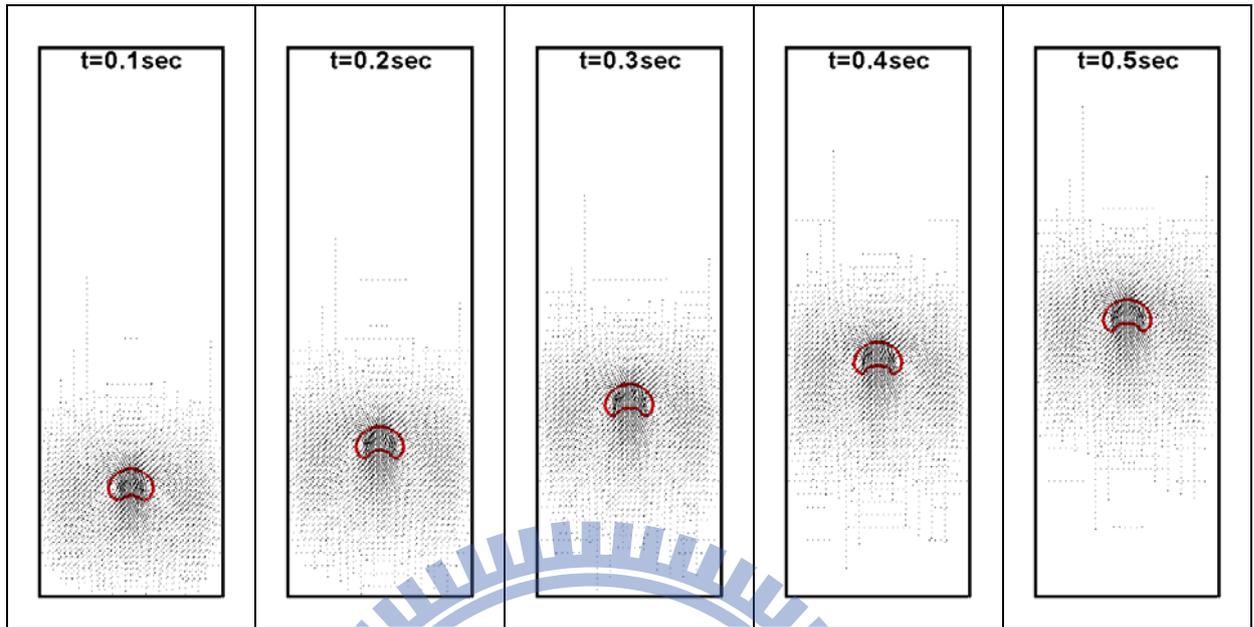


圖 8.30 上升氣泡隨時間之介面與速度場演進圖 ($Eo=100, Mo=1000$)

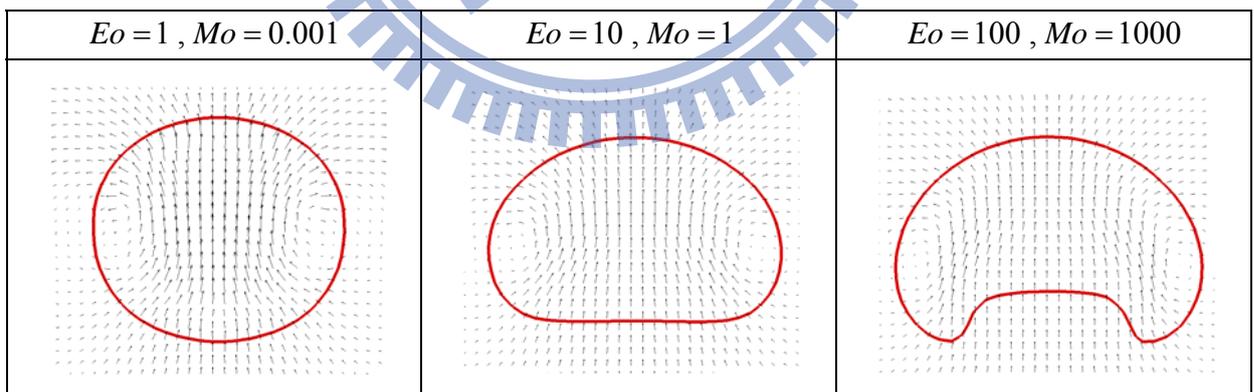


圖 8.31 氣泡形狀於 $t=0.5$ 秒之局部放大圖

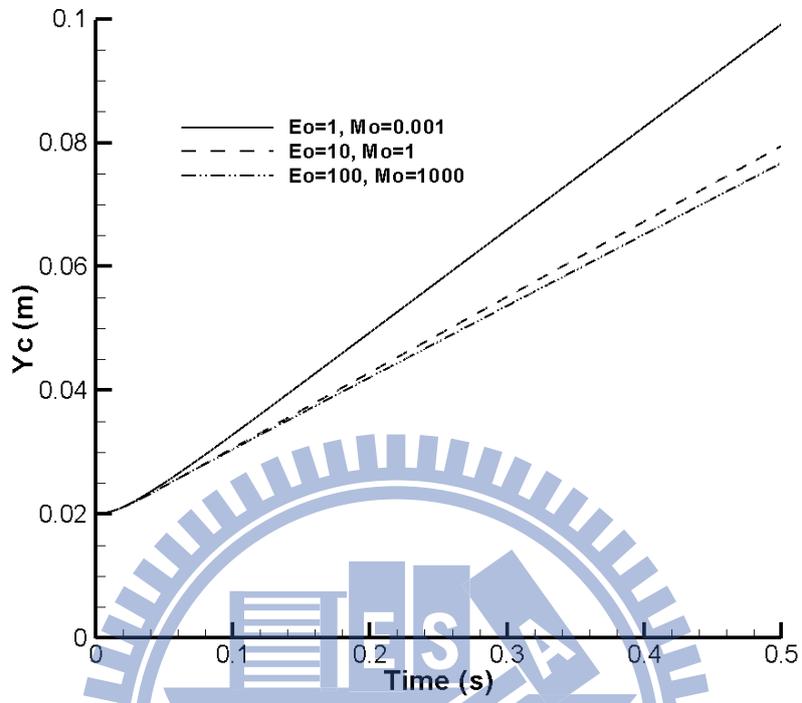


圖 8.32 氣泡中心高度隨時間變化之關係圖

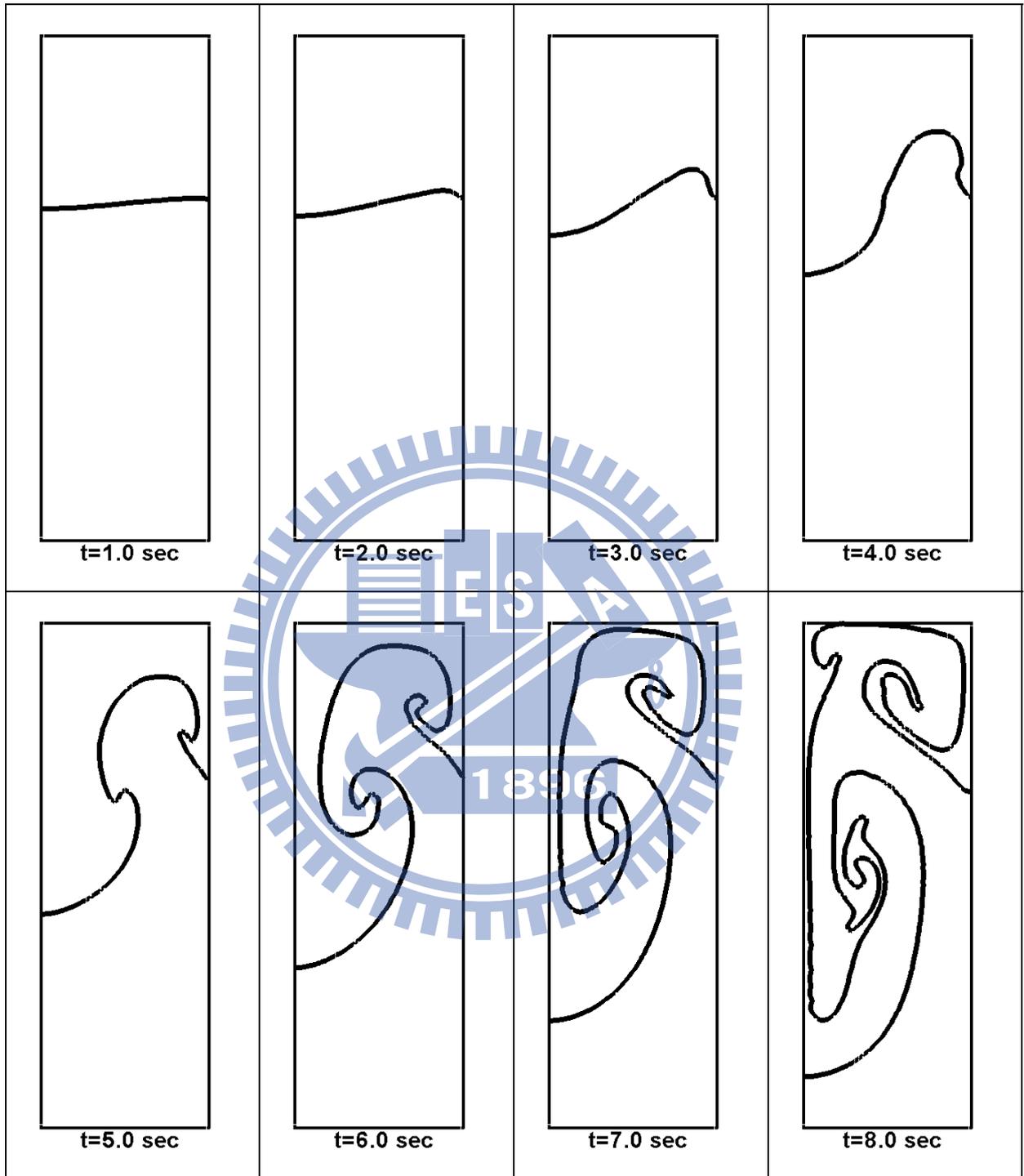


圖 8.33 雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 48x144)

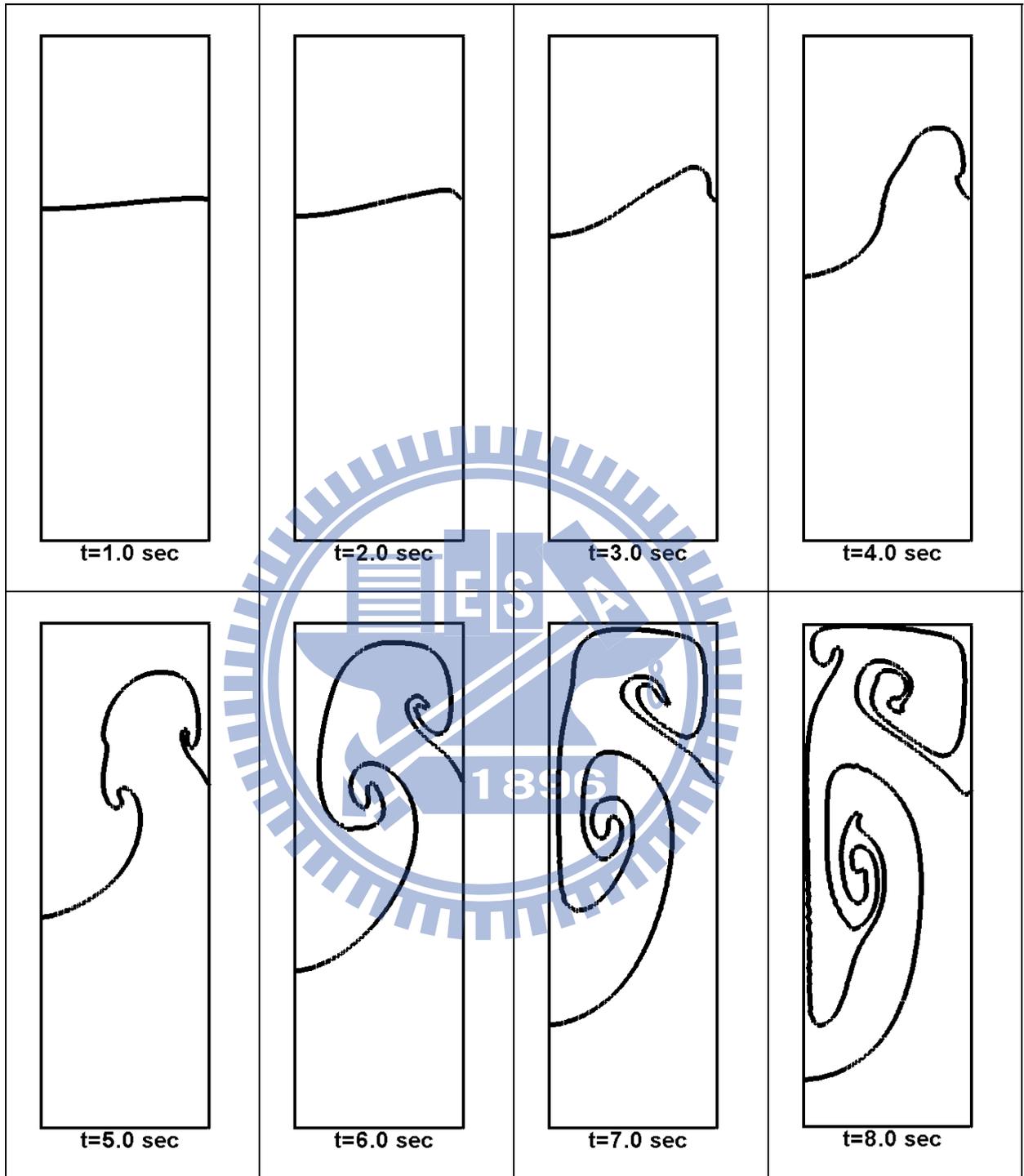


圖 8.34 雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 96x288)

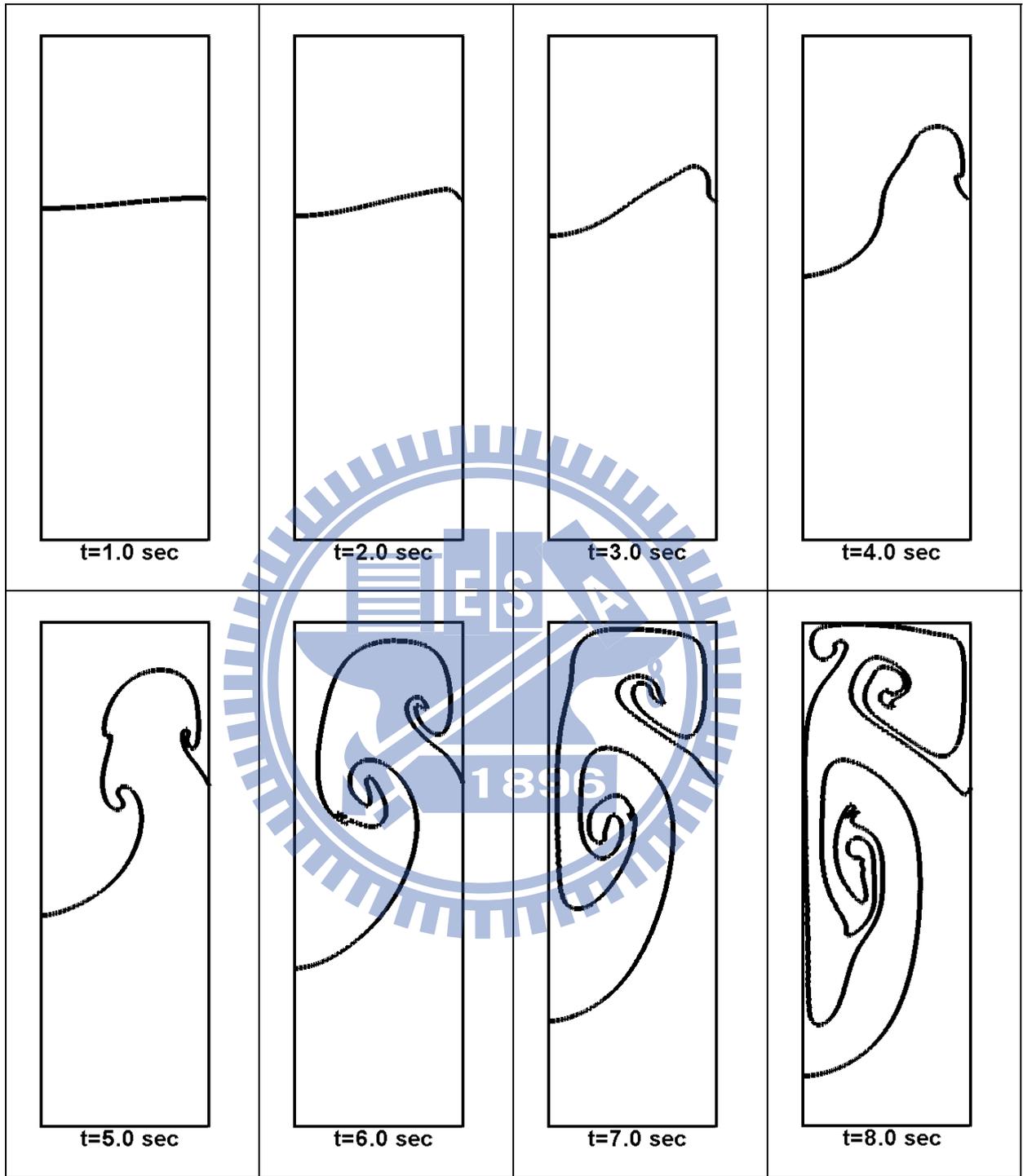


圖 8.35 雷利-泰勒不穩定性之介面演進圖 (網格 192x576)

第九章 CISIT 法於二維薄膜沸騰分析

9.1 簡介

在前兩章中，本文已經介紹了兩種介面計算方式的分析與雙流體流場中的應用。在接續的討論中，將引進完整的含相變化的兩相流數值模型，以模擬二維的薄膜沸騰現象。根據前文所述可知在計算相變化時，必須精確的計算出介面的幾何和定位，因此本文所提出的模型是基於 CISIT 法進而導入內邊界的概念來計算能量場並透過單側差分法來求取介面處的熱傳與質傳量以完成整個相變化的模擬。在本章中首先計算兩組具有理論解的一維汽化問題來驗證本文在能量方程式及相變化模型計算上的精準度。

在簡單的驗證過後，接著將在一組結構性網格中來模擬水平平板薄膜沸騰，並與 Berenson(式 1.3)和 Klimenko(式 1.8)所提出的半經驗公式來驗證本模型在相變化計算的精準度。過去許多文獻所提出關於介面計算的方法都較適用於結構性的網格之中，而在前個章節中已經驗證本文所提出的 CISIT 法可以適用於非結構性網格，因此本文在此經由水平圓管薄膜沸騰之模擬，來說明本文所提出的兩相流模型可應用於幾何外觀較為複雜的流場之中。上述兩個問題都是較小尺度的模擬，其初始薄膜多為單個擾動波所組成，流場中只有單個節點會形成氣泡，因此氣泡間並不會產生影響。為了驗證本模型可適用於大尺度的真實流場並觀察氣泡或噴射流間在流場中交互影響，因此於最後將模擬多模式(multi-mode)的長平板薄膜沸騰。

9.2 一維汽化問題

為了驗證本研究所提出的相變化模型及能量方程式數值方法的精確性，在本節中將模擬兩組一維的汽化問題，包含飽和液體及過熱液體的汽化問題。

圖 9.1 為一維飽和液體汽化問題的物理模型。在一維的系統中，初始介面的兩側分別為飽和液態液體(T_{sat})及過熱氣體，而過熱蒸汽的溫度分布是從左側過熱壁面溫度(T_w)線性分布至飽和溫度。在介面處因過熱氣體會把熱量傳遞至飽和液體中，而使飽和液體開始產生汽化並且使介面開始朝著遠離過熱牆的方向來移動。在此假設氣體側的速度($V_g = 0$)為零，因此氣體側的一維能量方程式可表示如下式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \delta(t) \quad (9.1)$$

其中 α_g 為氣體的熱擴散係數。至於過熱氣體側的邊界條件及介面處的跳躍邊界條件如下：

$$T(x=0) = T_w$$

$$T(x = \delta(t)) = T_{sat} \quad (9.2)$$

$$\rho_g V_{int} h_g = -k_g \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta(t)}$$

上述一維飽和液體的汽化問題，又稱為 Stefan's 問題，根據其邊界條件及簡化後的熱擴散方程式，可得其理論解[5]，如下：

$$\delta(t) = 2\zeta \sqrt{\alpha_v t} \quad (9.3)$$

$$T = T_w + \left(\frac{T_{sat} - T_w}{\text{erf}(\zeta)} \right) \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_g t}} \right)$$

其中 ζ 滿足下列方程式：

$$\zeta e^{\zeta^2} \text{erf}(\zeta) = \frac{C_g (T_w - T_{sat})}{h_{lg} \sqrt{\pi}} \quad (9.4)$$

在本問題中將選用一組長為 100mm 的一維系統來進行模擬，而至於模擬所使用的流體性質則為氣體比熱 $C_g = 0.4 \text{kJ/kgK}$ ，汽化潛熱 $h_{lg} = 20 \text{kJ/kg}$ ，氣體熱擴散 $\alpha_g = 1.25 \times 10^{-2} \text{m}^2/\text{s}$ ，而液氣的密度比則為 1000，至於液體的飽和溫度為 $T_{sat} = 100^\circ\text{C}$ ，而加熱面的溫度則為 $T_w = 110^\circ\text{C}$ 。圖 9.2 及 9.3 分別為介面隨時間的變化圖及在 $t=1$ 秒時溫度隨 x 的分布圖。圖中顯示本文所提出的數值方法在一維飽和液體汽化的問題中模擬所得之結果與理論解極為接近，這起因於這個問題中理論解的溫度分布是幾乎呈現線性的分布。

接著第二個所考慮的問題是一維過熱液體的汽化問題，其物理模型如圖 9.4。在本問題中介面的右側為過熱液體 (T_∞) 直接與介面左側的飽和氣體 (T_{sat}) 做接觸。因介面兩側的溫差將開始產生汽化，進而使介面處開始產生汽化而導致介面開始沿著 x 方向移動。為了簡化整個問題以獲得理論解，於此假設液體側的速度為零 ($v_l = 0$)，因此同樣可將液體側的能量方程式簡化為一維熱擴散方程式(如式 9.1)，而液體側的邊界條件如下：

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_{sat}, & T(x=\infty) &= T_\infty \\ T(t=0) &= T_\infty, & \delta(t=0) &= 0 \\ \rho V_{int} h_{lv} &= -k_l \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta(t)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

透過上述的條件可推導出與式(9.3)相同形式的理論解，如下：

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 2\zeta\sqrt{\alpha_l t} \\ T &= T_w + \left(\frac{T_{sat} - T_\infty}{\text{erf}(\zeta)} \right) \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

其中 ζ 滿足下列方程式：

$$\zeta e^{\zeta^2} \text{erf}(\zeta) = \frac{C_l(T_\infty - T_{sat})}{h_{lg} \sqrt{\pi}} \quad (9.7)$$

在本文題中模擬所使用的計算域為一組長度為 10m 的一維系統，模擬所使用的流體性質為氣體比熱 $C_g = 0.1 \text{kJ/kgK}$ ，汽化潛熱 $h_{lg} = 0.165 \text{kJ/kg}$ ，氣體熱擴散 $\alpha_g = 0.5 \text{m}^2/\text{s}$ ，而液氣的密度比則為 2。圖 9.5 及 9.6 分別為一維過熱液體汽化問題的介面位置隨時間變化圖及在 $t=10$ 秒後的溫度分布圖。圖中顯示模擬的結果與理論解有些微的差距，並不若前一個問題來的精確。這起因於在一維飽和液體汽化的問題，其左側過熱氣體的溫度為線性分布，所以其溫度梯度變化較緩和，因此在模擬上不會造成太大的誤差。然而在第二個問題中，過熱液體直接與飽和氣體接觸時，將在介面處產生極大的溫度梯度，這將造成本問題在數值上的困難度遽增進而導致模擬的結果與理論解將有較大的誤差產生。

9.3 水平平板薄膜沸騰

水平平板薄膜沸騰是屬於池膜沸騰的一種，亦即在飽和液態水的下方存有過熱氣體之薄膜，而此薄膜完整的包覆了水平平板之加熱面。加熱面透過傳導的機制將熱量傳給氣體後，再由氣體傳導至飽和液態水而在介面處開始產生相變化。由於上下流體間的密度差造成雷利泰勒不穩定性 (Rayleigh-Taylor instability) 的發生，將使介面處開始產生擾動，而液體受熱後氣化所形成的氣體將開始往擾動處聚集而形成氣泡。為了模擬此沸騰的行為，本文根據 Berenson[2] 所提出的薄膜模型 (薄膜總長相當於二維最危險泰勒波長 (λ_{d2})) 並考慮整個流場為對稱，在此選用一組長 $\lambda_{d2}/2$ 為、高為 λ_{d2} 的計算域。在計算域中上層為飽和液態水，下層則為過熱氣體，而初始的氣液介面為半個餘弦波的擾動 (圖 9.7)，其分布的函數如下式：

$$y = \frac{\lambda_{d2}}{64} + \frac{\lambda_{d2}}{128} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{d2}}\right) \quad (9.8)$$

其中

$$\lambda_{d2} = 2\pi\sqrt{3}\lambda \quad (9.9)$$

而 λ 為特徵長，其定義如下：

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g}} \quad (9.10)$$

因流場對稱的關係，所以計算域的左右兩側皆採對稱邊界條件，而上方則為出口邊界條件。至於下方則是過熱度為 $\Delta T (= T_w - T_{sat})$ 的無滑移牆邊界條件。至於流體性質則選用一組近臨界壓力 ($P_c = 221.3\text{bar}, T_c = 374.15^\circ\text{C}$) 的狀態

點，其飽和壓力為 218bar 、飽和溫度為 373°C ，而其所對應的飽和氣液態之性質性質如下：

$$\rho_l = 402.4\text{kg}/\text{m}^3 \text{、} \mu_l = 4.67 \times 10^{-5}\text{Pas} \text{、} k_l = 0.545\text{W}/\text{mK} \text{、} C_l = 218\text{kJ}/\text{kgK} \quad (9.11)$$

$$\rho_g = 242.7\text{kg}/\text{m}^3 \text{、} \mu_g = 3.24 \times 10^{-5}\text{Pas} \text{、} k_g = 0.538\text{W}/\text{mK} \text{、} C_g = 352\text{kJ}/\text{kgK} \quad (9.12)$$

而表面張力係數 $\sigma = 7 \times 10^{-5}\text{N}/\text{m}$ 、重力 $g = 9.8\text{m}/\text{s}^2$ 、汽化潛熱 $h_{lg} = 276.4\text{kJ}/\text{kg}$ 。

依據上述的性質可知本流場的特徵長度 $\lambda = 0.211\text{mm}$ ，而最危險泰勒波長 $\lambda_{d2} = 2.3\text{mm}$ 。

而為了提高運算的效率且同時維持結果的精度，本文首先將在過熱度 $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ 的條件下，針對解析度分別為 90×180 、 120×240 、 180×360 和 240×480 網格來進行計算。對於網格收斂與否的判斷，可由氣泡外型及生成周期與壁面處的平均 Nusselt 數來做為依據，而壁面處平均 Nusselt 數計算方式如下：

$$Nu = \frac{2}{\lambda_{d2}} \int_0^{\lambda_{d2}/2} \frac{\lambda}{(T_w - T_{sat})} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w dx \quad (9.13)$$

圖 9.8 呈現不同網格解析度下，氣泡準備脫離薄膜表面之結果。由圖中觀察可知網格解析度提高到 180×360 以上，不同網格之介面分布情形差距已經很小。而在圖 9.9 則呈現壁面處 Nusselt 數隨時間變化的情形，由圖中之結果可獲得在不同網格中其氣泡的生成周期及時均化 Nusselt 數 (\overline{Nu}) 之大小(如表六)。由表中可以發現，網格解析度 180×360 與 240×480 之結果已經相當接近，因此本研究在此問題中採用 180×360 的網格來模擬。

Reimann 和 Grigull[78]在近臨界壓力下的沸騰實驗中，發現過熱氣體離開薄膜的流動型態與加熱面的熱通量有關。當在較低的熱通量時氣體以氣泡(vapor bubble)的形式離開表面，然而當熱通量提高到一定的程度氣體將改以噴流(vapor jet)的型態離開加熱面(如圖 9.10)。過去一些有關近臨界壓力下沸騰模擬的文獻中[8, 58, 79]，亦可發現有同樣的現象。基於上述原因，本文在此將針對不同的壁面過熱度來進行計算，過熱度所選用的區間為 10 至 40°C。

在過去的文獻中，已有相當多關於薄膜沸騰的半經驗式被發展出，而在水平平板的問題中，最常被採用的為 Berenson[2]所提出的半經驗式，如式(1.3)：

$$Nu_B = 0.425 \left(\frac{GrPr}{Ja} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.3)$$

而另外一組較常被使用的則是由 Klimenko[4]所提出，其將上是推展至紊流的模式，如式(1.7)及(1.8)：

$$Nu_K = \begin{cases} 0.19Gr^{\frac{1}{3}}Pr^{\frac{1}{3}}f_1 & \text{for } Gr \leq 4.03 \times 10^5 \\ 0.0216Gr^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}f_2 & \text{for } Gr > 4.03 \times 10^5 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$f_1 = \begin{cases} 1 & \text{for } Ja \geq 0.71 \\ 0.89Ja^{-1/3} & \text{for } Ja < 0.71 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{for } Ja \geq 0.5 \\ 0.71Ja^{-1/2} & \text{for } Ja < 0.5 \end{cases}$$

而在上述的兩組半經驗式中所使用的流體性質，因為薄膜內溫度梯度相當大，所以過熱氣體的性質須考慮在平均薄膜溫度($T = \frac{T_w + T_{sat}}{2}$)下所對應之性

質(表七[57])，表中所呈列者為218bar下之過熱氣體之黏滯係數(μ)、熱傳導係數(k)及比熱(C)。在低壓的狀態下所發生的沸騰，其汽化潛熱(latent heat)對流場所造成的影響遠大於顯熱(sensible heat)的作用，然而隨著壓力及過熱度的提高，顯熱的作用也越趨顯著，因此必須將上述兩半經驗式中的 Jacob 數做些微的修正，如下式：

$$Ja^* = \frac{Ja}{(1+0.34Ja)} \quad (9.14)$$

由於原始 Berenson 模型並不考慮壁面過熱度的影響，因此採用原本 Jacob 數的定義而不修正所計算出的 Nusselt 數將會小於修正後之值。以下本文將呈現不同過熱度下所形成的流動型態並採用上述兩組修正後的半經驗式來與模擬結果做比較。

圖 9.11(a)代表 $\Delta T=10^\circ\text{C}$ 的情況下，壁面處平均 Nusselt 數隨時間的變化圖，結果顯示 Nusselt 數除了剛開始受到初始條件的影響以外，其餘時間下則呈現周期性的變化。圖 9.12 表示在一個周期內氣體流動型態之動態圖，而圖 9.13 則表示此周期內不同時間下的速度分布圖。在 $t=1.320$ 秒時，介面因擾動的關係開始由左側抬升。隨著介面的抬升氣體內部左右兩側的壓力差開始變大，因此底部薄膜處的速度開始加大，導致汽化後的氣體開始往左側大量聚集($t=1.353$ 秒)。在 $t=1.430$ 秒時，左側的薄膜已經到達氣泡脫離前的最大厚度而其壁面處平均的 Nusselt 數也到達了周期內的極大值。此刻氣泡內部因浮力的關係開始產生明顯朝上的流動，而在介面處造

成了一組順時針的回流。當時間到達 1.445 秒，氣泡已脫離薄膜表面開始向上傳遞，而下半部的薄膜在氣泡脫離後所留下的柱狀氣膜則因表面張力所產生的恢復力及重力之關係開始被向下拉回。由速度場也可清楚看出此恢復力在柱狀氣膜的上方處造成一個逆時鐘的回流而開始帶動介面往底部運動。在柱狀氣膜被拉回後，可以明顯的發現底層薄膜因慣性的作用下產生了表面張力波，而介面處因此發展出較大的逆時針回流使氣體開始朝向右邊傳遞($t=1.478$ 秒)。隨著時間持續的發展，氣泡將以同樣的過程在右側邊界上產生($t=1.550$ 秒)。依據圖 9.12 整體的結果可知在 $\Delta T=10^{\circ}\text{C}$ 的情況下，氣體是以氣泡且規律的型態離開薄膜表面，此與圖 9.10(a)較低熱通量的沸騰實驗之結果相近。將圖 9.11 與 9.12 做對照後可發現隨著氣泡的成長，Nusselt 數亦隨著時間而上升，當氣泡準備脫離前($t=1.430$ 秒)，因底部氣膜在靠近氣泡根部附近出現了厚度極小的薄膜，此處內部的溫度梯度極大，因此提供了極佳的熱傳導，故而拉高了此時壁面處的平均 Nusselt 數。隨著氣泡的脫離，表面張力將使介面拉回而開始拉高柱狀氣膜根部附近的厚度，因此 Nusselt 數再度的升高。

由圖 9.11(b)可發現當壁面過熱度提高至 18°C ，Nusselt 數隨時間的變化情形並不像 $\Delta T=10^{\circ}\text{C}$ 時如此規律，其變化的情形大致是以兩個周期為一個循環。藉由圖 9.15 氣體的動態圖可清楚的說明上述不規則的情形。圖中顯示左側邊界如同過熱度為 10°C 一般，生成單顆氣泡並脫離薄膜

($t=1.020\sim 1.080$ 秒)，然而當右側第一顆氣泡生成脫離後，底部所產生的柱狀氣膜並沒有因表面張力的關係而被拉回($t=1.220$ 秒)，而是在其上端持續成長並且產生第二顆氣泡($t=1.250$ 秒)。當第二顆氣泡生成脫離後，底部薄膜才會產生向左邊邊界移動的表面張力波($t=1.260$ 秒)。上述這種不規律的氣泡生成之過程也發生在過熱度為 17°C 的情況下(如圖 9.14)，圖中顯示左側在 1.280 至 1.300 秒之間形成了三顆氣泡，而右側在 1.540 秒也產生了第三顆氣泡而脫離表面。

圖 9.11(c)則是壁面過熱度為 20°C 情況下之 Nusselt 數隨時間變化的情形，圖中顯示在 1 秒以前與 18°C 類似，氣體以氣泡的形式離開薄膜。到了 1.1 秒以後，可清楚看出 Nusselt 數瞬間提高到一個較大值並改以較長的周期隨時間變化。圖 9.16 則呈現其動態圖，由圖可知在 $t=1$ 秒之後左側氣泡脫離薄膜後所殘餘的氣膜將持續成長，並在 1.1 秒時發展為噴流，而往後的時間內此噴流穩定的存在於流場之中，至於另外一側則仍以周期性的方式形成氣泡來離開氣膜表面，此流動型態與圖 9.10(b)中的情況相似。因為噴流出現後底部薄膜將產生極小厚度的位置而此噴流並不隨時間而消失，所以提高了整體的 Nusselt 數。

當壁面過熱度提高至 25°C ，由圖 9.11(d)可發現其 Nusselt 數隨時間的變化又成為周期性的運動，然而不同於 $\Delta T=10^{\circ}\text{C}$ 的情況，當周期內出現最大值後，延遲大約 0.1 秒的時間將出現令一個波峰，這起因於在同一側有

第二顆氣泡的生成，此現象可由圖 9.17 看出。在 $t=1.020$ 至 1.080 秒間，第一個氣泡脫離薄膜表面並往出口處排出，此刻下方所殘餘的氣體持續因相變化而成長，並在 $t=1.09$ 秒時產生第二個氣泡。當第二個氣泡脫離後底部薄膜才因表面張力和慣性作用而往右側傳遞。而連續兩個氣泡生成的現象，亦在往後的時間內在左側發生($t=1.200\sim 1.290$ 秒)。

圖 9.11(e)和 9.18 為之 $\Delta T=30^{\circ}\text{C}$ 結果。圖中顯示 Nusselt 數剛開始先以較規律的周期變化。在 $t=0.67$ 秒時 Nusselt 數突然拉高改以較大的周期來變化，此現象與 $\Delta T=20^{\circ}\text{C}$ 相同，因左側出現了第一個噴流，而右側氣體則仍以氣泡的型態來離開薄膜表面。當時間到了 $t=1.3$ 秒時，右側也發展成為第二個噴流，之後兩側的氣體皆以噴流的型態被帶離加熱面。由圖 9.11(e)可發現 Nusselt 數的變化在兩側皆形成噴流後趨於穩態。當壁面過熱度提高到 40°C (圖 9.11(f))時，可發現短時間內 Nusselt 數的變化就已經達到穩態，這是由於流場中的氣體很快就已經形成雙噴流的型態。而圖 9.10(c)為高壁面熱通量之實驗結果，其氣體都是以噴流型態來離開加熱面，此與本文在高過熱度下模擬所得之結果相近。

圖 9.19(a)為 $\Delta T=10^{\circ}\text{C}$ 在 1.430 秒時的溫度分布情形，而 9.19(b)則是 $\Delta T=30^{\circ}\text{C}$ 在 $t=1.300$ 秒之結果。圖中顯示底部薄膜內的氣體溫度大致呈現線性分布的型態。當氣泡準備脫離薄膜時，將在底部產生厚度極小的位置，此處將產生較大的溫度梯度而有較大的熱傳量。同理，當噴流出現後也會

有相同的情形發生(圖 9.19(b))。因此可由不同時間下壁面處 Nusselt 數沿 x 軸方向上的分布情形來探討整個氣體流動的過程。圖 9.20(a)為 $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$ 之結果，圖中顯示在 $t = 1.445$ 秒時左側 Nusselt 數產生極值，代表氣泡在左側即將脫離。而隨時間的演進氣泡也將在右側生成，因此極值將出現在右側($t = 1.625$ 秒)。而圖 9.20(b)則為 $\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$ 之結果，結果顯示在 $t = 0.67$ 秒時，左側因產生噴流而出現 Nusselt 數的極大值，而到了 $t = 1.3$ 秒後右側也將出現另一個極值，這起因於另外一個噴流的發生。

至於圖 9.11 中的平均 Nusselt 數代表時均化後之值，其值與 Berenson 和 Klimenko 半經驗式在不同過熱度下比較之結果呈列於表八之中。表中 20°C 之值是取單個噴流出現後的周期平均，而 30°C 及 40°C 則是取穩態後之值。由表中可發現在壁過熱度為 10°C 時，其結果與 Berenson 所提出的結果最為接近，而與 Klimenko 之結果大概也只有 12% 的差距。然而隨著過熱度的提高可發現本文所計算的結果與實驗值差距將變大，尤其在噴流發現後的情況下。根據 Berenson 所假設的薄膜模型，其氣泡高度為 3.2 倍的特徵長(λ)，因此當噴流出現後將違反其所假設高度，再者薄膜內因為噴流的關係將產生極大的壓力差，此壓力差將使薄膜內的氣體可沿著噴流加速往上而帶走更多壁面處的熱量而提高 Nusselt 數。

為了更進一步探討壁面過熱度對於氣體型態及傳熱方式，本研究針對過熱度 10 到 30°C 的區間內進行模擬，並將過熱度與時均化 Nusselt 數的關係

繪製於圖 9.21 中。根據氣體所呈現的流動型態主要可以分為五大區：單氣泡模式(single-bubble mode, $\Delta T < 15^{\circ}\text{C}$)、單/多氣泡模式(single/multiple-bubble mode, $\Delta T = 15 \sim 19^{\circ}\text{C}$)、單噴流模式(single-jet mode, $\Delta T = 19 \sim 22^{\circ}\text{C}$)、雙氣泡模式(double-bubble mode, $\Delta T = 22 \sim 27^{\circ}\text{C}$)及雙噴流模式(double-jet mode, $\Delta T > 27^{\circ}\text{C}$)。所謂單氣泡區亦即在低過熱度的情況下，氣體在兩側邊界上以單顆氣泡的型態周期性的離開加熱面。當壁面過熱度提高至 15°C 以上，將可能在某側的邊界上連續生成兩到三顆氣泡，此為單/多氣泡模式區。當過熱度到達 19°C 以上，此時流場內將在某一邊界上產生噴流，此為單噴流模式區。然而當過熱度大於 22°C 以上，噴流的現象將會消失，取而代之的是雙氣泡模式區，所謂雙氣泡模式是表示在同側邊界上將連續產生兩顆氣泡。當壁過熱度超過 27°C 時，此時氣體在兩側邊界上離開薄膜的型態將完全呈現噴流的形式，稱之為雙噴流模式區。由圖 9.21 可發現在(I)和(II)的區域內，其所計算出的 Nusselt 數與上述所提的兩種半經驗式之結果較為接近。然而過熱度到達能夠產生噴流的最低溫度 ($\Delta T = 19^{\circ}\text{C}$) 後，模擬所得的結果與半經驗式將開始有較大的差距，其原因在前文中已經有所描述，主要來自於噴流流動型態並不符合 Berenson 原始假設的模型。

