

# 國立交通大學

## 機械工程學系

### 博士論文

以混合式邊界條件探討正方形平行平板間自然  
對流現象

An investigation of natural convection between parallel  
square plates by a hybrid boundary condition

研 究 生：王威翔

指導教授：傅武雄 博士

中華民國一百零三年六月

以混合式邊界條件探討正方形平行平板間自然對流現象

研究生：王威翔

指導教授：傅武雄 博士

國立交通大學機械工程學系

## 摘要

本研究主要探討三維正方形平行平板間之高溫自然對流現象。由於此種存在多重且相鄰接的開放性空間無法以 LODI 法正確計算開放性邊界，因此本研究以吸收性邊界條件配合 LODI 法，計算三維正方形平行平板在不同加熱面間之自然對流現象，並探討高溫自然對流之不穩定現象問題。此外，由於本研究之計算過程繁複且需耗費大量運算資源及時間，特別發展 GPU 平行化之計算，並大幅提升計算效能。綜上所述，本研究所發展之邊界條件將可作為各種開放性邊界問題之基礎並進而解決各種複雜的流體問題。

關鍵字：自然對流、開放性邊界、LODI、GPU

The investigation of natural convection between parallel square plates by hybrid  
boundary condition

Student : Wei-Hsiang Wang

Advisor : Dr. Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

### **Abstract**

This study investigates the subject of high temperature natural convection between parallel square plates. The modified LODI method for low speed compressible flow is added with the absorbing boundary condition to solve the multiple open boundaries around the parallel square plates and successfully reveal the unstable phenomena caused by high temperature natural convection. Because of the tremendous computational resource of this study, high speed parallel computation by GPU is built to improve the efficiency of calculation. Therefore, the numerical method and boundary condition in this study can be a basement of the open boundary issue in many complex fluid dynamics problems.

Keywords: natural convection, open boundary, LODI, GPU

## 致謝

從大學、碩士班一直到博士班，在交大的十一年間，我由衷的感謝指導老師傅武雄教授這些年來給予課業和論文上的指導，以及在生活各方面上的關心與教誨，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也感謝機械系諸師長在課業方面的指導。另外要特別感謝博士班學長連信宏和李崇綱及黃玠超在數值模擬方面的協助，還有研究室學弟妹們在各方面的協助和精神上的鼓勵，讓我可以順利完成論文。此外，也要個別感謝女朋友在日常生活及學業上給予我最高度的支持，以及父母含辛茹苦的養育之恩，與家人和親友的支持與關懷，無論在心靈或是物資上的幫助，讓我毫無後顧之憂專心在課業上。最後感謝朋友、同學及親友們的鼓勵與關心，今日方能順利完成學業。最後謹將此喜悅與所有關心我的人共同分享。



## 目錄

摘要 .....	i
Abstract .....	ii
致謝 .....	iii
目錄 .....	iv
表目錄 .....	vi
圖目錄 .....	vii
符號表 .....	x
第一章 緒論 .....	1
第二章 物理模式 .....	12
2.1 三維平行正方形平板與開放式邊界之物理模式 .....	12
2.2 統御方程式 .....	14
第三章 數值方法 .....	23
3.1 Roe scheme .....	25
3.2 MUSCL法 .....	31
3.3 Preconditioning法 .....	32
3.4 LUSGS法 .....	37
3.5 LODI法 .....	40
3.6 吸收性邊界 .....	43
3.7 CUDA高速運算 .....	47
第四章 結果與討論 .....	56

4.1	計算參數與驗證.....	56
4.2	正方形平行平板底部加熱自然對流.....	59
4.3	正方形平行平板頂部加熱自然對流.....	62
4.4	高雷利數正方形平行平板自然對流.....	66
第五章	結論.....	101
參考文獻 .....		102



## 表目錄

表 3-1 精度係數值 .....	51
表 4-1 計算參數 .....	69
表 4-2 高雷利數之計算參數 .....	70



## 圖目錄

圖 1 - 1 三維渠道開放性邊界結果[13].....	7
圖 1 - 2 三維半無限平形平板之物理模式[14] .....	8
圖 1 - 3 $Ra^* = 1.58 \times 10^6$ 之溫度場與流線分佈圖[14] .....	9
圖 1 - 4 $Ra^* = 8.66 \times 10^6$ 之溫度場與流線分佈圖[14] .....	10
圖 1 - 5 三維正方形平行平板.....	11
圖 2 - 1 三維平行正方形平板物理模式(a)底部加熱(b)頂部加熱 .....	20
圖 2 - 2 鄰近邊界網格示意圖 .....	21
圖 2 - 3 吸收性邊界區域示意圖 .....	22
圖 3 - 1 黎曼問題特徵值結構圖 .....	52
圖 3 - 2 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 與 $L_5$ 於管道兩端的方向性示意圖 .....	53
圖 3 - 3 GPU及CPU效能比較[38](a)浮點運算數 (b)記憶體頻寬.....	54
圖 3 - 4 (a)CUDA程式架構 (b)CUDA記憶體配置[38].....	55
圖 4 - 1 頂部加熱不同邊界條件之暫態溫度場比較， $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ .....	71
圖 4 - 2 吸收性邊界網格測試結果， $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ .....	72
圖 4 - 3 底部加熱穩態下 $Ra^* = 1.55 \times 10^6$ 時之速度向量與溫度場.....	74
圖 4 - 4 底部加熱穩態下 $Ra^* = 1.55 \times 10^6$ 時之流線分佈 .....	74
圖 4 - 5 底部加熱穩態下不同修正雷利數時之局部紐塞數沿 $\overline{ij}$ 之分佈 .....	75



圖 4 - 6 底部加熱穩態下 $Ra^* = 4.31 \times 10^6$ (a)沿 $\overline{ij}$ 及 $\overline{gd}$ 之局部紐塞數分佈(b)底部加熱面之局部紐塞數等高線圖 .....	76
圖 4 - 7 不同修正雷利數底部加熱面之局部紐塞數等高線圖 (a)	
$Ra^* = 1.72 \times 10^5$ (b) $Ra^* = 1.55 \times 10^6$ (c) $Ra^* = 4.31 \times 10^6$ .....	77
圖 4 - 8 不同修正雷利數之面積平均紐塞數隨時間變化圖 .....	78
圖 4 - 9 本研究之平均紐塞數與文獻[40]之結果比較 .....	79
圖 4 - 10 頂部加熱修正雷利數 $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ 在暫態初期之溫度場、壓力場及速度向量 .....	80
圖 4 - 11 頂部加熱修正雷利數 $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ 在穩態時速度向量、溫度場及壓力場 .....	81
圖 4 - 12 頂部加熱修正雷利數 $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ 時，平板中央處 $X = 0.5$ ， $Z = 0.5$ 處之壓力及浮力變化 .....	82
圖 4 - 13 頂部加熱修正雷利數 $Ra^* = 1.55 \times 10^6$ 之流線分佈 .....	83
圖 4 - 14 頂部加熱穩態下不同修正雷利數時之局部紐塞數沿 $\overline{ij}$ 之分佈 .....	84
圖 4 - 15 頂部加熱穩態下 $Ra^* = 4.31 \times 10^6$ (a)沿 $\overline{ij}$ 及 $\overline{gd}$ 之局部紐塞數分佈(b)底部加熱面之局部紐塞數等高線圖 .....	85
圖 4 - 16 不同修正雷利數頂部加熱面之局部紐塞數等高線圖 (a)	
$Ra^* = 1.72 \times 10^5$ (b) $Ra^* = 1.55 \times 10^6$ (c) $Ra^* = 4.31 \times 10^6$ .....	86
圖 4 - 17 底部加熱與頂部加熱之質量流率比較 .....	87
圖 4 - 18 底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數比較 .....	88
圖 4 - 19 速度向量分佈(a)底部加熱沿著 $X$ 方向變化的 $u$ 速度及(b)頂部加熱沿著 $Y$ 方向變化的 $v$ 速度，修正雷利數為 $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ ...	89

圖 4 - 20 與文獻[41]相比之物理模式.....	90
圖 4 - 21 本研究之平均紐塞數與文獻[41]之比較結果.....	91
圖 4 - 22 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 之底部加熱溫度場隨時間變化。(a) $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、(b) $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c) $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$ 及 (d) $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$ .....	92
圖 4 - 23 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 在 $t^* = 4.3 \times 10^{-1}$ 之底部加熱等溫面 變化.....	93
圖 4 - 24 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 之流線分佈。(a) $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、(b) $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c) $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$ 及 (d) $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$ .....	94
圖 4 - 25 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 之等Q面Q=500 分佈。(a) $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、(b) $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c) $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$ 及 (d) $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$ .....	95
圖 4 - 26 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 在 $X = 0.5$ 及 $Z = 0.5$ 位置之時間平 均雷諾數隨高度Y之變化 .....	96
圖 4 - 27 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 沿 $\overline{ij}$ 及 $\overline{gd}$ 之時間平均局部紐塞數 分佈 .....	97
圖 4 - 28 修正雷利數 $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 在不同位置隨時間變化之局部紐塞 數.....	98
圖 4 - 29 底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數比較 .....	99
圖 4 - 30 本研究之平均紐塞數與文獻[40]之結果比較.....	100

## 符號表

$A$	面積( $m^2$ )
$c$	音速( $m/s$ )
$e$	內能( $J/kg$ )
$e_{target}$	目標內能( $J/kg$ )
$g$	重力加速度( $m/s^2$ )
$k$	熱傳導係數( $W/mK$ )
$k_0$	外圍空間之熱傳導係數( $W/mK$ )
$l_1$	正方形平板長度( $m$ )
$l_2$	平板間距( $m$ )
$l_3$	吸收性邊界長度( $m$ )
$L$	無因次化長度座標, $\sqrt{x^2 + z^2}/\sqrt{2l_1^2}$
$M$	馬赫數
$Nu$	局部紐塞數, 定義於式(4-3)
	$Nu = \frac{l_2}{k_0(T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]$
$\overline{Nu_t}$	時間平均局部紐塞數, 定義於式(4-4)
	$\overline{Nu_t} = \frac{1}{t} \int_t \frac{l_2}{k_0(T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dt$
$\overline{Nu_A}$	面積平均局部紐塞數, 定義於式(4-5)
	$\overline{Nu_A} = \frac{1}{A} \int_A \frac{l_2}{k_0(T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA$
$\overline{Nu}$	平均紐塞數, 定義於式(4-6)

$\overline{Nu}$	$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \iint_{A_t} \frac{l_2}{k_0(T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dt dA$
$P$	壓力( $Pa$ )
$P_0$	外圍空間之壓力( $Pa$ )
$Pr$	普朗特數( $\nu/\alpha$ )
$R$	氣體常數 ( $J/kg/K$ )
$Ra$	雷利數，定義於式(4-1).
	$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_H - T_0) l_2^3}{T_0 \mu(T)^2}$
$Ra^*$	修正雷利數，定義於式(4-2).
	$Ra^* = Ra \times \frac{l_1}{l_2}$
$\overline{Re}_t$	時間平均雷諾數，定義於式(4-11).
	$\overline{Re}_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho V_{mag} l_1}{\mu(T)} dt$
$T$	溫度( $K$ )
$T_0$	外圍空間之溫度( $K$ )
$T_H$	加熱平板溫度( $K$ )
$t$	時間( $s$ )
$t^*$	無因次時間 $t^* = t \mu_0 / (\rho_0 l_1^2)$
$u, v, w$	$x$ , $y$ 及 $z$ 方向速度( $m/s$ )
$u_{target}, v_{target}, w_{target}$	$x$ , $y$ 及 $z$ 方向目標速度( $m/s$ )
$w_x, w_y, w_z$	$x$ , $y$ 及 $z$ 方向吸收性邊界長度( $m$ )
$x, y, z$	卡式座標( $m$ )

$X, Y, Z$

無因次化卡式座標  $x/l_1$  ,  $y/l_2$  及  $z/l_1$

*Greek symbols*

$\rho$

密度( $kg/m^3$ )

$\rho_0$

外圍空間之密度( $kg/m^3$ )

$\rho_{target}$

目標密度( $kg/m^3$ )

$\mu$

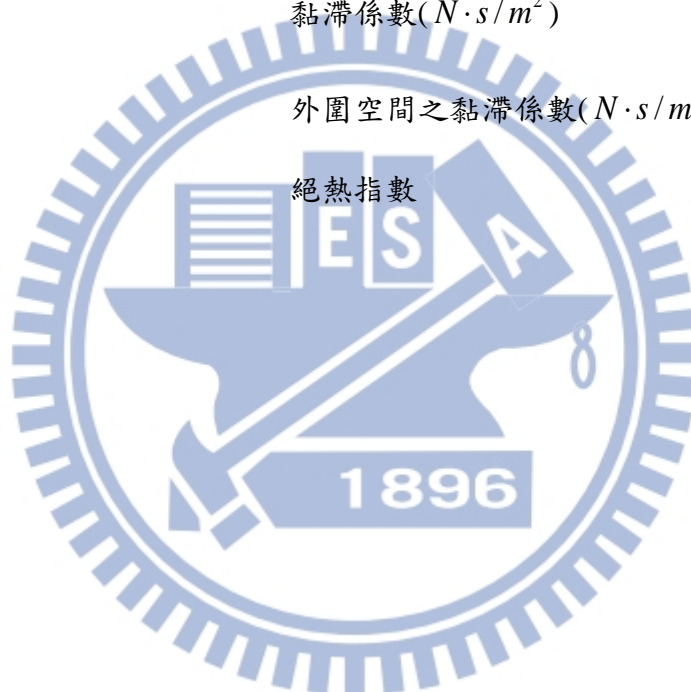
黏滯係數( $N \cdot s/m^2$ )

$\mu_0$

外圍空間之黏滯係數( $N \cdot s/m^2$ )

$\gamma$

絕熱指數



## 第一章 緒論

為了解決所面臨許多實際現象的流體力學問題，邊界條件的定義一直是一門相當重要的學問。由於大多數實際有關流體力學的問題需要解出 Navier-Stokes 方程式，因此必定要界定問題的邊界條件，然而許多流體力學的模型中往往為了定義流體出口邊界條件而把真實的問題做了相當程度的修正，在未知的計算域上預先設置一個已知的出口邊界，造成問題本身物理模型的改變，對流體力學的實際應用上造成了非常大的限制，因此如何設置正確的出口邊界條件遂成為流體力學所要解決的重要問題之一。

在流體力學的問題中，除了封閉空間外，幾乎沒有一種不牽涉到開放性的邊界，意指流體可藉邊界進出欲探討現象的物理空間。不管是管內流、管外流、平板流、噴流、氣動聲學等等，最後都需要考慮開放性邊界對流場造成的影響。一般來說，開放性邊界通常區分為非相鄰開放性邊界及相鄰開放性邊界。非相鄰開放性邊界如管道流等較為單純的邊界，在管道兩端的開放性邊界是互相獨立的存在。過去在計算上為了取得一個合理的邊界條件，完全發展流是一種非常通用的解法，在許多例子上也取得很好的成果。如 Khanafer 和 Vafai[1]在管段出口邊界外加一額外的計算空間，在額外空間的邊界處設定為完全發展流，避開出口邊界需處理非線性問題的困擾，使開放性出口邊界在不可壓縮流有良好的表現，但除增加了不必要的計算空間，也減少了實際上的應用範圍。此外，為了要符合完全發展流，模型的設定上流體勢必要沿流動方向發展到一定程度才能做計算，這樣的結果造成實際工業界應用上的困難，也大幅度消耗了許多的計算資源來處理額外的網格。

除了開放性邊界的問題之外，流體的可壓縮性對於計算流體力學的解法也需要做謹慎的探討。過去在一般的流體力學計算上多將流體依照其速度區分為可壓縮流(大於 0.3 馬赫)及不可壓縮流(小於 0.3 馬赫)，但當自然對流的溫差極大時，雖然浮力造成的速度較小，但卻不能忽略因溫度變化造成密度變化的可壓縮性。



以往在計算自然對流時都以 Boussinesq 假設來簡化計算並視密度為定值，但僅限於溫差小於 30K[2]的情況下才適用，然而在真正的工業應用上，自然對流之溫度差往往達到數百 k 之高溫，在此狀況下無法採用 Boussinesq 假設。對於高溫之自然對流現象，需要將流體視為可壓縮流體，以求解完整的 Navier-Stokes 方程式，並得到可壓縮流中密度的變化及高溫下的熱傳與熱對流效應，以符合實際物理現象。因此要以數值計算求解高溫自然對流問題時，可壓縮自然對流之數值解法也是一重要的議題。

為了正確解出低速之可壓縮黏性流體現象，許多研究陸續被提出。在顯式(explicit)數值方法下，時間步進大小造成之 CFL(Courant-Friedrichs-Levy)狀況使得問題難以收斂；另一方面，若使用隱式(implicit)法，stiff 狀況則使計算效率非常低。為了解決上述情形，Briley 等人[3]使用 preconditioning 法來增進低馬赫數下之計算效率，而 Turkel[4]則發展 preconditioning 矩陣來求解可壓縮與不可壓縮流之問題。Choi 和 Merkel[5][6]以 preconditioning 矩陣成功解出低馬赫數下黏性流體與非黏性流體之收斂問題。Roe[7]發展了平均變數法來解決可壓縮流在數值網格交界面之不連續現象，且近年來皆被廣泛的使用。Weiss 和 Smith[8]則延伸了 Chio 和 Merkel[6]的理論，在三維的 Navier-Stokes 方程式中結合了 Roe 法和 preconditioning 矩陣，並加入了 dual time stepping 來求解低馬赫數下之暫態問題。此外，過去在可壓縮自然對流問題的研究上，Weiss 和 Smith[8]模擬二維同心圓之自然對流，壁面之溫度差為 1000K，且雷利數為  $4.7 \times 10^4$ 。結果顯示 preconditioning 法可以縮短將近 60 倍的計算時間。Paillere 等人[9]則驗證 preconditioning 法在低溫度差自然對流問題之準確性，結果指出 preconditioning 法之熱傳現象與 Boussinesq 假設非常接近，然而以上結果都是計算在封閉空間之情形且未考慮開放性邊界的問題。

為了解決非相鄰開放性邊界的問題，過去研究提出了一種應用-非反射性邊界條件(non-reflecting boundary condition)。為了解決可壓縮流在管道出口開放性

邊界的現象，在高馬赫數於的流場中，Rudy 和 Strikwerda[10]提出了一種簡單的非反射性邊界條件，與其他的壓力邊界條件相比更符合真實的物理模型。而 Poinso 和 Lele[11]發展了 Navier-Stokes characteristics boundary condition (NSCBC)，以 local one-dimensional inviscid relations (LODI)法來計算在進出口部分邊界對流體的影響，奠定非反射性邊界的基礎理論。Polifke 等人[12]則對 NSCBC 的線性鬆弛項做了修正，使邊界上各種頻率的平面波皆不會被反射。但上述的文獻皆提到此邊界只適用於馬赫數大於 0.3 之可壓縮流場。為了使非反射邊界在使用上更為方便，Fu 等人[13]修正了 Poinso 和 Lele[11]的結果，計算管流之底部加熱自然對流，在管段進出口處成功模擬了同一邊界上同時出現吸入與推出之現象，如圖 1-1 所示，使 LODI 法可應用於全域可壓縮流場之非相鄰開放性邊界。此外，Fu 等人[14]又另外探討半無限平行平板之高溫自然對流現象，如圖 1-2 所示，以文獻[11]所修正之 LODI 法計算面 *BFHD* 及 *AEGC*，另外面 *ABDC* 及 *EFHG* 則以週期性邊界做計算。結果顯示於圖 1-3 及圖 1-4，在低雷利數時流體由底部吸入加熱後流至底端，並向外流出。而在高雷利數時，則會產生流場不穩定的現象。

除了非相鄰開放性邊界外，另一種更複雜的物理模型則是相鄰開放性邊界問題。相鄰開放性邊界意指當兩個或兩個以上的開放性邊界在物理模式中相交出現時，則稱此類問題為相鄰開放性邊界，如兩平行平板間自然對流問題就是一種典型的相鄰開放性邊界。如圖 1-5 所示，在三維正方形平行平板的問題上，除了上下平板的兩個無滑移壁面之外，尚有四個方向相異之相鄰開放性邊界面 *abdc*、*efhg*、*acge* 及 *bdhf*。另外以高溫自然對流為驅動力之流場使流體的流動在上述四個方向的開放性邊界均可能同時存在流入與流出之現象，因此除了在同一邊界上需同時考慮兩種不同方向的流動外，在兩開放性邊界交界處尚要解決角落及邊界，如圖 1-5 中 *bd*、*fh*、*eg* 和 *ac* 處，之數值奇異點(singular point)的問題。

由於四個開放性邊界如皆以文獻[14]中 LODI 法計算，在經過本研究的驗證



過後，在計算域中若出現兩個甚至三個相鄰之開放性邊界，如圖 1-5 面 *abdc* 及 *bfhd* 時，由於 LODI 法忽略在邊界上的橫向項(transverse terms)，使得邊緣與角落處之反射現象逐漸累積，造成數值發散或是計算結果的不準確，且此現象也與 Yoo 等人[15]及 Lodato 等人[16]的結果相同。因此為了解決此問題，本研究將結合另一種處理開放性邊界的方法-吸收性邊界(Absorbing boundary condition)，並應用於正方形平行平板的計算上。

吸收性邊界的基礎理論分為 perfectly matched layer(PML)邊界及區域性邊界(zonal boundary)。PML 首先由 Berenger[17]提出以求解 Maxwell 方程式，使各種頻率及入射角度之電磁波通過無反射之吸收層(absorbing layer)，並被廣泛應用於計算電磁學(Computational electromagnetics)的研究領域。隨後 PML 被 Hu[18][19]延伸為可適用於尤拉方程式的形式，但 Abarbanel 和 Gottlieb[20]、Hesthaven[21]及 Tam 等人[22]皆指出改寫後的方程式會造成邊界的不穩定，因此 Hu[23]修正了原本的方程式，使得 PML 可被正確的應用在尤拉方程式上。但 PML 的應用只限於非黏性流，為了要在黏性流體中處理吸收性邊界的問題，區域性邊界的理論接著被提出。區域性邊界是在原始的物理邊界外增加一虛擬(artificial)的微小計算區域來消滅流體向外流動的擾動項，使之到達虛擬出口後不會影響實際計算域的結果。由於在區域性邊界的虛擬區域內流場不會影響原本的計算空間，所以在數值的概念上可以加上某些吸收項來改變原始的方程式。且由於在某些問題中，由於在流動出口處有著極大的非線性擾動，因此勢必需要在出口處增加一虛擬的計算區域才能減少反射波的產生。Israeli 和 Orszag[24]分析了在一維的波動方程式中加入虛擬的耗散項(dissipation term)與阻尼項(damping term)的效用，成功減少了反射波。Kosloff 和 Kosloff[25]則分析了在二維的波動方程式加入虛擬項的結果。Colonius[26]等人首先把吸收性邊界應用於計算氣動聲學中，他們在虛擬的出口區域使用一數值的濾波器來消滅這部分的擾動，抑制反射波。而 Ta'asan 和 Nark[27]修改了線性尤拉方程式，在虛擬進出口區域添加一對流項，強迫虛擬邊

界上的流體達到超音速以解決反射波的問題。另一方面，Wasistho 等人[28]在虛擬出口區域增加一阻尼方程式(damping function)，使流體的擾動在虛擬區域邊界處被消滅至零，抑制反射波的產生。Freund[29]提出的吸收性邊界，結合 Ta'asan 和 Nark[27]及 Wasistho 等人[28]的理論，成功使用於一維的可壓縮 Navier-Stokes 方程式。Fu 等人[30]以 Freund[29]的理論為基礎，發展計算邊界條件為二維可壓縮流之噴流氣動噪音，成功解決二維全開放空間之可壓縮流問題，但對於三維可壓縮流之計算，由於虛擬對流項與阻尼項的作用方程式在相鄰開放性邊界所造成的角落區域之方向難以判斷，因此始終沒有良好的計算方法。

此外，為了結省計算流體力學之計算時間，過去有許多研究皆以平行化之方法如 OpenMP(Open Multi-Processing)或 MPI(The Message Passing Interface)來加速計算，然而上述兩種方法都有其優缺點，無法兼得。Brandvik 和 Pullan[31]及 Corrigan 等人[32]以 Nvidia 公司發展的計算平台 Compute Unified Device Architecture (CUDA)為基礎來做高速可壓縮流之計算，並在計算效能與耗費時間上取得相當好的成果。CUDA 之基礎理論為以顯示晶片(GPU)之多流處理器(Stream Processor)取代傳統以 CPU 來做分散式平行計算，由於 GPU 之計算單元為 CPU 之數百甚至上千倍之多，對於平行化計算有著非常顯著的優勢。Fu 等人[33]以背階流場測試 CUDA 的效能，與一般四核心個人電腦相比加速了 7 倍的計算效率。但由於此結果在程式的平行化上並未做到完全最佳化，因此 Fu 等人[14][34]改寫了 Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel (LUSGS)法的型式，使程式達到完全平行化進一步提升 CUDA 的計算效率。

因此，本研究之主旨在於以數值方法計算三維正方形平行平板之高溫自然對流問題。為了使計算結果更為準確以符合工業界之應用且正確處理平板四周之開放空間，對於圖 1-5 的四面  $abdc$ 、 $efhg$ 、 $acge$  及  $bdhf$  將應用基於 Freund[29]和 Fu 等人[30]提出之吸收性邊界條件，並改寫為可適用於三維模式之計算方法，並結合 Fu 等人[13][14]所提出的修正 LODI 法來增加數值的收斂性及穩定性，以此

混合式邊界條件來計算高溫自然對流於開放性邊界下之現象。而由於兩平板間之溫差超過 30K，將應用可壓縮流之計算以取代 Boussinesq 假設，因此結合 Roe 法與 preconditioning 法及 dual-time stepping 來求解低馬赫數下可壓縮自然對流之暫態問題。為了提升計算效率，使用 Fu 等人[14][34]之 CUDA 計算平台為基礎，大幅改進現有之程式，達到最佳化之 GPU 與 CPU 連結效率，計算參數完全在 GPU 龐大數量的流處理器中執行，使 CUDA 計算平台能完全發揮平行運算的強大計算能力。



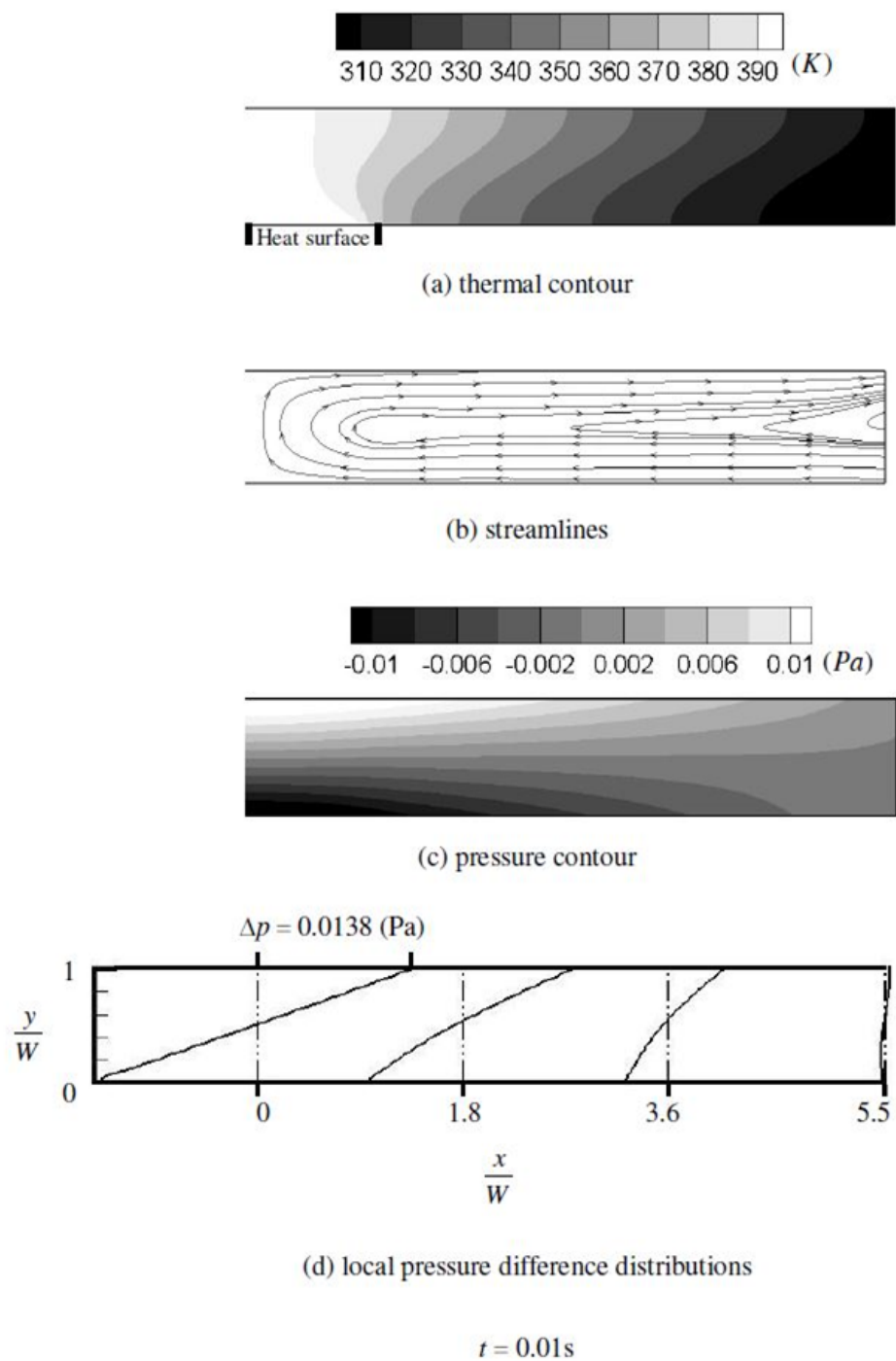


圖 1 - 1 三維渠道開放性邊界結果[13]

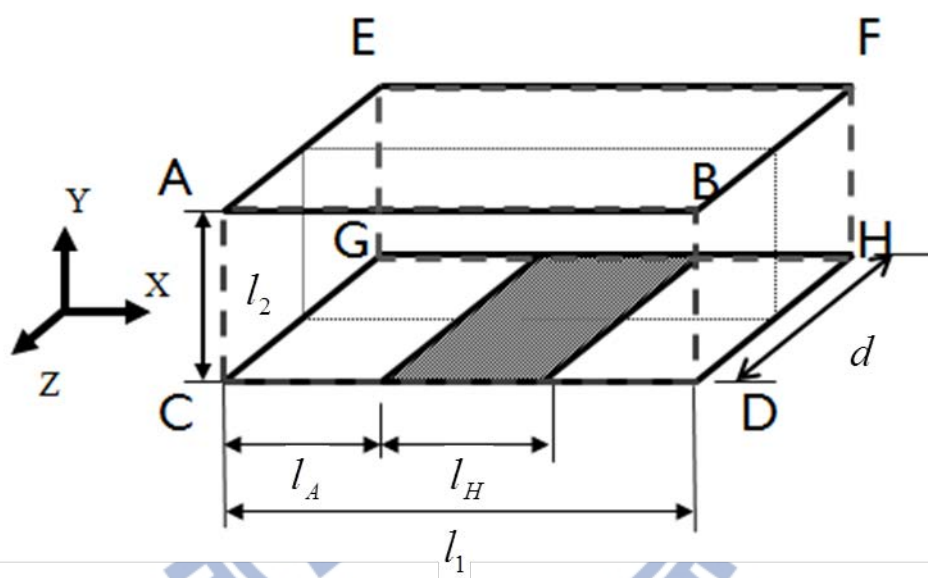


圖 1-2 三維半無限平形平板之物理模式[14]

