

國立交通大學
光電工程學系碩士班
碩士論文

電腦全像投影顯示系統研究

Research on Projection Display System Using
Computer Generated Hologram

研究生：許育銘

指導教授：許根玉 教授

中華民國一百零三年六月

電腦全像投影顯示系統研究

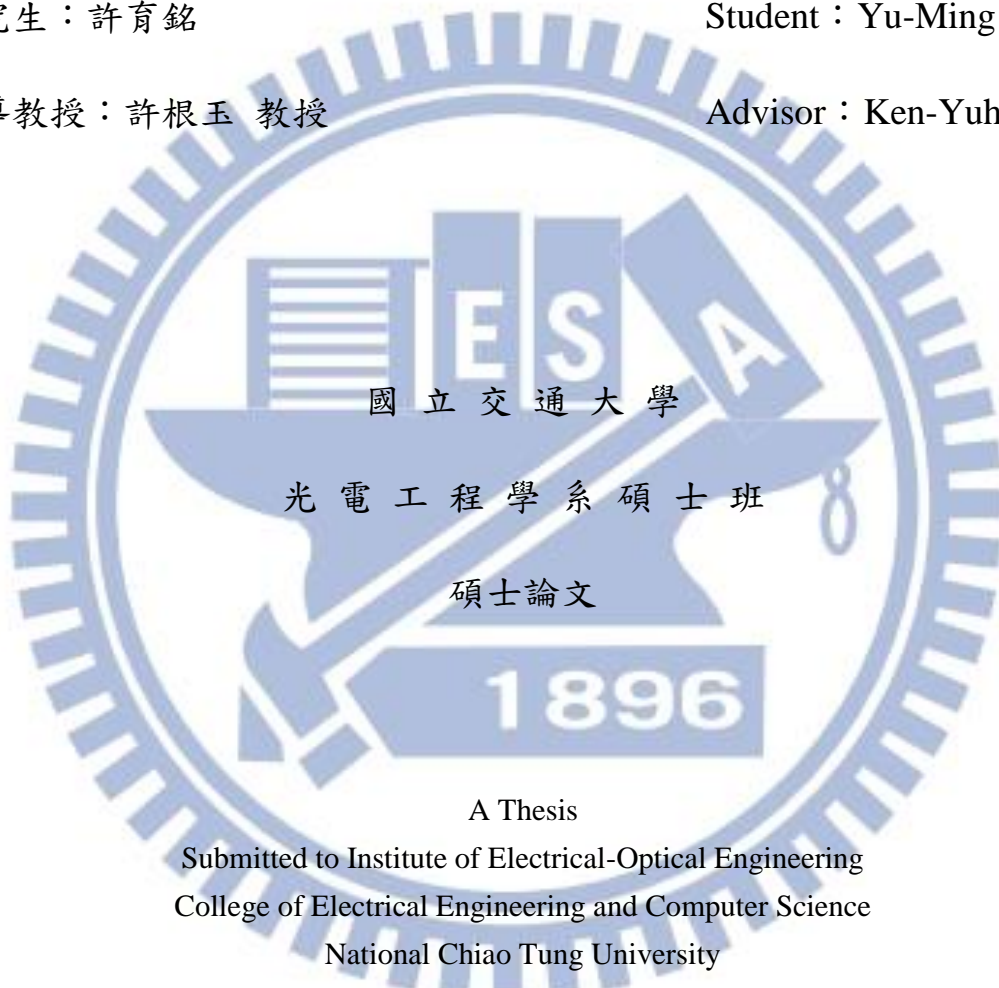
Research on Projection Display System Using Computer Generated
Hologram

研究生：許育銘

Student：Yu-Ming Hsu

指導教授：許根玉 教授

Advisor：Ken-Yuh Hsu



A Thesis

Submitted to Institute of Electrical-Optical Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of Master

in

Institute of Electrical-Optical Engineering,

June 2014

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零三年六月

電腦全像投影顯示系統研究

學生：許育銘

指導教授：許根玉

國立交通大學光電工程學系碩士班

摘要

本論文探討以空間光調制器顯示電腦全像片之遠場繞射投影成像顯示技術，並結合紅外光人體感測系統之互動式影像研究。

我們採用對稱式遞迴傅立葉轉換演算法設計純相位電腦全像片，並經由遠場繞射之傅立葉轉成像。我們以電腦模擬其光學重建影像，以重建影像之訊雜比及誤碼率為參數分析影像重建品質，並設計光學投影系統驗證之。我們評估此電腦全像投影系統對於空間光調制器之調制能力需求限制。最後，結合光學實驗及人體感測儀器，我們以互動式投影系統演示數字計算。

Research on Projection Display System Using Computer Generated Hologram

Student : Yu-Ming Hsu

Advisor : Ken-Yuh Hsu

Institute of Electrical-Optical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, we discuss the holographic projection display by the use of computer generated hologram (CGH) displayed by spatial light modulator (SLM). With the connection of near-infrared ray human motion sensor, an human-interactive projection system is proposed.

A phase-only CGH, as known as Kinoform, generated by applying symmetric iterative Fourier transform algorithm (SIFTA) which enhances projected image quality is employed for its better diffraction efficiency. We have simulated the reconstruction image by Matlab program. The parameters of signal noise ratio (SNR) and bit error rate (BER) for quantifying the image quality are analyzed. We design an optical setup to verify the simulation results above and the projection image can be found after the distance of Fraunhofer approximation.

Further, We have assessed the impact of LCoS modulation capabilities on diffractive imaging, and concluded the physical restrict of this projection method. Finally, we design an interactive projection system to demonstrate a projection keyboard.

誌謝

兩年一瞬間就過去了。在新竹念碩士班的這段時間，首先是非常感謝許老師的教導。許老師給了我很多光學上的知識，但相較於課業上的知識，老師更喜歡分享做人處事的人生道理。記得老師曾說：當下的決定，就是最好的決定。讓我有勇氣面對各種影響未來的選擇。謝謝老師。

謝謝我的父母支持我自大學以來所作的任何瘋狂事。因為你們給予我的自由以及重要的經濟支柱，讓我有無限美好的大學及碩士研究生活。謝謝你們讓我有機會和人分享我學跳舞的心路歷程還有第一次出國就當美國背包客的冒險心得。

謝謝爸，你總在我開口的時候對我抱持信任，並不計辛勞的為我在新竹、中壢、台北間奔波。謝謝媽在我每次回家都和我聊天分享心情，和媽說心事的感覺讓我感到很紓壓。天下的媽媽好像都有能力找回兒子不見的任何東西，謝謝妳在我每次感到困惑的時候願意幫助我找回我的初衷。另外我要謝謝阿嬤，阿嬤私底下對我很好，從我三歲到碩士畢業，都堅持偷偷塞一張一百塊給我去買餅乾或便當。想跟我阿嬤說：阮畢業啦，阿嬤欸凍提錢去買恁想袂買欸囉，望哩欸凍跨丟阮娶某生子，擱予哩曾孫來甲恁友孝。

謝謝大學同學，我會永遠記住大家聚在一起的歡笑聲。David、阿超、小綠、喇機、小瑞，研究所考試的羈絆把我們幾個連結在一起。往後大家將走向不同的道路，可以確定的是，只要說一聲大家就是有辦法團聚，再分享彼此經歷的酸甜苦辣。友誼萬歲！

謝謝在交大認識的朋友們。謝謝仁崇給了我很多研究的建議，沒有你這篇論文就不會這麼順利完成。口試前一天還好有你聽我口試預演，謝謝你的幫忙。Vera, I am indeed grateful for your trust in me. You are the key to my confidence in my work. 謝謝呂哲宇學弟給了實驗室很多歡笑，有時釘你是真心希望你變好，考上碩士班要加油，繼續朝著夢想前進。謝謝黃怡芯，妳面對未來的態度值得我去學習，感謝妳在軟體方面的幫忙。謝謝周信甫，我們是一起打拼研究的夥伴，也謝謝你對我的誇獎。謝謝童仲帆總是幫實驗室處理很多大大小小的事。謝謝卓學長推薦的好吃便當。謝謝紀政宏，我永遠記得我們的夢想，能夠出國交換真的很棒很厲害。

謝謝中央熱舞還有 Hakuna Matata 的團員，庸庸碌碌的研究生活可以跳舞真的很

開心。

最後，由衷地感謝我的女朋友郭靜汶，與妳走過的路、經歷的回憶無可取代。是妳給了我許多正面能量，讓我得以完成碩士學業。妳總是不管自己是否忙碌，逕自為我分析對未來的各種決策；不管我最後決定如何，妳也全心地支持。妳的支持正是我前進最大的動力。感謝這四年來的相互扶持，妳對我的好我都放在心上。

三言兩語道不盡許多感謝情，最後謹以此篇論文獻給我的家人、靜汶、以及我的好友們。

2014/07/01 於田家炳光電大樓 217 室

許育銘 謹誌



目錄

摘要	I
ABSTRACT	II
誌謝	III
目錄	V
圖目錄	VII
表目錄	X
第 1 章 緒論	1
1.1 動機：未來手機之夢想	1
1.2 電腦全像片簡介	3
1.3 電腦全像投影顯示系統簡介	4
1.3.1 投影顯示系統簡介	4
1.3.2 電腦全像投影顯示系統	4
1.4 論文架構	6
第 2 章 投影鍵盤之電腦全像片設計及模擬分析	7
2.1 相位電腦全像片之設計	7
2.1.1 Kinoform 純相位式電腦全像片	7
2.1.2 SIFTA 對稱遞迴傅立葉轉換演算法	8
2.2 光學投影鍵盤之成像模擬	13
2.2.1 遠場繞射理論	13
2.2.2 SLM 遠場繞射成像	15
2.3 鍵盤影像及光學成像系統設計	19
2.3.1 鍵盤影像設計	20
2.3.2 投影系統設計	22
2.4 電腦全像片參數分析	24
2.4.1 方均根誤差值	24
2.4.2 遞迴圈數影響	25
2.4.3 相位取樣影響	27
第 3 章 矽基液晶顯示器相位調製特性量測	30
3.1 LCoS 顯示器簡介	30
3.2 向列扭轉型液晶光學特性	31
3.3 LCoS 相位及振幅調制特性之模擬分析	32
3.4 LCoS 相位及振幅調制實驗測量結果	39
第 4 章 光學鍵盤投影實驗及分析	49
4.1 光學實驗架構	49

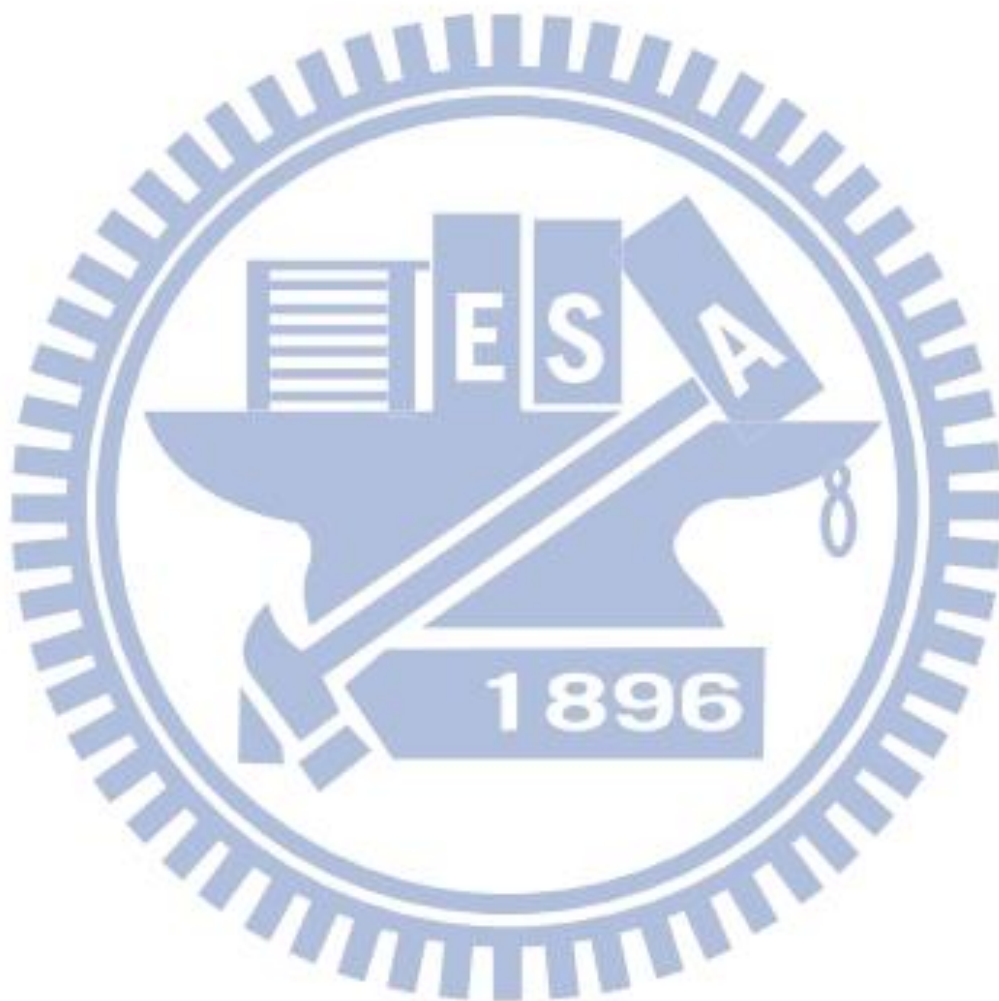
4.2	光學繞射成像實驗	51
4.2.1	數字鍵盤之光學成像	51
4.2.2	繞射效率分析	54
4.3	LCoS 調制參數分析	55
4.3.1	振幅調制能力不足	55
4.3.2	相位調制能力不足	60
第 5 章	人機互動系統實驗	64
5.1	人體動作感測儀器簡介	64
5.2	體感儀器 Leap Motion 之紅外光感測設計	66
5.3	投影鍵盤操作實驗	68
5.3.1	影像資訊處理	68
5.3.2	計算機操作實驗結果	69
第 6 章	電腦全像片之影像誤碼率評估	72
6.1	雲端運算帶動之資訊儲存系統革新	72
6.2	USB 系統、BD 光儲存與全像儲存系統表現參數比較	73
6.3	電腦全像儲存系統	74
6.3.1	電腦全像儲存系統簡介	74
6.3.2	機率分布函數與誤碼率	75
6.4	演算法參數之誤碼率比較	77
6.4.1	遞迴圈數影響	79
6.4.2	相位階數影響	82
第 7 章	結論及未來工作	83
參考文獻	85

圖目錄

圖 1 智慧型手機及傳統手機使用者市場調查.....	1
圖 2 未來手機概念示意圖.....	2
圖 3 投影鍵盤概念示意圖.....	3
圖 4 D. GABOR 全像術實驗結果 (A) 物體, 直徑 1.4 MM. (B) 直接觀看顯微鏡下之物體 (C) 干涉圖樣 (D) 重建物體影像.....	3
圖 5 電腦全像投影顯示系統示意圖.....	5
圖 6 電影「鋼鐵人 2」之元素週期表投影.....	5
圖 7 欲投影之數字鍵盤, 畫素大小為 300×300	7
圖 8 捨去振幅資訊且相位數位化後 KINOFORM 重建鍵盤影像.....	8
圖 9 IFTA 空間關係流程圖.....	10
圖 10 SIFTA 目標影像之訊號區及雜訊區.....	11
圖 11 IFTA 與 SIFTA 影像品質比較.....	12
圖 12 繞射孔徑示意圖.....	13
圖 13 SLM 畫素分佈示意圖.....	15
圖 14 光學重建鍵盤影像.....	18
圖 15 SINC 函數處理影像(A).處理前(B).處理後.....	20
圖 16 SINC 修正之光學重建鍵盤影像 (A).修正前(B).修正後.....	21
圖 17 SIFTA 之目標影像設計(SINC 修正後).....	21
圖 18 SIFTA 光學重建影像(SINC 修正後).....	22
圖 19 光學系統設計概念.....	23
圖 20 RMSE 對迴圈數作圖.....	26
圖 21 RMSE 對相位階數作圖.....	28
圖 22 LCoS 分層結構圖.....	30
圖 23 LC-R2500 空間光調制器 (含控制器及顯示器).....	30
圖 24 正負型液晶分子外加電壓示意圖(A)液晶分子 (B)外加電壓偏轉示意圖.....	31
圖 25 45° 向列扭轉液晶盒示意圖.....	32
圖 26 SLM 系統光軸等效光路圖.....	34
圖 27 TNLC 外加電場之液晶分子導向(A).TN-LC 於外加電場下之液晶倒向(B).液晶 分子外加電場偏轉示意圖.....	37
圖 28 振幅及相位調制模擬圖.....	39
圖 29 相位調制實驗光學系統架構.....	40
圖 30 LCoS 未加電壓之同心圓干涉條紋.....	42
圖 31 LCoS 凸反射面示意圖.....	42
圖 32 CCD 擷取 LCoS 未加電壓之平行干涉條紋影像.....	42

圖 33 輸入灰階 100 之干涉條紋影像.....	43
圖 34 干涉條紋截線之光強分佈及條紋位移.....	43
圖 35 輸入灰階 100 之干涉條紋影像(水平方向低通處理).....	44
圖 36 干涉條紋截線之光強分佈及條紋位移(水平方向低通處理).....	44
圖 37 相位調制實驗結果.....	46
圖 38 振幅及相位調制實驗結果(偏振角：75°，檢偏角：116°).....	47
圖 39 振幅及相位調制實驗結果(偏振角：80°，檢偏角：85°).....	48
圖 40 傅立葉成像系統.....	49
圖 41 傅立葉成像投影系統.....	50
圖 42 SIFTA 之目標影像設計(SINC 修正後).....	52
圖 43 SIFTA 計算之電腦全像片.....	52
圖 44 電腦模擬之光學重建影像.....	53
圖 45 成像投影系統之光學重建影像.....	53
圖 46 濾除 DC 亮點及多階繞射之鍵盤影像.....	54
圖 47 SLM 系統調制振幅亂數區間 0 至 1 之 CGH 光學重建影像.....	56
圖 48 SLM 系統完美振幅調制之 CGH 光學重建影像.....	56
圖 49 不同 SLM 系統之振幅與相位調制能力圖表.....	59
圖 50 理論及實際相位調制圖.....	60
圖 51 SLM 畫素相位飽和誤差示意圖.....	61
圖 52 (A).傳統搖桿控制器(B).Wii 之手把控制器主機(圖右)及其手把控制器(圖左)....	64
圖 53 微軟公司體感儀器 KINECT.....	65
圖 54 華碩公司體感儀器 XTION.....	65
圖 55 XTION 感測紅外影像(圖右)及深度資訊(圖左).....	65
圖 56 LEAP MOTION 體感儀器及其內部結構圖.....	66
圖 57 LEAP MOTION 最佳感測範圍及儀器尺寸.....	66
圖 58 成像面之壓克力架設計屏幕.....	67
圖 59 加入 LEAP MOTION 體感儀器之光學系統架構.....	68
圖 60 簡單計算機之光學影像重建(A)簡單計算機影像(B)光學重建計算機影像.....	68
圖 61 未來用戶端與資料中心端關係示意圖.....	72
圖 62 二元資訊頁面(10×10)示意圖.....	75
圖 63 二元資訊頁面(10×10)IFTA 重建影像.....	75
圖 64 二元資訊影像之機率分布函數 PDF.....	75
圖 65 以 IFTA 計算之電腦全像片計算其重建影像之機率分布函數.....	76
圖 66 判斷灰階閾值之二元影像比較圖 (A)原始二元影像(B)閾值判斷前重建影像(C) 閾值判斷後重建影像.....	77
圖 67 畫素大小 600×600 之二元影像.....	78
圖 68 二元影像之 IFTA 電腦全像重建影像比較(A).遞迴 4 圈 (B).遞迴 100 圈.....	78
圖 69、IFTA 重建影像之 PDF 比較(A).遞迴 4 圈 (B).遞迴 100 圈.....	78

圖 70 PDF 圖與 IFTA 迴圈數之關係 80
圖 71 PDF 圖與 SIFTA 迴圈數之關係 81



表目錄

表 1 SIFTA 之目標影像在不同空間中的自由度.....	10
表 2 SIFTA 設計不同迴圈數之電腦模擬重建影像.....	27
表 3 SIFTA 設計不同相位階數之電腦模擬重建影像.....	29
表 4 HOLOEYE LC-R2500 規格表.....	31
表 5 常見光學元件之瓊式矩陣表示式.....	34
表 6 透鏡組別之各項投影參數.....	51
表 7 理論及實驗繞射效率.....	54
表 8 SLM 系統不同振幅調制能力對應 CGH 重建影像及 SNR 比較.....	57
表 9 振幅調制能力數據及光學重建影像實驗結果.....	59
表 10 SLM 系統不同相位調制能力對應 CGH 重建影像及 SNR 比較.....	62
表 11 相位調制能力數據及光學重建影像實驗結果.....	63
表 12 不同影像解析度之 SIFTA 演算法所需時間表.....	69
表 13 $1+2=3$ 之算術運算流程表.....	70
表 14 $3+4=7$ 之算術運算流程表.....	71
表 15 USB 不同版本性能比較.....	74
表 16 不同資訊儲存方式表現參數比較.....	74
表 17 IFTA 遞迴圈數與誤碼率關係表.....	80
表 18 BER 值與 SIFTA 迴圈數之關係.....	81
表 19 IFTA 與 SIFTA 計算之電腦全像片相位取樣階數與誤碼率之關係.....	82

第 1 章 緒論

1.1 動機：未來手機之夢想

自從 2007 年 1 月 9 日蘋果公司 CEO 史蒂夫·賈伯斯發表了第一代 iPhone 後，世人掀起了一股智慧型手機的熱潮。智慧型手機結合了傳統手機的通話功能以及多點觸控技術。此外，透過 Wi-Fi 或 3G 網路，智慧型手機使用者可以順暢地瀏覽網頁就如同使用個人電腦一般，更可以藉由不同行動作業系統之網路商店擴充更多應用程式 app 增加手機功能性。

根據市場調查公司尼爾森於 2012 年所提出的報告(見圖 1)指出，近年來美國智慧型手機使用者的數量成長迅速，且於 2012 年的二月與傳統手機之使用者數量達到交叉點，證實了手機市場的轉變。

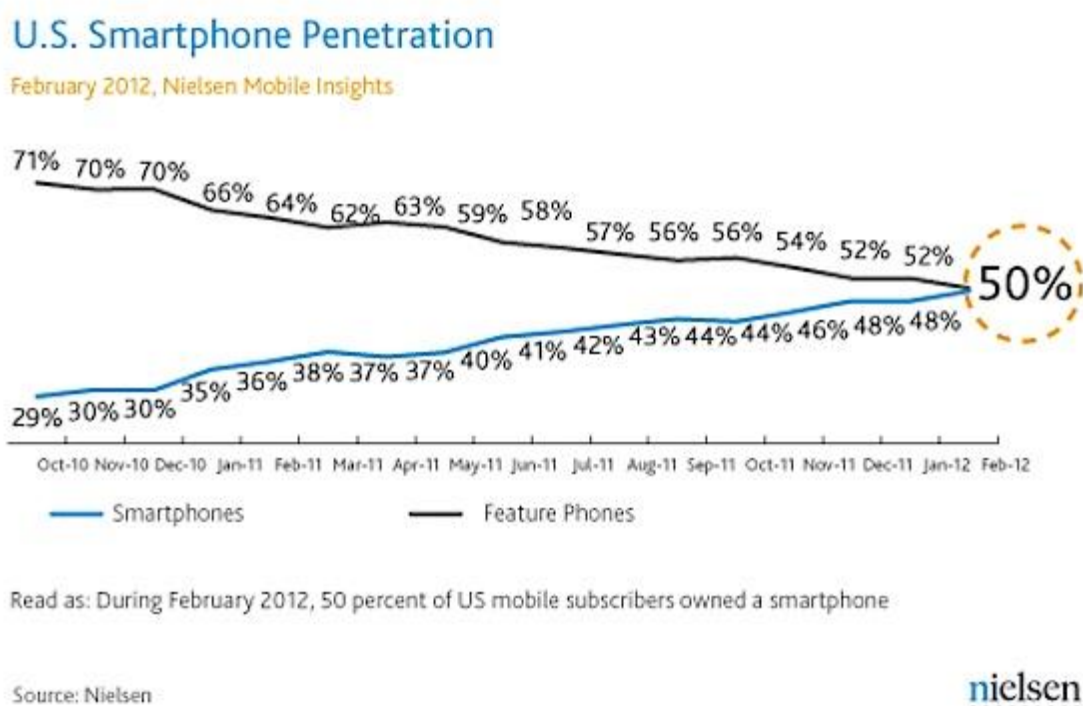


圖 1 智慧型手機及傳統手機使用者市場調查

(資料來源：<http://www.hksilicon.com/kb/articles/64798/iOSampAndroid>)

智慧型手機的崛起，連帶促進觸控式系統的發展。在智慧型手機被發明以前，觸控式系統只應用於一些簡單的指令，例如：「確認」、「取消」等僅需要單點觸控輸入指令即可。隨著智慧型手機及觸控螢幕的發明，多點觸控的技術被引入，以應付各種複雜的指令，例如：「縮放頁面」、「滑動頁面」、「旋轉頁面」等。上述之智慧型

手機觸控系統之感測技術皆以電路設計為基礎，主要分為電阻式、電容式兩種，藉由人體觸碰螢幕時所造成的壓力改變電阻值或者電容值，判斷觸碰位置。

在目前主流的觸控系統研究之中，唯有紅外線偵測系統，藉由接收人體輻射的紅外線判定觸控位置。其優點是不需要將觸控電路設於面板之中。然而，缺點是其感測過程較容易被干擾或是產生誤判。

隨著科技的進步，未來手機的趨勢概括來說有以下方向：1.透明顯示面板。2.可撓式顯示面板。兩種方式對 IC 設計或者面板材料來說無疑都是很艱難的挑戰。以下舉例數張未來手機之概念圖做為未來世界行動裝置之想像：



圖 2 未來手機概念示意圖

從幾張圖可以發現，顯示技術將是未來手機的一大研究重點。本論文中，我們將以可操作投影鍵盤作為互動式投影系統之構想，結合電腦全像投影系統以及紅外線人體感測系統，以未來手機投影鍵盤作為目標並證實互動式投影影像可行性，投影鍵盤概念如圖 3 示意，下一節我們將簡介電腦全像技術：

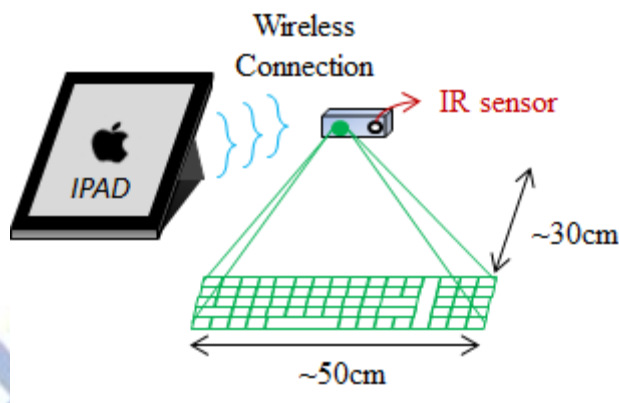


圖 3 投影鍵盤概念示意圖

1.2 電腦全像片簡介

1948 年，英國籍匈牙利裔物理學家 Denis Gabor 提出了一種波前重建的方法[1]，試圖改善當時電子顯微鏡之解析力。為證實其重建波前之可行性，Gabor 以同軸的方式設計光路，使平面波照射幾乎透明之物體，部分的光波照射物體後產生散射，稱為物體光，部分的光波則直線前進，稱為參考光。將底片置於兩束同調光波之干涉區紀錄干涉條紋。藉由條紋週期與兩束光相位差相關之特性，紀錄了物體光之相位資訊。以原參考光照射記有條紋之底片後，繞射光將重建出物體光之相位，還原原物體之樣貌，而後稱此方法為全像術。

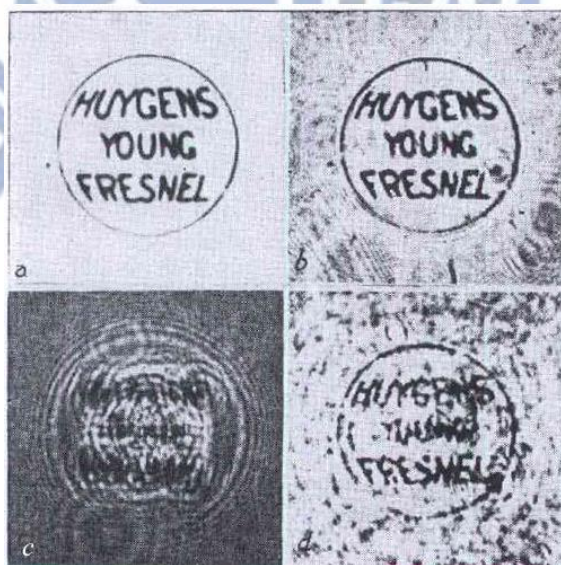


圖 4 D. Gabor 全像術實驗結果 (a) 物體，直徑 1.4 mm. (b) 直接觀看顯微鏡下之物體 (c) 干涉圖樣 (d) 重建物體影像

全像術能夠以干涉的方式完整記錄物體之光場資訊，但須注意的是，光學干涉對外界環境干擾極為敏感，紀錄時必須避免震動以及空氣擾動使得干涉條紋位移，以免降低底片紀錄條紋之明晰度。