9.4 水平圓管薄膜沸騰

幾何外觀較為複雜的沸騰現象對於數值模擬而言是相當大的挑戰，由於方法上的侷限因此過去許多文獻皆是將結構性網格系統的方法加以修改來計算較複雜的幾何問題。在 2005 年，Esmaeeli 和 Tryggvason[47]使用前端追蹤法來計算介面的運動，並且透過嵌入式邊界(immersed boundary)的概念來計算二維及三維的水平圓管薄膜沸騰的問題。此外，Son 和 Dhir[54]則是採用虛擬網格法(ghost fluid)的方式加以修改 2005 年 Son[80]所提出基於等位函數並結合嵌入式邊界的方法來計算常壓下水平圓管的薄膜沸騰，並且討論管徑與重力大小所產生的效應。有別於上述的方法，本文所提出的 CISIT 法及相變化模型可採用非結構性網格的方式來處理水平圓管薄膜沸騰的問題，透過此問題的計算可驗證本方法在幾何外觀較為複雜的相變化流場中的可行性。

本文在此選用一個寬為 $7D$ 高為 $15D$ 的計算域，在計算域中 $(3.5D, 3.5D)$ 的位置上放入直徑為 D 的圓管來進行模擬(如圖 9.22)，而圓柱直徑為特徵長 $\lambda = 0.211mm$ (定義如式 9.10)。由於流場對稱性的關係，因此選用半個計算域來進行模擬，而除了上方為出口邊界條件外，其餘的皆為滑動邊界條件。至於流體性質的選用則是與前節相同的狀態點 ($P_c = 218bar, T_c = 373^\circ C$)，而初始的薄膜厚度則為 $0.1D$ 。

首先針對網格解析度進行測試，選用的網格數有三組：12200，48800

及 109800。圖 9.23 為網格總數 12200 之局部放大圖。由結果顯示網格數 48800 和 109800 的結果已經極為接近，因此在以下的討論中皆以 48800 的網格數來分析以減少計算資源的浪費。

圖 9.24 表示在壁面過熱度分別為 10°C 、 20°C 及 30°C 之壁面平均 Nusselt 數隨時間變化之情形，對於圓管薄膜沸騰之壁面平均 Nusselt 數的計算如下式：

$$Nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D}{(T_w - T_{sat})} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w d\theta \quad (9.15)$$

由圖可發現在較低過熱度下，Nusselt 數呈現相對規律的周期運動，與平板薄膜沸騰的狀況類似，此周期性的變化來自於氣體以氣泡型態單獨地離開加熱面。圖中顯示 $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$ 及 $\Delta T = 20^{\circ}\text{C}$ 的周期大小分別為 0.11 秒及 0.095 秒，由此可知過熱度的提高將增加氣泡生成之頻率。然而當溫度提高至 30°C 時，除了前一小段時間因氣泡生成而使 Nusselt 數呈現周期的變化以外，其餘往後的時間 Nusselt 數的變動量不大並且趨近於一定值。

圖 9.25 到 9.27 則為三種過熱度下氣體型態之動態圖。由 $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$ 的結果可知當氣泡形成脫離後，下方所殘餘的氣體將因表面張力的關係而被往下壓回 ($t=0.365$ 秒)，並且因慣性力的作用開始產生表面張力波而往圓管底部傳遞 ($t=0.373$ 秒)。此時在加熱面持續的加熱下，圓管附近的氣體隨時間增加並因浮力的關係而往圓管上方聚集。當氣體因體積增加所產生的浮力效應大過表面張力時，將會有第二顆氣泡的生成。相同的氣體流動型態也

發生在的 $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ 情況中(圖 9.26)。然而，當壁面過熱度持續提高到 30°C 時，可發現在 $t=0.330$ 秒氣泡脫離後，底部殘留的氣體並沒有受到表面張力的影響而被拉回而是持續向上成長，並且在 $t=0.400$ 秒以後達到噴流的形態，雖然在之後的時間內壁面平均 Nusselt 數有些微的變動然而氣體仍然維持接近穩態的噴流型態。

1950 年 Bromley[3]利用邊界層理論並假設液氣介面的速度為零或剪應力為零的條件下，亦即不考慮液體側之影響，推導出垂直平板薄膜沸騰的半經驗式。之後，其利用同樣的分析方式獲得水平圓柱薄膜沸騰的半經驗式，如下：

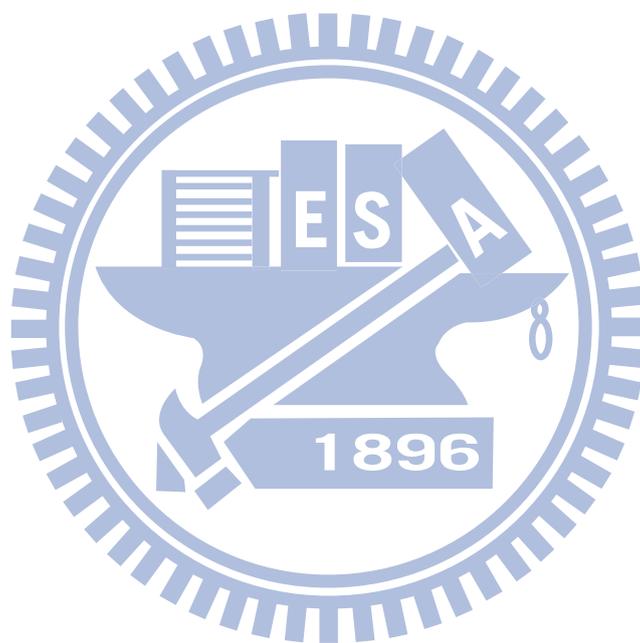
$$Nu_c = 0.62 \left(\frac{GrPr}{Ja} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.9)$$

上式與平板薄膜沸騰的公式類似，其差別在於前方的係數及所選用的特徵長度，在圓管薄膜沸騰中所選用的特徵長度為圓管的直徑 D 。本文將在不同過熱度下所計算出的時均化 Nusselt 數與 Bromley[3]半經驗式所得的結果列於表九之中做為比較，其中同時包含 Son 和 Dhir[55]在 2008 年所模擬三維水平圓管 ($D=0.125\text{mm}$) 之結果。由表中可知本研究所模擬的結果皆比 Bromley 經驗式所得的數據高出許多，此狀況與 Son 和 Dhir 在一大氣壓下所模擬管徑為 0.125mm 的結果類似。上述誤差的原因可能是過熱氣體的性質在臨界壓力下隨溫度的變動相當大，然而本研究在模擬中則是使用飽和氣態的性質，因此造成上述實驗與模擬上的誤差。由 Agarwal 等人[57]所

模擬的結果顯示，若是考慮氣體性質與過熱度相關，其模擬所得的 Nusselt 數大約可以下降 37% 左右。另外，在 [55] 中針對不同管徑大小之結果也可發現當管徑越小模擬與半經驗式的差距也越大。再者，Bromley 的理論模型是假設液氣界面的速度為零所獲得的結果，其並不考慮液體速度在介面處對於熱傳效果的影響，然而由本文所模擬的結果顯示在介面處液體的速度極大，因此提高了壁面處的平均熱傳量而使結果與半經驗式有所差距。

為了進一步確認上述的現象，本研究另外選用一組特徵長度較大的性質來做模擬，所使用的性質分別為 $\rho_l = 200 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_l = 0.1 \text{ Pas}$ 、 $k_l = 40 \text{ W/mK}$ 、 $C_l = 0.4 \text{ kJ/kgK}$ ； $\rho_g = 5 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_g = 0.01 \text{ Pas}$ 、 $k_g = 1 \text{ W/mK}$ 、 $C_g = 0.2 \text{ kJ/kgK}$ 。而其潛熱大小為 $h_g = 10 \text{ kJ/kg}$ ，表面張力係數則為 $\sigma = 0.1 \text{ N/m}$ ，壁面過熱度則為 $\Delta T = 5^\circ \text{C}$ 。上述性質與 [9] 和 [44] 中所模擬二維和三維平板薄膜沸騰的問題一樣，而此性質下的特徵長度則為 $\lambda = 7.22 \text{ mm}$ 。在本問題中所選用的圓管管徑為三倍特徵長 ($D = 21.6 \text{ mm}$)，而由於考量流場對稱性的關係，所以本問題在 $0.04 \text{ m} \times 0.16 \text{ m}$ 的計算域中使用總數為 32000 的網格來進行模擬。圖 9.28 為其介面動態圖，由圖中可知當第一顆氣泡生成後，其並沒有馬上脫離底部氣膜而是以蕈狀的方式向上抬升 ($t = 0.30$ 秒)。當 $t = 0.45$ 秒時，在此蕈狀氣泡將上端將有一個氣泡脫離，而之後底部氣膜持續向上推移最後將形成噴流 ($t = 0.60$ 秒)。圖 9.29 則為壁面平均 Nusselt 數隨時間變化之結果，圖中顯示 Nusselt 數除了前期受到初始條件的影響外，在 0.42 秒以後變化極

小，而最後趨近於穩態。達穩態後的 Nusselt 數為 11.04，而由 Bromly 半經驗式所得之結果則為 7.37，兩者間的差距為 49.7%，此誤差相較於管徑為 $D=0.211mm$ 之結果準確許多。



9.5 多模式(multi-mode)長平板薄膜沸騰

本章已經介紹了水平平板及圓管薄膜沸騰的結果及分析，為了更進一步探討在大尺寸沸騰中氣泡或氣噴流之間的交互作用及影響，因此本節將模擬一組長平板的薄膜沸騰行為以驗證本數值方法在多模式沸騰下的可行性。

本模擬將在總長為 $5\lambda_{d2}$ 且高 $2\lambda_{d2}$ 為的計算域中進行，而其底部過熱氣體界面的初始分布(如圖 9.30)由五十個隨機振幅的擾動波所組成，如下式：

$$y = \frac{\lambda_{d2}}{16} + \left(\frac{-\lambda_{d2}}{128} \right) \sum_{i=1}^{50} R(i) \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{5\lambda_{d2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{5\lambda_{d2}}\right) \right] \quad (9.16)$$

此處 R 為值介於0到1間的隨機常數。底部氣膜上方為飽和液態水，而在高度大於 $5\lambda_{d2}/4$ 的位置上則為飽和氣體，此層氣體用以提供下方氣泡在上升後的脫離。本問題中所選用的流體性質除了流體的黏滯係數外，其餘皆與前兩個小節在鄰近臨界壓力($P=218bar$)的性質相同，而黏滯係數則是維持相同的比例然而其值提高10倍($\mu_l = 4.67 \times 10^{-4} Pas, \mu_g = 3.24 \times 10^{-4} Pas$)。依據 Berenson 模型所推導的平板薄膜的理論厚度與 $Gr^{1/4}$ 成反比，亦即當選用的流體性質其 Grashof 數越大則薄膜厚度越薄，此問題對於數值模擬將會造成相當大的困擾，因為厚度越薄所需要的網格解析度就越高。若採均勻網格來處理這類的問題，將會導致整體所需的網格數過多而造成計算資源的浪費。以 9.3 節的問題為例，長度 λ_{d2} 就大概需要 360 個網格來解析，若依照此解析度來模擬本節的問題，其總網格數將達到 129.6 萬，這在執行上

將曠日廢時，因此本文在此問題上透過使用更大的黏滯係數來提高流體本身的 Grashof 數，使理論厚度增加以降低所需的網格數量，在[9, 46]中亦使用相同方式。經由上述的調整，以下將以網格解析度 640×256 為來模擬本問題且左右兩側分別為對稱邊界條件、上方為出口邊界至於底部則為過熱牆邊界條件，其過熱度則選用 $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ 。

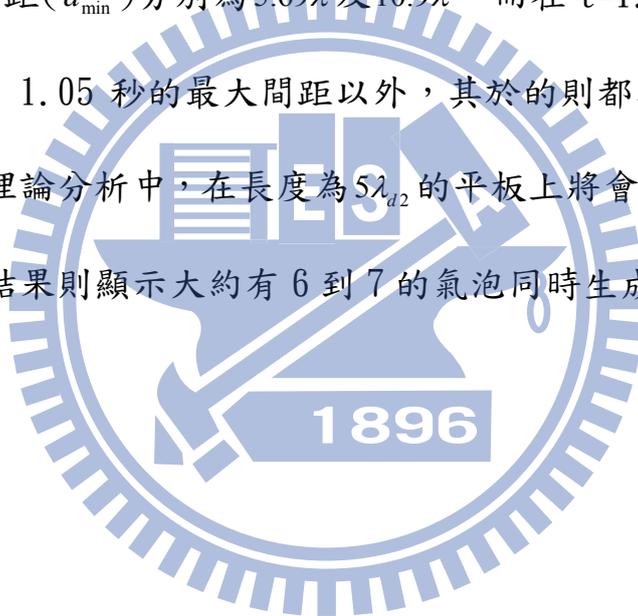
圖 9.31 為底部平板平均的 Nusselt 數隨時間變化的情形，而圖 9.32 及 9.33 則分別為介面及溫度的動態圖。初始狀態介面上的擾動波將因表面張力的作用而開始整併，進而形成振幅及波長較大的擾動($t=0.24$ 秒)，此時可清楚觀察到左側已出現一個明顯的波峰。因底板持續加熱的作用下，氣化的氣體將開始往此波峰來聚集，到了 $t=0.32$ 秒時此波峰處已經形成第一個氣泡。隨著時間的推移整個流場中將出現更多個波峰，由 $t=0.38$ 秒的圖中可發現此時將出現另外五個波峰，並且因其擾動的振幅大小不同而有不同的氣泡成長形態。另外最早所形成的氣泡也開始在其上半部碎裂成小氣泡而脫離液體層。而 $t=0.47$ 秒時，可發現初始所產生的六個波峰處雖然其生成的形狀不一，但皆已有氣泡或噴流(最右側邊界上)的產生，此刻底部的薄膜將出現許多極薄的位置，這些位置上的熱傳極佳，因此會提升了壁面處整體的平均熱傳量，由圖 9.31 也可以清楚看出在 $t=0.5$ 秒左右 Nusselt 數將出現極大值。之後由於氣泡脫離後受到表面張力恢復力的關係，將使介面開始往下拉回，此時底部氣膜開始加厚而導致 Nusselt 數的

下降，由 $t=0.85$ 秒的圖便可發現整個計算域中已經幾乎沒有氣泡的生成，此刻壁面處的平均 Nusselt 數也達到最低點。上述為長平板薄膜沸騰其氣泡生成及脫離的過程，由 $t=0.97$ 秒之後的介面動態圖可知，上述的過程隨時間的發展不斷循環，此現象亦可由 Nusselt 數隨時間的變化圖來說明。在整個沸騰過程中除了可發現氣體以各種型態的方式來離開加熱面外，更可發現氣泡或噴流間相互吸引或合併的過程(如 $t=0.38$ 到 0.59 秒左側兩個位置)。另外，過程中亦可發現噴流因 Kelvin-Helmoltz 不穩定性的發生而產生斷裂的情況(如 $t=1.05$ 秒氣泡生成的第五個位置及 $t=1.15$ 秒最右側邊界上)。除了上述氣泡多樣性的變化外，經由整體沸騰的動態圖可知平均的液面高度將因液體氣化的關係而逐漸地下降。

在圖 9.31 中，本文亦將模擬所得的時均化 Nusselt 數與 Berenson 和 Klimenko 半經驗式所得的數值做比較，此半經驗式的結果是由飽和態性質與 Ja^* 所計算出。圖中顯示平均 Nusselt 數初期因各位置上氣泡生成脫離之時間較為同步，因此 Nusselt 數隨時間以較大的振幅來變化。然而在 $t=1.6$ 秒後，Nusselt 數變化的振幅相對較小，這起因於後期流場內各氣泡生成脫離氣膜的時間較不一致，而且流場中以噴流型態將氣體帶離加熱面的情況也增多(圖 9.32, $t=2.00$ 秒)。圖 9.31 中的時均化 Nusselt 數是由除了第一個受初使值所影響的周期以外，其餘時間積分所得之結果，其值為 3.59。至於 Berenson 與 Klimenko 之結果則分別為 3.05 和 3.67。圖中顯示在多模

式長平板薄膜沸騰的問題中，本研究所模擬之結果與後者較為接近，其誤差為 2.2%。

在長平板的膜沸騰中，其他值得分析的資料分別為流場內氣泡生成的數目及兩氣泡生成位置的間距。根據 Hosler 及 Westwater[81]的觀察平均氣泡生成間距(d)的範圍落在泰勒波長($\lambda_c = 2\lambda$)與最危險泰勒波長($\lambda_{d2} = 2\pi\sqrt{3}\lambda$)之間。由圖 9.32 可發現，在 $t=0.47$ 秒時氣泡生成位置的最大(d_{max})及最小間距(d_{min})分別為 5.69λ 及 10.9λ ，而在 $t=1.05$ 秒則分別為 7.58λ 及 12.79λ 。除了 1.05 秒的最大間距以外，其餘的則都有符合上述的範圍。而根據[82]的理論分析中，在長度為 $5\lambda_{d2}$ 的平板上將會有 6 個氣泡產生，而由本文模擬的結果則顯示大約有 6 到 7 的氣泡同時生成於流場之中。



Grid	90×180	120×240	180×360	240×480
Period (sec)	0.184	0.185	0.188	0.189
\overline{Nu}	5.17	5.34	5.43	5.50

表六 二維平板薄膜沸騰於不同網格之氣泡生成周期及時均化 Nusselt 數

$T (^{\circ}C)$	$k (W/mK)$	$C (kJ/kgK)$	$\mu (Pas)$
373.00	0.5383	352	3.230×E-5
374.66	0.2502	43.18	2.912×E-5
376.33	0.2126	28.54	2.825×E-5
378.00	0.1918	22.27	2.775×E-5
379.66	0.1777	18.64	2.743×E-5
381.33	0.1673	16.22	2.720×E-5
383.00	0.1591	14.48	2.704×E-5
384.67	0.1524	13.16	2.692×E-5
386.33	0.1468	12.11	2.683×E-5
388.00	0.1421	11.26	2.676×E-5

表七 過熱氣體性質表 ($P_{sat} = 218bar$, $T_{sat} = 373^{\circ}C$)

	$\Delta T = 10^{\circ}C$	$\Delta T = 18^{\circ}C$	$\Delta T = 20^{\circ}C$	$\Delta T = 25^{\circ}C$	$\Delta T = 30^{\circ}C$	$\Delta T = 40^{\circ}C$
\overline{Nu}	5.43	5.55	7.14	5.89	8.00	8.07
Nu_B	5.27	4.82	4.75	4.59	4.47	4.28
Nu_K	4.85	4.40	4.35	4.25	4.17	4.03

表八 二維平板薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表

$\Delta T (^{\circ}C)$	\overline{Nu}	Nu_c
10	23.3	7.69
20	24.6	6.92
30	26.0	6.52
200 (P=1atm, [55])	5.40	1.76

表九 二維水平圓管薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表

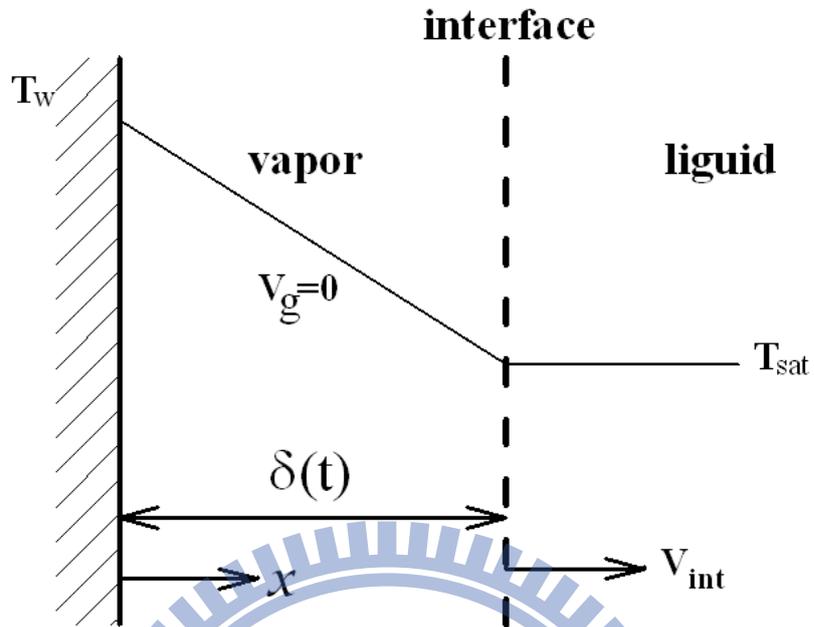


圖 9.1 一維飽和液體汽化問題之示意圖

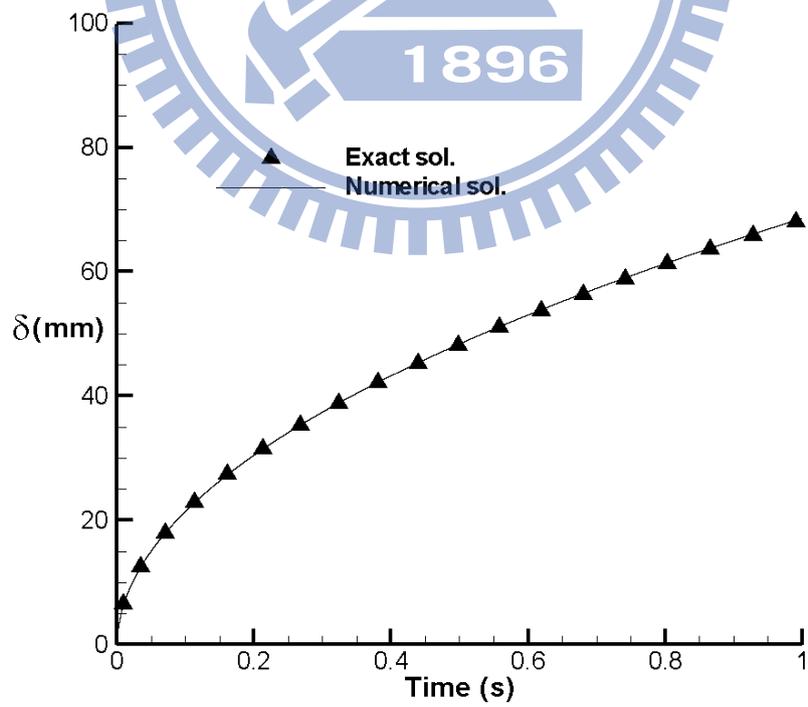


圖 9.2 一維飽和液體汽化問題之介面位置隨時間變化圖

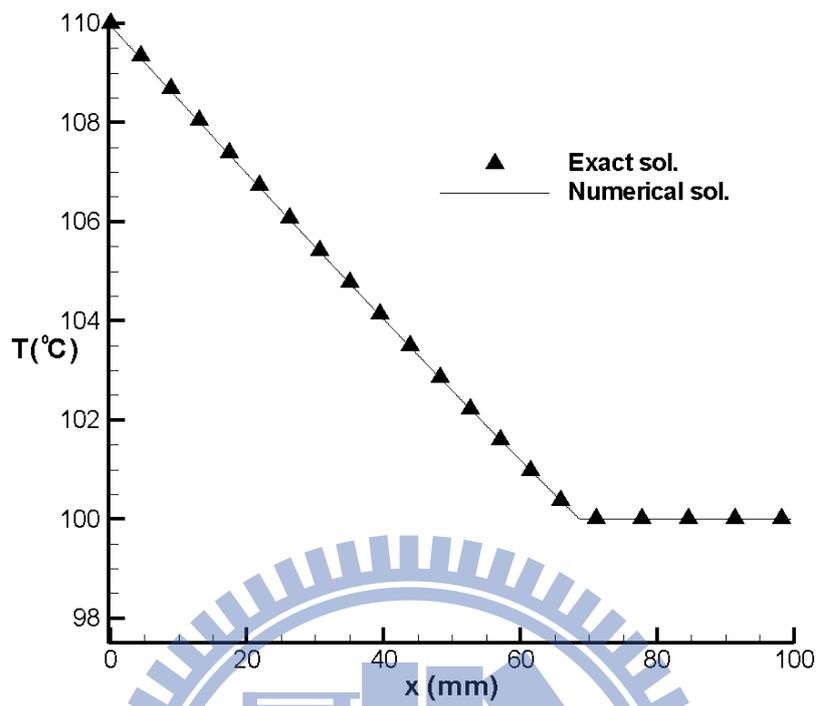


圖 9.3 一維飽和液體汽化問題之溫度分布圖 ($t=1s$)

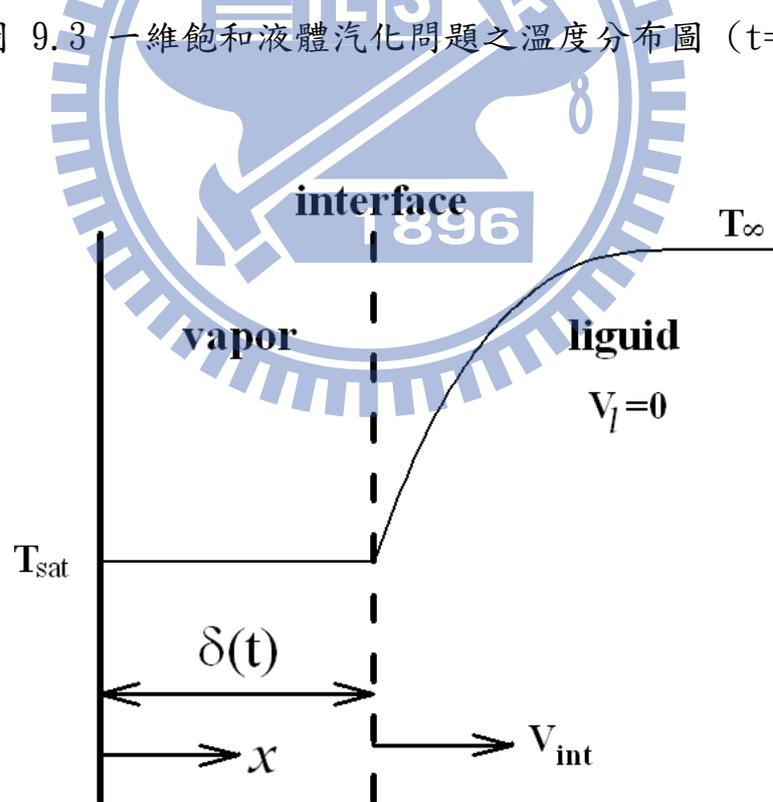


圖 9.4 一維過熱液體汽化問題之示意圖

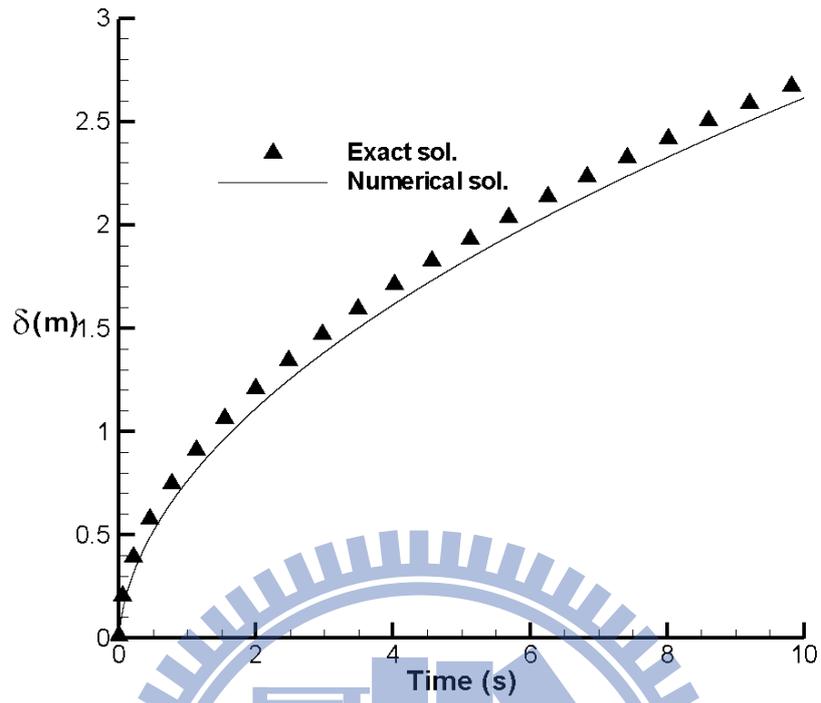


圖 9.5 一維過熱液體汽化問題之介面位置隨時間變化圖

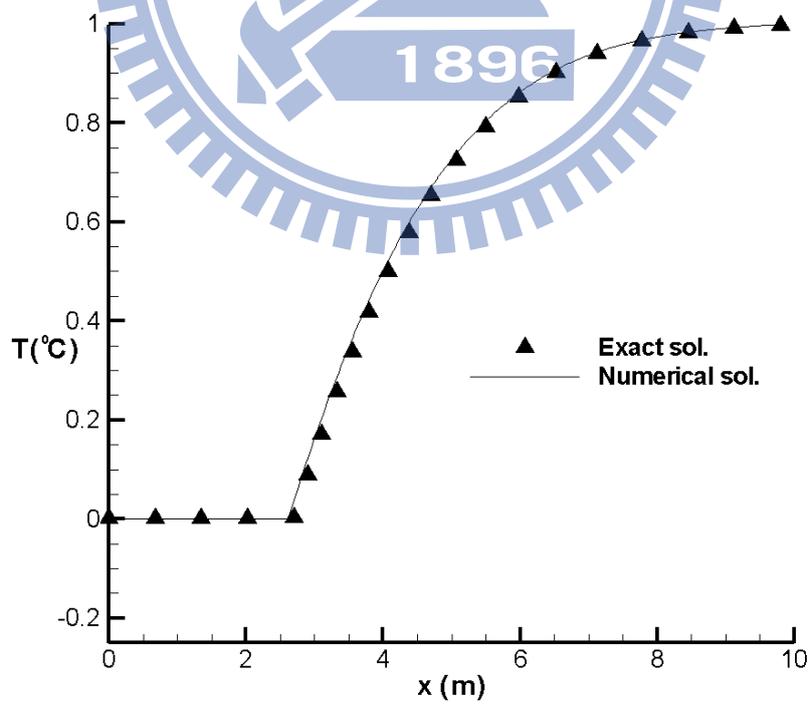


圖 9.6 一維過熱液體汽化問題之溫度分布圖 (t=10s)

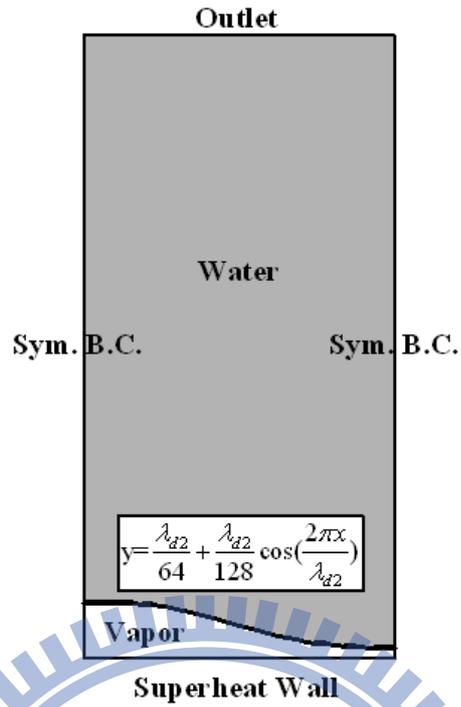


圖 9.7 水平平板薄膜沸騰之示意圖

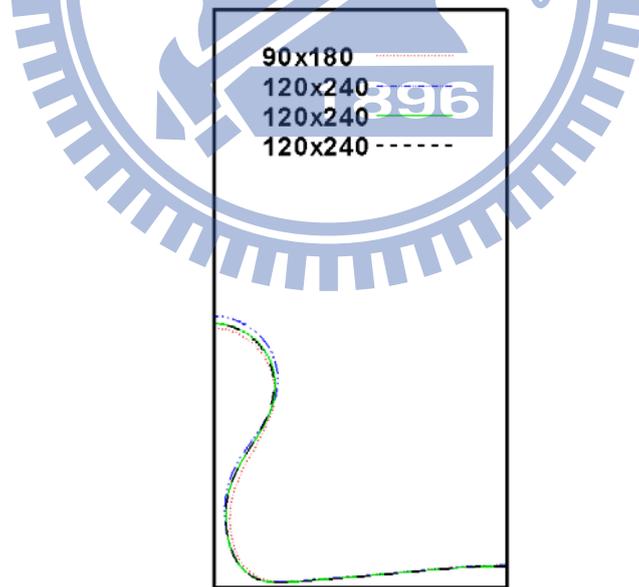


圖 9.8 不同網格解析度之氣泡外型比較圖

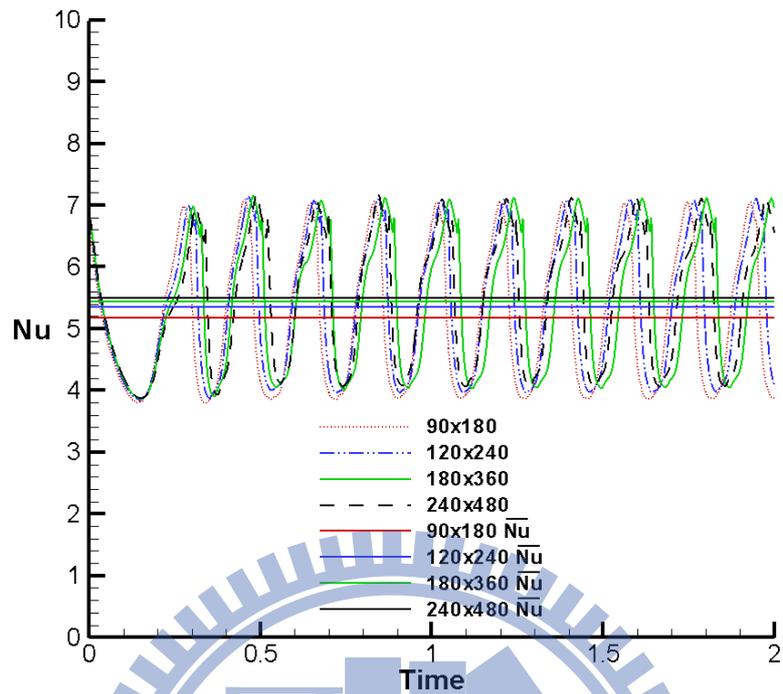
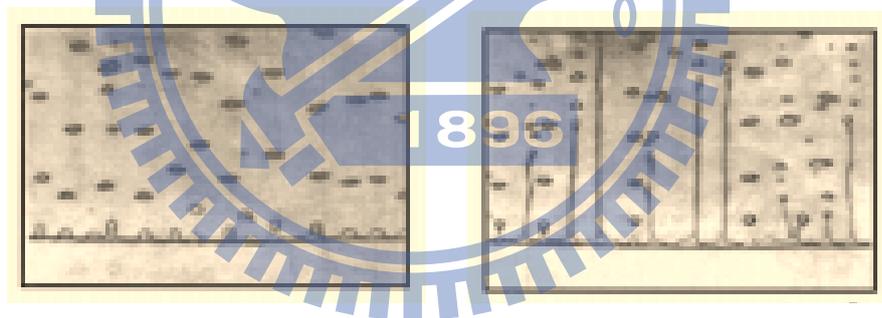
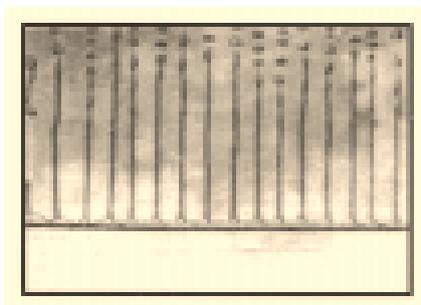


圖 9.9 不同網格解析度之 Nusselt 數隨時間變化圖

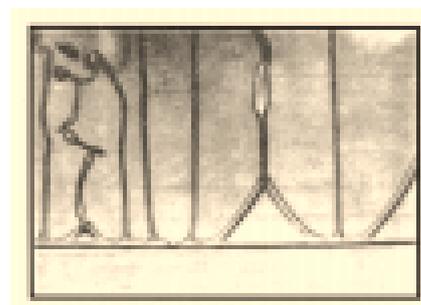


(a) $16.21W/cm^2$

(b) $21.49W/cm^2$

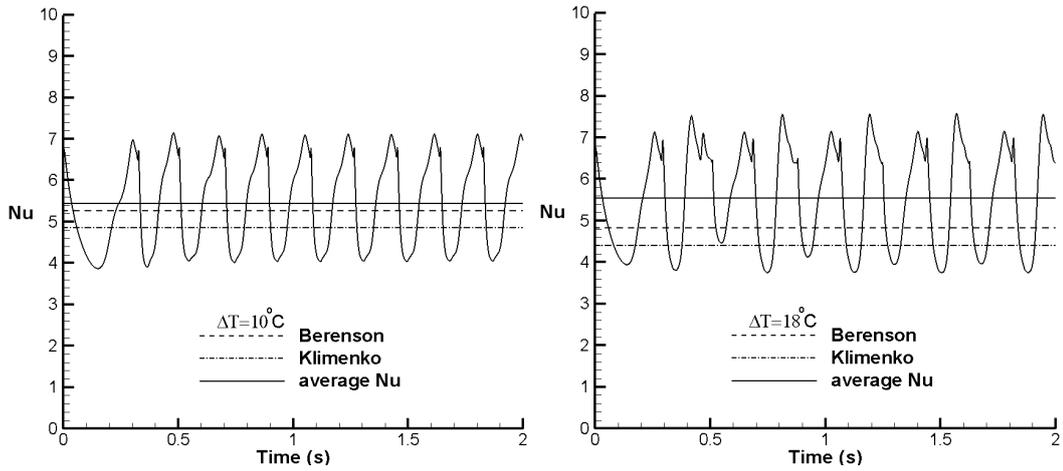


(c) $27.10W/cm^2$



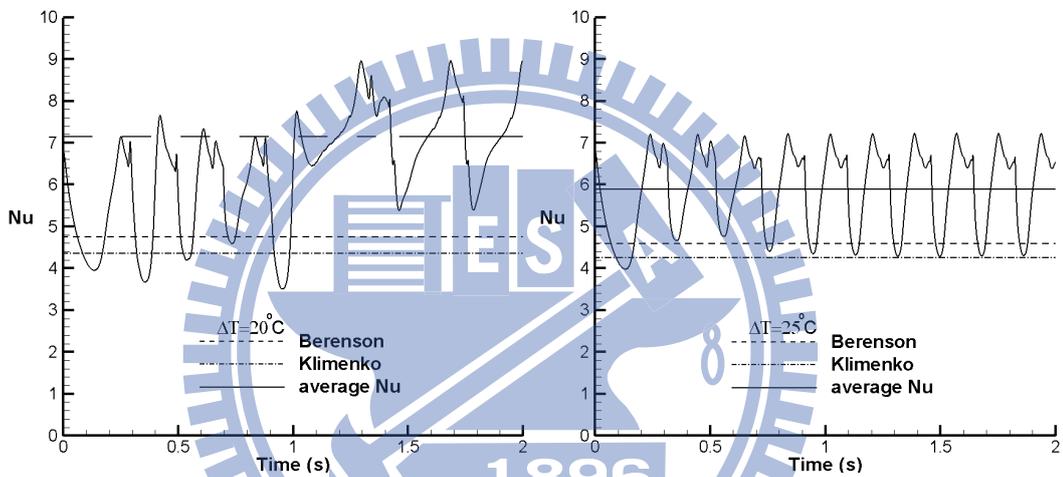
(d) $30.05W/cm^2$

圖 9.10 在近臨界壓力下不同熱通量的薄膜沸騰之實驗結果[8, 78]