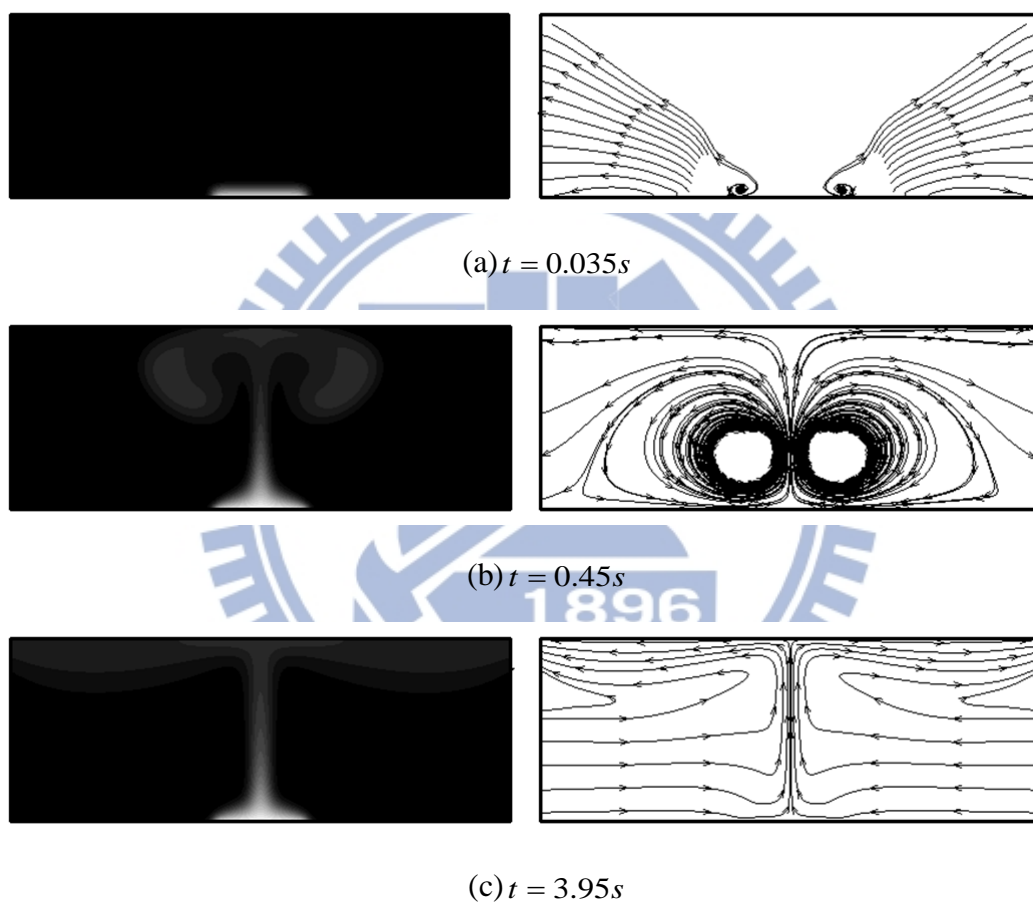


圖 1 - 3  $Ra^* = 1.58 \times 10^6$  之溫度場與流線分佈圖[14]



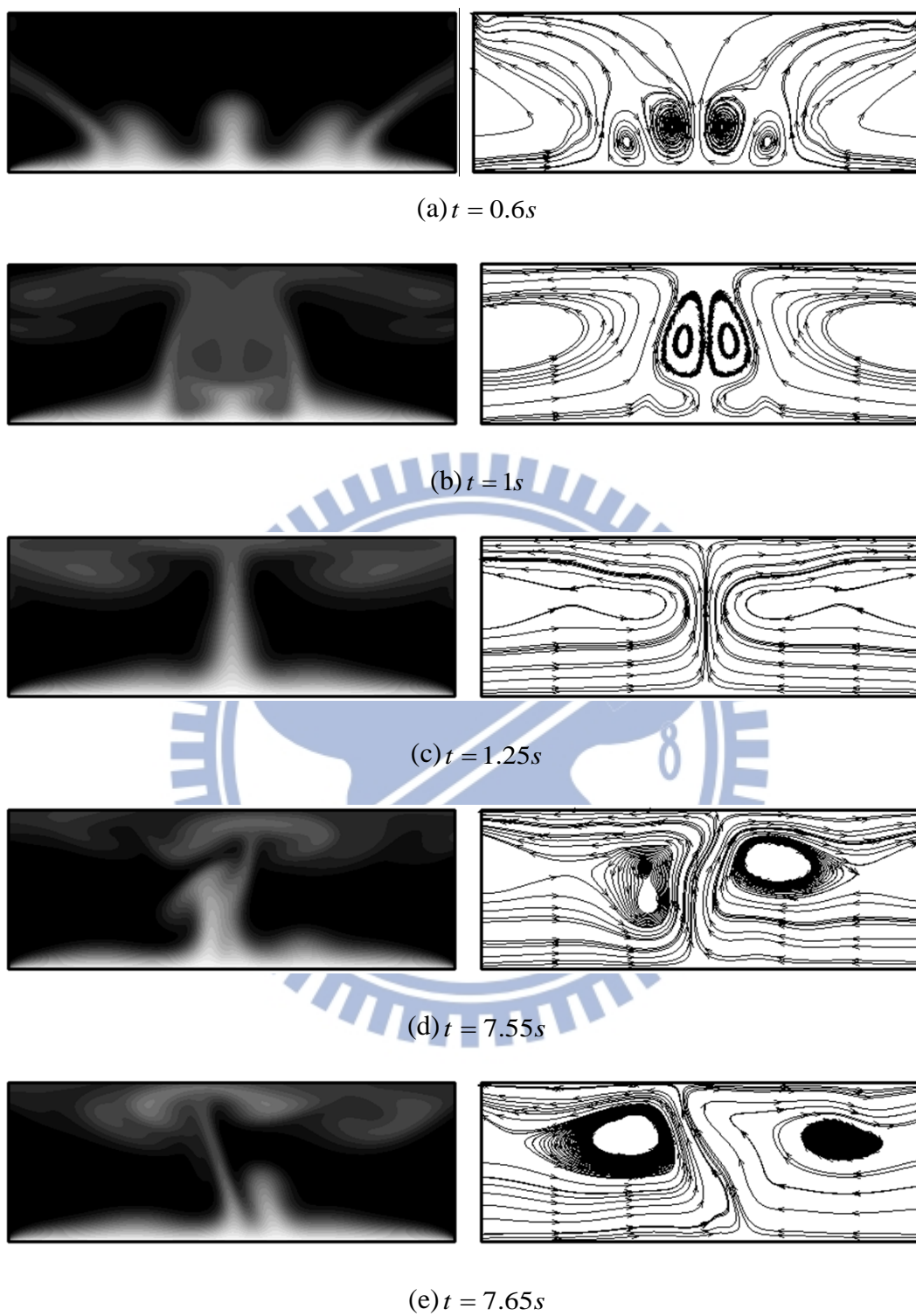


圖 1 - 4  $Ra^* = 8.66 \times 10^6$  之溫度場與流線分佈圖[14]

圖 1-4

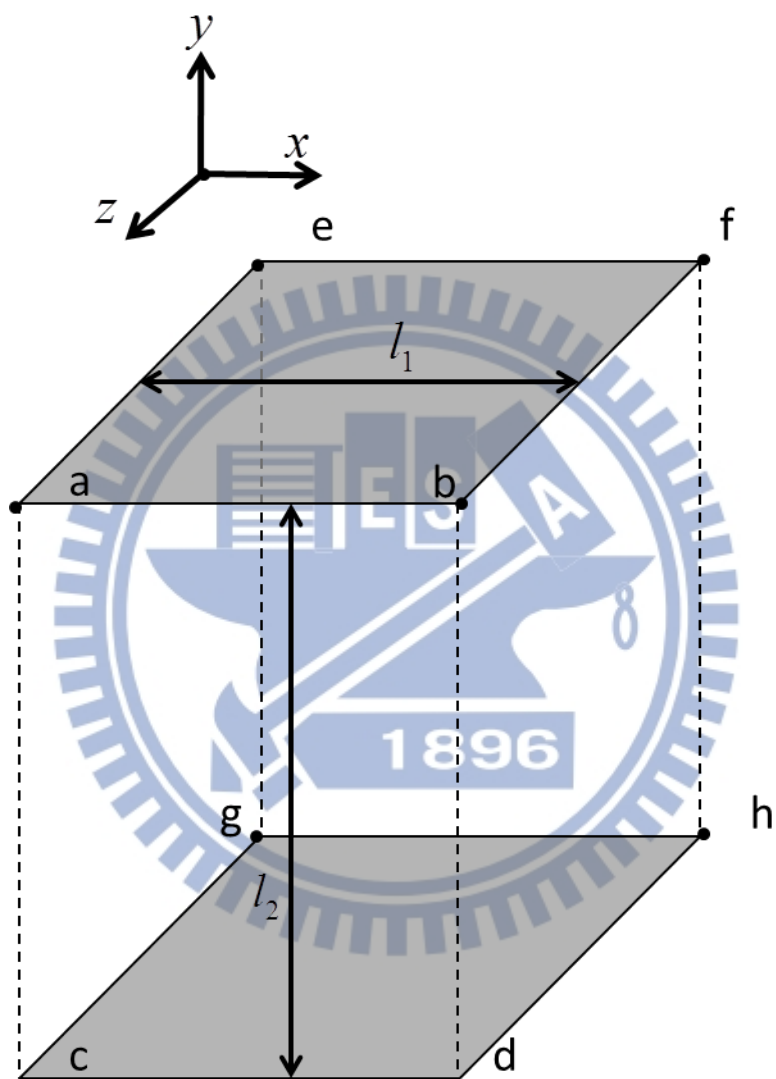


圖 1 - 5 三維正方形平行平板



## 第二章 物理模式

### 2.1 三維平行正方形平板與開放式邊界之物理模式

圖 2-1 為三維平行正方形平板之物理模式圖。由頂面  $abfe$  及底面  $cdhg$  所包圍的區域為真實物理模型區域，而開放性邊界為面  $bfhd$ 、 $fegh$ 、 $eacg$  及  $abdc$ 。方形平板之邊長為  $l_1$ ，兩方形平板之距離則為  $l_2$ 。圖 2-1(a)中之底部高溫壁面溫度為  $T_H$ ，頂部平板為絕熱壁面，圖 2-1(b)中之頂部高溫壁面  $T_H$ ，底部平板為絕熱壁面。此外重力方向為  $-y$  方向。

由於在此將加入吸收性邊界的計算，因此在真實物理模型區域外再外加一虛擬計算區域並以吸收性邊界之統御方程式來計算，由圖 2-1 中的虛線所表示， $l_3$  則為吸收性邊界區域的寬度。圖中由面  $b_2b_1f_1f_0$  及  $d_2d_1h_1h_0$  所包圍之虛擬計算區域為  $+x$  方向之吸收性邊界區域，同理可再定義其他三個方向的吸收性邊界區域分別為  $-x$  方向、 $+z$  方向及  $-z$  方向。此外，不同方向的吸收性邊界區域會產生交集區，例如由面  $bb_0b_1b_2$  及  $dd_0d_1d_2$  所組成長方體。此交集區為包含了兩個不同方向  $+x$  及  $+z$  之吸收性邊界區域。在吸收性邊界區域之外的壓力及溫度為  $P_0 = 1atm$  及  $T_0 = 298K$ ，並做了以下假設：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 考慮溫度變化對流體所造成的影響，並忽略熱幅射的影響。
4. 壁面為無滑移條件。

無滑移條件(No-slip condition)表示如下：

$$\begin{cases} P(i, 1, k) = P(i, 2, k) \\ u(i, 1, k) = -u(i, 2, k) \\ v(i, 1, k) = -v(i, 2, k) \\ w(i, 1, k) = -w(i, 2, k) \\ T(i, 1, k) = T(i, 2, k) \end{cases} \quad (2-1)$$

$$\begin{cases} P(i, 0, k) = P(i, 3, k) \\ u(i, 0, k) = -u(i, 3, k) \\ v(i, 0, k) = -v(i, 3, k) \\ w(i, 0, k) = -w(i, 3, k) \\ T(i, 0, k) = T(i, 3, k) \end{cases} \quad (2-2)$$

而加熱壁面的邊界條件如下列所示

$$\begin{cases} P(i, 1, k) = P(i, 2, k) \\ u(i, 1, k) = -u(i, 2, k) \\ v(i, 1, k) = -v(i, 2, k) \\ w(i, 1, k) = -w(i, 2, k) \\ T(i, 1, k) = 2T_H - T(i, 2, k) \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\begin{cases} P(i, 0, k) = P(i, 3, k) \\ u(i, 0, k) = -u(i, 3, k) \\ v(i, 0, k) = -v(i, 3, k) \\ w(i, 0, k) = -w(i, 3, k) \\ T(i, 0, k) = 2T_H - T(i, 3, k) \end{cases} \quad (2-4)$$

如圖 2-2 所示，0 和 1 指的是 ghost cell，2 及 3 為最接近壁面的網格。

## 2.2 統御方程式

求解的方程式為考慮黏滯性、流體可壓縮性與重力影響的三維 N-S 方程式

與理想氣體方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (2-5)$$

$$P = \rho RT \quad (2-6)$$

其中， $U$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  與  $S$  的值如下所示：

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \\ F &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u - \tau_{zx} \\ \rho v - \tau_{zy} \\ \rho vw + P - \tau_{zz} \\ \rho Ew + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gv \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-7)$$

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

$$\left. \begin{aligned} \mu(T) &= \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \\ k(T) &= \frac{\mu(T) \gamma R}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \\ E &= \frac{P}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

此處的  $\rho_0 = 1.1842 \text{ kg/m}^3$ 、 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、 $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ 、 $T_0 = 298.0592 \text{ K}$ ， $\gamma = 1.4$ ， $R = 287 \text{ J/kg/K}$  與  $\text{Pr} = 0.72$ 。

在文獻[29]所提到，吸收性邊界區域的統御方程式需經過部分的修改，加入虛擬對流項及虛擬阻尼項。虛擬對流項的作用為加速吸收性邊界區域的流速，使流體在吸收性邊界區域的外圍達到超音速，防止反射波進入真實物理區域。虛擬阻尼項則可消除紊流流場中之擾動項，使擾動在吸收性邊界區域外圍為零。由於修改後的統御方程式僅適用於外加的虛擬計算區域，因此重力造成的源項在此不再存在。修改後的統御方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} + \tilde{\sigma} = 0 \quad (2-9)$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= F + \tilde{\eta}_F, \tilde{\eta}_F = \left\{ \begin{array}{c} \eta_x \rho \\ \eta_x \rho u \\ \eta_x \rho v \\ \eta_x \rho w \\ \eta_x \rho E \end{array} \right\} \\
\tilde{G} &= G + \tilde{\eta}_G, \tilde{\eta}_G = \left\{ \begin{array}{c} \eta_y \rho \\ \eta_y \rho u \\ \eta_y \rho v \\ \eta_y \rho w \\ \eta_y \rho E \end{array} \right\} \\
\tilde{H} &= H + \tilde{\eta}_H, \tilde{\eta}_H = \left\{ \begin{array}{c} \eta_z \rho \\ \eta_z \rho u \\ \eta_z \rho v \\ \eta_z \rho w \\ \eta_z \rho E \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2-10}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_x(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_x(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_x(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_x(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_x(e - e_{target}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_y(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_y(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_y(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_y(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_y(e - e_{target}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_z(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_z(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_z(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_z(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_z(e - e_{target}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-11}$$

上式的  $\tilde{\eta}_F$ 、 $\tilde{\eta}_G$  及  $\tilde{\eta}_H$  即為虛擬對流項， $\tilde{\sigma}_x$ 、 $\tilde{\sigma}_y$  及  $\tilde{\sigma}_z$  則為虛擬阻尼項，其中  $\eta_x$ 、

$\eta_y$  及  $\eta_z$  分別如下：

$$\eta_x = \begin{cases} \eta_{x0l} \left( \frac{w_{xl} - x}{w_{xl}} \right)^{\beta_{xl}} & 0 \leq x < w_{xl} \\ 0 & w_{xl} \leq x < x_{\max} - w_{xr} \\ \eta_{x0r} \left[ \frac{x - (x_{\max} - w_{xr})}{w_{xr}} \right]^{\beta_{xr}} & x_{\max} - w_{xr} \leq x < x_{\max} \end{cases} \tag{2-12}$$

$$\eta_y = \begin{cases} \eta_{y0l} \left( \frac{w_{yl} - y}{w_{yl}} \right)^{\beta_{yl}} & 0 \leq y < w_{yl} \\ 0 & w_{yl} \leq y < y_{\max} - w_{yr} \\ \eta_{y0r} \left[ \frac{y - (y_{\max} - w_{yr})}{w_{yr}} \right]^{\beta_{yr}} & y_{\max} - w_{yr} \leq y < y_{\max} \end{cases} \quad (2-13)$$

$$\eta_z = \begin{cases} \eta_{z0l} \left( \frac{w_{zl} - z}{w_{zl}} \right)^{\beta_{zl}} & 0 \leq z < w_{zl} \\ 0 & w_{zl} \leq z < z_{\max} - w_{zr} \\ \eta_{z0r} \left[ \frac{z - (z_{\max} - w_{zr})}{w_{zr}} \right]^{\beta_{zr}} & z_{\max} - w_{zr} \leq z < z_{\max} \end{cases} \quad (2-14)$$

其中， $\eta_{x0}$ 、 $\eta_{y0}$  及  $\eta_{z0}$  為吸收性邊界外圍的目標速度。

$\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  及  $\sigma_z$  為虛擬阻尼方程式，分別如下所示：

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_{x0l} \left( \frac{w_{xl} - x}{w_{xl}} \right)^{\beta_{xl}} & 0 \leq x < w_{xl} \\ 0 & w_{xl} \leq x < x_{\max} - w_{xr} \\ \sigma_{x0r} \left[ \frac{x - (x_{\max} - w_{xr})}{w_{xr}} \right]^{\beta_{xr}} & x_{\max} - w_{xr} \leq x < x_{\max} \end{cases} \quad (2-15)$$

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{y0l} \left( \frac{w_{yl} - x}{w_{yl}} \right)^{\beta_{yl}} & 0 \leq y < w_{yl} \\ 0 & w_{yl} \leq y < y_{\max} - w_{yr} \\ \sigma_{y0r} \left[ \frac{x - (x_{\max} - w_{yr})}{w_{yr}} \right]^{\beta_{yr}} & y_{\max} - w_{yr} \leq y < y_{\max} \end{cases} \quad (2-16)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} \sigma_{z0l} \left( \frac{w_{zl} - x}{w_{zl}} \right)^{\beta_{zl}} & 0 \leq z < w_{zl} \\ 0 & w_{zl} \leq z < z_{\max} - w_{zr} \\ \sigma_{z0r} \left[ \frac{x - (x_{\max} - w_{zr})}{w_{zr}} \right]^{\beta_{zr}} & z_{\max} - w_{zr} \leq z < z_{\max} \end{cases} \quad (2-17)$$

其中， $\sigma_{x0}$ 、 $\sigma_{y0}$  及  $\sigma_{z0}$  則為吸收性邊界外圍的目標阻尼方程式。 $\phi_0$  和  $\phi_{\max}$  的位置及  $w_{\phi l}$  和  $w_{\phi r}$  的長度如圖 2-3 所示。

為了使聲速的數量級和虛擬對流項的目標速度及虛擬阻尼項的目標阻尼方程式達到一致，使用 Jespersen 等人[35]發展的方法，修正了聲速的數量級，因此虛擬對流項的目標速度及虛擬阻尼項的目標阻尼方程式可改寫成以下方程式並可成功應用於低速可壓縮流場：

$$\eta_{xo} = c_F \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-18)$$

$$\eta_{yo} = c_G \frac{\sqrt{v^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-19)$$

$$\eta_{zo} = c_H \frac{\sqrt{w^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-20)$$

$$\sigma_{xo} = c_x \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-21)$$

$$\sigma_{yo} = c_y \frac{\sqrt{v^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-22)$$

$$\sigma_{zo} = c_z \frac{\sqrt{w^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2} \quad (2-23)$$

其中  $\Theta \approx 100M^2$ ，而  $c$  則為空氣中的聲速大小。根據[29]的結果， $c_F = c_G = c_H = 1.15$ ，

$c_x = c_y = c_z = 0.05$ ，而  $\beta = 3$ 。

由此我們可使虛擬對流項在虛擬區域與真實物理區域的交界處為 0，而在吸收性邊界區域的邊界上為修正後之聲速，並使紊流的擾動量在吸收性邊界區域終點處為 0，進而使吸收性邊界區域之反射波為零，在物理計算邊界上則可得到正確的結果。





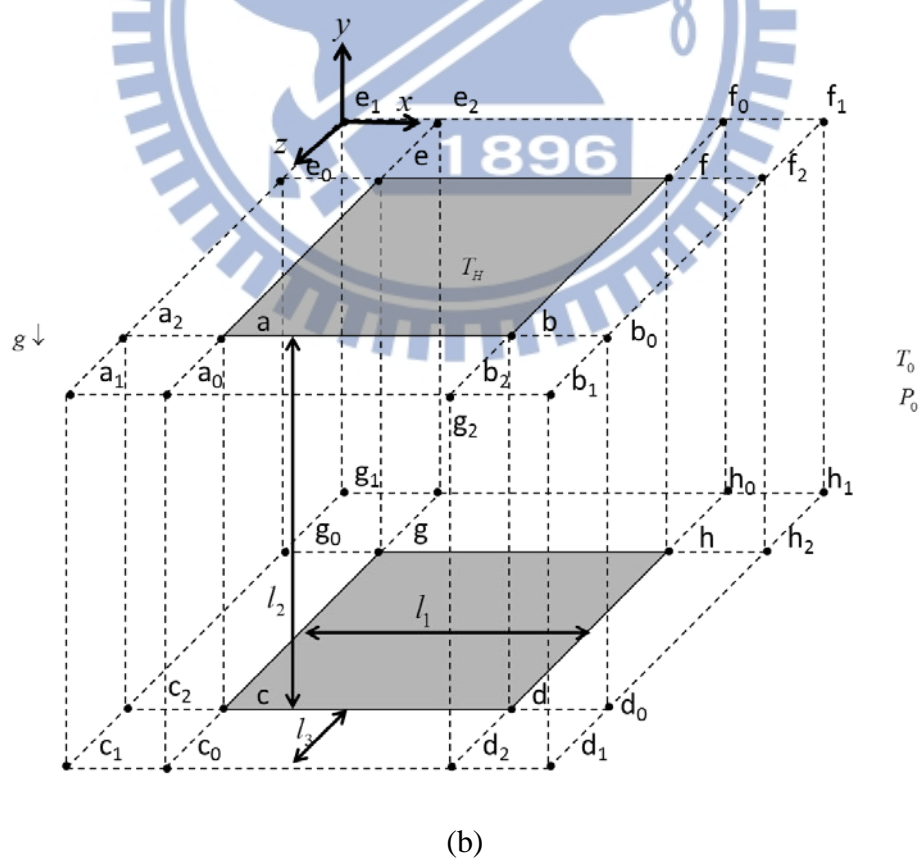
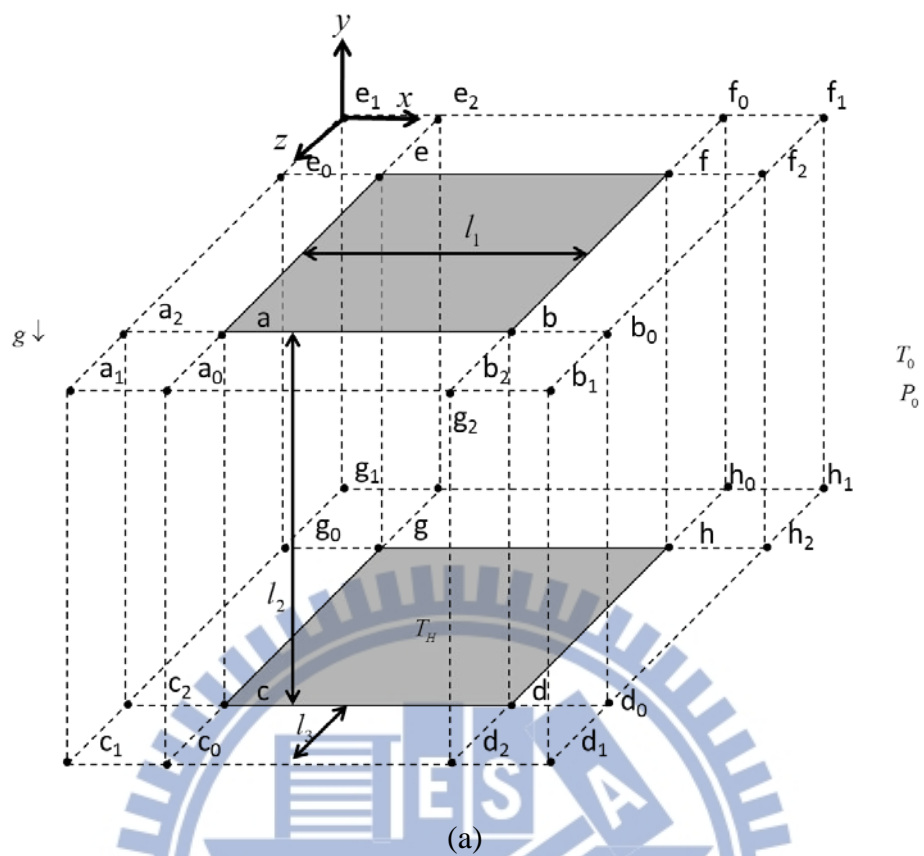


圖 2 - 1 三維平行正方形平板物理模式(a)底部加熱(b)頂部加熱

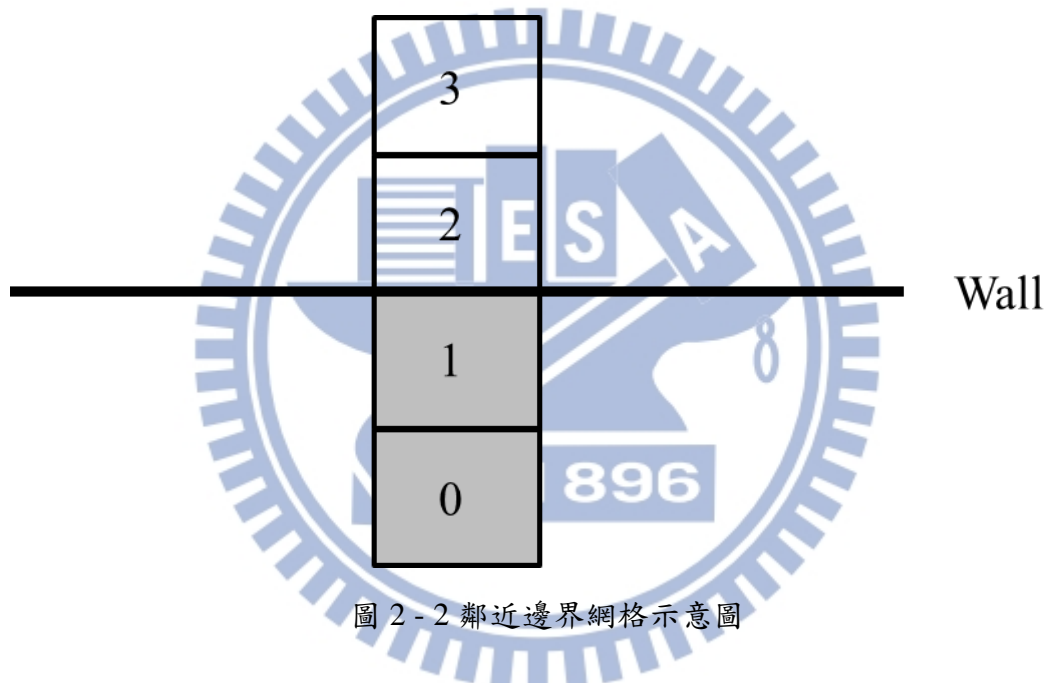


圖 2 - 2 鄰近邊界網格示意圖

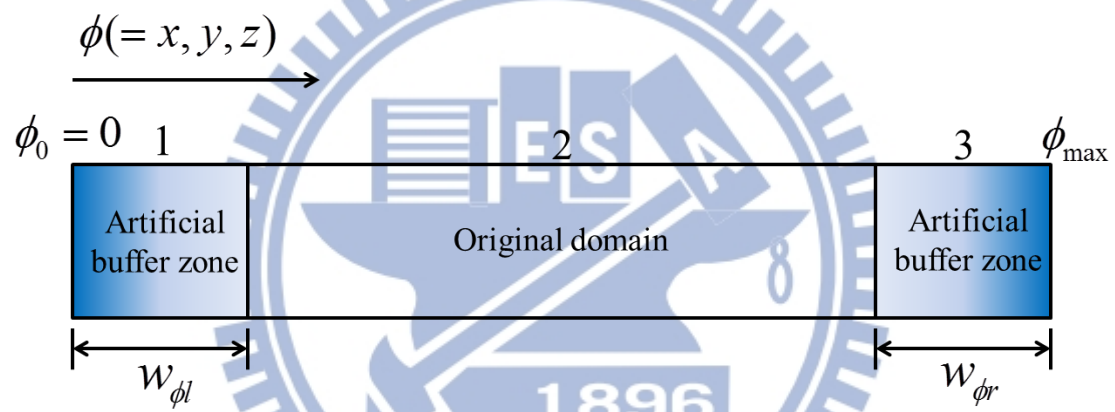


圖 2 - 3 吸收性邊界區域示意圖

### 第三章 數值方法

本文以 Fu 等人[14]的研究為基礎，對於高溫自然對流流場與熱傳效益做更進一步的探討。在過去，計算流場時多利用流場速度將其區分為可壓縮流與不可壓縮流，此種區分法將使的流體計算方法應用範圍受到限制，因此本研究開發全域可壓縮流場計算方法解決此問題。

本研究在流場方面的計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式(Euler equation)，採用 Riemann 問題中的 Roe 方法計算通量(flux)，並且引入 preconditioning 方法，讓程式不論在計算高馬赫數的可壓縮流或低馬赫數的可壓縮流，皆可獲得良好之收斂結果；第二部份為黏滯性項的計算，以中央插分法計算速度梯度。在時間項方面則採用隱式法(implicit)。

考慮完整 Navier-Stokes 方程式(2-7)，可拆解成非黏滯性項與黏滯性項：

$$F = F_{inviscid} + F_{viscid} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Eu + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ +u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

$$G = G_{inviscid} + G_{viscid} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Ev + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ +u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

$$H = H_{inviscid} + H_{viscid} = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho Ew + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ +u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

由非黏滯項所組成的方程式，即稱為尤拉方程式，再一次整理如下，

$$\text{Euler equation : } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_{inviscid}}{\partial x} + \frac{\partial G_{inviscid}}{\partial y} + \frac{\partial H_{inviscid}}{\partial z} = 0 \quad (3-4)$$

上式(3-4)將由 Roe 法來計算。



### 3.1 Roe scheme

在雙曲線的守恆形式方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續 (piecewise) 常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維線性黎曼方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3-5)$$