1966年，B.R. Brown 以及 A. W. Lohmann 發明了一種不需要光學干涉紀錄的電腦全像片，所用的方法為「相位繞道法(Detour Phase Method)」[2][3]。先求出由物體發出至全像片之複數光場，接著將振幅資訊以及相位資訊編碼成二元振幅影像(黑白)，藉由入射光之斜向入射角度以及某一畫素之開孔位置決定出射光調制之相位值，藉由開孔的大小決定出射光所調制之振幅值。

此後，電腦全像片的編碼方法不斷地推陳出新，如：Kinoform 相位電腦全像片[4]、雙相位合成法[5]、改良型雙相位合成法[6]等。不管何種編碼方法，電腦全像片皆無光學干涉過程，僅需電腦計算、編碼後製作即可。相較於傳統全像片干涉紀錄，電腦全像片的製作流程更為方便，適合應用於設計不同功能之全像光學元件(Holographic Optical Element，簡稱 HOE)。若以可動態顯示之空間光調制器(Spatial Light Modulator，簡稱 SLM)作為媒介播放電腦全像片，將可用做動態光學元件。電腦全像在目前已有許多應用如：全像 3D 顯示[7][8][9]、複合式全像[10]、影像處理[11]、動態顯微術[12]等。

1.3 電腦全像投影顯示系統簡介

1.3.1 投影顯示系統簡介

所謂的投影顯示，指的係利用光源照射某物體，物體之反射或者透射光經由透鏡成像系統，將物體實像成像至屏幕。投影顯示系統則是由光源、顯示欲投影影像之 SLM、成像系統及屏幕構成。

常用的 SLM 有以下幾種：

1. 穿透式液晶顯示器 LCD
2. 反射式矽基液晶顯示器 LCoS
3. 數位微型反射鏡 DMD

市面上的投影機，除了上述投影系統外，更以 IC 電路板連結了電腦，讓投影影像可以與電腦螢幕同步達到動態顯示的效果。早期結合電腦的三槍投影機，以三個光源分別照射 RGB 三種顏色的影像並在屏幕疊合呈現彩色影像。現今常見的投影機為單槍投影機，藉由數位光處理(Digital Light Processing)的方式，以單光源將 SLM 放大實像成像至屏幕之中，且由於光學設計技術的進步使透鏡成像系統像差影響亦愈趨漸小。

1.3.2 電腦全像投影顯示系統

電腦全像投影顯示，指的係以 SLM 顯示電腦全像片，並由重建光波入射 SLM 重建影像，繞射光在屏幕上成像。

常見的投影系統與電腦全像投影最大的不同是，前者 SLM 顯示原目標影像，由

成像透鏡將實像放大至屏幕；後者 SLM 顯示電腦全像片，由繞射光在屏幕上成像。電腦全像的優點為其保留了全像最重要的特性：資訊分佈於全像片任一處。因此若電腦全像有任一位置破損，或者某些畫素無法顯示，將不會影響投影影像的判讀。

本論文所設計之電腦全像片，其概念是將欲投影之影像執行傅立葉轉換影像得到。我們利用函數執行傅立葉轉換兩次後，將得到與原函數相同、座標相反之特性，以 SLM 顯示影像第一次傅立葉轉換的結果，並於其後滿足遠場繞射條件之距離下擺放屏幕，將得到第二次傅立葉轉換的結果，也就是原影像，電腦全像投影系統如圖 5 所示。更詳細的編碼方法及投影成像性質，將於第二章詳細介紹。

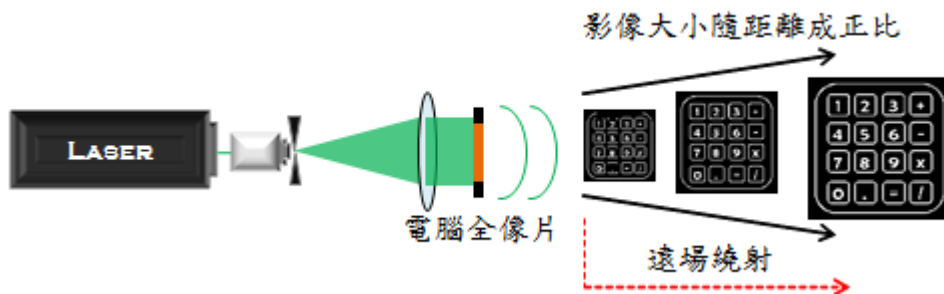


圖 5 電腦全像投影顯示系統示意圖

也許在不久的將來，電影世界中由電腦特效製作出立體投影的效果(見圖 6)便可能以電腦全像投影技術成真。



圖 6 電影「鋼鐵人 2」之元素週期表投影

(資料來源：<https://www.youtube.com/watch?v=mbj3XSvDyw8>)

1.4 論文架構

第一章簡介電腦全像片以及電腦全像投影顯示系統之概念。第二章研究電腦全像片的產生方式、以理論推導分析成像性質並且以電腦模擬光學重建影像，根據遠場繞射成像特性設計一成像投影系統。第三章介紹用於顯示電腦全像片之反射式矽基液晶顯示器 LCoS 的原理，接著模擬其光學調制性質，並且設計實驗量測其調制能力。第四章實際設計光學實驗架構，展示光學投影影像成果並且分析成像品質，接著以模擬探討 LCoS 調制能力若不如預期將對投影成像造成之影響，並設計實驗的方式驗證模擬結果。第五章簡介人體感測儀器，並將其加入光學實驗架構之中展示影像互動成果。第六章討論數位二元影像以此方法儲存下，其光學重建影像之誤碼率分析，作為本論文所提出之電腦全像方法在全像資訊儲存上之延伸應用。第七章為結論及未來工作。



第 2 章 投影鍵盤之電腦全像片設計及模擬分析

在本章中，我們設計鍵盤影像如圖 7 所示，並以對稱遞迴傅立葉轉換演算法設計電腦全像片。接著，根據傅立葉光學理論，以電腦模擬 SLM 顯示電腦全像片之光學重建影像。透過模擬重建影像，我們可知遠場繞射投影之影像限制，進而重新設計製作電腦全像的目標鍵盤影像。最後，根據設計好的影像製作新的電腦全像片，模擬並比較設計前後的重建影像差異。在最後一節，我們比較演算法之不同參數對投影成像的影響。

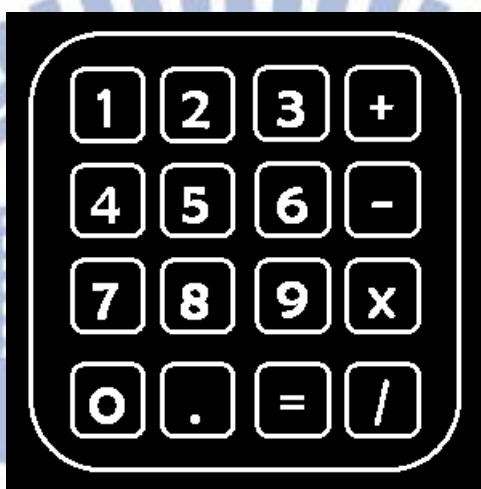


圖 7 欲投影之數字鍵盤，畫素大小為 300×300

2.1 相位電腦全像片之設計

在 2.1 節中，我們將介紹 Kinoform 電腦全像片，以及 Kinoform 的產生方法——對稱遞迴傅立葉轉換演算法。

2.1.1 Kinoform 純相位式電腦全像片

我們的投影系統所採用的電腦全像片為純相位式的電腦全像片。假設一函數

$$f(x, y) = a(x, y) \quad (1)$$

其傅立葉轉換

$$\mathcal{F}(f(x, y)) = A(x', y') e^{i\theta(x', y')} \quad (2)$$

若將其再作一次傅立葉轉換，則可得到

$$\mathcal{F}[A(x',y')e^{i\theta(x',y')}] = a(-x,-y) \quad (3)$$

上述的數學運算，在傅氏光學中可解讀成：一影像函數經過傅立葉轉換後的傅氏影像，可再經由一次傅氏轉換得到原來的影像，不同之處只有影像象限正負互換，也就是影像將上下顛倒左右相反。

值得注意的是，影像經過傅氏轉換後，傅氏空間的複數係數之中包含振幅係數 A 以及相位係數 $e^{i\theta}$ 。然而，我們很難找到一空間光調制器，使其穿透函數可以同時準確地調制光的振幅以及相位。一般認為，相對於振幅係數，相位係數存有較多原本的影像資訊，基於此假設，Kinoform 捨棄了振幅係數，保留了相位資訊，並用相位全像材料記錄下此資訊。由於 Kinoform 電腦全像片只有相位分佈，因此不會吸收入射光的強度而不會浪費能量。換句話說，和傳統全像一樣，純相位式的電腦全像片繞射效率較振幅式高。

由於捨棄掉 Kinoform 振幅係數，部分影像資訊將流失。此外，使用電腦計算離散傅立葉轉換，必須將相位數位化。這些過程都將導致 Kinoform 電腦全像片重建影像對比度及訊雜比下降，圖 8 所示為 Kinoform 之重建影像，因此我們必須尋求演算法來增進影像品質。

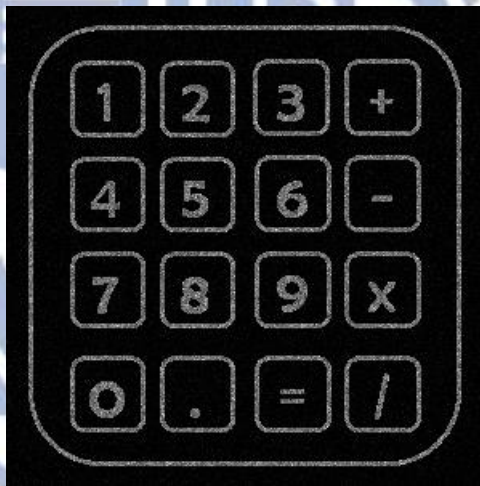


圖 8 捨去振幅資訊且相位數位化後 Kinoform 重建鍵盤影像

在遠場繞射影像為純相位式電腦全像片之傅立葉轉換的前提下，基於 Gerchberg-Saxton 演算法[13]所延伸的對稱遞迴傅立葉轉換演算法(Symmetric Iterative Fourier Transform Algorithm，以下我們以 SIFTA 簡稱之。[14])適用於我們的投影系統，以下我們將介紹此演算法的操作原理。

2.1.2 SIFTA 對稱遞迴傅立葉轉換演算法

在介紹對稱遞迴傅立葉轉換演算法前，先介紹一下其前身：遞迴傅立葉轉換演算法(簡稱 IFTA[15])。此演算法的原理，是讓影像函數在影像空間以及傅氏空間中來回遞迴並且作修正，使重建影像函數越來越接近目標影像函數。而演算法遞迴的修正方式，則是在影像空間及傅氏空間加入一個振幅限制。對於我們的系統需求來

說，我們希望在影像空間的振幅能夠與原來影像相同，因此以原來影像振幅分佈作為影像空間之振幅限制；我們希望傅氏空間的振幅能夠均勻歸一，因此就以 1 作為傅氏空間之振幅限制。

換個方式來說，我們的 Kinoform 電腦全像片，藉由此演算法遞迴的方式，將存在於振幅係數中的影像資訊加入相位係數中，使得純相位的電腦全像片能夠有更好的重建影像品質。

以下為 IFTA 詳細流程介紹：

1. 選定目標影像： $f(x, y) = a_n$ ， n 表示第 n 個畫素。
2. 設定影像空間及傅氏空間的振幅限制：

影像空間： a_n

傅氏空間：1

IFTA 遞迴開始

3. 在傅氏空間中產生一個亂數相位分佈： $r_n = e^{i\theta_n}$
4. 將此相位矩陣做反離散傅立葉轉換(IDFT)得到影像：
 $f_{n,K} = |A_{n,K}|e^{i\alpha_{n,K}}$ ，其中 K 表示第 K 次遞迴。
5. 代入影像空間振幅限制，得到修正影像： $f_{n,K}' = a_n e^{i\alpha_{n,K}}$
6. 將修正影像作離散傅立葉轉換(DFT)，得到傅氏係數 $R_{n,K} = |R_{n,K}|e^{i(\theta_{n,K})}$
7. 代入傅氏空間振幅限制，得到電腦全像片： $CGH_K = e^{i(\theta_{n,K})}$
8. 將電腦全相片做 IDFT，得到重建影像 $f_{n,K+1} = |A_{n,K+1}|e^{i\alpha_{n,K+1}}$
此時我們將重建影像 $|A_{n,K+1}|$ 與原來影像 a_n 做比較，當誤差值已收斂，則停止迴圈；若否，則繼續遞迴，重複第 5 步驟代入影像空間振幅限制，得到修正影像：
 $f_{n,K+1}' = a_n e^{i\alpha_{n,K+1}}$ 。
9. 重複第 6 步驟，持續迴圈。直到重建影像與原來影像誤差值收斂，停止迴圈。

IFTA 遞迴結束

10. 此時傅氏空間的 CGH_K 即為我們所要的 Kinoform 電腦全像片。

以上即為 IFTA 的詳細流程。實際上我們使用電腦以 Matlab 矩陣數學模擬軟體去做此演算法的計算。

另外，上述流程中，可以注意到遞迴傅立葉轉換演算法除了增進影像品質外，還可以為我們達成兩個目的：

第一，由第 10 步驟可知，可以得到我們所需要的 Kinoform 電腦全像片。

第二，由第 8 步驟可知，可以得到該電腦全像片的模擬重建影像。

演算法的這兩個步驟，讓我們可以隨時監控重建影像，並且可以藉由模擬重建影像，比較遞迴前後的影像品質。

影像空間

傅立葉空間

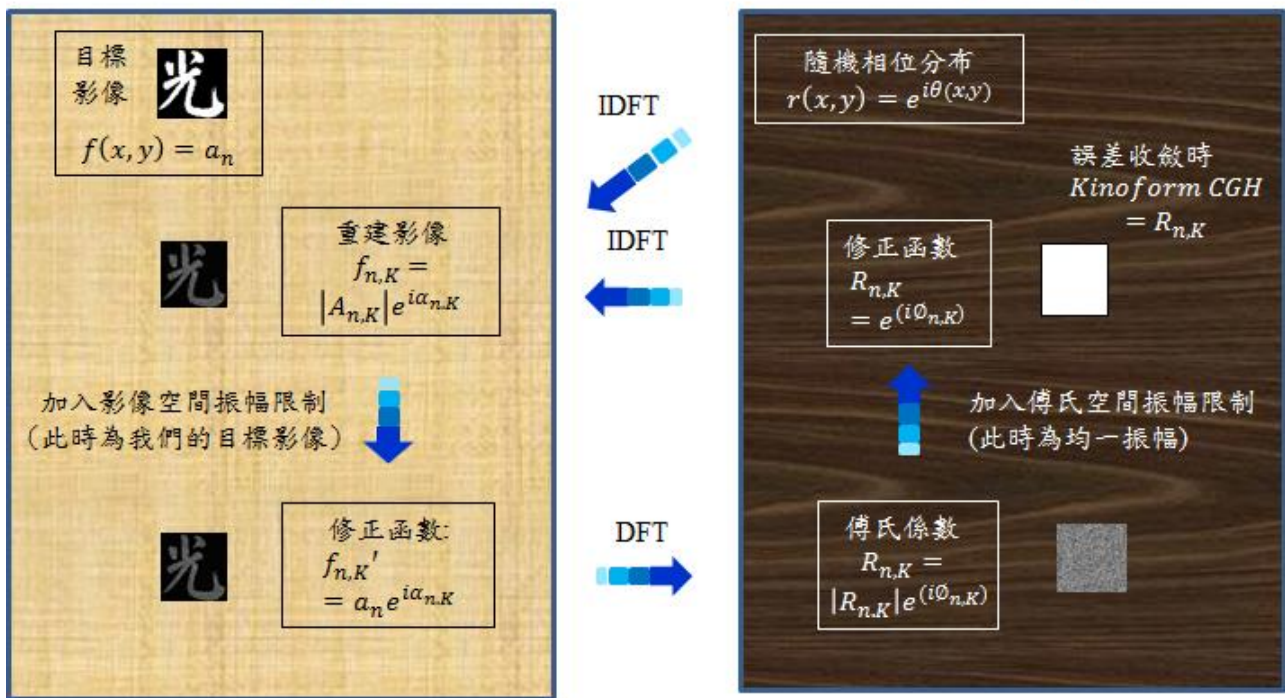


圖 9 IFTA 空間關係流程圖

介紹完詳細流程，我們以圖 9 表示 IFTA 的空間關係演算流程。從 IFTA 的流程裡可以發現，在遞迴的過程中，不管是影像空間還是傅立葉空間，我們都不處理函數的**相位**，我們稱此演算法有「相位自由度」。而正是此相位自由特性使得演算法能夠改進影像品質。

介紹完 IFTA，回到我們使用的對稱遞迴傅立葉演算法 SIFTA。

SIFTA 與 IFTA 基本上流程圖相同，最大的不同處有二，其一是根據 IFTA 的相位自由度特性，SIFTA 欲在影像空間部分加上振幅自由度，而所謂的振幅自由度，意思就是在遞迴的過程中不加上振幅限制，讓函數反覆迭代後能使重建影像比 IFTA 的運算結果更趨近於原來影像。

為了達到上述目的，用於 SIFTA 的目標影像被分成兩部分區域，一部分是訊號區、另一部份的是雜訊區。對於訊號區，我們如同 IFTA 給予振幅限制，繼續迴圈；對於雜訊區，我們不給予振幅限制，保留振幅及相位，繼續迴圈。以下，我們用一個簡單的表格來表示訊號區以及雜訊區不同空間中的自由度：

SIFTA	影像空間	傅氏空間
影像訊號區	振幅限制、相位自由	振幅限制、相位自由
影像雜訊區	振幅自由、相位自由	振幅限制、相位自由

表 1 SIFTA 之目標影像在不同空間中的自由度

我們設計目標鍵盤影像如圖 10 所示。我們給予訊號區代號 S，雜訊區代號 N，訊號區及雜訊區的選定並不是唯一，也沒有一定比例關係。從圖 10 中可以發現，我們將原本的鍵盤影像擺在左下角四分之一處作為訊號區，其他四分之三處為雜訊區，

詳細原因我們將在 2.3 節解釋。

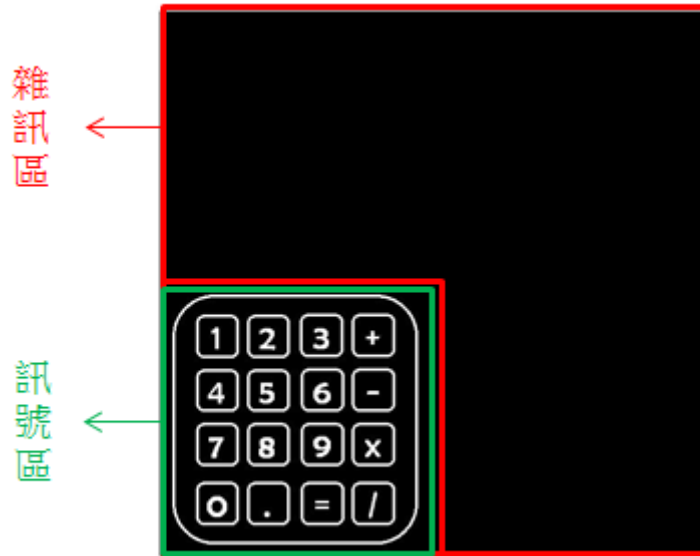


圖 10 SIFTA 目標影像之訊號區及雜訊區

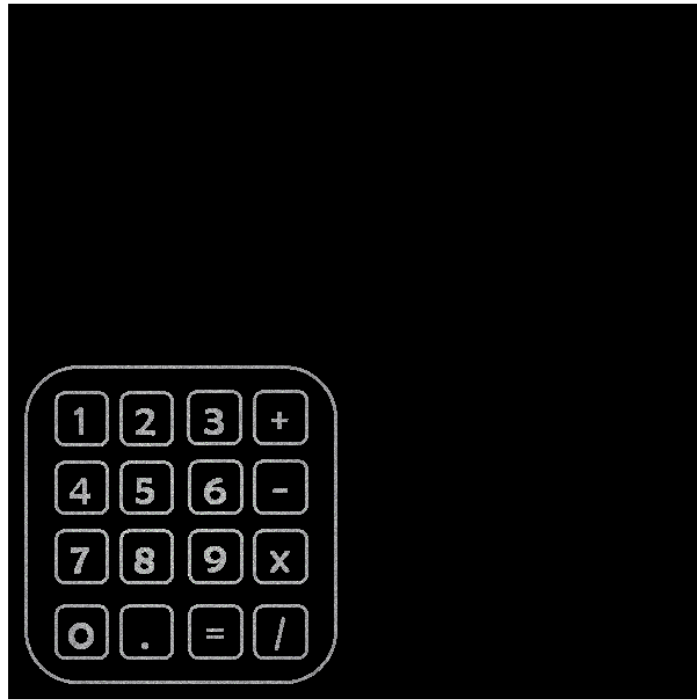
第二個不同之處，則是在影像空間中的振幅限制函數。SIFTA 的振幅限制，想法是希望能將每次遞迴之中，重建影像強度比原始影像低的部分加強；強度比原始影像高的部分減弱，就像以原始影像的強度當作對稱軸，將重建影像強度調整得更接近原始影像，再進行下一次的迴圈，也因此稱作對稱式遞迴傅立葉演算法。下式即為 SIFTA 中的振幅限制：

$$\begin{cases} \{2c|f| - |f_{n,K}\}e^{i\alpha_{n,K}}, n \in S \\ |f_{n,K}|e^{i\alpha_{n,K}}, n \in N \end{cases} \quad (4)$$

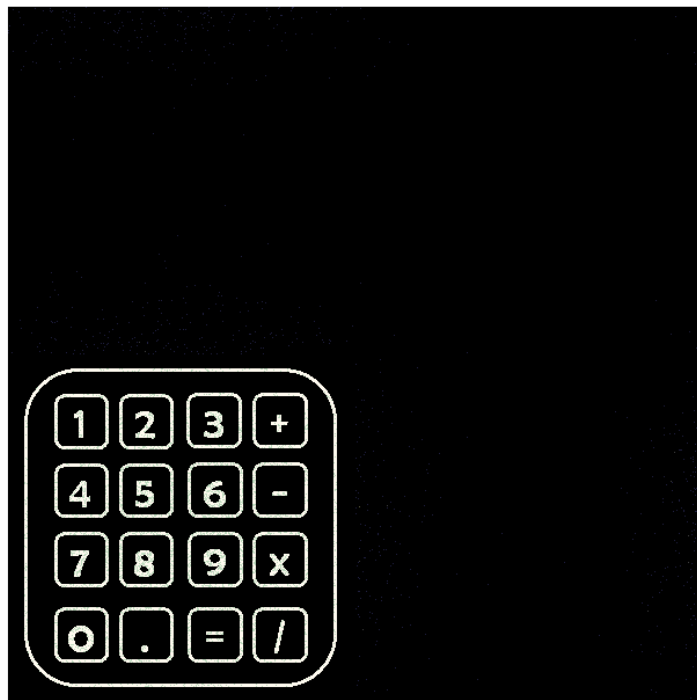
其中，

$$c = \frac{\sum f_{n,K}}{\sum f}, n \in S \quad (5)$$

舉例來說，假設以圖 7 之目標影像以 IFTA 及 SIFTA 增進重建影像品質，並設定迴圈次數 150 圈及相位階數 200 階後，計算出 Kinoform 電腦全像片，並以電腦重建影像，結果如下圖 11(a)(b)所示。由於我們擴增了原來的鍵盤影像，增加了雜訊區的部分，使得目標影像解析度(600 × 600)變成鍵盤影像解析度(300 × 300)的兩倍，因此電腦全像片以及重建影像的解析度大小也將是原來鍵盤影像的兩倍(600 × 600)。另外，從圖 11 中可以發現，SIFTA 重建影像在訊號區的對比度較 IFTA 重建影像高，訊雜比也較高，然而相對的 SIFTA 影像有些許能量散落在雜訊區。但我們注重的是訊號區的重建影像品質，故未來我們將以 SIFTA 作為產生 Kinoform 的主要演算法。



(a). IFTA 重建影像，影像畫素大小 600×600



(b). SIFTA 重建影像，影像畫素大小 600×600

圖 11 IFTA 與 SIFTA 影像品質比較

2.2 光學投影鍵盤之成像模擬

我們的光學投影系統，是使用空間光調制器顯示電腦全像片，再由一均勻平面波入射，被相位調制後的平面波，帶著相位電腦全像片的資訊，經由遠場繞射後成像。本節將以 2.2.1 小節的遠場繞射理論為基礎，在 2.2.2 小節模擬 Kinoform 電腦全像片的光學繞射投影影像。

2.2.1 遠場繞射理論

在這一小節，我們將推導一繞射孔徑經過遠場繞射後之成像，並證明成像的結果即為繞射孔徑的傅立葉轉換。

假設一繞射孔徑位於 (ξ, η) 平面，一往+z方向傳播之平面波入射此孔徑後，其出射光場繞射至一與 (ξ, η) 平面平行，且距離為 z_0 之 (x, y) 觀測平面上，如圖 12 所示。

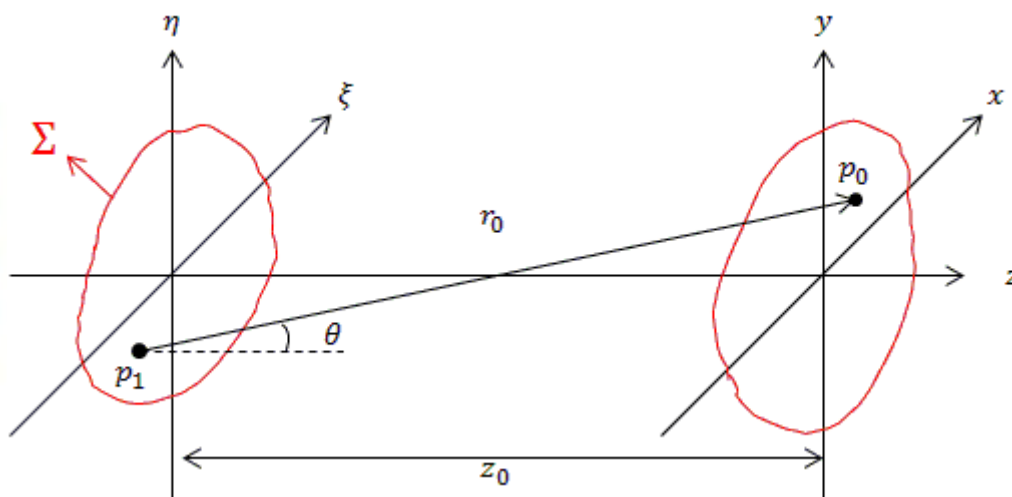


圖 12 繞射孔徑示意圖

根據惠更斯-菲涅耳光波繞射原理(Huygens-Fresnel Principle)，此孔徑之繞射光波可寫成：

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta \, dA \quad (6)$$

其中 λ 為光波波長， $U(P_0)$ 為觀測平面之繞射光場分佈， $U(P_1)$ 為平行光入射繞射孔徑後，經由繞射孔徑調制後之出射光場， r_0 為繞射孔徑上之點 P_1 到觀測平面之一點 P_0 之距離， θ 為 r_0 與 z 軸之夾角，式中 $\cos \theta$ 可寫成：

$$\cos \theta = \frac{z_0}{r_0} \quad (7)$$

將(7)式代入(6)式：

$$U(P_0) = \frac{z_0}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}^2} dA \quad (8)$$

其中 r_{01} 又可以寫成

$$r_{01} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_0^2} \quad (9)$$

考慮一般情況下繞射孔徑與繞射屏幕之距離 r_{01} 遠大於孔徑大小 Σ ，也就是當 $r_0 \gg \sqrt{\Sigma}$ 時。我們可以利用二項式展開將展開並近似：

$$r_{01} \approx z_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z_0} \right)^2 \right] \quad (10)$$

將(10)式代入(8)式：

$$U(x, y) = \frac{z_0}{j\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \frac{e^{jkz_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z_0} \right)^2 \right]}}{z_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z_0} \right)^2 \right]^2} d\xi d\eta \quad (11)$$

積分內部 $\frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z_0} \right)^2 \ll 1$ ，分母之中可消去，但分子為複數指數不可消去，整理得：

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz_0}}{j\lambda z_0} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{jk \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z_0} \right)^2 \right]} d\xi d\eta \quad (12)$$

將積分式內之指數展開，並將不影響積分之部份提出，可將繞射公式整理成：

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz_0}}{j\lambda z_0} e^{j\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z_0}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{k}{z_0}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (13)$$

(13)式即為菲涅耳繞射公式(Fresnel diffraction equation)，又稱作近場繞射(near-field diffraction)公式。

接者，考慮傳播距離夠遠的情況下，使得繞射孔徑滿足下式條件：

$$z_0 \gg \frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2} \quad (14)$$

又可寫成

$$z_0 \gg \frac{\pi D^2}{\lambda} \sim \frac{2D^2}{\lambda} \quad (15)$$

其中 D 為繞射孔徑大小之最大值，對於一個方孔孔徑來說 D 就是其對角線長度。上式即為遠場繞射條件，滿足上式條件後，繞射光強可化簡成：

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz_0}}{j\lambda z_0} e^{j\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-j\frac{k}{z_0}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (16)$$

(16)式即為遠場繞射(far-field diffraction)公式，又稱作夫朗和斐繞射公式(Fraunhofer diffraction equation)。

比較(16)式與二維傅立葉轉換公式如下：

$$\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-j2\pi(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta \quad (17)$$