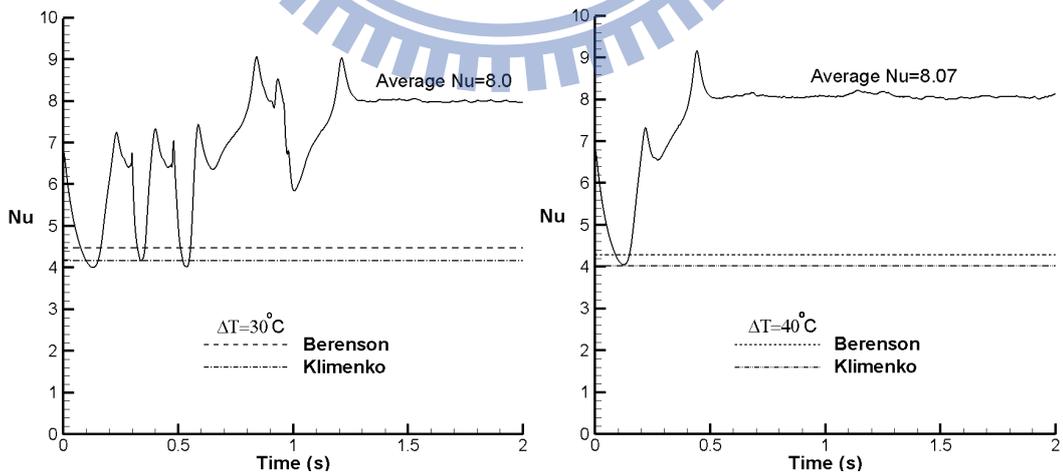
(a) $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

(b) $\Delta T = 18^\circ\text{C}$



(c) $\Delta T = 20^\circ\text{C}$

(d) $\Delta T = 25^\circ\text{C}$



(e) $\Delta T = 30^\circ\text{C}$

(f) $\Delta T = 40^\circ\text{C}$

圖 9.11 水平平板薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖

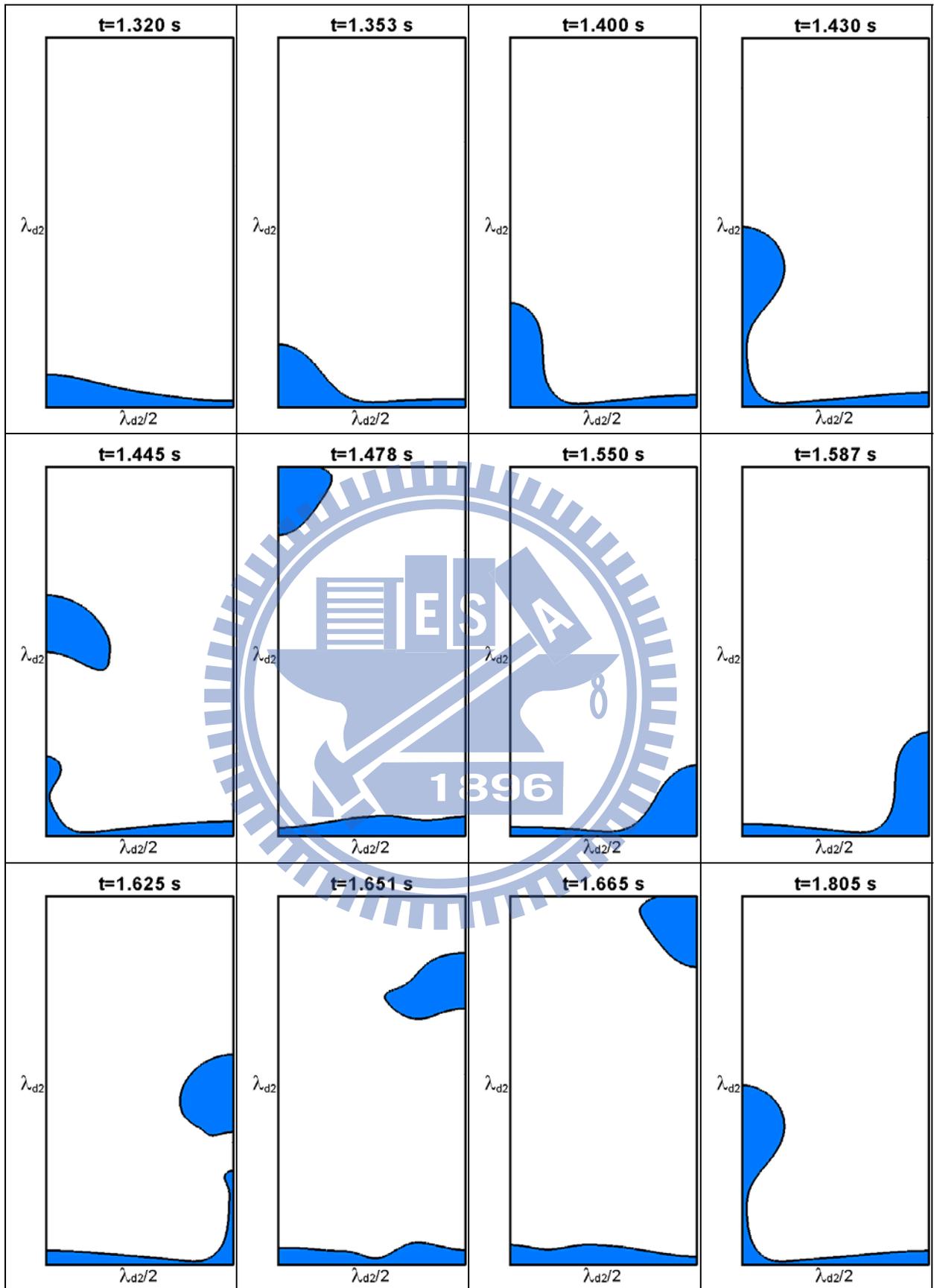


圖 9.12 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 10^\circ C$)

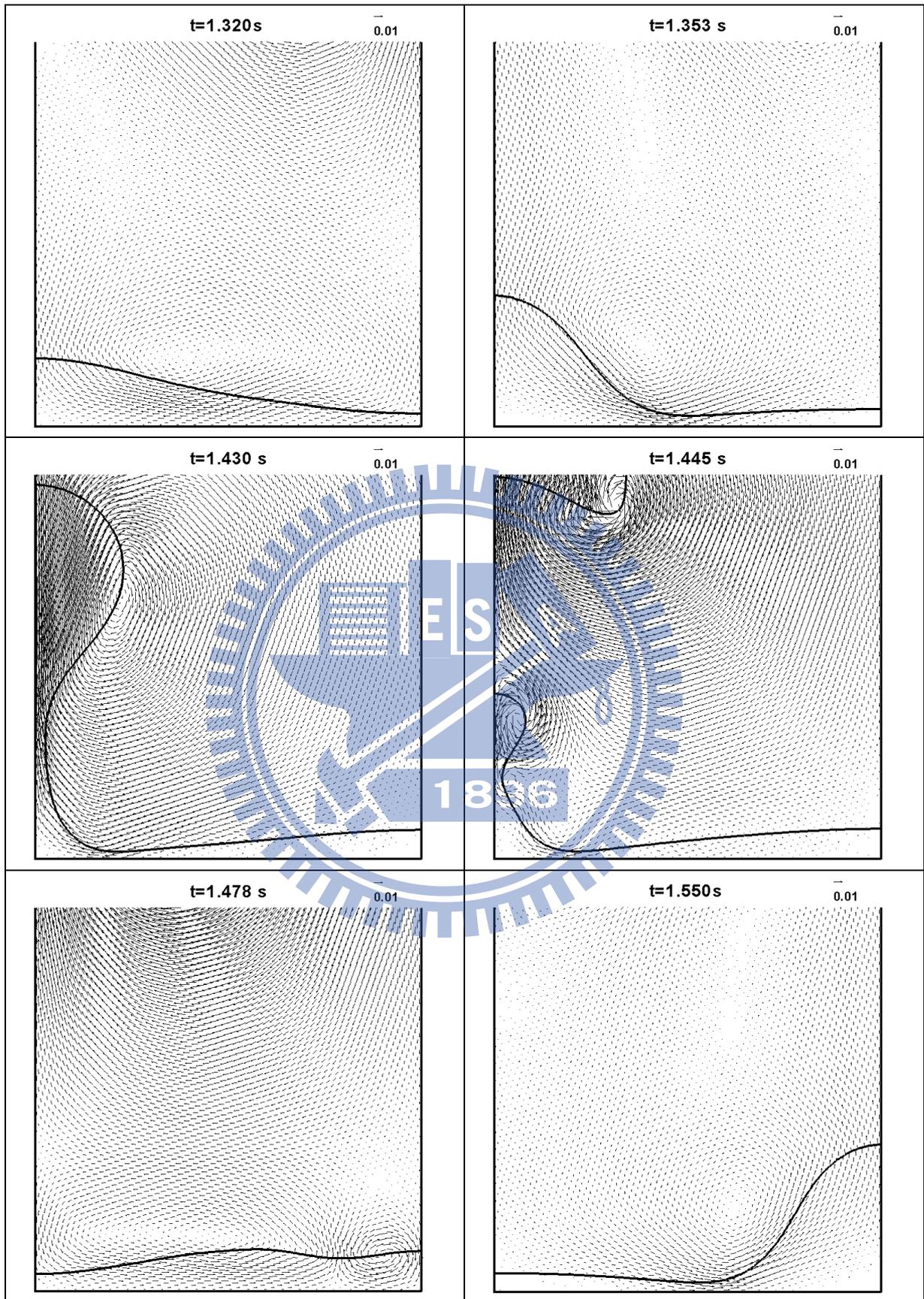


圖 9.13 介面和速度向量之分布圖($\Delta T = 10^\circ\text{C}$)

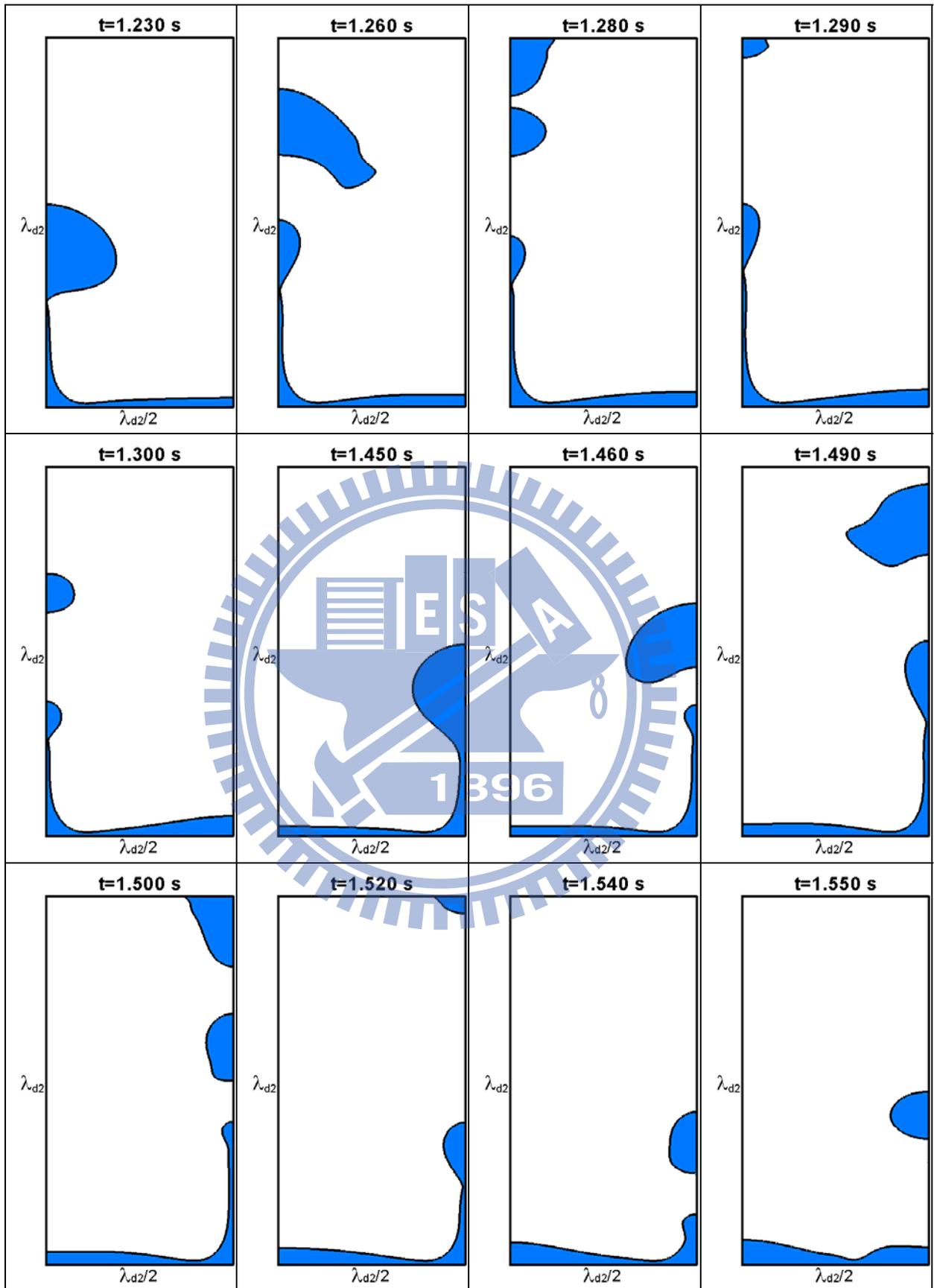


圖 9.14 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 17^\circ C$)

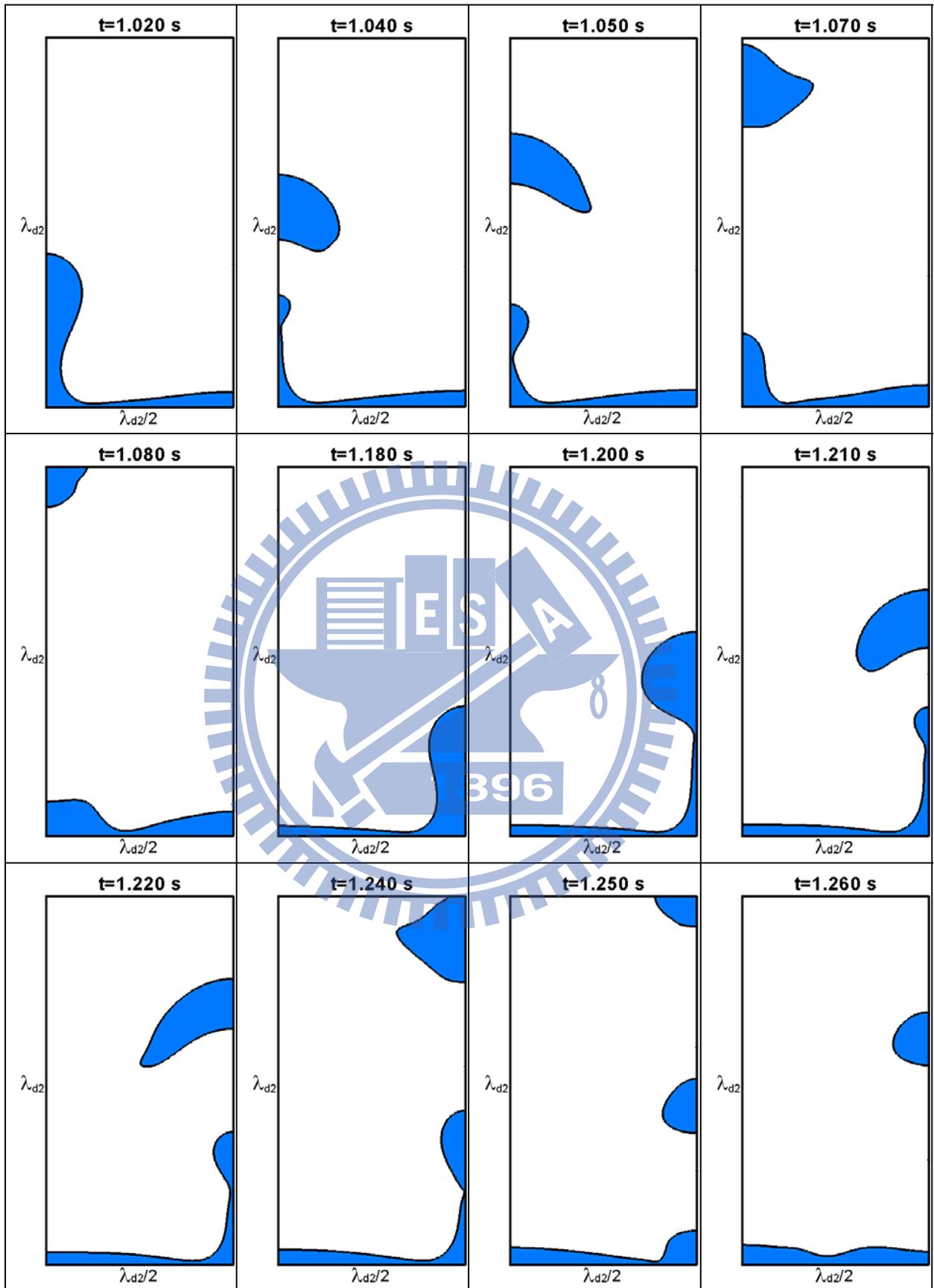


圖 9.15 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 18^\circ\text{C}$)

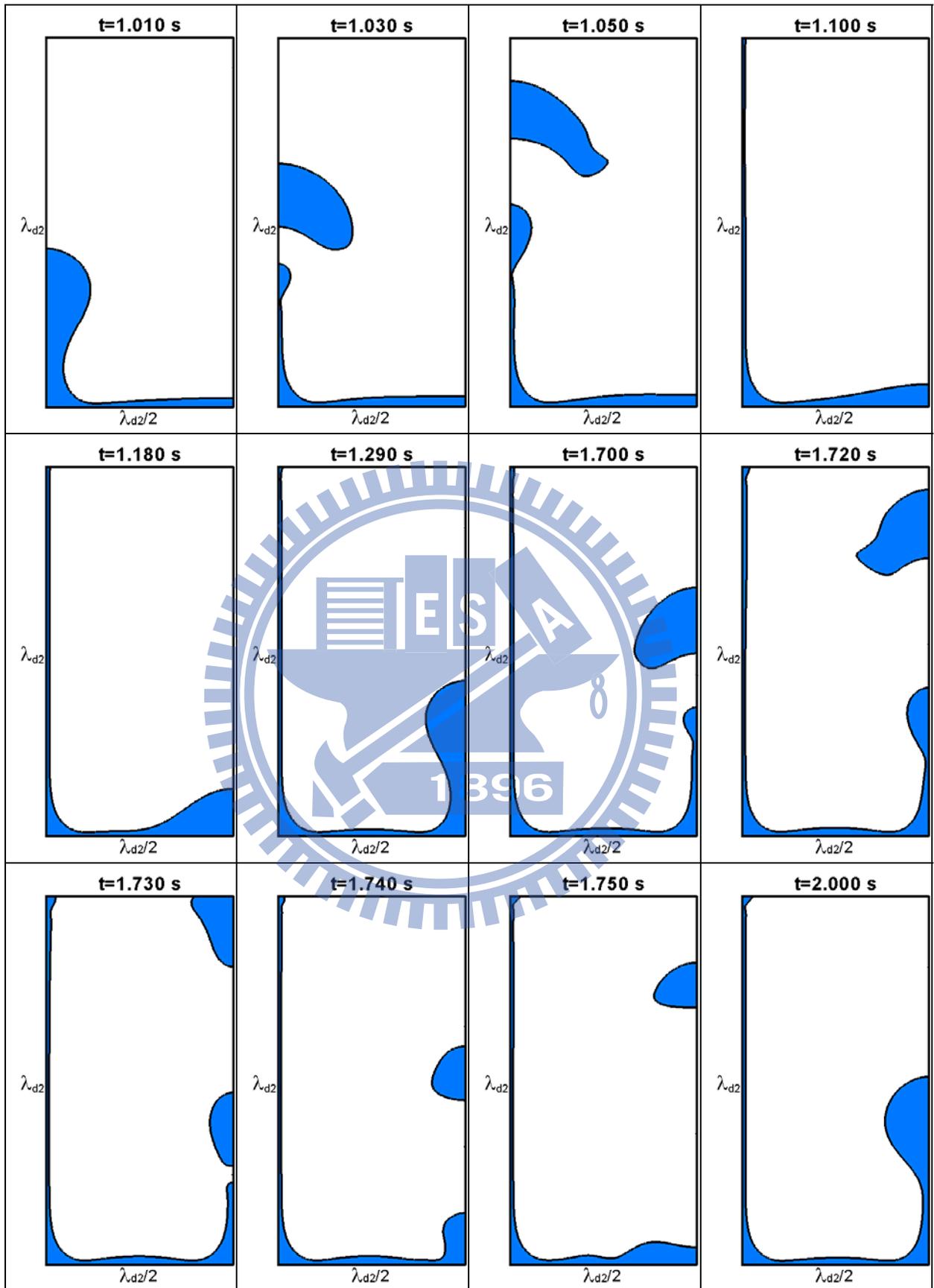


圖 9.16 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 20^\circ\text{C}$)

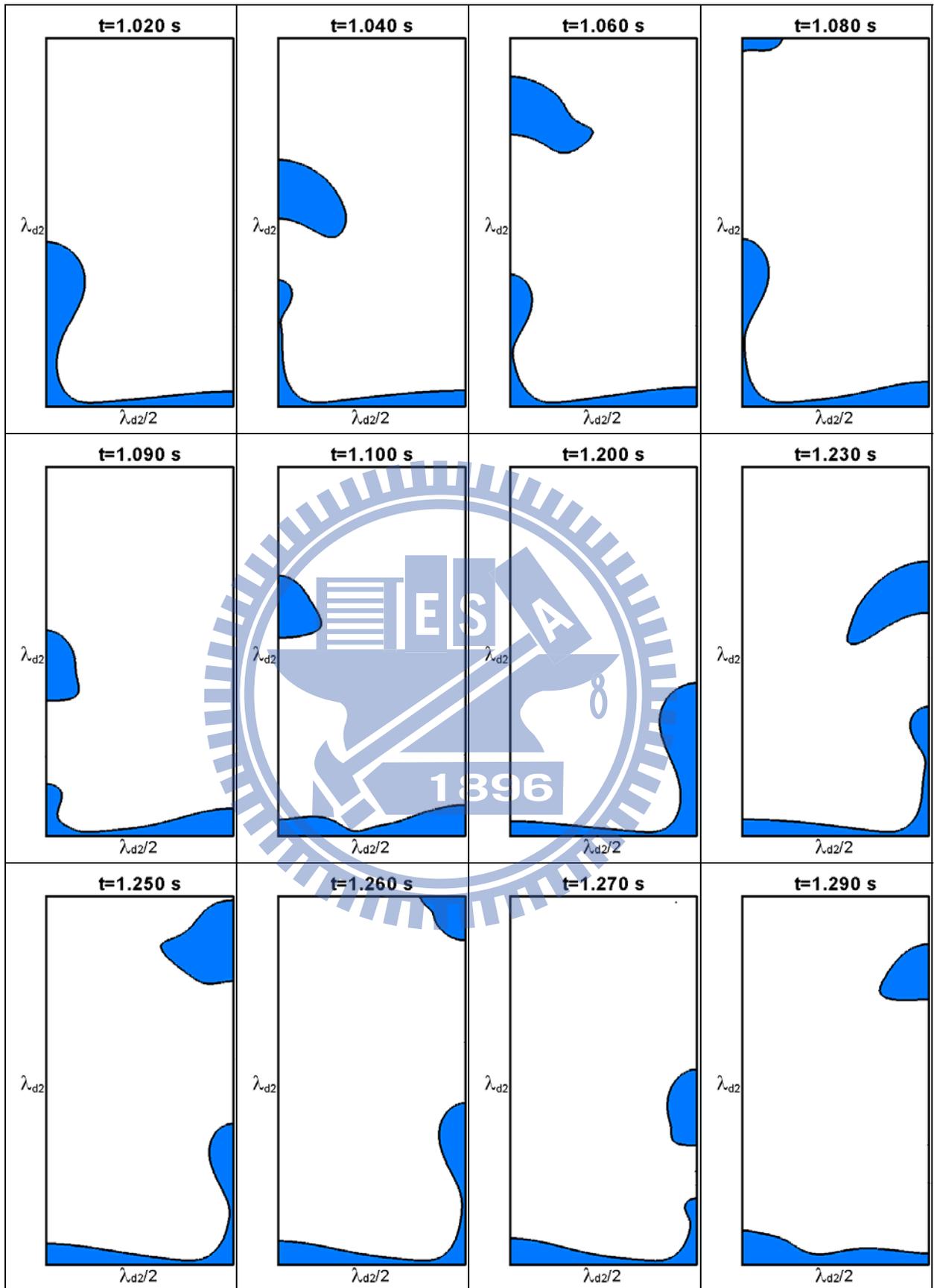


圖 9.17 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 25^\circ\text{C}$)

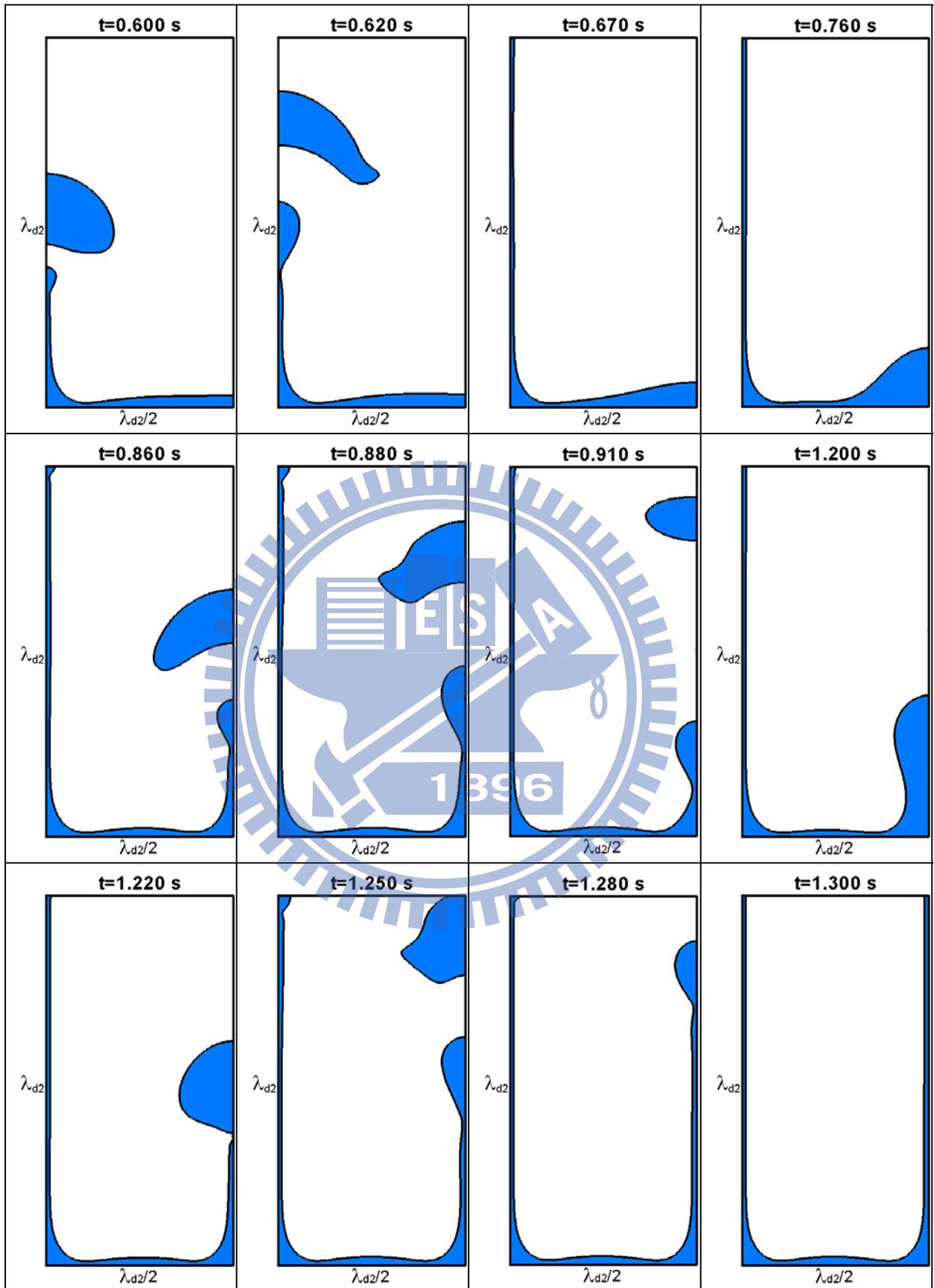


圖 9.18 水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 30^\circ\text{C}$)

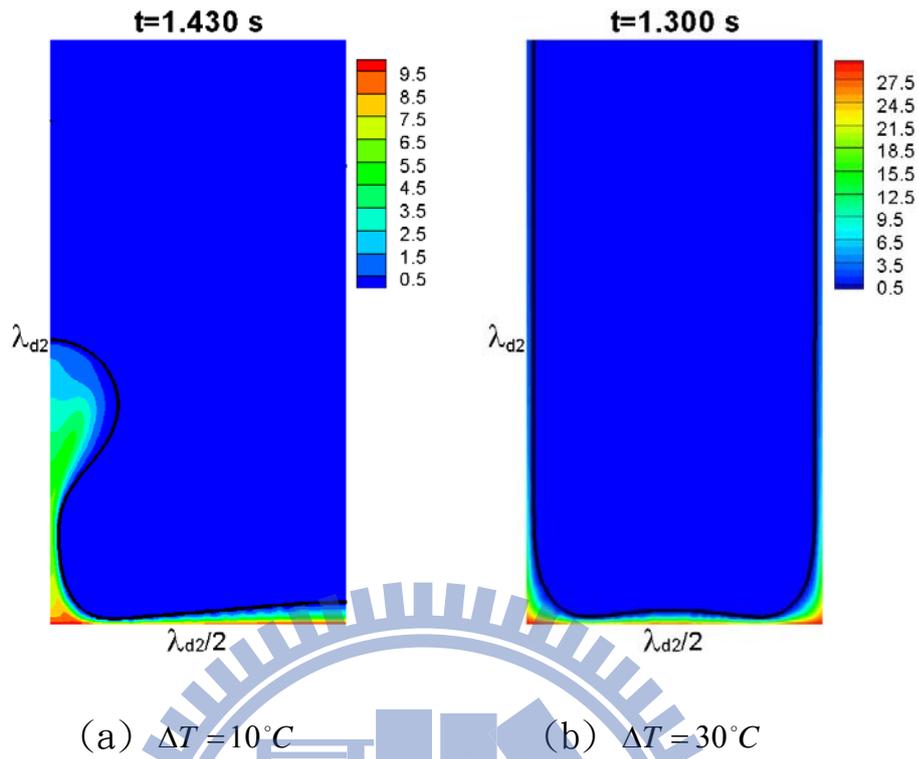


圖 9.19 介面及溫度分布圖

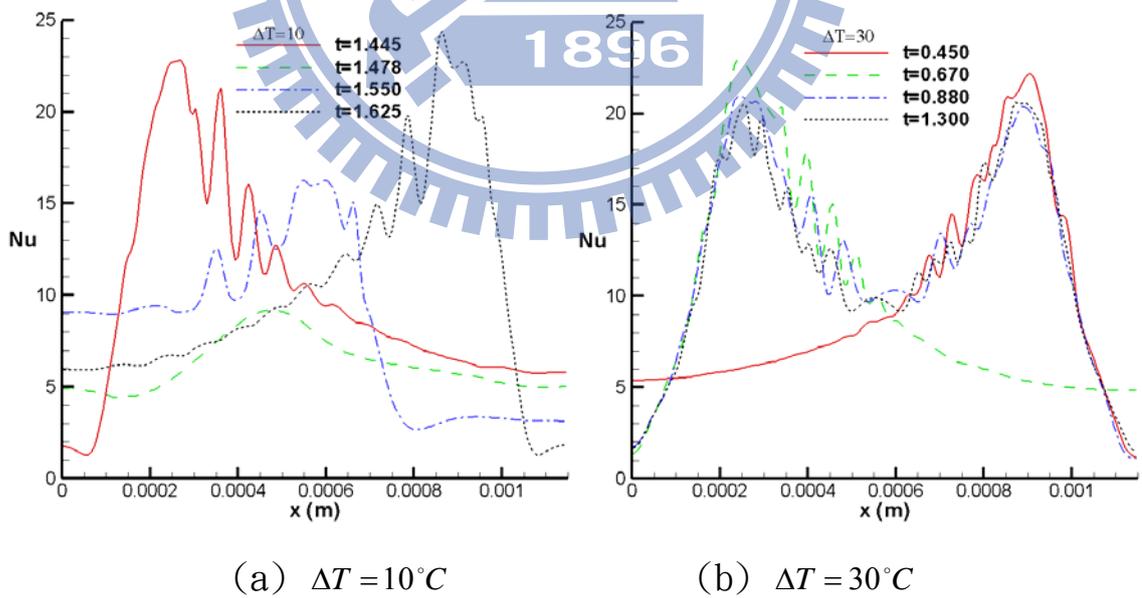


圖 9.20 壁面處 Nusselt 數沿 x 軸分布圖

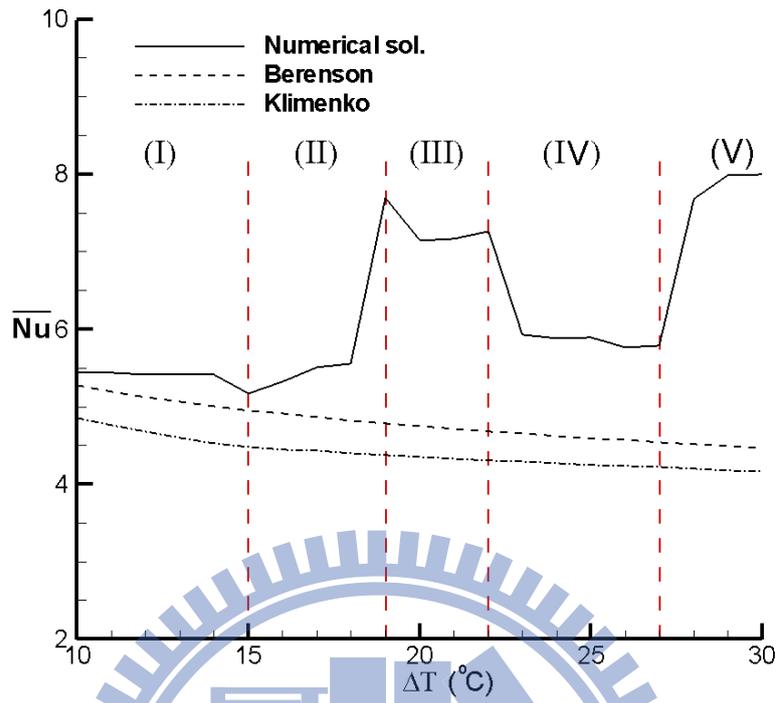


圖 9.21 壁面過熱度與時均化 Nusselt 數之關係圖

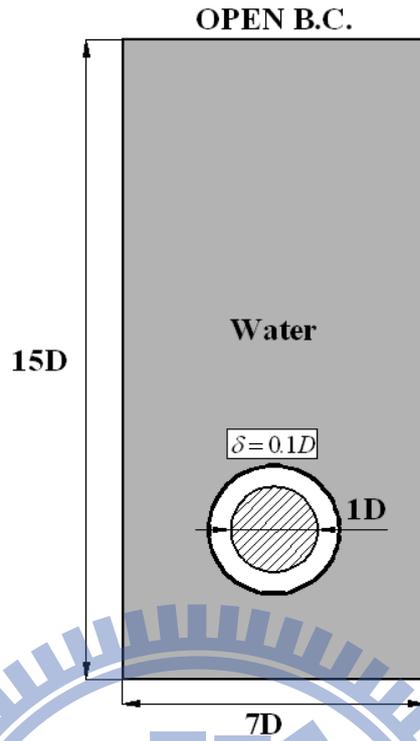


圖 9.22 水平圓管薄膜沸騰之示意圖

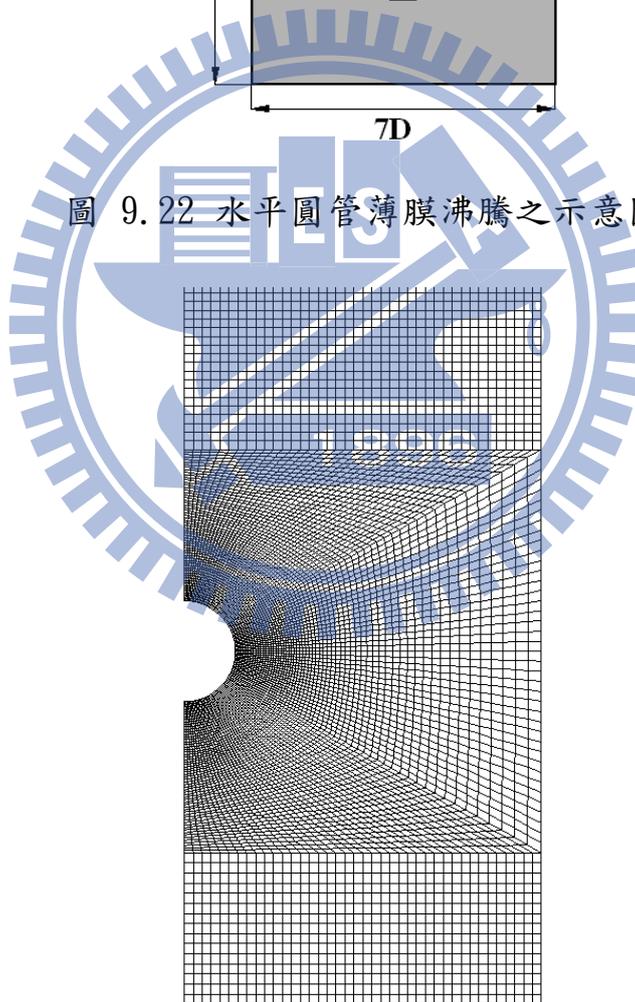
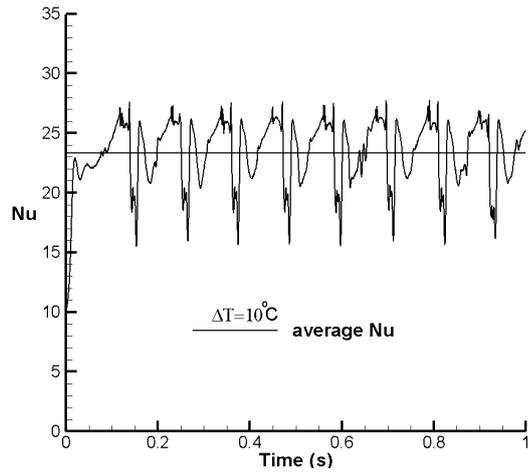
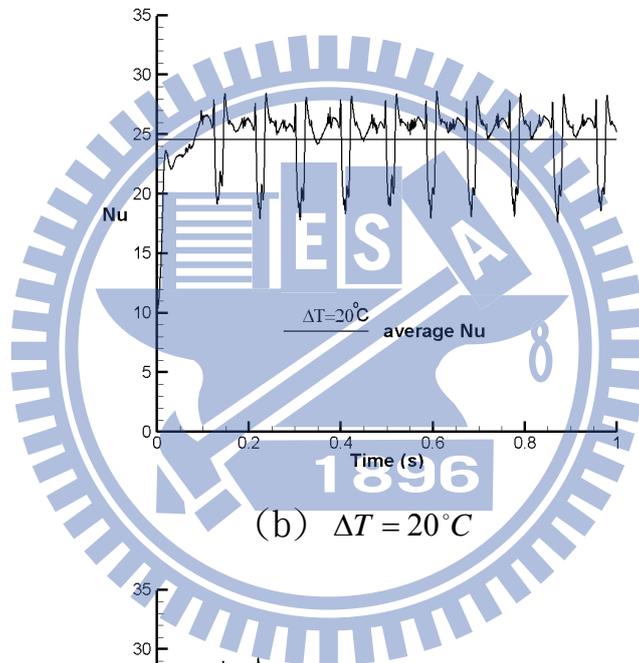


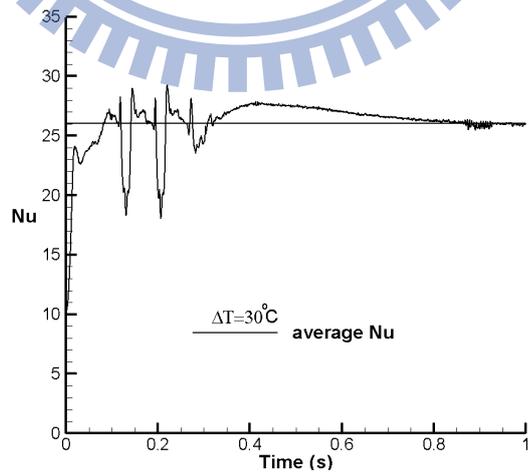
圖 9.23 水平圓管薄膜沸騰所使用之網格(總數 12200)



(a) $\Delta T = 10^{\circ}C$



(b) $\Delta T = 20^{\circ}C$



(c) $\Delta T = 30^{\circ}C$

圖 9.24 水平圓管薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖 ($D = 0.211mm$)