其中  $A$  為一常數 Jacobian 矩陣。

$$\text{初始條件： } U(x,0) = U_0(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

再從  $A$  中找出特徵值矩陣以及特徵向量。

$$A = K \Lambda K^{-1}, \text{ 其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣： } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}。$$

$$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]^T \text{ 為特徵向量，故 } AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}。$$

接著定義特徵變數  $W$  (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = W(t, x), \quad W = K^{(-1)}U \text{ 或 } U = KW。$$

$$\text{因此 } \frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial W}{\partial t} \text{ 且 } \frac{\partial U}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x}, \text{ 將此結果代入(3-5)式中可得：}$$

$$KW_t + AKW_x = 0, \text{ 可再繼續簡化成：}$$

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (3-7)$$

方程式(3-7)稱為 Canonical form 或 Characteristic form。

將以上的結果簡單整理如下：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0, \text{ 或 } \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3-8)$$

(3-8)可由特徵曲線法求得其解為：

$$\begin{cases} W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

其中， $\alpha_i$ 與 $\beta_i$ 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到

$$U(x,t) = \sum_i^m W_i^0(x - \lambda_i t) K^{(i)}$$

參照圖 3-1，可以進一步推導出

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (3-10)$$

除此之外，還可決定出 $U(x,t)$ 中的 jump  $\Delta U$ ：

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-11)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$ 。

在一維線性黎曼問題中，雖然有解析解，但在非線性問題裡需利用疊代等方法，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題(approximation Riemann problem)解而不直接求其解析解。在求解近似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe[7]所提出，亦即為 Roe scheme，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-12)$$

根據 chain rule，可將方程式(3-12)改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(3-12)可以表示成：} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jacobian 矩陣。

而 Roe scheme 將原本的 Jacobian 矩陣  $A(U)$  用一常數 Jacobian 矩陣  $\tilde{A}(U_L, U_R)$

代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3-14)$$

$$U(x,0) = U_L \quad x < 0$$

$$U(x,0) = U_R \quad x > 0$$

於是前述方法可以得到(3-14)的解析解。由以上的原理可得知，在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jacobian 矩陣取代原本的 Jacobian 矩陣使方程式由非線性轉變成線性，但是初始條件並沒有改變，因此可以得到方程式(3-12)的近似解。

為了要求得合理的常數 Jacobian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1.  $U$  與  $F$  之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當  $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則  $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處  $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3.  $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣  $\tilde{A}$  的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jacobian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3.則是為了符合守恆定律（conservation law）與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(3-9)與(3-11)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$  的解可以利用下面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-15)$$

或

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-16)$$

其中  $i+\frac{1}{2}$  表示網格與網格之間的交界面(interface)。



而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \text{ 根據(3-14)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守恆的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (3-17)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解  $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (3-18)$$

再從  $\tilde{F} = \tilde{A}U$  的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (3-19)$$

再根據(3-15)式與(3-16)式可以推導出：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-20)$$

或

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-21)$$

(3-20)與(3-21)所指的  $\tilde{\lambda}_i^-$  與  $\tilde{\lambda}_i^+$  分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將  $F_{i+\frac{1}{2}}$  更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (3-22)$$

再由(3-10)式可再次改變  $F_{i+\frac{1}{2}}$  的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (3-23)$$

其中  $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ， $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_m| \end{pmatrix}$ 。

接下來需找出  $|\tilde{A}|$  中所需的物理量，必須利用下列方法：

考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3-24)$$

$$\text{其中 } U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}, a \text{ 為聲速}$$

方程式(3-24)的 Jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

$$\text{特徵值：} \lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u + a$$

$$\text{特徵向量：} K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}, K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$$

接著選定 parameter vector  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

再將  $F$  與  $U$  利用  $Q$  表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

為了表示出  $\Delta U$  與  $\Delta F$  需在定義 averaged vector  $\tilde{Q}$ ：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

再找出  $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$  與  $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$  使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (3-30)$$

將(3-30)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C}\tilde{B}^{-1})\Delta U \quad (3-31)$$

再根據上述條件 3 求出近似 Jacobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C}\tilde{B}^{-1} \quad (3-32)$$

為了滿足(3-28)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

再帶入(3-32)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

$\tilde{u}$  為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-36)$$

因此可以用同樣方法得到以下物理量：

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L}v_L + \sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-37)$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L}w_L + \sqrt{\rho_R}w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-38)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-39)$$

$$\tilde{a} = [(\gamma - 1)(\tilde{H} - 1/2\tilde{V})]^{1/2} \quad (3-40)$$

其中  $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ 、 $\tilde{w}$  分別代表  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向的速度。 $\tilde{H}$ 、 $\tilde{a}$  則分別為焓和音

速。(3-36)~(3-38)式中的  $u_L$  以及  $u_R$  則是利用 MUSCL 法求出。

### 3.2 MUSCL 法

本論文使用的是採用 I. Abalakin 等人[36]中所使用的插分法 Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL)來求解  $\Delta U_p$ 。其方程式如下：

$$\Delta U_p = u_{i+1/2}^L - u_{i+1/2}^R \quad (3-41)$$

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (3-42)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L = & (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_i - u_{i-1}) \\ & + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) + \theta^d(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R = & (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_{i+2} - u_{i+1}) \\ & + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) + \theta^d(-u_i + 3u_{i+1} - 3u_{i+2} + u_{i+3}) \end{aligned} \quad (3-45)$$

其中(3-44)、(3-45)式中的  $\beta$ 、 $\theta^c$ 、 $\theta^d$  值可由表 3-1 中查得。代入不同的值可以得到不同的精度。本論文則是使用五階精度，以減少數值計算的消散性。在邊界條件部分，為了執行五階精度計算，加熱壁面與絕熱壁面的設定如式(2-1)~(2-4)所示。而計算黏滯性項則採用四階精度的中央差分法：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} + o(\Delta x^4) \quad (3-46)$$

在程式中，高次項的插分法在不連續的情況下，容易使震盪變大，為了降低震盪，本研究在 MUSCL 法插分出來的方程式中加入 minmod limiter，用來確保程式不會發散。因此(3-42)與(3-43)式需改寫如下：

$$\begin{cases} u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \minmod(\Delta u_{i+1/2}^L) \\ u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \minmod(\Delta u_{i+1/2}^R) \\ \minmod(x, y) = Sgn(x) \max\{0, \min[|x|, y Sgn(x)]\} \end{cases} \quad (3-47)$$

### 3.3 Preconditioning 法

為了增加 N-S 方程式於低馬赫速可壓縮流的準確度與效率，因此於方程式中增加 preconditioning 法。本程式採用 Weiss 和 Smith[8] 的 preconditioning method，撰寫於三維曲線座標，其方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-48)$$

上式為原始方程式，接著將保守形式(conserved variables)轉變成主要變數形式(primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-49)$$

其中  $U_p = [p \quad u \quad v \quad w \quad T]^T$ ， $M$  為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

其中  $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ ； $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(3-50)式的方程式乘上矩陣  $K$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

再將  $K$  與  $M$  相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

將(3-52)式帶入(3-49)式，連續方程式：

$$\rho_p \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-53)$$

在理想氣體中可將(3-53)再表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-54)$$

其中  $C$  為聲速

由(3-54)式可以看出，在等密度條件下，由於  $\rho_p$  為零，(3-53)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-55)$$

上式即為不可壓縮流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(3-52)式中的  $\rho_p$  項，利用當地流場速度（local velocity）的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度數量級數(order)相同，系統不再受到 CFL 條件的限制，提高程式的計算效率。

利用  $\theta$  取代  $\rho_p$  項：

$$\theta = \left( \frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (3-56)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (3-57)$$

其中  $\varepsilon$  為一極小的值，約等於  $10^{-5}$ ，其主要是用來防止停滯點(stagnation point)

在計算時所造成的奇異點(singular point)現象。對於黏性流體而言， $U_r$  必須大於流體的當地擴散速度(local diffusion velocity)，因此  $U_r$  還需加入下列限制：

$$U_r = \max(U_r, \frac{\nu}{\Delta x})$$

將  $\theta$  帶入(3-52)式後，可得到一新矩陣  $\Gamma_{nc}$

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

經過上述推導之後，方程式從(3-49)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = S \quad (3-59)$$

為了讓(3-59)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上  $K^{-1}$

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-60)$$

根據(3-60)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T} H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-62)$$

由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。

在(3-23)式中，可以觀察到  $F_{i+\frac{1}{2}}$  項，是由  $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$  的中央差分法加上為

了解決不連續面問題的 artificial viscosity term  $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$  所組成。加入

preconditioning 的方程式只需在 artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：



$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-63)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S \quad (3-64)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S \quad (3-65)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left( AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S \quad (3-66)$$

$$\text{其中 } M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_R + F_L) - \frac{1}{2} \left| \Gamma^{-1} AM \right| \Delta U_p \quad (3-67)$$

$$\text{其中 } \left| \Gamma^{-1} AM \right| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$$

方程式(3-62)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，利用修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time stepping [8]，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項  $\partial U / \partial \tau$ ，稱為 artificial time term。

方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-68)$$

其中  $\tau$  即為 artificial time， $t$  為 physical time，接著在 artificial time term 加入 preconditioning method：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-69)$$

最後對 artificial time term  $\partial U_p / \partial \tau$  採一階的有限差分離散，對 physical time term

$\partial U / \partial t$  採二階的後項差分離散，離散後的形式將在曲線座標上：

$$\begin{aligned} & \Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1}) \\ & + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{k+1}) = S \end{aligned} \quad (3-70)$$

接著整理上式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{\Delta U_p}{\Delta \tau} + \frac{3(U^k + M \Delta U_p) - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_x(F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y(G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z(H^k + C_p^k \Delta U_p) = S$$

其中  $\Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k$ ， $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$ ， $A_p = \frac{\partial F^k}{\partial U_p}$ ， $\delta_x$ ， $\delta_y$  與  $\delta_z$  為中央差分運算子。

$$F^{k+1} = F^k + A_p \Delta U_p \quad (3-71)$$

$$U^{k+1} = U^k + M \Delta U_p \quad (3-72)$$

再將  $\Delta U_p$  項放置在等號左邊，其餘則在右邊：

$$\left[ \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k \quad (3-73)$$

此處  $R^k = S - \left( \frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_z H^k)$ ， $I$  為單位矩陣。其中

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p}，A_p = \frac{\partial F}{\partial U_p}，B_p = \frac{\partial G}{\partial U_p} \text{ 與 } C_p = \frac{\partial H}{\partial U_p} \text{ 為 flux Jacobian。}$$

$k$  為 artificial time 中的疊帶次數， $n$  為 physical time 的計算階數。上述方程式，當 artificial time term 收斂時， $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} < 10^{-3}$ ，方程式即會回復到原始的 Navier-Stokes 方程式，並且包含著時間項，故程式可以計算暫態結果。本研究先以 Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel (LUSGS) implicit 法[37]計算時間方程式 (3-73)，此法的優點除了收斂快速外，還有不需額外的 Artificial Dissipation 來幫助程式收斂。然而由於此法在程式平行化上有其困難，隨後即以文獻[38]提出之平行化方法修改 LUSGS 法，進一步達到全平行化的程式效果。

### 3.4 LUSGS 法

由 Yoon 和 Jameson[37]提出 LUSGS implicit method 如下：

$$\begin{aligned}\tilde{A}_p &= \Gamma^{-1} A_p^k \\ \tilde{B}_p &= \Gamma^{-1} B_p^k\end{aligned}\tag{3-74}$$

$$\tilde{C}_p = \Gamma^{-1} C_p^k$$

並將其分為兩部分：

$$\begin{aligned}\tilde{A}_p &= \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^- \\ \tilde{B}_p &= \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^- \\ \tilde{C}_p &= \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^-\end{aligned}\tag{3-75}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{A}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{A}_p \pm |\lambda_{\tilde{A}}|I) \\ \tilde{B}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{B}_p \pm |\lambda_{\tilde{B}}|I) \\ \tilde{C}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{C}_p \pm |\lambda_{\tilde{C}}|I)\end{aligned}\tag{3-76}$$

$\lambda_{\tilde{A}}$ 、 $\lambda_{\tilde{B}}$ 、 $\lambda_{\tilde{C}}$  分別為  $\tilde{A}_p$ 、 $\tilde{B}_p$ 、 $\tilde{C}_p$  中最大的特徵值。

將上三式帶入方程式(3-73)可得

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \delta_x(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) + \delta_y(\tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-) + \delta_z(\tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^-)\right]\Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k\tag{3-77}$$

再利用高階方法處理對流項  $\delta_x(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-)$

$$\delta_x(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) = \delta_x^-\tilde{A}_p^+ + \delta_x^+\tilde{A}_p^- = \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^+ - \tilde{A}_{p,i}^+}{\Delta x}\tag{3-78}$$

將上式帶入方程式(3-77)

$$\left[ \frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^+ - \tilde{A}_{p,i}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{p,j}^+ - \tilde{B}_{p,j-1}^+}{\Delta y} + \frac{\tilde{B}_{p,j+1}^+ - \tilde{B}_{p,j}^+}{\Delta y} + \frac{\tilde{C}_{p,k}^+ - \tilde{C}_{p,k-1}^+}{\Delta z} + \frac{\tilde{C}_{p,k+1}^+ - \tilde{C}_{p,k}^+}{\Delta z} \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-79)$$

可將上式整理成

$$(L + D + U)\Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-80)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L &= - \left[ \frac{1}{\Delta x} (A_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (B_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta z} (C_p^+)_{i,j,k-1} \right] \\ D &= \frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\Delta x} [(A_p^+)_{i,j,k} - (A_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta y} [(B_p^+)_{i,j,k} - (B_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta z} [(C_p^+)_{i,j,k} - (C_p^-)_{i,j,k}] \right\} \\ U &= \left[ \frac{1}{\Delta x} (A_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (B_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta z} (C_p^-)_{i,j,k+1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-81)$$

最後整理為

$$(L + D)D^{-1}(D + U)\Delta U_p^k = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-82)$$

上式可以用以下的步驟解出：

1. 執行 forward sweep

$$(L + D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-83)$$

其中  $\Delta U_p^* = D^{-1}(D + U)\Delta U_p^k$

方程式(3-83)可再整理成

$$L\Delta U_p^* + D\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-84)$$

$$D\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k - L\Delta U_p^* \quad (3-85)$$

$\Delta U_p^*$  定義如下：

$$\Delta U_p^* = D^{-1}(\Gamma^{-1}R^k - L\Delta U_p^*). \quad (3-86)$$

方程式(3-86)可以展開如下

$$\Delta U_{p,(i,j,k)}^* = D_{(i,j,k)}^{-1} [\Gamma^{-1} R_{(i,j,k)}^k - L_{(i-1,j,k)} \Delta U_{p,(i-1,j,k)}^* - L_{(i,j-1,k)} \Delta U_{p,(i,j-1,k)}^* - L_{(i,j,k-1)} \Delta U_{p,(i,j,k-1)}^*] \quad (3-87)$$

當  $i=1$ 、 $j=1$  或  $k=1$ ，於方程式右邊的  $\Delta U_p^*$  可從邊界條件決定。

## 2. 執行 backward sweep

$\Delta U_p^k$  於方程式(3-83)可表示如下

$$(D+U)\Delta U_p^k = D\Delta U_p^* \quad (3-88)$$

$$\Delta U_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta U_p^k \quad (3-89)$$

$$\Delta U_{p,(i,j,k)}^k = \Delta U_{p,(i,j,k)}^* - D_{(i,j,k)}^{-1} [U_{(i+1,j,k)} \Delta U_{p,(i+1,j,k)}^k + U_{(i,j+1,k)} \Delta U_{p,(i,j+1,k)}^k + U_{(i,j,k+1)} \Delta U_{p,(i,j,k+1)}^k] \quad (3-90)$$

當  $i=1$ 、 $j=1$  或  $k=1$ ，於方程式右邊的  $\Delta U_p^*$  可從邊界條件決定。

## 3. 求解 $U_p^{k+1}$ :

$$U_p^{k+1} = U_p^k + \Delta U_p^{k+1} \quad (3-91)$$

4. 重複步驟 1 至 3，直到  $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} < 10^{-3}$  則下一個物理時間項可求得。

### 3.5 LODI 法

在高速可壓縮流的情形下，Poinsot 和 Lele[11]發展的 LODI 法使非反射邊界適用於管道的進出口兩端。但因未使用 preconditioning 法，因此此法並無法適用於低速可壓縮流中。為了讓 LODI 法適用於低速可壓縮流的情形下，需重新推導 LODI 方程式於邊界上，考慮一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-92)$$

接著將兩邊同乘  $\Gamma^{-1}$

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-93)$$

其中  $\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$  可在轉換如下：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-94)$$

將方程式(3-94)帶入方程式(3-93)，便可得到 primitive form

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (3-95)$$

再將  $\Gamma^{-1} A_p$  作相似轉換以得到特徵速度

$$\Gamma^{-1} A_p = K \lambda K^{-1} \quad (3-96)$$

此處  $K$  為特徵向量矩陣， $\lambda$  為  $\Gamma^{-1} A_p$  的特徵值矩陣且表示流場中的特徵速度。根據 Jespersen 等人[35]，特徵值下所示：

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (3-97)$$

此處  $u' = \frac{(\Theta+1)u}{2}$ 、 $c' = \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2}$ ，其中  $\Theta \approx 100M^2$ 。

接著讓

$$L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-98)$$

$L$ 如下所示：

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho \gamma} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (3-99)$$

$L$ 矩陣的物理意義為邊界條件上波的強度隨時間變化的方程式。

根據方程式(3-97)， $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 與 $L_5$ 分別為 $u$ 、 $u$ 、 $u$ 、 $u' + c'$ 與 $u' - c'$ 。

將方程式(3-98)帶入方程式(3-95)，可再表示如下：

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + KL = 0 \quad (3-100)$$

將方程式(3-100)展開可得壓力、速度與溫度在邊界條件上的方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho c'} (L_4 - L_5) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} - L_3 &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} + L_2 &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + L_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - y) - L_5(u' - c' - y)] &= 0 \end{aligned} \quad (3-101)$$

方程式(3-101)可再離散如下：



$$\begin{aligned}
p^{k+1} &= p^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] \\
u^{k+1} &= u^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} (L_4 - L_5) \\
v^{k+1} &= v^k + L_3 \Delta t \\
w^{k+1} &= w^k - L_2 \Delta t \\
T^{k+1} &= T^k - L_1 \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (p^{k+1} - p^k)
\end{aligned} \tag{3-102}$$

根據圖 3-2(a)，如果流體從管內往大氣流出時， $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  與  $L_4$  方向與流體流動方向相同，因此可利用方程式(3-99)定義  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  與  $L_4$ 。由於  $u' - c'$  小於零的關係， $L_5$  的方向則與流體流動方向相反。由於壓力於極遠處的變化為零，所以  $\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ ，方程式(3-101)的第一式將如下：

$$\frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \tag{3-103}$$

因此  $L_5$  可定義如下：

$$L_5 = \frac{(u' + c' - u)}{(u' - c' - u)} L_4 \tag{3-104}$$

相反地，圖 3-2(b)則為流體從大氣環境往管內流動。 $L_4$  可由方程式(3-100)直接求得，由於非反射性邊界的關係， $L_1$ 、 $L_2$  與  $L_3$  則設定為 0。 $L_5$  則可由方程式(3-103)得到。此外，為了符合五階精度的計算，如圖 2-2 所示，邊界外第二個 ghost cell，即第 0 點的設定如下：

$$\begin{cases}
P(i, 0, k) = P(i, 1, k) \\
u(i, 0, k) = u(i, 1, k) \\
v(i, 0, k) = v(i, 1, k) \\
w(i, 0, k) = w(i, 1, k) \\
T(i, 0, k) = T(i, 1, k)
\end{cases} \tag{3-105}$$

### 3.6 吸收性邊界

由於不同方向的吸收性邊界區域的方程式的物理意義不同，因此實際應用於數值計算時，方程式(2-7)將需要做修正來符合各個方向的吸收性邊界區域。在 $+x$ 及 $-x$ 方向的吸收性邊界區域方程式如下：

$$\begin{aligned} \tilde{F} = F + \tilde{\eta}_F, \quad \tilde{\eta}_F = & \left\{ \begin{array}{l} \eta_x \rho \\ \eta_x \rho u \\ \eta_x \rho v \\ \eta_x \rho w \\ \eta_x \rho E \end{array} \right\} \\ \tilde{G} = G + \tilde{\eta}_G, \quad \tilde{\eta}_G = & 0 \\ \tilde{H} = H + \tilde{\eta}_H, \quad \tilde{\eta}_H = & 0 \end{aligned} \quad (3-106)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_x = \left[ \begin{array}{l} \sigma_x (\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_x (\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_x (\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_x (\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_x (e - e_{target}) \end{array} \right] \quad (3-107)$$

在 $+z$ 及 $-z$ 方向的吸收性邊界區域方程式如下：

$$\begin{aligned} \tilde{F} = F + \tilde{\eta}_F, \quad \tilde{\eta}_F = & 0 \\ \tilde{G} = G + \tilde{\eta}_G, \quad \tilde{\eta}_G = & 0 \\ \tilde{H} = H + \tilde{\eta}_H, \quad \tilde{\eta}_H = & \left\{ \begin{array}{l} \eta_z \rho \\ \eta_z \rho u \\ \eta_z \rho v \\ \eta_z \rho w \\ \eta_z \rho E \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3-108)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_z = \begin{bmatrix} \sigma_z(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_z(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_z(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_z(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_z(e - e_{target}) \end{bmatrix} \quad (3-109)$$

在交集區的吸收性邊界區域方程式如下：

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= F + \tilde{\eta}_F, \quad \tilde{\eta}_F = \begin{Bmatrix} \eta_x \rho \\ \eta_x \rho u \\ \eta_x \rho v \\ \eta_x \rho w \\ \eta_x \rho E \end{Bmatrix} \\ \tilde{G} &= G + \tilde{\eta}_G, \quad \tilde{\eta}_G = 0 \\ \tilde{H} &= H + \tilde{\eta}_H, \quad \tilde{\eta}_H = \begin{Bmatrix} \eta_z \rho \\ \eta_z \rho u \\ \eta_z \rho v \\ \eta_z \rho w \\ \eta_z \rho E \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3-110)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_z = \begin{bmatrix} \sigma_x(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_x(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_x(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_x(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_x(e - e_{target}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_z(\rho - \rho_{target}) \\ \sigma_z(\rho u - \rho u_{target}) \\ \sigma_z(\rho v - \rho v_{target}) \\ \sigma_z(\rho w - \rho w_{target}) \\ \sigma_z(e - e_{target}) \end{bmatrix} \quad (3-111)$$

由於吸收性邊界區域的流體方向需與真實物理邊界的方向一致，因此在圖 2-3 中，區域 1 的吸收性邊界區域是以後退差分的方式做離散，如方程式(3-112)所示。而區域 2 的吸收性邊界區域則是以前進差分的方式來離散化，如方程式(3-113)所示：

$$\left. \begin{aligned} \eta_\phi \frac{\partial \rho}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho u}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho u_i - \rho u_{i-1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho v}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho v_i - \rho v_{i-1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho w}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho w_i - \rho w_{i-1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho E}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho E_i - \rho E_{i-1}}{\Delta \phi} \end{aligned} \right\} \quad (3-112)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_\phi \frac{\partial \rho}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho_i - \rho_{i+1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho u}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho u_i - \rho u_{i+1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho v}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho v_i - \rho v_{i+1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho w}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho w_i - \rho w_{i+1}}{\Delta \phi} \\ \eta_\phi \frac{\partial \rho E}{\partial \phi} &= \eta_\phi \frac{\rho E_i - \rho E_{i+1}}{\Delta \phi} \end{aligned} \right\} \quad (3-113)$$

$\phi = x, z$

上述方程式的 $\phi$ 為代表 $x$ 及 $z$ 方向的吸收性邊界差分方程式。為了正確解出整體的流場，包含真實物理區域及虛擬的吸收性邊界區域，方程式(2-5)及(2-9)需結合成以下統御方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} + \tilde{\sigma} + S = 0 \quad (3-114)$$

當計算真實物理區域時，虛擬對流項及虛擬擾動項將為零。而當計算吸收性邊界區域時，重力源項將為零，由此整體的計算過程如下所示：

- (1) 設定整體流場初始條件，包含壓力、速度及溫度。高溫面設定為 $T_H = 700 \text{ K}$ 。
- (2) 使用 MUSCL 計算式(3-42)及(3-43)，再由式(3-41)得 $\Delta U_p$ 的值。
- (3) 把 $\Delta U_p$ 的值代入式(3-67)並以 Roe scheme 計算非黏性項 $F_{inviscid}$ 。

- (4) 以四階中央插分法計算黏性項並代入統御方程式(2-5)。
- (5) 由 LUSGS 法計算  $U_p^{k+1}$ 。
- (6) 檢查  $U_p^{k+1}$  是否收斂，重複(2)-(5)直到達到收斂條件。以  $U_p^{k+1}$  當作第(n+1)<sup>th</sup>時階的  $U_p$ ，並計算下一時階的結果。本研究的收斂條件為  $\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\psi^{n+1}} < 10^{-3}$ ，
- $\psi = p, u, v, w, T$ 。



### 3.7 CUDA 高速運算

由於此研究三維低速可壓縮流之計算量非常龐大，因此在模擬過程相當耗時。過去的研究中，多使用平行化方法做為提高計算效能的方式，最常見的兩種平行化方法為MPI (Message Passing Interface)及OpenMP (Open Multi-Processing)。前者將程式平行化於並聯的多台電腦上運行，但效率隨電腦數增加而下降，且價格與佔用空間亦十分龐大。後者則是使用具有多核中央處理器的超級電腦，佔用空間較小，但受限於目前的製程及散熱問題，計算核心數有限，效率提昇有限。

近年來，處理動畫(Animation)功能在研究與娛樂的殷切需求下，顯示卡(Video Card)內圖形處理器(Graphics processing unit, GPU)的速度越來越快，如圖 3-3所示。在浮點運算數及記憶體頻寬上，GPU由於本身硬體架構的優勢，整體的運算效能遠高於一般的多核中央處理器(Central processing unit, CPU)。除此之外，顯示卡之價格相對於購買高階多核中央處理器較為低廉，因此於三維圖形顯示方面以外的應用日益增加。CUDA平台(Compute Unified Device Architecture)是由Nvidia公司所推出的整合技術，此技術是一種將GPU作為數據平行化運算設備的統一處理架構。利用顯示卡內GPU具有數量眾多的流處理器(Stream Processor, SP)，更適合用於平行化程式的計算特性，以達到提升數值計算速度的目的。本研究發展利用CUDA於計算流體力學上，將CUDA平台成功運用於平行化運算，以下將就CUDA平台的架構及執行模式做詳細的說明。

CUDA 平台的主要架構如圖 3-4(a)，右方可見主機(Host)端，內含中央處理器(CPU)和主機記憶體。而設備(Device)端，即主機板插槽上的顯示卡。平行計算過程中，依程式語言撰寫順序執行，部分在 CPU 上運算的為串行處理程式(serial code)，部分藉自行開發在 CUDA 平台上的連結編輯程式，在 GPU 上執行的為核心函數(kernel)。每個 kernel 的執行單位為網格(Grid)，網格中包含數個區塊(Block)，區塊又由數個執行緒(Thread)所組成，當 kernel 開始執行時，這些執行緒將分別由顯示卡內的流處理器(Stream Processor, SP)來作平行化運算。待此



kernel 結束，則接續下一個串行函數進行在 CPU 運算，依此順序執行至整個程式完成運算工作。

在 CUDA 平台上作平行化運算，為得到最佳化的計算效能，在記憶體的配置方式上極為重要，如圖 3-4(b)所示。由於在 GPU 的計算單元中，包含數個多流處理器(Stream Multiprocessor, SM)，而每個 SM 中又包含 8 個單(或雙)精確浮點數的流處理器(Stream Processor, SP)，在同 SM 中的 8 個 SP 共用同一共享記憶體(shared memory)。如前述在 CUDA 平台中的 kernel 實質上是以區塊為單位執行的，在同一區塊的所有執行緒需共享數據，因此會在同一個 SM 中執行，但同一 SM 中可以存在多個區塊，如此可在某一區塊執行同步或存取記憶體時，讓另一個區塊占用執行資源，用以隱藏延遲，更好的利用執行單元的資源。然而在實際運行時，區塊內的執行緒將以執行緒束(warp)為單位執行，一個 warp 由 32 個連續執行緒所組成，且一個 SM 可以保存 32 個 warp(共 1024 個執行緒)。由於各個 warp 在 CUDA 中的執行順序並無規律，因此需使用同步的方式，確保同一區塊中的執行進度相同，一個 SM 可以完成 512 個執行緒同步的動作，且 warp 中的執行緒只與執行緒 ID 有關，排列如 ID 0~31 為一束，32~63 為第二束，以此類推，因而在下述設定的區塊中執行緒數則可是 1~512 的任意值，並以 32 的倍數為最佳，以避免多餘的執行緒仍占掉一個 warp。依此原則對區塊及執行緒數作配置，以期達到平行化運算的最高性能。

在撰寫CUDA程式時，主要可分為下列三個步驟；第一步驟為配置顯示卡內 GPU 的記憶體位址及設定區塊(Block)和執行緒(Thread)的大小，接著將本來利用中央處理器CPU計算的資料由主機記憶體搬移至顯示卡上的記憶體。一般使用有限差分法於三維的情形中，多使用三維陣列(i,j,k)將格點編號，然而若使用三維陣列時，要將主機的資料搬移至顯示卡上的記憶體時，將非常複雜。因此需將三維陣列轉換成一維陣列以利於資料搬移。其轉換公式如下所示：

Device ( assign numbers ) = Host (  $i \times n_y \times n_z + j \times n_z + k$  )，其中  $n_x$ 、 $n_y$  與  $n_z$  分別



為  $x$ 、 $y$  與  $z$  方向的計算網格數目。

第二步驟為將程式平行運算。在步驟一將三維陣列轉換成一維陣列，且把主機端的資料搬移至顯示卡的記憶體後，接著將一維陣列的迴圈平行化，利用流處理器做計算並儲存於顯示卡上的記憶體。第三步驟為將 GPU 計算結果從顯示卡的記憶體搬移至主機端的記憶體，接著將前述的一維陣列轉回原來的三維陣列，並輸出結果。

為了使程式能編譯一次後即能在擁有不同流處理器(Stream Processor, SP)數的顯示卡上執行，CUDA 平台使用了單指令多執行緒(Single Instruction, Multiple Thread, SMIT)的執行模型，將計算任務轉成可以大量平行執行的執行緒。實際運行時，kernel 是以區塊為單位執行的，而網格則是用以表示一系列可以被平行執行的區塊的集合。一個 kernel 會在一個網格中運行，但由於同一區塊中的所有執行緒在同一時刻執行的指令並不一定相同，故在 CUDA 平台中，同一區塊中的所有執行緒皆能存取共享記憶體(shared memory)，因此可以互通交換數據並能快速進行同步的動作，不同區塊中的執行緒則否，在此模式的設定下雖然能同時執行同一指令的執行緒數量有限，但通過共享記憶體和執行緒柵欄同步(Barrier)的方式，確保同一區塊內的執行緒不僅能獨立平行運算，在需要資料同步時，亦能待全部執行緒皆執行到相同指令時，程式才繼續往下運行，而不致計算錯誤。