其中 (u, v) 為原函數之空間頻率座標。比較兩式後可以發現，當滿足(15)式之遠場繞射條件後，繞射光場分布即為繞射孔徑之傅立葉轉換，唯常數係數不同。值得注意的是，傅立葉平面的空間頻率座標 (u, v) 與位置座標 (x, y) ，有著以下座標變換關係：

$$u = \frac{x}{\lambda z_0}, v = \frac{y}{\lambda z_0} \quad (18)$$

另外，由於人眼及一般的感光元件，遵循平方守則，人眼實際看到的光輻照度 I (irradiance) 和光強度關係如下：

$$I \propto |U|^2 \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-j\frac{k}{z z_0}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \right|^2 \quad (19)$$

由上述推導可得以下結論：

1. 由(19)式可知，我們觀察到的遠場繞射影像即為繞射孔徑函數之傅立葉轉換。
2. 由(15)式可知，只要知道電腦全像片的尺寸大小以及使用光波波長，便可以推斷出遠場繞射所需距離。

在下一個小節中，我們將實際考慮空間光調制器 SLM 顯示電腦全像片。以(19)式求出其遠場繞射光強分佈，將其平方得到人眼看見的光輻照度，最後以電腦模擬實際投影成像。

2.2.2 SLM 遠場繞射成像

假設總畫素為 $N \times N$ 之電腦全像片顯示在 SLM 上，SLM 上每單位子畫素有效顯示區為 $\Delta x \times \Delta x$ 大小之正方形，兩畫素中心間距為 Δs ，SLM 顯示電腦全像片之區塊大小為 $L \times L$ 之正方形，如圖 13 所示。

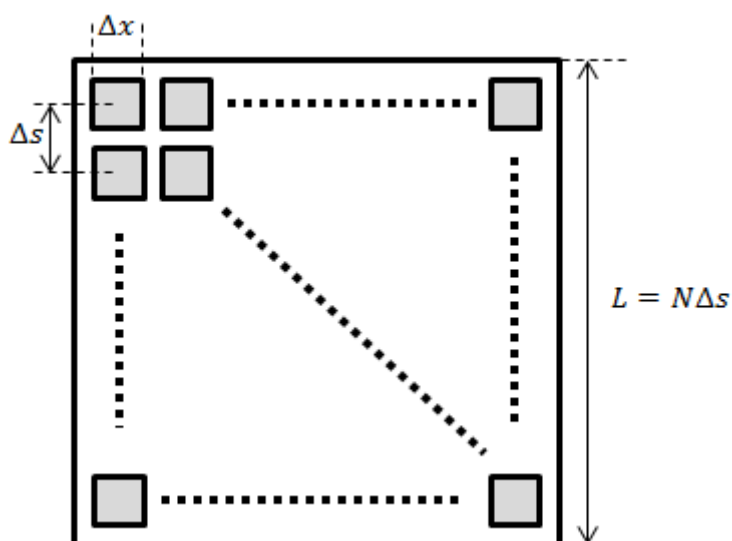


圖 13 SLM 畫素分佈示意圖

為了方便討論，這裡我們僅討論 x 方向的一維 SLM 表示式，假設有一平面波入射顯示電腦全像片的 SLM，其出射光可表示為：

$$U(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{L}\right) \left\{ \sum_{n=1}^N f_n \cdot \text{rect}\left(\frac{\xi - n\Delta s}{\Delta x}\right) + e^{i\phi_1} \text{rect}\left(\frac{\xi}{\Delta s - \Delta x}\right) * \text{comb}\left(\frac{\xi}{\Delta s}\right) \right\} \quad (20)$$

其中， $\text{rect}(\xi/L)$ 代表整個 SLM 的顯示範圍， $\text{rect}[(\xi - n\Delta s)/\Delta x]$ 代表某一畫素的有效顯示區域，乘上 f_n 即代表該畫素的複數調制量為 f_n 。 $\text{rect}[\xi/(\Delta s - \Delta x)]$ 代表的是畫素與畫素之間的間隔。「*」代表的是摺疊積分(convolution)符號，畫素間隔與 $\text{comb}(\xi/\Delta s)$ 之摺積代表間隔是以週期 Δs 重複排列。而 $e^{i\phi_1}$ 則是代表每個畫素間隔都調制一個常數相位。

將(20)式做傅立葉轉換，我們可以得到遠場繞射的光場分佈如下：

$$U(u) \propto L \text{sinc}(Lu) * \left\{ \sum_{n=1}^N f_n \Delta x \text{sinc}(\Delta x \cdot u) \cdot e^{-i2\pi n \Delta s \cdot u} + e^{i\phi_1} (\Delta s - \Delta x) \text{sinc}[(\Delta s - \Delta x)u] \cdot \Delta s \cdot \text{comb}(\Delta s \cdot u) \right\} \quad (21)$$

其中 u 為影像在傅立葉空間的空間頻率分佈，其和座標空間的關係請見(18)式。在大括號中，第一項級數 $\sum_{n=1}^N f_n \Delta x \text{sinc}(\Delta x \cdot u) \cdot \exp(-i2\pi n \Delta s \cdot u)$ 即為我們的重建影像，我們亦可以離散傅立葉轉換的方式將此級數改寫成

$$\sum_{n=1}^N f_n \Delta x \text{sinc}(\Delta x \cdot u) \cdot \exp(-j2\pi m n / N) \quad (22)$$

此級數代表所有有效畫素做離散傅立葉轉換 DFT 的結果。其中， m 表示離散傅立葉空間的座標。這項級數直接對應到我們的成像結果。比較光學及離散傅立葉轉換，我們可以發現：

$$\frac{m}{N} = \Delta s \cdot u \quad (23)$$

$$m = N \Delta s \frac{x}{\lambda z_0}, (m = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (24)$$

$$x_m = m \cdot \frac{\lambda z_0}{N \Delta s}, (m = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (25)$$

x_m 代表在成像平面第 m 個畫素的位置。由上式可知，成像平面中相鄰兩畫素的間距為

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda z_0}{N \Delta s} \quad (26)$$

有了成像平面的畫素間距後，我們可以估計完整重建影像大小。重建影像由 N 個畫素構成，故成像大小 X 為

$$X = N \cdot \Delta x = \frac{\lambda z_0}{\Delta s} \quad (27)$$

值得注意的是，影像的大小 X 僅與使用光波長 λ 、傳播距離 z_0 、SLM 的畫素間距 Δs 有關，與影像的畫素多寡無關。

由於離散傅立葉轉換特性，傅氏空間中的畫素將每 N 個畫素後重複出現。簡言之，傅氏空間中第 $N+1$ 個畫素將與第 1 個畫素相同，第 $N+2$ 個畫素將與第 2 個畫素相同，以此類推。因此第 $N+1$ 個畫素到第 $2N$ 個畫素，將構成第二個完整影像。完整影像最多重複 N 次，級數中的 n 即代表在離散傅氏空間中，某畫素或者完整影像重複第 n 次， n 為 1 到 N 之正整數。

此影像函數同時乘上一個 $\text{sinc}(\Delta x \cdot u)$ 函數，代表整個影像強度分佈將受到此 sinc 函數影響，中心強度較強而兩端強度較弱。此 sinc 函數的零點位於

$$\Delta x \cdot u = \pm 1 \quad (28)$$

代入頻率-位置座標轉換(18)式，上式變成

$$\Delta x \cdot \frac{x}{\lambda z_0} = \pm 1, \quad (29)$$

$$x = \pm \frac{\lambda z_0}{\Delta x} \quad (30)$$

在此二位置影像將被減弱至零光強。我們以圖 7 作為目標影像，並以光學重建模擬上述影像特性如圖 14：

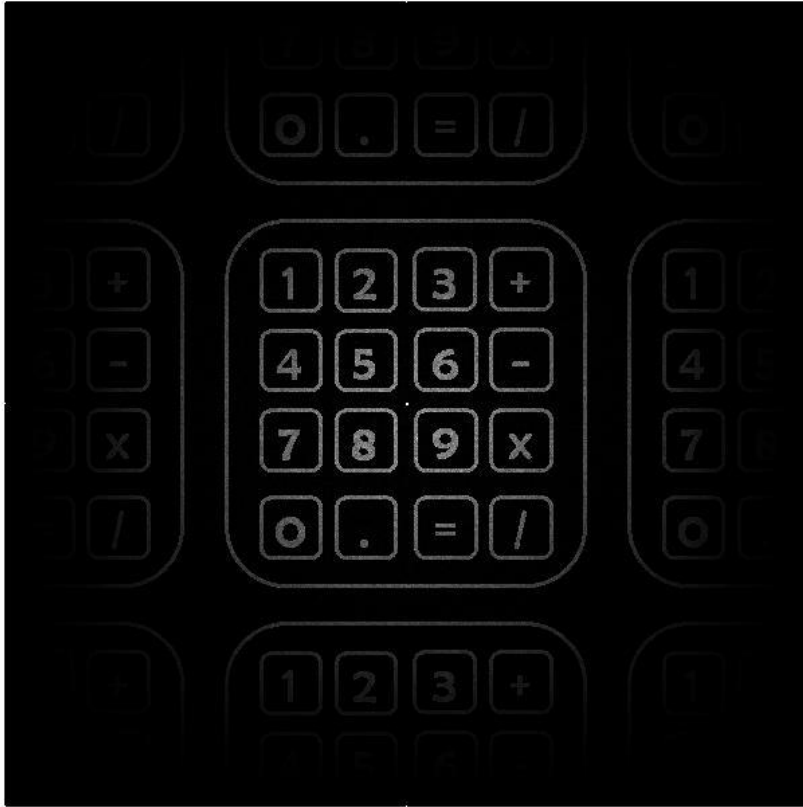


圖 14 光學重建鍵盤影像

從模擬圖中可以發現，重建影像有 sinc 的包絡面，使得周圍光強較弱。且可以注意到影像中心有個中心亮點，上下左右的邊界也都各有一個亮點，這些亮點為 SLM 的畫素所造成的 DC 亮點。我們亦可從光學繞射式子中分析這些亮點。請見大括號中第二項 $e^{i\phi_1}(\Delta s - \Delta x) \text{sinc}[(\Delta s - \Delta x)u] \cdot \Delta s \cdot \text{comb}(\Delta s \cdot u)$ ，觀察此項可發現模擬圖中的亮點即為 $\text{comb}(\Delta s \cdot u)$ 函數，而此函數則是 SLM 表示式中的 $\text{comb}(\xi/\Delta s)$ 所造成。由此 comb 函數可知，當

$$\Delta s \cdot u = n, (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (31)$$

代入頻率-位置座標轉換式，

$$\Delta s \cdot \frac{x}{\lambda z_0} = n, (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (32)$$

由此式可知，當位置在

$$x = n \cdot \frac{\lambda z_0}{\Delta s} \quad (33)$$

將會產生一個脈衝函數，而此脈衝函數正是這些 DC 亮點。而此 comb 又再乘上 $\text{sinc}[(\Delta s - \Delta x)u]$ ，可知這些 DC 亮點也有一個 sinc 函數的強度包絡面，且此包絡面與影像的包絡面不同，分析如下：

$$(\Delta s - \Delta x)u = \pm 1 \quad (34)$$

$$(\Delta s - \Delta x) \frac{x}{\lambda z_0} = \pm 1 \quad (35)$$

由此式可知，DC 亮點的 sinc 包絡面之零點位於

$$x = \pm \frac{\lambda z_0}{(\Delta s - \Delta x)} \neq \pm \frac{\lambda z_0}{\Delta x} \leftarrow \text{影像之包絡面零點位置} \quad (36)$$

最後，光學繞射式最前方的 $\text{sinc}(Du)$ 即為遠場繞射成像面上的點擴散函數 (point spread function PSF)。PSF 摺積大括號中各項，表示成像平面上構成影像的所有畫素之光強並非真是一個「點」，而是都呈現 sinc 函數分佈。我們同樣以 sinc 的零點作為成像面單一畫素的大小依據，當 $Lu = \pm 1$ 時，sinc 為零：

$$L \frac{x}{\lambda z_0} = \pm 1 \quad (37)$$

我們得到成像面單一畫素的大小為

$$x = \frac{\lambda z_0}{L} - \left(-\frac{\lambda z_0}{L} \right) = 2 \frac{\lambda z_0}{L} \quad (38)$$

在本小節中，我們以遠場繞射理論為基礎，計算出已 SLM 顯示 CGH 之遠場繞射影像，並以電腦模擬之。我們將重建模擬影像的特性結論如下：

1. 遠場繞射所需距離 $z_0 > \frac{2D^2}{\lambda}$
2. 重建影像畫素大小 $x = 2 \frac{\lambda z_0}{L}$
3. 重建影像畫素間距 $x = \frac{\lambda z_0}{N \Delta s} = \frac{\lambda z_0}{L}$
4. 重建影像大小 $X = \frac{\lambda z_0}{\Delta s}$

2.3 鍵盤影像及光學成像系統設計

經由上一節的理論推導以及模擬，我們可以直接地利用電腦模擬重建出此遠場繞射投影方法的鍵盤影像。然而，從模擬圖中可以發現影像有一些理論上的限制。首先是由 SLM 的畫素間距分佈，所導致的影像中間的中央亮點。由於此量點的能量相對較高，因此將直接地影響我們觀看影像。另外，由於畫素大小影響，影像在周圍有漸弱的趨勢，將導致影像強度失去標準。顯示二元影像（黑白影像）時即有光強強弱分佈，若要顯示灰階影像，則影像強度將完全失真。在本節之中，我們將針對上述兩個影像的缺陷做鍵盤的影像設計。

2.3.1 鍵盤影像設計

首先，由於鍵盤的光學重建影像結果將受到 sinc 函數的影響，使得中心光強度較強而兩旁的強度較弱，因此我們讓目標影像（包含振幅區及雜訊區的影像）先除上此 sinc 函數，先壓低中心亮度並拉高兩旁的強度。圖 15 即為影像作 sinc 處理前後的比較圖。

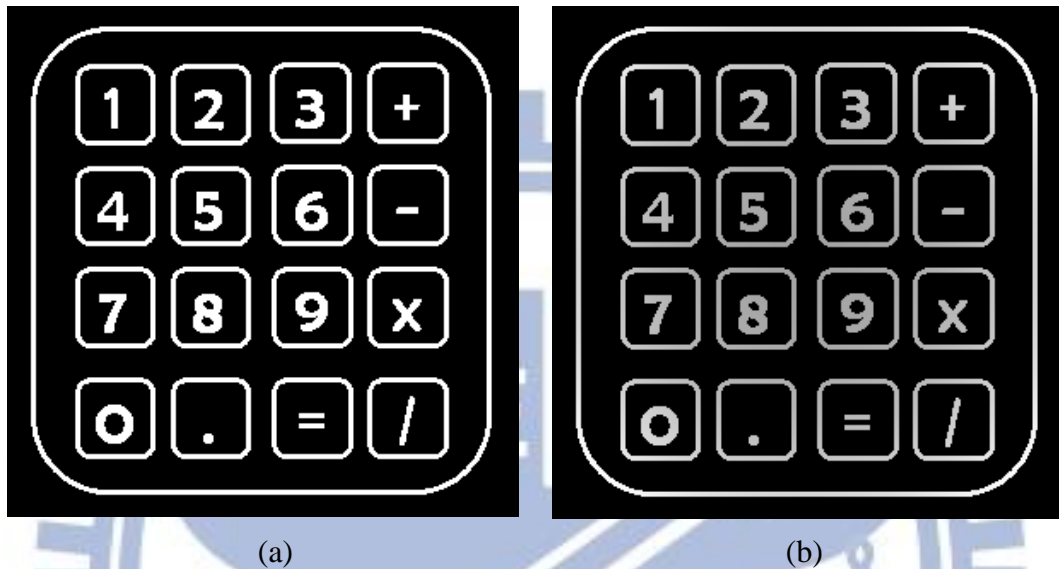
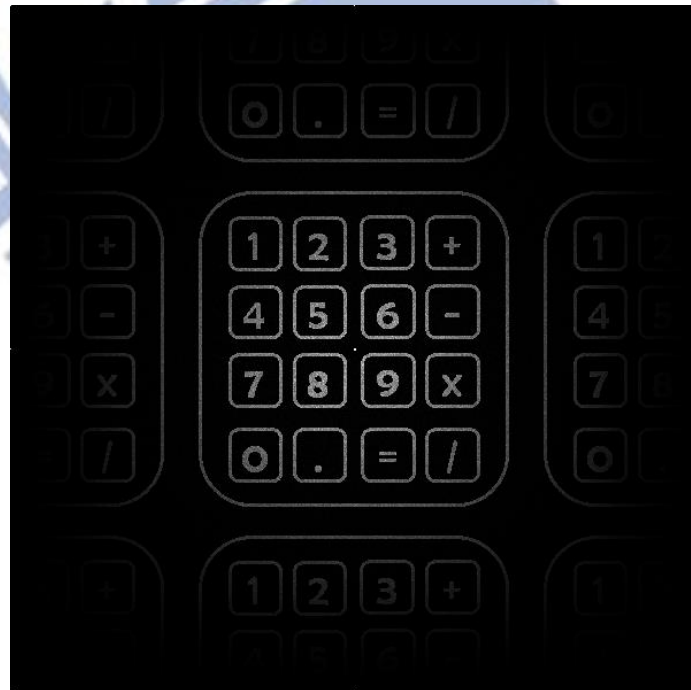
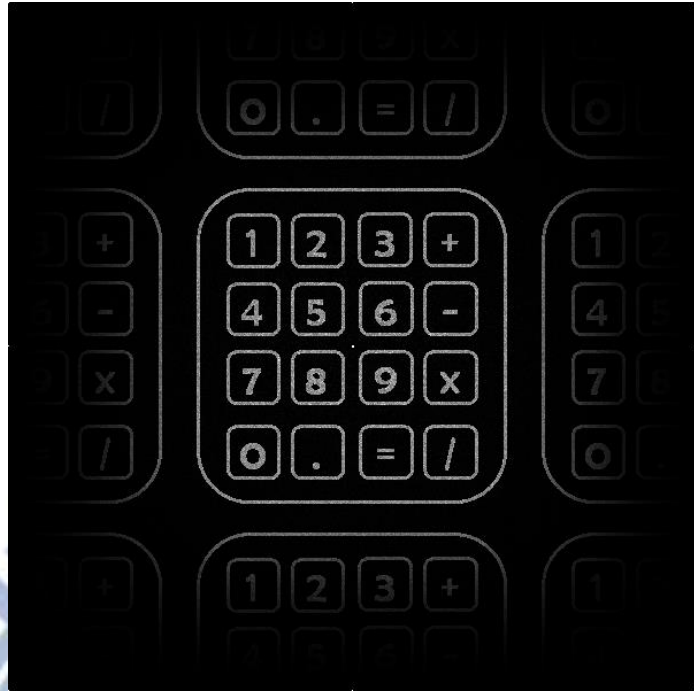


圖 15 Sinc 函數處理影像(a).處理前(b).處理後

接著我們利用光學重建公式將影像光學重建，結果如圖 16 所示：



(a)



(b)

圖 16 Sinc 修正之光學重建鍵盤影像 (a).修正前(b).修正後

從重建影像可以看出做 sinc 修正後重建影像強度較為均勻。再者，根據 SIFTA 的設計流程，我們知道進入演算法的目標影像可以利用畫素擴增的方式，將影像分成訊號區及雜訊區，如圖 10 所示。

此處我們將鍵盤影像擺置在目標左下角，原因有二，一是可以將目標影像分出訊號區與雜訊區，訊號區的部分佔左下角四分之一，也就是我們的鍵盤影像。此處的鍵盤影像，包含白色的鍵盤與黑色的背景。之所以把黑色的背景也列為訊號區，是因為訊號區的振幅在影像空間有受到限制，因此將黑白部分都設為我們的振幅限制，可以得到較高的黑白對比。而雜訊區則是另外四分之三區域。第二個將影像移至左下角的原因，則是可以避開中心亮點。圖 17 為經過設計後的目標影像。

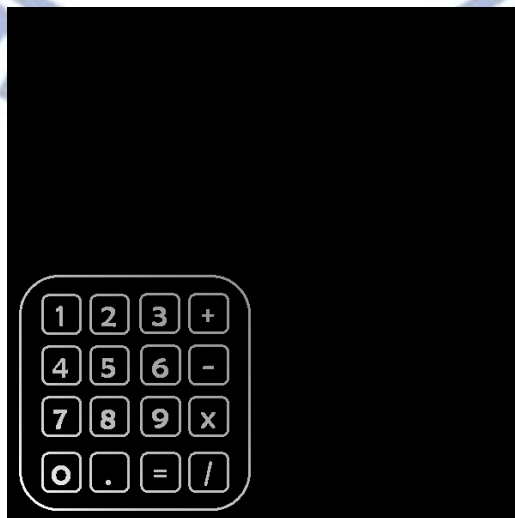


圖 17 SIFTA 之目標影像設計(sinc 修正後)

同樣的我們利用光學重建公式將影像光學重建，結果如圖 18 所示：

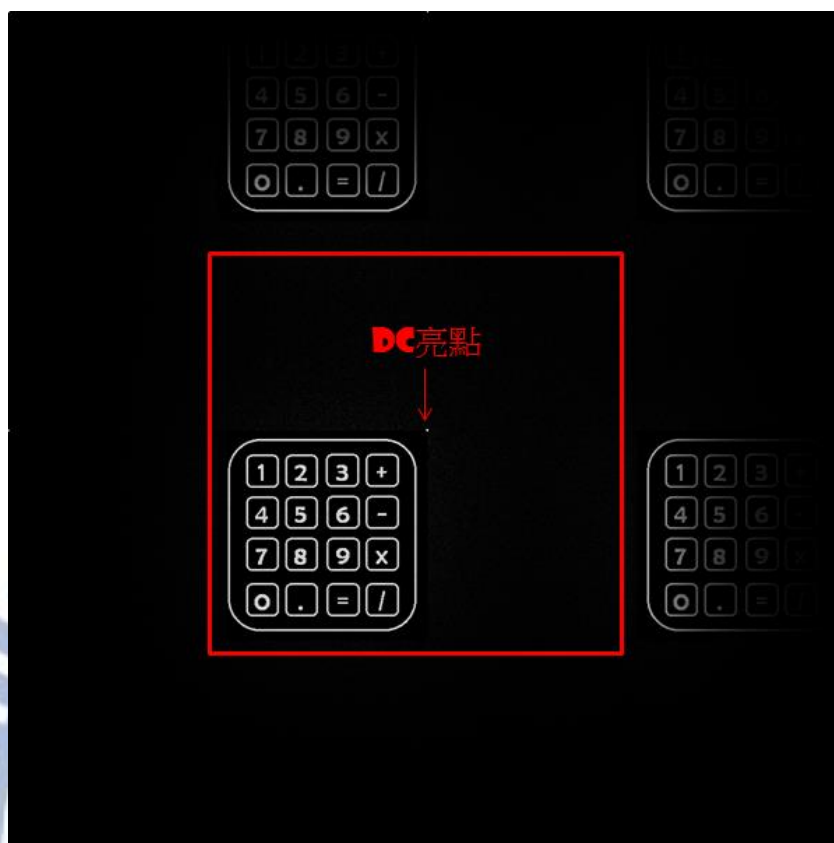


圖 18 SIFTA 光學重建影像(sinc 修正後)

藉由 SIFTA 的目標影像訊號區與雜訊區的設計，我們增加了演算法的自由度且藉此增進了影像品質，並且順利避開 SLM 的畫素間距所造成的繞射中心亮點。另外，藉由目標影像的 sinc 函數修正前置處理，我們使光學重建影像之光強更均勻。

經由上述目標影像設計，我們解決了在光學繞射理論下的成像缺陷，並模擬出最後修正後的光學重建影像結果，且得到 SIFTA 演算法計算後 Kinoform 電腦全像片。有了電腦全像片後，接著我們設計一組光學投影系統，實踐我們提出的投影方法。

2.3.2 投影系統設計

在此小節中，我們將以實驗室可取得之光學元件建立一組光學投影系統。在此之前，我們必須先知道欲投影一 $n \times n$ 大小的鍵盤影像，需要多少距離才可達到遠場繞射條件，根據(39)式：

$$z > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (39)$$

其中 D 為目標影像之對角線長度（即最大孔径）。我們的目標影像經過設計後之解析度大小為 $2n \times 2n$ （包含訊號區及雜訊區），以 SLM 顯示後，其對角線長度 D 為 $2\sqrt{2}n\Delta s$ ，代入上式：

$$z > \frac{2(2\sqrt{2}n\Delta s)^2}{\lambda} = \frac{16n^2\Delta s^2}{\lambda} \quad (40)$$

假設欲顯示 300×300 解析度鍵盤之電腦全像片的 SLM 畫素間距 Δs 為 $20\mu\text{m}$ ，而使用波長為 532nm 的綠光，則遠場繞射條件為：

$$z > \frac{16n^2\Delta s^2}{\lambda} = \frac{16 \times 300^2 \times (20 \times 10^{-6})^2}{532 \times 10^{-9}} \cong 270 \text{ (m)} \quad (41)$$

一般用於投影的顯示器之顯示畫素大小大約落在 8 至 $20\mu\text{m}$ 。由上式可知，投影距離必須在 270 公尺後成像才可以滿足遠場繞射條件，在實用上還欠缺可行性。

若我們限定投影鍵盤距離為 SLM 後 50 公分，則需要多小畫素呢？

$$z = 50 \times 10^{-2} > \frac{16 \times 300^2 \times \Delta s^2}{532 \times 10^{-9}} \quad (42)$$

$$\Delta s < 0.43 \mu\text{m} \quad (43)$$

現今的微影製程技術，製作此種畫素尺寸的 SLM 晶片是可能做得到的。但由於此畫素大小已略小於波長，純量繞射的理論已不適用，這部分超越我們的投影理論，在此暫不討論。

為了達到將 CGH 作傅立葉轉換之目的，我們設計了一個傅立葉透鏡成像系統如圖 19 所示：

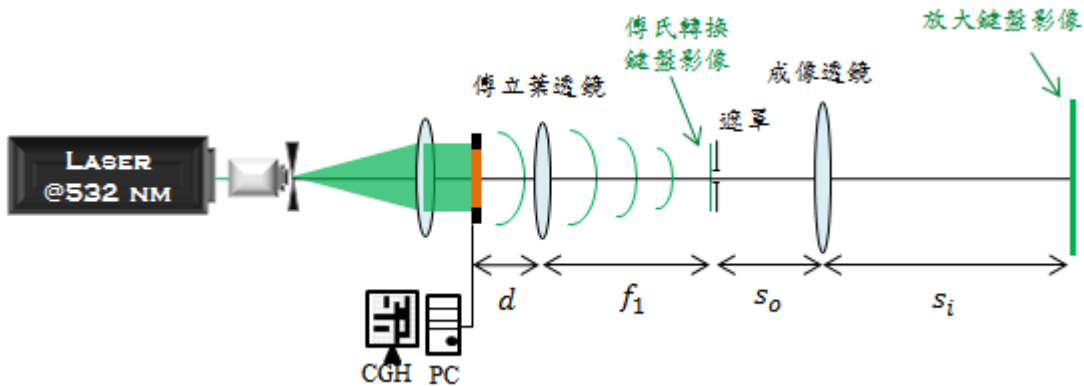


圖 19 光學系統設計概念

自雷射出光後，經由擴束並入射輸入 CGH 之 SLM 開始繞射，此時我們在距離 SLM 之 d 處擺上一個焦距為 f_1 傅立葉透鏡，使得在焦距面上的光場分佈為：

$$U(x, y) = \frac{e^{jk(d+f_1)}}{j\lambda f_1} e^{j\frac{k}{2f_1}\left(1-\frac{d}{f_1}\right)(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-j\frac{k}{2f_1}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (44)$$

比較上式及傅立葉轉換公式，我們可知在焦平面上的繞射光場 $U(x, y)$ 正是 SLM 平面光場 $U(\xi, \eta)$ 之傅立葉轉換。因此在焦平面上將出現鍵盤影像，由於我們只看得見強度分佈，積分式前的相位項並不影響成像。焦平面鍵盤影像尺寸大小同樣以 2.2 節分析可得到：

$$X = \frac{\lambda f_1}{\Delta s} \quad (45)$$

此時影像大小與傅立葉透鏡焦距相關。根據實驗經驗，此時的鍵盤影像過小(小於兩

公分)，我們可以配合具放大影像效果之成像透鏡將鍵盤影像放大。我們在距離焦平面後 s_o 處擺上焦距 f_2 之成像透鏡，此成像透鏡遵守成像公式：

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_2} \quad (46)$$

此時的放大倍率 M 為像距與物距比值：

$$M = \frac{s_i}{s_o} \quad (47)$$

放大後的鍵盤影像大小 X' ，則可以表示為

$$X' = MX = \frac{s_i \lambda f_1}{s_o \Delta s} \quad (48)$$

藉由調整物距 s_o 及像距 s_i ，我們可以控制想要的鍵盤影像大小。本章我們討論光學系統的設計並探討此投影方法的可行性，更詳細的光學架構、實驗數據及投影影像成果我們將在第四章闡述並討論。

2.4 電腦全像片參數分析

利用 SIFTA 設計的相位電腦全像片，影響重建影像品質原因主要有二：第一為演算法中的遞迴次數。理論上遞迴迴圈次數愈多，影像品質愈佳。然而遞迴圈數的增加亦增加演算法的計算時間。且由模擬後我們可以發現，隨著遞迴的圈數增加，影像品質增進的速度愈慢，甚至停止增加影像品質。

第二個影響影像品質的因素是電腦全像片的相位階數。換句話說，傳統全像調制的相位在 0 到 2π 之間是連續值；不同於傳統相位全像片，電腦全像片的相位調制是離散的。因此 0 到 2π 細分的階數多寡，將會影響電腦全像片的重建影像品質。

2.4.1 方均根誤差值

上述兩種重要的影響因素都將決定影像品質。在此一小節，我們定義重建影像的方均根誤差值（Root Mean Square Error，以 RMSE 簡稱之），並以此來估計影像品質的好壞。其定義如(49)式：