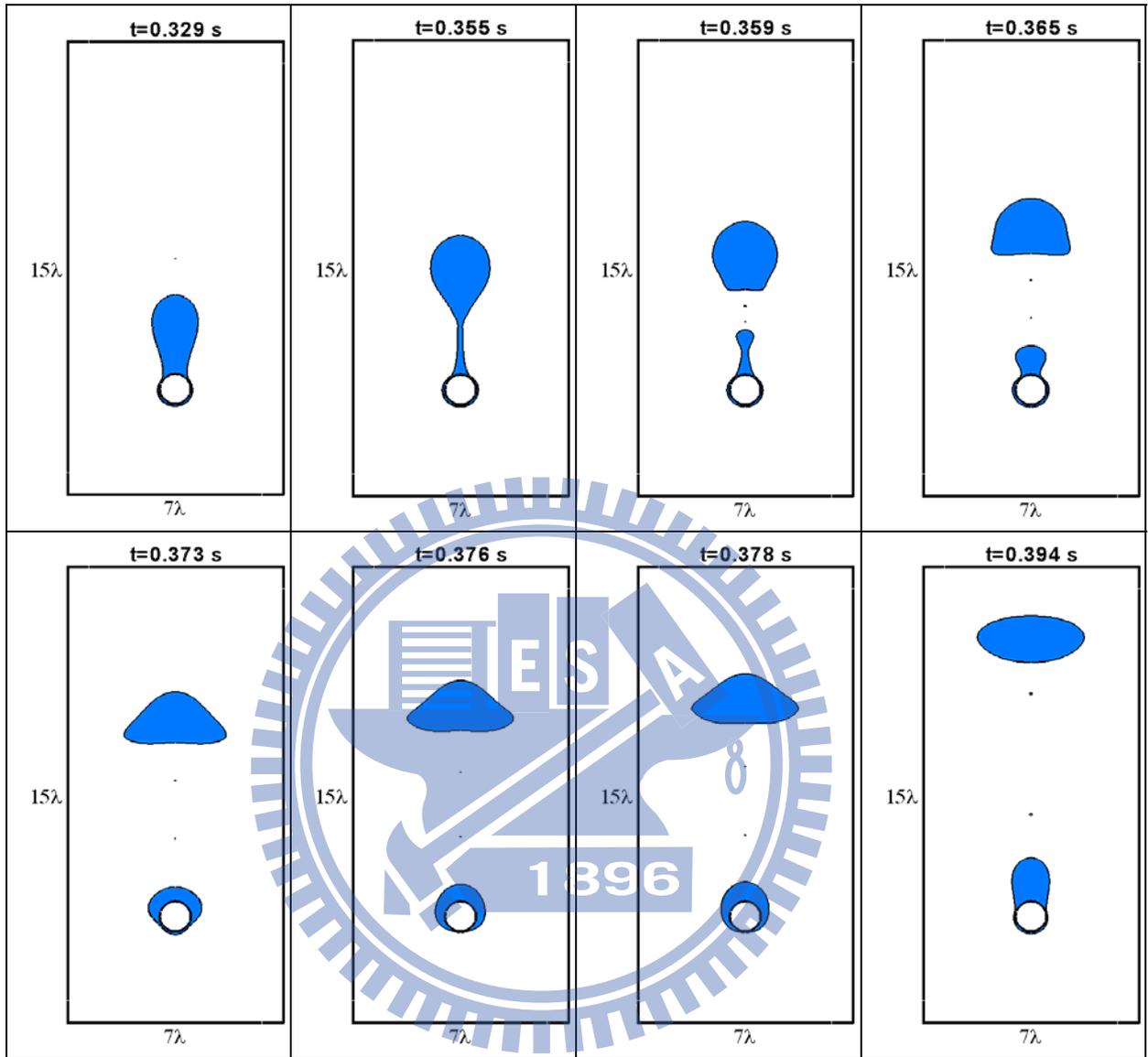


圖 9.25 水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$)

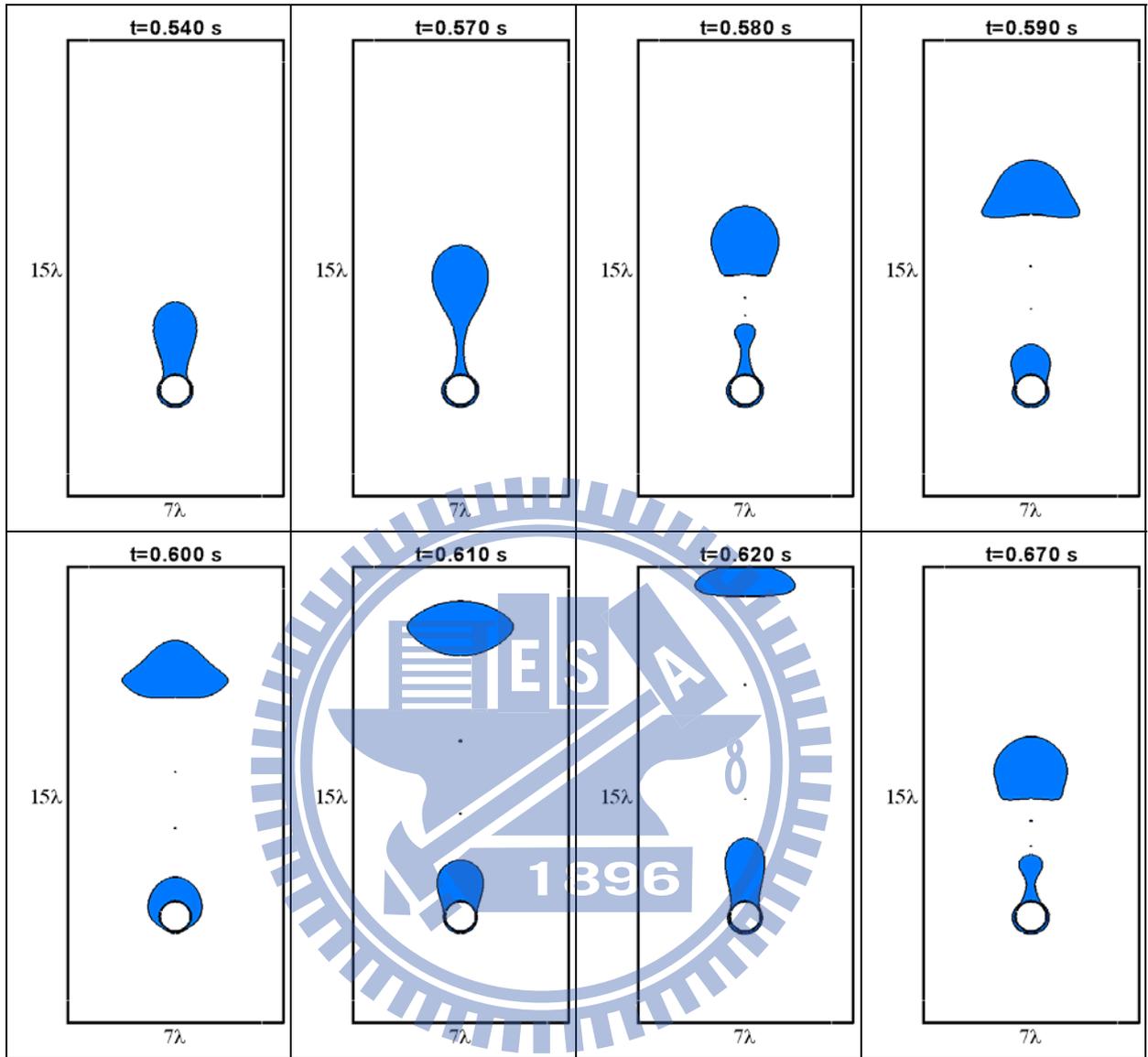


圖 9.26 水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 20^\circ\text{C}$)

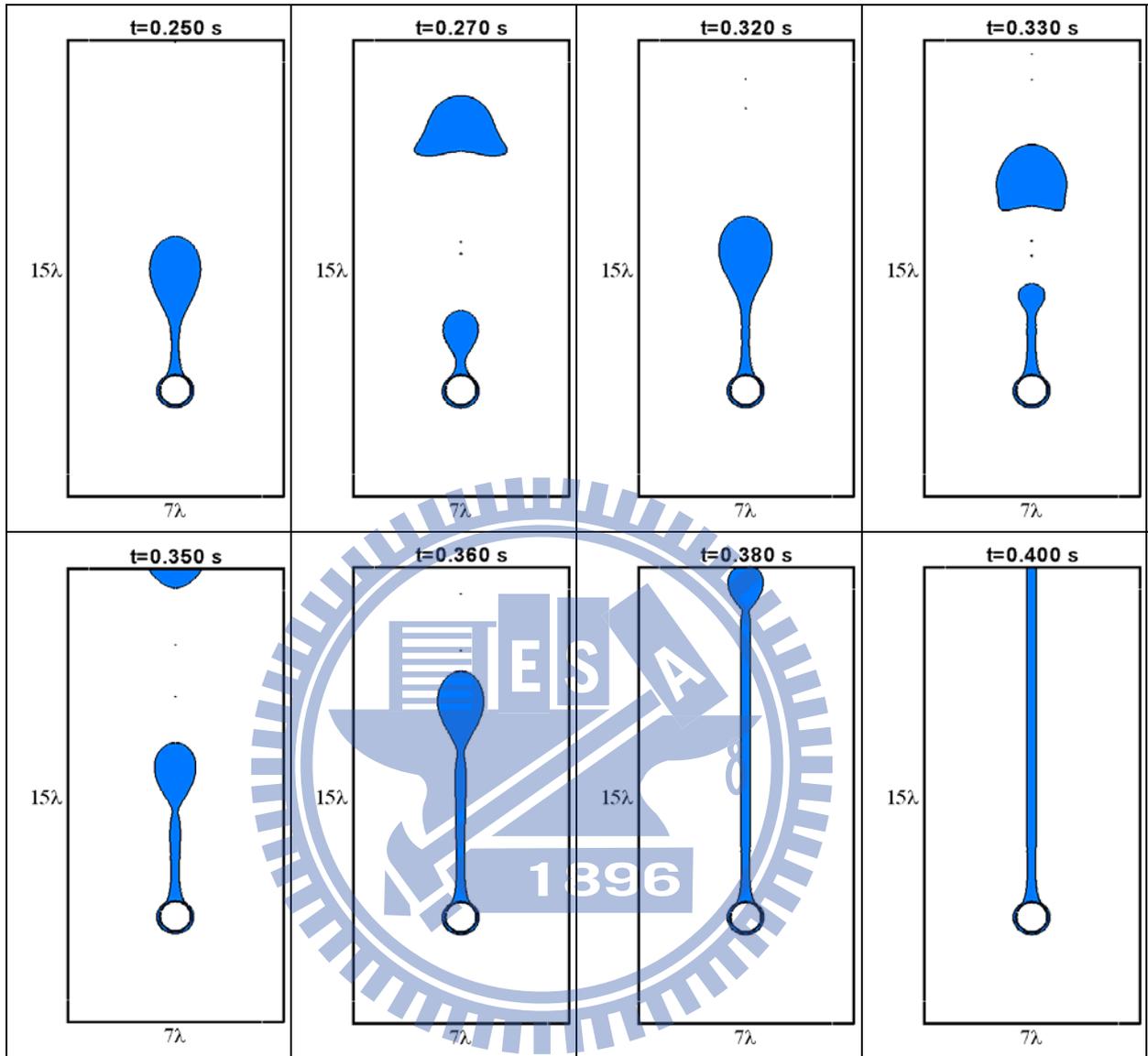


圖 9.27 水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 0.211\text{mm}$, $\Delta T = 30^\circ\text{C}$)

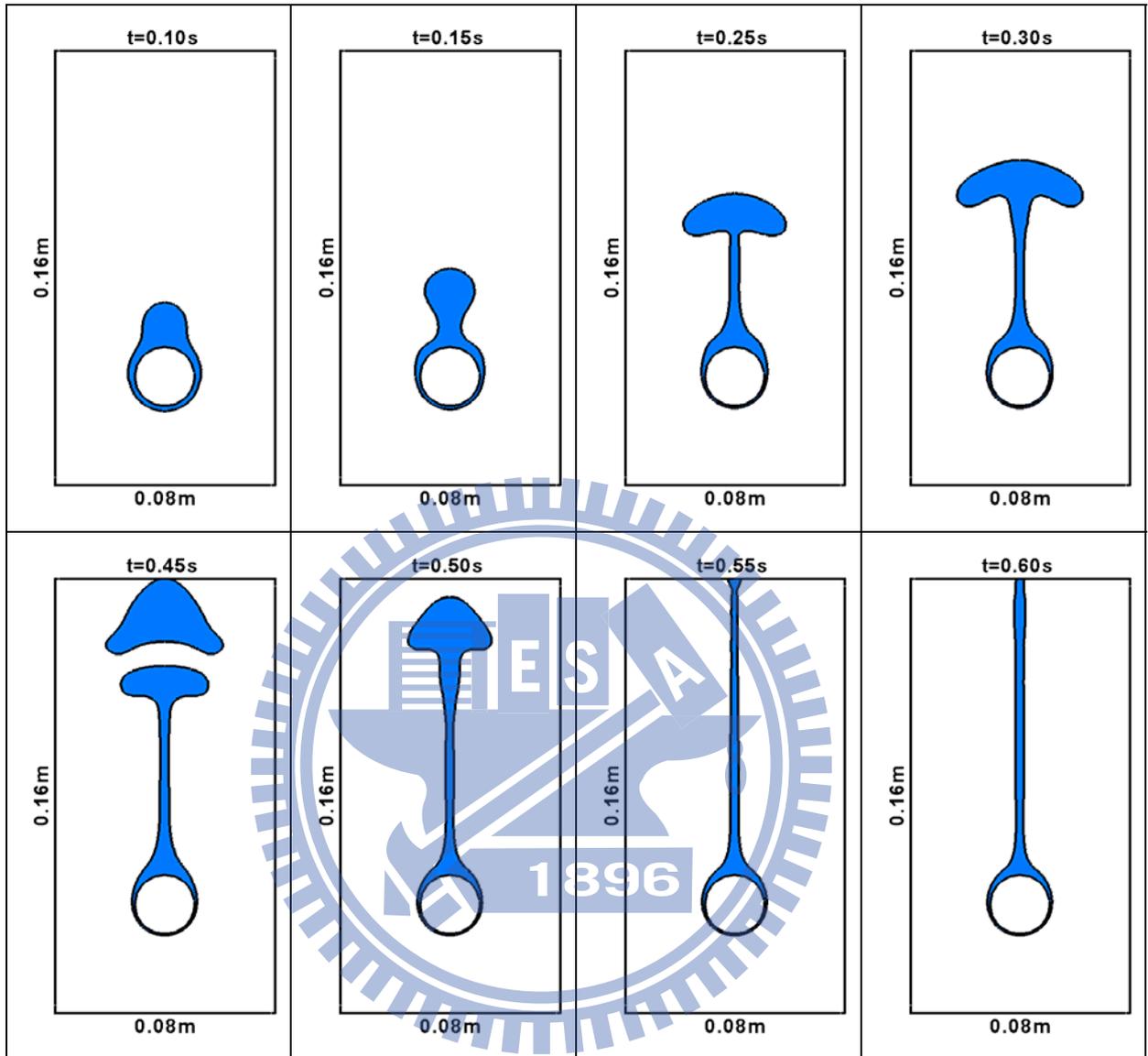


圖 9.28 水平圓管薄膜沸騰之動態圖 ($D = 21.6\text{mm}$, $\Delta T = 5^\circ\text{C}$)

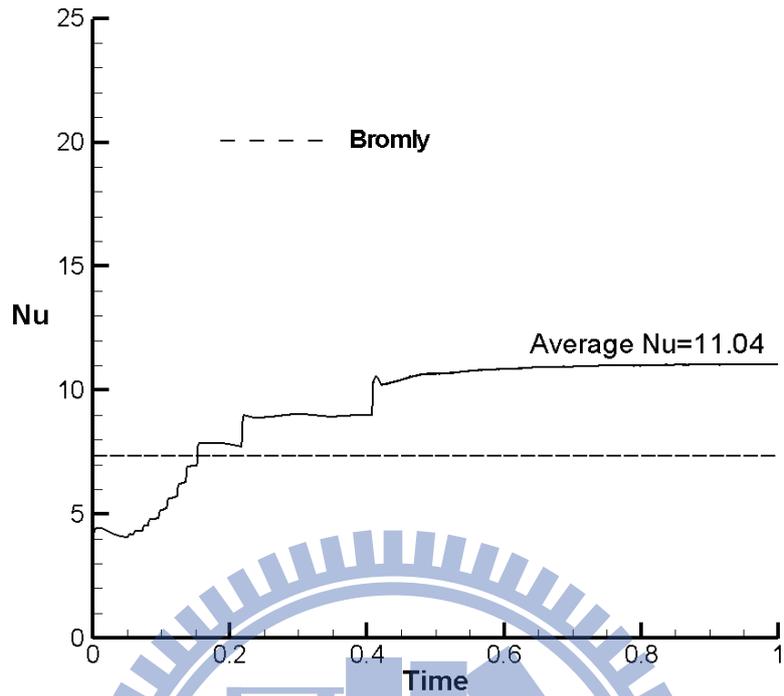


圖 9.29 水平圓管薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間之變化圖 ($D = 21.6\text{mm}$)

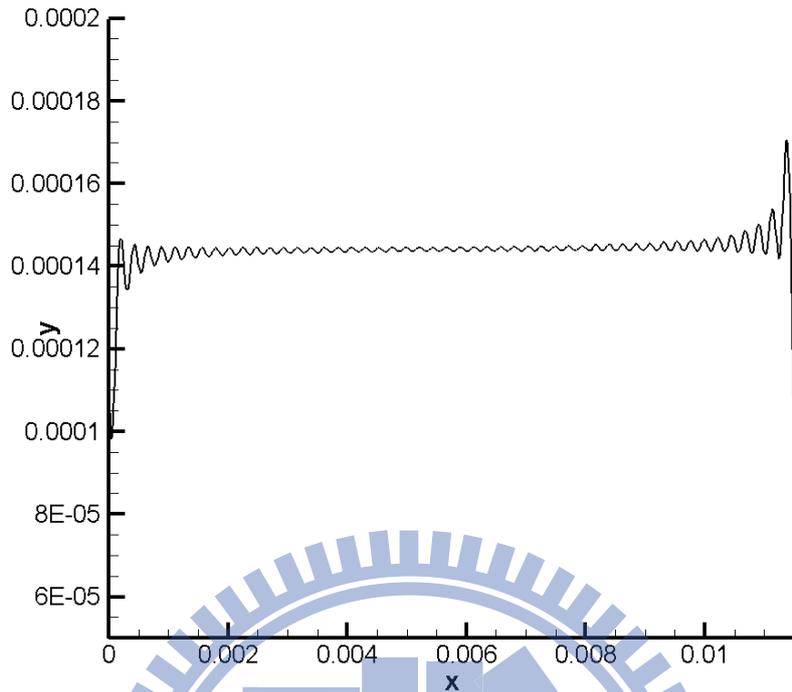


圖 9.30 長平板薄膜沸騰之過熱氣體初始介面分布函數

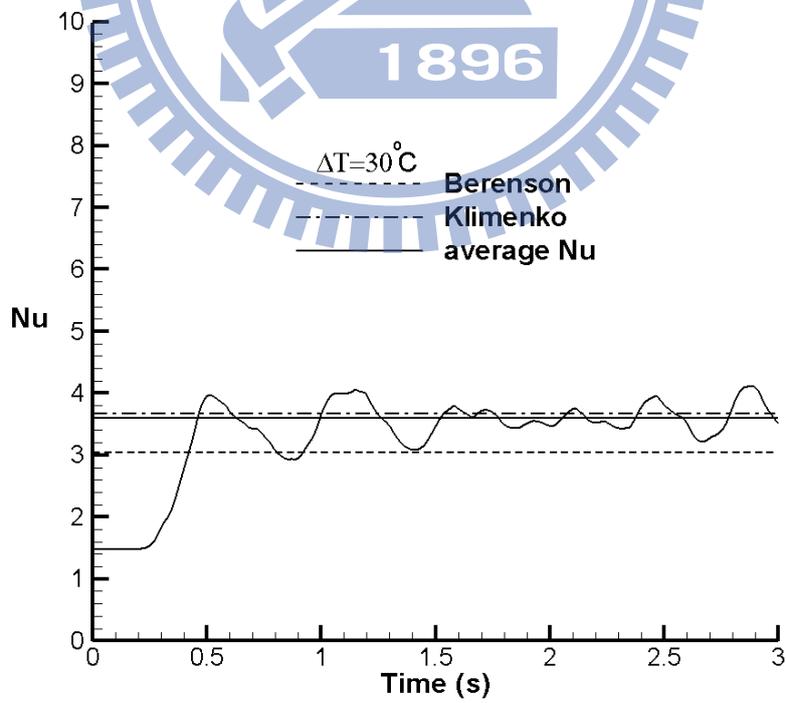


圖 9.31 長平板薄膜沸騰 Nusselt 數隨時間變化圖

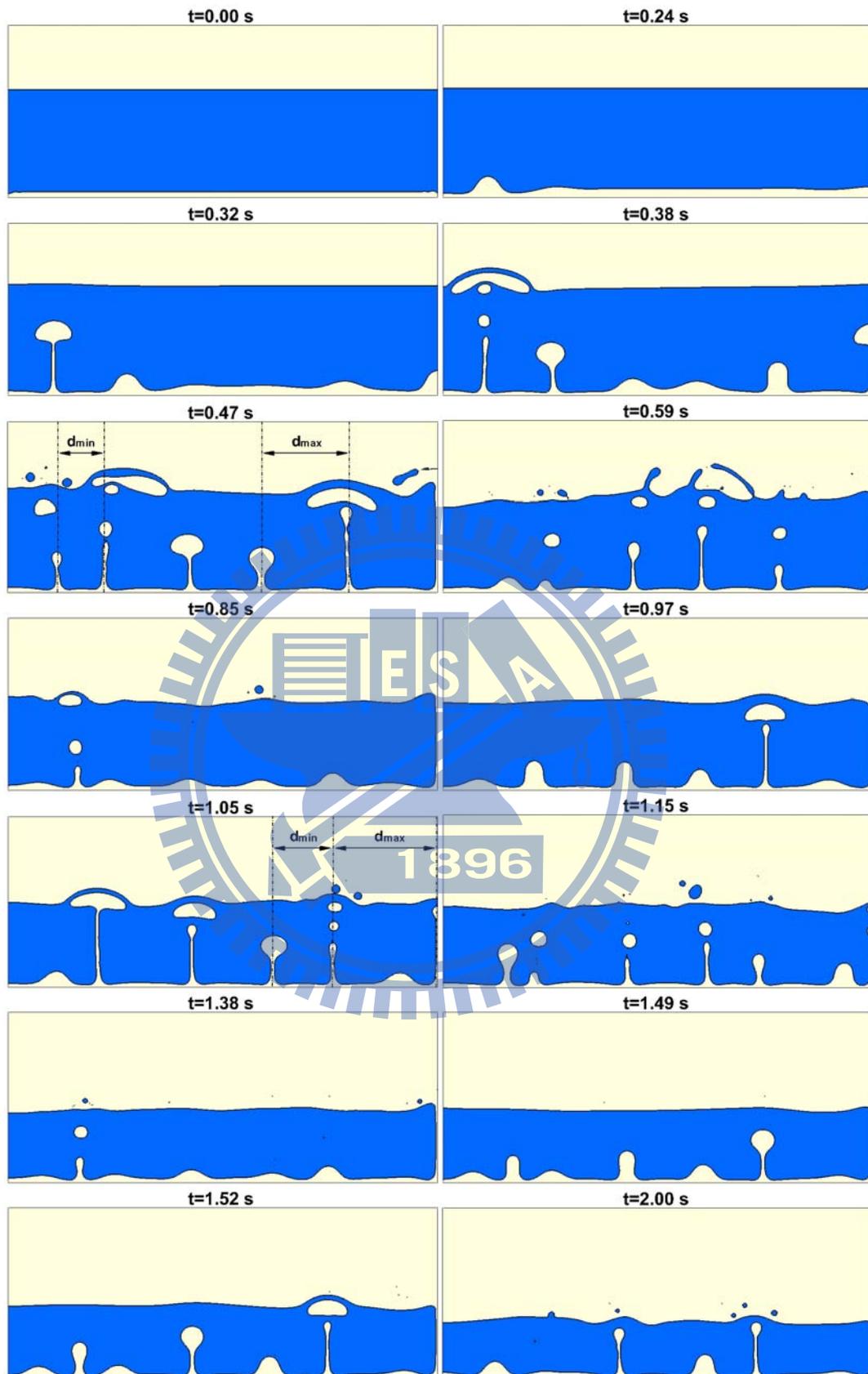


圖 9.32 長平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T = 30^\circ\text{C}$)

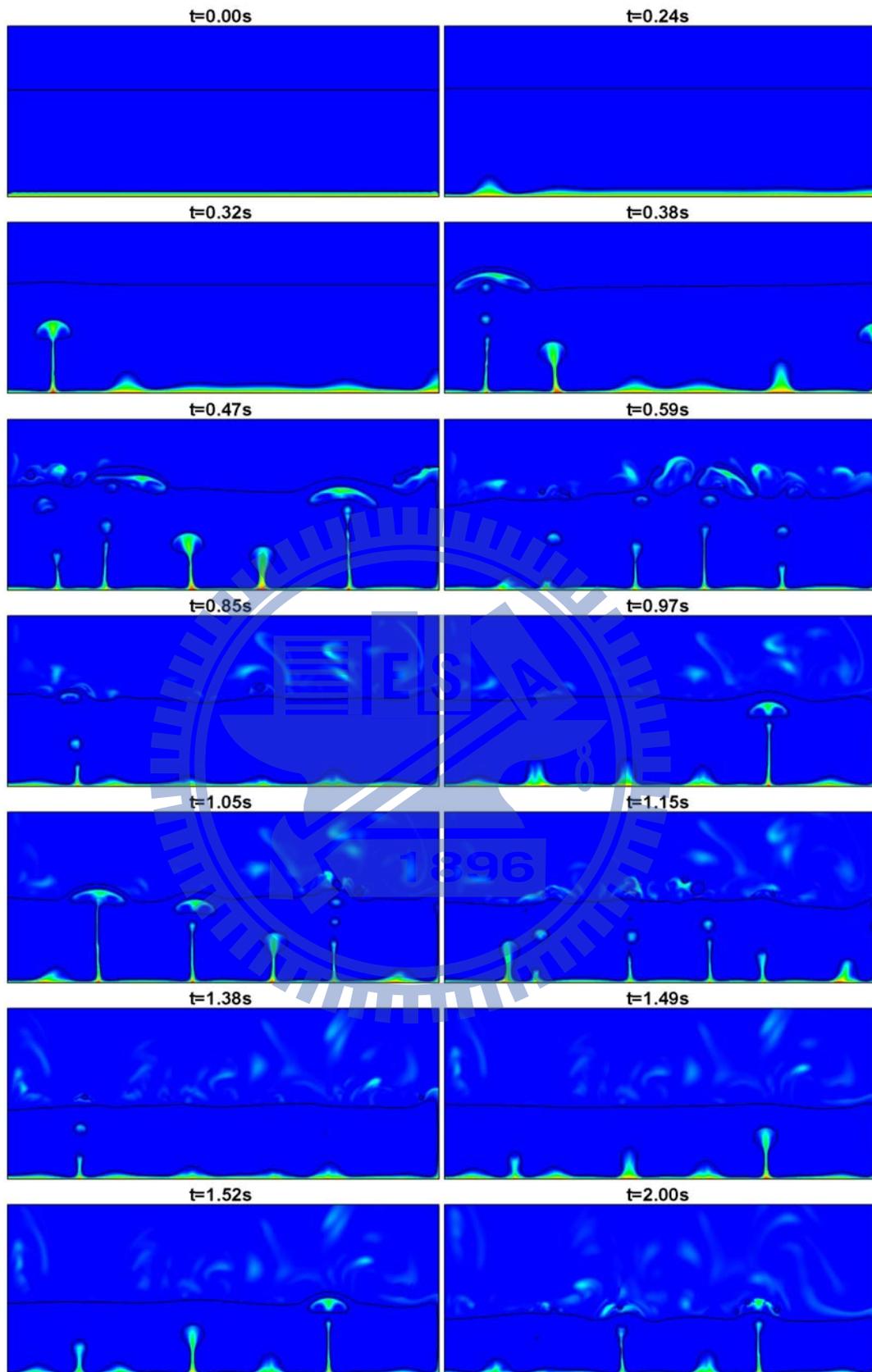


圖 9.33 長平板薄膜沸騰之溫度分布 ($\Delta T = 30^\circ\text{C}$)

第十章 CISIT 法之三維應用

10.1 簡介

在前面的章節中，本文已經將 CISIT 法在二維的流場中之數值方法做詳盡的介紹及驗證，為了使本方法的實用性更為廣泛，因此必須將整個方法做三維化的處理。在兩相流的計算中，最難處理的部份在於相變化的模型，因為在處理相變化時，必須有介面處詳細的幾何以及定位的資訊，此問題在三維的計算上將形成極大的挑戰。在過往的文獻中，前端追蹤法[14]是最常被使用的方法。其主要是透過固定網格(Eulerian)系統來計算流體的統御方程式，而使用另外一組介面的移動網格(Lagrangian)來計算液氣介面運動的情形。在三維的流場中，其透過空間中相互連結的三角形網格來追蹤介面，並在過程中視需求來加入(addtion)或減少(deletion)介面的網格數以控制介面的解析度。然而，此方法雖然可以透過直接追蹤的方式來獲取介面處局部的幾何資訊，但當流場內介面有融合或分離的情況發生時，三角網格間直接連接的處理將會造成相當大的困難。因此為了處理介面多變的沸騰問題，2002 年 Shin 和 Juric[44]利用前端追蹤法配合等位面法(level-counter)的方式來進行介面的重建，並進行三維氣泡碰撞及薄膜沸騰的計算。Esmaeeli 和 Tryggvason[45-47]使用相同的處理方式來計算三維平板模沸騰並導入嵌入式邊界的概念來計算三維水平圓管膜沸騰問題。雖然經由上述的改善後，前端追蹤法可應用於三維沸騰熱傳的計算，然而

其 Lagrangian 和 Eulerian 網格系統間資訊的轉換仍然是相當複雜的問題。另外一種方式則是採用等位函數法來計算沸騰熱傳的問題，Son 和 Dhir[55] 將此方法結合虛擬網格法(ghost-fluid)來計算三維流場中不同直徑大小的水平圓管上之膜沸騰現象。

不同於上述兩種方式，本文所發展的 CISIT 法是基於流體體積(VOF)方程式採介面重建和考量質量守衡的概念所推導出，並且採用能量內邊界的方式來計算相變化的模型。詳細的二維數值方法已在前面的章節說明過，而本章主要的目的在於說明 CISIT 法由二維拓展到三維之計算上所需修改的部份，包含介面幾何重建、浸潤面積的計算及介面處熱通量的計算。以下將詳細介紹三維化的處理方式並計算分析三種不同模型的問題，包含單純的雙流體流動、純熱傳的雙流體流動及含相變化的薄膜沸騰現象。由於在三維的計算上所需要的網格解析度相當高，導致計算時間相當冗長，因此本研究在程式三維化後，再進一步導入平行化高速運算的概念來提高整個模型在實際應用上的廣泛性。

10.2 CISIT 法之三維化處理

10.2.1 三維浸潤面積之計算

CISIT 法主要是透過 $\alpha = 0.5$ 定義介面所通過的位置，因此在二維的流場中經由線性內差的方式便可獲得介面通過網格面之位置，進而獲得一組連續且片段線性的介面。透過此介面在網格中的分布情形，便可獲得流體體積分率傳輸(式 4.4)計算時所需要的浸潤面向量(\vec{S}_f^w)，透過所有控制面上的浸潤面向量便可獲得下個時階下流體體積分率的分布。如同二維流場的，本研究在三維的計算上主要使採用六面體的網格，因此只需計算六面體上所有控制面的浸潤面積，然後導入傳輸方程式中便可完成介面推移之計算。如圖 10.1 黃色區域表示液體，而紅色直線則表示介面於網格面上所截出的線段，圖中顯示此網格中有三個控制面必須計算浸潤面向量(\vec{S}_{f1}^w 、 \vec{S}_{f2}^w 及 \vec{S}_{f3}^w)。

本研究主要是將儲存於網格中心的體積分率(α_p)透過內差的方式以獲取節點上之值(α_v)，再依據 α_v 的分布來判斷三維流場中網格面上的邊是否有介面通過並經由線性內差計算介面通過的座標。如圖 10.1 所示，當邊上的兩個節點之值存在一點 $\alpha_v > 0.5$ (紅色節點) 且另一點 $\alpha_v < 0.5$ (藍色節點) 則表示此邊上有介面通過。若以六面體網格的控制面上 $\alpha_v > 0.5$ 的節點數來區分，可將控制面分為五種類型(如圖 10.2)：(a)和(b)表示沒有介面通過；(c)至(e)表示面上有介面通過。圖中黃色區域之面積代表控制面上浸潤面

積之大小。當控制面紅色節點數為4(圖 10.2(a))，則表示浸潤面向量等於控制面向量，反之浸潤面向量則為零(圖 10.2(b))。至於圖 10.2(c)至(e)其黃色區域面積的計算則是將浸潤區域所形成之多邊形切割為數個三角形面積(S_i^w)並以紅色節點及介面之座標來計算，至於浸潤區域面向量的方向則與控制面之單位面向量相同，因此三維計算中所使用的浸潤區域之面向量可表示如下：

$$\vec{S}_f^w = \begin{cases} 0 & iv = 0 \quad \text{for case(a)} \\ \frac{\vec{S}_f}{|\vec{S}_f|} \sum_i S_i^w & iv = 1 \sim 3 \quad \text{for case(c) \sim (e)} \\ \vec{S}_f & iv = 4 \quad \text{for case(b)} \end{cases} \quad (10.1)$$

其中 iv 表示 $\alpha_v > 0.5$ 的紅色節點總數， S_i^w 代表控制面上浸潤區域所切割出的三角形面積，下標 i 則表示三角形數量。將上式導入式(4.4)中便可在三維流場中計算介面的運動。

10.2.2 三維介面類型及重建

基於流體體積法(VOF)之兩相流計算中，介面重建通常採用 PLIC 法，其主要是在二維系統中假設介面為片段線性的斜直線，而三維系統中則在網格內假設介面為一平面。有別於 PLIC 法，CISIT 法在三維的介面重建上則是假設網格內的介面是由多個不共面的三角形介面所組成。

前節已說明判斷介面是否通過六面體網格之控制面的方法及面上由介面所截出之斜直線的定位方式，接著根據網格內介面所橫越的控制面之總數及 $\alpha_v > 0.5$ (紅色節點)的數目與分布，可將有介面通過之六面體網格分為

五大類(如圖 10.3)。由圖中可知除了(a)以外，介面在網格控制面上所截出的斜直線並非完全共面，因此本研究是以多個不共面的三角形介面來重建六面體網格內之介面。依照所分割出的三角形介面的數量，可將介面的形狀歸類為由一到四個三角形所組成的片段連續之不規則曲面。而因網格彼此間共用控制面上介面所截出之線段，因此可知本研究所重建出的介面在整個計算域內是連續而不間斷的。

10.2.3 三維介面處熱通量計算及能量內邊界

當三維介面重建完成後，便可經由介面的幾何關係來計算相變化模型所需要的介面熱通量及能量方程式的內邊界條件。由於網格內介面是以數個三角形介面所組成，因此必須針對每個三角形來各別計算其面上所通過的熱通量。圖 10.4 為空間中介面重建後所得到的三角形介面，其中 M 點為 ΔABC 之中點。如同二維之方法，考慮介面上的溫度為飽和溫度，並以單側內差的方式來計算可獲得三角形介面上的熱通量，如下式：

$$\dot{q}_{\text{int}} = k_g \frac{T_g - T_{\text{int}}}{\Delta n} - k_l \frac{T_{\text{int}} - T_l}{\Delta n} \quad (6.2)$$

其中 Δn 為局部網格寬度的 1.5 倍。上式中 T_l 及 T_g 則分別為液體及氣體側的溫度，其值是由 M 點沿著 ΔABC 之法線方向 (\vec{n} 及 $-\vec{n}$)，在距離 Δn 的位置上，經由該處周圍節點溫度 (T_v) 內差所得。上述為單個三角形介面的計算方式，若介面是由多個三角形所組成，則網格內的總熱通量必須經由每個三角形介面上的熱通量加總而得。若以網格內介面是由兩個三角形介面所組成為

例(圖 10.5)，圖中 $\Delta A_{\text{int},1}$ 和 $\Delta A_{\text{int},2}$ 分別表示兩個三角形之面積。經由式(6.2)可分別計算出 ΔABC 及 ΔACD 上的熱通量 $\dot{q}_{\text{int},1}$ 和 $\dot{q}_{\text{int},2}$ ，因此網格內介面處的總熱傳量可表示如下：

$$\dot{q}_{\text{int}}\Delta A_{\text{int}} = \dot{q}_{\text{int},1}\Delta A_{\text{int},1} + \dot{q}_{\text{int},2}\Delta A_{\text{int},2} \quad (10.2)$$

上式為網格內介面是由兩個三角形介面組成時，網格在介面上的總熱通量的計算方式。上式可寫為適用於任意類型介面的通式，如下式：

$$\dot{q}_{\text{int}}\Delta A_{\text{int}} = \sum_i \dot{q}_{\text{int},i}\Delta A_{\text{int},i} \quad (10.3)$$

其中下標 i 表示組成介面的三角形介面個數。式(10.3)即為本研究在三維流場中計算網格內介面處總熱通量的方式。

至於三維流場能量方程式所採用的內邊界的處理方式則與二維類似，必須透過式(6.2)所計算出的介面法線方向上的溫度變化量外差出介面鄰近網格中心或網格面上之溫度以供氣體及液體兩側做為 Dirichlet 邊界條件。由介面的分類(圖 10.3)可知(e)其周圍六個面所對應的網格必有介面通過，故此不須處理，而(c)則必須分別計算 T_p 和 T_f ，至於其餘類型的介面則只需計算 T_p 。以圖 6.2 為例，在二維流場中網格內，介面只包含一組面向量及介面法線方向上的溫度變化量，因此可以直接透過式(6.3)直接計算出 T_p 或 T_f ，然而本研究在三維流場中所重建出的介面是由多個不共面的三角形介面所組成，因此必須先行計算出平均面向量(\bar{n})及平均法線方向的溫度變化量($\frac{\partial T}{\partial n}$)方可處理能量內邊界。若以兩個三角形所組成的介面為例(如圖

10.6(a)， ΔABC 和 ΔACD)，經由式(6.2)可估計出每個三角形介面上於介面法線方向上的溫度變化量 $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_1$ 和 $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_2$)，再利用三角形介面本身的面積 $(\Delta A_{\text{int},1}$ 和 $\Delta A_{\text{int},2})$ 做為權重可計算出此網格的平均面向量及平均溫度變化量，如下式：

$$\bar{n} = \frac{\sum_i \bar{n}_i \Delta A_{\text{int},i}}{\sum_i \Delta A_{\text{int},i}} \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_i \Delta A_{\text{int},i}}{\sum_i \Delta A_{\text{int},i}} \quad (10.5)$$

其中 i 為三角形介面的數量。透過平均面向量及網格內介面的其中一端點(如 D 點)，便可獲得通過該端點且方向為 \bar{n} 之平面(如圖 10.6(b)， $\square A'B'C'D$)。對於能量內邊界所須計算的 T_p 和 T_f ，則可透過網格中心(P)或網格面(f)至此平面的垂直距離以線性外差的方式求得，如下式：

$$\begin{aligned} T_p &= T_{\text{int}} + \frac{\partial T}{\partial n} \Delta l \\ T_f &= T_{\text{int}} + \frac{\partial T}{\partial n} \Delta l \end{aligned} \quad (10.6)$$

如圖 10.7(a)和(b)，其中 Δl 為網格中心或網格面中心至平均面向量所構成之平面的垂直距離。圖中是以氣體側的內邊界條件為例，同樣的計算方式可應用於液體側，如此便能在氣液兩側各得一組 Dirichlet 邊界條件，以提供能量方程式計算上所使用。

10.2.4 平行化運算

前文已經將 CISIT 法二維拓展至三維的數值計算方法做了詳細介紹，然

而三維數值計算中所需的計算資源相當大，若以單 CPU 計算的方式將耗費相當多的時間，因此本研究在此採用 OPENMP 平行化運算之方式，利用多個 CPU 的串聯來提高運算速度，以增加本研究數值方法的實用性。以下將針對數個不同的三維物理問題進行模擬以及驗證的工作。另外，因為三維流場內所需記憶的資料相當大，故將原本使用靜態記憶體(static memory)的方式所儲存的矩陣資料改為使用動態記憶體(dynamic memory)的方式來儲存。在 32 及 64 位元的 Windows 作業系統中，其靜態記憶體的上限分別為 2G 和 4G，然而 64 位元系統中的動態記憶體則是 8T。