此外，在記憶體最佳化的配置下，由於不同種類的記憶體將對應到不同階層的運算單元，因此記憶體最佳化的程度也是影響 GPU 運算的重要因子。在最低階的運算單元，執行緒中，每個執行緒有其可存取的 local memory 及 registers 記憶體，為專屬於此執行緒的記憶單元，速度也最快。而在同一個區塊中，各個執行緒將可存取一共用的共享記憶體，但相對的速度也較慢。最後則是在同一個網格中，所有的執行緒皆可存取共用的 global memory，constant memory 及 texture memory，速度則最慢。此外，由於只有 global memory，constant memory 及 texture memory 可與主機端的記憶體進行互相存取的動作，因此善用各種不同的記憶體

之搭配，將可大幅提高程式的運算效能及程式撰寫的效率。

另一方面，為了完全運用 GPU 的高速平行運算能力，程式的高度平行化是必要的。在原始的 LUSGS 法之下，式(3-87)中在計算  $\Delta U_{p,(i,j,k)}^*$  時，需使用到鄰近格點的數值  $\Delta U_{p,(i-1,j,k)}^*$ ， $\Delta U_{p,(i,j-1,k)}^*$  及  $\Delta U_{p,(i,j,k-1)}^*$ ，以及式(3-90)計算  $\Delta U_{p,(i,j,k)}^k$  時，需使用到鄰近格點的數值  $\Delta U_{p,(i+1,j,k)}^k$ ， $\Delta U_{p,(i,j+1,k)}^k$  及  $\Delta U_{p,(i,j,k+1)}^k$ ，因此程式在此區塊需跳出至序列程式運算，大幅降低了運算效能。

在此為了解決此問題，以 Candler 和 Wright[38]所提出的 data-parallel LU relaxation method 來修改原始的 LUSGS 法，進一步達到全平行化的程式運算。為了改寫 LUSGS 法，首先以一預設的  $R_{(i,j,k)}^k$  得到第零次運算的  $\Delta U_{p,(i-1,j,k)}^{(0)}$ ，如以下所示：

$$\Delta U_{p,(i,j,k)}^{(0)} = D_{(i,j,k)}^{-1} \Gamma_{(i,j,k)}^{-1} R_{(i,j,k)}^k \quad (3-115)$$

接著結合式(3-87)及(3-90)並改寫如下：

$$\begin{aligned} \Delta U_{p,(i,j,k)}^m = & D_{(i,j,k)}^{-1} \{ \Gamma_{(i,j,k)}^{-1} R_{(i,j,k)}^k - L_{(i-1,j,k)} \Delta U_{p,(i-1,j,k)}^{m-1} - U_{(i+1,j,k)} \Delta U_{p,(i+1,j,k)}^{m-1} - L_{(i,j-1,k)} \Delta U_{p,(i,j-1,k)}^{m-1} \\ & - U_{(i,j+1,k)} \Delta U_{p,(i,j+1,k)}^{m-1} - L_{(i,j,k-1)} \Delta U_{p,(i,j,k-1)}^{m-1} - U_{(i,j,k+1)} \Delta U_{p,(i,j,k+1)}^{m-1} \} \end{aligned} \quad (3-116)$$

$m$  為次疊代(subiterations)的次數，根據文獻[38]的測試，以  $m_{\max} = 4$  之效率為最佳。因此最後可得：

$$\Delta U_p^{k+1} = \Delta U_p^{m_{\max}} \quad (3-117)$$

再代入式(3-91)中，即可解得  $\Delta U_p^{k+1}$ 。在 data-parallel LU relaxation method 中，由於式(3-115)及式(3-116)在計算  $\Delta U_{p,(i,j,k)}^m$  時，僅需使用到上一個次疊代的鄰近格點，因此在每次疊代時皆可以全平行化之程式計算，更能有效利用 GPU 的運算效能。

表 3-1 精度係數值

$\beta$	$\theta^c$	$\theta^d$	Order
1/3	0	0	2
1/3	-1/6	0	3
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5
1/3	-1/10	-1/15	6



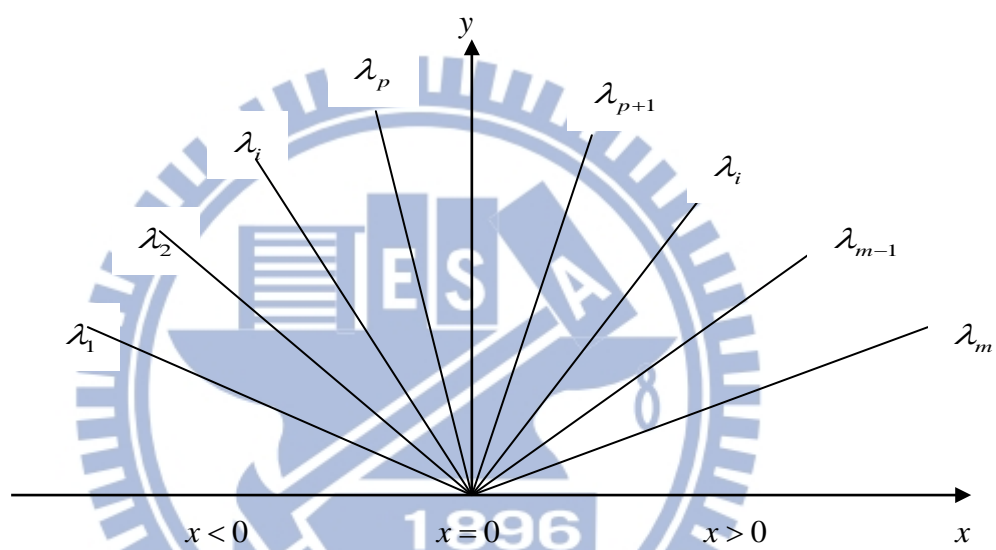


圖 3 - 1 黎曼問題特徵值結構圖

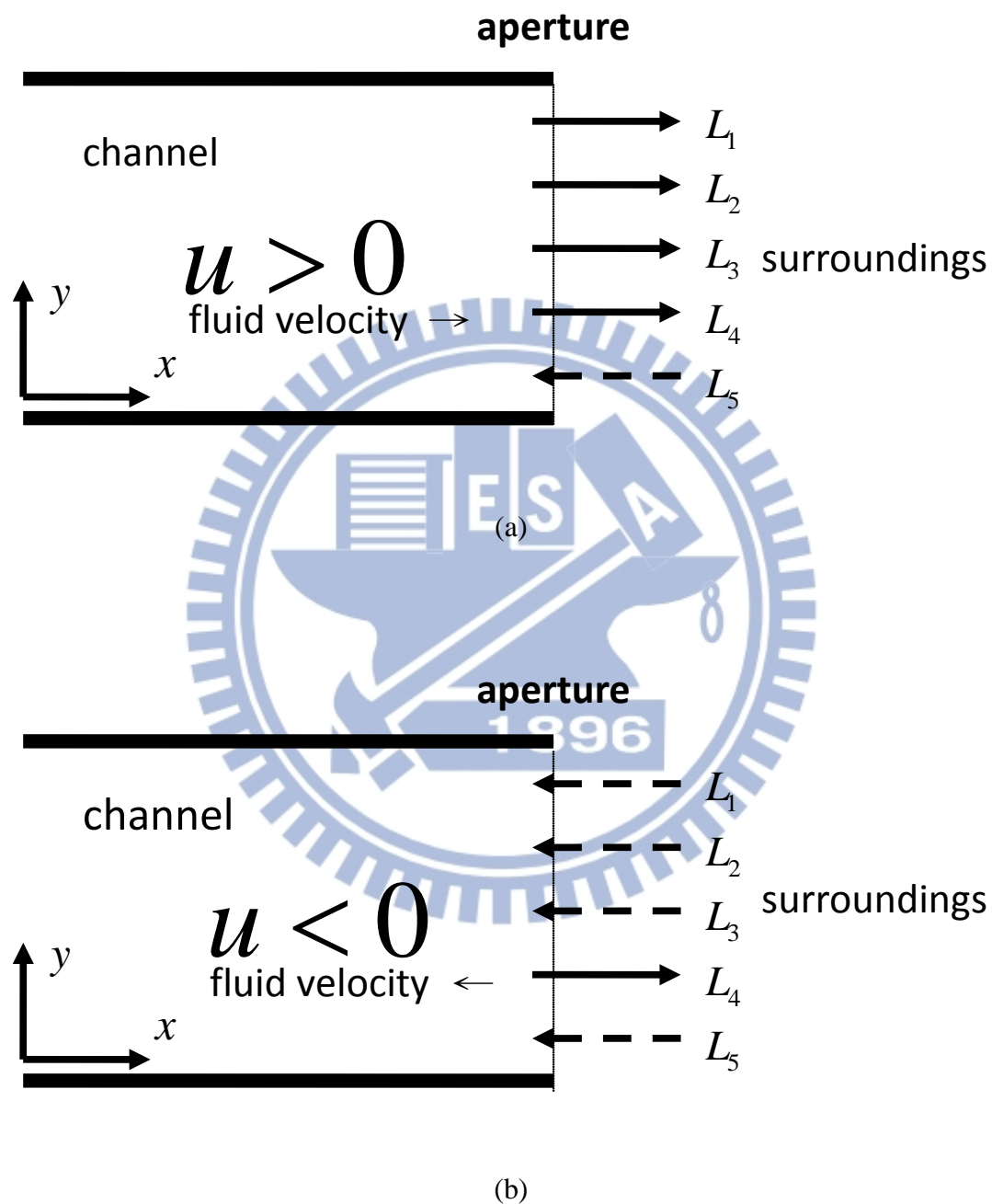
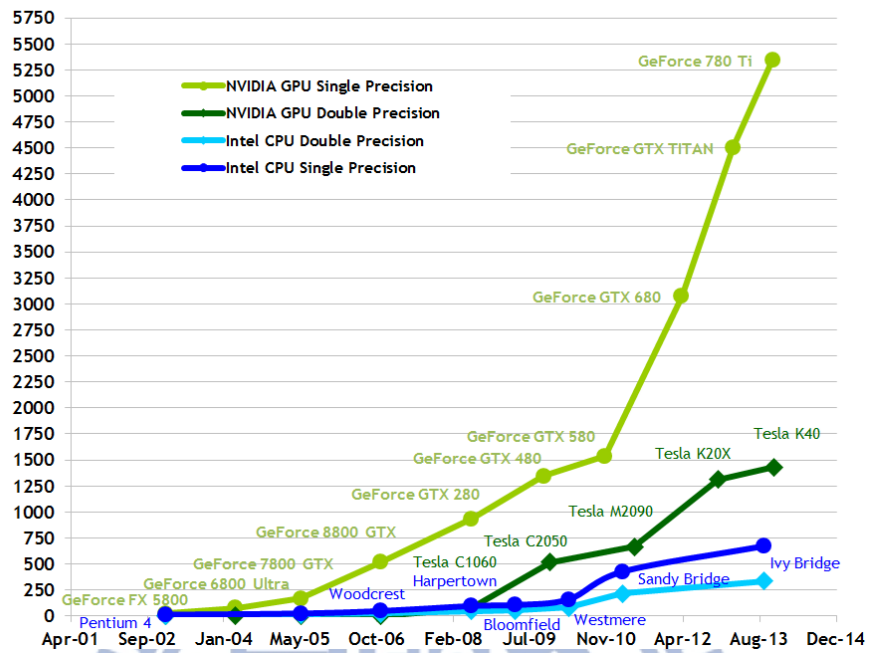


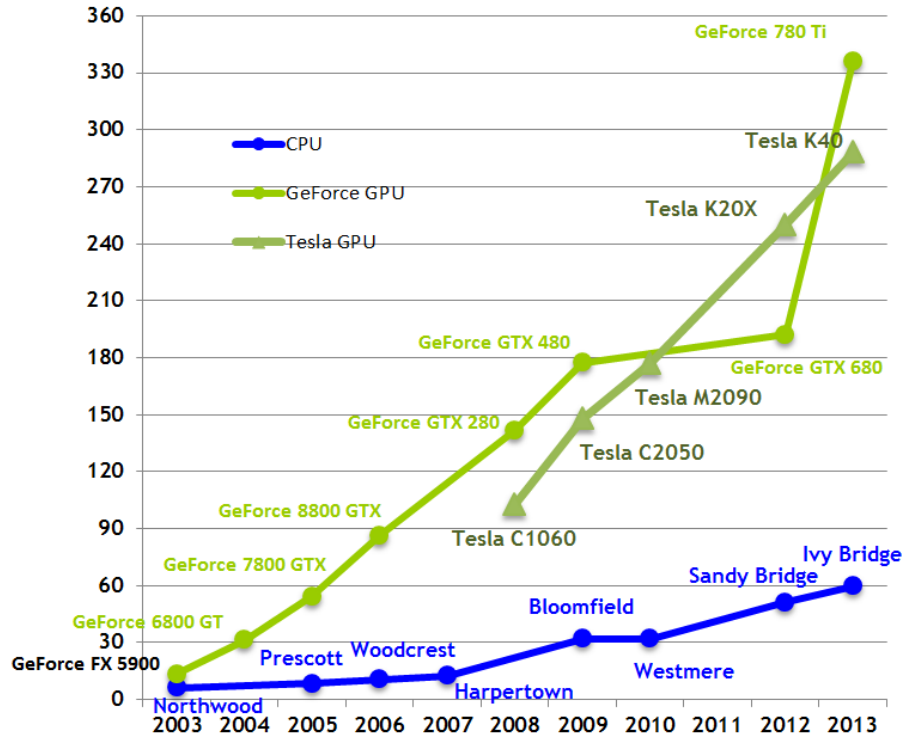
圖 3 - 2  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 與 $L_5$ 於管道兩端的方向性示意圖

Theoretical GFLOP/s



(a)

Theoretical GB/s



(b)

圖 3 - 3 GPU 及 CPU 效能比較[39](a)浮點運算數 (b)記憶體頻寬

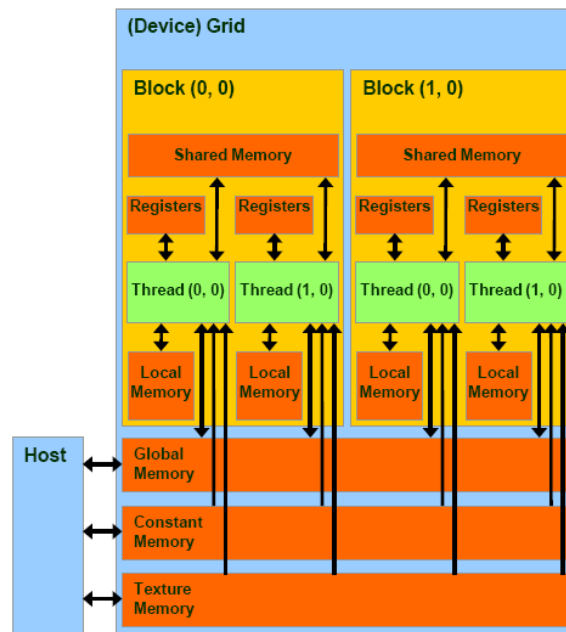
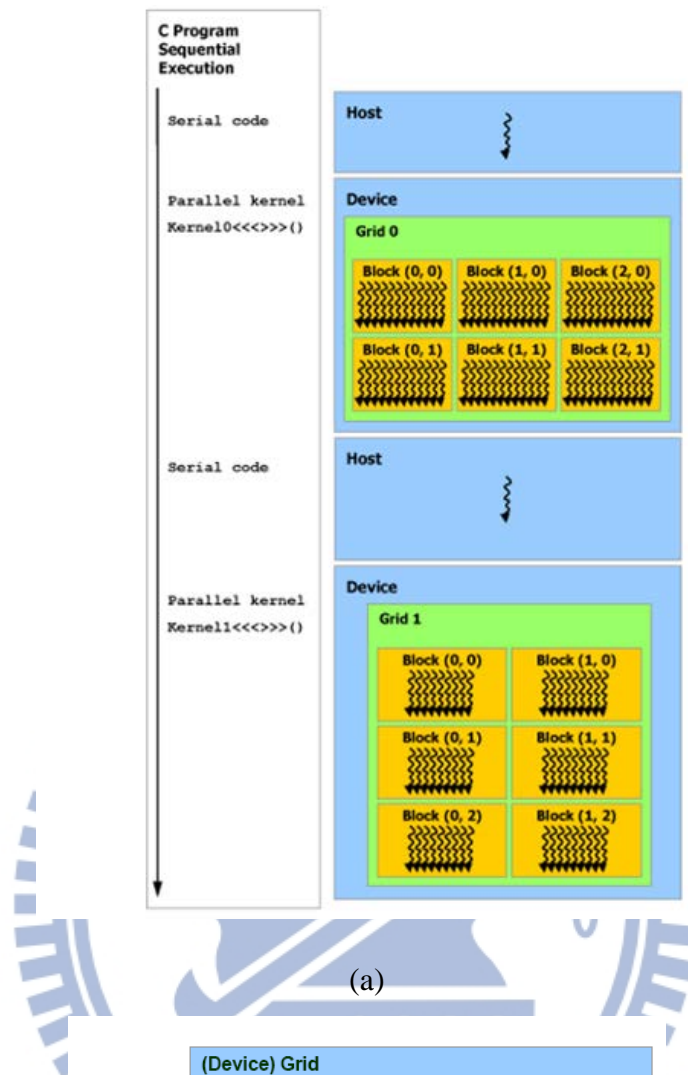


圖 3 - 4 (a)CUDA 程式架構 (b)CUDA 記憶體配置[39]



## 第四章 結果與討論

### 4.1 計算參數與驗證

在正方形平行平板中，需要定義某特徵長度以計算雷利數(Rayleigh number)，在此以平板間之距離為特徵長度並定義雷利數如下：

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_H - T_0) l_2^3}{T_0 \mu (T)^2} \quad (4-1)$$

然而由於底部平板的加熱面大小也會影響整體熱傳現象，因此為了更正確的考慮整體的無因次參數的物理意義對熱傳效率的影響，修正過後的雷利數定義如下：

$$Ra^* = Ra \times \frac{l_1}{l_2} \quad (4-2)$$

為了比較熱傳增益，定義局部紐塞數(Nusselt number)  $Nu$ 、時間平均紐塞數  $\overline{Nu}_t$ 、面積平均紐塞數  $\overline{Nu}_A$  及平均紐塞數  $\overline{Nu}$  如下：

$$Nu = \frac{l_2}{k_0 (T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (4-3)$$

$$\overline{Nu}_t = \frac{1}{t} \int_t \frac{l_2}{k_0 (T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dt \quad (4-4)$$

$$\overline{Nu}_A = \frac{1}{A} \int_A \frac{l_2}{k_0 (T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA \quad (4-5)$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A \cdot t} \int_t \int_A \frac{l_2}{k_0 (T_H - T_0)} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] dt dA \quad (4-6)$$

在計算正方形平行平板之自流對流之現象時，當僅以 LODI 法應用於開放性邊界空間時，若有兩交錯開放性邊界，則在角落處的橫向項(transverse term)所造

成的誤差累積會使計算過程發散，因此將進一步以吸收性邊界結合 LODI 法來計算。

在此研究中，固定正方形平板的大小，考慮不同間距 $l_2$ 的正方形平行平板做比較，以不同大小的修正雷利數與加熱位置探討高溫自然對流現象。

首先考慮僅以吸收性邊界處理開放式邊界之結果與結合吸收性邊界及修正 LODI 法此種混合式邊界為邊界條件之比較。根據本研究的驗證，當加熱位置為底部平板時，吸收性邊界可得到良好的結果，但若加熱位置為頂部平板時，在暫態的結果上會有高溫從虛擬計算區域處回傳的情形。如圖 4-1 所示之暫態溫度場， $Z = 0.5$  之截面圖，此案例之修正雷利數為  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$ ，加熱面為頂部平板。白色虛線內是物理計算區域，白色虛線外則是虛擬計算區域。圖 4-1(a) 為僅以吸收性邊界條件應用於虛擬計算區域之結果。高溫由頂部平板向外擴散，但是在白色虛線位置可明顯觀察到溫度場由外界之虛擬計算區域回傳至物理計算區域。在實際情況中，由於白色虛線外為開放性空間，溫度場不會經由邊界再回傳至平行平板內，因此這是個不合理的計算結果。

圖 4-1(b) 則為結合吸收性邊界條件與修正 LODI 法之計算結果。吸收性邊界的統御方程式應用於虛線外的區域，而在虛擬計算區域外圍則以修正 LODI 法防止反射波的產生。由圖中可觀察到溫度場均勻擴散，且無任何不合理的反射現象。由此可知當計算開放性邊界時，結合吸收性邊界條件與修正 LODI 法為一更適當的邊界條件設定。

此外，為了驗證吸收性邊界區域的大小對於計算的準確度影響，測試不同寬度的吸收性邊界區域( $l_3$ )，分別為  $l_3/l_1 = 2/14$ 、 $l_3/l_1 = 3/14$ 、 $l_3/l_1 = 4/14$ ，比較其對於沿底部及頂部加熱面中線  $\overline{ij}$  之局部紐塞數的影響。在計算格點的部份，真實物理區域為  $70 \times 40 \times 70$ ，在吸收性邊界區域部份，由於此為一對稱分佈之物理模型，四周的吸收性邊界區域格點均設定為等長，分別為 10、15、20 格，因此總計算格點大小分別為  $90 \times 40 \times 90$ 、 $100 \times 40 \times 100$ 、 $110 \times 40 \times 110$ 。由圖 4-2

的結果可知， $l_3/l_1 = 3/14$  及  $l_3/l_1 = 4/14$  的局部紐塞數極為接近，而  $l_3/l_1 = 2/14$  則較為偏離，而隨著  $l_3/l_1$  增加，計算的結果也不再變話。此外，由計算過程中可發現吸收性邊界區域越大時整體的收斂速度越快。因此在計算精度及計算時間的考量下，選擇以  $l_3/l_1 = 4/14$  來計算以下所有案例之結果。

在計算參數部份，如表 4-1 所示，分別計算在不同加熱位置(底部平板及頂部平板)及不同修正雷利數  $Ra^*$  ( $1.72 \times 10^5$ 、 $1.55 \times 10^6$  及  $4.31 \times 10^6$ ) 之物理模型，整體網格大小為均勻分佈。在結果中所有物理量的呈現都是以真實物理區域為主。



## 4.2 正方形平行平板底部加熱自然對流

當加熱部分為正方形平行平板的底面時，流體在底面加熱後因浮力而上升，最後撞擊到頂部平板再向四周流出。而在四周的開放性邊界上，則同時存在著吸入及推出的現象。為了觀察流體吸入及流出的現象及其對熱傳的影響，圖 4-3(a) 及(c)為  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  在真實物理區域的中央  $\overline{xy}$  截面之進出口速度向量分佈及整體溫度場的分佈，由於此為對稱的結果，圖中只顯示左半邊的流場情況。由圖 4-3(a) 的速度向量可看出在底面時由於壁面的影響，吸入的速度不是最大，而在離底面上方極小距離時吸入的流體達到最高速。此外，隨著高度的上升，底面高溫對吸入流體的影響減小，吸入的速度主要是由底面附近向內的速度所帶動，使的速度漸小。由另一方面來看，在頂部平板附近的流體，由於被底板加熱的流體上升至頂部後膨脹推出，因此在最高處會有最大向外的速度。綜合以上的結果可知，在平行平板的四面開放邊界上，流體會有底部吸入，在頂部推出，而隨著高度的上升，吸入的速度漸小，最後反向由頂部流出。

另一方面，由於此正方形平行平板之四周皆為流體，因此底面吸入之流體實際上是藉由低於底面之位置而來，在速度向量上會有  $+y$  方向的速度分量，且隨著內部流體被加熱向上所影響， $+y$  方向的速度分量隨之增加。但是在頂部流出之流體，由於是從真實物理區域內向外流出，被頂部壁面影響，流出的部分  $+y$  方向的速度向量相比之下較小。另外觀察圖 4-3(c) 溫度場等高線圖的部分，在底部加熱面的溫度最高，由於流體由四周吸入再往正  $y$  方向流動，因此溫度分佈也隨之變化，最高溫由底面中間向  $+y$  方向遞減，到了頂部之後再向四周遞減，而在其他位置由於流體速度較小，熱傳則較不明顯。圖 4-3(b) 及(d) 則為  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  在對角線截面之速度向量與溫度等高線圖。與圖 4-3(a) 及(c) 相比可明顯發現在對角線截面速度向量極小，而吸入及推出的速度向量反曲點也比中央截面要來的更上方。換句話說，在底部加熱  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  時，四邊吸入與推出流體較佔較大

的比例，而對角線造成的影響則較小，但整體流場分佈對角線截面與中央 $\overline{xy}$ 截面差別不大。

圖 4-4 所示為  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  時之流線示意圖。由圖中可看出流體在底面加熱區由四面及角落吸入，並隨之向上，最後再分別從四面及角落流出。這是一個完整的自然對流現象的呈現，且與圖 4-3 的結果相符，在四面吸入及推出的流體，速度皆大於對角線位置的流體。

圖 4-5 為底部加熱穩態下不同修正雷利數時在 $\overline{ij}$ 線上之局部紐塞數分佈。在兩側的位置由於冷流體剛由外界吸入，因此有非常好的熱傳效益。相反的，靠近平板中間的位置處由於冷流體已被壁面加熱，熱傳效果也較差。另外由不同的修正雷利數可發現，當修正雷利數越大時也有較佳的熱傳效果。

此外，為了比較正方形平行板底面的熱傳分佈，圖 4-6 為穩態下加熱面中線及對角線之局部紐塞數分佈比較及加熱面整體的局部紐塞數等高線分佈， $L$  為無因次座標，定義為  $L = \sqrt{x^2 + z^2} / \sqrt{2l_1^2}$ 。由圖 4-6(a) 可看出當距離平板中心點相同位置時，中線上之紐塞數甚大於對角線之紐塞數，而隨著半徑變大，在接近壁面處之紐塞達到最高，而對角線上之紐塞數則要到了兩端的角落處才會變大，且值得注意的是在紐塞數最大值的部分角落處會略大於 $\overline{ij}$ 線之邊界處。圖 4-6(b) 也可得到同樣的結論，在對角線上之速度向量由前述圖 4-3 可知較小，因此造成的熱傳效益也較小，在對角線上之紐塞數皆小於同一位置上之中線 $\overline{ij}$ 處。但值得注意的是最外面的四個角落之紐塞數反而最高，這是因為相比於其他位置，此處可接受來自兩個方向的冷流體流經加熱面，雖然速度較小，但是相較之下紐塞數還是較高。

圖 4-7 為比較不同修正雷利數下穩態下之底部紐塞數等高線圖。在圖 4-7(a) 中，修正雷利數最低的情況中，紐塞數呈現近圓形的分佈。但隨著修正雷利數增加，在四邊方向的紐塞數隨之上升，但是對角線部分則無明顯增加，因此造成了此種向對角線放射狀的圖形，但在最中心處仍然為矩形分佈。此結果說明了當修



正雷利數增加時，平板間高度增加，被加熱的流體由於自然對流效應，向上的流速與撞擊頂部平板後推出的速度也隨之上升，而由四邊吸入的流體被帶動，流量也隨之增加，但由對角線吸入的流體只是被四邊吸入所帶動，所以在此則無顯著的提升。

圖 4-8 為在不同的修正雷利下，面積平均之紐塞數隨時間的變化。在一開始時紐塞數極大，是因為加熱面直接接觸冷流體使的熱傳效果即佳，接下來紐塞數會達到一最低點，此時原本的正方形平行平板間之冷流體全部被加熱並往四周流出，因此熱傳較差。隨著流體的流出，外界冷流體開始由底面流入來補充，因此紐塞數又再上升，最後流出與吸入達到平衡後紐塞數即不再變化。觀察不同修正雷利數也可明顯看出當修正雷利越高，紐塞數即越高，且一開始震盪的幅度也越大。

圖 4-9 為本研究與 Turgut and Onur [40]之結果比較，其中由於文獻[40]的修正雷利數範圍為  $3.24 \times 10^4 < Ra^* < 4.36 \times 10^5$ ，部份小於本研究的修正雷利數。由圖中可看出本研究的修正雷利數為  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  時熱傳效益與[40]的實驗結果幾乎相同，而整體的趨勢也相近。

### 4.3 正方向平行平板頂部加熱自然對流

當加熱部份為正方形平行平板的頂面時，在頂部平板的流體被加熱後膨脹向外推出。在四周靠近頂部平板的開放性邊界上，流體因浮力而向上流出到外界空間，而在底部的開放性邊界上，流體會被吸入來補充頂部流出的部分。圖 4-10 為  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  時， $Z = 0.5$  截面上，加熱初期的暫態變化，分別為溫度場、壓力場及速度向量。圖中顯示的為左半部的流場狀態。在圖 4-10(a) 中，靠近頂部壁面的流體由於熱傳導的加熱而膨脹並向外流出，而壓力變化也從頂部中央向四周遞減。在頂部壁面上的溫度場呈現平行分佈的溫度層，為一典型的熱傳導模式。隨著時間增加，由圖 4-10(b) 可發現，流體開始由開放性邊界的四周被吸入，但僅限於下半部。吸入的流體與頂部流出的流體在靠近上半部處匯流並一起向外推出。在下半部的壓力分佈也可觀察到壓力變化由外向內遞減。而原本平行分佈的溫度層在靠近邊界處也隨著流體的吸入及推出的現象產生扭曲。當無因次時間達到  $t^* = 2.56 \times 10^{-4}$  時，在四周吸入的流體在下半部流入至平板中央處，再向上撞擊頂部平板，接著向外流出。此流場顯示了一完整的自然對流現象，而在邊界處扭曲的溫度層變化也更加明顯。

圖 4-11 呈現了修正雷利數  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  在  $Z = 0.5$  截面上之穩態速度向量、溫度場及壓力場的分佈。流體由下半部吸入並在上半部流出，而壓力方面，在  $x$  方向部分，上半部壓力由內向外遞減，因此流體由內向外推出，下半部壓力則由外向內遞減，流體由外向內吸入。在  $y$  方向部份，即為重力方向，頂部平板附近的流體壓力由頂部平板處遞減至下方平板。在這種情況下，壓力造成的推動力與流體流動方向相異，與一般的認知相反。造成此現象由兩個主要的原因，第一是由四周吸入的流體是由於頂部高速向外推出的流體所帶動而補充至平板間，第二則是由於在平板中央處浮力的影響。



為了說明此現象，圖 4-12 為  $X = 0.5$  及  $Z = 0.5$  處之壓力及浮力隨  $y$  方向的變化。在格點  $y$  及  $y+1$  之交界面上，壓力差如圖 4-12(b) 所示，可以下列方程式定義：

$$\Delta P = P_{y+1} - P_y \quad (4-7)$$

圖 4-11(a) 中可觀察到  $\Delta P$  皆為正，而速度向量卻顯示相反的向上方向。然而在計算浮力造成的作用力時，格點  $y$  所受的浮力是由  $\rho_0$  及  $\rho_y$  來決定，可表示為以下方程式：

$$\begin{cases} F_b = (\rho_0 - \rho_y)gV \\ f_b = F_b / A \end{cases} \quad (4-8)$$

$V$  為格點的體積， $f_b$  為浮力所造成對此格點的推力。因此，流體的流動方向會受到  $\Delta P$  及  $f_b$  的影響。在圖 4-12(d) 中，平板的下半部之浮力大於壓力差，因此流體向上移動。而在上半部中，雖然壓力差大於浮力，但在此由於流體膨脹向外的推力影響，此處流體繼續向上並隨之向外推出。此現象與底部加熱之正方形平行平板截然不同。