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left(|f_{m,n}|^2 - P |h_{m,n}|^2 \right)^2} \quad (49)$$

其中，

$$P = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (|f_{m,n}|^2)}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (|h_{m,n}|^2)} \quad (50)$$

(49)式中 M 、 N 代表影像之解析度為 $M \times N$ ， $f_{m,n}$ 為目標影像之複數振幅分佈函數， $h_{m,n}$ 為重建影像之複數振幅分佈函數。由於電腦之快速傅立葉轉換(FFT)等計算將導致影像的絕對強度失真，因此我們定義 P 為歸一化係數，目的則是讓目標影像

及重建影像之能量能處在同一標準下比較。

RMSE 的主要物理意義在於比較重建影像與目標影像的差異。取方均根即是找到重建影像與目標影像的平均誤差正值。當迴圈數增加時，RMSE 值將會下降，最後收斂於某值。為了判斷收斂值，我們定義收斂判斷值 E_l ：

$$E_l(K) = \frac{E_{rms}(K-1) - E_{rms}(K)}{E_{rms}(K-1)}。 \quad (51)$$

$E_l(K)$ 表第 K 迴圈時， K 迴圈及 $K-1$ 迴圈 RMSE 減少量的比例，我們定義當 $E_l(K) < 0.001$ 時，再增加遞迴運算亦無法減少影像誤差量，運算此時達到收斂標準，可以停止迴圈。

同樣地，在固定一迴圈數的情況下，亦可用 RMSE 判斷相位取樣階數多寡之影響。此時收斂判斷值 E_p ：

$$E_p(K) = \frac{E_{rms}(K-1) - E_{rms}(K)}{E_{rms}(K-1)}。 \quad (52)$$

同樣定義當 $E_p(K) < 0.001$ 時，再增加相位階數亦無法減少影像誤差量，運算此時達到收斂標準，此時的相位階數即可使用。

2.4.2 遞迴圈數影響

在此我們同樣以圖 7 之鍵盤影像作為目標影像。鍵盤影像之總畫素為 300×300 ，經過影像設計後變為 600×600 。以 RMSE 作為縱軸對迴圈數做圖，觀察 RMSE 隨著迴圈數的變化趨勢。此時為避免相位取樣改變的雙重參數影響，我們固定相位取樣為 200 階，並設定迴圈數從 1 至 200 圈。

由於我們最後只觀察鍵盤影像的部分，因此我們只以設計影像中左下角四分之一部分，計算 RMSE 值。其模擬結果如圖 20：

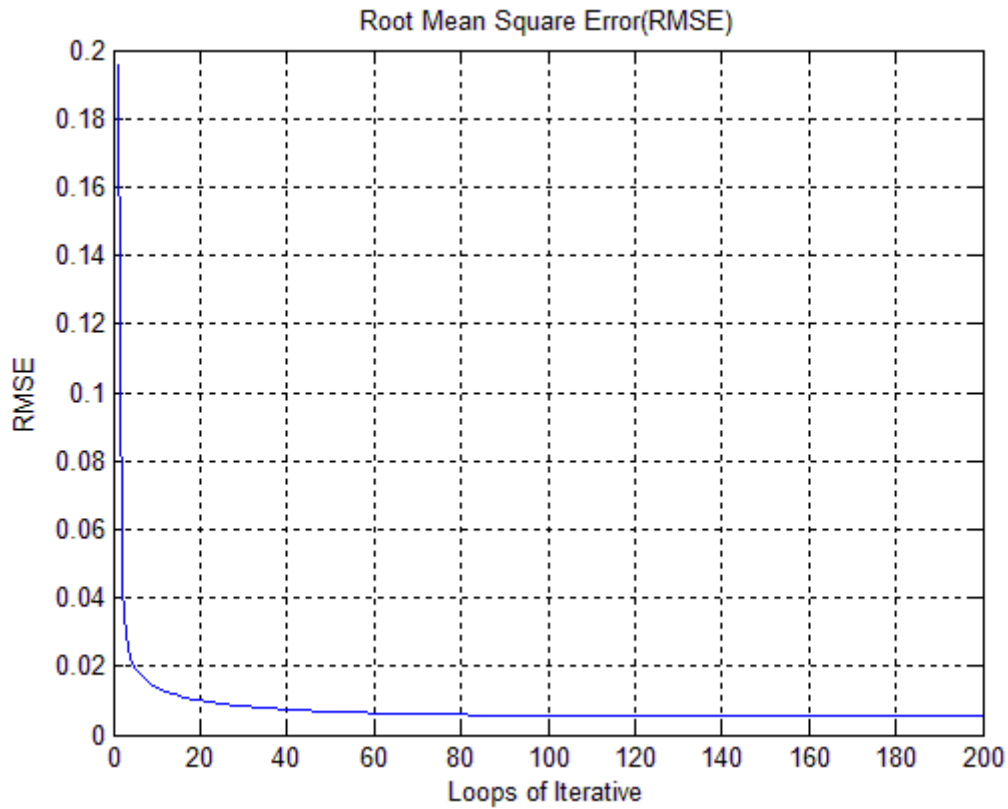


圖 20 RMSE 對迴圈數作圖

觀察此趨勢圖可以發現，RMSE 的值在迴圈達到 40 圈時，就已經達到判斷條件。需要注意的是，不同的圖形所需要的圈數不同，然而其差異並不大，且直接觀看圖形也不會察覺差異，因此往後 SIFTA 演算法的迴圈圈數將設定為 40 圈。

表 2 為重建影像隨著迴圈數增加所對應的改變趨勢。從表中亦可看出當迴圈數到達 40 圈後，影像品質進步已經有限。

遞迴圈數	1	20
RMSE 值	0.1952	0.0099
SIFTA 電腦模擬重建影像		
遞迴圈數	40	200
RMSE 值	0.0074	0.0053
SIFTA 電腦模擬重建影像		

表 2 SIFTA 設計不同迴圈數之電腦模擬重建影像

2.4.3 相位取樣影響

接著，我們以 SIFTA 演算法的迴圈次數 40 次為基礎，探討相位取樣的階數對影像造成的影響。

我們將相同鍵盤圖形設計為 SIFTA 的目標影像，並將 0 至 2π 的相位調制量做階數變化，從 2 階(即分成 0、 π 、 2π)開始，直到細分為 200 階(階距為 0.01π)。將 RMSE 與相位階數變化作圖 21 如下：

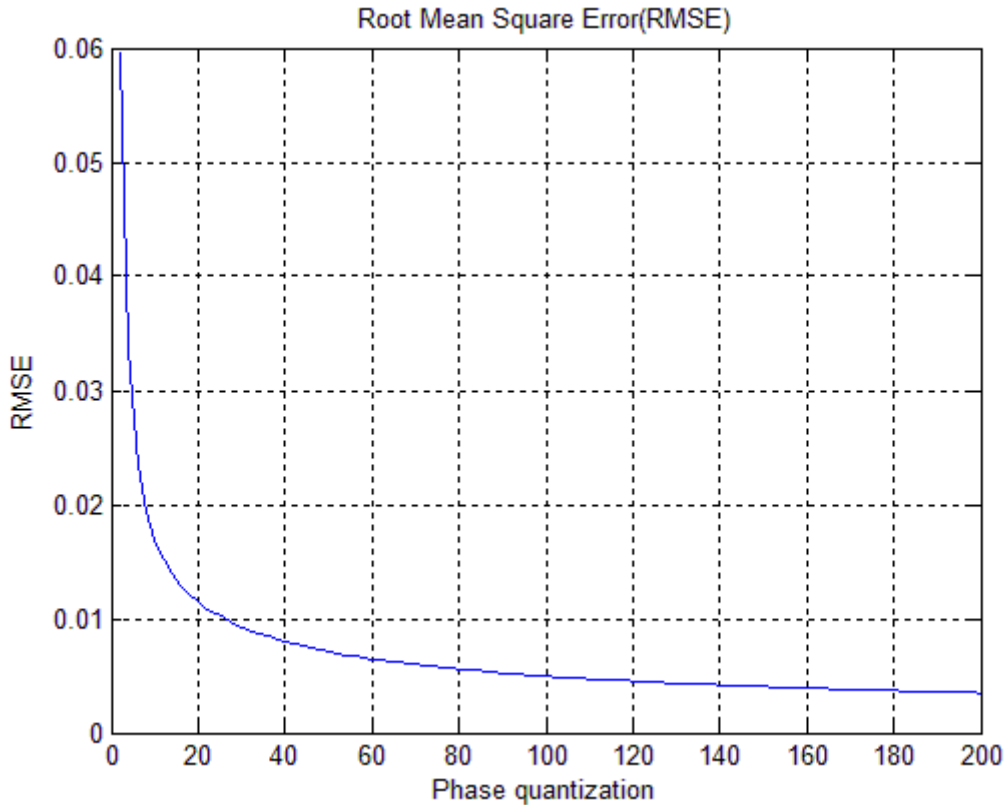


圖 21 RMSE 對相位階數作圖

由圖 21 可知，當相位階數取到 80 階時，達到判斷標準。但此時再增加相位階數增進影像品質尚有幫助。由於相位的取樣階數對演算法的計算速度沒有影響，故我們最後仍將相位分成 200 階。

表 3 為重建影像隨著相位階數增加所對應的改變趨勢。從表中亦可看出當相位階數超過 80 階後，影像品質進步已經有限。此外，本模擬讓微影製程製作品片型空間光調制器有一個參考依據。不同於可以顯示 8 位元(256 灰階)的液晶顯示器，微影製程一次曝光只可增加一個位元，且每一次曝光都含有許多製程參數設定需要考量，尤其是曝光位置校準困難，使得提高相位階數有一定困難度。但從表格中可以發現，當相位取樣階數在 4 階(2 位元)時，即使對比度較差，但已可觀看完整鍵盤影像。由於 2 位元所需要的曝光次數較少，較容易實現晶片型空間光調制器的製程。

相位階數	2	4
RMSE 值	0.0595	0.0590
SIFTA 電腦模擬重建影像		
相位階數	80	200
RMSE 值	0.0086	0.0060
SIFTA 電腦模擬重建影像		

表 3 SIFTA 設計不同相位階數之電腦模擬重建影像

在第二章之中，我們先介紹了此繞射投影系統所使用的電腦全像片，並提出演算法 SIFTA 來增進電腦全像片的重建影像品質。接著以繞射理論為基礎，分析電腦全像片之光學繞射成像結果。藉由 SIFTA 的目標影像訊號區及雜訊區設計，以及 sinc 函數的修正，使得光學繞射成像鍵盤能夠強度均勻分布。根據遠場繞射的理論計算，我們設計一套光學系統並探討此投影技術的可能性。最後，我們定義方均根誤差值量化了影像品質，並分析演算法中的重要參數對影像品質的影響。

在瞭解上述的成像理論後，下一個章節中將實際考量用於顯示設計好的電腦全像片之空間光調制器。

第 3 章 矽基液晶顯示器相位調製特性量測

本論文所使用的空間光調制器為矽基液晶顯示器(Liquid crystal on silicon，往後以 LCoS 簡稱之)，本章中我們將詳細探討其光學調制特性。由液晶光學理論延伸，說明其是如何顯示相位，接著利用實驗的方式實際量測 LCoS 的振幅及相位調制曲線，證實其可用於顯示相位分佈複雜的 Kinoform 電腦全像片。

3.1 LCoS 顯示器簡介

我們所使用的 SLM 是由 HOLOEYE 公司出產，型號為 LC-R 2500 之 LCoS。其為一種液晶與 CMOS 電路製程結合之液晶顯示器。此款 LCoS 為反射式液晶顯示器，結構如圖 所示：

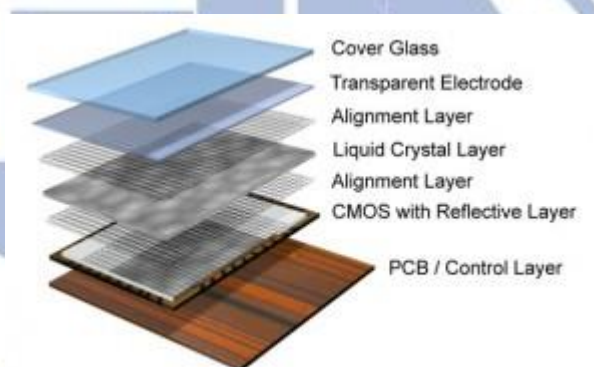


圖 22 LCoS 分層結構圖

分層結構圖中，正中間為液晶層，其上下層是液晶的配向版，用於配向液晶層分子初始偏轉角度。配向版上下方是透明電極層以及 CMOS 層，藉由 CMOS 控制電路與透明電極之間加入電壓，我們可以改變液晶層的液晶分子傾角(tilt angle)，以達到控制液晶層光學特性之目的。最上層為玻璃保護層保護內部結構。最下層為軟性電路板，接到 LCoS 控制器。完整的 LC-R 2500 儀器如圖 23：



圖 23 LC-R2500 空間光調制器 (含控制器及顯示器)

(資料來源：<http://holoeye.com/spatial-light-modulators/discontinued-devices/>)

反射式液晶顯示器與穿透式顯示器最大的不同，在於反射式顯示器之 CMOS 驅動電路位在反射層底下，而穿透式的電路則是位於畫素之間。反射式顯示器中的畫素開口率因此較穿透式顯示器高。所謂的畫素開口率，指的是單一畫素實際有顯示影像的區域比例，其餘部分則是畫素的間隙。一般穿透式的液晶之開口率約為 75%，而 LC-R 2500 型號的反射式液晶顯示器可以達到 93% 開口率。

有關 LC-R 2500 更詳細的規格見下表：

Description		Units
Outer package dimensions	35 (W) x 35 (H) x 3.7	mm
Active area dimensions	19.5 x 14.6 (0.97" diagonal)	mm
Screen aspect ratio	4 (H) : 3 (V)	
Display resolution	1024 (H) x 768 (V)	pixels
Electronic image adjustment	± 4 (H and V)	pixels
Pixel pitch	19 x 19	μm
Pixel configuration	Orthogonal	
Gray Levels	256 (8 bit)	
Optical efficiency: Reflectance	> 75	%
Aperture ratio	> 93	%
Optical Mode	Reflective, monochrome	
Liquid crystal type	45° twisted nematic	
Polarizer Mode	Normally black	
Max. refresh frame rate	75	Hz
Illumination (max)	0.5	W/cm^2
Cell gap	5.5	μm
Response time	16	ms

表 4 HOLOEYE LC-R2500 規格表

由上表可知，此型號之 LCoS 為 45 度偏轉的向列扭轉型液晶。可輸入的灰階為 256 階(8 位元)，解析度為 1024×768 ，單一畫素間距為 $19\mu\text{m}$ 。在下一節，我們將簡述何謂向列扭轉型液晶以及其光學特性。

3.2 向列扭轉型液晶光學特性

所謂液晶，指的是一種單光軸(uniaxial)的非等向性(anisotropic)雙折射液態晶體。我們稱橢圓液晶分子的長軸方向為液晶指向向量(director)，平行於此方向的折射率為 n_e ，垂直於此方向的折射率為 n_o 。如下圖 24 所示，當某液晶材料的 n_e 大於 n_o 時，我們稱之為正型液晶，反之為負型液晶。當存在一外加電場時，液晶內的電偶極將受到電場驅動，克服液晶的恢復能(彈性能)，使液晶分子產生偏轉，而正型液晶將會使 director 偏轉至平行於外加電場，負型則使 director 偏轉至垂直於外加電場。

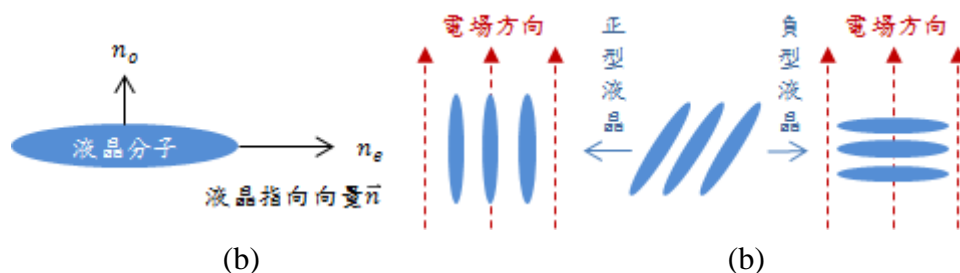


圖 24 正負型液晶分子外加電壓示意圖(a)液晶分子 (b)外加電壓偏轉示意圖

由於液晶保有液體的流動特性以及固體的排列特性，故衍伸出一種非常適合作為開關(on-off)的向列扭轉型液晶(twist nematic liquid crystal-TNLC)。此種液晶盒在製作時，會在其上、下基板做配向的動作，所謂配向指的是在上下基板加入某個特定的邊界條件，液晶分子會根據上、下基板的邊界條件自動排列以達到最低的位能。最常使用的配向方法是利用基板板面凹凸不一致，讓液晶排列成想要的分佈方式，例如平行刮痕就可讓液晶平行整齊排列。圖 25 即是上、下基板配向夾 45 度的液晶盒，由於上、下基板邊界條件的不同，在基板之間的液晶，將會漸進式的偏轉以達到最低位能。

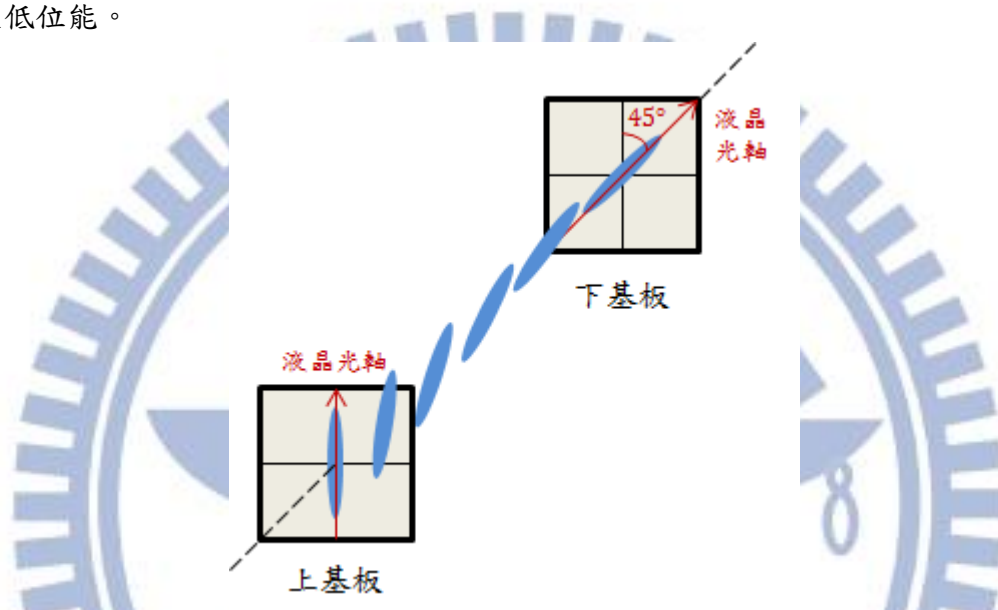


圖 25 45°向列扭轉液晶盒示意圖

在無外加電壓的情況下，根據液晶波導特性(Waveguiding in TN-LC，即 Adiabatic Following 現象)，一線偏振入射光從上基板進入，其偏振方向將隨著液晶分子的指向向量跟著轉動，到達下基板時，線偏振會與入射時夾45°，經由反射層反射後，沿著原方向轉至上基板，最後出射光的偏振態將與原偏振態平行。

由於 LCoS 結構上並沒有附加偏振片來控制入射液晶層的偏振態，我們常在光學系統中進入 LCoS 的位置放置偏振片，出射 LCoS 後再放置檢偏片。藉由線偏振光進入液晶層後出射液晶層後相位改變，再由擺放檢偏片的角度來改變出光振幅。偏振片、TN-LC 液晶層、檢偏片之組合系統我們稱為空間光調制系統(簡稱為 SLM 系統)，並以此系統達到調制入射光的振幅及相位之目的。

3.3 LCoS 相位及振幅調制特性之模擬分析

由上一小節論述可知，藉由在 TN-LC 外加偏振片以及檢偏片，可以調制入射光的相位以及振幅。此處我們引用瓊式矩陣運算(Jones calculus)，去計算入射光經過此 SLM 系統的實際振幅及相位改變量。

Jones calculus 非常適合用於分析光的傳播，可以藉由簡單的矩陣運算，獲得入射光被光學系統的調制影響。以下將簡介 Jones calculus 基本的操作原理。首先，定義實驗室坐標系 xyz，一線性偏振光朝向+z 方向傳播。光的電場可以表示成：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y})e^{i(kz-\omega t)} \\ &= E_0(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta)e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}\quad (53)$$

其中， \vec{E}_0 為入射光之振幅向量， E_{0x} 為振幅在 x 方向上的分量， E_{0y} 為振幅在 y 方向上的分量， k 為波數， ω 為入射光之角頻率， θ 為振幅向量與 x 軸之夾角。

若我們以 Jones calculus 的方式表示，省略 $e^{i(kz-\omega t)}$ 波動的傳播項，可以將此線性偏振光表示成 Jones vector：

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}\quad (54)$$

當 x 方向的電場若和 y 方向的電場存在著一相位差 $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ ，則雷射偏振態將會成為橢圓偏振態，此橢圓偏振電場可以表示成

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\varphi} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\Delta\varphi} \end{bmatrix}\quad (55)$$

由於 x 方向與 y 方向的電場存在的相位差有各種可能，故上式橢圓偏振電場可用於表示任意偏振態。舉例來說 $\Delta\varphi = 0$ 時，(55) 式將回到 (54) 式成為線偏振；當 $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ 時，電場之偏振態為圓偏振。

我們常以 Jones vector 表示電場偏振態，並以 Jones matrices 來表示光學元件。將光學元件矩陣與電場向量乘積，可以用來表示此電場向量通過光學元件的過程。矩陣乘積後得到新的電場向量，此向量即代表通過元件後偏振態及 x 方向上和 y 方向上的振幅及相位值。表 5 為常見光學元件之瓊式矩陣表示式。

介紹完液晶的特性以及瓊式矩陣的基本原理，接下來將實際考慮我們所使用到的 SLM 系統，比較入射光及出射光的 Jones vector，算出通過此系統之振幅及相位調制量。

以光軸的角度來看入射光經過 SLM 系統，光路可等效於圖 26，入射光束往正 z 軸傳播，平面波經過了半波板調整線性偏振角度使線偏振方向與 x 軸夾 θ 角，再入射 LCoS，接著反射出 LCoS (圖中標示為 LCoS')，最後透過檢偏片，得到系統最後出射光。

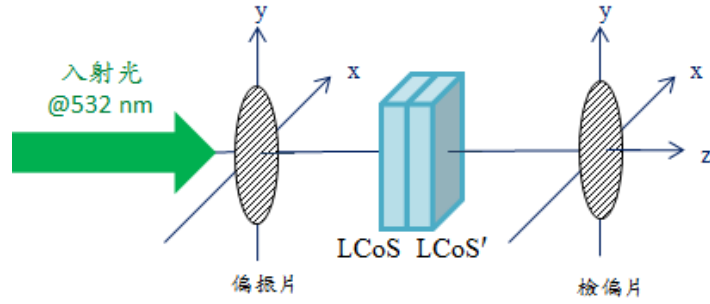


圖 26 SLM 系統光軸等效光路圖

光學元件	對應瓊式矩陣
線偏振片-穿透軸平行於 x 方向	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
線偏振片-穿透軸平行於 y 方向	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
線偏振片-穿透軸平行於 $\pm 45^\circ$ 方向	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$
線偏振片-穿透軸與 x 軸夾 θ 角	$\begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$
四分之波版-快軸平行於 x 方向	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
四分之波版-快軸平行於 y 方向	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
半波板-快軸與 x 軸夾 θ 角	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

表 5 常見光學元件之瓊式矩陣表示式

根據 Jones calculus，圖 26 之入射光與出射光關係如下：

$$\vec{V}' = A\tilde{M}M\vec{V} \quad (56)$$

其中， \vec{V} 為通過偏振片後入射 LCoS 之 Jones vector， \vec{V}' 為出射光之 Jones vector， M 為

LCoS 之光學元件 Jones matrix, \tilde{M} 為經由下基板反射後, 反向 LCoS 之 Jones matrix, A 則為檢偏片之 Jones matrix。從 Pochi Yeh 教授與 Claire Gu 教授所著之 Optics of Liquid Crystal Displays[16]中查表, 得到檢偏片以及 TN-LC 之 Jones matrices 如下:

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta' & \cos \theta' \sin \theta' \\ \cos \theta' \sin \theta' & \sin^2 \theta' \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & \phi \frac{\sin X}{X} \\ -\phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

由書中推導的過程可知, 在垂直入射的前提下, LCoS 下基板反射的光看到的反向 LCoS 矩陣 \tilde{M} , 恰等於原 LCoS 矩陣取轉置後的結果。

$$\tilde{M} = M^t = \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & -\phi \frac{\sin X}{X} \\ \phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (59)$$

其中, θ' 為檢偏片穿透軸與 x 軸夾角, ϕ 為 TN-LC 上下基板配向夾角, 也就是上下基板液晶分子所扭轉的總角度, Γ 為光經過液晶分子快軸及慢軸方向的相位延遲量,

最後 $X = \sqrt{\phi^2 + (\Gamma/2)^2}$ 。需要注意的地方是, 此 TN-LC 瓊式矩陣是由上基板的 director 平行於 x 軸為前題所推導而來。

假設偏振片與 x 軸夾 θ 角, 則入射光之偏振態:

$$V = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (60)$$

經過矩陣與向量相乘後得到以下式子:

$$\vec{V}' = A \tilde{M} M \vec{V} \quad (61)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta' & \cos \theta' \sin \theta' \\ \cos \theta' \sin \theta' & \sin^2 \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & -\phi \frac{\sin X}{X} \\ \phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & \phi \frac{\sin X}{X} \\ -\phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

=

$$= Z \begin{bmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\text{其中 } Z = \frac{\cos(\theta - \theta') \left[\cos^2 X + (\phi^2 - (\Gamma/2)^2) \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 - i \frac{\Gamma \sin 2X}{2X} \right]}{-i \sin(\theta - \theta') \Gamma \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2} \quad (63)$$

複數調制量 Z 亦可以整理成：

$$Z = E'_0 \exp i\varphi' \quad (64)$$

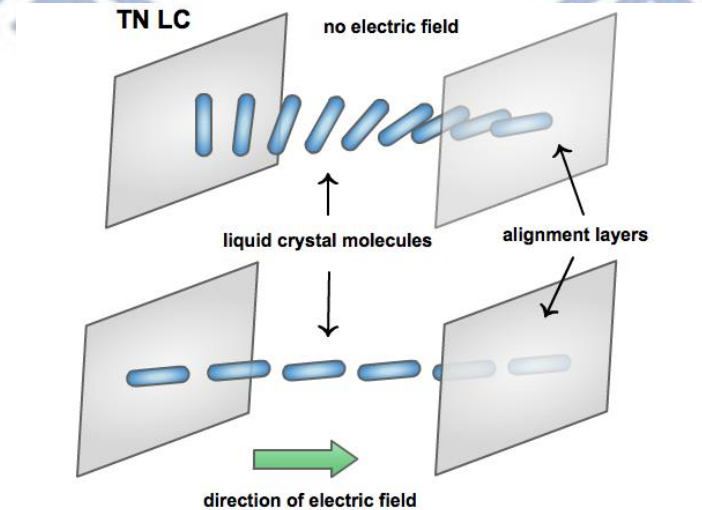
此時 E'_0 即為振幅調制量， φ' 為相位調制量。

舉例來說，假設使用的光波長為 532 nm，TNLC 液晶扭轉 45 度，未加電壓之 $n_e - n_o$ 值為 0.23（外加電壓後降為 0）、液晶層厚度 d 為 5.5 μm ，快、慢軸相位延遲量為 $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d$ ，入射光偏振方向為 0° ，檢偏片的的角度為 30° ，則在無外加電壓的情況下，出射光之複數振幅 Z 如下：

$$Z = 0.795 e^{i1.193\pi} \quad (65)$$

由此可知，入射光經過此 SLM 系統之振幅調制為 0.795，相位調制為 1.193π 。Jones calculus 讓我們能準確地判斷線偏振光通過 LCoS 及檢偏片後的振幅以及相位調制量。

然而，此處我們尚未考慮液晶存在外加電壓的情況，現在我們將更深入地討論若液晶層存在外加電壓時的情況。圖 27 為 TN-LC 在外加電壓後的液晶偏轉情形。從圖(a)可以發現，正型液晶在外加電壓後將倒向電場方向。如圖(b)所示，隨著電壓的增強，入射光看到的 n_e 值愈來愈小，直到液晶完全倒向電場方向。此時入射方向與液晶 director 平行，任何偏振角度的線偏振，都只會看到 n_o 的折射率。換句話說，隨著外加電壓上升， $n_e - n_o$ 值將越來越小，直到液晶完全平行電場方向， $n_e - n_o$ 值將降為零。



(a)