為了說明本研究的計算程式在平行化後的效能提升程度，在此特別選用三維同軸雙上升氣泡融合問題來做測試，測試的網格數分別為 $80 \times 80 \times 160$ 及 $170 \times 170 \times 340$ ，計算的總時階步數為六千次，而本文所使用的處理器型號為 Inter Core i7-4770(四核心、八執行緒)。至於記憶體使用量在 $80 \times 80 \times 160$ 網格中約為 2G，而在 $170 \times 170 \times 340$ 網格中則為 19G。其計算完成後所需的總時間如表十，結果顯示在第一組網格中計算速度提升 1.56 倍，第二組網格則提升了 1.65 倍。整體的運算速度提升的幅度並不大，這主要起因於本研究目前的平行處理並不包含求解速度、壓力及溫度的代數方程式所需使用的矩陣求解器。目前本研究所使用的求解器中存有相依的方程式，因此尚無法達成平行的運算。

10.3 三維壩體潰堤

本研究首先選用一個自由表面流的問題來驗證 CISIT 法三維化後，對於介面運動及流場速度壓力之計算的精確性。於此本文將模擬具有實驗數據 [73] 可供比對的三維壩體潰堤之問題。

在此所考慮的模型是在一個 $4H \times 1.2H \times 1.2H$ ($H = 0.05715m$) 的長方體水槽內，有一初始狀態為 $H \times H \times H$ 的正方體水壩。計算所使用的流體性質分別為水 ($\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_l = 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{sec}$) 和空氣 ($\rho_g = 1 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_g = 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{sec}$)，而考慮重力效應($g = 9.8$)但不考慮表面張力。模擬所使用的網格分別為 $150 \times 45 \times 45$ 和 $300 \times 90 \times 90$ 。而不同於二維所模擬的情況，本文在此所使用的邊界條件除了上方及前方為出口條件外，其餘皆為滑動邊界條件。

圖 10.8 為網格 $300 \times 90 \times 90$ 所模擬之結果，由介面動態圖可知水壩初期因重力的關係而開始垮下，而隨時間的改水流開始沿著底部往前方來移動，在 $t = 0.2$ 秒後底部的水流已開始在前方的出口處排出。比較兩種網格之結果可發現整體水流動的情況差距並不大，然而不同於二維的模擬之結果，在三維的模擬中可清楚發現水面上將會有因空氣和水間因速度差所產生的 Kelvin - Helmholtz instability 而形成的細長的水紋。

圖 10.9 則為速度及壓力分布隨時間的動態圖($300 \times 90 \times 90$)。圖中顯示在 $t = 0.05$ 秒時介面兩側流體的密度差及重力的影響下，而造成壓力差而使介

面開始往右側來移動，而此壓力差隨時間逐漸的變小。在 $t=0.2$ 秒後水開始向右方出口排出，然而由於底層水流左右兩側的高度差逐漸變小，因此壓力差也開始縮小，因此隨時間的推進中可發現水在出口處排出的速度也逐漸變慢。

圖 10.10 和 10.11 分別為底部水流前端與水柱高度與時間之無因次關係圖，其中無因次參數定義為 $z^* = \frac{z}{H}$ 、 $h^* = \frac{h}{H}$ 及 $t^* = t\sqrt{\frac{g}{H}}$ 。圖中分別將兩組網格模擬之結果與 [73] 中初使分布為正方形之水壩的實驗數據做比較，結果顯示與 CISIT 法在二維水壩的情況相似。對於底部前端移動的速度而言，模擬比實驗結果略快；至於水壩下降高度的速度，模擬和實驗兩者則相當接近。前者發生的原因如同前文所述，起因於實驗上要精確量測前端位置較不容易。

10.4 氣泡運動分析

本節將利用三維 CISIT 法來分析氣泡在靜止液體內上升的運動行為。根據前文所述，氣泡在靜止液體內運動的行為與 Eovots 數($Eo = \frac{gd_e^2(\rho_l - \rho_g)}{\sigma}$) 和 Morton 數($Mo = \frac{g\mu_l^4}{\rho_l\sigma^3}$) 等無因次參數有關，因此本節首先將針對單一氣泡在不同的無因次參數之條件下進行模擬並分析其上升後的外形及終端速度。再者，為了觀察氣泡間交互作用之影響，因此最後將模擬兩個氣泡在靜止液體內上升後之融合行為。

10.4.1 單一上升氣泡

本小節將在一個 $0.05m \times 0.05m \times 0.15m$ 的靜止水槽內，模擬初始直徑為 $0.01m$ 的氣泡之上升問題。在 [77] 中，Grace 提出氣泡外形與 Reynolds 數 ($Re = \frac{\rho_l d_e U}{\mu_l}$)、Eovots 數及 Morton 數有關並將結果歸納如圖 8.27。因此本文在此依據其歸納之結果，分別選用三組氣泡外形不同的無因次參數來進行模擬，包含 $Eo=1, Mo=10^{-3}$ 、 $Eo=10, Mo=1$ 及 $Eo=10^2, Mo=10^3$ ，由圖 8.27 可知本文所選用的三組性質其所對應之雷諾數的尺度相近，而此三組無因次參數主要是由表面張力係數大小不同來決定。模擬本問題的另外兩個重要的參數為密度比 (γ) 及黏滯係數比 (κ)，本研究在此分別選用 $\gamma=1000$ 和 $\kappa=100$ 來進行計算。為了減少計算資源的需求，因此在考量流場之對稱性後，將採用四分之一大小的計算域來模擬 ($0.025m \times 0.025m \times 0.15m$)，而所有邊界皆假設為滑動邊界。

圖 10.12 呈現在不同網格解析度下，三組不同性質所計算出最後氣泡的外形。圖中顯示在第一組性質($Eo=1, Mo=10^{-3}$)中，兩組不同網格的氣泡外形相近並無差距。當 Eovots 數及 Morton 數較小的情況下，氣泡外形的變化受到表面張力的主導，因此介面將因表面張力的作用下而呈現圓球體。

由 Eo 和 Mo 的定義可知氣泡上升的過程受到黏滯力、浮力及表面張力的交互影響，因此在第二組性質($Eo=10, Mo=1$)的結果中顯示隨著 Eovots 數及 Morton 數的提高，意味著表面張力將變小，此時流體的黏滯力將開始造成介面的變形。在兩組網格中其結果皆大致呈現橢球體，然而由網格為 $25 \times 25 \times 150$ 的結果可發現，其氣泡底部因網格解析度不足的影響而遭受到較嚴重的變形甚至有些微內凹的情況發生。

第三組性質($Eo=10^2, Mo=10^3$)則是表面張力係數最小的情況，其結果顯示表面張力對於介面形狀的維持不再具有影響而是改由黏滯力及浮力來主導介面的變形。當介面遭受較嚴重的變形下，網格解析度對於氣泡的外形有著顯著的影響。由模擬的結果可知當網格解析度較低時，氣泡將形成環狀氣泡(toroidal bubble)，而當網格解析度提高則呈現球帽形氣泡。在過去的文獻中[83]，Bhaga 和 Weber 的實驗結果並不會有此種類型的氣泡出現，然而在數值模擬上卻是常見[84-86]。Bonometti 和 Magnaudet[87]指出當氣泡呈現球帽形時，其數值模擬的結果易受到網格解析度大小的影響而有環狀氣泡的發生。若以網格為 $50 \times 50 \times 300$ 之結果與圖 8.27 做比較，可

知三組不同的性質下模擬所得的氣泡外形與其所歸納之結果相當接近。

圖 10.13 分別表示在不同性質下(50×50×300)，其氣泡隨時間變化的過程。圖中顯示前兩組性質其表面張力較大，因此氣泡的外形隨時間變化很小，而在第三組性質的結果中，其氣泡底部的介面則隨著時間變化逐漸地變形並且開始產生內凹的情形。結果也顯示在相同的時間下，氣泡位置也因為其外形而有所不同。圖 10.14 則表示氣泡的中心位置隨時間的變化。圖中顯示氣泡由靜止開始加速，隨後將因所受的外力達到平衡而改以等速的型態上升，此速度即所謂的終端速度。圖 8.27 顯示氣泡的外形隨著 Eovots 數的提高而開始產生變形，氣泡若產生變形，其本身將承受較大的形狀阻力，因而使其上升速度變慢。由圖 10.14 可清楚發現在不同性質下上升氣泡 0.5 秒後，其中心位置隨著 Eovots 數的上升而明顯下降。表十一所呈列的則是由氣泡上升後的終端速度所計算出之 Reynolds 數(含 8.5 節二維模擬之結果)及[77]中三組性質所對應的實驗值。結果顯示隨著 Eovot 數變大其 Reynold 數將因氣泡變形而下降，而除了網格 25×25×150 的第三組性質因產生環狀氣泡外，亦可發現當網格解析度提高將會降低 Reynolds 數。本文模擬所得的 Reynolds 數大於圖 8.27 所對應之值，這起因於實驗所選用的流體密度比與本文有所不同。此外，本文目前所使用的網格解析度(50×50×300)尚不足，當網格解析度不足時，並無法精確的計算出表面張力所需要的介面曲率，因而導致在計算上有所誤差。

圖 10.15 為網格數 $50 \times 50 \times 300$ 之結果在 $x=0$ 的平面上之壓力和流線的分布圖。此處流線是在相對於上升氣泡的座標系統中所求出，而所使用的相對速度則是參考上升氣泡的終端速度。圖中顯示在氣泡上升的過程中，外部液體以相對的運動而朝下流動。觀察三組不同性質下氣體內部的流動情形可知，除了第一組性質在底部有次回流的發生外，氣體側的流動主要由其內部順時針的主回流所控制。另外，因這三組性質所對應的 Reynolds 數較小，所以除了氣泡內部有回流產生外，在氣泡底部的液體側並不會因為氣泡變形而有尾流(wake flow)的產生。

由壓力分布的結果顯示當 Eovot 及 Morton 數較小(圖 10.15(a)和(b))氣泡維持球形體或橢圓體時，氣泡內部壓力因表面張力的作用下將大於周圍的液體，尤其在第一組性質中最为明顯。然而當 Eovot 及 Morton 數較大(圖 10.15(c))時，表面張力將不再主導壓力的分布而是改由靜壓來組成，因此整個的壓力分布大致呈現線性向上的分布，然而壓力在接近氣體處之分布則因為密度差所形成的靜壓不同而使等壓線沿著介面的形狀來變動。

圖 10.16 為氣泡中心軸上沿垂直方向上的壓力分布，由此壓力分布圖可估計出氣泡頂端與底部的沿著 z 方向上的壓力變化率(如表十二)。透過表面張力與氣泡內外壓力差的關係可知當內外壓差大時，表面張力將使介面的曲率變大，反之則變小。由圖 10.16 及表十二可知當 $Eo=1, Mo=10^{-3}$ ，氣泡頂端與底部的壓力變化率相差不大，且由圖 10.15(a)的壓力分布可知氣泡

周圍任意位置上的介面兩側的壓力差分布相當均勻，因此介面上任意位置的曲率大致相同而使氣泡呈現球形體。再者比較 $Eo=10, Mo=1$ 的結果，由表中可清楚發現氣泡頂部的壓力改變量遠大於底部，因此造成其氣泡的形狀呈現頂端曲率大於底部曲率的橢球體分布。至於 $Eo=10^2, Mo=10^3$ 的結果，由表十二可發現不同於前兩組性質，其沿著垂直方向上的壓力改變率皆是遞減，這是因為在此性質下表面張力對於壓力分布的影響較小，因此整體的壓力分布以靜壓的形式線性向上遞減，此壓力分布的情況也使氣泡底部的介面形狀呈現內凹的情況而非外凸。

圖 10.17 為 $Eo=1, Mo=0.001$ 的性質下，在 0.5 秒時氣泡中心位置上沿水平方向的壓力分布圖。圖中顯示模擬所得的氣泡內外壓力差為 $376.3N/m^2$ ，而表面張力與氣泡內外壓差的理論公式如下：

$$\Delta P = \sigma \kappa = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (10.7)$$

其中 R_1 及 R_2 為曲率半徑。在此性質下氣泡外形幾乎不變，因此本文考慮其為圓球體，故其曲率半徑與初始球半徑相同 ($R_1 = R_2 = \frac{d_c}{2} = 0.005m$)，而其所對應的表面張力係數為 $\sigma = 0.97902N/m$ ，因此根據式(10.7)可知氣泡內外壓差的理論值為 $391.6N/m^2$ 。將模擬所得的結果與理論值比較，其誤差約為 3.9%，此誤差來自於模擬所得的氣泡並非完全為圓球體所導致。

10.4.2 氣泡融合

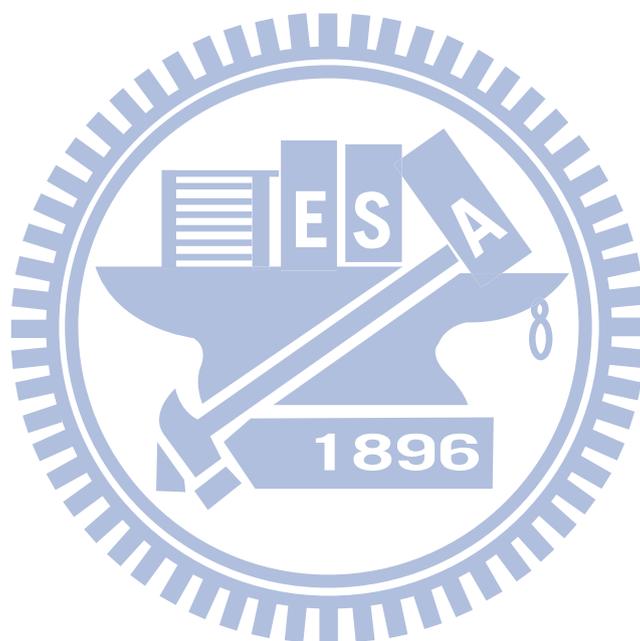
為了更進一步了解氣泡在靜止液體內因浮力上升後氣泡間的交互作用，因此本節將模擬雙上升氣泡之問題。本節將使用 CISIT 法來模擬三維同軸與不同軸的雙上升氣泡融合問題，並與[88]中之實驗結果做比較。本問題中所使用的流體性質其所對應的無因次參數為 $Eo=16, Mo=2\times 10^{-4}$ ，而模擬所使用的計算域大小為 $0.04m\times 0.04m\times 0.08m$ 且網格數為 $170\times 170\times 340$ ，至於邊界條件則是所有邊界皆為滑動邊界條件。另外，為了兼顧計算的精確度與穩定性，在此問題中所使用的密度比(γ)及黏滯係數比(κ)皆為 100。

首先探討同軸的雙上升氣泡融合問題，在靜止的液體內置入兩個直徑大小為 0.01m 的氣泡，而兩氣泡中心位置之高度相差 1.5 倍直徑的距離，其中心坐標分別為 $(0.02m, 0.02m, 0.01m)$ 及 $(0.02m, 0.02m, 0.25m)$ 。圖 10.18 為模擬所得之雙上升氣泡融合之動態圖，而圖 10.19 則是在不同時間下中心處所截出的 y 方向平面之流線與壓力分布圖。兩氣泡各自因浮力的關係由靜止開始上升，因 $Eovots$ 數較小的關係導致表面張力無法維持氣泡的外形，在 $t=0.03$ 秒時兩氣泡皆變成圓帽狀並在其氣泡底部各自產生了成對的回流。隨著兩者逐漸的靠近，在 $t=0.06$ 秒時可發現兩氣泡之回流開始整併並且在下方氣泡的底部開始有次回流的發生。隨著時間的變化，可發現下方氣泡進入上方氣泡的尾流區後，其因所遭受到的流阻變小而開始加速上升。到了 $t=0.09$ 秒時，氣泡間的回流已整合成一對較大的回流，而此時下方氣泡

則受到此回流的影響下，逐漸沿著垂直方向被拉伸。在 $t=0.12$ 秒以後，兩顆氣泡開始進行融合的動作，並在 $t=0.15$ 秒時合併為一個較大的氣泡而繼續上升。由整個融合的過程可發現上方氣泡呈現扁平狀的外形，此與 Grace[77] 所歸納單一上升氣泡問題之結果一致，其變形的過程中受到下方氣泡的影響甚小。然而，下方氣泡因在上升過程中將進入上方氣泡的尾流區內，尾流區內的回流將使上升氣泡的速度加快並主導其外形的改變而使其成為扁長狀的氣泡。上述下方氣泡變形的狀況與[88]中的實驗結果(圖 10.22(a))相當一致。

本節第二組要模擬的問題是不同軸的雙上升氣泡融合問題。在此所考慮的物理模型除了底部氣泡的中心位置外，其餘皆與同軸的問題相同。在本問題中，將底部氣泡的中心沿水平方向位移 0.8 倍的直徑的距離，其座標為 $(0.02m, 0.028m, 0.01m)$ 。圖 10.20 和 10.21 分別為雙上升氣泡融合之動態圖及沿著中心所截出之 y 方向平面上的壓力及流線分布圖。結果顯示整體的融合之情形與同軸時類似，然而兩氣泡的外形變化的情況則有些差異。在兩氣泡融合之前，上方氣泡的外形隨時間之變化基本上與同軸類似，然而可清楚發現在 $t=0.75$ 秒後，因下方氣泡開始進入其尾流區而使其在垂直方向上開始有些微角度的改變。至於下方氣泡的變形則與同軸時有較大的差異，其除了受到上方氣泡尾流區內回流之影響而使其產生垂直方向的變形外，更因初始中心多了水平方向的位移而使流場內產生了水平方向上的速

度分量，此水平速度分量將使氣泡產生水平方向的變形及位移。觀察圖 10.20 中兩氣泡上升的過程可知下方氣泡在上方氣泡的導引下，逐漸往計算域的中心軸上移動，並因為上方氣泡尾流區的影響而逐漸加速，最後在 $t=0.185$ 秒時兩氣泡合而為一。將模擬結果與圖 10.22(b)做比較可發現下方氣泡變化的情形兩者相當接近。



10.5 液滴撞擊薄層液面

在本節中，將利用 CISIT 法來模擬三維液滴撞擊薄層液面後的飛濺 (splashing) 過程，透過此問題的模擬來驗證本研究所提出的方法在較複雜的流場內之可行性。液滴撞擊薄層液面之行為主要與 Weber 數 (We) 和 Ohnesorge 數有關 (Oh)，其定義如下：

$$We = \frac{\rho_l V_i^2 d_e}{\sigma}$$
$$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma \rho_l d_e}}$$
(10.8)

其中 V_i 為液滴撞擊速度， d_e 則為液滴直徑。本問題所使用的流體性質，其所對應的 Weber 數和 Ohnesorge 數分別為 400 及 0.0016，並考慮液氣之密度比為 1000、黏滯係數比為 40 來進行模擬。初始液滴的直徑為 0.005m 並置於厚度 (h) 為 0.0005m 的極薄液體層的上方，而液滴的撞擊速度則為 0.25m/s。因考量流場對稱性及減少計算所需的資源，故本文在此只模擬 1/4 的計算域，其大小為 $3D \times 3D \times 3D$ ，而所使用的網格數則為 $210 \times 210 \times 210$ 。除了上方出口邊界及對稱面 ($x=0, y=0$) 外，其餘的邊界皆為無滑移牆邊界條件。

圖 10.23 為液滴撞擊薄層液面之動態圖。圖中顯示液滴因初始速度朝下而開始撞擊底部的薄層液面，在 $t=1\text{ms}$ 時可清楚發現底部薄層液面因液滴的撞擊而開始產生環形的水波。此環狀水波隨時間開始朝撞擊點的四周擴散並且逐漸抬升。過程中此水波的上端將因不穩定的關係開始有液體脫離

水波的情況，這些脫離的液體最後將因表面張力的關係而聚集成細小的水珠。在圖 10.23(d)中，可發現在環狀水波中間的部份出現破洞，此破洞影響了在 $t=3\text{ms}$ 後之模擬結果，造成環狀水波上方的變化並無法與實驗之情況完全一致，此現象產生的原因可能來自本文所使用的網格解析度不足所導致。雖然對於環狀水波上方的模擬並無法相當精確，但本文在此特別針對環狀水波往外擴散之速度來進行分析。在 1999 年，Rieber 和 Frohn[89] 透過數值模擬的方式分析在不同 Weber 數及 Ohnesorge 數下液滴撞擊薄層液面之問題，並且透過模擬所得的環狀水波位置隨時間變化之結果，進一步修正 Yarin 及 Weiss[90] 所提出環狀水波底部擴張半徑隨時間變化之理論解，其修正後的模組解如下式：

$$\frac{R}{D} = \left(\frac{6h}{D} \right)^{-1/4} T^{1/2} \quad (10.9)$$

其中 R 為環狀水波之半徑， T 為無因次時間。無因次時間的定義為 $T = \frac{(t-t_0)V_i}{D}$ ，此處 t_0 為液滴撞擊液面前延遲的時間。圖 10.24 為本文所模擬之結果在 $y=0$ 的截面上介面隨時間的變化圖。圖中顯示環狀水波隨時間逐漸抬升並且朝 x 的方向擴散，經由這些截面可定義出在不同時間下液滴撞擊後所形成之環狀水波的半徑大小，將此結果與式(10.9)的模組解作比較(圖 10.25)，圖中顯示模擬的結果對於液滴撞擊薄層液面後所產生的環狀水波，其半徑隨時間之變化的預測上有相當不錯的結果。

10.6 三維水平平板薄膜沸騰

本節將使用本研究完整的含相變化的兩相流數值方法來計算三維水平平板薄膜沸騰之問題。如同前文所述，在薄膜沸騰的問題中，氣膜厚度與 Grashof 數成反比之關係，當 Grashof 數太大時，將需要較多的網格數方能解析厚度甚薄的氣膜，然而三維的兩相流問題，其原本的計算量就遠超過二維的計算，若再加上為了解析較薄的氣膜厚度而額外增加的運算量，將造成整個計算難以達成。基於上述原因，為了兼顧有效的網格解析度及高效率的運算，本文在此採用 Welch[9]用以模擬二維平板薄膜沸騰所使用的流體性質 ($P_{sat} = 1atm$, $T_{sat} = 227^{\circ}C$)，如下：

$$\rho_l = 200kg/m^3 \text{ 、 } \mu_l = 0.1Pas \text{ 、 } k_l = 40W/mK \text{ 、 } C_l = 0.4kJ/kgK \quad (10.10)$$

$$\rho_g = 5kg/m^3 \text{ 、 } \mu_g = 0.005Pas \text{ 、 } k_g = 1W/mK \text{ 、 } C_g = 0.2kJ/kgK \quad (10.11)$$

而表面張力係數為 $\sigma = 0.1N/m$ ，汽化潛熱為 $h_{fg} = 10kJ/kg$ ，至於重力加速度則為 $g = 9.8m/s^2$ 。此性質下所對應的二維最危險泰勒波長為 $\lambda_{d2} = 0.08m$ ，而流場的特徵長則為 $\lambda = 0.00723m$ 。本問題所使用的計算域大小為 $\lambda_{d2} \times \lambda_{d2} \times 2\lambda_{d2}$ ，在計算域的上半部為飽和液態水，而下方則為過熱蒸汽，其初始的液汽介面為一個擾動波，其分布如下式：

$$Z = \frac{\lambda_{d2}}{8} + \frac{\lambda_{d2}}{64} \left[\cos \left[\frac{2\pi(x - \lambda_{d2}/2)}{\lambda_{d2}} \right] + 1 \right] \left[\cos \left[\frac{2\pi(y - \lambda_{d2}/2)}{\lambda_{d2}} \right] + 1 \right] \quad (10.12)$$

由上式可知初始介面的中心為擾動波的最高點。至於所使用的邊界條件足了上方為出口邊界及底部為定溫牆外，其餘皆為對稱性邊界條件。以下將

使用總數為 $100 \times 100 \times 200$ 的網格，針對底部牆面過熱度分別為 $\Delta T = 5^\circ C$ 及 $\Delta T = 10^\circ C$ 的問題進行模擬與分析。

圖 10.26 分別為不同壁過熱度下，底部加熱面的平均 Nusselts 數隨時間的變化圖。此問題中壁面處的平均 Nusselt 數的計算方式如下：

$$Nu = \frac{1}{A} \int_0^{\lambda_{d2}} \int_0^{\lambda_{d2}} \frac{\lambda}{(T_w - T_{sat})} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w dx dy \quad (10.13)$$

其中 A 為底部加熱板的總面積。圖中顯示除了前兩個受初始狀態影響的周期外，其餘的時間下兩者皆呈現規律的周期性運動。比較兩種不同的過熱度之結果可清楚發現當壁面過熱度為 $\Delta T = 10^\circ C$ 的情況下，其 Nusselt 數變化的周期明顯比 $\Delta T = 5^\circ C$ 快。這起因於較高的壁過熱度在單位時間內將提供較多的熱量給氣體，進而使介面處因能量傳遞所產生的汽化過程速度加快。

圖 10.27 為 $\Delta T = 5^\circ C$ 在一個周期內氣泡生成過程之動態圖，而圖 10.28 則是相對應的時間下，於 $x = 0.04m$ 之平面上的溫度分布圖。結果顯示因相變化所產生的氣體由介面的中心處開始聚集 ($t = 1.52s$)，隨著汽化量越來越多，氣泡體積也越來越大使得氣泡內的浮力開始增加。在 $t = 1.62$ 秒時，汽化後的氣體所形成的氣泡已經脫離底部氣膜而開始往上方出口處抬升，同時由圖中可發現氣泡脫離後，底部氣體因受到表面張力及慣性力的作用下而被迅速拉回，而使氣膜中心處產生一個凹洞，並且再周圍產生一個環狀的表面張力波。隨著氣泡逐漸的上升，底部氣膜受到加熱板的持續加熱下而再度將氣體聚集，在 $t = 2.00$ 秒時生成了第二個氣泡。觀察圖 10.28 可知

在底部氣膜逐漸抬升的過程中，其內部將出現溫度梯度較大的位置 ($t=1.56s$)，這些溫度梯度大的地方將提高加熱板附近的熱傳率，因此在這個階段內壁面處的平均 Nusselt 數隨時間逐漸抬升。到了 $t=1.58$ 秒，在氣泡即將脫離底部氣膜前，此時底部氣膜將出現最多溫度梯度大的地方，因此壁面處的平均 Nusselt 數將來到最大值。然而在氣泡脫離後 ($t=1.62s$ 到 $1.76s$)，底部氣膜內溫度梯度將驟降，導致壁面處平均 Nusselt 數也開始迅速的下降。上述的過程將隨著下一個氣泡的生成重複出現，因此 Nusselt 數隨時間的推進又開始上升。整個過程中亦可發現氣泡脫離後其內部溫度將迅速的下降，這是因為其脫離了提供熱源的底部氣膜所導致。

圖 10.29 及 10.30 則分別為 $\Delta T=10^{\circ}C$ 之汽化過程及溫度分布的動態圖。其整體汽化過程與 $\Delta T=5^{\circ}C$ 的情況相似。但比較兩者可知當壁面過熱度較高的情況下，其介面處汽化速度較快，因此可發現其所聚集成之氣泡體積較大。另外，因為在 $\Delta T=10^{\circ}C$ 的情況下，其氣泡生成的周期較短，因此在整個計算域內可觀察到上方氣泡尚未離開計算域而底部氣膜已逐漸形成第二個氣泡之情況。

另外一個值得探討的問題是綜合兩種壁過熱度之汽化過程，可清楚發現底部氣膜皆只有一個位置上有氣泡的生成，這起因於在三維流場中，容許氣泡生成的最危險泰勒波長如下[45]：

$$\lambda_{d3} = \sqrt{2}\lambda_{d2} \quad (10.14)$$

而本文在此使用的計算域其底部大小為 $\lambda_{d2} \times \lambda_{d2}$ ，而在底部正方形區域的對角線方向上的距離為 $\sqrt{2}\lambda_{d2}$ ，因此氣泡生成的位置將位於兩條對角線之上，加上本文初始給定的液汽介面之最高點位於中心軸處，因此氣泡幾乎是在中心軸的位置上生成，亦即兩對角線之交點。然而在整個汽化過程中，氣泡並非完全都在上述的位置上生成。在 $\Delta T = 10^{\circ}C$ 的模擬結果中，某些時間下氣泡生成的位置將偏離中心軸，然而其生成位置仍然位於對角線上。

本文在此將不同壁面過熱度的情況下模擬所得的時均化 Nusselt 數與 [2] 和 [4] 中所提的半經驗式做比較，結果分別繪於圖 10.26 中及列於表十三之中。其中模擬所得的時均化 Nusselt 數是由一個完整規律的周期之值平均而得，而半經驗式之值則是使用飽和態的流體性質及修正後的 Jacob 數 (Ja^*) 所求得。結果顯示如同二維之結果一樣，在低壁過熱度的情況下，不管模擬或是半經驗式所得的 Nusselt 數皆隨壁過熱度的上昇而下降(圖 10.31)。另外，本文在三維薄膜沸騰的問題中模擬所得之結果與 Klimenko [4] 所提的半經驗式較為接近，尤其是在 $\Delta T = 10^{\circ}C$ 的結果中，其誤差僅有 2.6%。

10.7 無相變化之熱傳問題

本節將採用本研究所提出無相變化之熱傳模型，分別計算兩組純熱傳的雙流體問題，其中包含高溫錫液滴於低溫油槽內落下的模擬及高溫正辛烷注入低溫水槽內的問題。

本節所考慮的第一個問題是在一長寬高皆為 8mm 且溫度為 250°C 的立方體油槽內，在座標為(4mm, 4mm, 6mm)的位置上放置一個直徑為 2mm 且溫度為 800°C 的高溫溶解錫液滴。油槽內除了錫液滴內部初速為 -0.5m/s 外，其餘部份皆為靜止。本問題中所使用的流體性質如下：

$$\rho_{Tin} = 6970 \text{ kg/m}^3, \mu_{Tin} = 1.92 \times 10^{-3} \text{ Pas}, k_{Tin} = 33.6 \text{ W/mK}, C_{Tin} = 0.244 \text{ kJ/kgK} \quad (10.15)$$

$$\rho_{Oil} = 1066.7 \text{ kg/m}^3, \mu_{Oil} = 2.28 \times 10^{-3} \text{ Pas}, k_{Oil} = 22.6 \text{ W/mK}, C_{Oil} = 2.7 \text{ kJ/kgK} \quad (10.16)$$

其中下標 *Tin* 和 *Oil* 分別表示錫液滴及油。兩流體間的表面張力係數為 $\sigma = 7 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ 且重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。考慮流場的對稱性，故使用 1/4 大小的計算域來進行模擬，而所使用的網格為 $50 \times 50 \times 100$ 。除了 $x=0$ 及 $y=0$ 為對稱性邊界條件外，其於邊界則為定溫的無滑移牆邊界，而牆面溫度為 250°C。

圖 10.32 為高溫錫液滴於油槽內介面及溫度分布之動態圖。圖中顯示由於表面張力作用較大的關係，所以錫液滴落下的過程中幾乎維持橢球體，在錫液滴的落下的過程中，由於液滴內外的溫度差而使溫度開始由內部向油中擴散並且朝著液滴上方傳遞。為了更清楚了解整體溫度擴散的情形，

必須將觀察的座標系統由靜止的卡式座標改為液滴的移動座標，圖 10.33 為液滴移動座標上在 $x=0$ 之平面上之溫度及流線分布。結果顯示液滴落下的過程中，其內部將產生兩個回流。液滴內的最高溫度也隨著時間因熱向外擴散而逐漸下降。當液滴落下時，相對地槽內的油是向上來流動，因此可以清楚發現熱量由液滴內往外擴散後，將因油的流動而開始往液滴上方來傳遞。另外，由液滴內的最高溫度出現的位置可知液滴內能量的傳遞雖然因溫度差較大而由熱擴散所主導，然而也受到其本身內部的回流所影響而最高溫度的點偏向液滴底部。

本節第二組模擬的問題是在靜止水槽內噴入高溫正辛烷的問題，並呈現正辛烷吹入後所產生的破裂與上升的運動及介面處熱傳現象。本文在此所模擬的問題是在一個直徑為 6mm 且高為 30mm 的圓柱體水槽內，其底部有一個直徑為 1mm 的圓孔。水槽內初始溫度為 20°C ，而圓孔處則是注入溫度為 80°C 的高溫正辛烷，圓孔處注入的速度分布如下式：

$$W = W_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \quad (10.17)$$

其中 R_0 為圓孔的半徑， r 為邊界上網格至圓孔中心之距離。上述入口的速度分布是假設為完全展開流，其 W_{\max} 為中心處最高流速，在此考慮 $W_{\max} = 1\text{m/s}$ 。為了簡化模型並減少計算量，在此使用 2187500 個非結構性網格及隊稱姓邊界 ($x=0, y=0$) 來模擬 1/4 的圓柱體，而水槽的上方為出口邊界，其餘則為定溫的無滑移牆邊界，其壁面溫度為 20°C 。本問題所使用的正辛烷及水的

性質如下：

$$\rho_o = 660.32 \text{ kg/m}^3 \text{ 、 } \mu_o = 4 \times 10^{-4} \text{ Pas} \text{ 、 } k_o = 0.12 \text{ W/mK} \text{ 、 } C_o = 2.278 \text{ kJ/kgK} \quad (10.18)$$

$$\rho_w = 995 \text{ kg/m}^3 \text{ 、 } \mu_w = 5.5 \times 10^{-4} \text{ Pas} \text{ 、 } k_w = 0.643 \text{ W/mK} \text{ 、 } C_w = 4.217 \text{ kJ/kgK} \quad (10.19)$$

其中下標 o 及 w 分別表示正辛烷及水。表面張力係數及重力加速度則分別為 $\sigma = 0.043 \text{ N/m}$ 和 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

圖 10.34 為正辛烷注入水槽之動態圖。結果顯示辛烷以高速噴流的型態進入靜止的水槽內 ($t=0.01\text{s}$)，由於噴流介面處徑向的速度梯度極大，因此導致介面處上極度的不穩定性。在 $t=0.04\text{s}$ 時，此不穩定性將使噴流頂端開始出現第一顆液滴的分離，脫離後的液滴將在表面張力及浮力的作用下，逐漸聚成橢球體並往出口方向抬升 ($t=0.11\text{s}$)。在辛烷液滴上升的過程中，噴流因底部圓孔處持續有辛烷的注入下，噴流的長度不斷拉長，當兩流體介面處的不穩定性達到一定程度後，多顆液滴將同時在噴流頂端分裂出 ($t=0.13\text{s}$)。由圖中可發現水槽內除了第一顆液滴體積較大外，後期所產生的體積都較小並且呈現橢球形 ($t=0.18\text{s}$)。圖 10.35 為不同時間下在 $x=0$ 的平面上之溫度分布情形。結果顯示在辛烷注入水槽的過程中，噴流底部及其中心軸上始終維持高溫 ($T=80^\circ\text{C}$)，然而當液滴行程後脫離噴流頂部時，液滴內的溫度驟然下降，這起因於液滴已經脫離提供熱源的高溫噴流。觀察整體的溫度分布隨時間的變化，可發現溫度分布皆集中於辛烷內部，此現象與高溫錫液滴在油槽內落下的溫度分布情形截然不同，在圖 10.33

中顯示錫液滴落下後，其內部的高溫迅速的往周圍低溫油中擴散，然而圖 10.35 卻顯示當高溫辛烷注入水槽後，辛烷噴流或液滴內的高溫並沒有往周圍流體有明顯的擴散，兩者不同的情形可藉由熱擴散係數來說明。在錫液滴的問題中，錫液滴本身的熱擴散係數大於周圍的油，因此液滴內的高溫將因較佳的熱擴散性而使熱量可以迅速導入油之中，然而在辛烷注入水槽的問題中情況則是相反，因辛烷的熱傳導係數遠小於周圍的水，所以熱量並不易藉由熱擴散的方式傳遞至水中，故使溫度分布集中於辛烷內部。



	Single CPU	Parallel(OPENMP)
80×80×160	28.52 hr	18.23 hr
170×170×340	308.2 hr	186.3 hr

表十 單執行緒與多執行緒平行計算之 CPU 運算時間

	25×25×150	50×50×300	100×300*	from [77]
$Eo = 1, Mo = 10^{-3}$	Re = 4.58	Re = 4.04	Re = 2.98	Re = 1.7
$Eo = 10, Mo = 1$	Re = 3.69	Re = 3.42	Re = 2.19	Re = 1.7
$Eo = 10^2, Mo = 10^3$	Re = 2.34	Re = 3.15	Re = 2.07	Re = 1.7

表十一 單一上升氣泡之終端雷諾數表(*：2D 模擬結果)

	$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{bottom}$	$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{top}$
$Eo = 1, Mo = 10^{-3}$	236458	-222570
$Eo = 10, Mo = 1$	5548	-39090
$Eo = 10^2, Mo = 10^3$	-3726	-10566

表十二 單一上升氣泡底部與頂端沿 z 方向上的壓力變化率

	$\Delta T = 5^{\circ}C$	$\Delta T = 7.5^{\circ}C$	$\Delta T = 10^{\circ}C$
\overline{Nu}	1.60	1.53	1.50
Nu_B	2.63	2.39	2.23
Nu_K	1.92	1.69	1.54

表十三 三維平板薄膜沸騰之時均化 Nusselt 數與半經驗式對照表

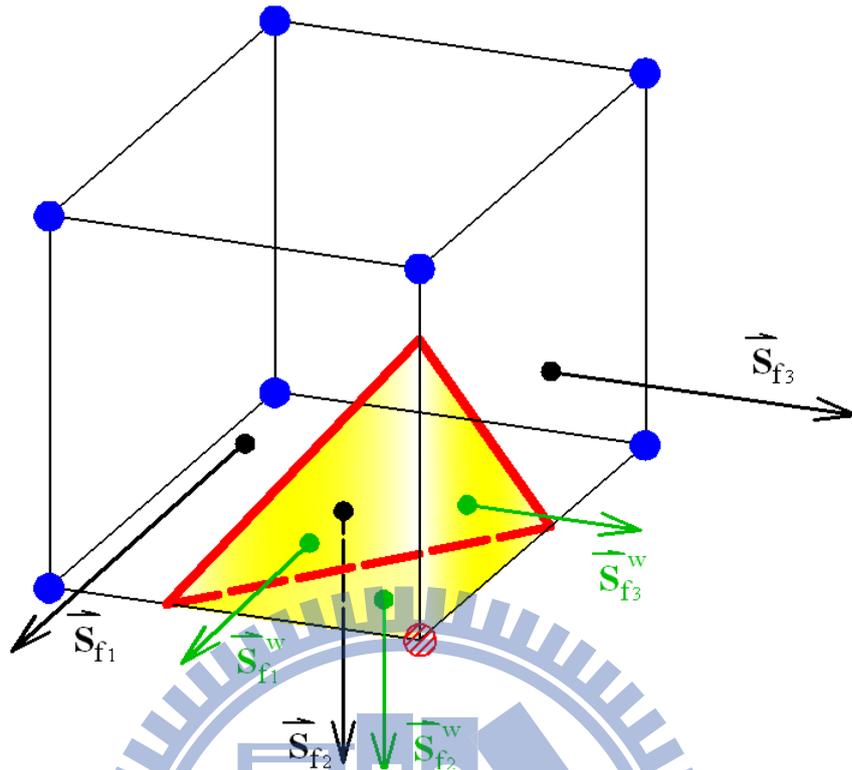
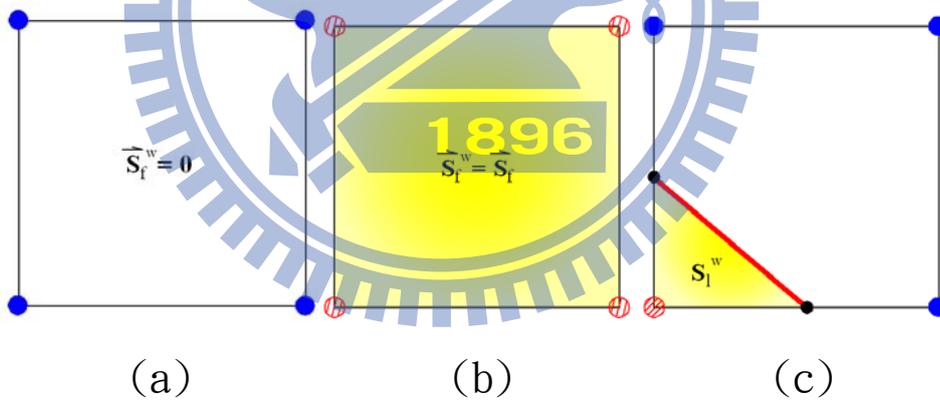
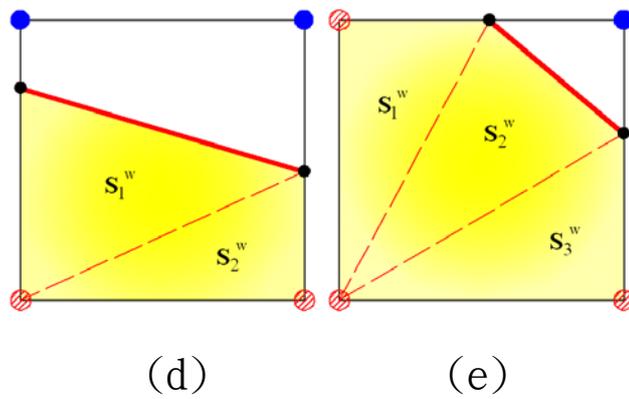