圖 4-13 為修正雷利數  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  時之三維流線分佈圖。由於正方形平行平板的設置，流線的分佈也相對的非常對稱。流體由底部吸熱並由頂部推出，但與圖 4-4 底部加熱相比，流體的整體速度相對小了許多，這是由於在頂部加熱的案例中，流體向外推出的驅動力是由頂部的加熱平板所提供，所以大部份速度的變化都發生在靠近上方加熱平板的區域，使得由四周吸入並向上的流體速度極小。

圖 4-14 為頂部加熱面在  $\overline{ij}$  線上之局部紐塞數分佈。在兩側的位置由於大部份從下方吸入的流體以及頂部平板觸受加熱膨脹的流體在此處達到最高速，因此有非常好的熱傳效益。相反的，靠近平板中間的位置處由於下方吸入的流體僅有少部份進入此處，速度也較低，高溫流體在此滯流，熱傳效果也較差。另外由不

同的修正雷利數可發現，當修正雷利數越大時則有較佳的熱傳效果。

此外，為了比較正方形平行板頂面的熱傳分佈，圖 4-15 為加熱面中線及對角線之局部紐塞數分佈及加熱面整體的局部紐塞數等高線分佈。由圖 4-15(a)可看出當距離平板中心點相同位置時，中線上之紐塞數幾乎等於對角線之紐塞數，而隨著半徑變大中線上之紐塞數上升，到在接近壁面處時中線上之紐塞達到最高並甚大於對角線之紐塞數。然兒，對角線上之紐塞數則到了兩端的角落處急劇增大，且甚高於  $\bar{i}j$  線之邊界處。圖 4-15(b)也可得到同樣的結論，在角落處之紐塞數甚高於其餘各點，這是由於在此除了流體速度極高外，又同時接受來自兩個方向的流體向外流動，因此熱傳效益也會最高，此現象也與底部加熱有些許不同。

圖 4-16 為不同修正雷利數頂部加熱面之局部紐塞數等高線圖。在此可發現不同修正雷利數時，紐塞數的分佈型式幾乎不變，與底部加熱之情形迥然不同，這是由於頂部加熱的案例中，流體的驅動力為在頂部平板處的高溫流體被加熱後向外膨脹，並帶動下方及四周的流體向上流動，因此當平板的間距增加時，整體的流動方式並未產生太大的改變，此種特性在質量流率上也產生了相當的影響。

圖 4-17 為底部加熱與頂部加熱之質量流率比較。質量流率的定義如下式：

$$\dot{m} = \int_{\Lambda} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Lambda} \quad (4-9)$$

$\mathbf{v}$  代表流出平板的速度向量， $\Lambda$  則為開放性邊界上的單位面積。由圖中可看出在修正雷利數  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  時，底部加熱之質量流率大於頂部加熱之質量流率。而當修正雷利數增加時，底部加熱之質量流率明顯上升，但頂部加熱之質量流率幾乎維持不變。這是由於在底部加熱的案例中，隨著修正雷利數增加，自然對流的效益越大，整體吸入及流出平板間的流體也相對增多。但是在頂部加熱的案例中，流體向外推出的驅動力是頂部加熱的平板，流體受熱膨脹後向外推出。當平板的間距越大，修正雷利數越高，但流體向外推出的驅動力卻不變，僅是增加下方吸入空氣的面積，因此質量流率也不會相對的提升。

相較於質量流率的巨大差異，平均紐塞數的結果則小的多。圖 4-18 為底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數比較。雖然隨著修正雷利數的上升，底部加熱與頂部加熱的平均紐塞數差異逐漸變大，但是基本上都維持著修正雷利數越大則平均紐塞數越大的情形。但與圖 4-17 相比，頂部加熱以甚低於底部加熱的質量流率卻能造成相較之下極大的熱傳效率，這是由於兩者基本上的熱傳機制的差異。底部加熱的主要熱傳現象是由週遭吸入的流體流過加熱平板後向上把熱量帶走，因此有一大部份吸入的流體其實於熱傳的效益不大。但頂部加熱則是由週遭吸熱的流體有如噴流般向上衝擊頂部的加熱平板後再向四周流動帶走熱量。圖 4-19(a) 和(b)顯示了這兩種不同的熱傳方式的速度來說明此差異性。在圖 4-19(a) 中，底部加熱沿著  $X$  方向的  $u$  速度在邊界上最大，越往中央處越小，因此也如圖 4-5 中所示，熱傳效益隨著位置於遞減。圖 4-19(b) 中，頂部加熱的差異則在於除了靠近邊界處有極大的  $v$  速度外，其餘中央部分並未隨著位置而減少，如圖 4-14 所示，熱傳效益在邊界處以外幾乎是相等的，原因即在於這種特殊的熱傳機制。

為了驗證此種混合性邊界應用於正方形平行平板頂部加熱自然對流的正確性，與 Manca 和 Naradini[41] 的實驗結果做比對。由於此文獻之物理模型與本研究有些微差異，因此重新設定了一物理計算模型以符合實驗的配置。如圖 4-20 所示，頂部加熱面為  $ABFE$ ，加熱條件為均勻熱通量加熱， $ABDC$  及  $EFHG$  為固體壁面， $AEGC$  及  $BFHD$  則為開放性邊界。在此虛擬計算區域則僅剩  $+x$  及  $-x$  方向。圖 4-21 顯示了數值計算與實驗的相比結果，在平均紐塞數部分，數值計算僅稍大於實驗的結果，證明此種混合性邊界有極高的準確性。

#### 4.4 高雷利數正方形平行平板自然對流

在前述章節中計算了不同加熱位置的正方形平行平板自然對流的案例，並對這兩種熱傳機制及物理現象做了詳細的討論說明與驗證。在本章節中將繼續討論在高雷利數時，此種物理模型會產生何種現象。表 4-2 中詳列了高雷利數的計算參數，最高的修正雷利數為  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$ 。

為了觀察高雷利數自然對流之流場不穩定現象，此種類似層流轉變為紊流的過渡變化，可以一判斷參數 Q-criterion[42]來表示。Q-criterion 可定義出在流場中產生旋轉位置的一種近似渦流的現象，如以下方程式所示：

$$Q = -\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} - \Omega_{ij}\Omega_{ij}) \quad (4-10)$$

其中

$$\begin{cases} S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = Sym\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = Asym\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \end{cases}$$

當 Q-criterion 的數值為正，代表此位置旋轉的現象大於拉伸(strain)及剪應力(shear)並主導了流場的變化。因此，這些位置將被視為渦流封包(vortex envelope)。由於越靠近渦流(vortex)中央的渦度(vorticity)越高，Q 在渦流的核心中勢必要維持大於零的數值，因此不穩定結構可用大於零的 Q 值來做為良好的判斷因子。

在高雷利數各個案例中，流場之變化皆與低雷利數時相近。然而其中於底部加熱案例中，當雷利數為  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  時，底部加熱的正方形平行平板之流場會開始產生一種不穩定的搖擺現象，而頂部加熱則否。圖 4-22 為此不穩定案例中， $Z = 0.5$  及對角線截面之暫態溫度場變化，無因次時間分別為  $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、 $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、 $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$  及  $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$ 。在  $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$  之前，溫度場為一穩定狀態，與前述章節的現象相似。但從  $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$  開始，穩定的溫度場開



始搖擺產生不穩定的狀態。隨著時間的增加，不穩定現象越來越明顯，擺動也出現了隨機的行為模式而無法預測。這種由浮力所造成的不穩定現象，可類比為一噴流的模式。高溫流體在平板中間區域有如噴流向上衝擊，並在此處產生輕微的晃動。

圖 4-23 呈現了三維之等溫面變化，分別為溫度  $T=360\text{K}$ 、 $410\text{K}$  及  $460\text{K}$ ，無因次時間為  $t^* = 4.3 \times 10^{-1}$ 。圖中可發現，搖擺現象僅發生於較低溫的區域，而高溫區域則相對較為穩定。

圖 4-24 為不同無因次時間下之流線分佈。在初期時流場呈現一對稱的狀態，但隨著時間增加，靠近頂部平板附近之流線因為流場的不穩定而產生了偏移的情形，流體也不再從最頂端流出平板，而是隨機在上半部不同高度流出。

為了判斷流場的不穩定狀態，圖 4-25 以  $Q$ -criterion 之等位面來觀察此現象。在  $Q=500$  的數值下，隨著時間增加， $Q$  之等位面分佈也隨之增加且呈現不規則分佈，顯示流場在此已發展出不穩定的狀態。

圖 4-26 為在  $X = 0.5$  及  $Z = 0.5$  之時間平均雷諾數隨高度  $Y$  之變化，時間平均雷諾數定義如下：

$$\text{Re}_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho V_{\text{mag}} l_1}{\mu(T)} dt \quad (4-11)$$

其中  $V_{\text{mag}}$  為合成速度  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ 。為了判斷在不穩定流場發生後之雷諾數分佈情形，時間區間定義為無因次時間  $t_1 = 2.76 \times 10^{-1}$  到  $t_2 = 4.23 \times 10^{-1}$ ，為不穩定現象開始發生後直到動態平衡的時間。圖中顯示了在  $Y = 0.75$  的位置，雷諾數已達到 1000，在此雷諾數下，流場出現不穩定現象是可預期的。而此位置也與前述圖 4-24 及圖 4-25 開始發生不穩定現象的位置吻合。

雖然在此流場中存在著不穩定的現象，但是觀察其紐塞數的變化，圖 4-27 為加熱面中線及對角線之時間平均局部紐塞數分佈。在時間平均的情況下，局部

紐塞數呈現了對稱的狀況，說明了流場的不穩定現象的程度是一種隨機的量值，因此在長時間的平均過後，顯示了與低雷利數相似的分佈情況。

相較於時間平均的紐塞數分佈，圖 4-28 說明了加熱面不同位置之局部紐塞數隨時間的變化。A、B 及 C 三點分別為離加熱平板中央不同距離之位置，可觀察到隨著距離越遠，紐塞數之震盪頻率越高，震幅也越大，與圖 4-23 及圖 4-24 的溫度變化相符。

觀察比較底部加熱與頂部加熱的所有案例，在頂部加熱時，即使在最修正高雷利數的狀況，流場還是呈現一種穩定的狀態。這是由於這兩種流場中驅動力造成熱傳機制的差異。在底部加熱中，隨著正方形平行平板的間距增大，底部被加熱的流體因浮力作用向上流動，速度也隨之上升，當達到一臨界雷諾數時，就逐漸由層流的狀況過渡為紊流的形式，因此不穩定現象也隨之產生。但在頂部加熱的案例中，由於能量的交換僅限於頂部區域，即使平板間距增加，頂部流體受到壓力差與浮力的影響，始終保持穩定向外推出的狀態，因此相對雷利數的提升不會影響此流場的穩定性。

圖 4-29 為所有案例中底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數隨修正雷利數的變化圖。隨著修正雷利數增加，兩者的平均紐塞數皆上升，但是頂部加熱上升的幅度小於底部加熱，這是由於相對頂部加熱的質量流率沒有隨著修正雷利數增加而提升，與圖 4-17 及圖 4-18 結論相近。

圖 4-30 為為本研究與 Turgut and Onur [40]之結果比較。文獻[40]的修正雷利數範圍為  $3.24 \times 10^4 < Ra^* < 4.36 \times 10^5$ ，部份小於本研究的修正雷利數。由圖中可看出本研究的修正雷利數為  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  時熱傳效益與[40]的實驗結果幾乎相同。而隨著修正雷利數增加，紐塞數也呈現一合理的上升現象。

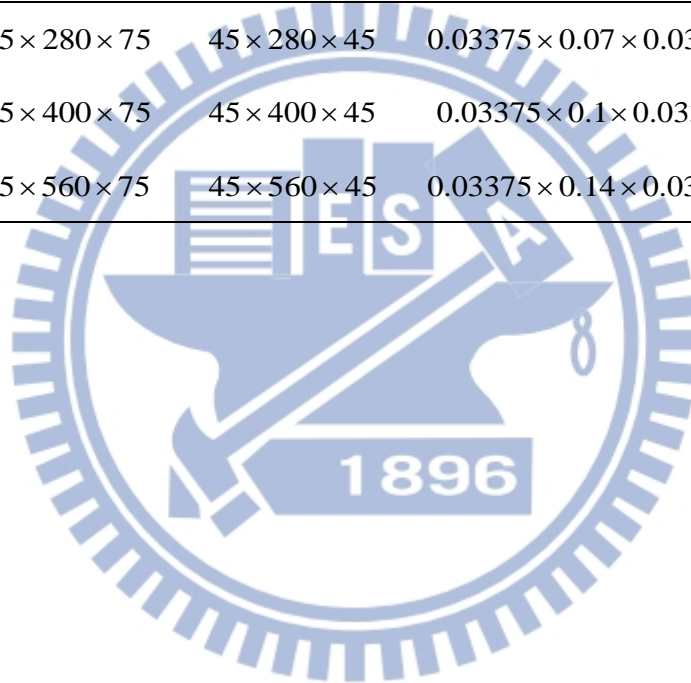
表 4-1 計算參數

加熱位置	Computation domain grid numbers	Physical domain grid numbers	Domain sizes $x(m) \times y(m) \times z(m)$	$Ra^*$
底部平板	$100 \times 40 \times 100$	$70 \times 40 \times 70$	$0.035 \times 0.01 \times 0.035$	$1.72 \times 10^5$
	$100 \times 120 \times 100$	$70 \times 120 \times 70$	$0.035 \times 0.03 \times 0.035$	$1.55 \times 10^6$
	$100 \times 200 \times 100$	$70 \times 200 \times 70$	$0.035 \times 0.05 \times 0.035$	$4.31 \times 10^6$
頂部平板	$100 \times 40 \times 100$	$70 \times 40 \times 70$	$0.035 \times 0.01 \times 0.035$	$1.72 \times 10^5$
	$100 \times 120 \times 100$	$70 \times 120 \times 70$	$0.035 \times 0.03 \times 0.035$	$1.55 \times 10^6$
	$100 \times 200 \times 100$	$70 \times 200 \times 70$	$0.035 \times 0.05 \times 0.035$	$4.31 \times 10^6$



表 4-2 高雷利數之計算參數

加熱位置	Computation domain grid numbers	Physical domain grid numbers	Domain sizes $x(m) \times y(m) \times z(m)$	$Ra^*$
底部平板	$75 \times 280 \times 75$	$45 \times 280 \times 45$	$0.03375 \times 0.07 \times 0.03375$	$8.15 \times 10^6$
	$75 \times 400 \times 75$	$45 \times 400 \times 45$	$0.03375 \times 0.1 \times 0.03375$	$1.66 \times 10^7$
	$75 \times 560 \times 75$	$45 \times 560 \times 45$	$0.03375 \times 0.14 \times 0.03375$	$3.26 \times 10^7$
頂部平板	$75 \times 280 \times 75$	$45 \times 280 \times 45$	$0.03375 \times 0.07 \times 0.03375$	$8.15 \times 10^6$
	$75 \times 400 \times 75$	$45 \times 400 \times 45$	$0.03375 \times 0.1 \times 0.03375$	$1.66 \times 10^7$
	$75 \times 560 \times 75$	$45 \times 560 \times 45$	$0.03375 \times 0.14 \times 0.03375$	$3.26 \times 10^7$



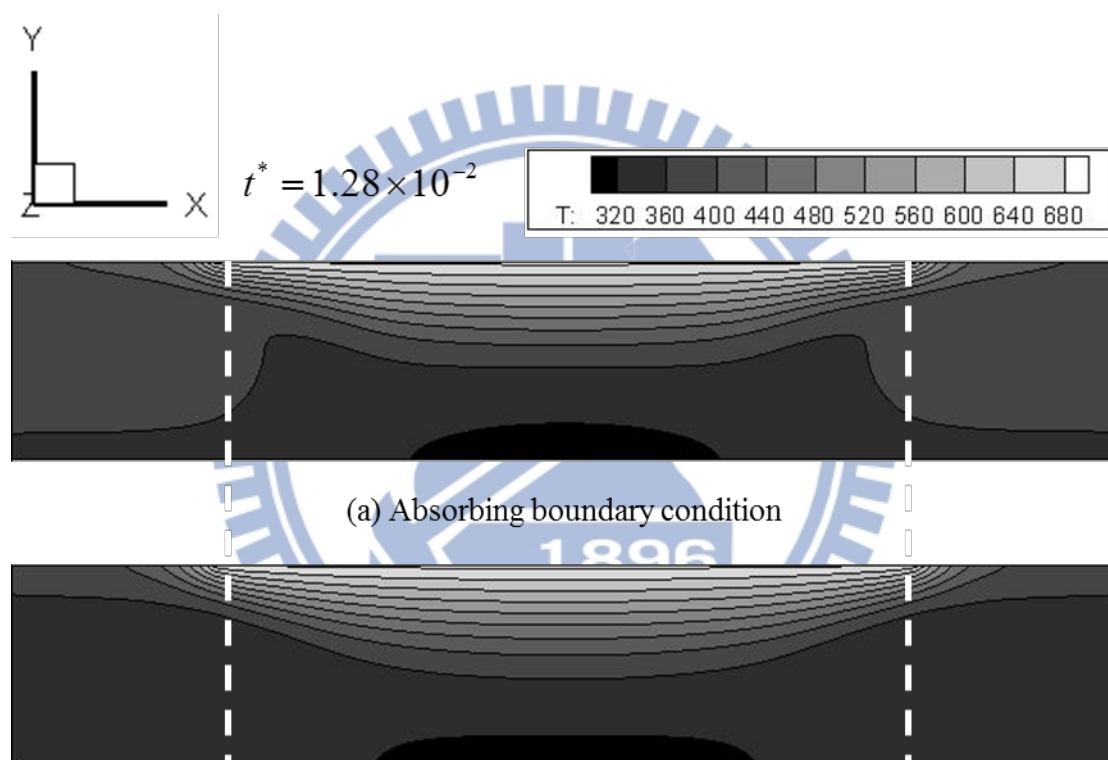
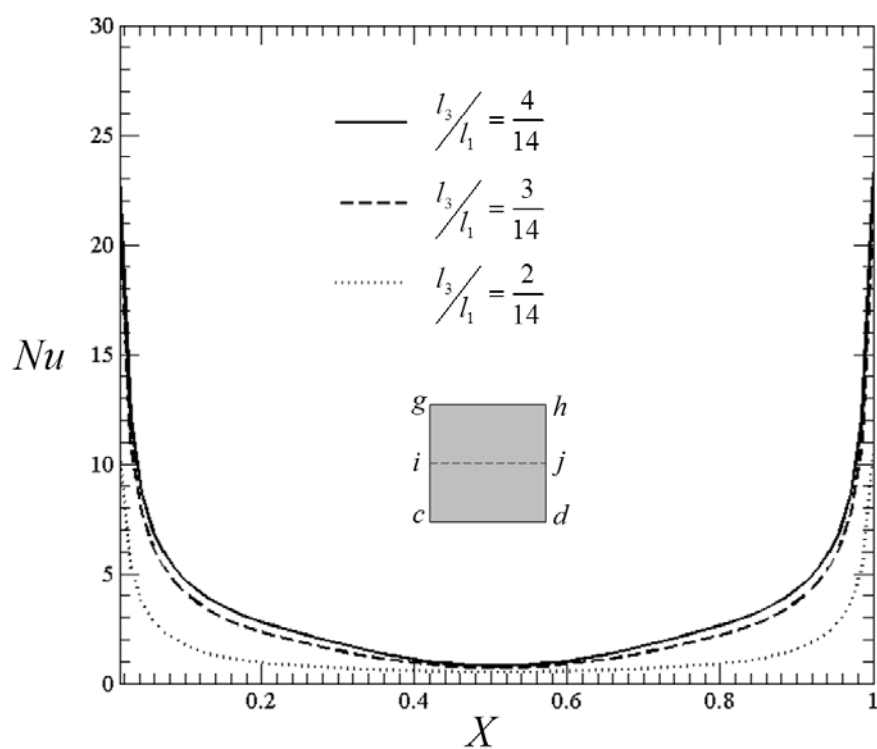
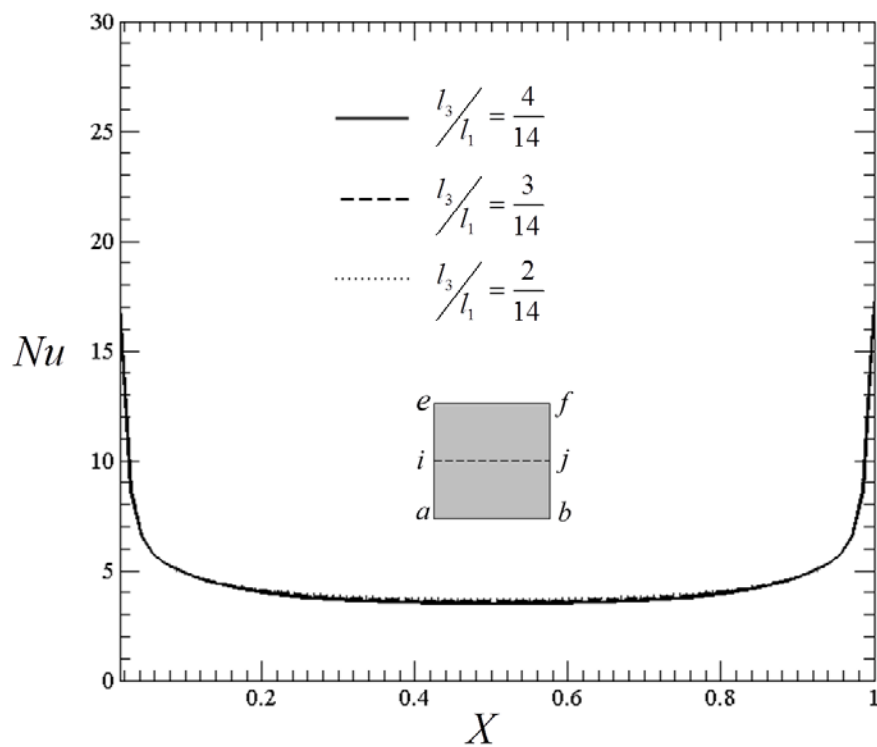


圖 4 - 1 頂部加熱不同邊界條件之暫態溫度場比較， $Ra^* = 1.72 \times 10^5$

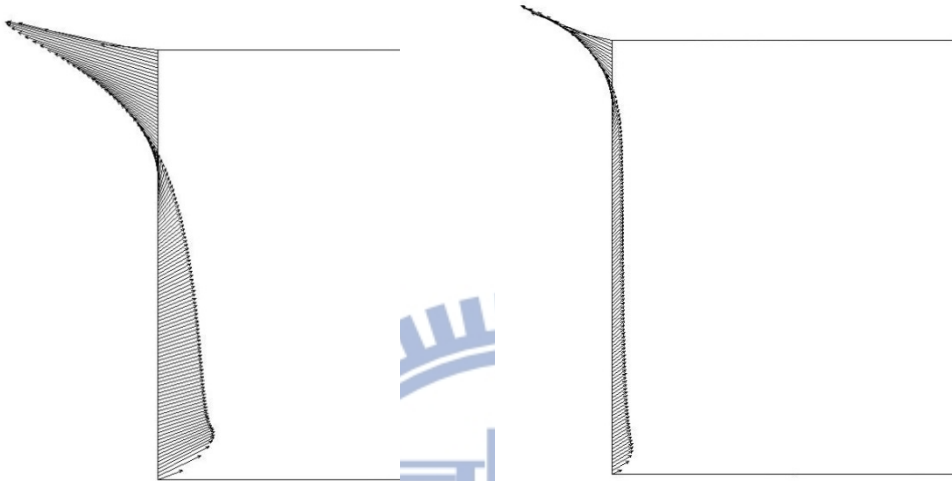
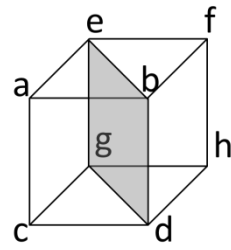
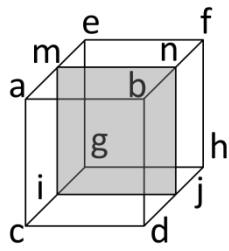


(a)底部加熱



(b)頂部加熱

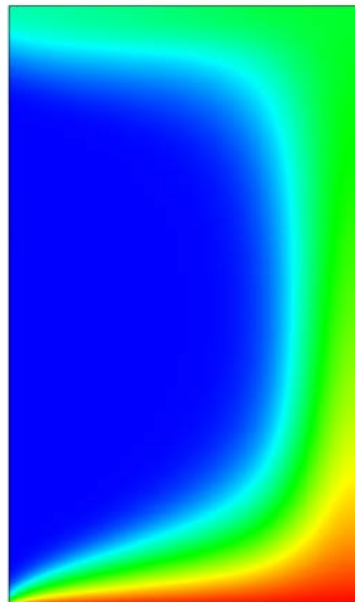
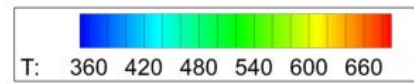
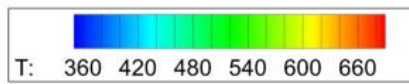
圖 4 - 2 吸收性邊界網格測試結果， $Ra^* = 1.72 \times 10^5$



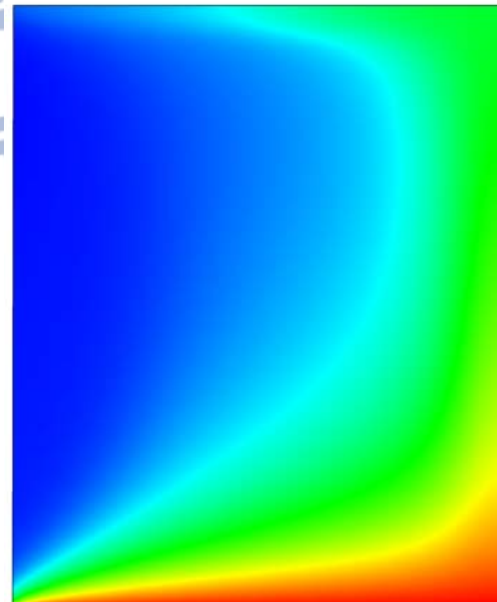
(a)

(b)

Velocity vectors



(c)



(d)

## Thermal field

圖 4 - 3 底部加熱穩態下  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  時之速度向量與溫度場