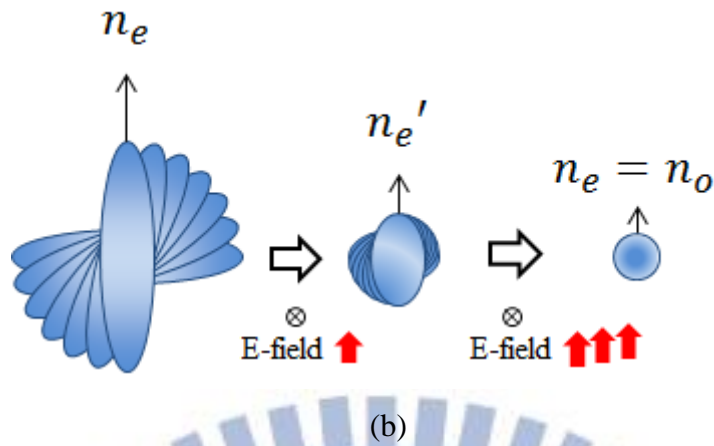
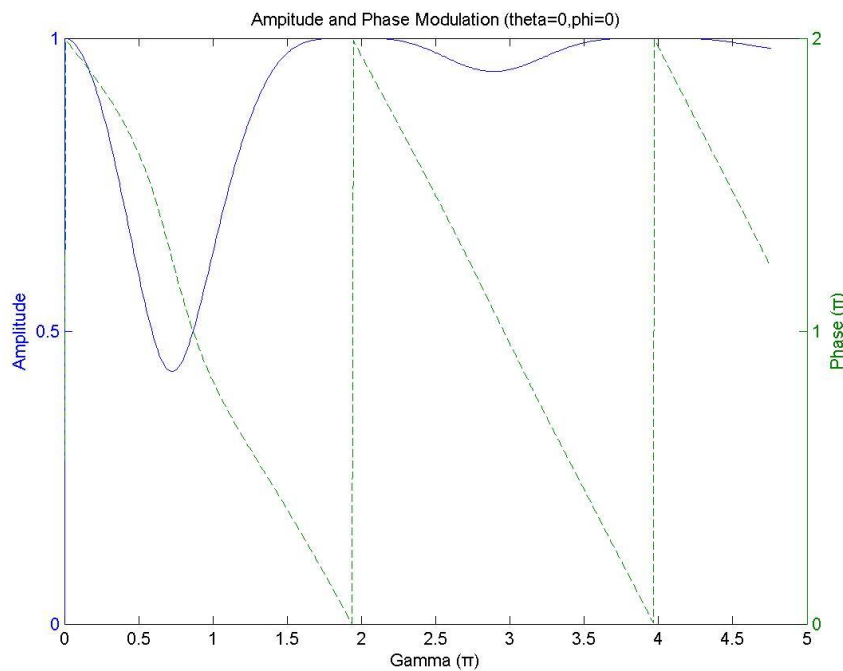
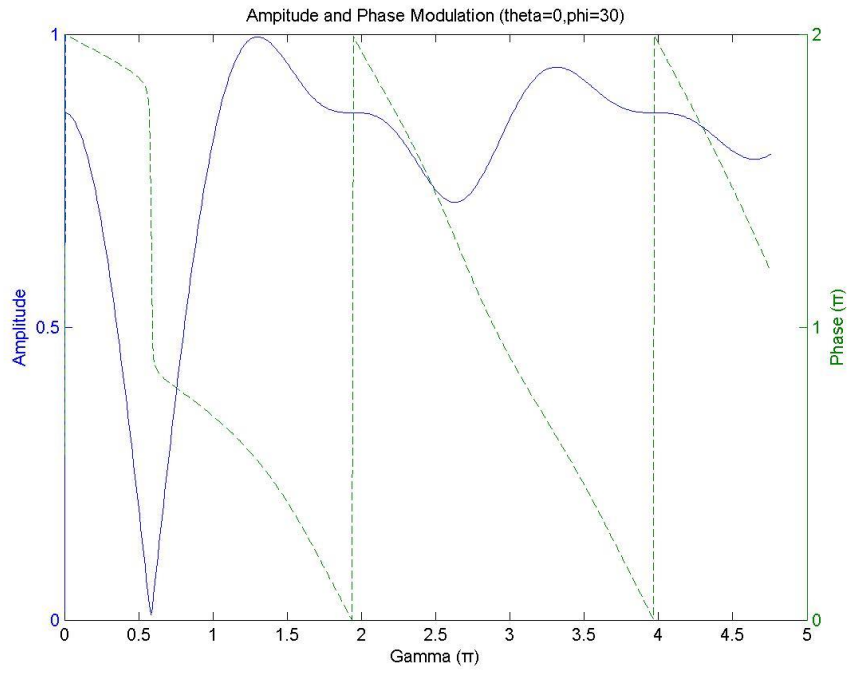


圖 27 TNLC 外加電場之液晶分子導向(a).TN-LC 於外加電場下之液晶倒向(b).液晶分子外加電場偏轉示意圖

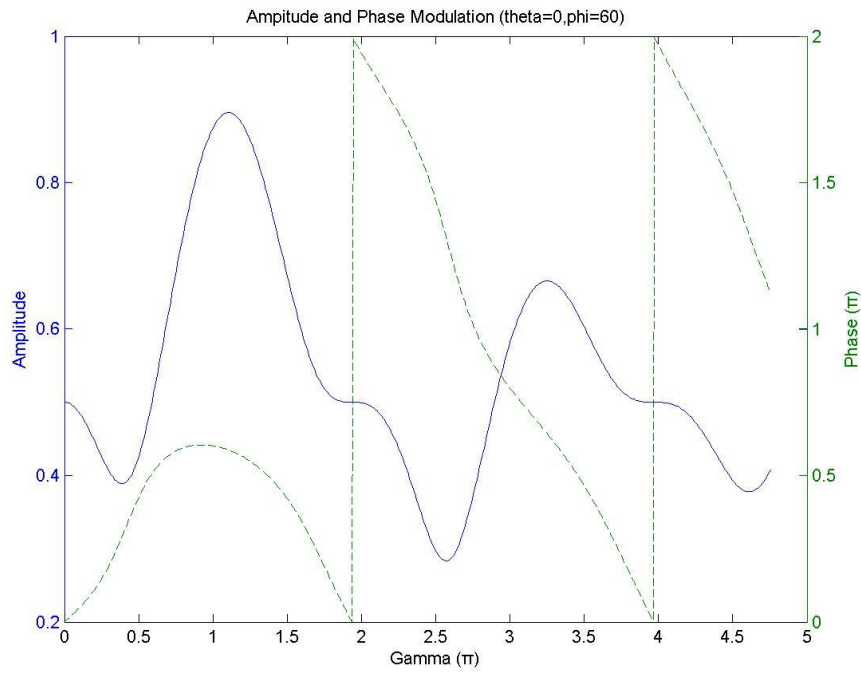
我們在顯示器的每個畫素中輸入灰階，就是給予該畫素外加電場驅動液晶使液晶偏轉。接著，我們希望知道以 Jones calculus 算出來的結果（振幅 E'_0 及相位調制量 φ' ）與電壓之間的關係。然而，HOLOEYE 公司並沒有提供我們外加電壓與 n_e 值的關係，也就是說我們無法知道電壓與 $\Gamma = k(n_e - n_o)d$ 之間的關係。但由前述可知，我們可以 $\Gamma = k(n_e - n_o)d$ 值的衰減，代表逐漸增加外加電壓時液晶倒向的過程。以下我們將以振幅 E'_0 及相位調制量 φ' 與 Γ 之間的關係做模擬：假設使用的光波長為 532 nm，TNLC 液晶扭轉 45 度，未加電壓之 $n_e - n_o$ 值為 0.23（外加強電壓後逐漸降為 0）、液晶層厚度 d 為 5.5 μm ，快、慢軸相位延遲量為 Γ ，入射光偏振方向為與 x 軸夾 0° ，檢偏片從 0° 轉到 180° 。經過計算後，得到的 E'_0 及 φ' 對 Γ 做圖如下：



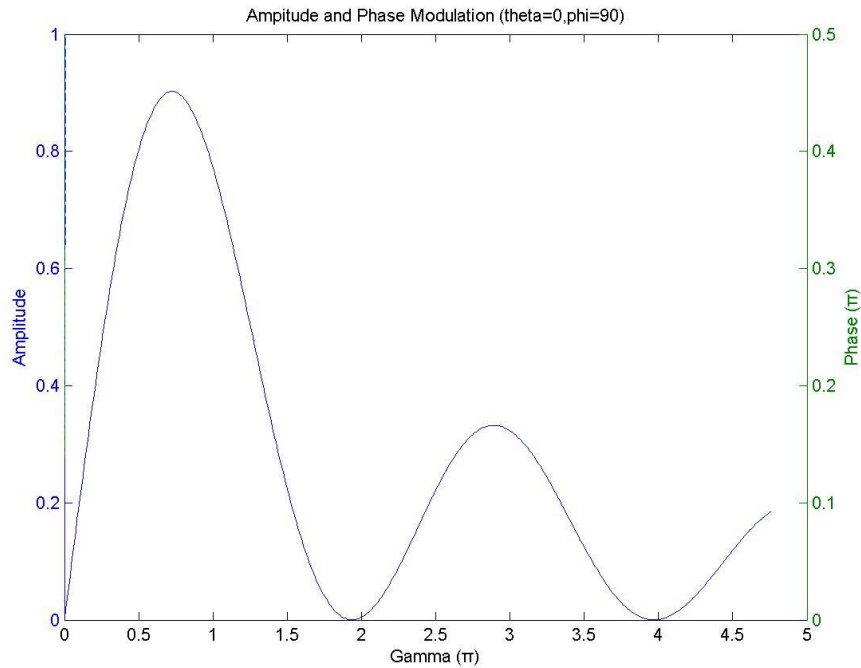
(a) 入射偏振 0° ，檢偏片 0° 之振幅及相位調制量



(b) 入射偏振 0° ，檢偏片 30° 之振幅及相位調制量



(c) 入射偏振 0° ，檢偏片 60° 之振幅及相位調制量



(d) 入射偏振 0° ，檢偏片 90° 之振幅及相位調制量

圖 28 振幅及相位調制模擬圖

圖 28 中，藍色線為振幅變化，綠色線為相位變化，橫軸為 Γ 值，最左端的零代表外加電壓極大，液晶完全倒向電場方向，此時液晶分子完全垂直於液晶盒表面，使得入射光的線偏振不管為何角度都只會看到 n_o ，而 Γ 值為零；又由圖中隨著 Γ 值愈增加表示外加電壓愈弱，橫軸的最右表示無外加電壓，此時液晶分子完全平行於液晶盒表面，從上基板漸漸扭轉至下基板。

此次模擬是以 $n_e - n_o$ 之初始值為 0.23 做計算。然而，LCoS 原廠並無提供 $n_e - n_o$ 之實際值，且 HOLOEYE-LC R2500 使用時，乃是從電腦輸入已知灰階後，儀器會自動以灰階對應之電壓驅動液晶，所以我們並不知道實際液晶在輸入灰階時，所對應到電壓以及 Γ 變化為何範圍。故總的來說，以實驗的方式找到某一入射偏振態及檢偏片角度，使輸入灰階時振幅調制為均一且相位調制為線性變化至 2π ，最為方便。

然而，從模擬圖中可發現，並無一種偏振態及檢偏片的角度，使得振幅調制為均一不變。但相對於振幅調制，不同角度下，相位調制隨著灰階的改變量則較為線性，且可以達到 2π 。由模擬結果可知，我們只可找到振幅隨著灰階改變變化量小而相位調制量最大（達 2π ）所對應到的入射線性偏振態及檢偏片角度。

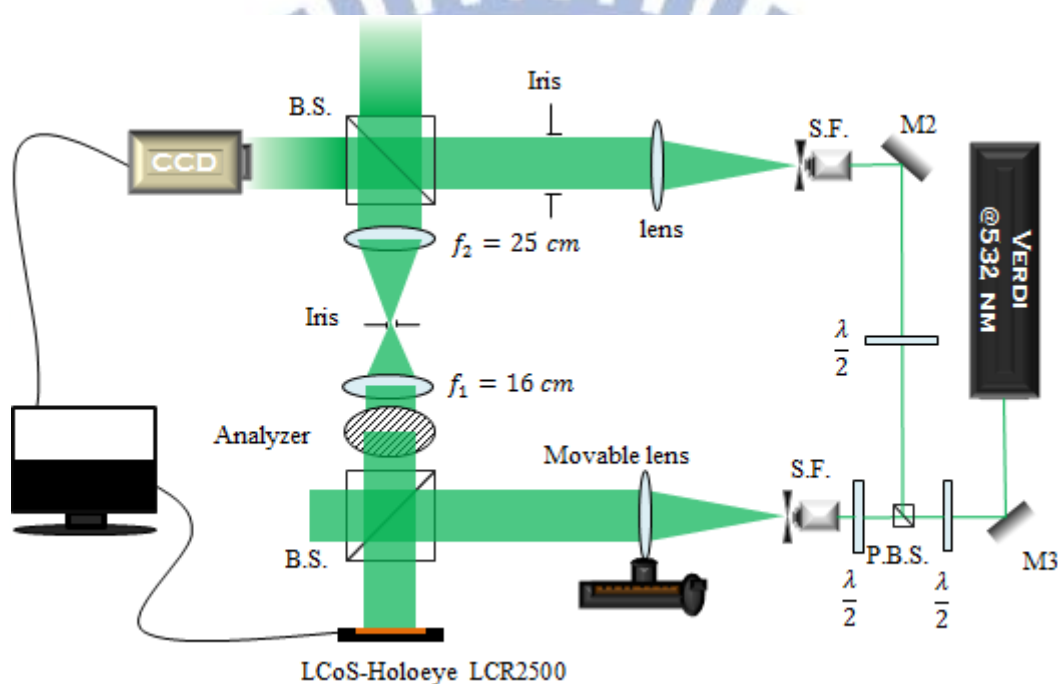
3.4 LCoS 相位及振幅調制實驗測量結果

我們實驗中需要利用 LCoS 來顯示相位電腦全像片，因此我們希望能夠找一組偏振片及檢偏片的角度，使得在對 LCoS 輸入不同的灰階時，可以符合兩個條件：

1. SLM 系統出射光相位由 0 至 2π 線性變化。
2. SLM 系統出射光振幅幾乎不變。

由於我們無法直接以肉眼看到光的相位，無法直接地分析光通過 LCoS 後的相位調量。在此我們使用 Mach-Zehnder 干涉儀，將雷射以分光鏡分成上下兩臂，下臂通過 LCoS，受到 SLM 系統的相位調制；上臂則保持平面波。當 LCoS 輸入不同灰階時，下臂平面波之相位產生改變，此時藉由兩平面波干涉條紋之亮暗文移動量，可以換算得知 SLM 系統之相位調量，光學架構如圖 29。

系統架構圖 29 中，由於我們的雷射為線偏振光，因此我們使用半波板取代偏振片調整線性偏振態的角度，可確保調整入射光偏振角度時光強不會改變。接著，光經由空間濾波器擴束，再經過透鏡做準直（以光學平板玻璃確認，當通過平板玻璃兩面的反射光之干涉條紋數目最小，則光最準直。），擴束並準直後，再以分光鏡反射光使光入射 LCoS，出射光再經過檢偏片確保通過每個畫素的光偏振態相同。



Verdi@532nm：綠光固態雷射

M#：反射鏡

$\lambda/2$ ：半波板

Iris：光圈

P.B.S：偏振分光鏡

Analyzer：檢偏片

B.S.：分光鏡

S.F.：空間濾波器

Lens：凸透鏡

CCD：接收干涉光 CCD

Movable lens：可一維平移凸透鏡

圖 29 相位調制實驗光學系統架構

當輸入不同灰階時，入射光經過 SLM 系統產生相位改變，出射光將與參考平面波在 CCD 平面上干涉。藉由偏轉 LCoS 為小角度($<5^\circ$)使兩束平面波夾一小角 α ，在 CCD 上產生等週期的平行干涉條紋，條紋分析如下：

考慮線偏振角度皆為 θ' 之兩平面波 \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 ，其中 \vec{E}_1 經過 LCoS 並延光軸前進， \vec{E}_2 入射方向與 z 軸夾 α 角，則 \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 可表示成：

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \exp[i(kz + \varphi_1 + \varphi)]$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \exp[i(k\cos\alpha z + k\sin\alpha x + \varphi_2)]$$

在 CCD 上的干涉條紋光強分佈為，

$$\begin{aligned} I &= |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* \\ &= (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\ &= |E_{01}|^2 + |E_{02}|^2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* \cos(k\sin\alpha x + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi) \\ &= |E_{01}|^2 + |E_{02}|^2 + 2|\vec{E}_{01}| \cdot |\vec{E}_{02}^*| \cos(\alpha \cos\theta') \cos(k\sin\alpha x + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi) \end{aligned} \quad (66)$$

藉由調整兩臂之光強比例，使得

$$|E_{01}| = |E_{02}| = |E_0/2| \quad (67)$$

則

$$I = \frac{|E_0|^2}{2} + \frac{|E_0|^2}{2} \cos(\alpha \cos\theta') \cos(k\sin\alpha x + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi) \quad (68)$$

干涉條紋亮紋將發生在，

$$k\sin\alpha x + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi = m2\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$x = \frac{\lambda}{\sin\alpha} \cdot \left[m - \frac{(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi)}{2\pi} \right], \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (69)$$

亮紋間距為

$$\Lambda = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{\sin\alpha} \quad (70)$$

當 SLM 系統調制相位 φ 時，由干涉條紋公式可知條紋將會位移。當 $\varphi = 2\pi$ 時，條紋將移動整個週期。相位調制 φ 與干涉條紋位移量 Δx 之間的比例關係如下，

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\Lambda} \quad (71)$$

由(71)式可知，實驗上我們可以藉由條紋的週期，以及輸入灰階時條紋的位移量，來判斷相位的調制量。

實驗上，我們讓 LCoS 的顯示影像分成上下半部，下半部固定灰階為 0，上半部則讓灰階從 0 改變至 255，如圖 29 中之螢幕所示。藉由此方式，以 CCD 接收影像下半部之干涉條紋為基準，觀察上半部條紋位移量。另外，由於雷射反射出 LCoS 與 CCD 尚有一段距離，出射光在此段距離將會持續繞射，使得 CCD 量測到的相位有些微誤差。此處我們外加了一組 4f 成像系統，將 LCoS 的影像成像至 CCD 上。此時 CCD 量測到的正是 LCoS 的反射出光相位，而不會受到繞射影響。

在實驗開始時，我們發現到在未加電壓時，兩平面波之干涉條紋並不如預期地呈平行亮暗相間，反而呈現同心圓分佈，如圖 30 所示：

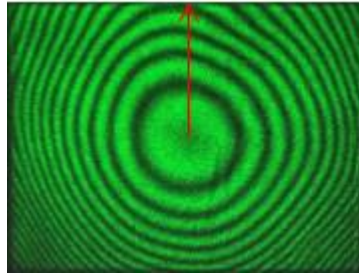


圖 30 LCoS 未加電壓之同心圓干涉條紋

在前人的參考文獻中，有人實驗發現 HOLOEYE 公司出產的 LC R-2500 反射面為一凸面而非平面，因此導致反射光波前改為球面波，並與平面波干涉呈同心圓條紋[17][18]。從干涉條紋圖可以發現，自中心往上數共有四條亮紋，往左右數共約 9 條亮紋。由於反射光走了兩倍的距離，可知 LCoS 最上邊與最中間之深度差為 2 個波長；最右邊與中間的深度差為 4.5 個波長，也就是大約 1 到 2.25 μm 左右。

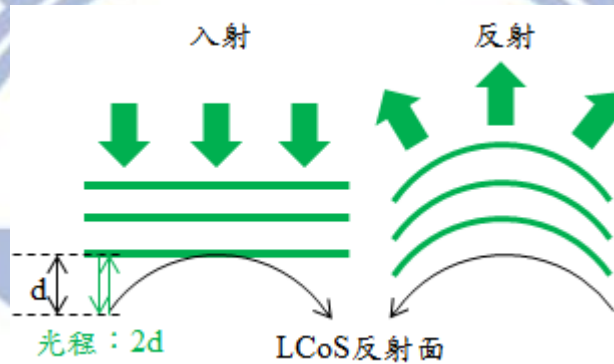


圖 31 LCoS 凸反射面示意圖

在圖 29 之光學架構中，我們架設一維平移台來微調下光路之透鏡位置。藉由透鏡位置的前移，使得入射光之波前在進入 LCoS 時符合 LCoS 之曲率。出光後再藉由 4f 系統將波前調整成平面波。經過波前修正後的干涉條紋如圖。

CCD 擷取影像

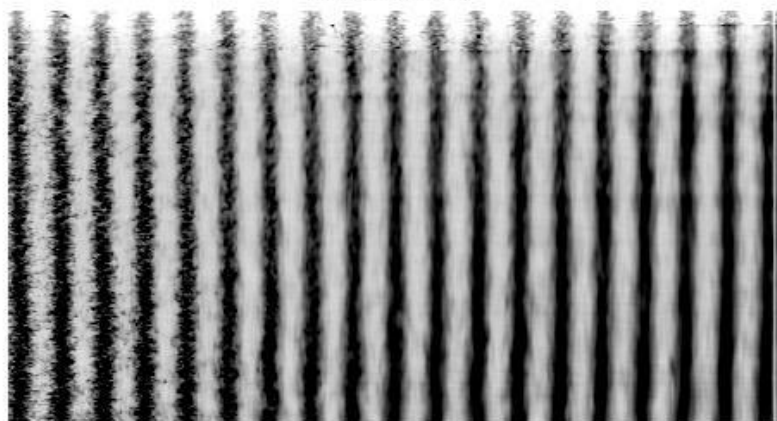


圖 32 CCD 擷取 LCoS 未加電壓之平行干涉條紋影像

接著，我們將 LCoS 上半部影像輸入灰階 100 後，CCD 擷取到干涉條紋位移如下圖 33：

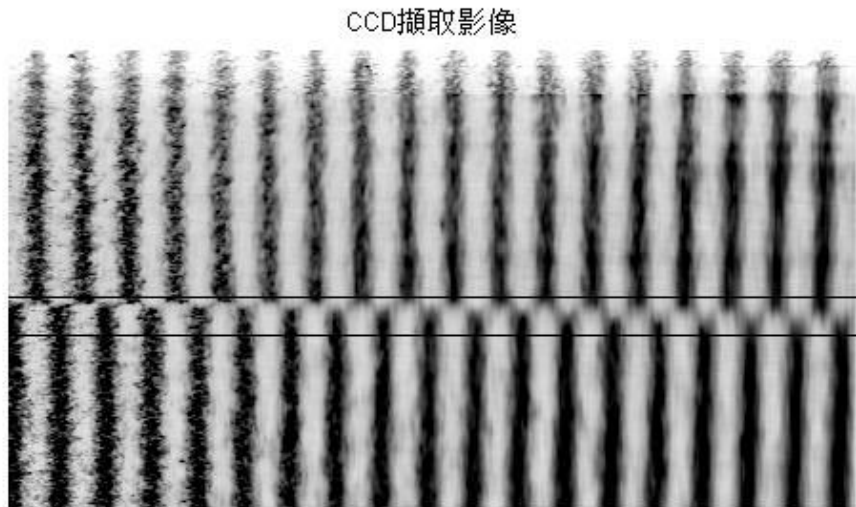


圖 33 輸入灰階 100 之干涉條紋影像

我們於上半部及下半部干涉條紋影像各取一條截線，觀察光強度曲線分佈，並比較干涉條紋位移如下圖：

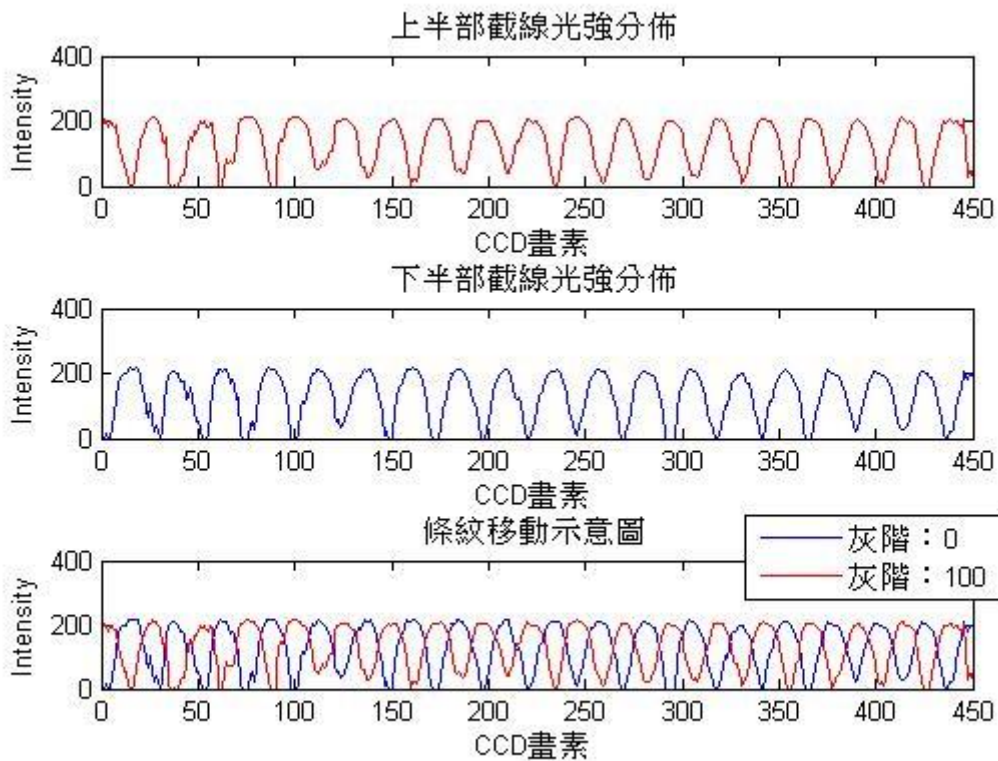


圖 34 干涉條紋截線之光強分佈及條紋位移

上圖中，藍色線之光強分佈為灰階為 0 之干涉條紋，紅色線為灰階 100 之干涉條紋。另外，由於 CCD 直接擷取的影像有些許的雜訊干擾，此處我們將影像作水平方向低通處理，將水平方向的高頻雜訊濾掉，以獲得較平滑的強度曲線，如此便可以在曲線之中找到光強極大值處(亮紋位置)，進而計算條紋位移量。而垂直方向為避免影像誤差則不另作低通濾波。

經低通處理後的影像及光強分佈如圖 35 及圖 36：

CCD擷取影像(低通處理)

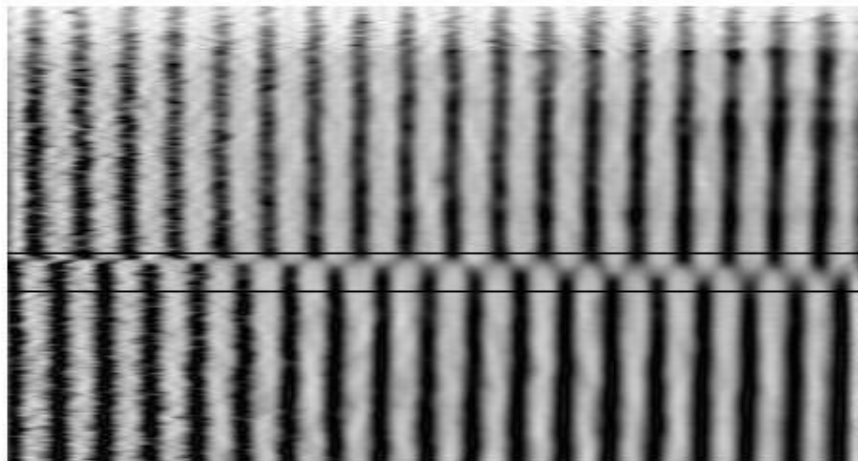


圖 35 輸入灰階 100 之干涉條紋影像(水平方向低通處理)

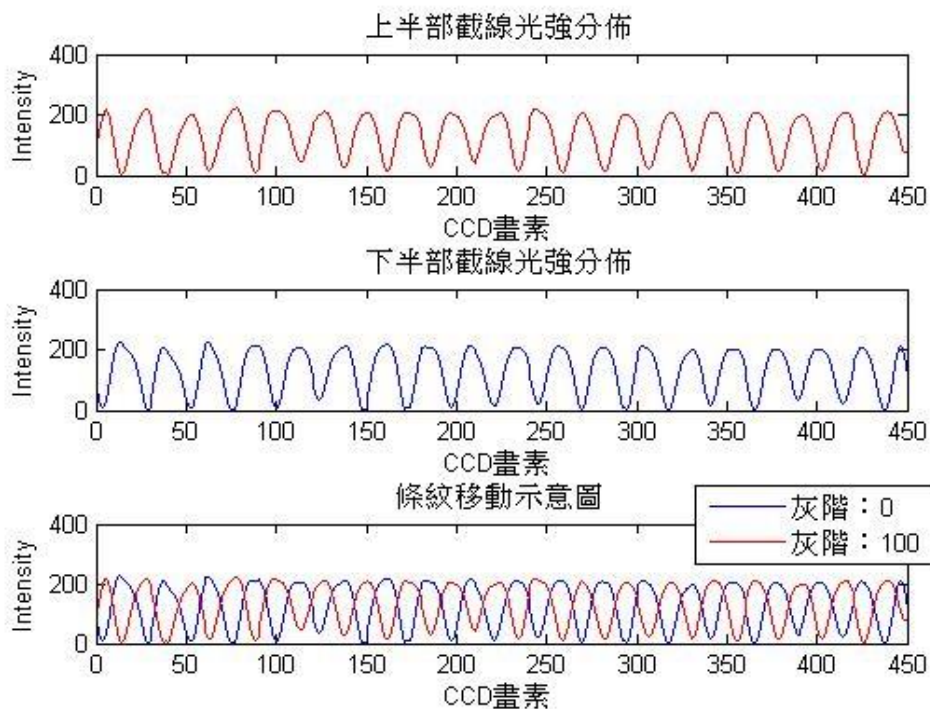


圖 36 干涉條紋截線之光強分佈及條紋位移(水平方向低通處理)