圖 10.1 三維網格內浸潤面向量(\vec{s}_f^w)之示意圖



(a) (b) (c)



(d) (e)

圖 10.2 三維網格內介面所跨越控制面之類型

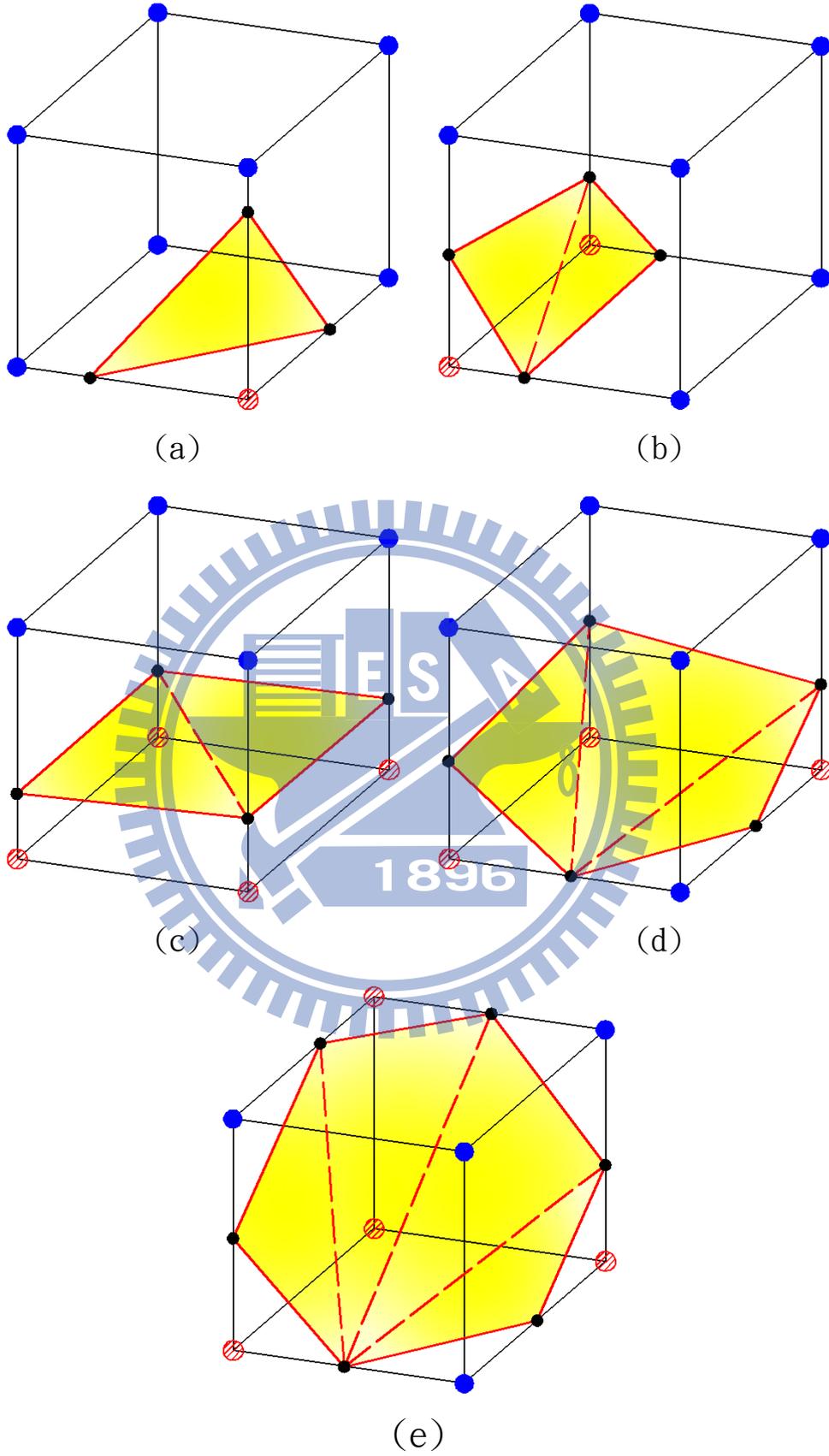


圖 10.3 介面通過六面體網格之類型

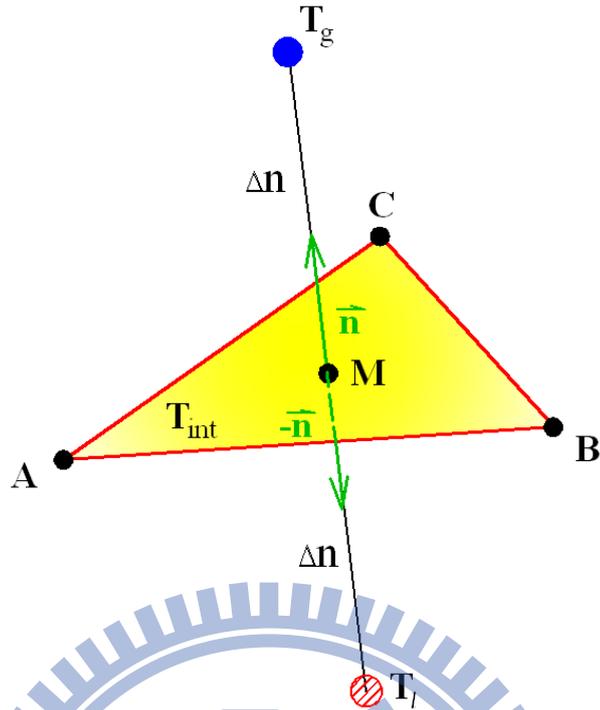


圖 10.4 空間中重建後所得的三角形介面之示意圖

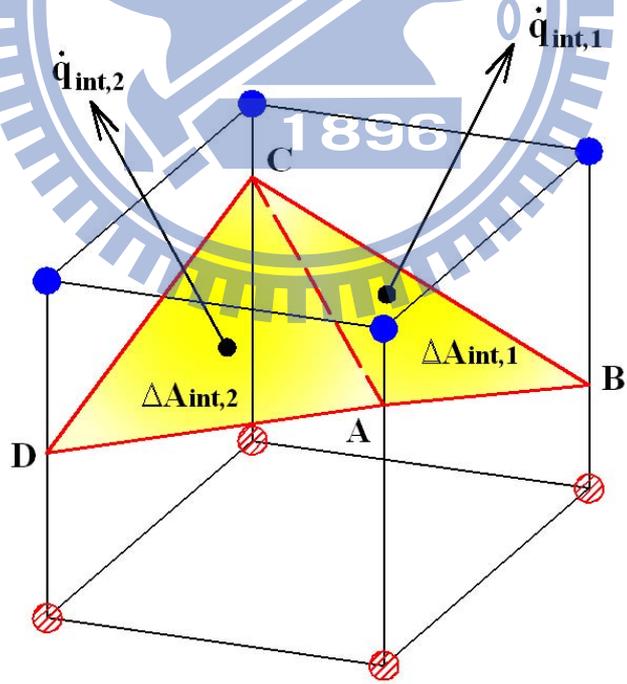


圖 10.5 三維介面處總熱通量計算之示意圖

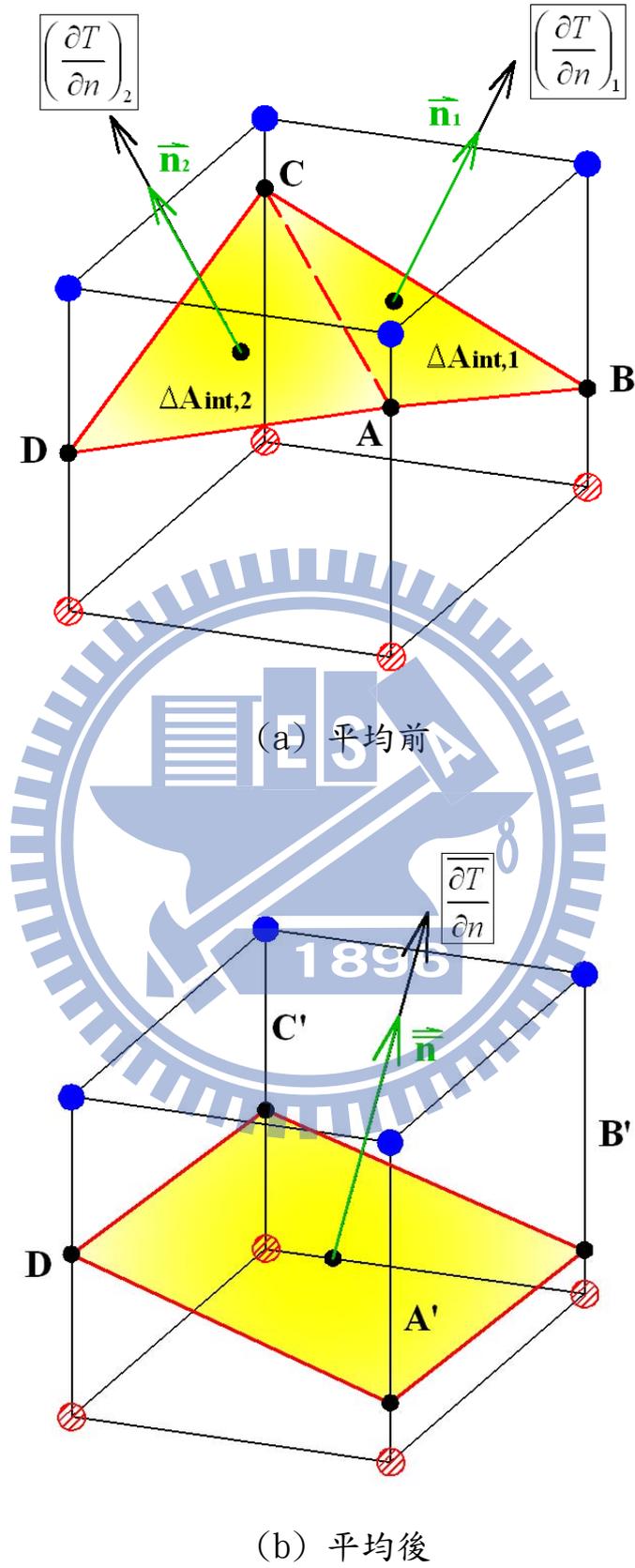
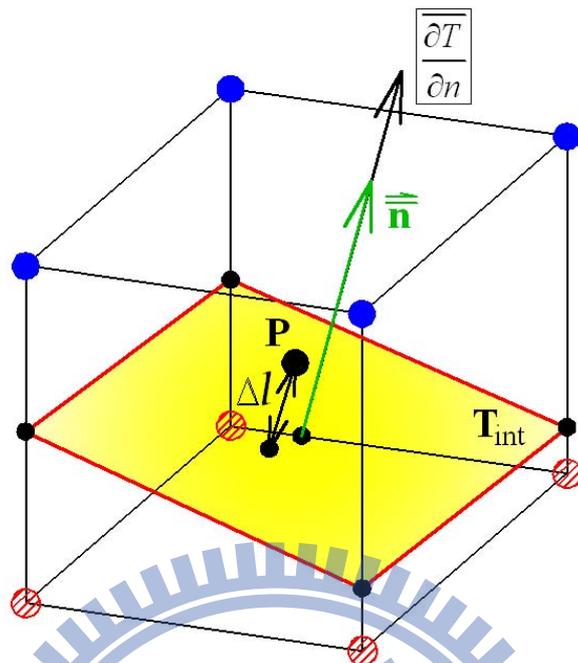
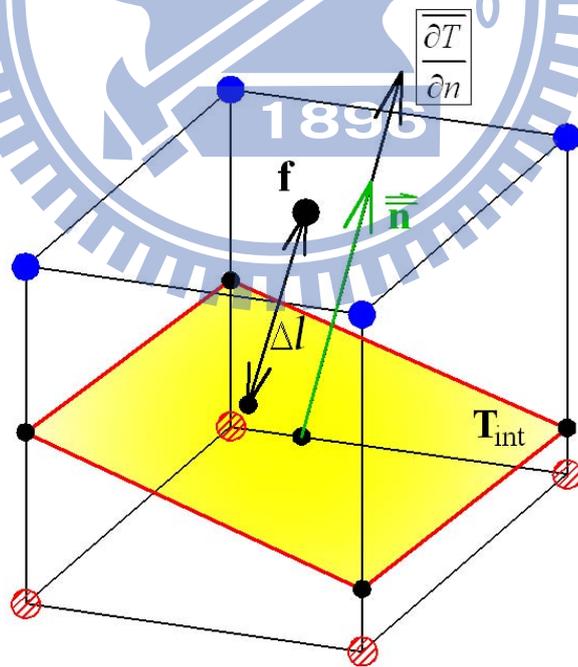


圖 10.6 三維介面的平均面向量及平均溫度變化量計算之示意圖



(a) 網格中心之值



(b) 網格面之值

圖 10.7 三維介面處能量內邊界處理之示意圖

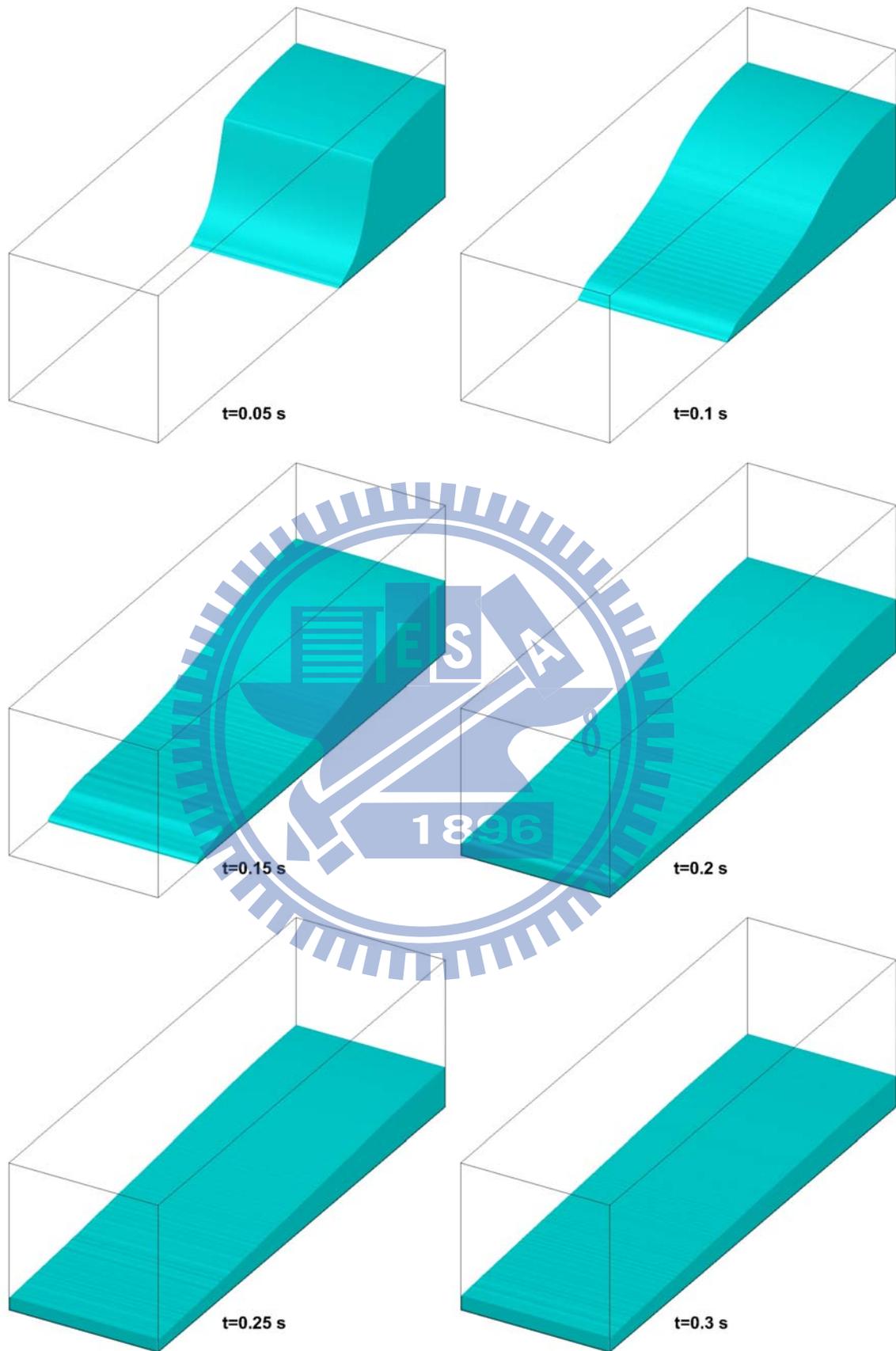


圖 10.8 三維壩體潰堤介面之動態圖(300×90×90)

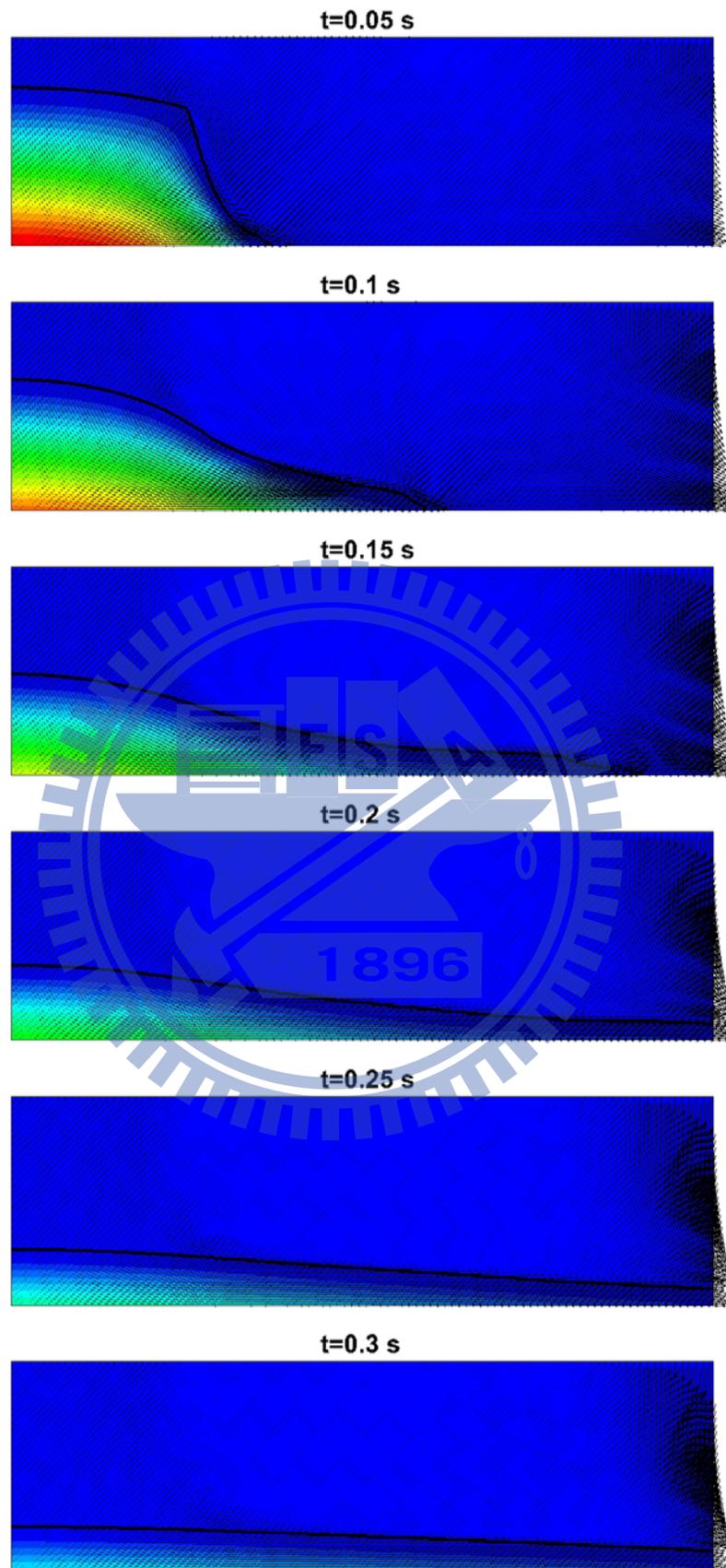


圖 10.9 三維壩體潰堤壓力及速度場之動態圖(300×90×90)

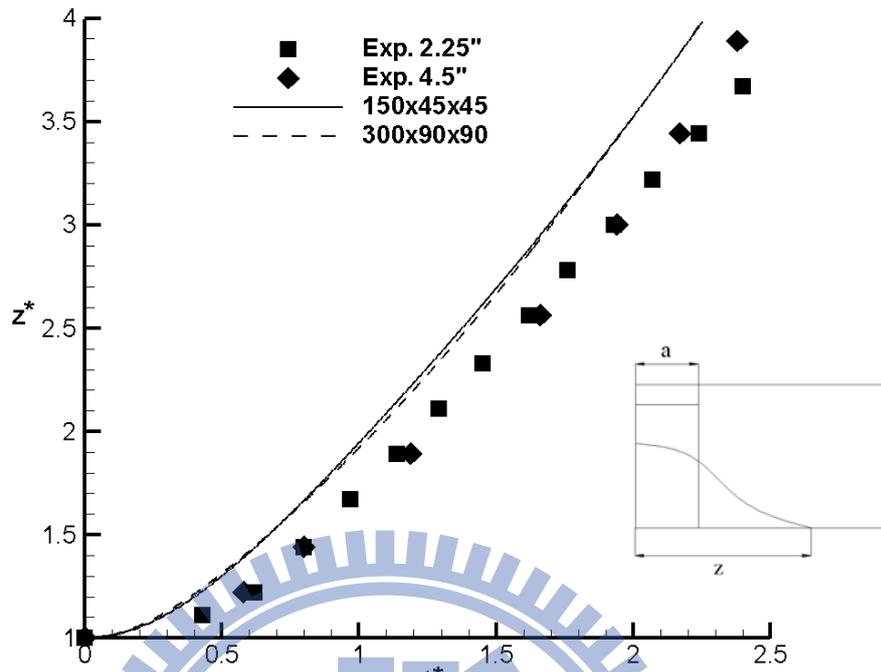


圖 10.10 底部水流前端與時間無因次化關係圖

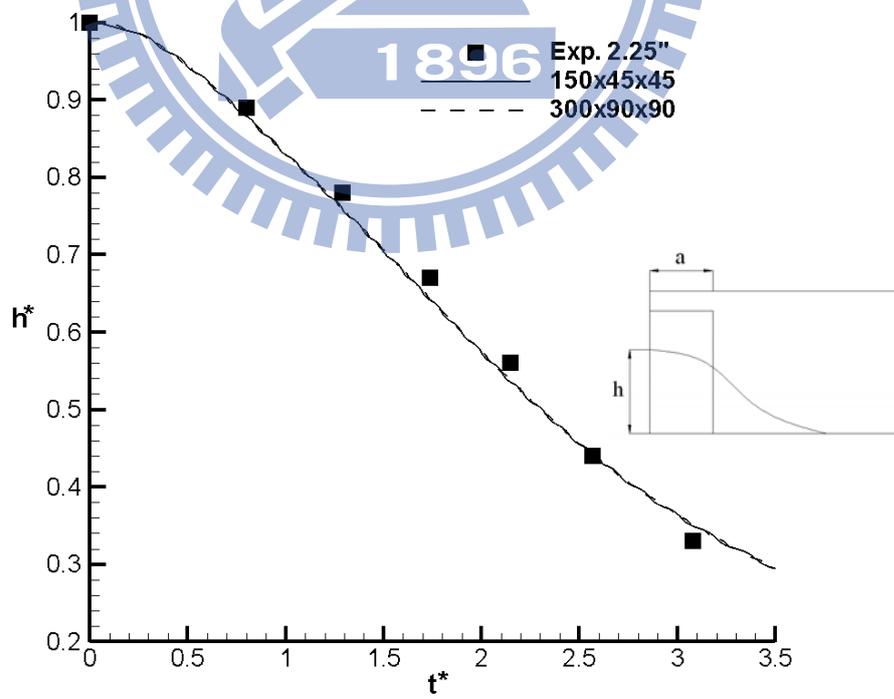


圖 10.11 水柱高度與時間無因次化關係圖

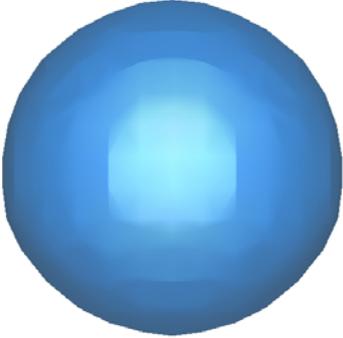
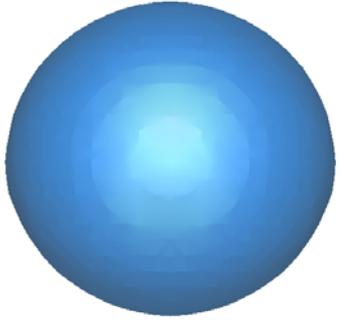
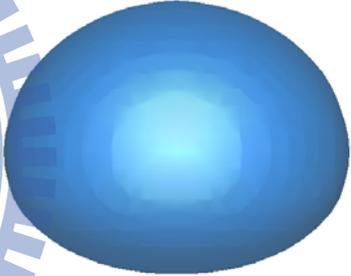
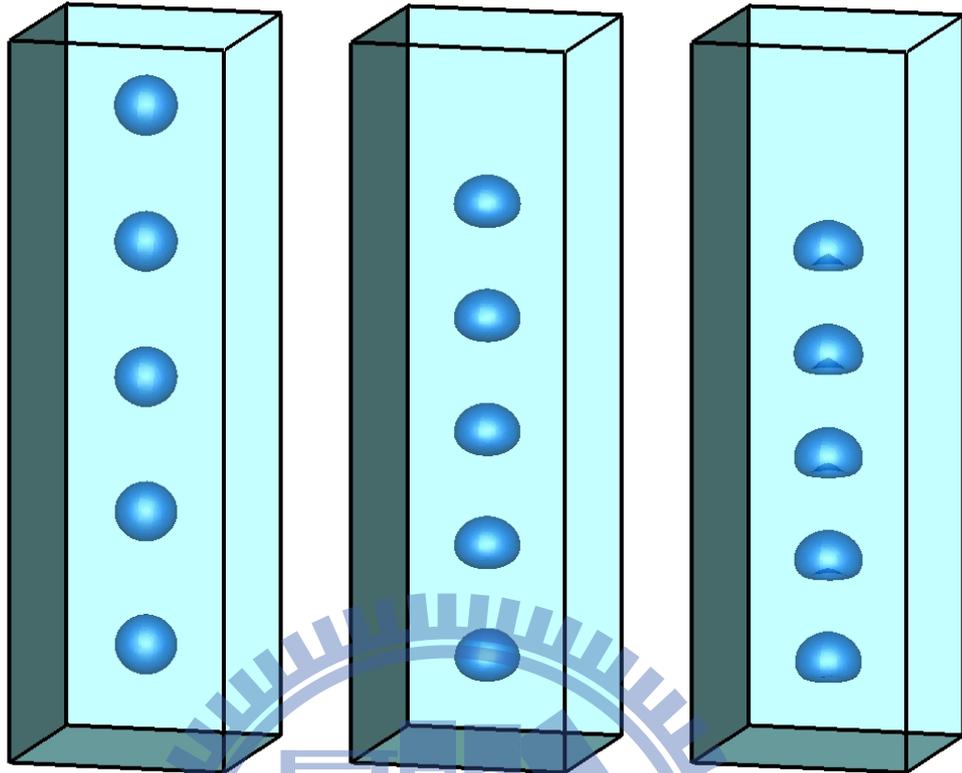
	25×25×150	50×50×300
$Eo = 1 \quad Mo = 10^{-3}$		
$Eo = 10 \quad Mo = 1$		
$Eo = 10^2 \quad Mo = 10^3$		

圖 10.12 單一上升氣泡之氣泡外形



(a) $Eo=1$ $Mo=10^{-3}$ (b) $Eo=10$ $Mo=1$ (c) $Eo=10^2$ $Mo=10^3$

圖 10.13 單一上升氣泡之動態圖(50×50×300, 0.1~0.5 秒)

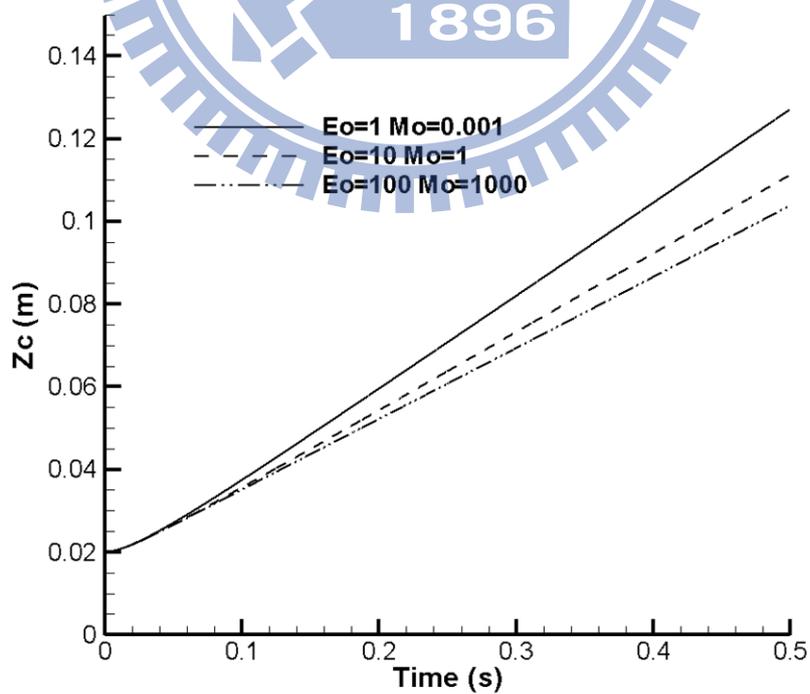
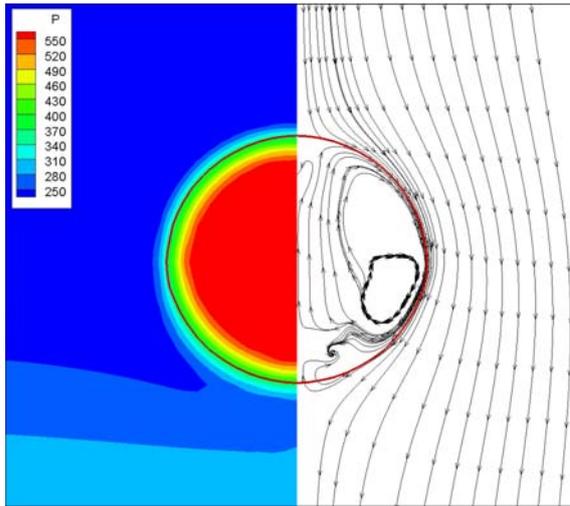
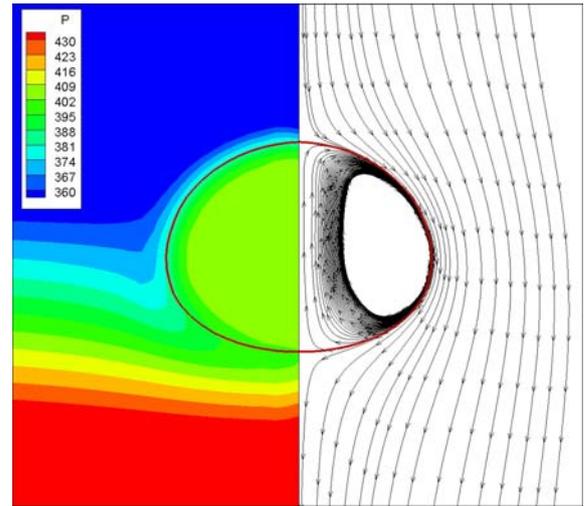


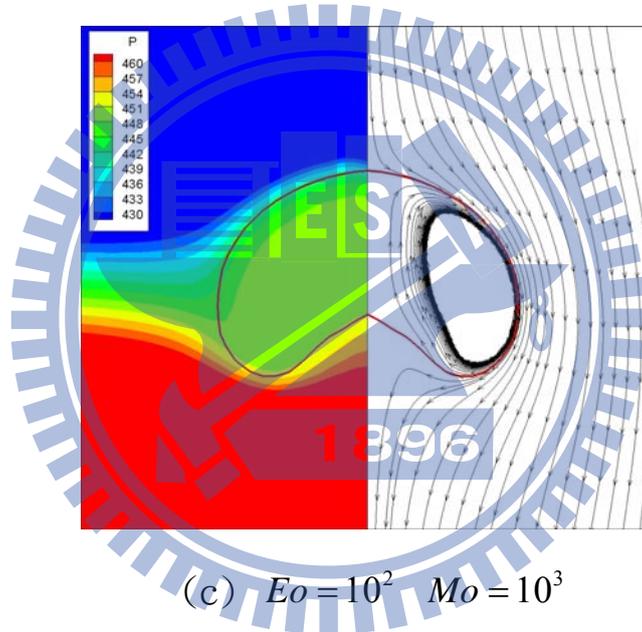
圖 10.14 氣泡中心高度隨時間變化之關係圖(50×50×300)



(a) $Eo=1$ $Mo=10^{-3}$



(b) $Eo=10$ $Mo=1$



(c) $Eo=10^2$ $Mo=10^3$

圖 10.15 氣泡在 $x=0$ 平面上的壓力及流線之分布圖(50×50×300)

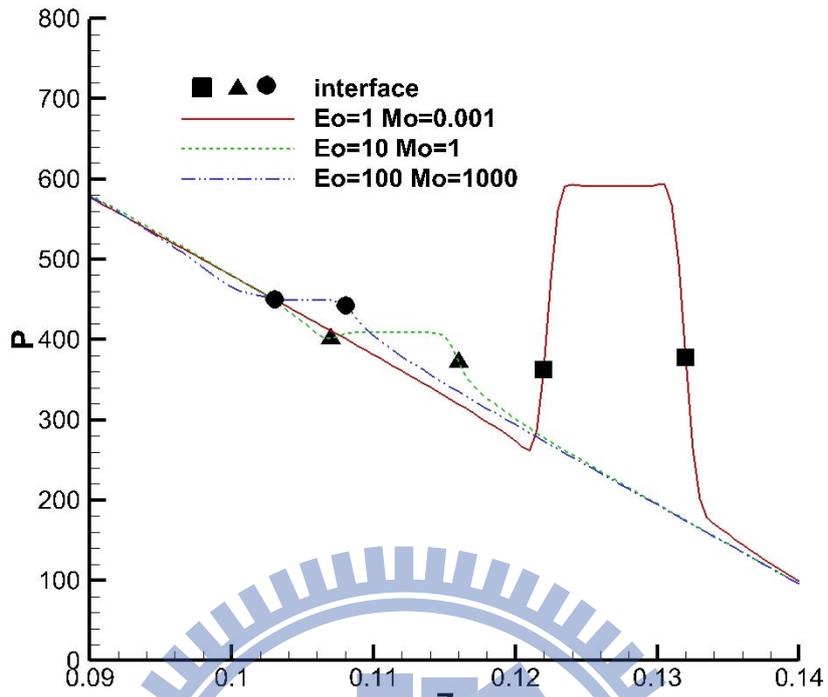


圖 10.16 氣泡在中心軸上沿 z 方向的壓力變化

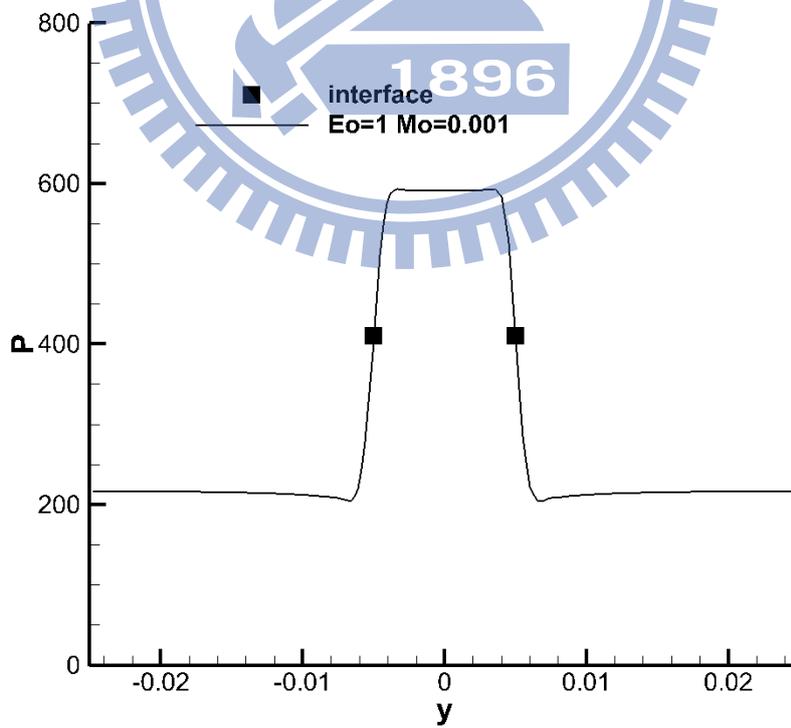
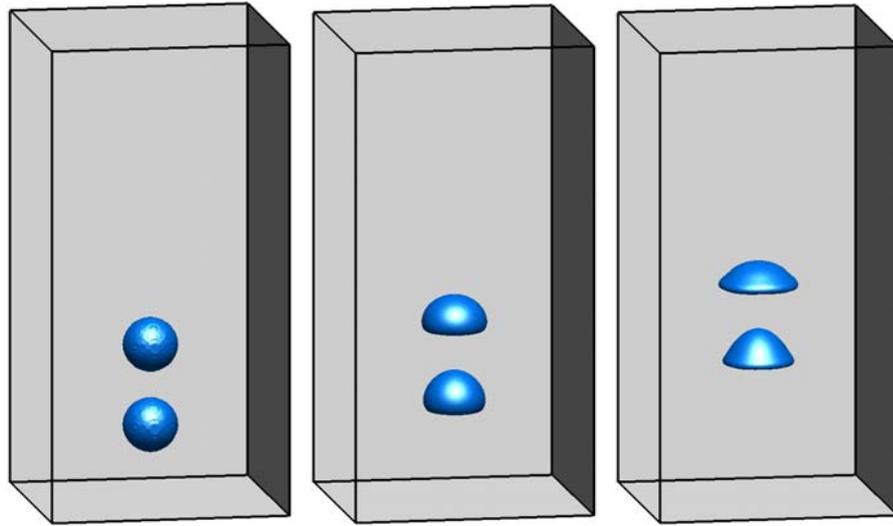