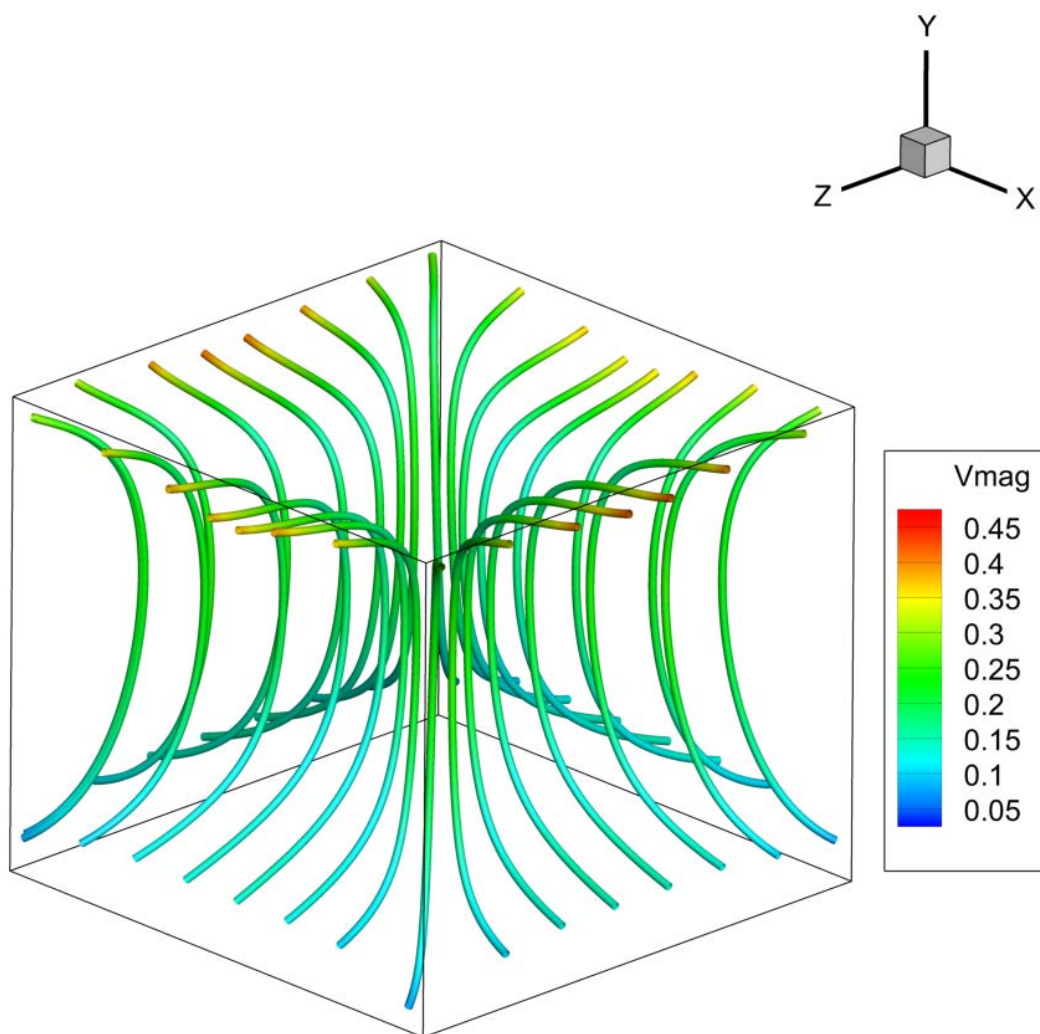


圖 4 - 4 底部加熱穩態下  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  時之流線分佈

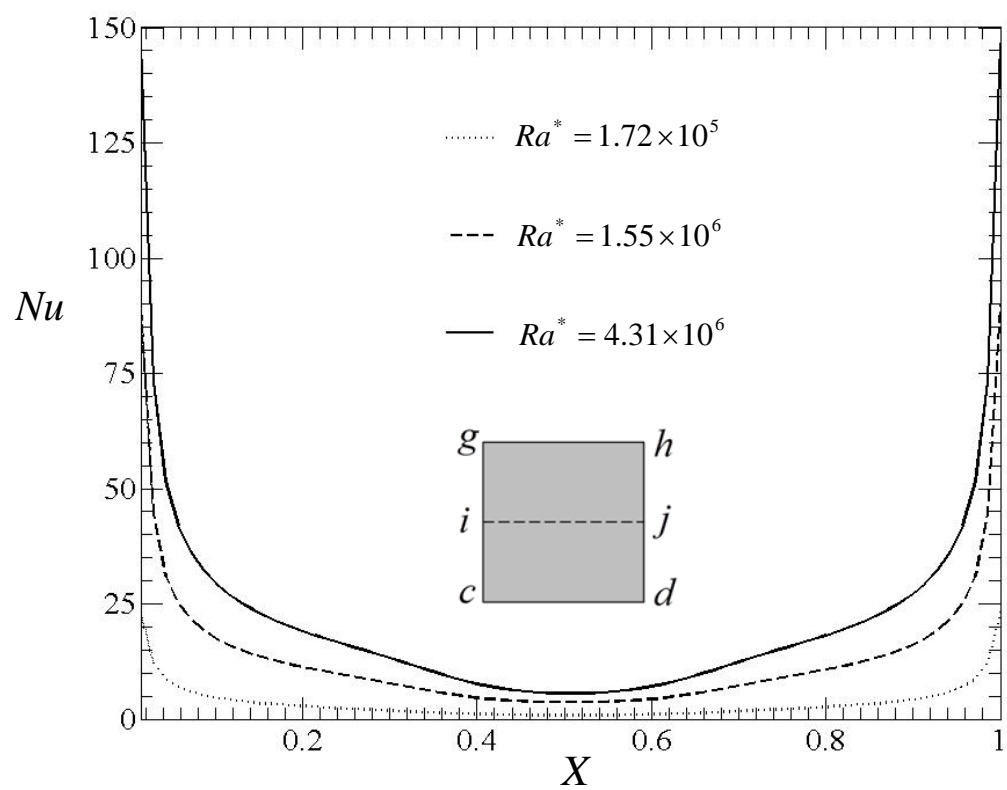
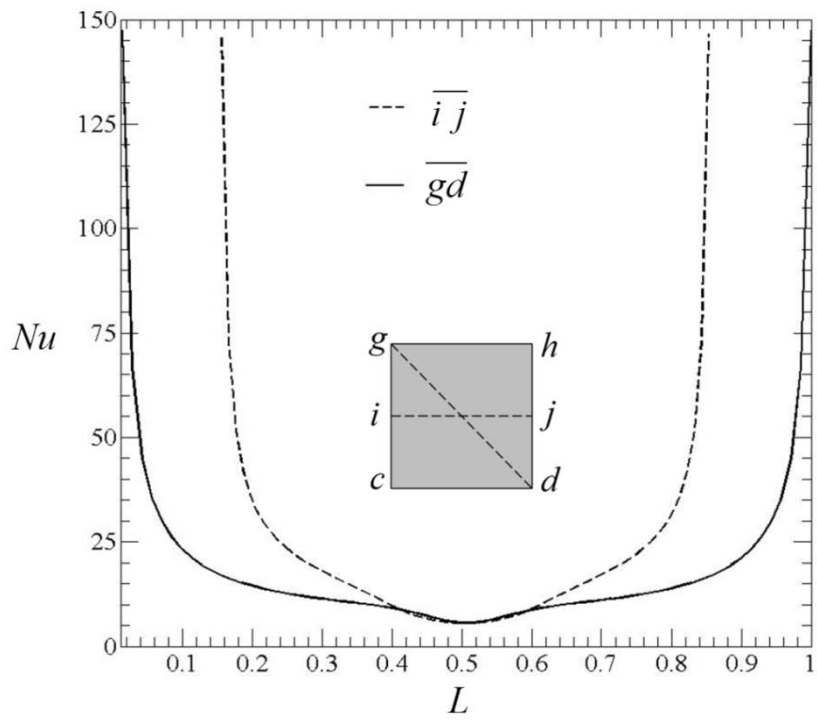
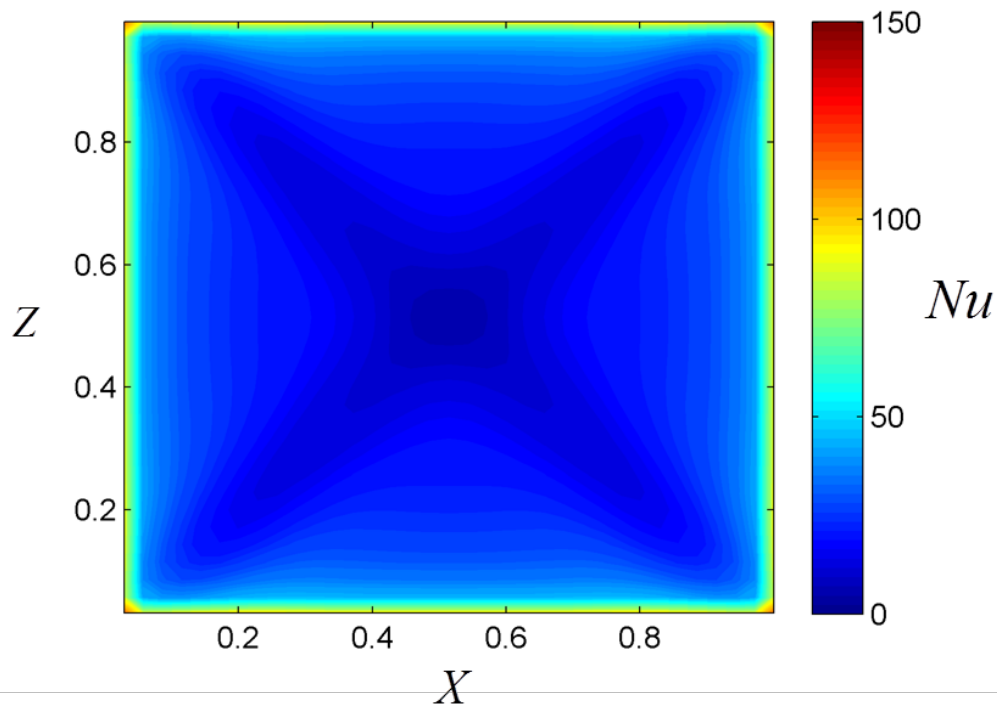


圖 4 - 5 底部加熱穩態下不同修正雷利數時之局部紐塞數沿  $\overline{ij}$  之分佈



(a)



(b)

圖 4 - 6 底部加熱穩態下  $Ra^* = 4.31 \times 10^6$  (a)沿  $\overline{ij}$  及  $\overline{gd}$  之局部紐塞數分佈(b)底

部加熱面之局部紐塞數等高線圖



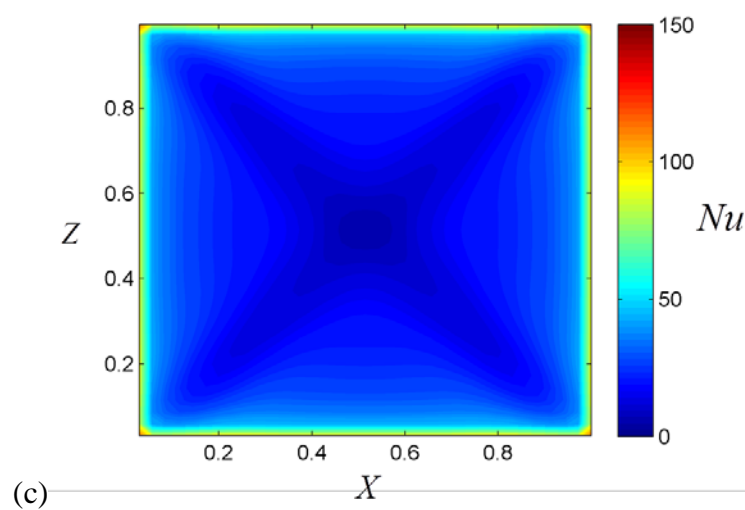
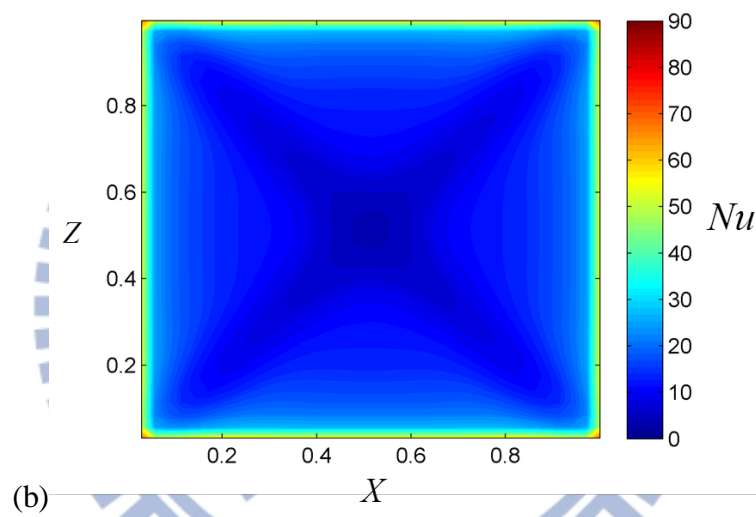
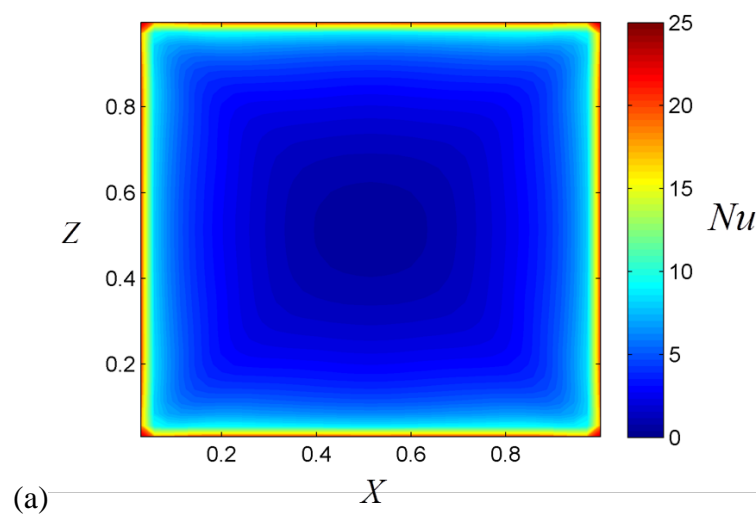


圖 4 - 7 不同修正雷利數底部加熱面之局部紐塞數等高線圖 (a)  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$

(b)  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  (c)  $Ra^* = 4.31 \times 10^6$

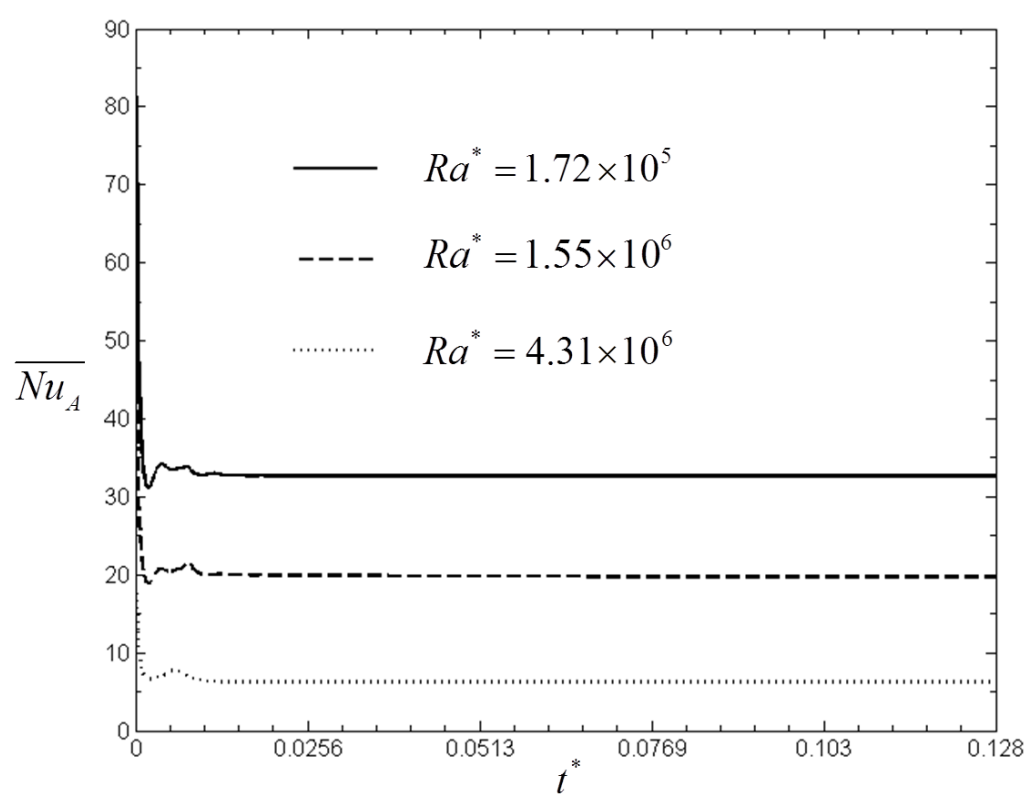


圖 4 - 8 不同修正雷利數之面積平均紐塞數隨時間變化圖

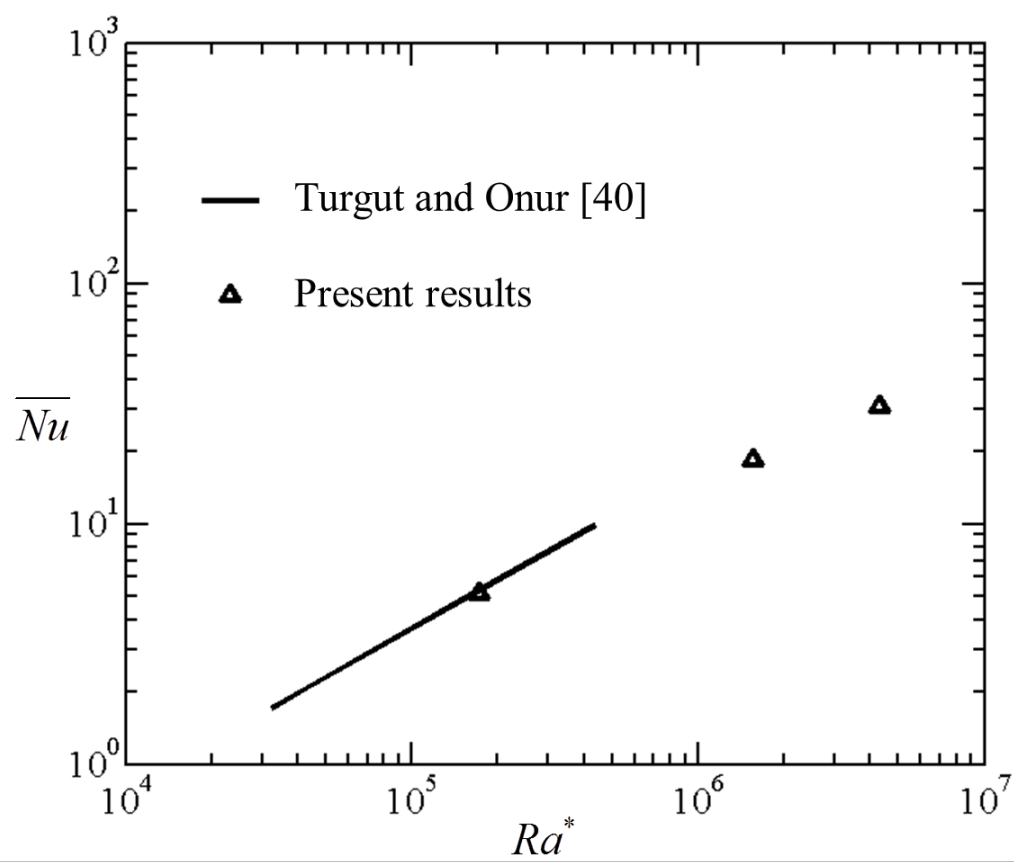


圖 4 - 9 本研究之平均紐塞數與文獻[40]之結果比較

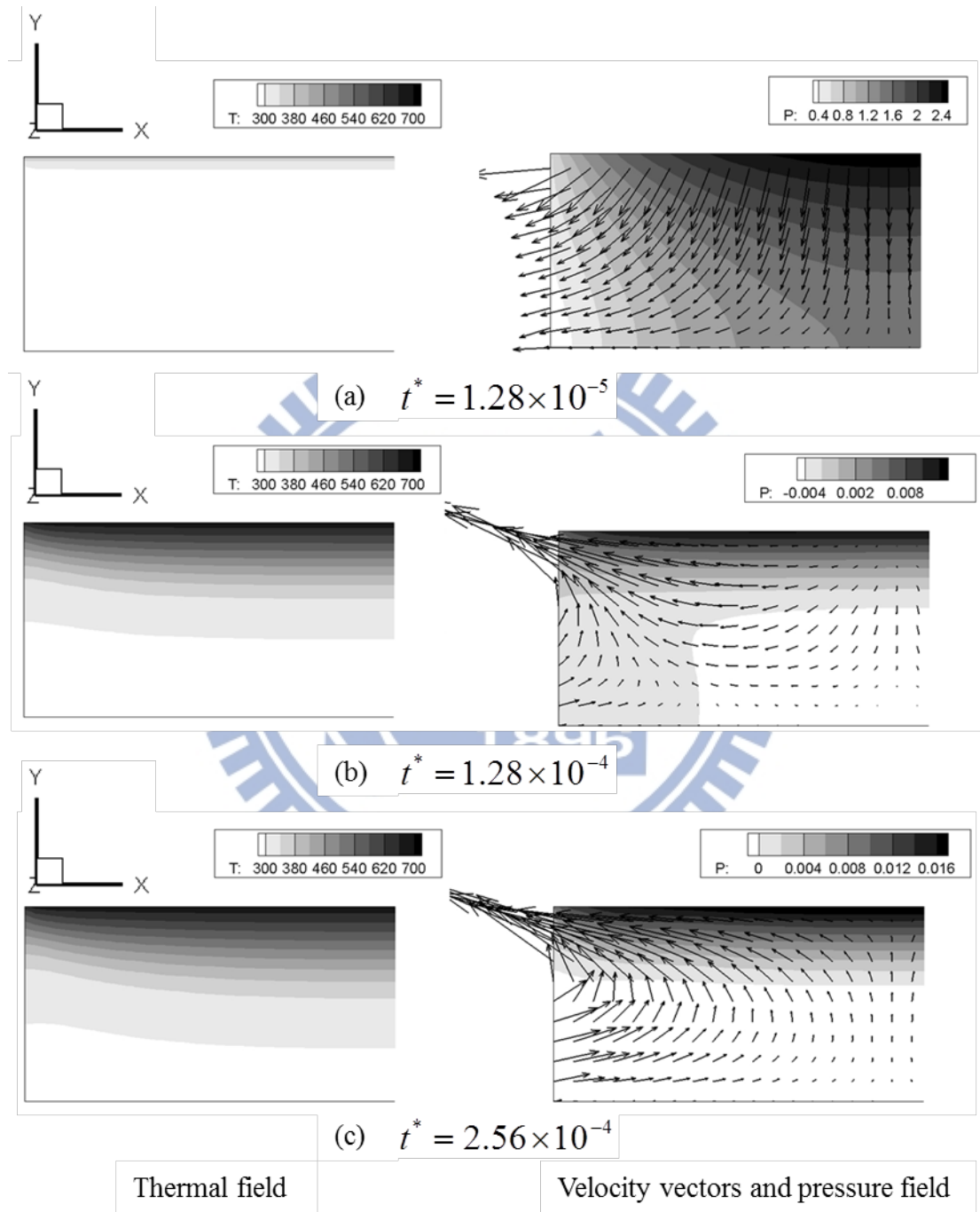


圖 4 - 10 頂部加熱修正雷利數  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  在暫態初期之溫度場、壓力場及速度向量

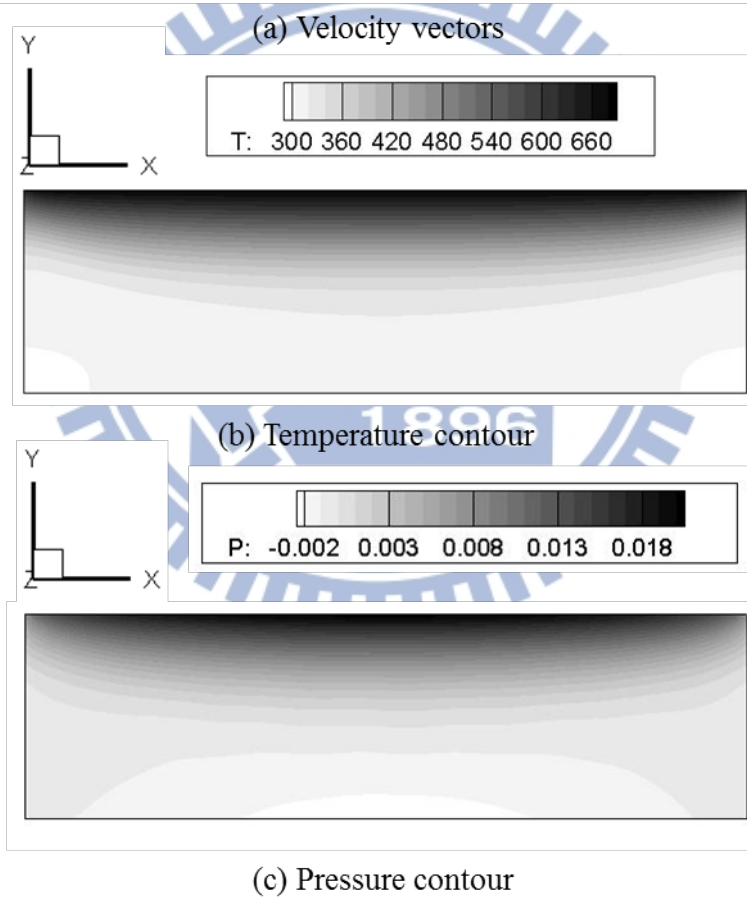
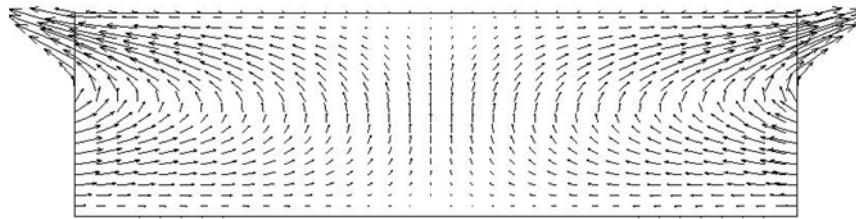


圖 4 - 11 頂部加熱修正雷利數  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  在穩態時速度向量、溫度場及壓力場

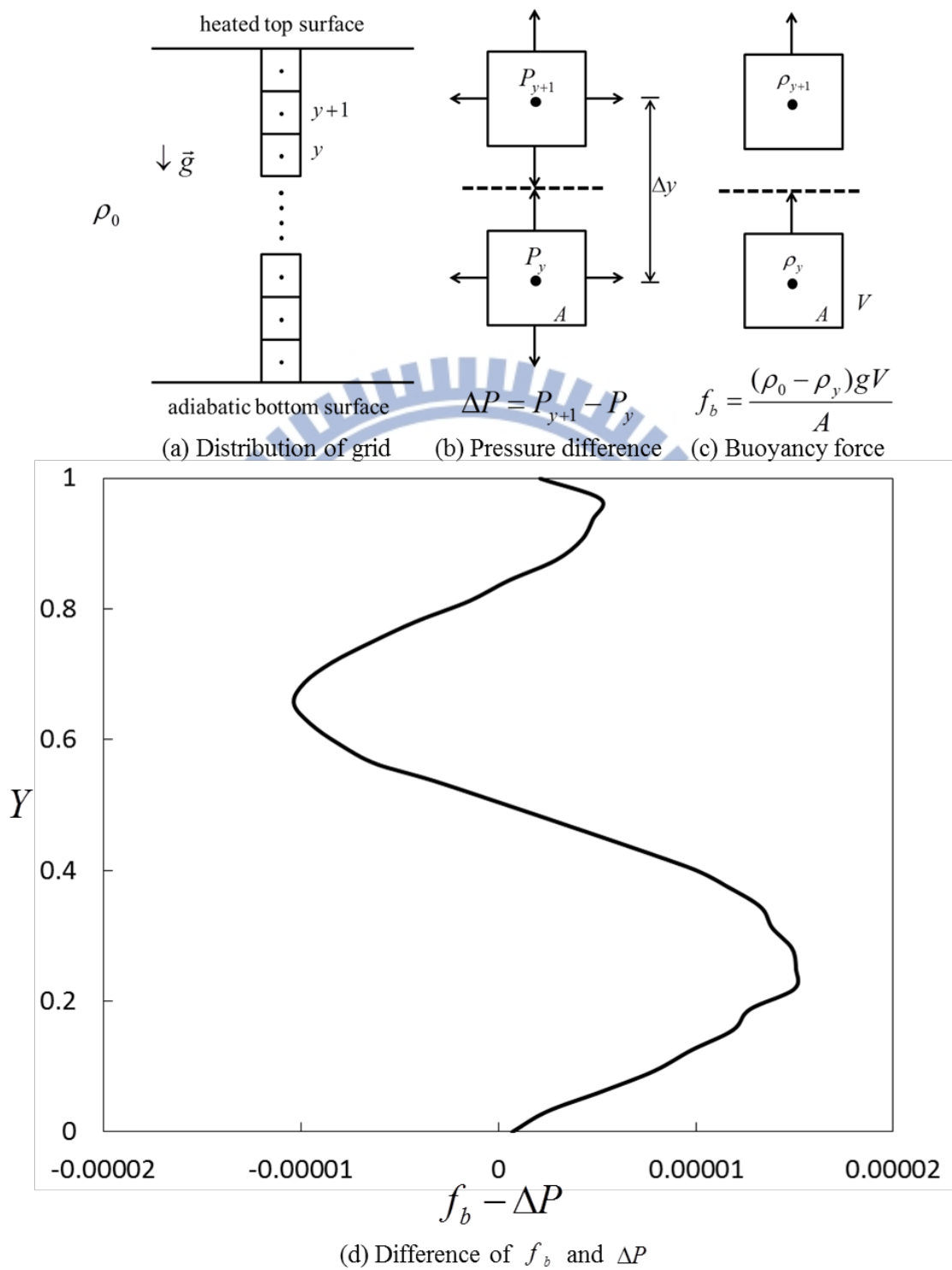


圖 4 - 12 頂部加熱修正雷利數  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$  時，平板中央處  $X = 0.5$ ， $Z = 0.5$  處

之壓力及浮力變化

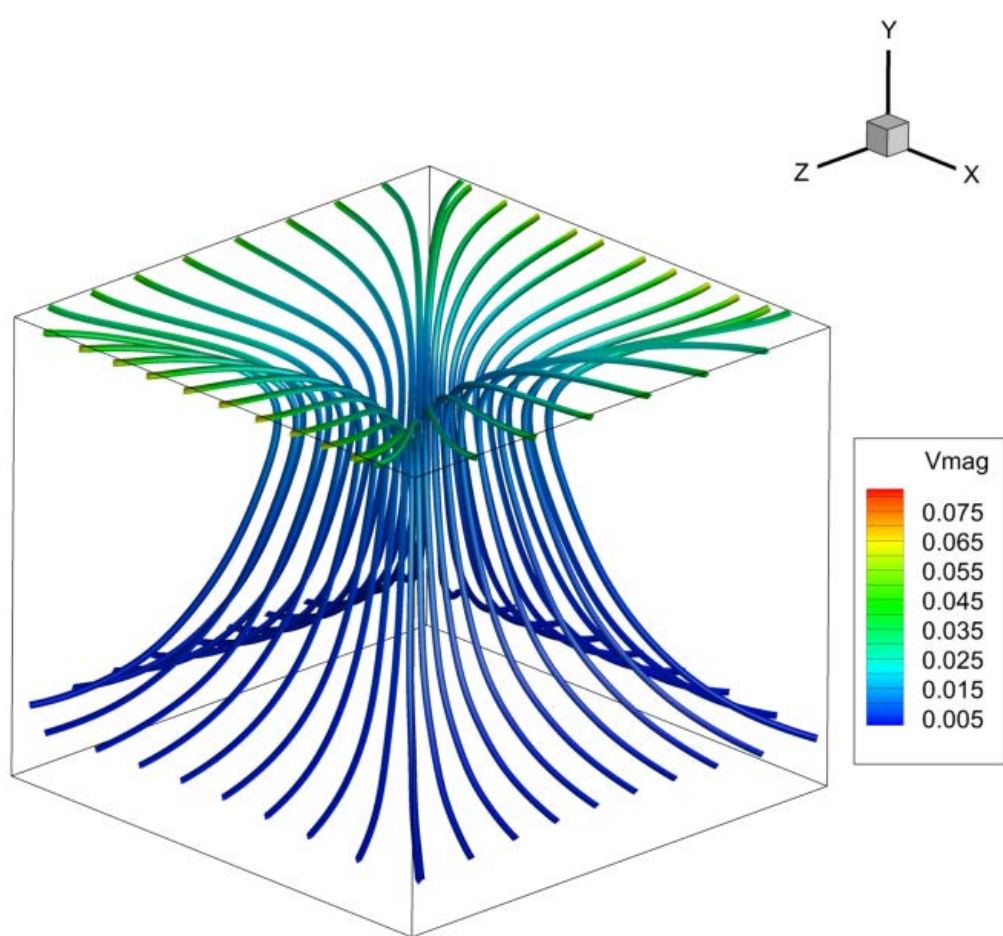


圖 4 - 13 頂部加熱修正雷利數  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  之流線分佈



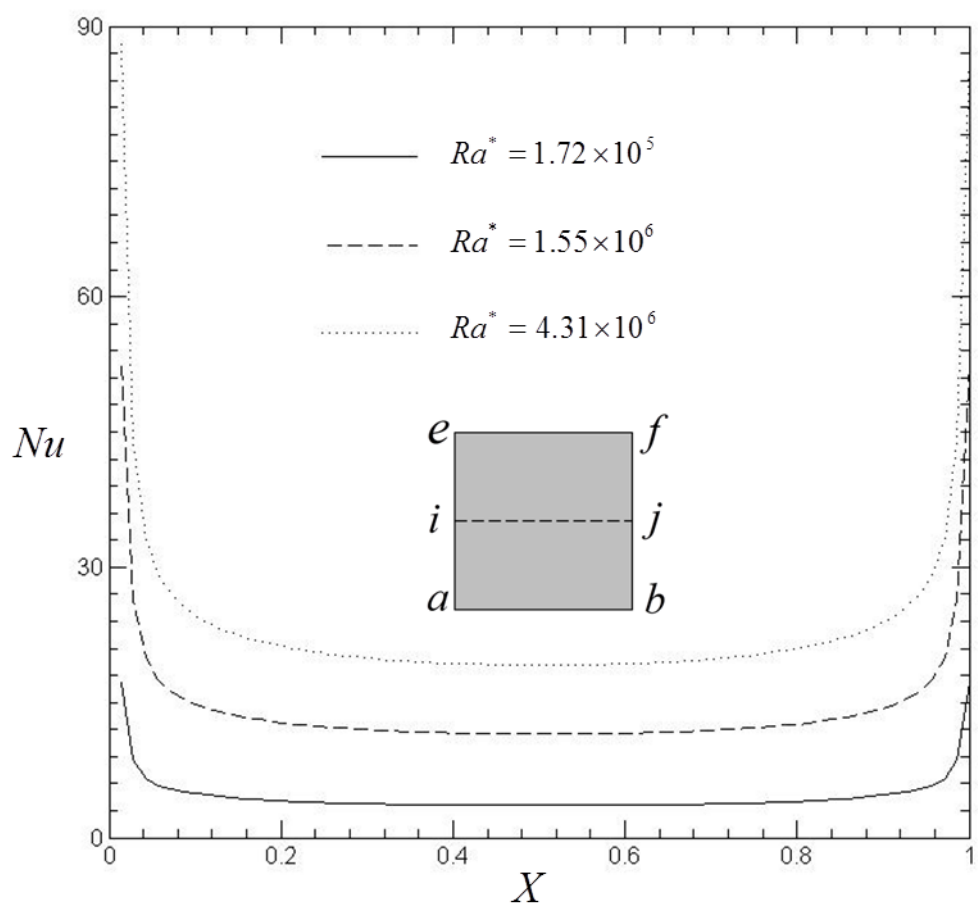
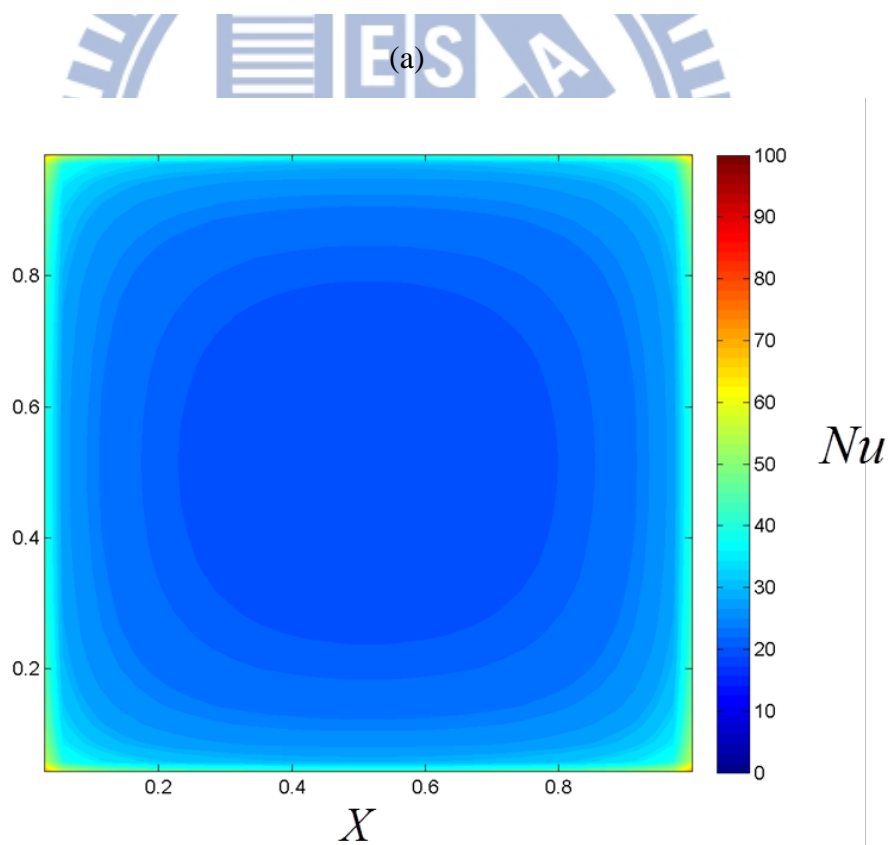
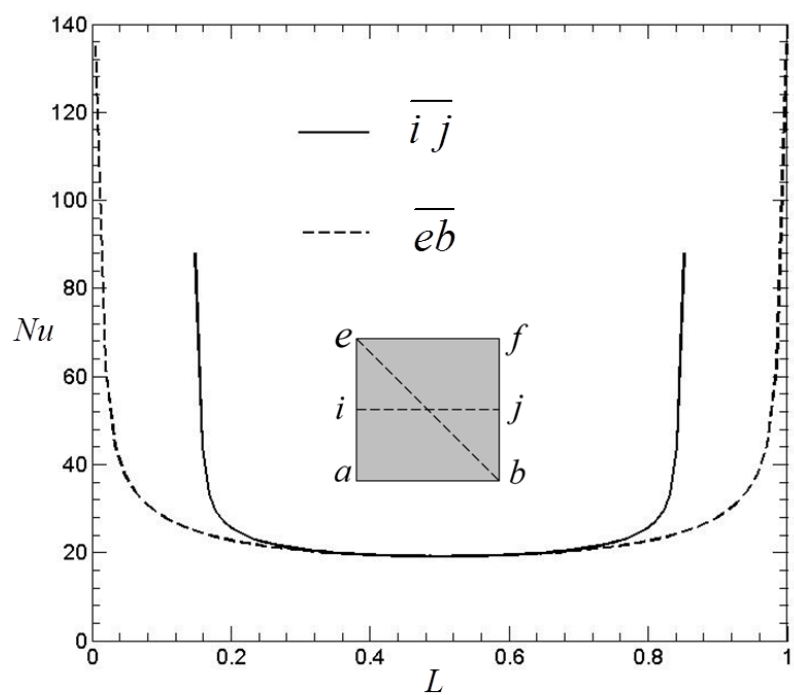