由(71)式可知，欲計算出條紋位移量對應之調制相位量值，必須先取得條紋的位移量以及條紋的週期。以圖 35 為例，上下半部之截線光強中共有 18 條亮紋(原為 19 條，但條紋位移後最後 1 條將隱沒 CCD 感光區域外，因此去掉 1 條亮紋成為 18 條)，可以求得該亮紋輸入灰階前後的位移量以及與條紋週期。為求最大實驗誤差，我們統計這 18 組數距之條紋位移標準差 σ_{Δ} 及條紋週期標準差 σ_{Λ} ，並由標準差相除公式(72)：

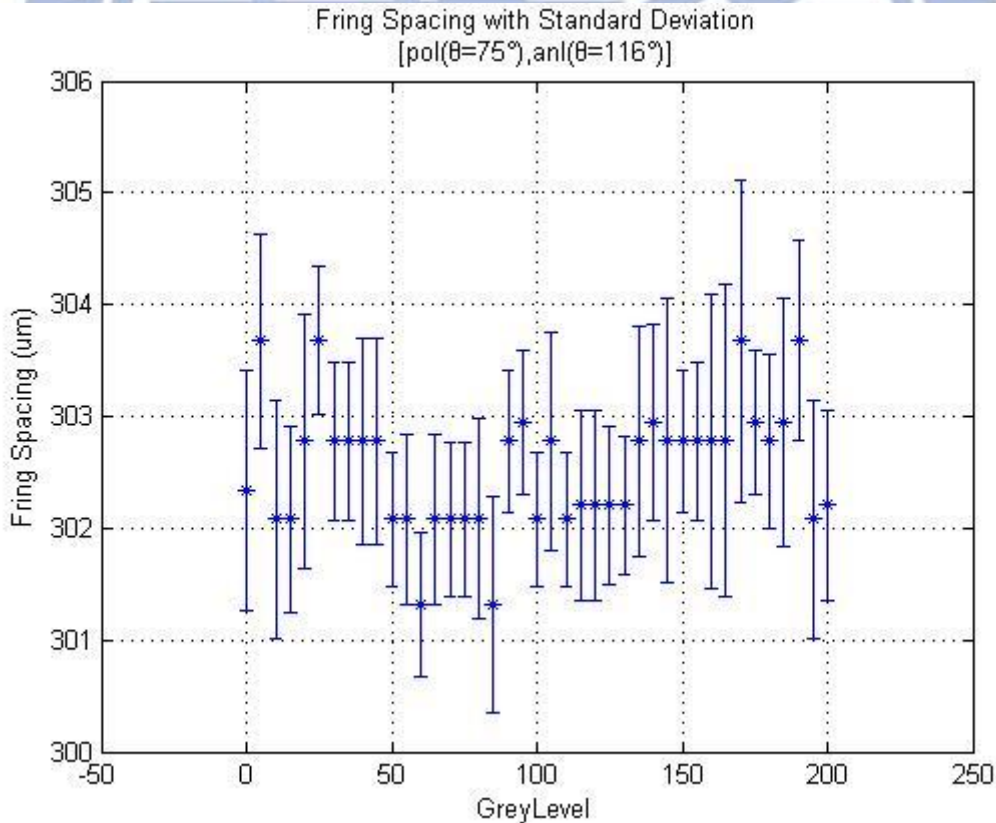
$$\frac{A \pm \sigma_a}{B \pm \sigma_b} = \frac{A}{B} \pm \sqrt{\frac{\sigma_a^2 B^2 + A^2 \sigma_b^2}{B^4}} \quad (72)$$

結合(71)式及(72)式，可以求得相位及其標準差如下：

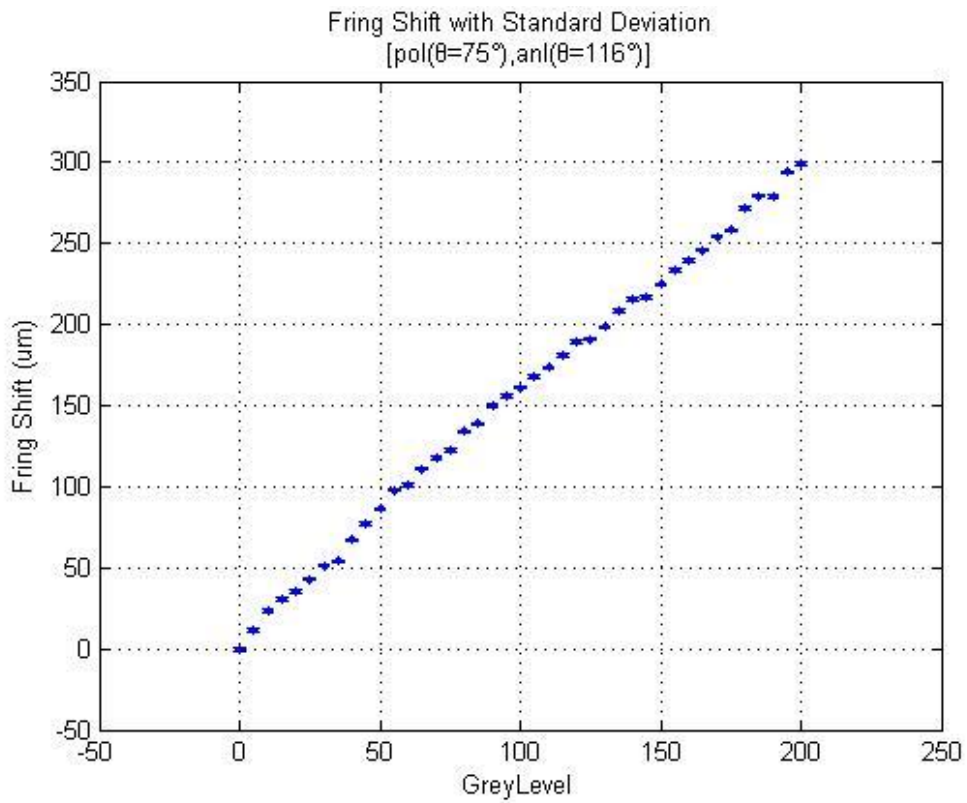
$$\varphi \pm \sigma_{\varphi} = 2\pi \left(\frac{\Delta x \pm \sigma_{\Delta}}{\Lambda \pm \sigma_{\Lambda}} \right) = 2\pi \left(\frac{\Delta x}{\Lambda} \pm \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta}^2 \Lambda^2 + \Delta x^2 \sigma_{\Lambda}^2}{\Lambda^4}} \right) \quad (73)$$

其中 φ 為平均相位調制量， σ_{φ} 為其標準差， Δx 為平均條紋位移數據， Λ 為平均條紋週期。

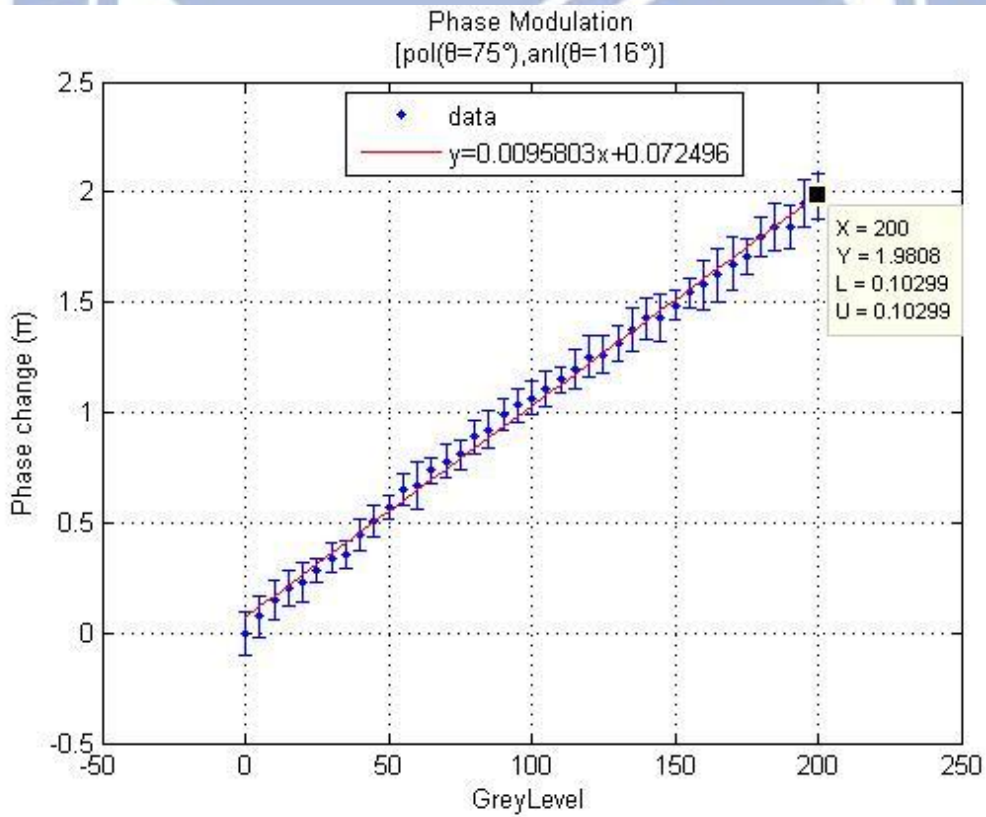
接著我們以偏振角與 y 軸夾 75° 及檢偏角與 y 軸夾 116° 並輸入不同灰階(0 至 200)，得到的條紋位移、條紋週期、相位調制量值結果如下圖 37：



(a). 條紋週期及其標準差



(b). 條紋位移及其標準差



(c). SLM 系統相位調制量及其標準差

圖 37 相位調制實驗結果

由實驗結果，偏振角 75° 及檢偏角 116° 的 SLM 系統下，輸入不同灰階得到的條紋週期平均約 $302 \mu\text{m}$ ，標準差約為 $1 \mu\text{m}$ ；條紋位移平均約 $0 \mu\text{m}$ 至 $300 \mu\text{m}$ ，標準差約為 1 至 $2\mu\text{m}$ ；相位調制量平均約 0 至 1.98π ，標準差約為 0.1π ，紅色線為一次方線性曲線擬合(curve fitting)結果。

接著我們量測在此偏振及檢偏角下，隨著輸入灰階改變之振幅調制曲線，結合相位調制曲線所得結果如下圖：

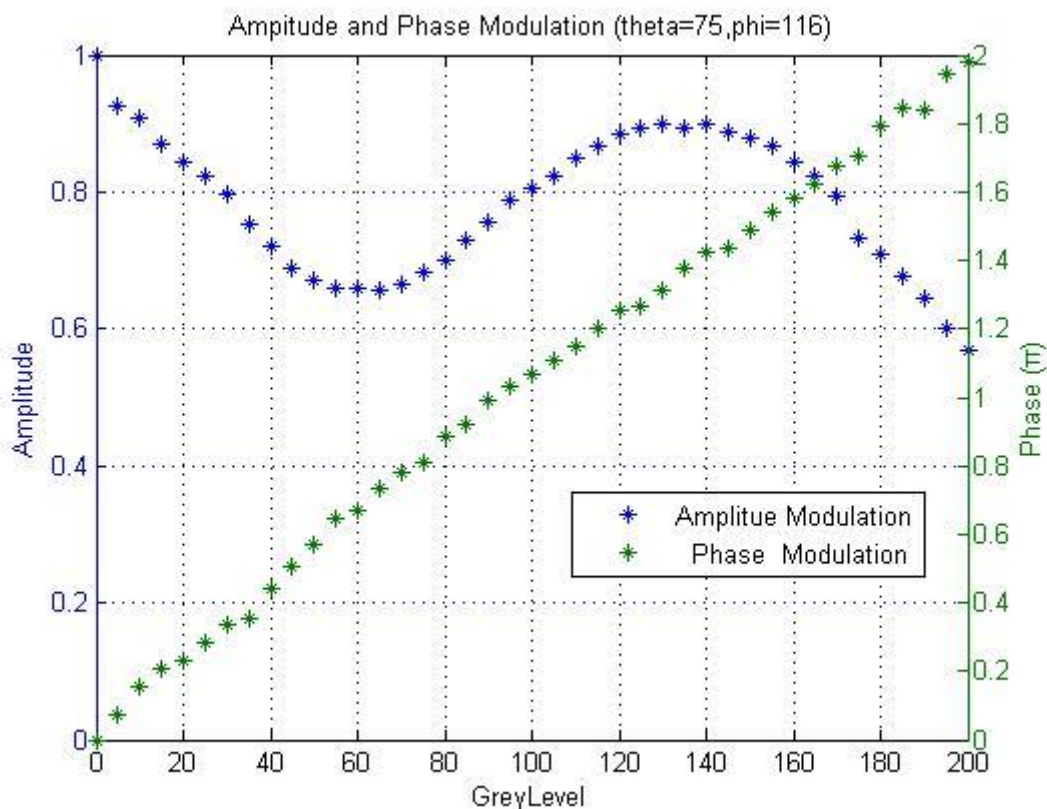


圖 38 振幅及相位調制實驗結果(偏振角： 75° ，檢偏角： 116°)

由上圖可知，在偏振角 75° 及檢偏片角度 116° 的情況下，SLM 系統之相位調制可以隨著灰階增加從 0 至 2π 並且為線性變化。然而，振幅變化卻不盡理想：隨著灰階增加，在 0.6 至 1 之間變化。有關振幅調制不如預期對光學重建影像的影響，我們將於第四章中更詳細地介紹。

偏振角 75° 及檢偏角 116° 已無法達成我們前述兩項需求，我們繼續試著改變雷射之偏振角 θ 入射 LCoS 以及檢偏片的角度 θ' ，以求得最佳振幅調制以及相位調制結果。最後我們於偏振角與 y 軸夾 80° 及檢偏角與 y 軸夾 85° 之 SLM 系統，得到了振幅調制量最小，相位調制線性變化的結果如圖 39：

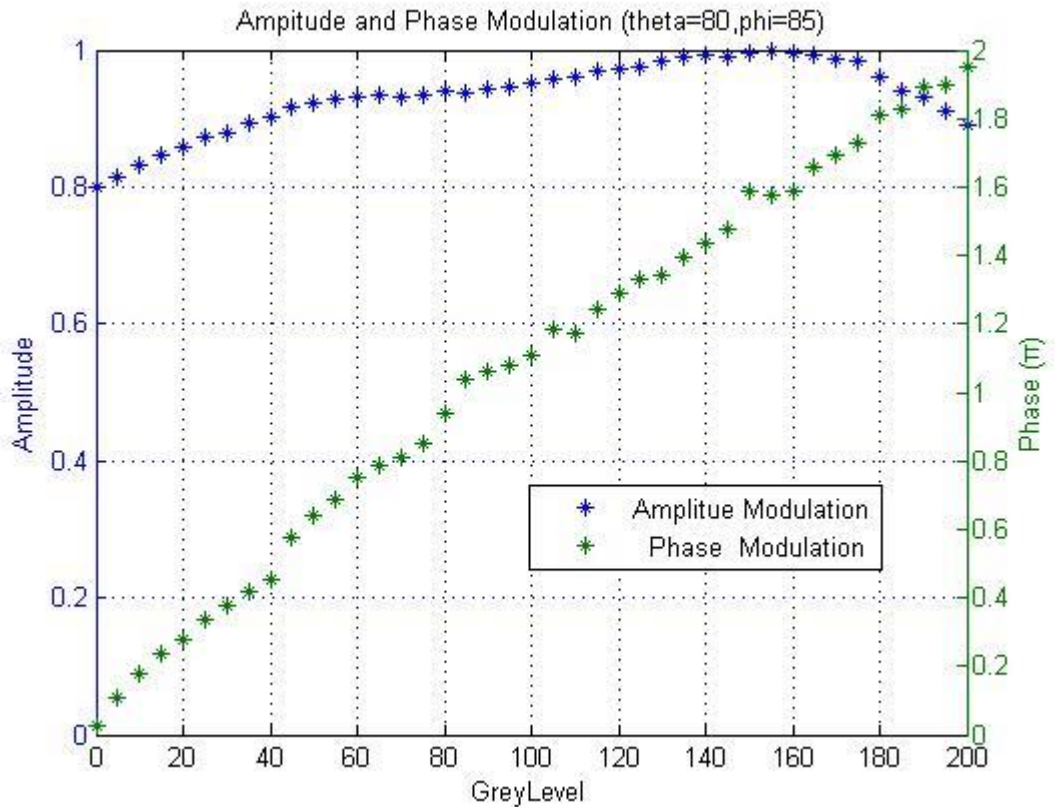


圖 39 振幅及相位調制實驗結果(偏振角：80°，檢偏角：85°)

由圖可見，相位調制隨著灰階 0 至 200 變化線性從 0 至 1.96π ；振幅調制則是隨著灰階變化縮小到從 0.8 至 1 區間。

本章中，我們詳細地討論了本篇論文所使用的空間光調制器 LCoS。以液晶理論為基礎，模擬由偏振片、LCoS、檢偏片所結合的 SLM 系統之光學調制能力。接著以實驗的方式獲得振幅調制及相位調制的最佳化的偏振片及檢偏片組合。在第四章，我們將以此角度組合作為 SLM 系統，結合由第二章所設計光學成像系統實際顯示 Kinoform 相位電腦全像片，討論並分析光學鍵盤投影品質影響參數。

第 4 章 光學鍵盤投影實驗及分析

在第三章中，我們以實驗的方式發現，在入射光以線偏振角與 y 軸夾 80° 入射 LCoS，出射光通過穿透軸與 y 軸夾 85° 之檢偏片，可以獲得最佳振幅及相位調制。在本章，我們將以此角度組合之 SLM 系統顯示灰階化之電腦全像片，並結合第二章所設計之光學系統實際投影影像。接著，我們計算此投影系統之理論繞射效率以及實驗繞射效率，並討論理論值與實驗值差異成因。在最後一節，我們將探討當 SLM 系統的振幅調制力不符合需求，使得輸入灰階上升時相對振幅跟著在 0 至 1 之間調變，對影像造成的影響；以及當 SLM 的相位調制力不足時，使得輸入灰階上升時，相位無法在 0 至 2π 間調制，對影像造成的影響。

4.1 光學實驗架構

在 2.3 小節中，我們設計了一組傅立葉成像投影系統如圖 40 所示。

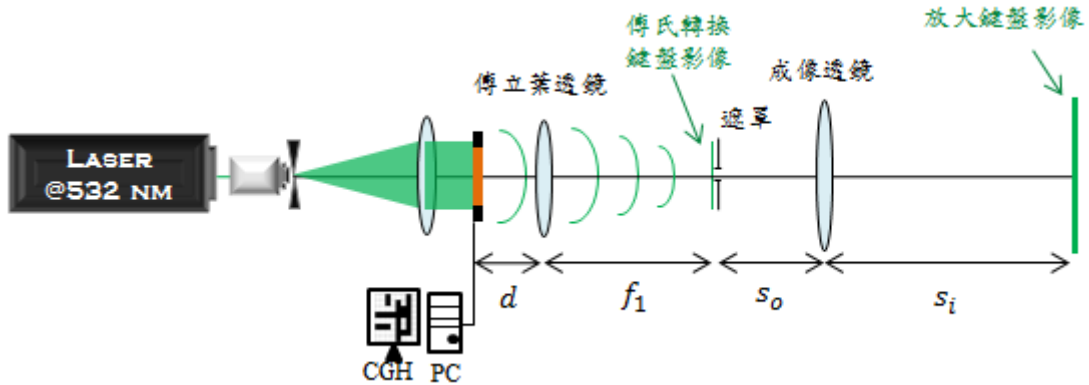


圖 40 傅立葉成像系統

根據上圖，我們利用一傅立葉透鏡，在其後焦距 f_1 位置得到電腦全像片之傅立葉轉換結果，也就是鍵盤影像。接著利用一個焦距 f_2 成像透鏡，將鍵盤影像放大，此影像即為我們最後的投影成果。

由(27)式可知經由透鏡 f_1 傅立葉轉換後的重建影像大小為 X ，又由 SIFTA 之雜訊區及訊號區設計，我們將鍵盤影像置於重建影像左下角四分之一處，此訊號區之鍵盤影像大小 \bar{X} 為：

$$\bar{X} = \frac{X}{2} = \frac{\lambda z_0}{2\Delta s} = \frac{\lambda f_1}{2\Delta s} \quad (74)$$

由(74)式可知，成像透鏡後最後投影之鍵盤影像大小 X' 為：

$$\bar{X}' = M\bar{X} = \frac{s_i \lambda f_1}{s_o 2\Delta s} \quad (75)$$

其中 s_o 為成像透鏡物距， s_i 為像距，結合透鏡成像公式：

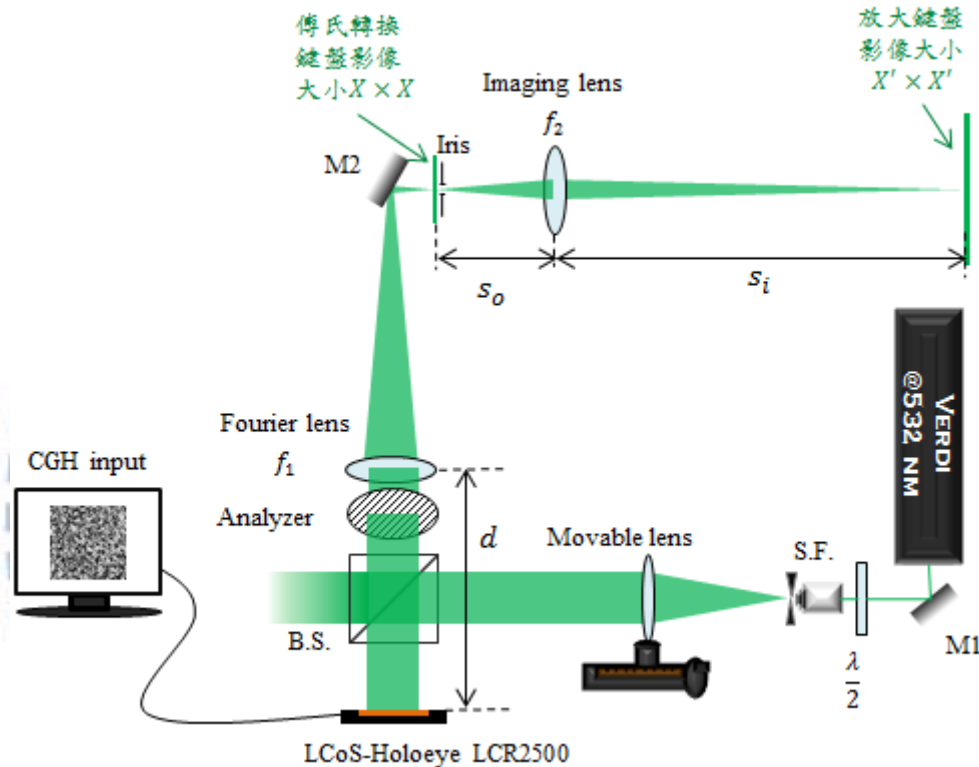
$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_2} \quad (76)$$

$$s_i = \frac{f_2 s_o}{s_o - f_2} \quad (77)$$

代入 X' 可得到鍵盤影像大小為，

$$\bar{X}' = \frac{f_2}{(s_o - f_2)} \bar{X} \quad \text{或者} \quad \bar{X} = \frac{(s_o - f_2)}{f_2} \bar{X}' \quad (78)$$

在此我們以最後呈現之鍵盤影像 $\bar{X}' = 10 \text{ cm}$ 作為目標，架設光學系統如圖 41：



Verdi@532nm：綠光固態雷射

$\lambda/2$ ：半波板

Analyzer：檢偏片

B.S.：分光鏡

Fourier lens：傅立葉透鏡

Movable lens：可一維平移凸透鏡

M#：反射鏡

Iris：光圈

S.F.：空間濾波器

Imaging lens：成像透鏡

圖 41 傅立葉成像投影系統

我們假設數字鍵盤影像 \bar{X}' 為 10 公分時，使用光波長為 532 nm 之綠光固態雷射、SLM 畫素間距 $19 \mu\text{m}$ 。對於一個投影系統來說，投影距離乃是從 SLM 往後到最終成像平面之間的距離，在我們的系統中，投影距離 $L = d + f_1 + s_o + s_i$ 。表 6 為各種不同焦距的透鏡組所得到的成像物距及像距，由(74)式亦可得到傅立葉平面鍵盤影像 \bar{X} 大小。為求實用上及實驗上方便，我們希望能夠讓投影距離 L 愈短愈好。

透鏡組別	d (cm)	f_1 (cm)	f_2 (cm)	s_o (cm)	s_i (cm)	L (m)	\bar{X} (cm)
1.	10	10	10	10.14	724.29	7.54	0.14
2.	10	10	80	81.12	5794.29	58.95	0.14
3.	10	80	10	11.12	99.29	2.00	1.12
4.	10	80	80	88.96	794.29	9.73	1.12

表 6 透鏡組別之各項投影參數

觀察上表中數據，可以發現當傅立葉透鏡焦距 f_1 愈長而成像透鏡焦距 f_2 愈小的時候，可以獲得愈短的投影距離 L。

會有上述此規律是因為當傅立葉透鏡焦距 f_1 愈長時，根據(74)式，傅立葉影像大小 \bar{X} 也愈大，此時再將影像放大成邊長 10cm 的鍵盤所需要放大的倍率即相對較小。決定 f_1 後，所需之放大倍率也將固定。又由凸透鏡成像公式可知，欲成放大實像，物體須置於一倍焦距與兩倍焦距之間，也就是 $f_2 < s_o < 2f_2$ 。若成像透鏡之焦距 f_2 愈短，物距 s_o 範圍也愈短。在放大倍率固定的前提下(即 s_i/s_o 比值固定)，所需要的像距 s_i 亦愈短，故造就了表格中 f_1 愈長而 f_2 愈小，投影距離 L 越短的數據規則。

4.2 光學繞射成像實驗

4.2.1 數字鍵盤之光學成像

實驗上，我們使用雷射波長 $\lambda = 532 \text{ nm}$ 、傅立葉透鏡 $f_1 = 84 \text{ cm}$ 、成像透鏡 $f_2 = 16 \text{ cm}$ 、LCoS 畫素大小 Δs 為 $19 \mu\text{m}$ ，由(74)式可知傅立葉重建鍵盤大小 \bar{X} ：

$$\bar{X} = \frac{\lambda f_1}{2\Delta s} = 1.18 \text{ cm} \quad (79)$$

由於我們的鍵盤大小目標 \bar{X}' 為 10 cm，故我們需要放大倍率 $10/1.18$ 之成像系統。根據(78)式：

$$10 \text{ cm} = \frac{16 \text{ cm}}{(s_o - 16) \text{ cm}} 1.18 \text{ cm} \quad (80)$$

求得物距 $s_o = 17.88 \text{ cm}$ 、像距 1.52 m。由此可知，我們在傅立葉透鏡之焦平面後約 18 公分處擺放成像透鏡，將在成像透鏡後方 1.52 公尺處獲得大小 10 公分重建鍵盤影像。

計算完理論參數，我們將第二章所設計好的目標影像(見圖 42，解析度為 600×600)，以 SIFTA 演算法迴圈數 40 圈、相位取樣階數 200 計算出灰階電腦全像片(見圖 43，解析度為 600×600)，並計算光學重建影像(見圖 44，解析度為 1200×1200)：

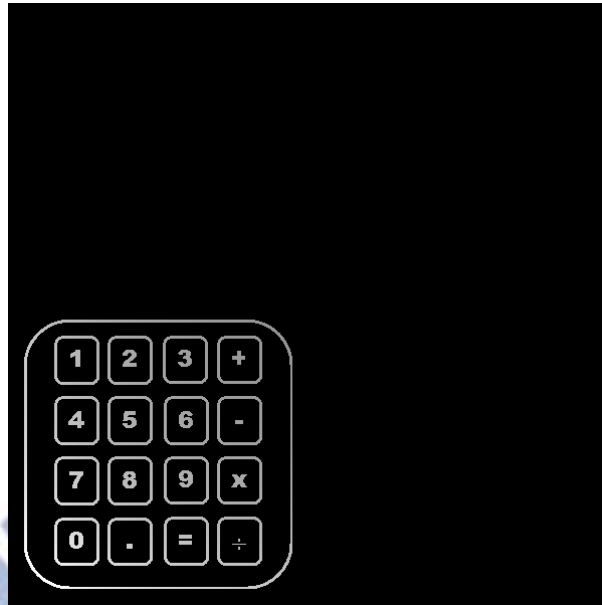


圖 42 SIFTA 之目標影像設計(sinc 修正後)