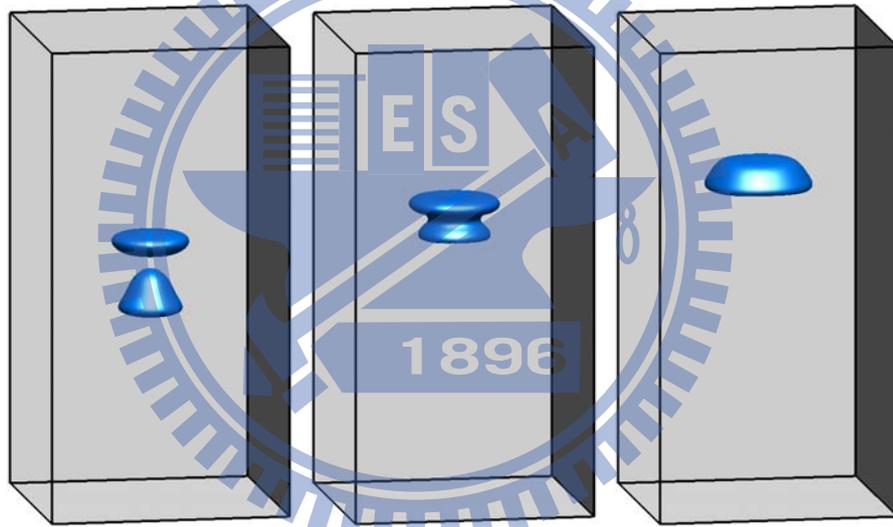
圖 10.17 在 0.5 秒時氣泡中心位置上沿水平方向的壓力變化



(a) 0.00sec

(b) 0.03sec

(c) 0.06sec

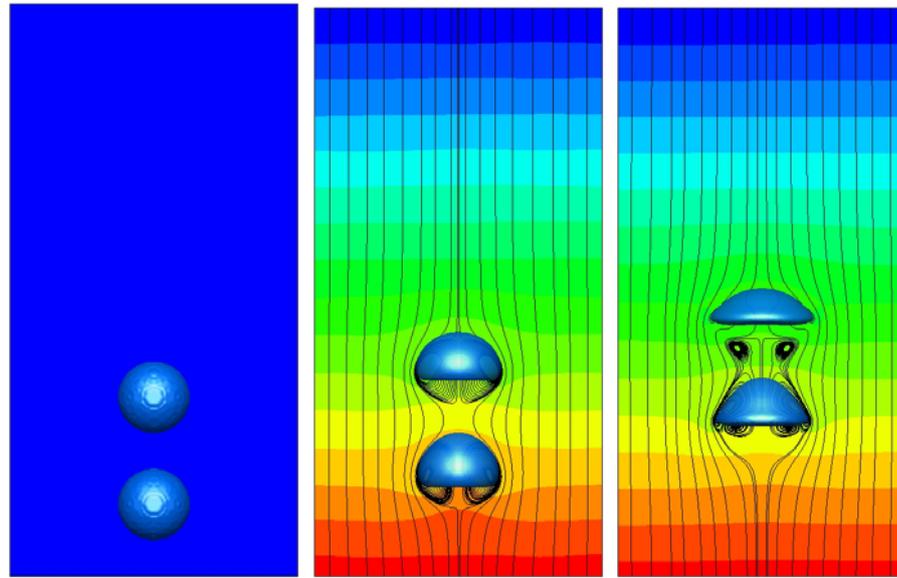


(d) 0.09sec

(e) 0.12sec

(f) 0.15sec

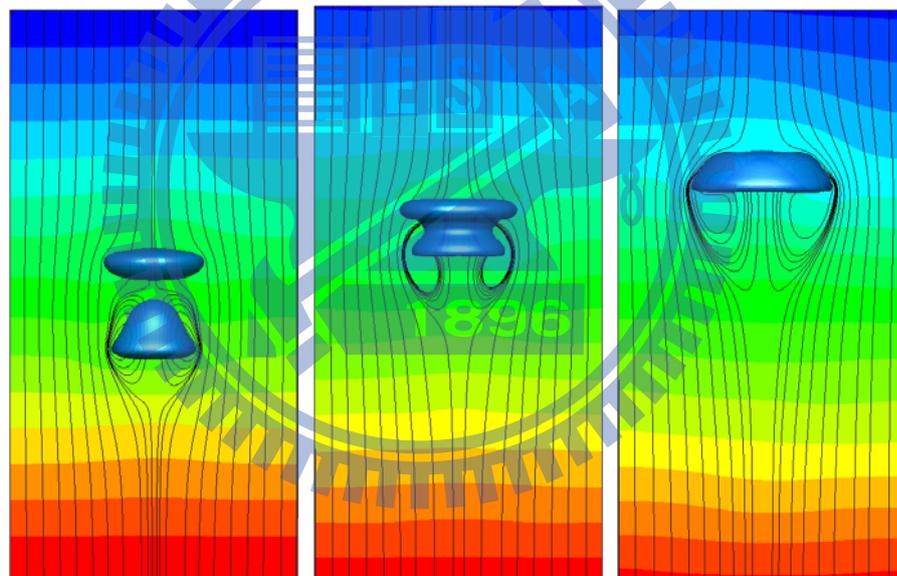
圖 10.18 同軸雙氣泡上升融合之動態圖



(a) 0.00sec

(b) 0.03sec

(c) 0.06sec

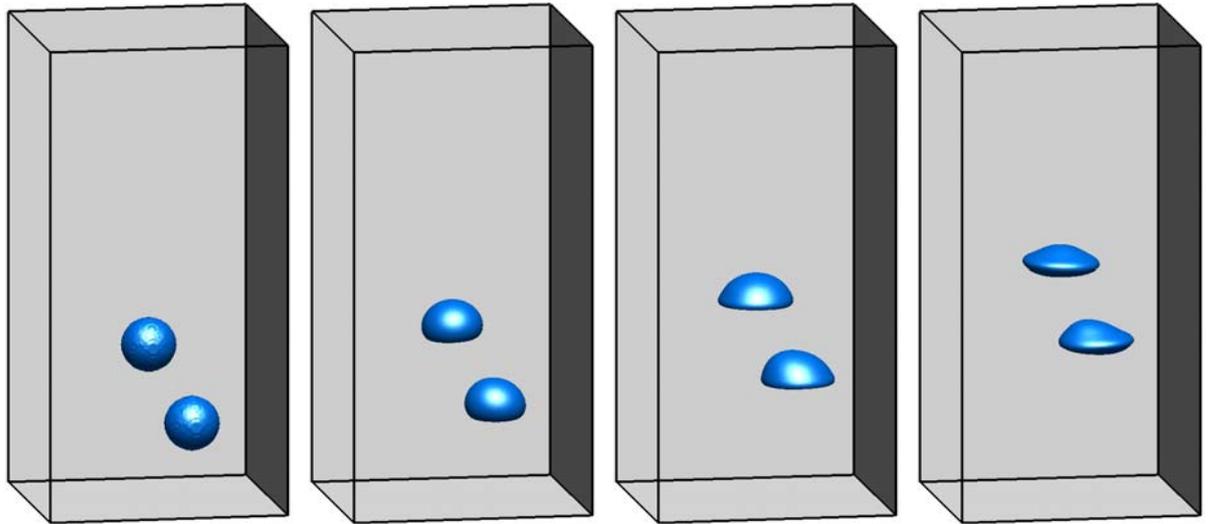


(d) 0.09sec

(e) 0.12sec

(f) 0.15sec

圖 10.19 同軸雙氣泡上升融合之壓力及流線分布圖

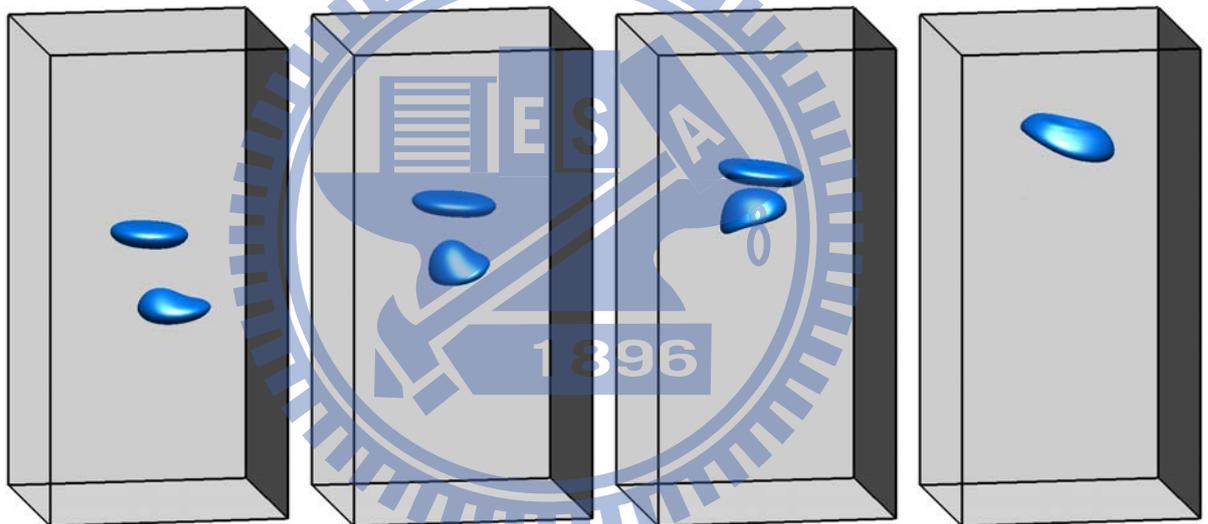


(a)0.00sec

(b)0.025sec

(c)0.05sec

(d)0.75sec



(e)0.10sec

(f)0.125sec

(g)0.15sec

(h)0.185sec

圖 10.20 不同軸雙氣泡上升融合之動態圖

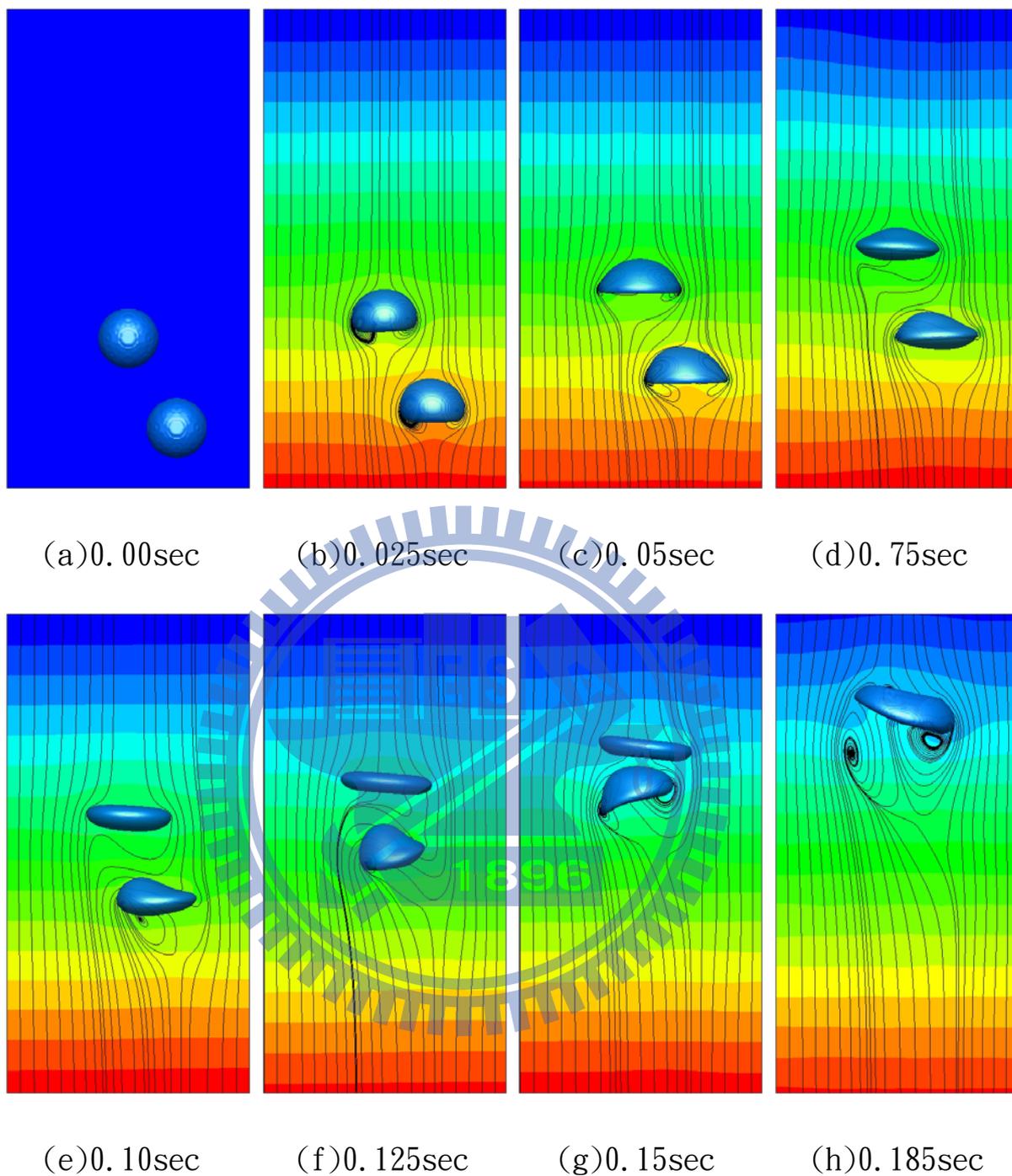
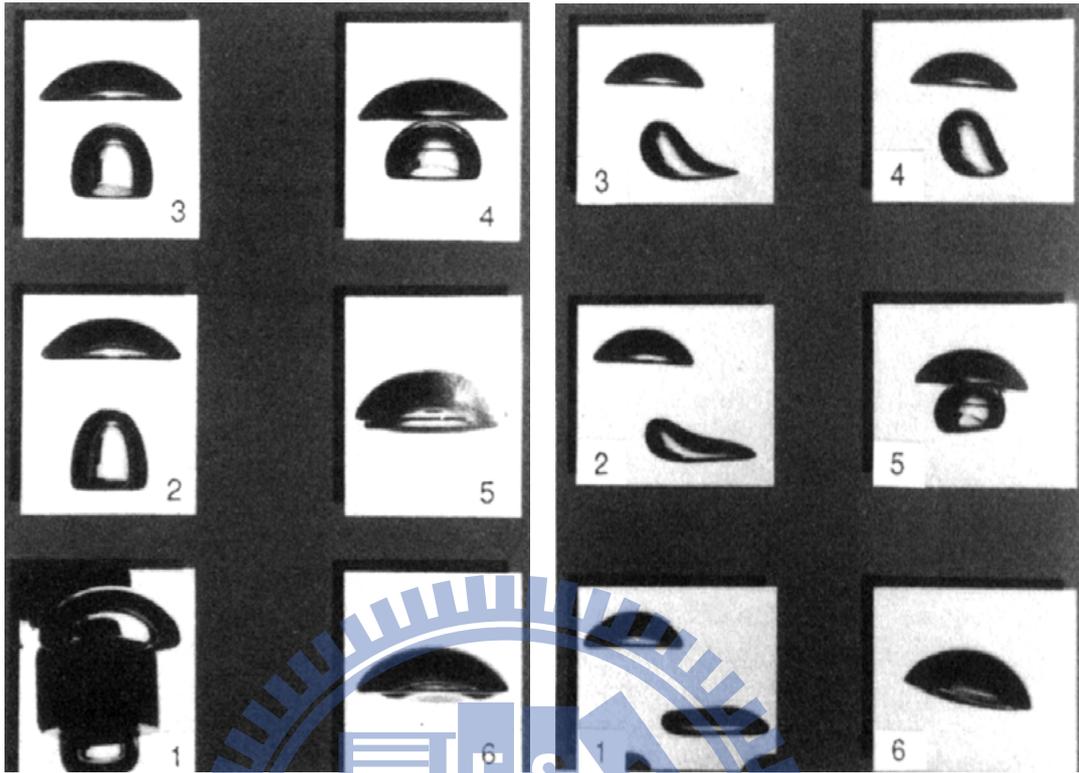


圖 10.21 不同軸雙氣泡上升融合之壓力及流線分布圖



(a) 同軸

(b) 不同軸

圖 10.22 雙氣泡上升融合之實驗結果[88]

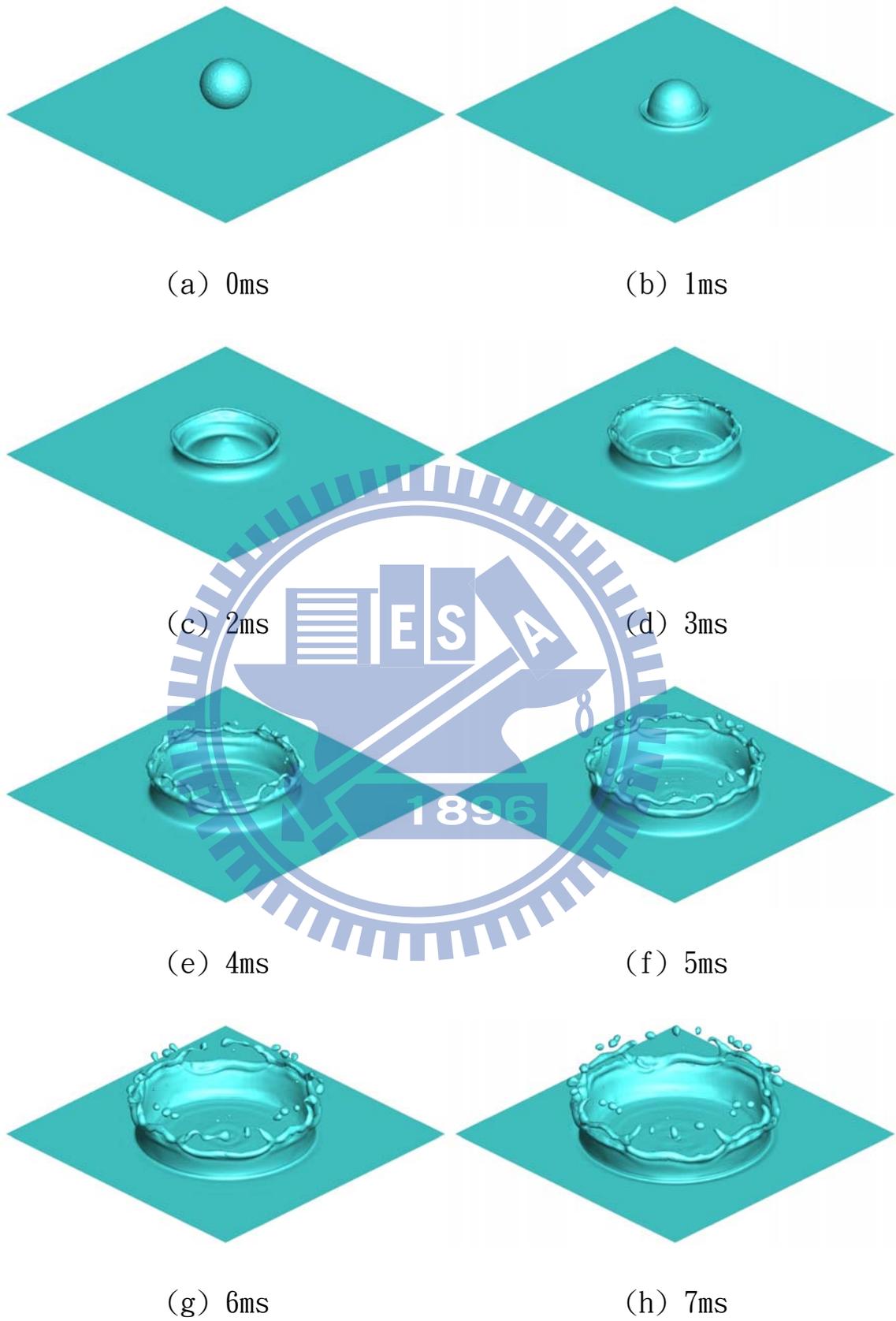


圖 10.23 液滴撞擊薄層液面之動態圖

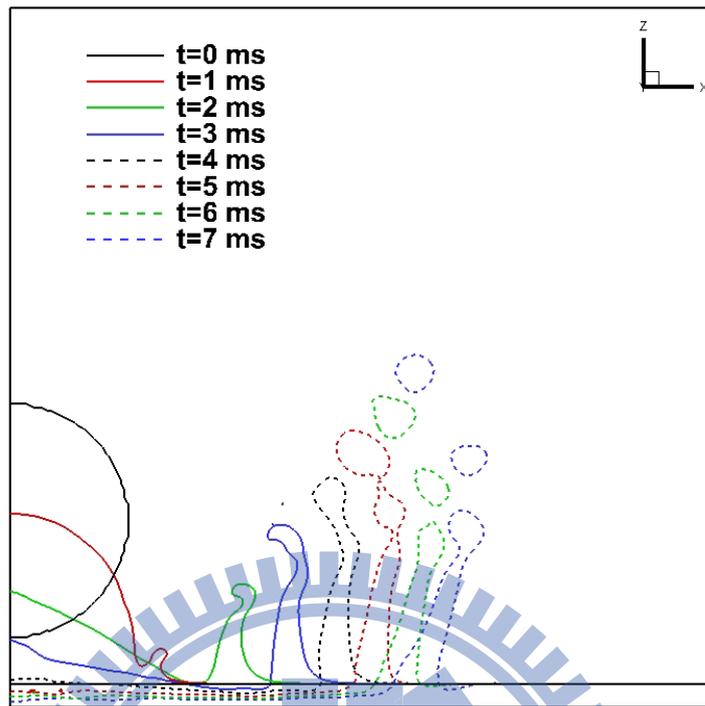


圖 10.24 環狀水波在 $y=0$ 截面上介面之動態圖($t=0\sim 7$ ms, 間隔為 1ms)

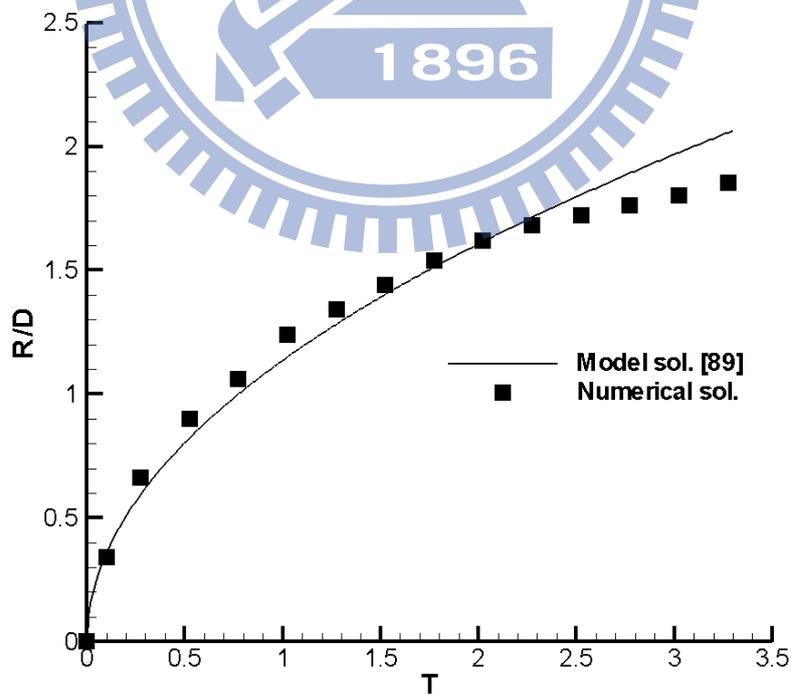
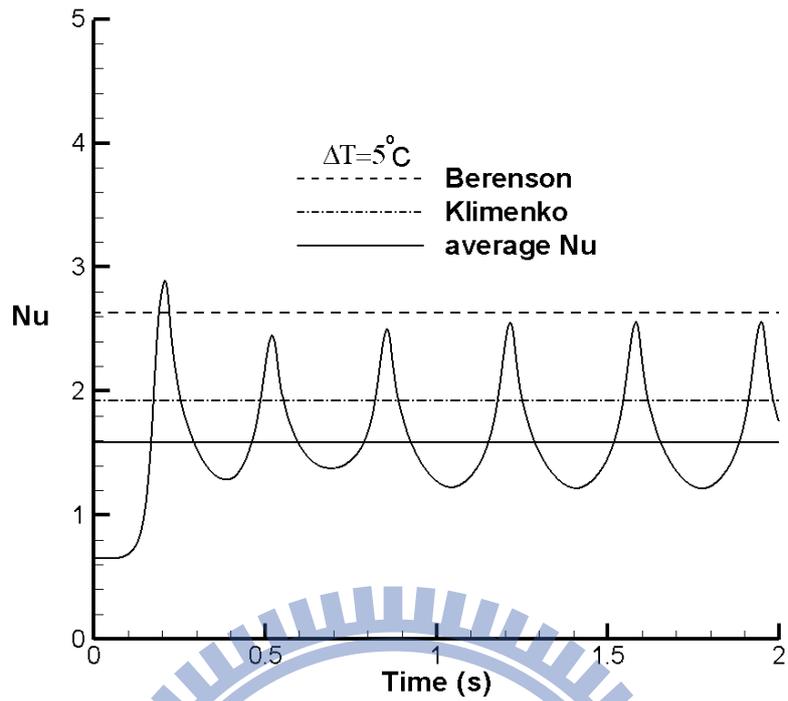
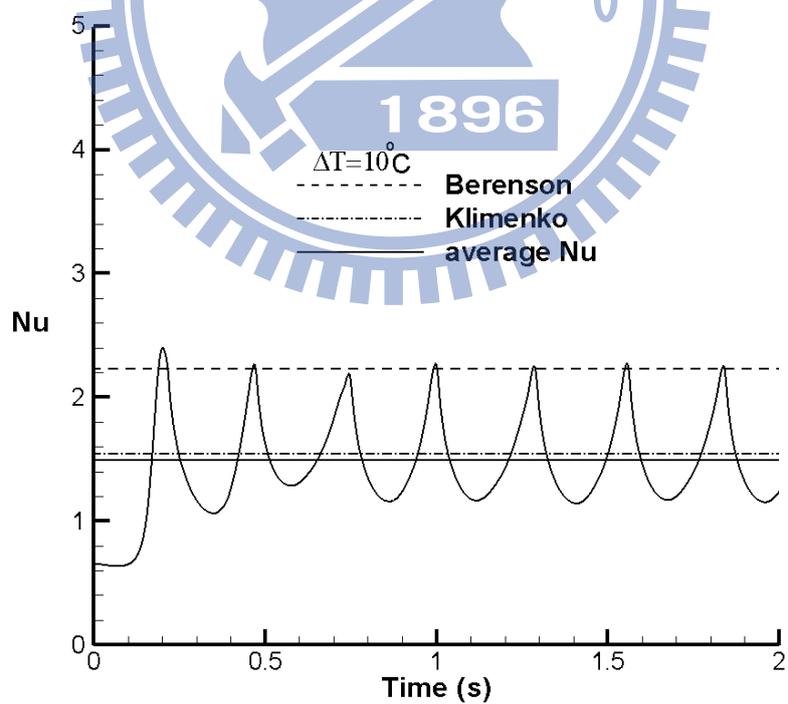


圖 10.25 環狀水波半徑隨時間之變化圖



(a) $\Delta T = 5^\circ\text{C}$



(b) $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

圖 10.26 三維水平平板薄膜沸騰平均 Nusselts 數隨時間之變化圖

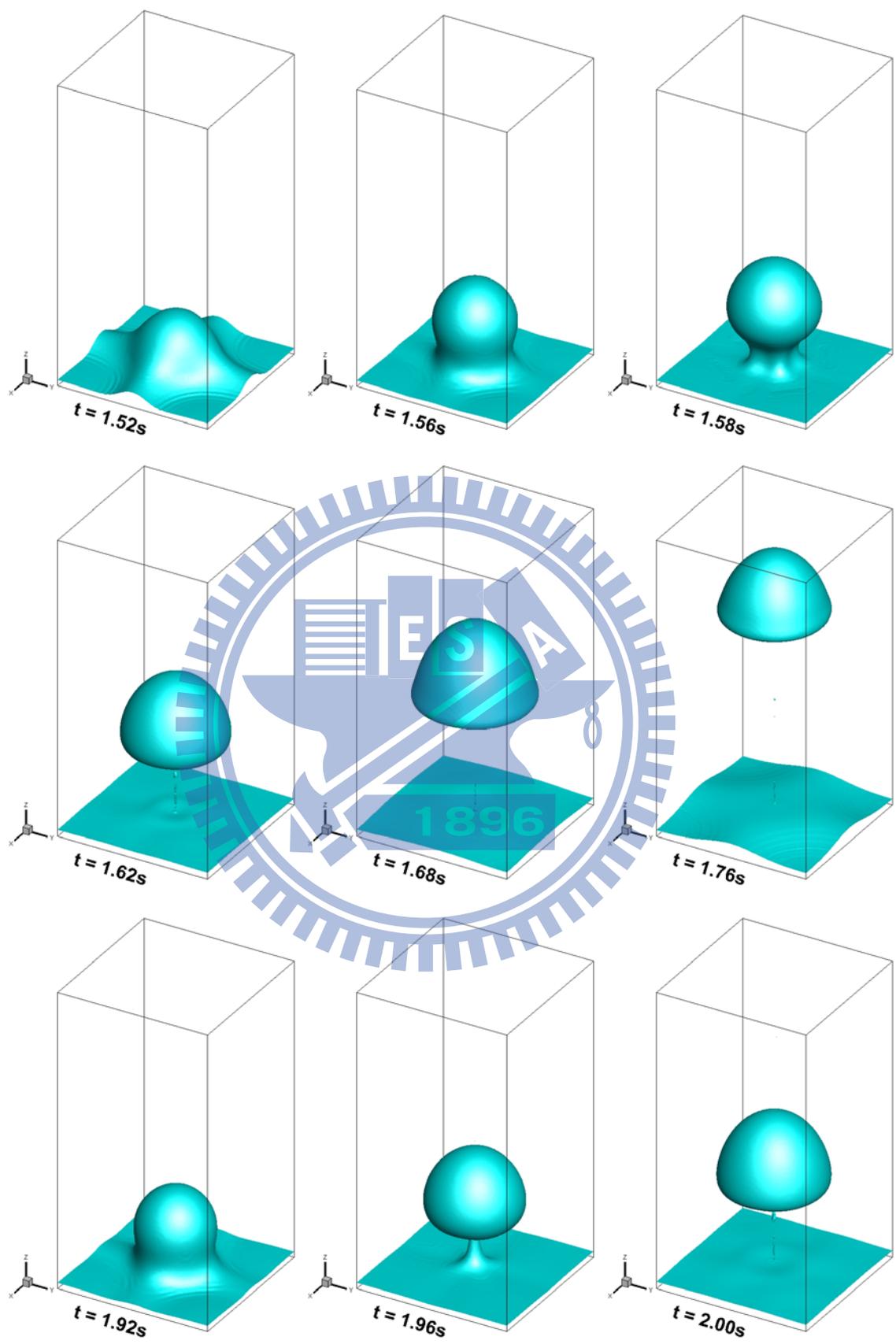


圖 10.27 三維水平平板薄膜沸騰之動態圖($\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$)

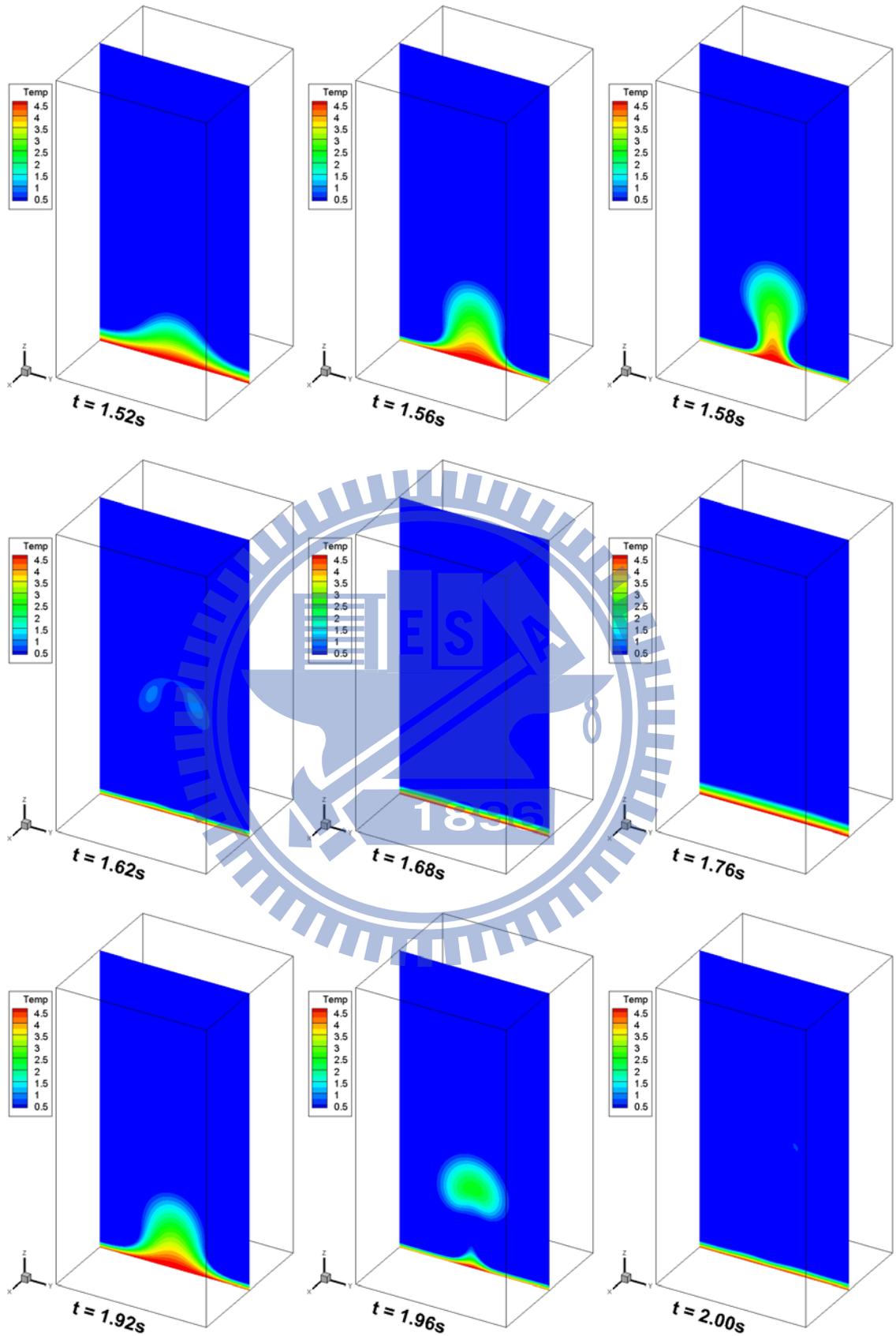


圖 10.28 三維平板薄膜沸騰於 $x=0.04\text{m}$ 平面上之溫度分布圖 ($\Delta T = 5^\circ\text{C}$)

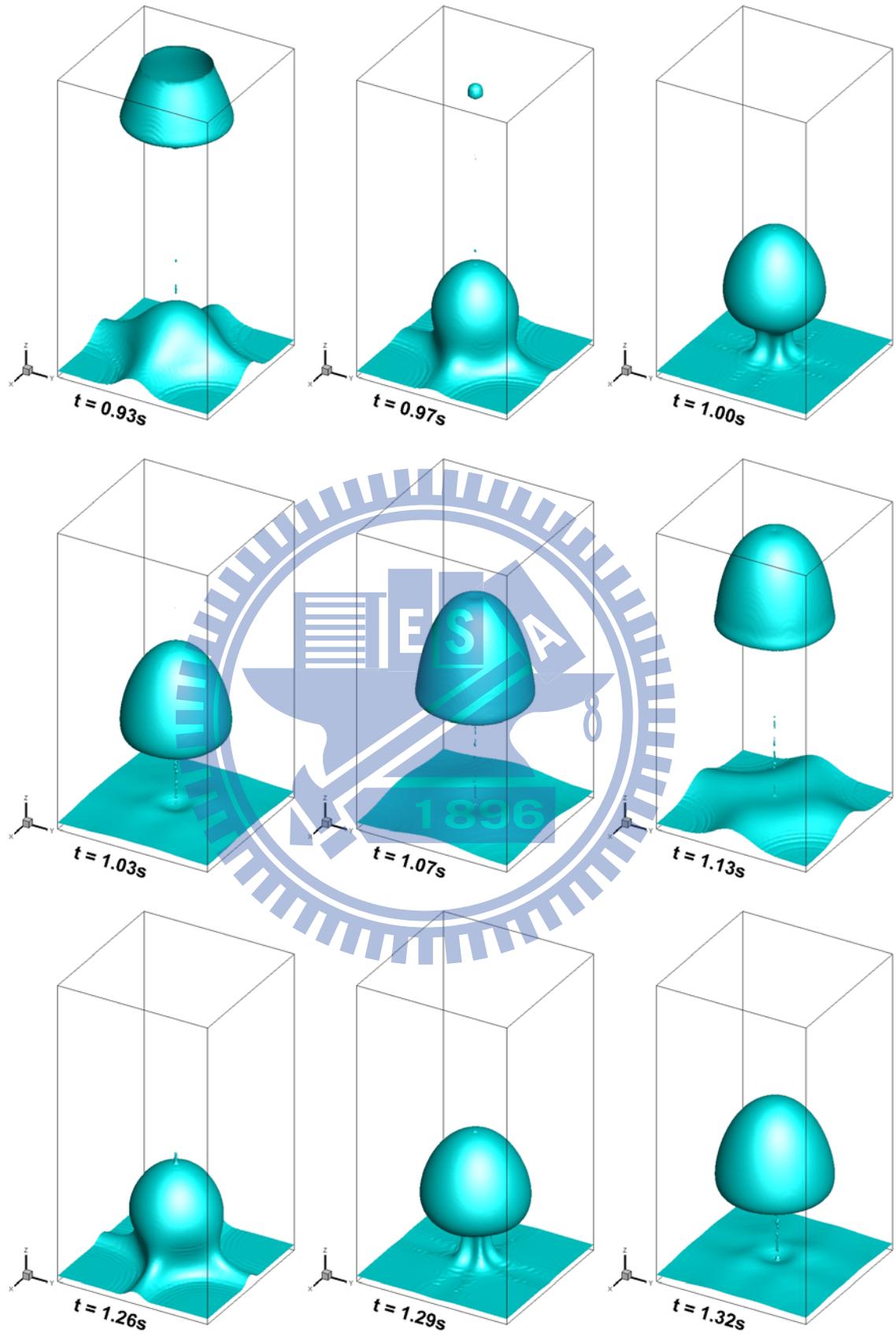


圖 10.29 三維水平平板薄膜沸騰之動態圖 ($\Delta T = 10^\circ C$)

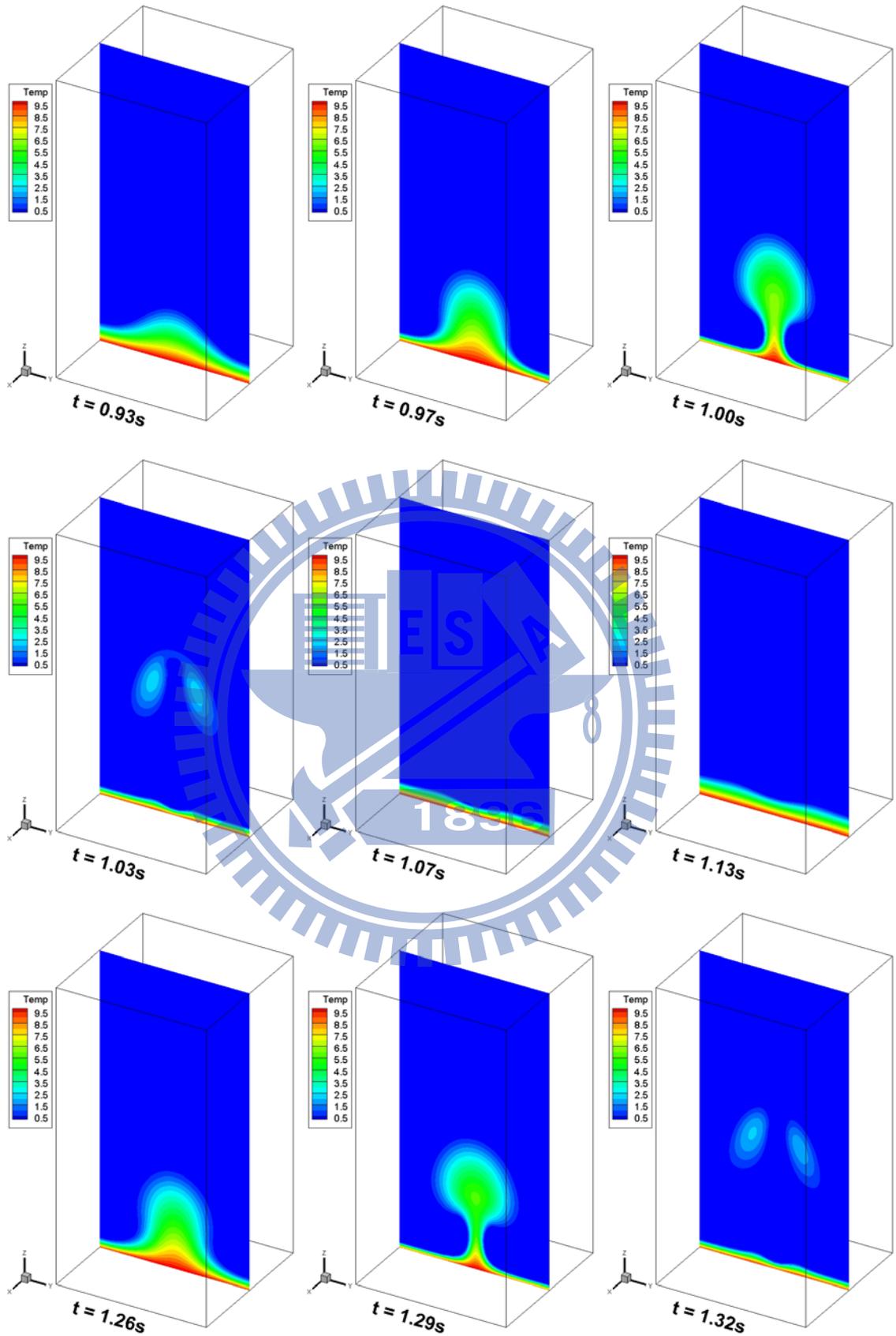


圖 10.30 三維平板薄膜沸騰於 $x=0.04\text{m}$ 平面上之溫度分布圖 ($\Delta T = 10^\circ\text{C}$)