圖 4 - 14 頂部加熱穩態下不同修正雷利數時之局部紐塞數沿  $\overline{ij}$  之分佈



(b)

圖 4 - 15 頂部加熱穩態下  $Ra^* = 4.31 \times 10^6$  (a)沿  $\overline{ij}$  及  $\overline{gd}$  之局部紐塞數分佈(b)底

部加熱面之局部紐塞數等高線圖

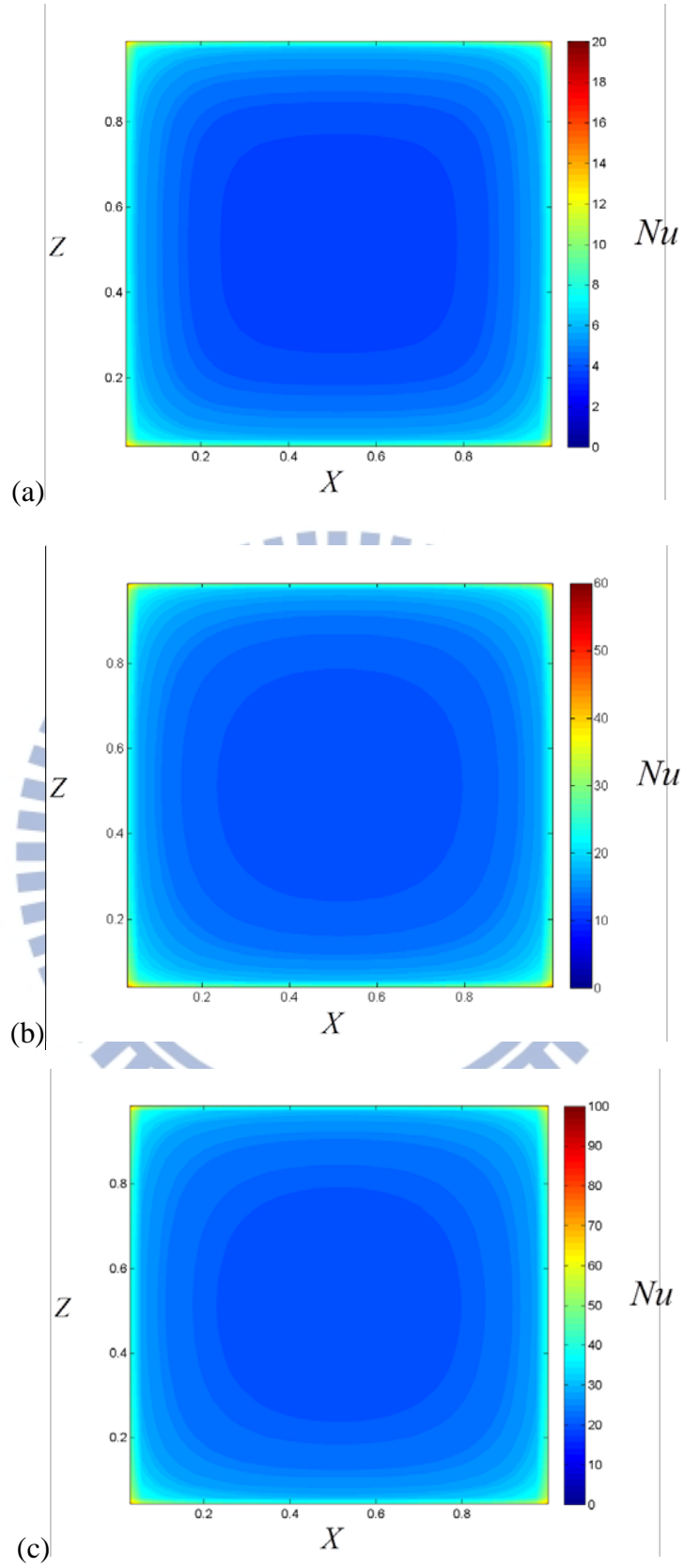


圖 4 - 16 不同修正雷利數頂部加熱面之局部紐塞數等高線圖 (a)  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$

(b)  $Ra^* = 1.55 \times 10^6$  (c)  $Ra^* = 4.31 \times 10^6$

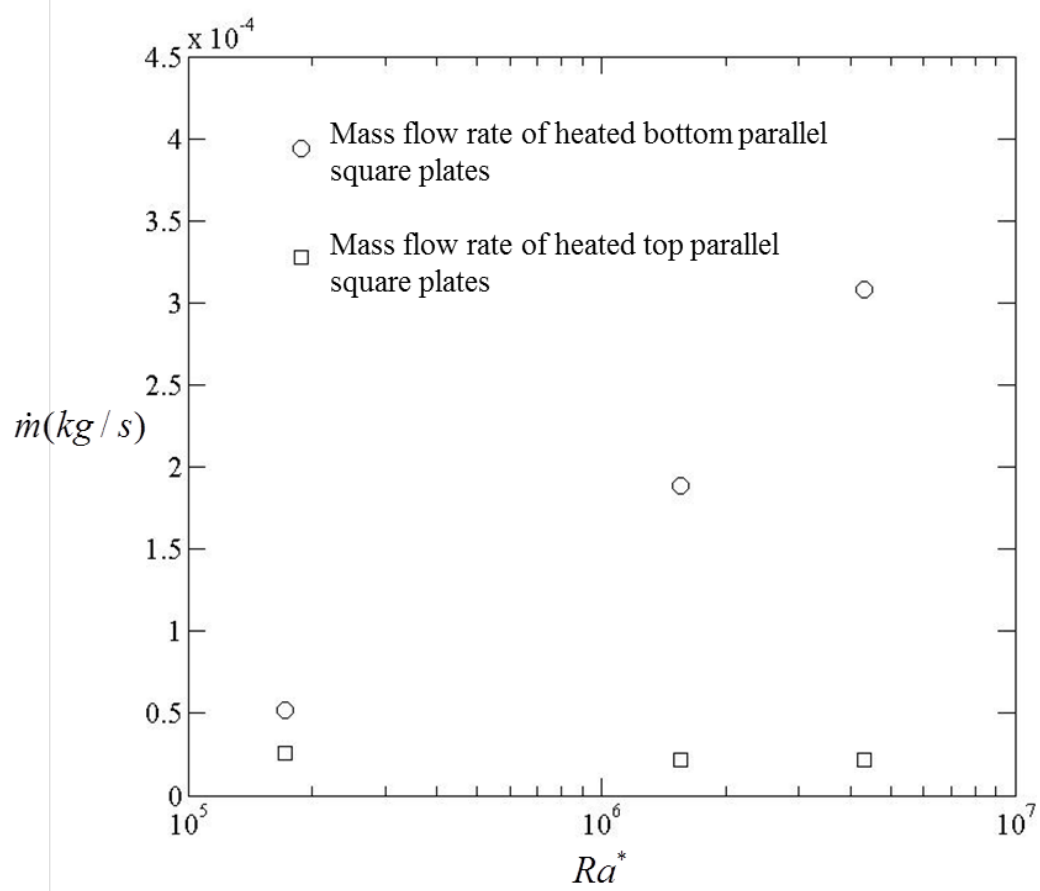


圖 4 - 17 底部加熱與頂部加熱之質量流率比較

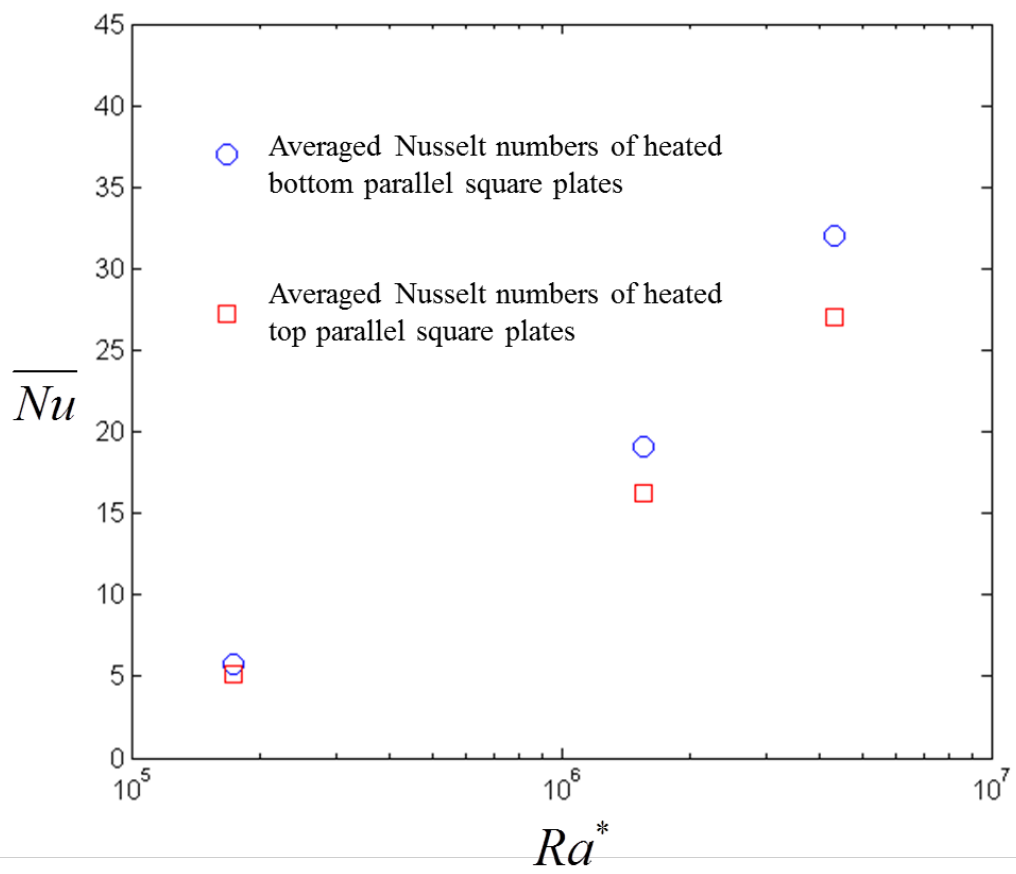


圖 4 - 18 底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數比較

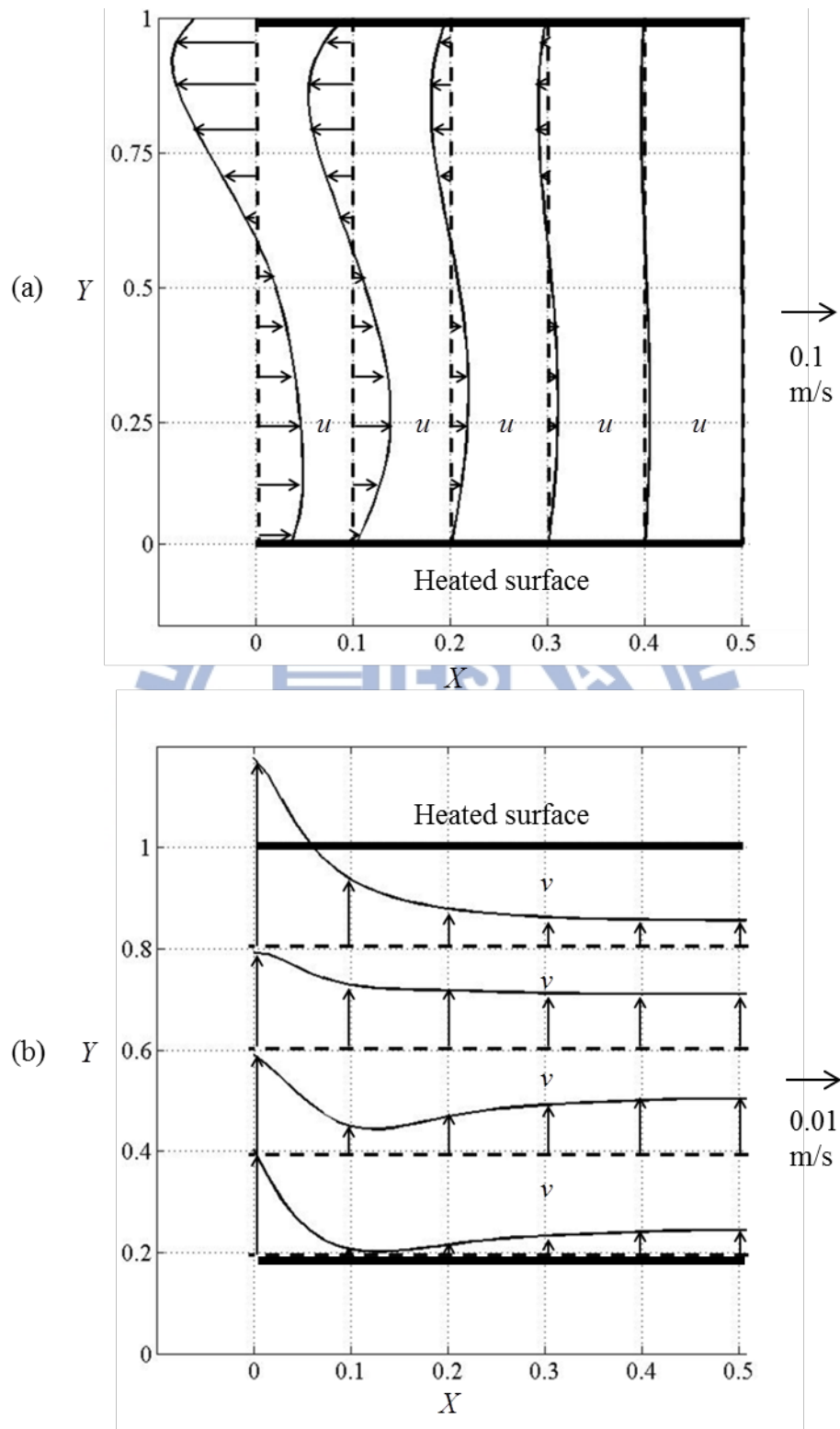


圖 4 - 19 速度向量分佈(a)底部加熱沿著  $X$  方向變化的  $u$  速度及(b)頂部加熱沿著  $Y$

方向變化的  $v$  速度，修正雷利數為  $Ra^* = 1.72 \times 10^5$

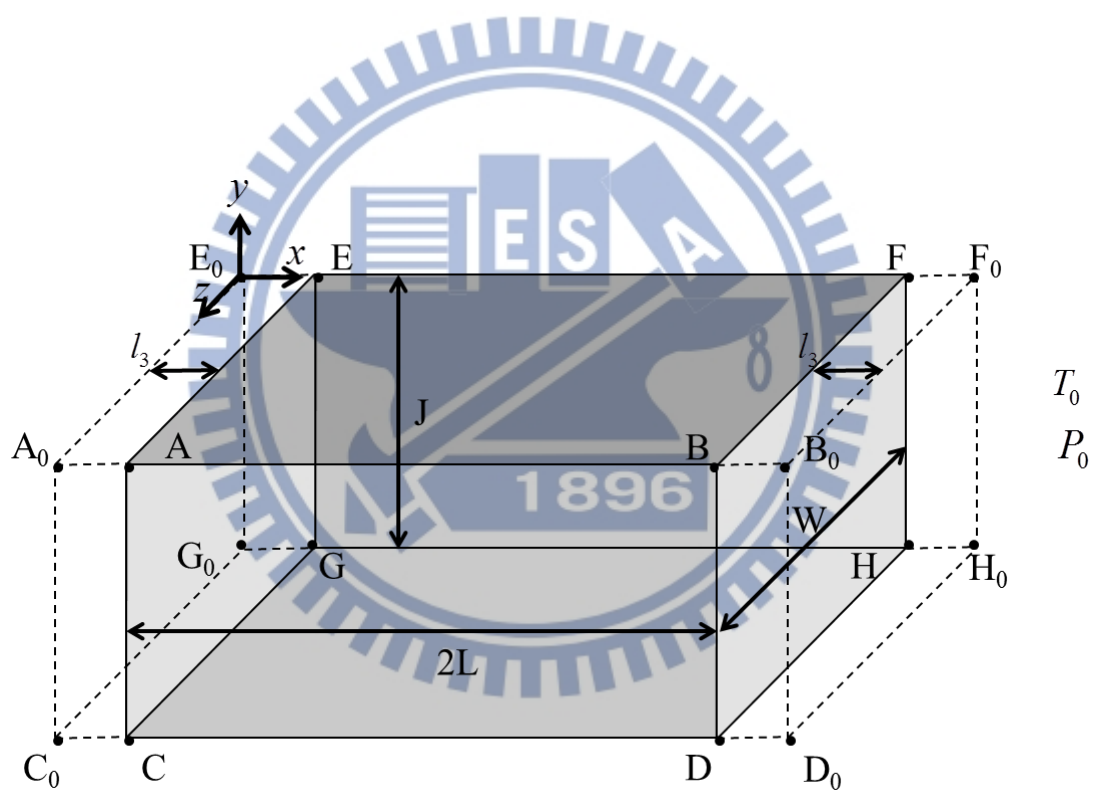


圖 4 - 20 與文獻[41]相比之物理模式



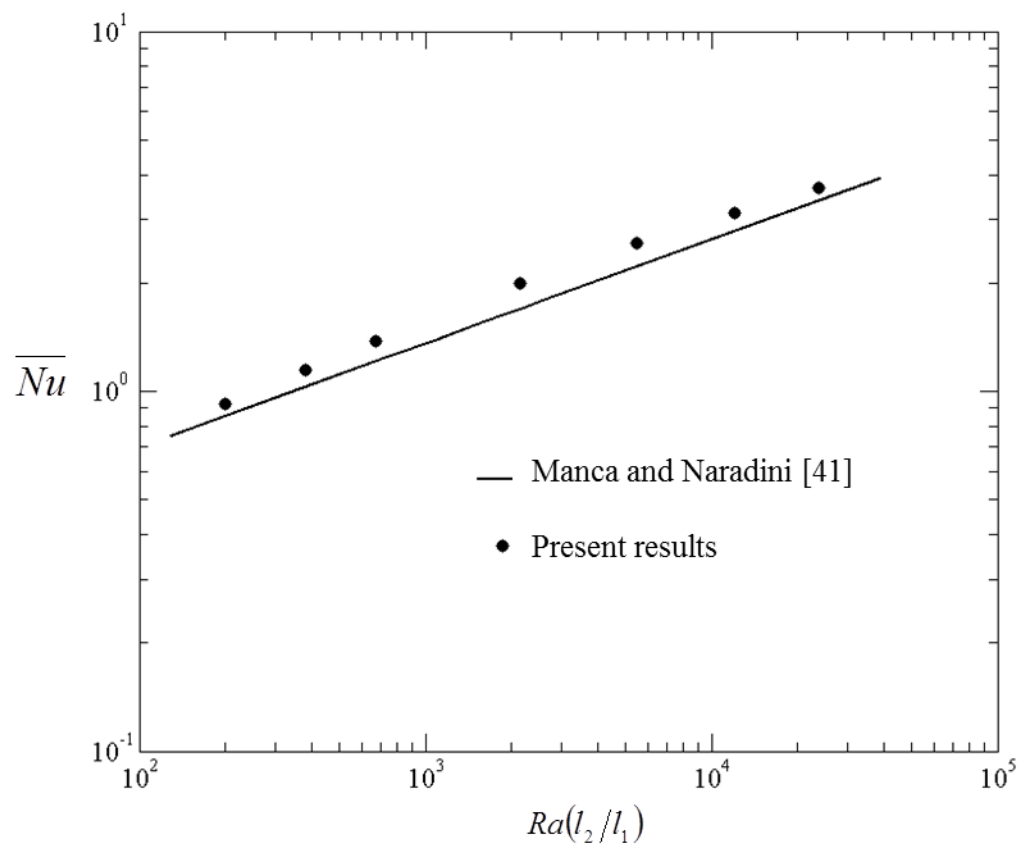


圖 4 - 21 本研究之平均紐塞數與文獻[41]之比較結果

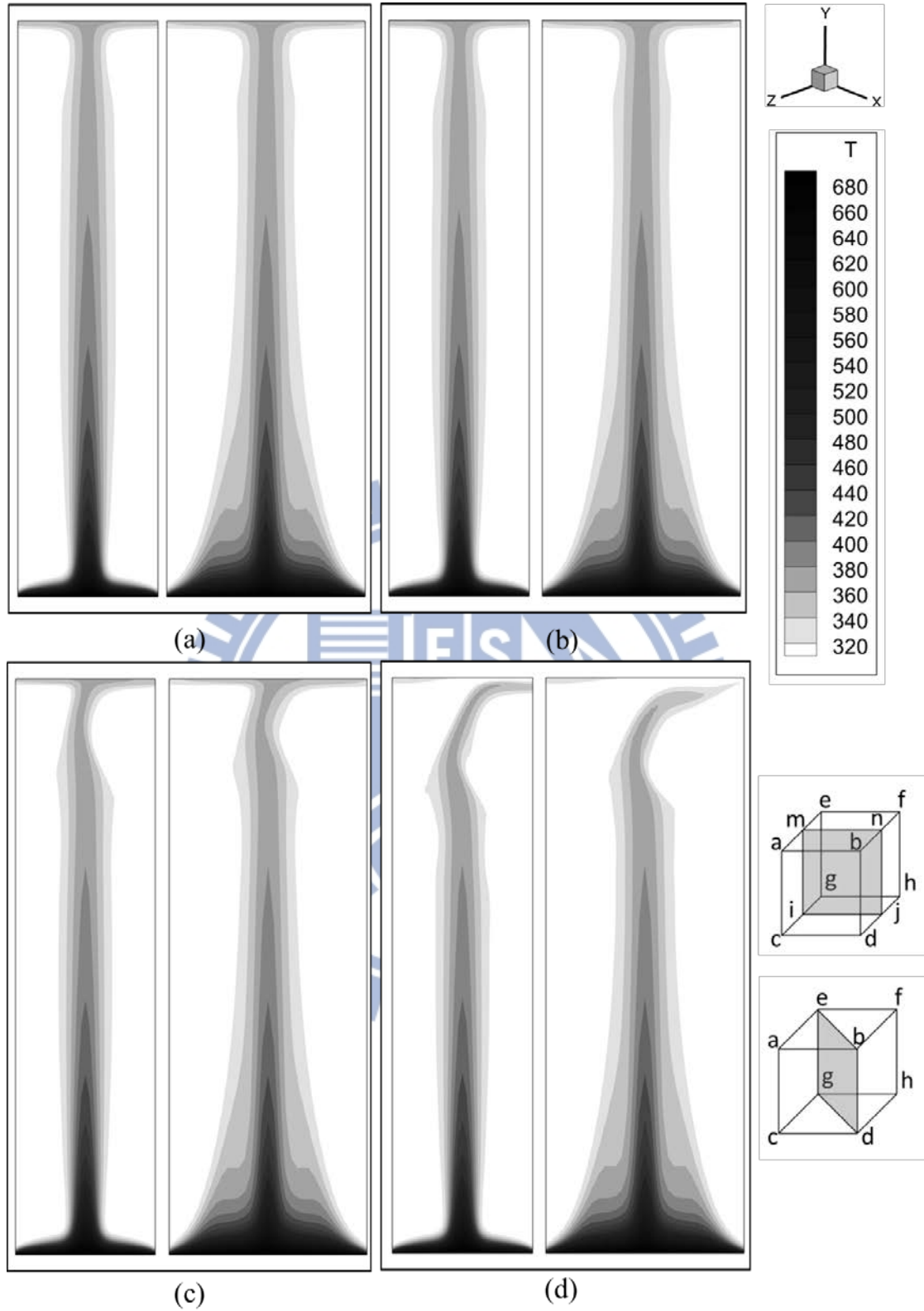


圖 4 - 22 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  之底部加熱溫度場隨時間變化。(a)

$t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、(b)  $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c)  $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$  及 (d)  $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$

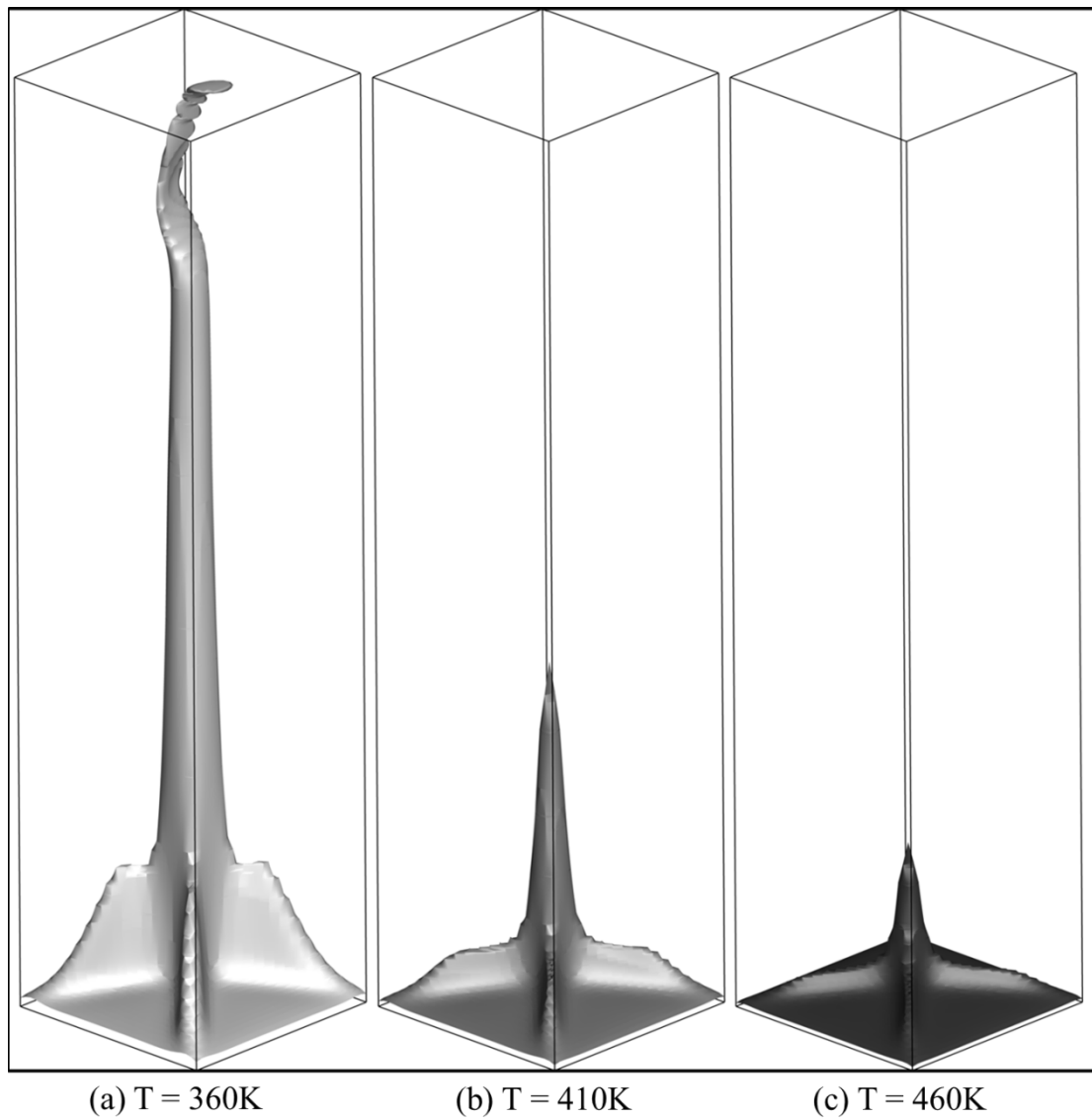


圖 4 - 23 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  在  $t^* = 4.3 \times 10^{-1}$  之底部加熱等溫面變化