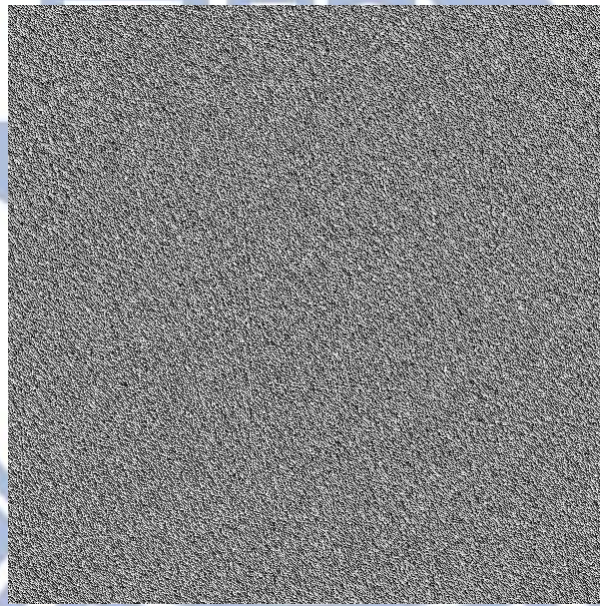


圖 43 SIFTA 計算之電腦全像片

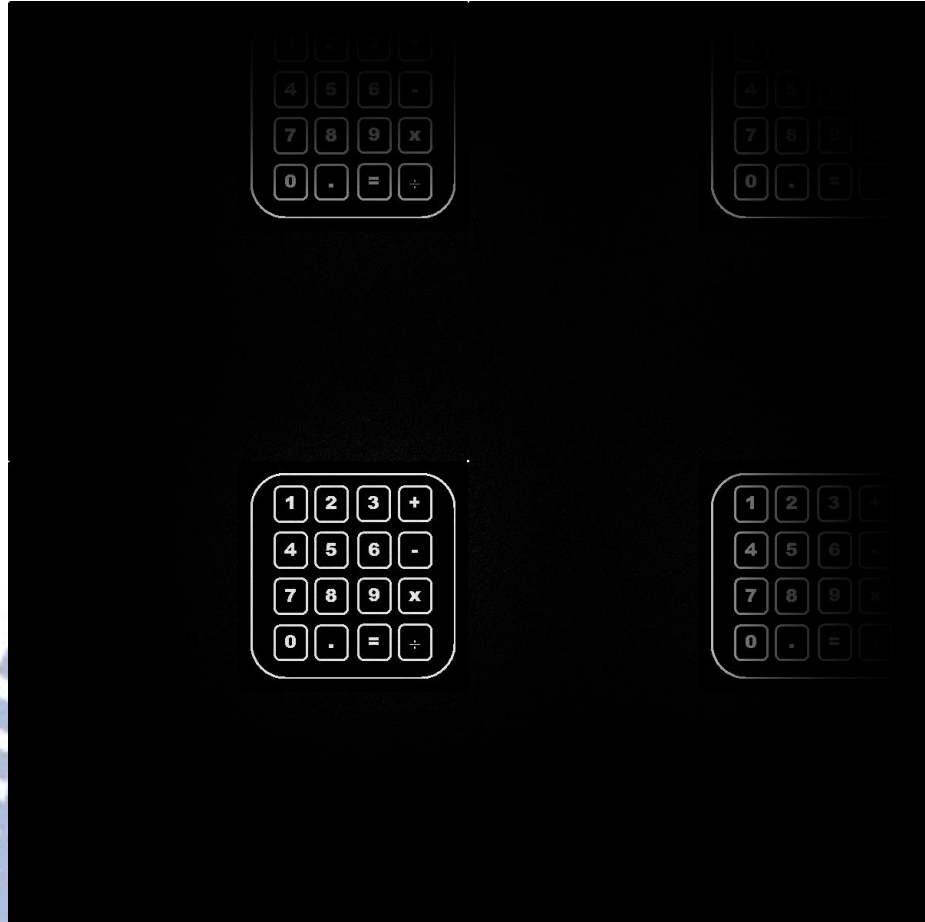


圖 44 電腦模擬之光學重建影像

實驗上，我們在光學系統之最終放大成像平面，得到重建影像如下圖：

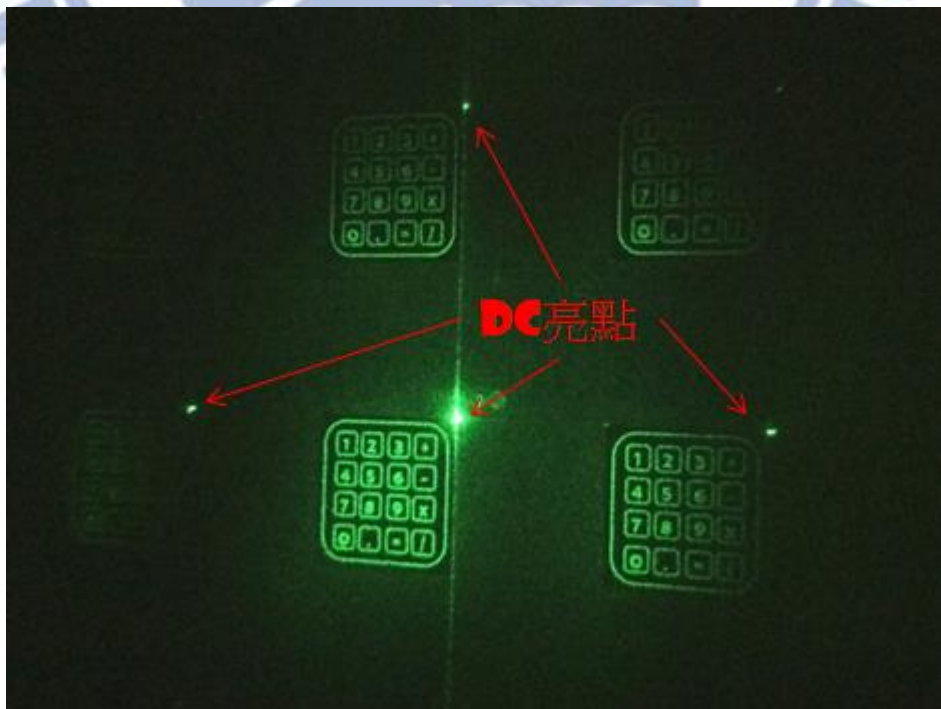


圖 45 成像投影系統之光學重建影像

從上圖我們可以發現，成像平面上 DC 光點的亮度將嚴重地影響觀看，且有多階繞射影像。為去除這些影響，我們於圖 41 之光學系統中，傅立葉透鏡之焦平面處以光圈遮住 DC 光點以及多階繞射影像，實驗鍵盤影像結果如圖 46：

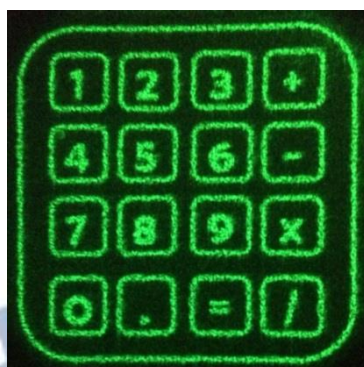


圖 46 濾除 DC 亮點及多階繞射之鍵盤影像

4.2.2 繞射效率分析

在證實了此投影系統的影像如同模擬預期的成果後，接著我們探討此系統之繞射效率。我們將繞射效率定義如下：

$$\eta = \frac{I_{image}}{I_{incident}} \quad (81)$$

式中 I_{image} 為重建影像零階中，訊號區的鍵盤影像之光強總和， $I_{incident}$ 為入射 SLM 系統之光強。

在我們的成像系統中，我們以 $\lambda/2$ 波板，取代了 SLM 系統中的偏振片，因此我們將入射 LCoS 之光能量視為 $I_{incident}$ 。接著，我們將計算出通過成像系統之理論影像強度，進而得知此系統之理論繞射效率值。

首先，當光進入 LCoS 時，LCoS 之填充因子(Fill Factor)為 91%，表示 $I_{incident}$ 之中有 9% 的能量成為 DC 光點。又 LCoS 反射率只有 75%，自 LCoS 出射之光強只有 75%。接著反射光經由分光鏡改變出射方向，將損失 50% 能量。通過檢偏片時，經由實際測量，平均將剩下 40% 能量。最後重建影像中，零階繞射影像只佔全部重建影像之 91%。另外，為配合 SIFTA 演算法，我們將影像設計成只有零階繞射中之 1/4 部份為訊號區目標影像，演算法的流程設定導致有部分能量散落於為雜訊區部份，此處我們令訊號區能量占總影像能量之比例為 A，A 值將隨著不同的目標影像而改變。因此最後重建影像之能量可以寫成：

$$I_{image} = I_{incident} \times 91\% \cdot 75\% \cdot 50\% \cdot 40\% \cdot 91\% \cdot A \quad (82)$$

我們所使用的鍵盤影像之 A 值為 0.7645，表 7 即為理論及實驗繞射效率

投影鍵盤理論繞射效率	實驗繞射效率
9.49%	3.29%

表 7 理論及實驗繞射效率

從上表，可以看到理論值與實際值仍然有些許差異。誤差的原因可能來自各元件的來回反射以及散射能量損失。另外，理論上我們的投影系統是顯示純相位式全像片，並以遠場繞射作傅立葉轉換得到投影成像。然而從第三章之 LCoS 調制量測實驗，我們得知 LCoS 無法完美地使振幅隨著輸入灰階增加而保持均一，且相位調制隨著灰階變化 0 至 2π 線性成長，這部分也將對繞射效率造成影響。在下一節，我們將介紹當振幅調制或相位調制不如預期時對影像造成的影響。

4.3 LCoS 調制參數分析

本小節，我們將探討 LCoS 主要的兩個調制參數：相位調制能力以及振幅調制能力對於我們的投影系統成像結果造成的影響，進而探討此投影方法之 SLM 系統的最低調制需求。在此，我們重申此投影方法之 SLM 系統理論調制需求：我們希望隨著 LCoS 之輸入灰階量增加，

1. SLM 系統出射光相位由 0 至 2π 線性變化。
2. SLM 系統出射光振幅不變。

接著我們定義，當 SLM 系統輸入灰階，而振幅調制在 0 至 1 之間改變，稱作是「振幅調制能力不足」。換句話說，即此 SLM 系統無法使振幅調制隨灰階變化保持為均一。

另一方面，當 SLM 系統之相位最大調制量到達不了 2π ，我們則稱作是「相位調制能力不足」，以下我們將逐一探討。

4.3.1 振幅調制能力不足

根據上述定義，我們將模擬 SLM 系統振幅調制能力不足之光學重建影像結果，並以實驗驗證之。

模擬的部分，我們首先以 SIFTA 計算出純相位 CGH，且為避免相位調制能力的影響，我們設定 CGH 所有畫素的相位從 0 至 2π 分成兩百階。由 SIFTA 計算出純相位之 CGH 矩陣表示式如下：

$$CGH_{mn} = e^{i\phi(m,n)} \quad (83)$$

式中， $\phi(m,n)$ 表示 CGH 矩陣中第 m 列、第 n 行的畫素調制的相位值，我們於此 CGH 矩陣每一畫素，加上一個亂數振幅分佈 $A(m,n)$ ，得到一個新的 CGH 矩陣：

$$CGH'_{mn} = A(m,n)e^{i\phi(m,n)} \quad (84)$$

將此 CGH 代入遠場繞射公式作光學成像模擬，即可獲得我們的重建影像。上式中亂數振幅 A 值，亂數區間由我們設定。我們首先設定 A 值為 0 至 1 之間的隨機小數，將其代入(19)式得到重建光學繞射影像如下：

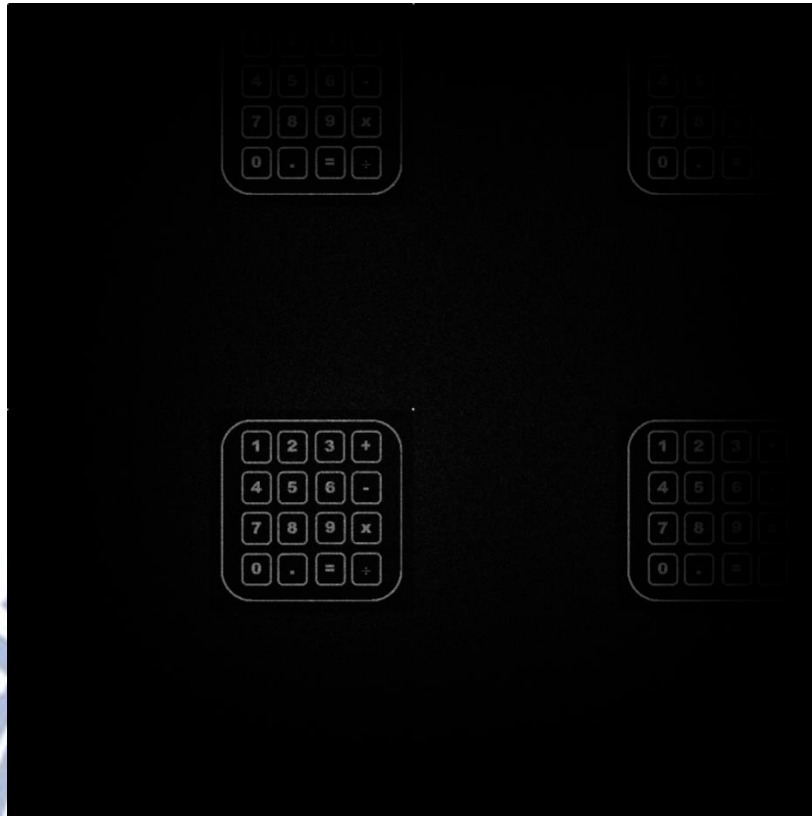


圖 47 SLM 系統調制振幅亂數區間 0 至 1 之 CGH 光學重建影像
與完美振幅調制之 CGH 重建影像比較如下圖：

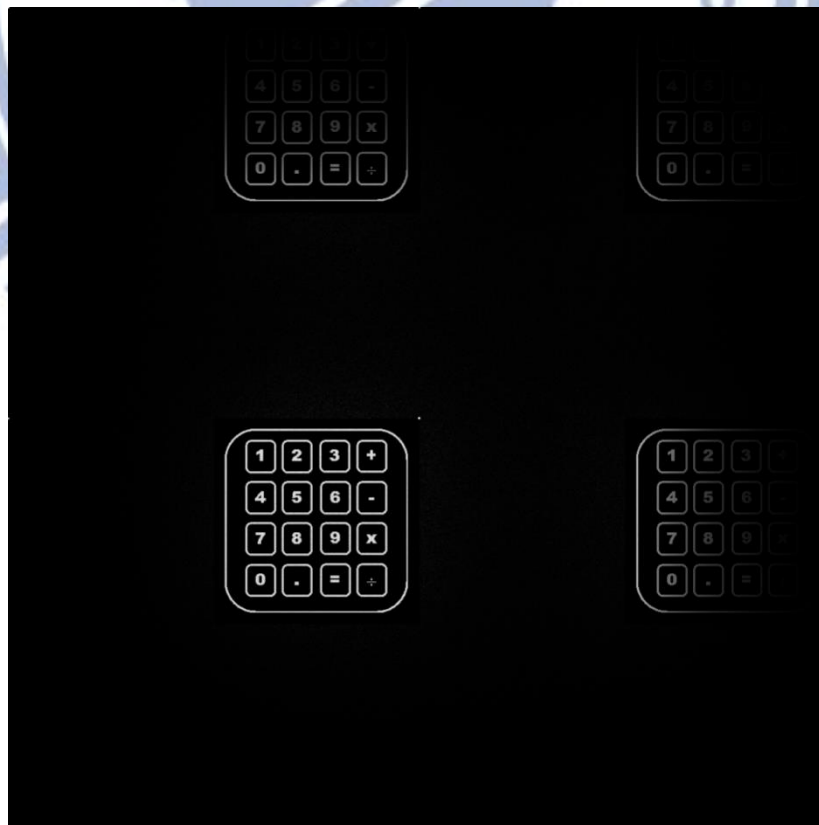


圖 48 SLM 系統完美振幅調制之 CGH 光學重建影像

從上兩張圖比較可以發現，當振幅調制能力下降時，影像對比度將下降，此處我們將鍵盤影像之訊雜比定義如下：

$$SNR = \frac{\text{重建影像訊號區之鍵盤影像光強總和}}{\text{重建影像訊號區之鍵盤影像黑色背景光強總和}} \quad (85)$$

由上式定義，振幅調制完美 CGH 之訊雜比為 291.71，而 CGH 振幅亂數 0 至 1 區間之訊雜比為 5.32。我們更進一步地設計各種不同振幅亂數區間，觀察影像對比變化如下表（僅觀察訊號區鍵盤影像）：

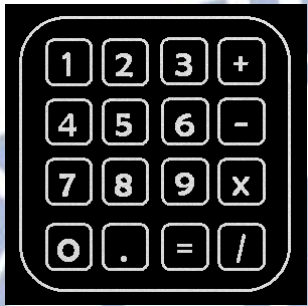
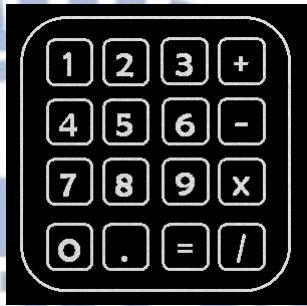
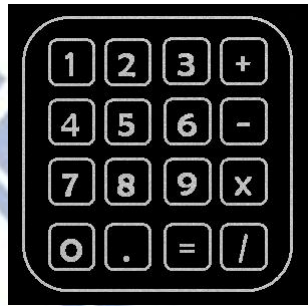
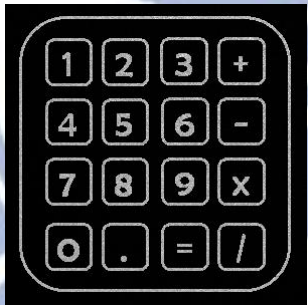
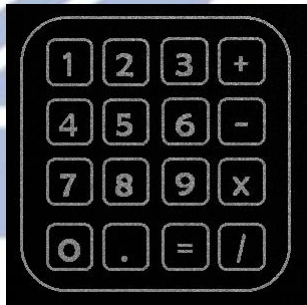
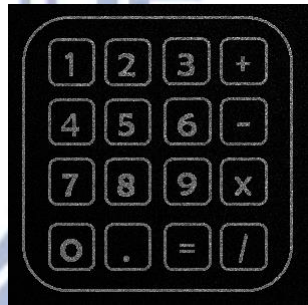
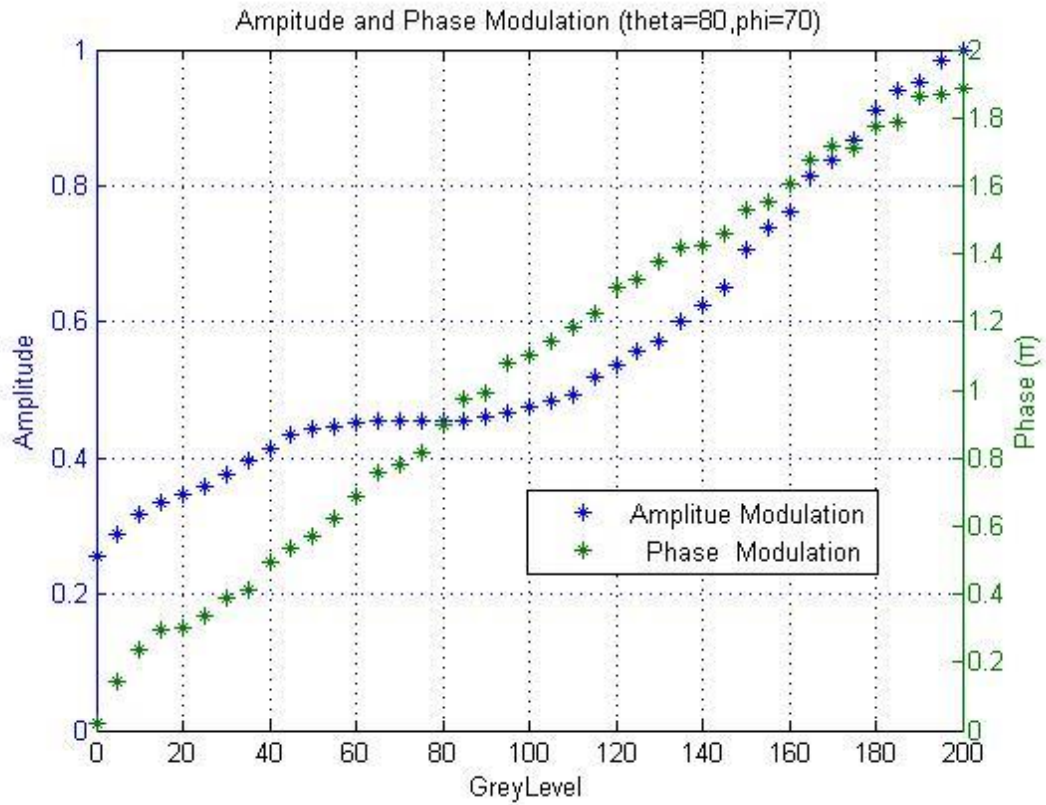
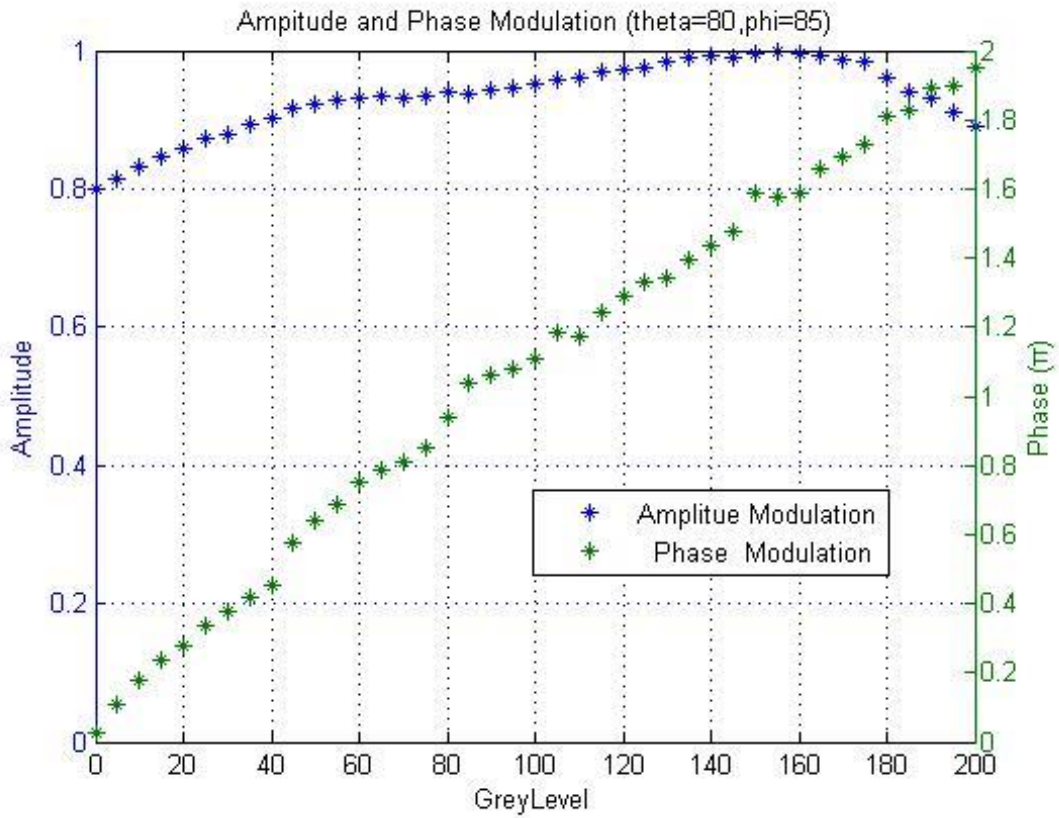
相位調制	0 至 2π		
振幅調制	1	0.8 至 1	0.6 至 1
光學重建 鍵盤影像			
SNR	291.71	217.12	93.64
相位調制	0 至 2π		
振幅調制	0.4 至 1	0.2 至 1	0 至 1
光學重建 鍵盤影像			
SNR	34.83	13.40	5.27

表 8 SLM 系統不同振幅調制能力對應 CGH 重建影像及 SNR 比較

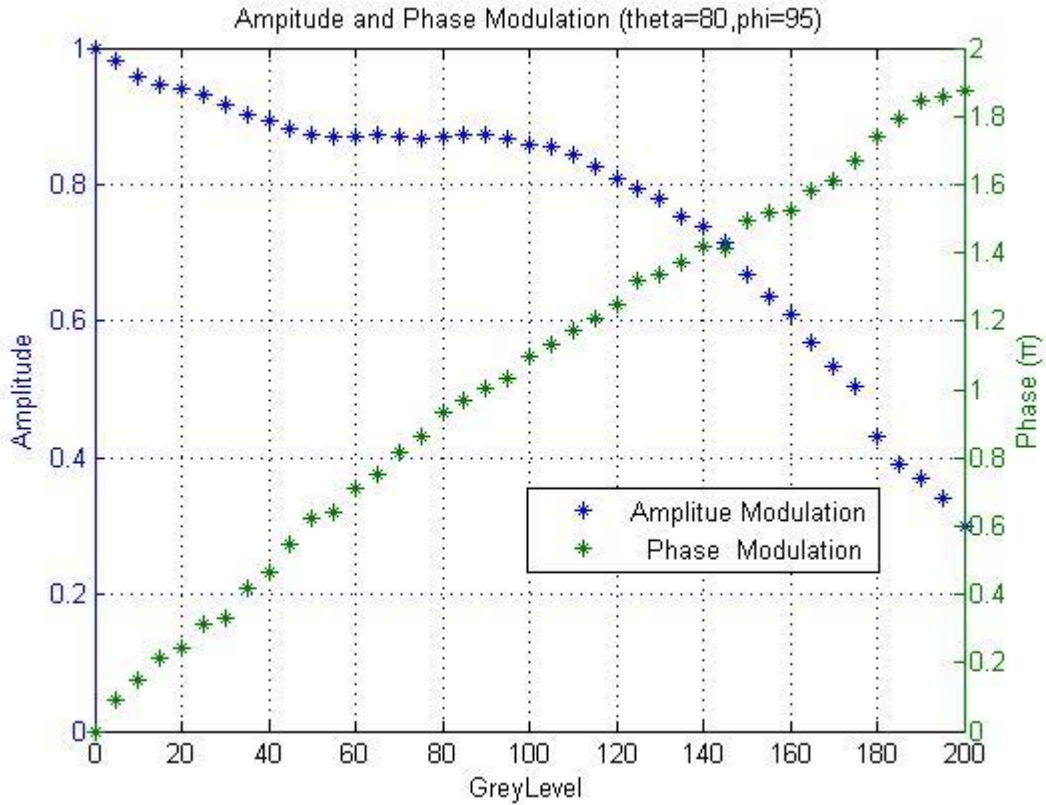
實驗的部分，我們必須找到不同的偏振角及檢偏角所組成的 SLM 系統，使得相位調制能力差異不大而振幅調制能力不同的 SLM 系統。我們分別取偏振角 80° 檢偏角 70° 、偏振角 80° 檢偏角 85° 、偏振角 80° 檢偏角 95° 三組 SLM 系統作分析，其調制數據如下圖 49：



(a). 偏振角 80° 檢偏角 70° 振幅及相位調制能力



(b). 偏振角 80° 檢偏角 85° 振幅及相位調制能力



(c).偏振角80°檢偏角95°振幅及相位調制能力

圖 49 不同 SLM 系統之振幅與相位調制能力圖表

基本上，以上三組角度皆可以使相位調制達到 0 至 1.9π 線性變化，振幅調制區間則個別為 0.25 至 1、0.8 至 1、0.3 至 1。我們以 LCoS 顯示圖 43 之電腦全像片，並以上述三組 SLM 系統做光學繞射成像，繞射結果如下表：




偏振角 vs 檢偏角	80° vs 70°	80° vs 95°	80° vs 85°
相位調制	0 至 1.9π	0 至 1.9π	0 至 1.95π
振幅調制	0.25 至 1	0.3 至 1	0.8 至 1
光學重建 鍵盤影像			

表 9 振幅調制能力數據及光學重建影像實驗結果

我們以光圈遮住重建影像高階項，僅留下訊號區的鍵盤影像，鍵盤右上角之光

點即為 DC 光點。實驗的結果驗證了模擬所得到的結論：振幅調制能力不足時，鍵盤影像對比度以及訊雜比將隨之下降。然而，從重建影像中我們也可以發現到，即使 SLM 之振幅調制能力不如預期，仍然可以清楚地分辨鍵盤中的邊框以及數字。由本小節的模擬及實驗結果，可以推估投影鍵盤影像之基本 SLM 系統需求。接著我們將討論當振幅調制固定時，相位調制能力的改變對影像造成的影響。

4.3.2 相位調制能力不足

根據前述定義，當 SLM 系統之相位最大調制量到達不了 2π ，我們稱此系統「相位調制能力不足」。同樣地，我們以模擬及實驗的方式檢視相位調制能力對光學重建影像造成的影響。

模擬的部分，由於 SIFTA 所產生之 CGH 影像(如圖 43)為將 0 至 2π 數位化成 200 階並灰階化後的影像。理論上灰階 0 對應相位調制為 0；灰階 200 對應相位調制為 2π ，且灰階 0 至灰階 200 對應相位調制 0 至 2π 為線性變化如圖 50 所示：