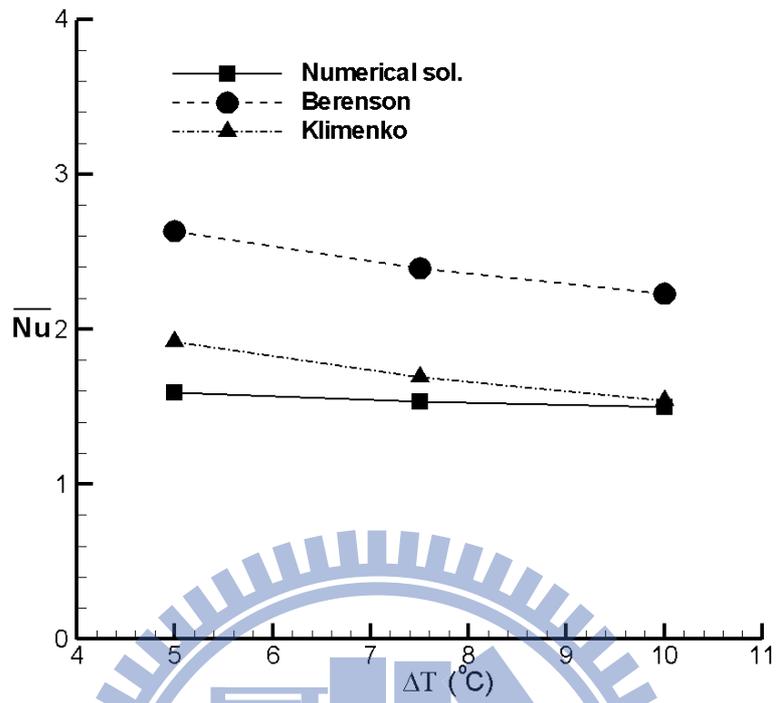


圖 10.31 壁面過熱度與時均化 Nusselt 數之關係圖

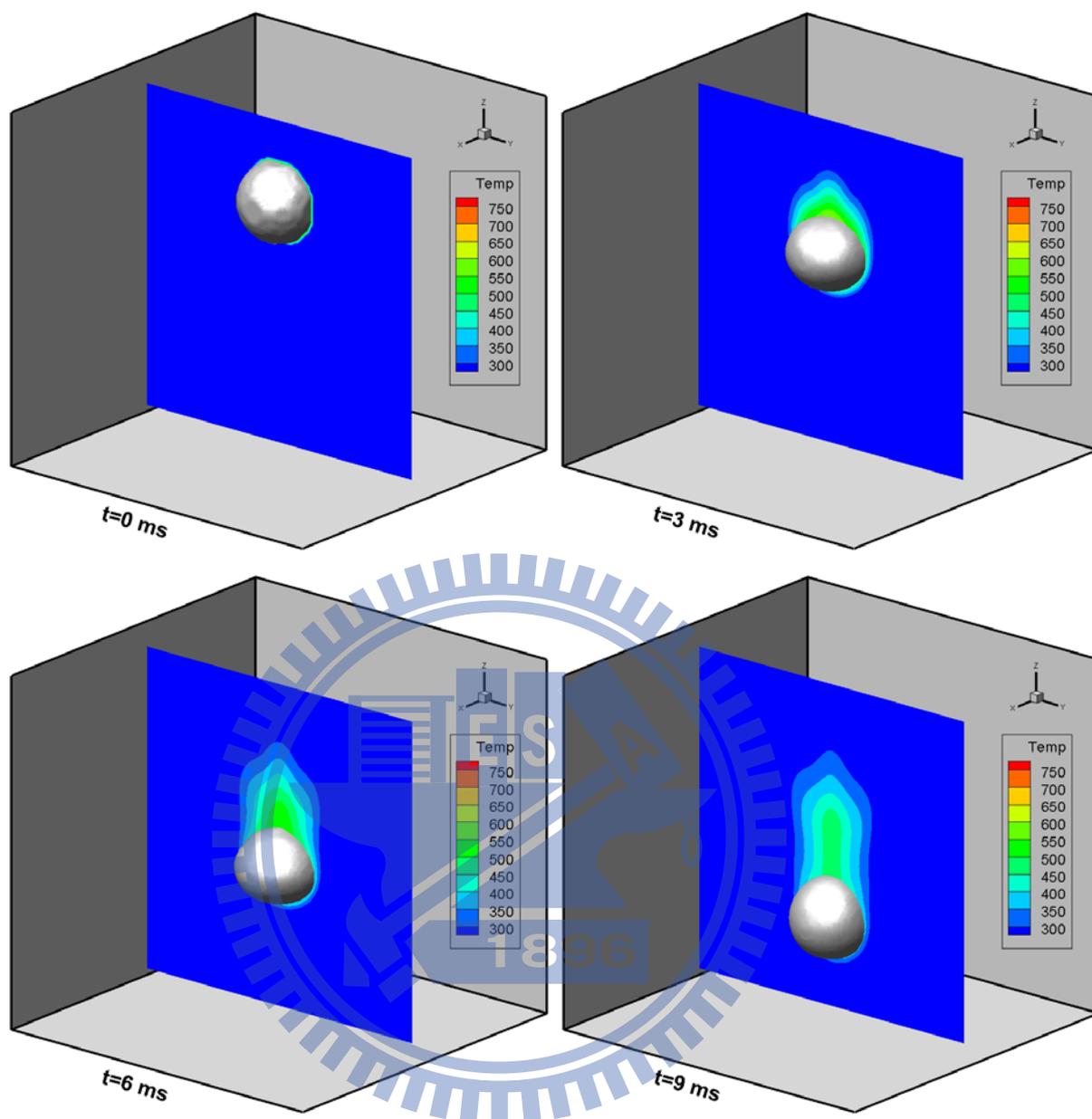


圖 10.32 高溫錫液滴於油槽內介面及溫度分布之動態圖

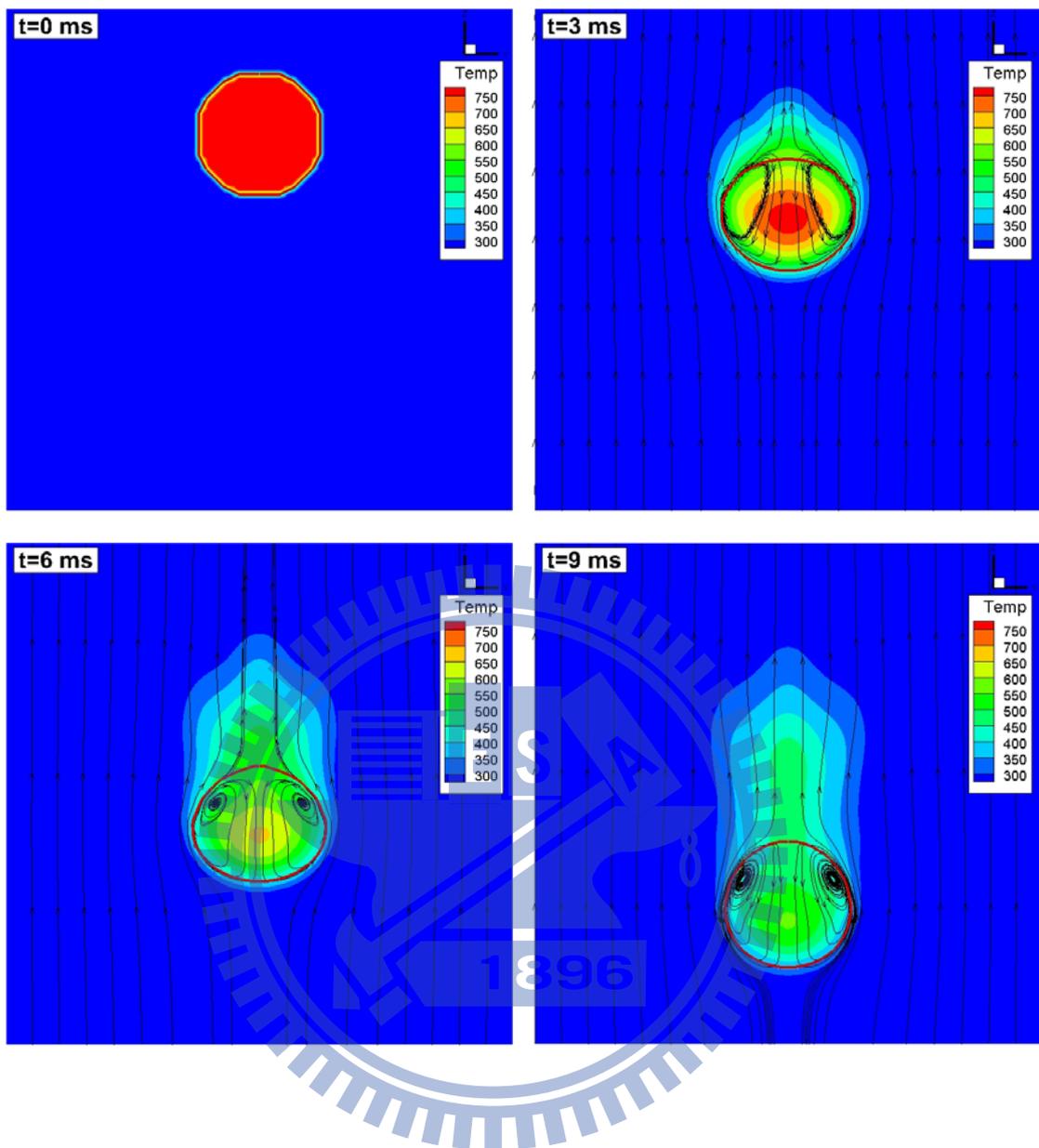


圖 10.33 高溫錫液滴於 $x=0$ 平面上之溫度及流線分布

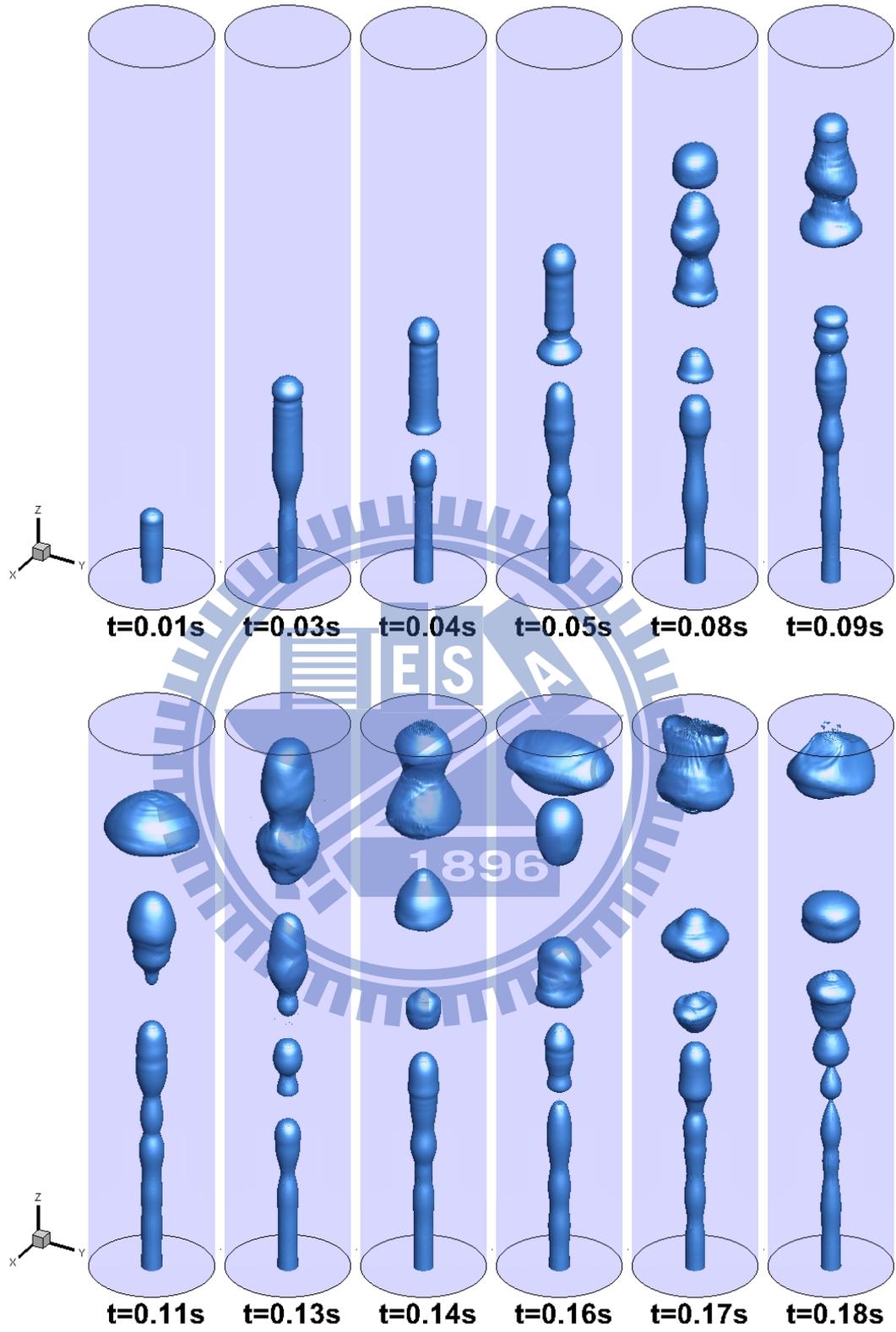


圖 10.34 高溫正辛烷注入水槽之動態圖

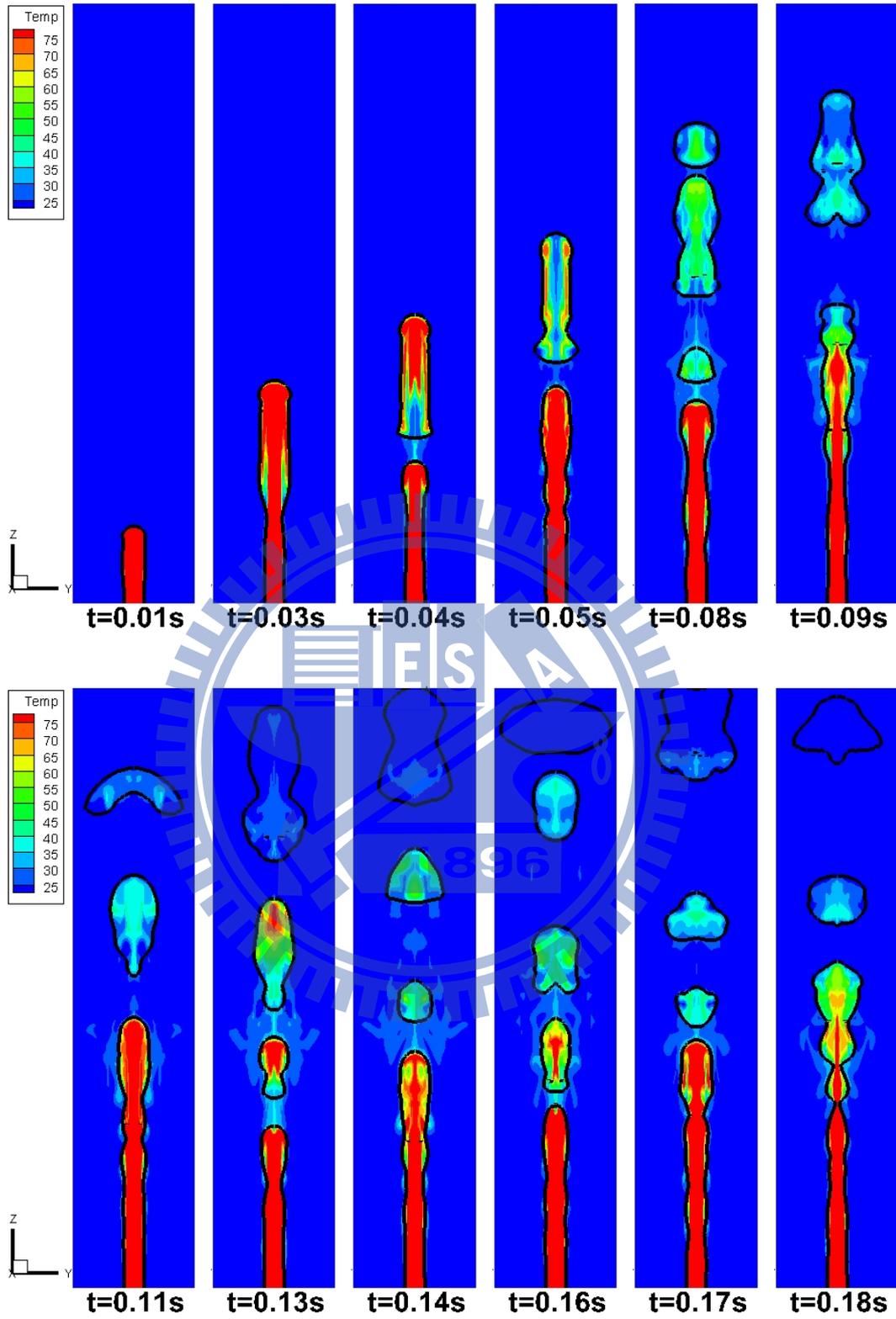


圖 10.35 高溫正辛烷注入水槽於 $x=0$ 平面上之溫度及介面分布圖

第十一章 結論

本研究最主要的目的是發展一套可適用於非結構性網格且含能量及相變化模型的兩相流數值方法，其主要的內容可分為三大部分：

1. 基於流體體積法(VOF)，本研究發展出兩套介面計算的方法，包含通量混合介面捕捉法(FBICS)及守衡內差介面追蹤法(CISIT)。
2. 將相變化及能量方程式的計算導入 CISIT 法中，提出了一套可應用於薄膜沸騰計算中的數值方法。
3. 將含相變化模型的 CISIT 法進行三維化的處理，發展出可模擬真實兩相流流場的數值模型。

以下將針對這三個部份的研究成果做歸納與總結。

(一) 介面運動之數值方法

本研究提出兩套屬於流體體積法範疇的介面運動計算方法，包含 FBICS 法及 CISIT 法。對於介面運動的數值方法而言，前者屬於代數法而後者則屬幾何法。兩種方法的特點如下：

1. FBICS 法：

- (a) 本法是透過通量混合的方式，以一組連續的轉換函數混合高解析差分法及有界下風法來捕捉介面的運動。
- (b) 有別於 CICSAM 和 HRIC 法易受庫倫數大小影響而造成介面擴散，FBICS 法則可適用於庫倫數 0 至 1 的範圍中。

- (c) 透過模擬壩體潰堤流經阻塊和水利湧潮的問題可知本法可應用於介面結構較為複雜的自由表面流中。

2. CISIT 法：

- (a) 本法是以介面重建及濕潤面積的計算來追蹤介面的運動，有別於傳統繁雜的介面重建方法，是一種簡單且易程式化的方法，並可直接使用於非結構性網格中。
- (b) 由體積分率修正的步驟可知本方法透過體積守恆的概念有效地處理了數值誤差所產生不符合流體體積分率之物理特性的問題。
- (c) 本法避免了使用高階差分法所造成的介面擴散問題，計算所得的體積分率分布近似於 Heaviside 函數，能有效將介面控制在一個網格的厚度內。
- (d) 藉由真實流場的模擬結果可知經由兩次的平均平滑化處理後，可有效的避免因介面處流體性質不連續性所造成的計算不穩定。

綜合上述兩種方法的特點可知若要計算需要精確介面定位及幾何資訊的相變化過程，則必須採用 CISIT 法。

(二) 含相變化模型的 CISIT 法

本研究將所提出的 CISIT 法結合相變化模型及能量內邊界的處理方式，進而發展出一套含相變化的兩相流數值方法，並將其應用至水平平板及圓管的薄膜沸騰模擬中。結果顯示在近臨界壓力下平板薄膜沸騰隨不同

的壁過熱度將呈現五種不同形態的沸騰，包含單氣泡模式、單/多氣泡模式、單噴流模式、雙氣泡模式及雙噴流模式。與實驗的半經驗式比較之結果可知前兩種形態的沸騰其模擬所得的時均化 Nusselt 數與半經驗式較為接近，尤其是單氣泡模式。然而當沸騰形態轉換為噴流後，模擬所得的時均化 Nusselt 數將比半經驗式大。透過水平圓管薄膜沸騰的模擬可說明本研究所提出的方法可適用於幾何外觀較為複雜的流場之中，與平板沸騰的結果一樣，隨著壁過熱度的上升沸騰形態也由單氣泡模式轉為噴流。再者，由長平板薄膜沸騰之結果顯示模擬所得的平均 Nusselt 數與半經驗式相當接近，證明本方法可應用至真實的沸騰問題中。

(三) 三維 CISIT 法

藉由二維 CISIT 法之概念，本研究修改其介面傳輸的計算方式，使 CISIT 法可以應用於三維的雙流體流場之中。將其應用至上升氣泡及液滴撞擊薄層液面的問題中，結果顯示對於介面變形後外觀的預測上有不錯的成果。為了計算三維含相變化之兩相流，本研究在六面體網格中提出以多個不共面的三角形介面來進行介面重建，並修改二維的介面熱通量及能量內邊界的計算方式，使 CISIT 法可應用於三維的薄膜沸騰問題。在三維平板膜沸騰的問題中，模擬所得的 Nusselt 數與 Klimenko 之半經驗式的結果相當溫和。本研究同時亦利用能量內邊界的方式發展無相變化的純熱傳兩相流模型，並將其應用至高溫錫液滴於油槽內落下及高溫辛烷注入水槽的問題中。

(四) CISIT 法相較於其他方法之優點

總結來說 CISIT 法是以線性內差的方式透過 $\alpha = 0.5$ 的等位面來重建介面並採先預測後修正的方法來計算介面的推移，其相對於其他介面計算方法的優點如下：

1. 與 PLIC 法[31]比較可知本方法可輕易的在非結構性網格中使用，並且推展到三維的計算中將不會增加太多的複雜度。然而，PLIC 法在結構性網格中其介面重建的步驟就已經相當繁複，而且在計算介面推移時又必須針對多種不同的介面形狀來計算面上所需要的體積通量(二維 16 種，三維 64 種)，這使得 PLIC 法若應用於非結構性網格或是三維的問題當中將會相當複雜。
2. 與前端追蹤法[13]比較可知 CISIT 法是經由儲存於網格中心的體積分率值內差至網格節點，再透過網格節點之體積分率值以線性內差的方式重建介面，重建後的介面在三維網格中只有一組連續的介面存在，因此並不會出現在前端追蹤法中所發生介面不會自動接合的問題。

第十二章 參考文獻

- [1] Ishii, M., Thermo-Fluid Dynamic of Two-Phase Flow, Eyrolles, Paris, 1975.
- [2] Berenson, P. J., “Film-boiling heat transfer from a horizontal surface”, ASME Journal of Heat Transfer, 83, pp. 351-358, 1961.
- [3] Bromley, L. A., “Heat transfer in stable film boiling”, Chemical engineering Progress, 46 , pp. 221-227, 1950.
- [4] Klimenko, V. V., “Film-boiling on a horizontal plate–new correlation”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 24, pp. 69-79, 1981.
- [5] Welch, S. W. J., “Local simulation of two-phase flows including interface tracking with mass transfer”, Journal of Computational Physics, 121, pp. 142-154, 1995.
- [6] Son, G. and Dhir, V. K., “Numerical simulation of saturated film boiling on a horizontal surface”, ASME Journal of Heat Transfer, 119, pp. 525-533, 1997.
- [7] Juric, D. and Tryggvason, G., “Computations of boiling flows”, International Journal of Multiphase Flow, 24, pp. 387-410, 1998.
- [8] Son, G. and Dhir, V. K., “Numerical simulation of film boiling near critical pressures with a level set method”, ASME Journal of Heat Transfer, 120, pp. 183-192, 1998.
- [9] Welch, S. W. J. and Wilson, J., “A volume of fluid based method for fluid flows with phase change”, Journal of Computational Physics, 160, pp. 662-682, 2000.
- [10] Ramaswamy, B. and Kawahara, M., “Lagrangian finite element analysis applied to viscous free surface fluid flow”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 7, pp. 953-984, 1987.

- [11] Fukai, J., Zhao, Z., Poulidakos, D., Megaridis, C. M. and Miyatake, O., “Modeling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a flat surface”, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 5, pp. 2588-2599, 1993.
- [12] Muzaferija, S. and Peric, M., “Computation of free-surface flows using the finite-volume method and moving grids”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamental, 32, pp. 369-384, 1997.
- [13] Unverdi, S. O. and Tryggvason, G., “A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows”, Journal of Computational Physics, 100, pp. 25-37, 1992.
- [14] Tryggvasson, G., Bunner, B., Esmaceli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S. and Jan, Y.-J., “A front-tracking method for the computations of multiphase flow”, Journal of Computational Physics, 169, pp. 708–759, 2001.
- [15] Osher, S. and Sethian, J. A., “Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”, Journal of Computational Physics, 79, pp. 12–49, 1988.
- [16] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., “A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow”, Journal of Computational Physics, 114, pp. 146-159, 1994.
- [17] Sussman, M., Fatami, E., Smereka, P. and Osher, S., “An improved level set method for incompressible two-phase flows”, Computers and Fluids, 27, pp. 663-680, 1998.
- [18] Sussman, M. and E., Fatami, “An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow”, SIAM Journal on Scientific Computing, 20, pp. 1165-1191, 1999.
- [19] Harlow, F. H. and Welch, J. E., “Numerical calculation of time-dependent

- viscous incompressible flow of fluid with free surface”, The Physics of Fluids, 8, pp. 2182-2189, 1965.
- [20] Monaghan, J. J., “Simulating free surface flows with SPH”, Journal of Computational Physics, 110, pp. 399-406, 1994.
- [21] Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y., “Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 26, pp. 751-769, 1998.
- [22] Hirt, C. W. and Nichols, H. D., “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, Journal of Computational Physics, 39, pp. 201-225, 1981.
- [23] Rudman, M., “Volume-tracking methods for interfacial flow calculations”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24, pp. 671-691, 1997.
- [24] Rudman, M., “A volume-tracking method for incompressible multifluid flows with large density variations”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 28, pp. 357-378, 1998.
- [25] Zalesak, S. T., “Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids”, Journal of Computational Physics, 31, pp. 335-262, 1979.
- [26] Ubbink, O. and Issa, R. I., “A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes”, Journal of Computational Physics, 153, pp. 26-50, 1999.
- [27] Muzaferija, S., Peric, M., Sames, P. and Schellin, T., “A two-fluid Navier-Stokes solver to simulate water entry”, Proceeding of Twenty-Second Symposium On Naval Hydrodynamics, pp. 638-649, Washington, DC, 1998.
- [28] Darwish, M. and Moukalled, F., “Convective schemes for capturing interfaces of free-surface flows on unstructured grids”, Numerical Heat

Transfer Part B: Fundamental, 49, pp. 19-42, 2006.

- [29] Gaskell, P. H. and Lau, A. K. C., “Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 8, pp. 617-641, 1988.
- [30] Noh, W. F. and Woodward, P., “SLIC (simple line interface calculation)”, Lecture Notes in Physics, 59, pp. 330-340, 1976.
- [31] Youngs, D. L., “Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion”, in K.W. Morton and M.J. Baines (Eds.), Numerical Methods for Fluid Dynamics, pp. 273–285, Academic, New York, 1982.
- [32] Rider, W. J. and Kothe, D. B., “Reconstructing volume tracking”, Journal of Computational Physics, 141, pp. 112-152, 1998.
- [33] Pilliod Jr., J. E. and Puckett, E. G., “Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces”, Journal of Computational Physics, 199, pp. 465-502, 2004.
- [34] Ashgriz, N. and Poo, J. Y., “FLAIR: flux line-segment model for advection and interface reconstruction”, Journal of Computational Physics, 93, pp. 449-468, 1991.
- [35] Tavakoli, R., Babaei, R., Varahram, N. and Davami, P., “Numerical simulation of liquid/gas phase flow during mold filling”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, pp. 697-713, 2006.
- [36] Mosso, S. J., Swartz, B. K., Kothe, D. B. and Clancy, S. P., “Recent enhancement of volume tracking algorithm for irregular grids”, Los Alamos National Lab. Rept. LA-CP-96-227, Los Alamos, New Mexico, 1996.
- [37] Shahbazi, K., Paraschivoiu, M. and Mostaghimi, J., “Second order accurate volume tracking based on remapping for triangular meshes”, Journal of

- Computational Physics, 188, pp. 100-122, 2003.
- [38] Ashgriz, N., Barbat, T. and Wang, G., “A computational Lagrangian-Eulerian advection remap for free surface flows”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 44, pp. 1-32, 2004.
- [39] Sussman, M. and Puckett, E. G., “A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows”, Journal of Computational Physics, 162, pp. 301-337, 2000.
- [40] Son, G. and Hur, N., “A coupled level set and volume-of-fluid method for the buoyancy-driven motion of fluid particles”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals, 42, pp. 523-542, 2002.
- [41] van der Pijl, S. P., Segal, A., Vuik, C. and Wesseling, P., “A mass-conserving level-set method for modelling of multi-phase flows”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 47, pp. 339-361, 2005.
- [42] Yang, X., James, A. J., Lowengrub, J., Zheng, X. and Cristini, V., “An adaptive coupled level-set/volume-of-fluid interface capturing method for unstructured triangular grids”, Journal of Computational Physics, 217, pp. 364-394, 2006.
- [43] Sun, D. L. and Tao, W. Q., “A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible two-phase flows”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 53, pp. 645-655, 2010.
- [44] Shin, S. and Juric, D., “Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity”, Journal of Computational Physics, 180, pp. 427-470, 2002.
- [45] Esmaeeli, A. and Tryggvason, G., “Computations of film boiling. part I: numerical method”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, pp. 5451-5461, 2004.

- [46]Esmaeeli, A. and Tryggvason, G., “Computations of film boiling. part II: multi-mode film boiling”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, pp. 5463-5476, 2004.
- [47]Esmaeeli, A. and Tryggvason, G., “A front tracking method for computations of boiling in complex geometries”, International Journal of Multiphase Flow, 30, pp. 1037- 1050, 2004.
- [48]Son, G., “A numerical method for bubble motion with phase change”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals, 39, pp. 509-523, 2001.
- [49]Fedkiw, R. P., Aslam, T., Merriman, B. and Osher S., “A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)”, Journal of Computational Physics, 152, pp. 457-492, 1999.
- [50]Kang, M., Fedkiw, R. P. and Liu, X.-D., “A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow”, Journal of Scientific Computing, 15, pp. 323-360, 2000.
- [51]Tanguy, S., Menard, T. and Berlemont, A., “A level set method for vaporizing two-phase flows”, Journal of Computational Physics, 221, pp. 837-853, 2007.
- [52]Gibou, F., Chen, L., Nguyen, D. and Banerjee, S., “A level set based sharp interface method for the multiphase incompressible Navier-Stokes equations with phase change”, Journal of Computational Physics, 222, pp. 536-555, 2007.
- [53]Maurya, R. S., Diwakar, S. V., Sundararajan, T. and Das, S. K., “Numerical investigation of evaporation in the developing region of laminar falling film flow under constant wall heat flux conditions”, Numerical Heat Transfer Part A: Applications, 58, pp. 41-64, 2010.
- [54]Son G. and Dhir, V. K., “A level set method for analysis of film boiling on

- an immersed solid surface”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals, 52, pp. 153-177, 2007.
- [55] Son, G. and Dhir, V. K., “Three-dimensional simulation of saturated film boiling on a horizontal cylinder”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 51, pp. 1156-1167, 2008.
- [56] Welch, S. W. J. and Rachidi, T., “Numerical computation of film boiling including conjugate heat transfer”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals, 42, pp. 35-53, 2002.
- [57] Agarwal, D.K., Welch, S. W. J., Biswas, G. and Durst, F., “Planar simulation of bubble growth in film boiling in near-critical water using a variant of the VOF method”, ASME Journal of heat transfer, 126, pp. 329-338, 2004.
- [58] Guo, D. Z., Sun, D. L., Li, Z. Y. and Tao, W. Q., “Phase change heat transfer simulation for boiling bubbles arising from a vapor film by the VOSET method”, Numerical Heat Transfer Part A: Applications, 59, pp. 857-881, 2011.
- [59] Tsui, Y.-Y., Lin, S.-W., Cheng, T.-T. and Wu, T.-C., “Flux-blending schemes for interface capture in two-fluid flows”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 52, pp. 5547-5556, 2009.
- [60] Tsui, Y.-Y. and Lin, S.-W., “A VOF based conservative interpolation scheme for interface tracking (CISIT) of two-fluid flows”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals, 63, pp. 263-283, 2013.
- [61] Brackbill, J. U., Kothe, D. B. and Zemach, C., “A continuum method for modeling surface tension”, Journal of Computational Physics, 100, pp. 335-354, 1992.
- [62] Tsui, Y.-Y. and Wu, T.-C., “A pressure-based unstructured-grid algorithm using high-resolution schemes for all-speed flows”, Numerical Heat

Transfer Part B: Fundamental, 53, pp. 75-96, 2008.

- [63] Tsui, Y.-Y. and Wu, T.-C., “Use of characteristic-based flux limiters in a pressure-based unstructured-grid algorithm incorporating high-resolution schemes”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamental, 55, pp. 14-34, 2009
- [64] Harten, A. “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, Journal of Computational Physics, 49, pp. 357-393, 1983.
- [65] Sweby, P. K., “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws”, SIAM Journal on Numerical Analysis, 21, pp. 995-1011, 1984.
- [66] Leonard, B. P., “The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 88, pp. 17-74, 1991.
- [67] Leonard, B. P., “Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 8, pp. 1291-1318, 1988
- [68] Leonard, B. P., “Bounded higher-order upwind multi-dimensional finite-volume convection-diffusion algorithm”, in: W. J. Minkowycz, Editor, Advances in Numerical Heat Transfer, Taylor and Francis, 1997.
- [69] Yeh, J.-T., “Simulation and industrial application of inkjet”, 7th National Computational Fluid Dynamics Conference, Kenting, Taiwan, 2000.
- [70] Yeh, J.-T., “A VOF-FEM and coupled inkjet simulation”, Proc. of ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, pp. 1-5, New Orleans, USA, 2001.
- [71] Peskin, C. S., “Numerical analysis of blood flow in the heart”, Journal of Computational Physics, 25, pp. 220-252, 1977.

- [72]Issa, R. I., “Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting”, Journal of Computational Physics, 62, pp. 40-65, 1986.
- [73]Martin, J. C. and Moyce, W. J., “An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical, 244 pp. 312-324, 1952.
- [74]Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y., “A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation”, Computational Fluid Dynamics Journal, 4, pp. 29-46, 1995.
- [75]Ubbink, O., “Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces”, University of London, PhD thesis, 1997.
- [76]Stoker, J. J., Water wave, John Wiley & Sons, New York, 1958.
- [77]Grace, J. R., “Shape and velocities of bubbles rising in infinite liquids”, Transactions of the Institution of Chemical Engineers, 51, pp. 118-120, 1973.
- [78]Reimann, M. and Grigull, U., “Warmeubergang bei freier konvektion und flimsieden im kritischen gebiet von wasser und kohlendioxid”, Warmeund Stof-fubertragung, 8, pp. 229-239, 1975.
- [79]Tomar, G., Biswas, G., Sharma, A. and Agrawal, A., “Numerical simulation of bubble growth in film boiling using a coupled level-set and volume-of-fluid method”, Physics of Fluids, 14, pp. 112103, 2005
- [80]Son, G., “A level set method for incompressible two-fluid flows with immersed solid boundaries”, Numerical Heat Transfer Part B: Fundamental, 47, pp. 473-489, 2005.
- [81]Hosler, R. E. and Westwater, J. W., “Film boiling on a horizontal plate”,

ARS Journal, 32, pp. 553 – 558, 1962.

- [82] Yiantsios, S. G. and Higgins, B. G., “Rayleigh-Taylor instability in thin viscous films”, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 1, pp. 1484-1501, 1989.
- [83] Bhaga, D. and Weber, M.E., “Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities”, Journal of Fluid Mechanics, 105, pp. 61 – 85, 1981.
- [84] Hua, J. and Lou, J., “Numerical simulation of bubble rising in viscous liquid”, Journal of Computational Physics, 222, pp. 769-795, 2007.
- [85] Amaya-Bower, L. and Lee, T., “Single bubble rising dynamics for moderate Reynolds number using lattice Boltzmann method”, Computers & Fluids, 39, pp. 1191-1207, 2010.
- [86] Szewc, K., Pozorski, J. and Minier, J.-P., “Simulations of single bubbles rising through viscous liquids using smoothed particle hydrodynamics”, International Journal of Multiphase Flow, 50, pp. 98-105, 2012.
- [87] Bonometti, T. and Magnaudet, J., “Transition from spherical cap to toroidal bubbles”, Physics of Fluids, 18, pp. 052102, 2006.
- [88] Brereton G. and Korotney, D., “Coaxial and oblique coalescence of two rising bubbles”, in: I. Sahin and G. Tryggvason (Eds.), Dynamics of Bubbles and Vortices near a Free Surface, ASME, New York, 1991.
- [89] Rieber, M. and Frohn, A., “A numerical study on the mechanism of splashing”, International Journal of Heat and Fluid Flow, 20, pp. 455-461, 1999.
- [90] Yarin, A. L., and Weiss, D. A., “Impact of drops on solid surfaces: self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity”, Journal of Fluid Mechanics, 283, pp. 141-173, 1995.

簡 歷

基本資料

姓名	林仕文	生日	民國 71 年 12 月 14 日
性別	男	E-mail	fl_god2001@hotmail.com

學歷

學校	科系/組別	學位	起訖年月
交通大學	機械系/熱流組	博士	2008/9~2014/1
交通大學	機械系/熱流組	碩士	2006/9~2008/6
台灣大學	機械系	學士	2001/9~2006/6
台中一中		高中	1998/9~2001/6
清水國中		國中	1995/9~1998/6
西寧國小		國小	1989/9~1995/6

論文發表

Publication List

Journal Paper

- [1] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, T.-T. Cheng, T.-C. Wu, Flux-blending schemes for interface capture in two-fluid flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52 (2009) 5547-5556.
- [2] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, A VOF-Based Conservative Interpolation Scheme for Interface Tracking (CISIT) of Two-Fluid Flows, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 63 (2013) 263-283.
- [3] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, Y.-N. Lai, F.-C. Wu, Phase Change Calculations for Film Boiling Flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 70 (2014) 745-757.
- [4] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, K.-J. Ding, Modeling of Heat Transfer across the Interface in Two-Fluid Flows, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals* (accepted).
- [5] Y.-Y. Tsui, D.-C. Guo, S.-H. Chen, S.-W. Lin, Pumping Flow in a Channel with a Peristaltic Wall, *ASME Journal of Fluids Engineering* (accepted).
- [6] Y.-Y. Tsui, Y.-C. Huang, C.-L. Huang, S.-W. Lin, A Finite-Volume-Based Approach for Dynamic Fluid-Structure Interaction, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 64 (2013) 326-349.

Conference

- [1] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, Calculation of Two-Fluid Flows with Flux-Blending Interface-Capturing Scheme, The 17th National Computational Fluid Dynamic Conference, Jhongli, July, 2010.
- [2] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, A Conservative Interpolation Scheme for Interface Tracking in Two-Fluid Flow, The 18th National Computational Fluid Dynamic Conference, Yilan, August, 2011.
- [3] Y.-Y. Tsui, S.-W. Lin, Y.-N. Lai, F.-C. Wu, Numerical Simulation of Film Boiling Flow, The 20th National Computational Fluid Dynamic Conference, Nantou, August, 2013.
- [4] Y.-Y. Tsui, Y.-C. Huang, S.-W. Lin, A Finite Volume Based Approach for Dynamic Solid Mechanics and Fluid-Structure Interaction, The 20th National Computational Fluid Dynamic Conference, Nantou, August, 2013.