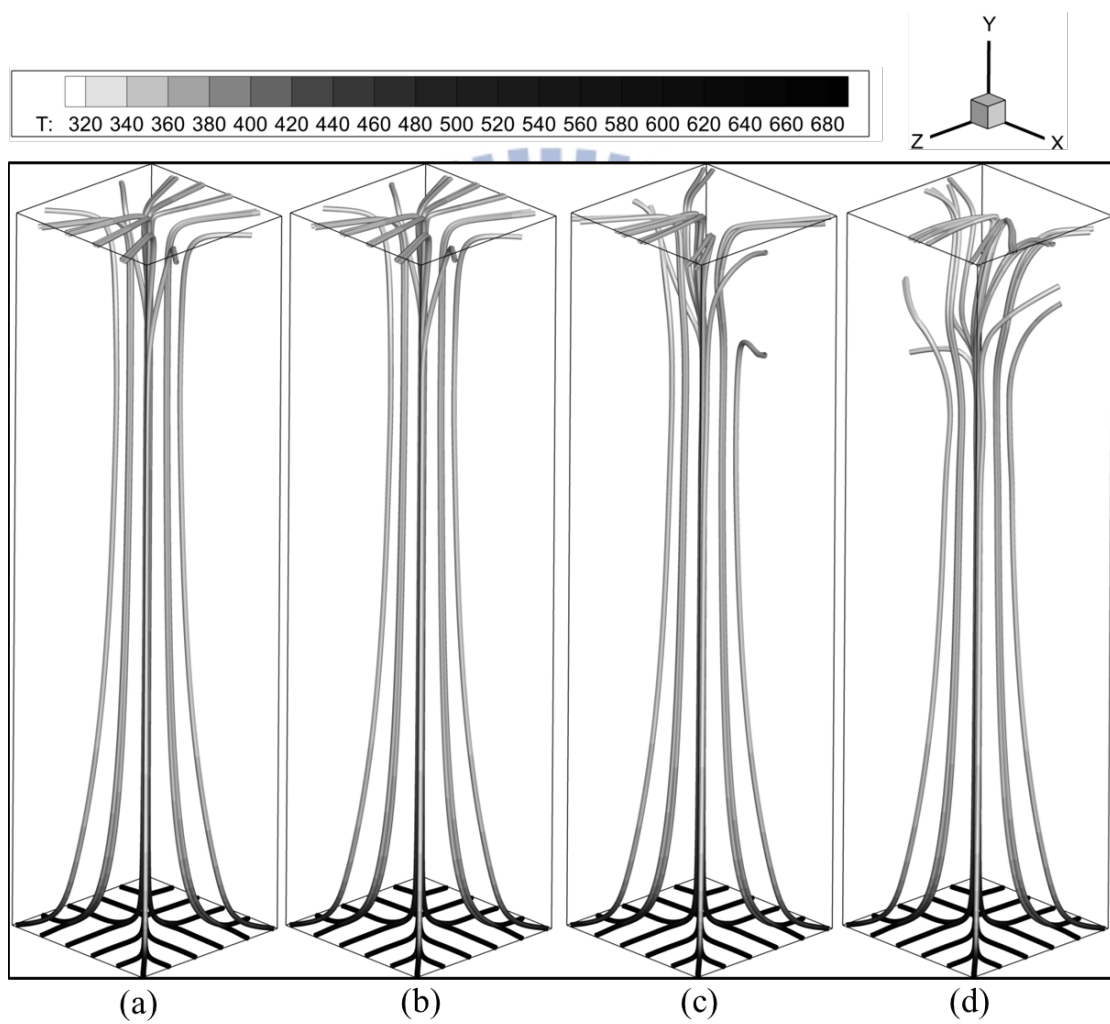


圖 4 - 24 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  之流線分佈。(a)  $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、(b)

$t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c)  $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$  及 (d)  $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$

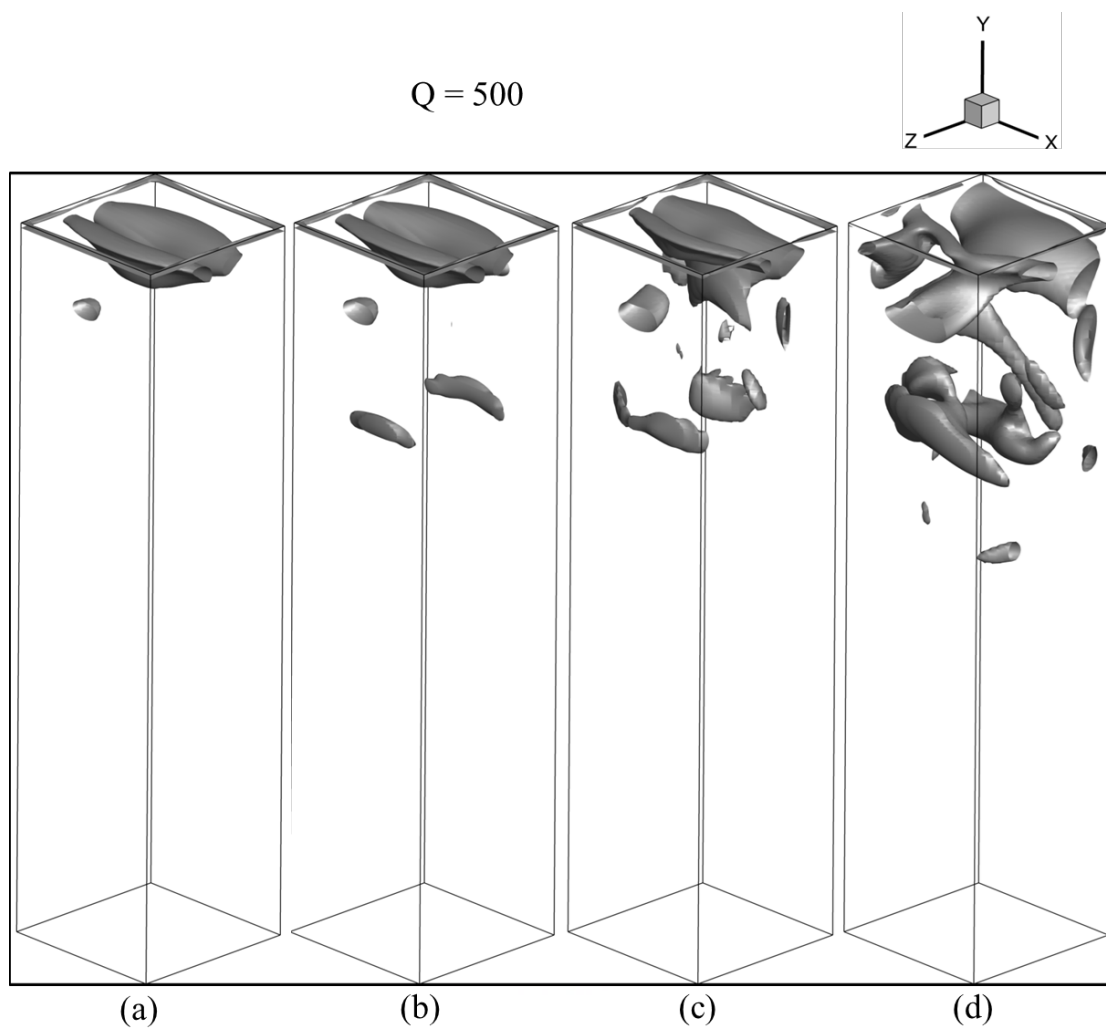


圖 4 - 25 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  之等  $Q$  面  $Q=500$  分佈。(a)  $t^* = 2.76 \times 10^{-1}$ 、

(b)  $t^* = 3.1 \times 10^{-1}$ 、(c)  $t^* = 3.61 \times 10^{-1}$  及 (d)  $t^* = 4.23 \times 10^{-1}$

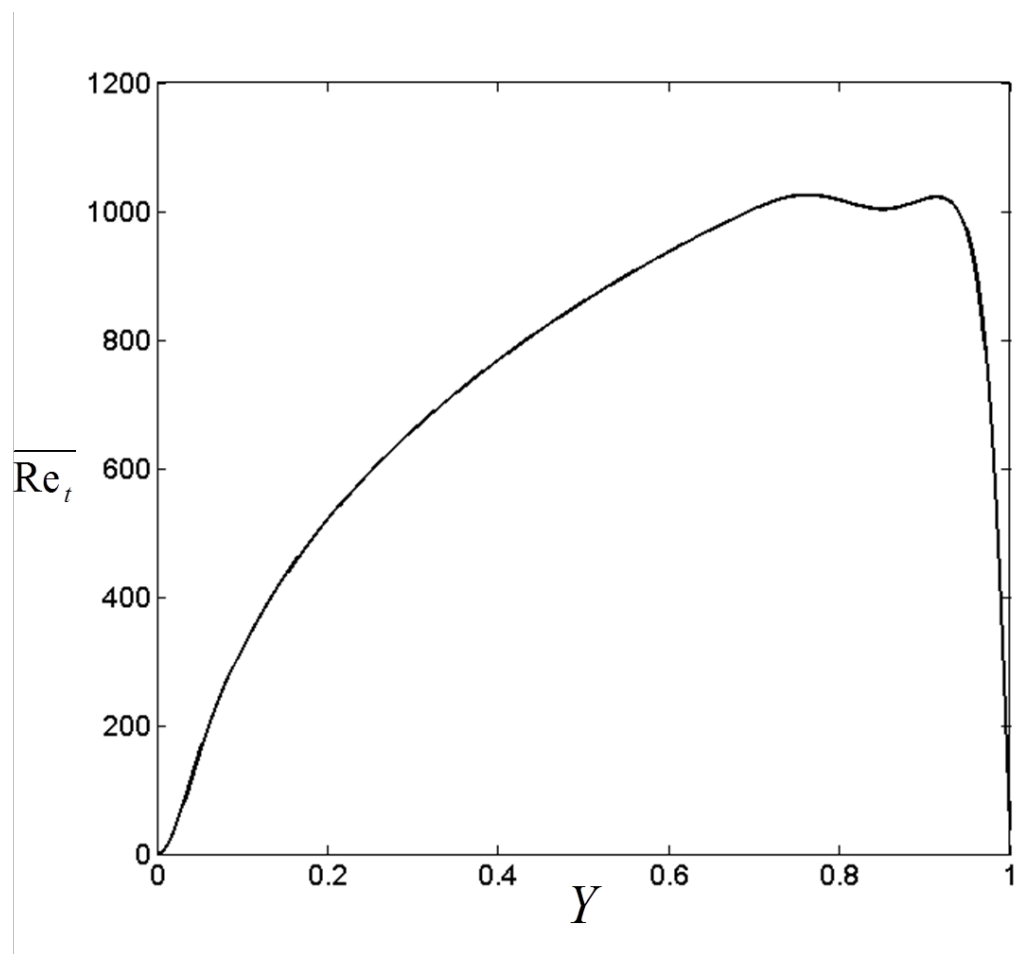


圖 4 - 26 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  在  $X = 0.5$  及  $Z = 0.5$  位置之時間平均雷諾數  
隨高度  $Y$  之變化

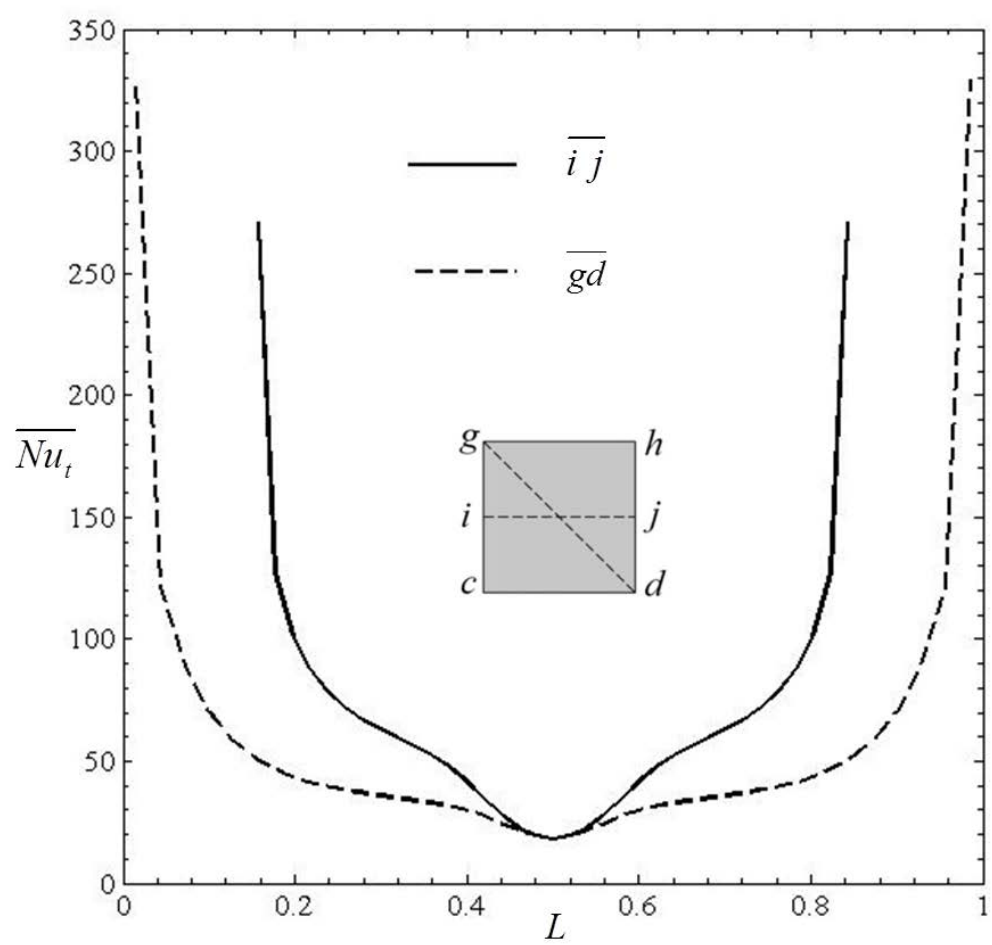


圖 4 - 27 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  沿  $\overline{i-j}$  及  $\overline{g-d}$  之時間平均局部紐塞數分佈



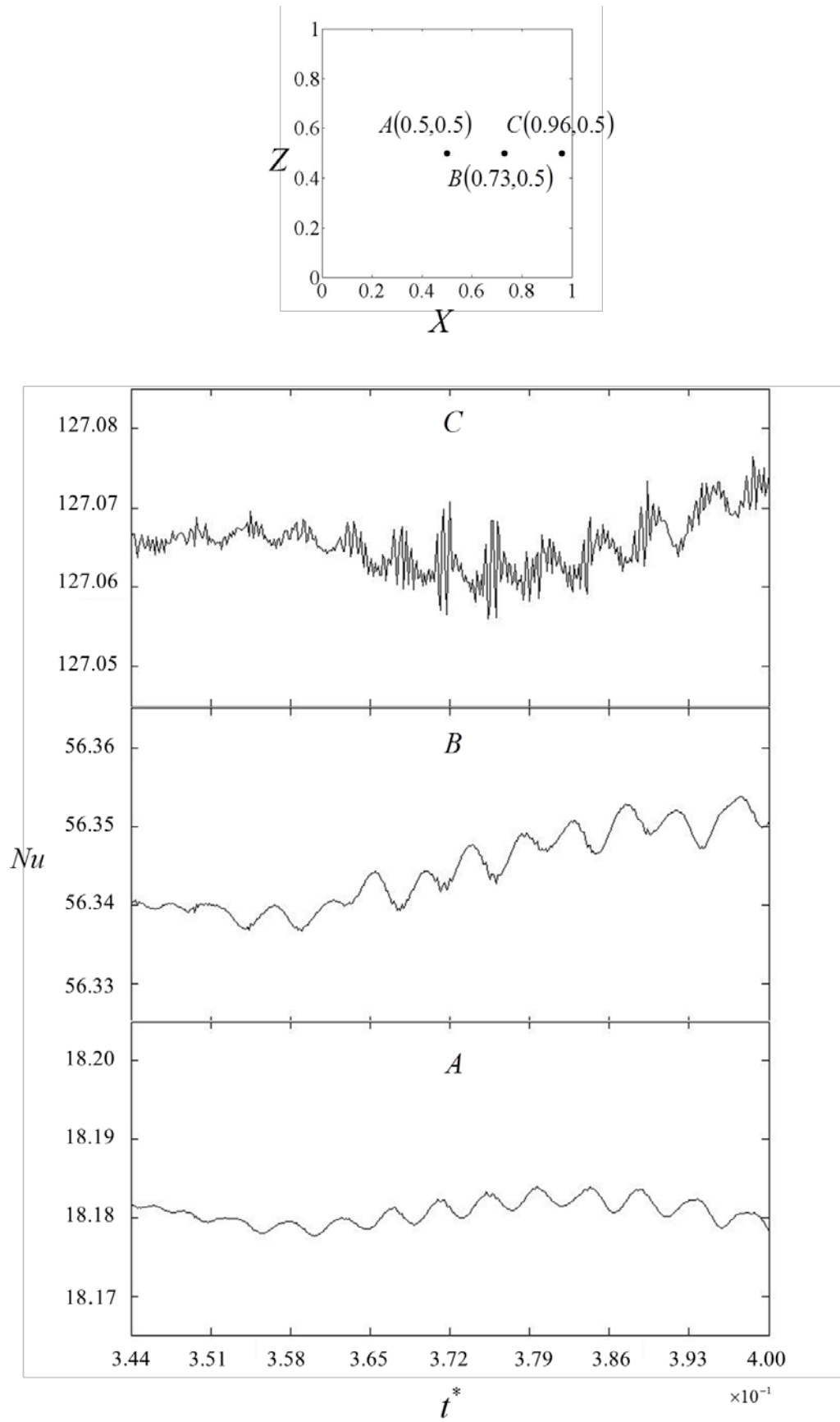


圖 4 - 28 修正雷利數  $Ra^* = 3.26 \times 10^7$  在不同位置隨時間變化之局部紐塞數

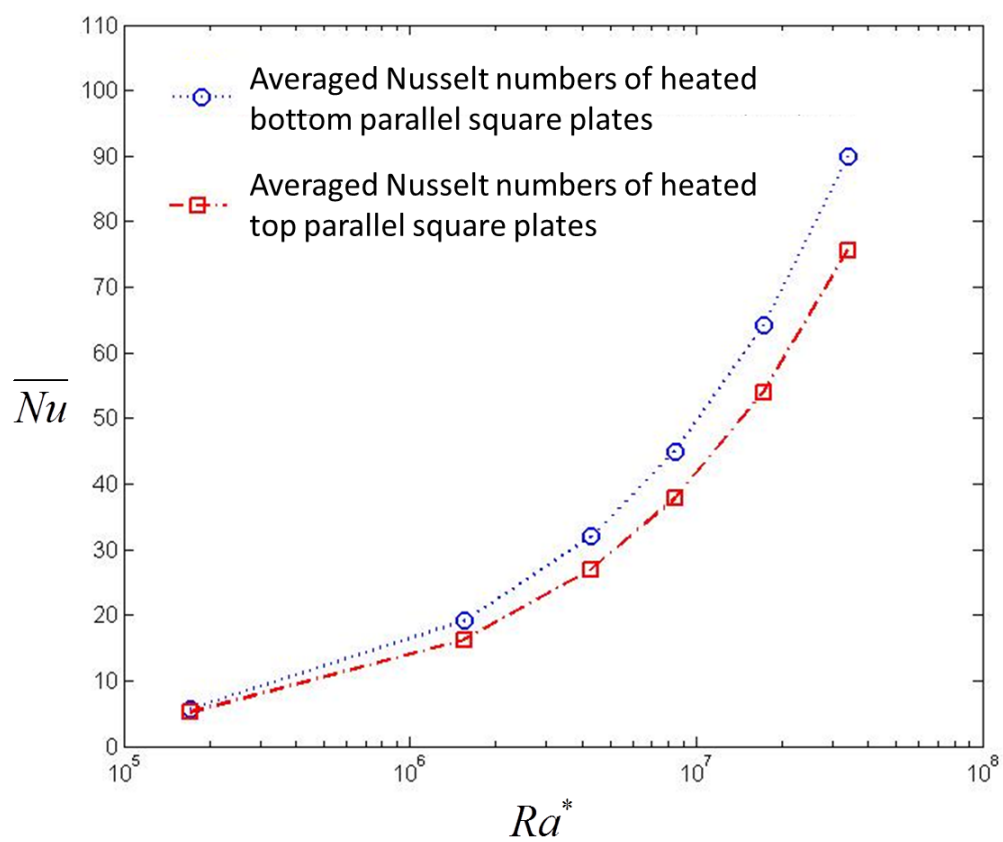


圖 4 - 29 底部加熱與頂部加熱之平均紐塞數比較

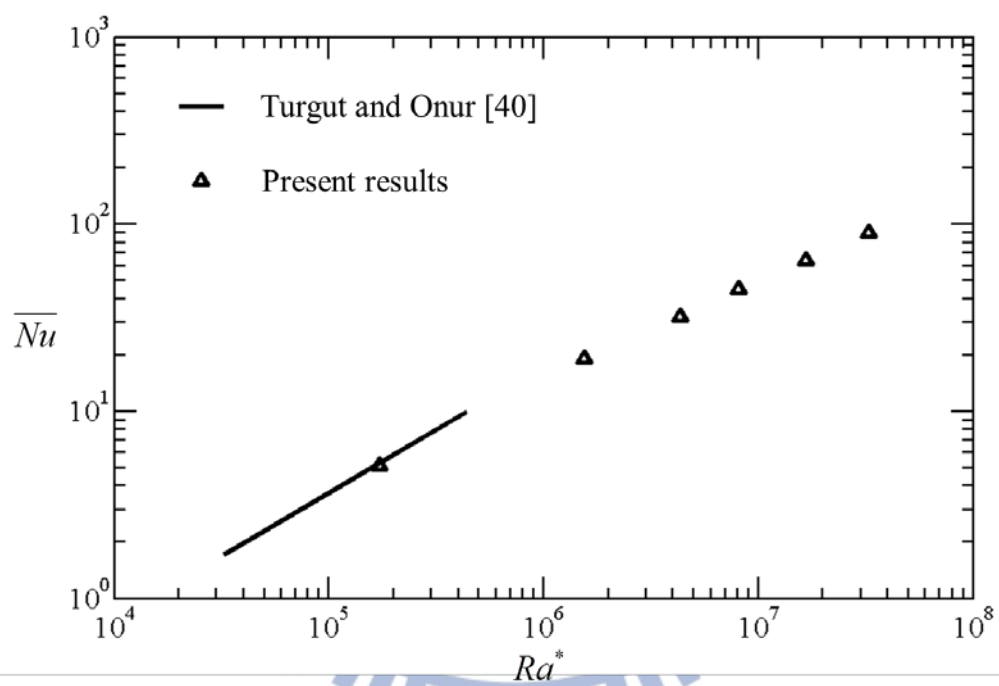


圖 4 -30 本研究之平均紐塞數與文獻[40]之結果比較

## 第五章 結論

本研究為了解決開放性邊界的問題，以吸收性邊界配合修正 LODI 法，以混合式邊界條件完成在正方形平行平板間自然對流的計算。本研究成功整合了低速可壓縮流的數值計算方法與開放性邊界條件的應用，發展了幾乎完整涵蓋所有流體問題的計算方法。本研究的主要貢獻如下：

### 1. 低速可壓縮流的計算方法：

過去的多利用流體速度將其區分為可壓縮與不可壓縮流，此種方法限制許多實際的應用，如高溫自然對流、引擎內部流場與聲場的計算等。本研究利用正方形平行平板自然對流驗證計算方法的適用性，且由於溫差極大，不使用 Boussinesq 假設來完整計算出浮力效應對流體的影響。

### 2. GPU 高速平行運算：

由於本研究需要大量的計算資源，為了提升效率節省計算時間與資源，利用 GPU 高速平行運算技術取代傳統的 MPI 與 OpenMP 方法，達成使用個人電腦計算複雜問題的目的。

### 3. 開放性邊界條件之應用：

本研究以吸收性邊界條件配合修正 LODI 法，成功解決在開放性邊界上，邊緣與角落造成的數值不穩定現象，並提高吸收性邊界的效率，以之計算出正方形平行平板間自然對流的現象，並探討不同加熱位置熱傳機制的差異。此外，對於高雷利數下之自然對流由層流轉變為紊流的不穩定現象也完整的呈現。

綜上所述，本研究所發展之邊界條件與數值方法將可作為各種開放性邊界問題之基礎並可進而精準解出各種複雜的流體問題。

## 參考文獻

- [1] K. Khanafer and K. Vafai, Effective boundary conditions for buoyancy-driven flows and heat transfer in fully open-ended two-dimensional enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45 (2002) 2527-2538.
- [2] D. D. Gray and A. Giorgini, The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer* 19 (1976) 545-551.
- [3] W.R. Briley, H. McDonald, and S. J. Shamroth, At low Mach number Euler formulation and application to time iterative LBI schemes, *AIAA* 21(10) (1983) 1467-1469.
- [4] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, *J. Comput. Phys.* 72 (1987) 277-298.
- [5] D. Choi and C.L. Merkel, Application of time-iterative schemes to incompressible flow, *AIAA*. 25(6) (1985) 1518-1524.
- [6] D. Choi and C.L. Merkel, The Application of Preconditioning in Viscous Flows, *J. Comput. Phys.* 105 (1993) 207-223.
- [7] P. L. Roe, Approximation Riemann solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *J. Comput. Phys.* 43 (1981) 357-372.
- [8] J. M. Weiss and W. A. Simth, Preconditioning Applied to Variable and Constants Density Flows, *AIAA*. 33 (1995) 2050-2056.
- [9] H. Paillere, C. Viozat, A. Kumbaro, and I. Toumi, Comparison of low Mach number models for natural convection problems, *Heat and Mass Transfer* 36 (2000) 567-573.
- [10] D. H. Rudy and J. C. Strikwerda, A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations, *J. Comput. Phys.* 36 (1980) 55-70.
- [11] T. J. Poinso and S. K. Lele, Boundary Conditions for Direct Simulations of

Compressible Viscous Flows, J. Comput. Phys. 101 (1992) 104-129.

[12] W. Polifke, C. Wall and P. Moin, Partially reflecting and non-reflecting boundary conditions for simulation of compressible viscous flow, J. Comput. Phys. 202 (2005) 710–736.

[13] W. S. Fu, C. G. Li, C. C. Tseng, An investigation of a dual-reflection phenomenon of a natural convection in a three dimensional horizontal channel without Boussinesq assumption, Int. J. Heat Mass Transfer 53 (2010)1575-1585.

[14] W. S. Fu, W. H. Wang, and S. H. Huang, An investigation of natural convection of three dimensional horizontal parallel plates from a steady to an unsteady situation by a CUDA computation platform, Int. J. Heat Mass Transfer 55 (2012) 4638-4650.

[15] C. Yoo, Y. Wang, A. Trouvé and H. Im, Characteristic boundary conditions for direct simulations of turbulent counterflow flames, Combustion Theory and Modeling 9 (4) (2005) 617-646.

[16] G. Lodato, P. Domingo and L. Vervisch, Three-dimensional boundary conditions for direct and large-eddy simulation of compressible viscous flows, J. Comput. Phys. 227 (2008) 5105-5143.

[17] J. P. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, J. Comput. Phys. 114 (1994)185-200.

[18] F. Q. Hu, On absorbing boundary conditions of linearized Euler equations by a perfectly matched layer, J. Comput. Phys. 129 (1996)201-219.

[19] F. Q. Hu, On perfectly matched layer as an absorbing boundary condition, AIAA Paper (1996) 96-1664.

[20] S. Abarbanel and D. Gottlieb, A mathematical analysis of the PML method", J. Comput. Phys. 134 (1997)357-363.

[21] J. S. Hesthaven, On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations, J. Comput. Phys.142 (1998)129-147.

- [22] C. K. W. Tam, L. Auriault and F. Cambullì, Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains, *J. Comput. Phys.* 144 (1998)213-234.
- [23] F. Q. Hu, A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables, *J. Comput. Phys.* 173 (2001)455 -480.
- [24] M. Israeli and S. A. Orszag, Approximation of radiation boundary conditions, *J. Comput. Phys.* 41 (1981)115 - 135.
- [25] R. Kosloff and D. Kosloff, Absorbing boundary conditions for wave propagation problems, *J. Comput. Phys.* 63 (1986)363-376.
- [26] T. Colonius, Lele, K. Sanjiva, Moin and Parviz, Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation, *AIAA* 31(9) (1993)1574-1582.
- [27] S. Ta'asan, D. M. Nark, An Absorbing Buffer Zone Technique for Acoustic Wave Propagation, *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (1995).
- [28] B. Wasistho, B. J. Geurts and J. G. M. Kuerten, Simulation techniques for spatially evolving instabilities in compressible flow over a flat plate, *Computers & Fluids* 26(7) (1997)713-739.
- [29] J. B. Freund, Proposed Inflow/Outflow Boundary Condition for Direct Computation of Aerodynamic Sound, *AIAA* 35(4) (1997)740-742.
- [30] W.S. Fu, C.G. Li, Y. Huang, The Application of CFD inComputing Jet Flow's Aeroacoustics, *The 7th International Conference on Flow Dynamics* (2010).
- [31] T. Brandvik, G. Pullan, Acceleration of a 3D Euler solver using commodity graphics hardware, *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (2008).
- [32] A. Corrigan, F.F. Camelli, R. Lohner, J. Wallin, Running unstructured grid-based CFD solvers on modern graphics hardware, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 66 (2010) 221-229.
- [33] W.S. Fu, C.G. Li, Accelerate the CFD performance by using graphic hardware,



The 6th International Conference on Flow Dynamics (2009).

[34] W. S. Fu, W. H. Wang, Y. Huang and C. G. Li, An investigation of compressible forced convection in a three dimensional tapered chimney by CUDA computation platform, *Int. J. Heat Mass Transfer* 54 (2011) 3420-3430.

[35] D. Jespersen, T. Pulliam, P. Bunung, Recent Enhancements to Overflow, AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 35th, Reno, NV, 1997.

[36] I. Abalakin, A. Dervieux, and T. Kozubskaya, A vertex centered high order MUSCL scheme applying to linearized Euler acoustics, INRIA (2002) No4459.

[37] S. Yoon and S. Jameson, Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations, *AIAA* 26 (1988) 1025-1026.

[38] G. V. Candler and M. J. Wright, Data-Parallel Lower-Upper Relaxation Method for Reacting Flows, *AIAA* 32 (1994) 2380-2386.

[39] Nvidia. (n. d. ). CUDA C Programming Guide. Retrieved February 5, 2014, from <http://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide>.

[40] O. Turgut and N. Onur, An experimental and three-dimensional numerical study of natural convection heat transfer between two horizontal parallel plates, *Int. Communication in Heat and Mass Transfer* 34 (2007) 644-652.

[41] O. Manca and S. Nardini, Experimental investigation on natural convection in horizontal channels with the upper wall at uniform heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* 50 (2007) 1075-1086.

[42] J.C.R. Hunt, A.A. Wray, P. Moin, Eddies, Stream and Convergence Zones in Turbulent Flows, Report CTR-S88, Center for Turbulence Research, 1988.