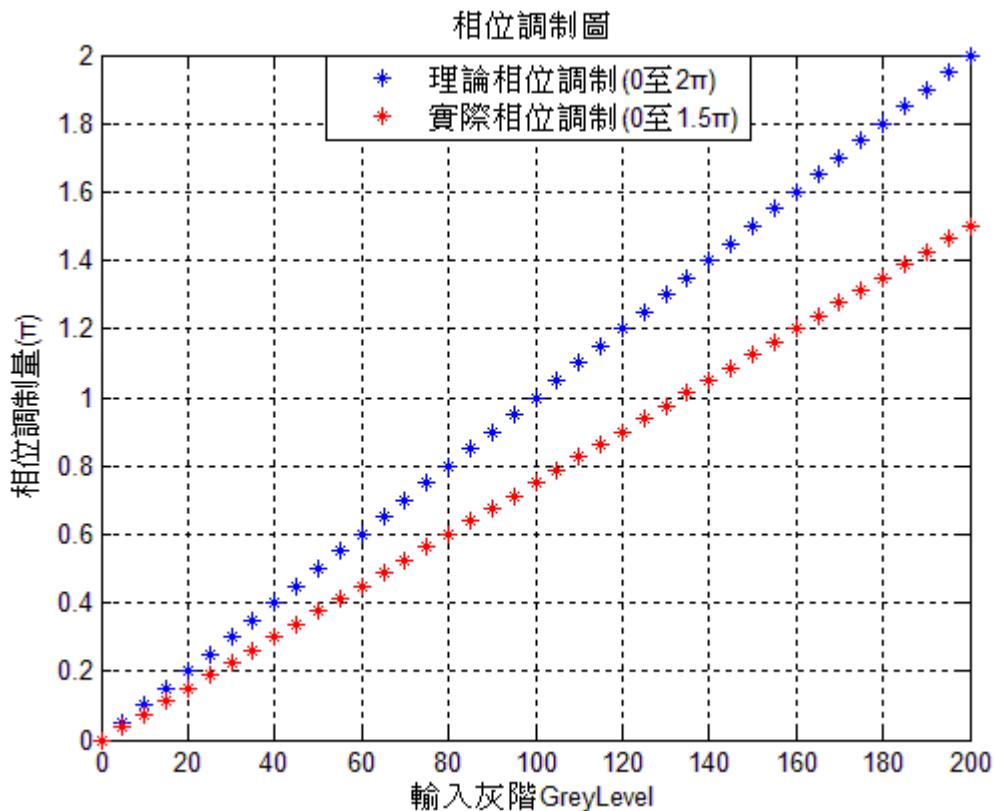


圖 50 理論及實際相位調制圖

我們假設 SLM 系統之最大相位調制量 ϕ 為 1.5π ，並且隨著灰階變化線性上升如圖中紅色數值所示。若直接將圖 43 之 CGH 以此 SLM 系統顯示，每個畫素所調制的相位皆與理論上欲調制的相位不同，將無法正確地繞射投影出鍵盤影像。

在此我們將實際相位調制曲線映射至理論調制曲線。舉例來說，理論調制曲線中灰階 100 對應到相位調制量為 π ，而實際調制曲線則是大約灰階 135 對應到相位

調制量 π 。我們將在 CGH 中所有灰階 100 之畫素，調整成灰階 135。調整後，該畫素將準確地顯示相位調制量 π 。

然而，實際 SLM 系統輸入灰階 200 時，最大相位調制量僅 1.5π ，超過 1.5π 的相位並沒有辦法以映射的方式以灰階呈現。此處我們讓原本該顯示 1.5π 至 2π 之畫素，皆輸入灰階 200 以顯示 1.5π 取代(如圖 51 所示)，我們將超過 1.5π 之相位以顯示 1.5π 取代的過程稱作「相位飽和誤差」，此誤差即是相位調制能力不足對重建影像造成影響的最大因素。

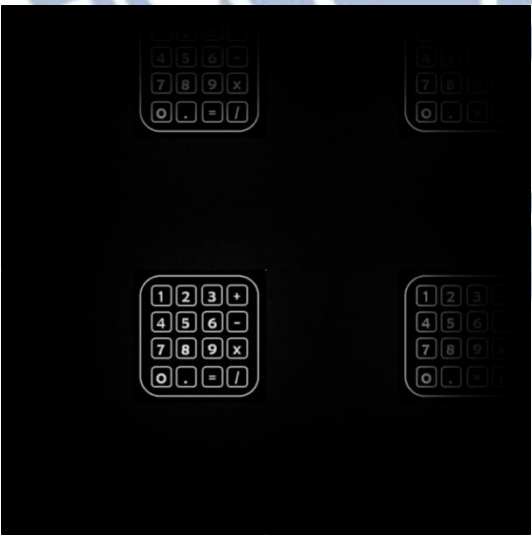
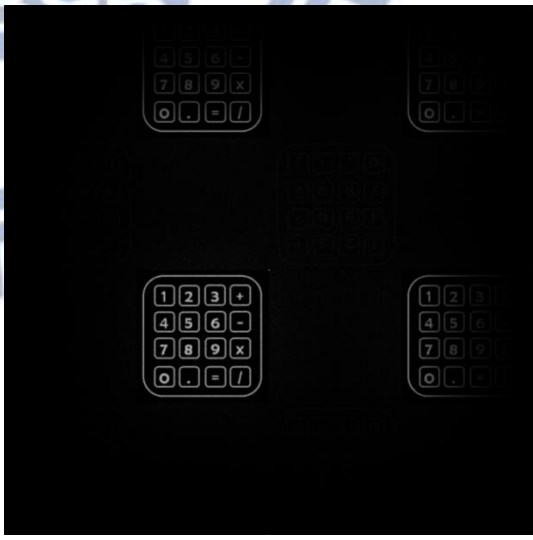
0	0.5π	1.8π
1.2π	1.5π	1.2π
1.7π	0.7π	0.9π

↓

0	0.5π	1.5π
1.2π	1.5π	1.2π
1.5π	0.7π	0.9π

圖 51 SLM 畫素相位飽和誤差示意圖

以下我們將模擬各種不同最大相位調制量 θ 之 SLM 系統，經過上述 CGH 灰階映射修正後的光學重建影像。同樣地我們以(85)式之訊雜比判斷影像對比度：

振幅調制	1	
相位調制	0 至 2π	0 至 1.5π
光學重建鍵盤影像		
SNR	284.25	29.98

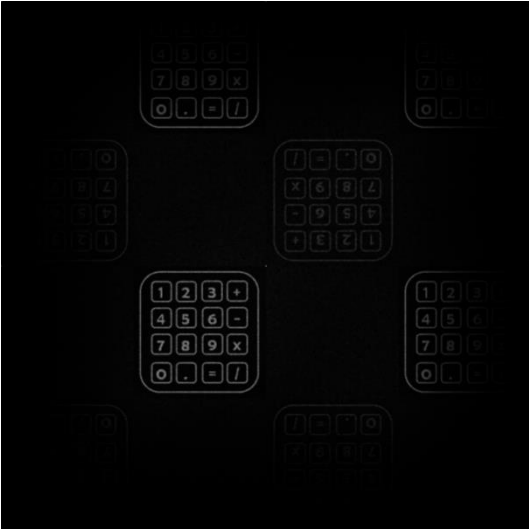
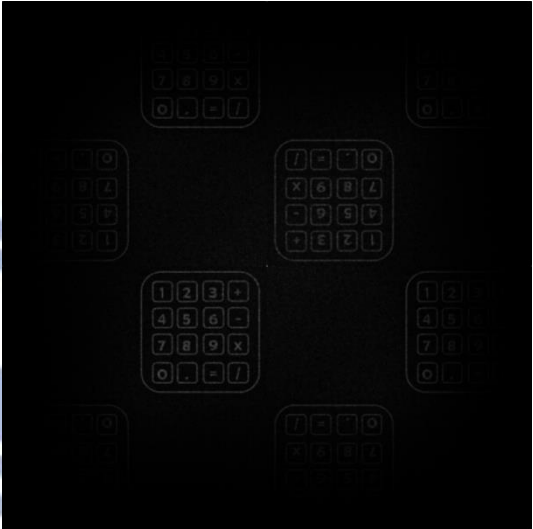
振幅 調制	1	
相位 調制	0 至 π	0 至 0.5π
光學 重建 鍵盤 影像		
SNR	6.34	1.51

表 10 SLM 系統不同相位調制能力對應 CGH 重建影像及 SNR 比較

上表中，我們比較重建影像可以發現到，如果相位調制能力愈差，則影像對比度將迅速下降，且將產生共軛影像，共軛像強度將隨之愈趨漸強，並導致訊號區影像之繞射效率下降。接著我們以實驗結果驗證之。

實驗的部分，由於我們難以找到多種由不同偏振角及檢偏角所組成的 SLM 系統，使得系統之振幅調制能力不變而只有相位調制能力改變，因此我們僅使用偏振角 80° 及檢偏角 85° 所組成的 SLM 系統(調制曲線如圖 49(b))，以修改 CGH 的畫素灰階值達到只改變相位調制能力之目的。

以圖 49(b)偏振角 80° 及檢偏角 85° 之 SLM 系統調制結果舉例，若想呈現最大相位調制量為 1.5π ，從圖表中可以發現 SLM 系統相位調制量 1.5π 大約對應到灰階值 150 左右，因此在計算出之 Kinoform CGH 矩陣中所有超過 1.5π 之相位值，在將 CGH 灰階化的過程中我們皆以灰階值 150 表示。當我們以 LCoS 顯示此灰階化的 CGH 並以重建光重建時，超過相位 1.5π 之畫素，將統一顯示 1.5π 。同理，欲呈現最大相位調制量為 π 造成之影響，觀察圖可發現灰階 85 對應到相位 π ，因此將 CGH 矩陣中灰階值大於灰階 85 之畫素，將其灰階數改為 85 並光學重建即可。

實驗結果如下表所示，可以看到影像變化與模擬吻合，隨著相位調制能力下降，成像平面將出現共軛影像。實驗影像中 DC 光點之右上及右下處有兩個不尋常的光點出現，這兩個光點是來自元件的來回反射並經由透鏡成像的結果。並不影響我們觀察訊號區中的鍵盤影像，亦可以在傅立葉平面以遮罩遮住之。

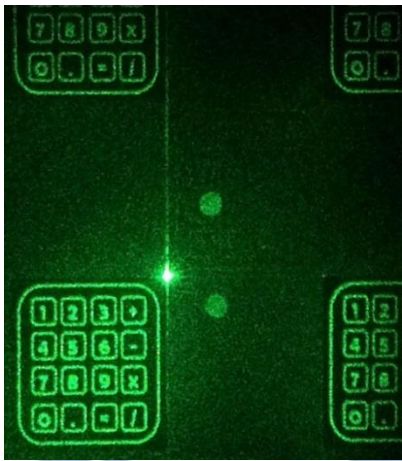
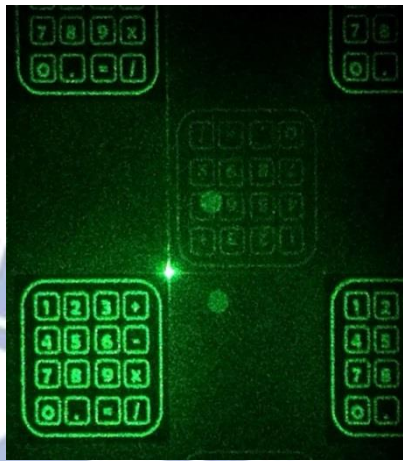
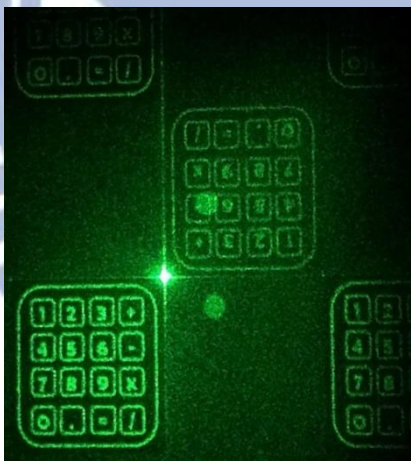
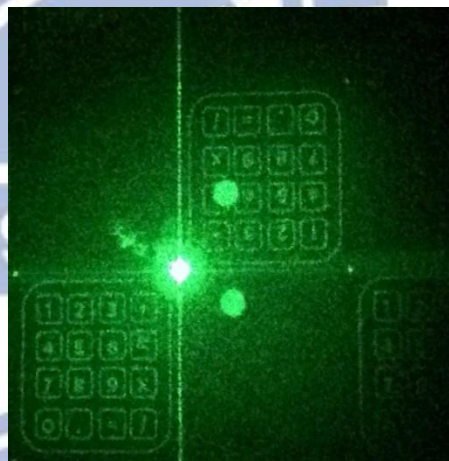
振幅調制	0.8 至 1	
相位調制	0 至 2π	0 至 1.5π
光學重建鍵盤影像		
振幅調制	0.8 至 1	
相位調制	0 至 π	0 至 0.5π
光學重建鍵盤影像		

表 11 相位調制能力數據及光學重建影像實驗結果

在本章中，我們根據第二章的投影原理和目標影像設計以及第三章的調制實驗結果，設計出光學投影系統，實際投影出鍵盤影像並探討此投影系統之繞射效率。接著，我們好奇是否必須達到完美調制才可以得到鍵盤影像？從 4.3 節的模擬及實驗結果，我們發現此種電腦全像投影方法之 SLM 系統需求不如想像中的嚴苛。愈接近完美調制能力的 SLM 系統，將可以繞射出訊雜比及對比度愈高的鍵盤影像。然而，即使振幅調制於 0.3 至 1 區間，或者最高相位調制未達 π ，依然可以看到清楚的鍵盤影像邊界以及數字。在本章以前，我們探討了光學投影鍵盤影像的產生方式以及實驗成果。接下來的章節，我們將結合投影鍵盤影像以及紅外線人體感測儀器，希望實際操作投影出的鍵盤影像，達到人機互動之目的。

第 5 章 人機互動系統實驗

5.1 人體動作感測儀器簡介

2006 年 4 月 28 日，任天堂公司(Nintendo Corp.) 於其官方網站發表了新的遊戲機種 Wii。當時的概念是希望提出一種新的控制器來取代傳統搖桿控制器(見圖 52(a))。Wii 之控制器(見圖 52(b))藉由其內部電路之電容設計，使控制器在受到左右移動的時候，改變內部電路之電容、電阻值，進而判斷使用者加速力道。而在光學上，Wii 使用了紅外線的發射器及接收器，將紅外光 LED 設置於電視端的遊戲主機之中，將接受器置於手把控制器中。在移動時，接收端不斷的判斷 LED 點光源之位置，計算彼此的相對距離來計算手把控制器的位置。有了「位置」及「加速力道」資訊，便可以完成使用者之人體動作感測，並令遊戲中的虛擬角色做出對應動作。



圖 52 (a).傳統搖桿控制器(b).Wii 之手把控制器主機(圖右)及其手把控制器(圖左)

Wii 遊戲機的發表以及周邊商品的熱賣，除了顛覆電玩界對於遊戲的理解，更讓世人對於人體動作感測的各種應用產生極大興趣，研究單位以及工業產品如雨後春筍般冒出。由於體感系統的研究已相當成熟，為求實驗方便，我們直接使用目前市面上常用於研究之可開發體感儀器。在本節，我們將簡介其中幾種體感儀器，包含：微軟公司的 Kinect、華碩 ASUS 公司的 Xtion、Leap Motion 公司的 Leap Motion 感測儀器。

微軟公司於 2010 年上市的 Kinect(見圖 53)，儀器主要由三個部分組成，最左為紅外光雷射、中間為 RGB 攝影機、最右為紅外光雷射光斑接收器，此外，感測器下方為馬達旋轉底座。其主要感測原理是由接收器分析紅外光雷射之光斑，藉由編碼分析空間中的不同光斑以判斷物體位置，再由 RGB 的攝影機獲取影像細節如表情等等，再經由旋轉底座以主動的方式追尋移動的物體。由於 Kinect 主機中內建麥克風，可以支援聲控系統。另外，Kinect 提供 windows 的開發環境，讓研究者們得

以依據自己的感測需求控制儀器。



圖 53 微軟公司體感儀器 Kinect

華碩公司隨著微軟公司提出 Kinect 後，在 2011 年初便提出了自家公司的體感儀器 Xtion。由於微軟公司與華碩公司購買了同一間公司的感測系統，因此 Xtion(見圖 54)的感測方式與微軟的 Kinect 完全相同。兩者唯一不同之處是 Xtion 並沒有 Kinect 的馬達旋轉底座，但在體積上 Xtion 就比 Kinect 相對輕巧，且因尺寸小，儀器的供電需求亦相對較低，僅需 USB 接孔即可供電。



圖 54 華碩公司體感儀器 Xtion

在使用目的上，Kinect 主要是感測使用者全身的动作，進行大动作的运算；而 Xtion 最初的设定则是用于控制桌上型或者笔记型电脑，因此感测范围需求也相对较小。图 55 为 Xtion 实际感测到的红外雷射之光斑影像(图右)以及经过计算后的深度影像(图左)：



圖 55 Xtion 感测红外影像 (图右)及深度资讯(图左)

最後，Leap Motion 感测儀器(見圖 56)的主要感测原理，是利用儀器中央的紅外光 LED 發出紅外訊號，藉由兩側之紅外光接收器接收外界的物體散射紅外光，藉由 Leap Motion 兩接收器的視差，決定物體的位置及深度資訊。



圖 56 Leap Motion 體感儀器及其內部結構圖

由於不同的市場需求，Leap Motion 主要是感測手指與手掌的移動空間為主。由於感測範圍較小，其感測的精準度以及反應速度表現相較上述兩種體感儀器來的更好，且 Leap Motion 亦支援許多種開發軟體如 Python 程式，我們可藉由撰寫程式控制 Leap Motion 以符合互動式投影鍵盤之研究需求，因此本章中我們主要使用 Leap Motion 感測儀器完成實驗。

然而，在未來各公司將會因應穿戴型裝置或者智慧型手機市場需求，突破現行框架，發展出更多種類且便利操作的體感系統。例如，微軟公司即將結合 Kinect 與旗下的 Windows 智慧型手機；Leap Motion 公司將結合其感測儀器以及惠普 HP 公司的筆記型電腦。各種不同的創意結合將發展出更多方便使用者的整合體感系統，電影中的電腦特效也將可能成真。

5.2 體感儀器 Leap Motion 之紅外光感測設計

在本節，我們實際考慮 Leap Motion 體感儀器的感測範圍並藉此設計光學系統架構，讓投影鍵盤能夠實際操作。

根據 Leap Motion 官網所提供資訊，Leap Motion 感測之最小解析距離為 0.01 mm，且可同時偵測十隻手指頭。此外，紅外光接收器的反應速度為 290fps，而體感儀器的最佳感測範圍及儀器尺寸如圖 57：

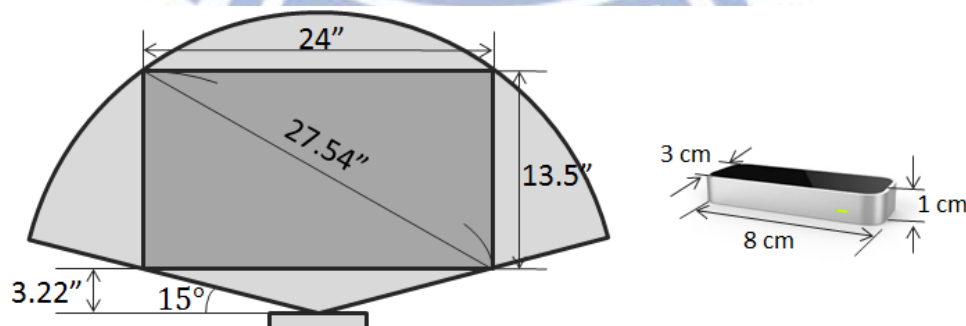


圖 57 Leap Motion 最佳感測範圍及儀器尺寸

(資料來源：<http://www.ultracompos.com/blog/archives/1950>)

在第四章中，我們設計了一組電腦全像傅立葉成像系統，使 10 cm × 10 cm 之鍵

盤影像能夠在成像透鏡後方 1.52 公尺處成像。然而，成像面上必須存在散射介質使得鍵盤影像得以觀察。因此，我們設計一個壓克力架(見圖 58)並置於成像平面，讓中間層卡入均勻的薄擴散片(diffuser)，接著以四顆螺絲孔固定薄擴散片，使鍵盤影像能夠在薄擴散片成像。底下的壓克力板及其上方的圓孔是為了讓螺絲鎖在光學桌上固定用。最後，將 Leap Motion 擺放在架子下方，感測上方的鍵盤影像。設計上需要注意的是，最後的鍵盤成像必須位於 Leap Motion 之感測範圍之中。

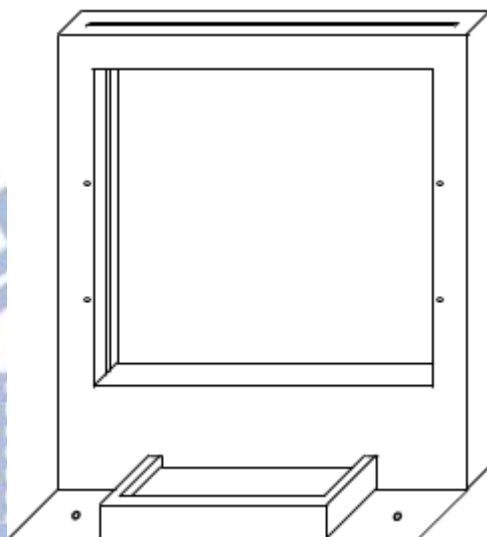


圖 58 成像面之壓克力架設計屏幕

在操作影像時，若使用者與雷射光位於壓克力架前後同側，將導致雷射光被使用者遮住，故使用者與雷射光必須位於屏幕異側。以上圖舉例，雷射將於架子後方入射擴散面，而人在前方以雙手操作投影影像。

架設完系統，在下一節我們將試著撰寫程式，以一個簡單的計算機系統證實投影影像的互動可行性。

5.3 投影鍵盤操作實驗

5.3.1 影像資訊處理

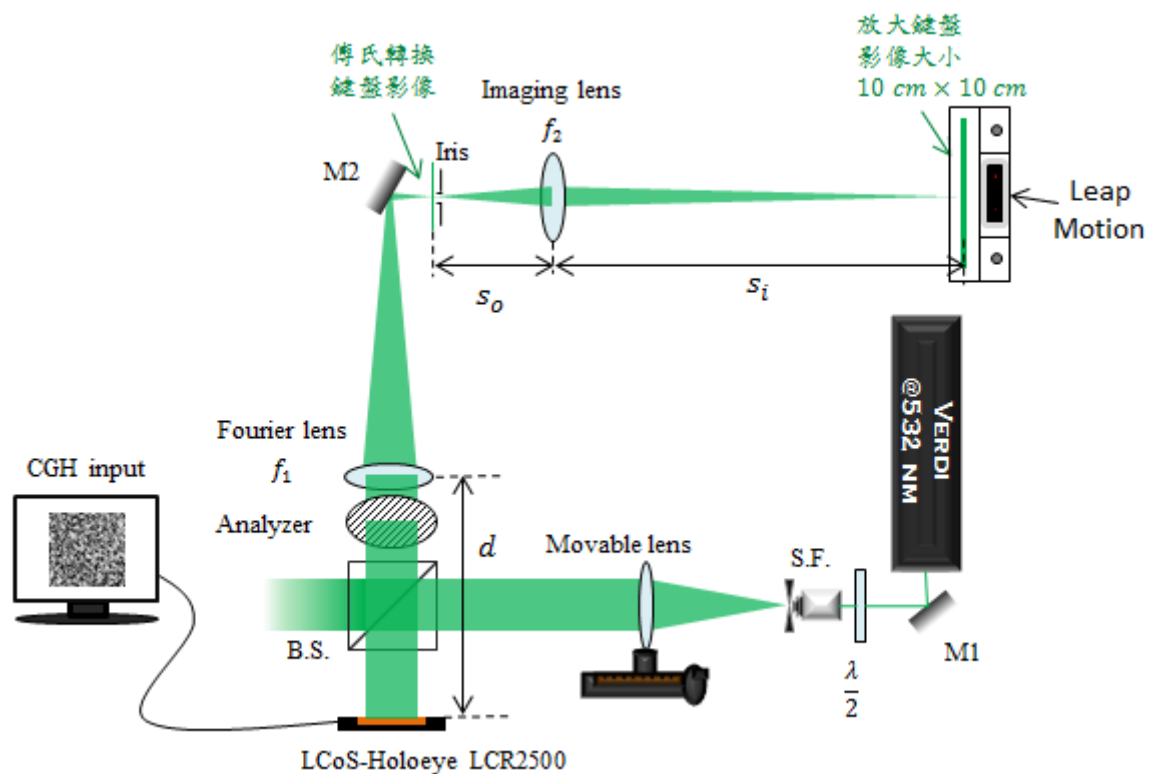


圖 59 加入 Leap Motion 體感儀器之光學系統架構

根據上一章的描述，我們設計光學體感系統如上圖。接著以圖 60(a)之簡單計算機以迴圈 40 圈之 SIFTA 製作相位階數 200 之 CGH，並以光學重建如圖 60(b)

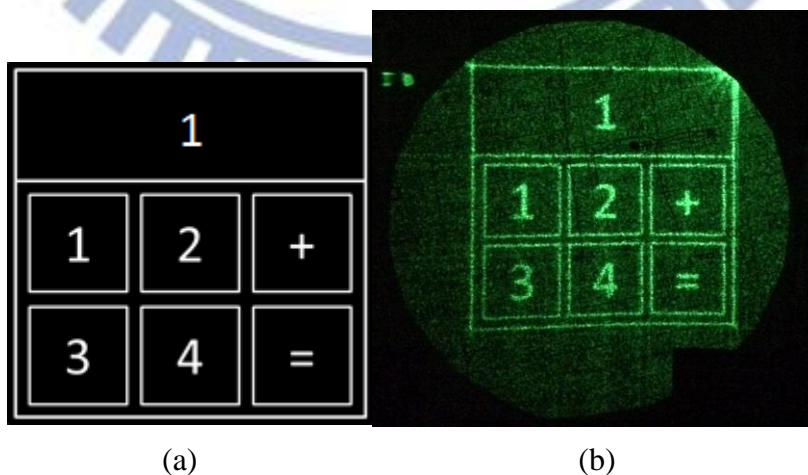


圖 60 簡單計算機之光學影像重建(a)簡單計算機影像(b)光學重建計算機影像

影像下方六個方形區域為數字及運算按鈕，上方長方區域則為運算區，用於顯示按了何按鈕。

互動式影像處理大致分成兩種方式，第一種是將運算後所有可能出現的數值皆先行計算其電腦全像片。在執行互動時，直接交替顯示已完成之電腦全像片。例如，當 Leap Motion 判斷手指碰上計算機之按鈕「1」，即顯示按鈕 1 之電腦全像片；碰上計算機之按鈕「+」，即顯示按鈕「+」之電腦全像片。由於電腦全像片已事先計算好，因此替換影像的反應速度就跟顯示器播放一般影片的速度相當，可立即達成互動式系統之目的。然而，事先算好電腦全像片的缺點是只可進行簡單的影像互動，例如鍵盤、計算機、簡單的互動遊戲如圈圈叉叉等。

對於複雜的互動系統如繪圖、影像縮放等，輸出影像有太多種可能，無法預先計算好電腦全像片。此時必須使用第二種影像處理方式：當 Leap Motion 感測到人體動作指令，以電腦即時繪出欲顯示之圖像，並計算其電腦全像片，最後顯示。同樣以計算機舉例：當 Leap Motion 判斷手指碰上計算機之按鈕「1」，隨即繪出一計算機影像，其中上方運算區為 1。繪圖完成後，計算此圖之電腦全像片，接著以顯示器顯示。由於影像是接收人體動作資訊後運算得之，因此互動方式的可能性大增。只要以程式連結動作資訊與對應影像效果，各種不同的互動需求便可成真。

然而，電腦繪圖與 SIFTA 計算電腦全像片的時間將導致互動時反應速度下降。根據本實驗室江昶慶學長的研究內容，使用一般電腦之中央處理器(使用型號:AMD Athlon(tm) II X2 245 Processor)進行 SIFTA 運算，計算 200×200 影像解析度之電腦全像片，需時 0.0524 秒。若以外接圖形處理器(Graphic Processing Unit, 簡稱 GPU, 使用型號: NVIDIA Quadro FX1800)進行平行運算，則需時 0.0209 秒；計算 800×800 影像解析度之電腦全像片，以 CPU 運算需時 0.461 秒，以 GPU 運算則需時 0.098 秒。我們以表 12 總結在上述電腦配備下計算 SIFTA 所需要的時間。

影像解析度 N × N	以 CPU 運算 SIFTA 所需時間(Sec)	結合 GPU 平行運算 所需時間(Sec)
200 × 200	0.0524	0.0209
400 × 400	0.124	0.0268
800 × 800	0.461	0.098
1600 × 1600	1.88	0.371

表 12 不同影像解析度之 SIFTA 演算法所需時間表

上述兩種不同的影像處理方式各有其優劣之處。本論文為展示互動式影像系統之可行性，將採用第一種可運算簡單計算機影像又可以迅速反應的影像處理方式。

5.3.2 計算機操作實驗結果

我們試著以前述系統操作投影影像，試著進行 1+2 以及 3+4 之簡單算數運算。實驗結果我們以錄影的方式將計算機的運算過程記錄下來，以下表 13 與表 14 為影片截圖：

指令	開始	按 1	顯示 1
投影影像			
指令	按+	顯示+	按 2
投影影像			
指令	顯示 2	按=	顯示 3
投影影像			

表 13 $1+2=3$ 之算術運算流程表

以表 13 之 $1+2=3$ 運算為例，表格讀取的指令順序為：開始、按 1、顯示 1、按+、顯示+、按 2、顯示 2、按=、顯示 3。




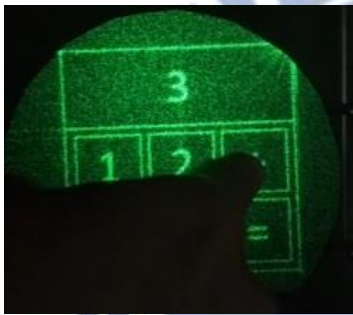





指令	開始	按 3	顯示 3
投影影像			
指令	按+	顯示+	按 4
投影影像			
指令	顯示 4	按=	顯示 7
投影影像			

表 14 3+4=7 之算術運算流程表

表 14 之讀取順序與表 13 同。根據以上的實驗結果，我們成功地完成簡單計算機的互動式操作運算。

在第五章之中，我們結合了體感儀器 Leap Motion 與第四章所設計之光學投影架構，以計算機之演算程式碼探討人體操作投影影像可行性。在 5-2 節中我們提出了兩種影像處理的方式因應不同類型之互動式影像。在未來我們亦可以根據不同類型的互動式影像需求，撰寫不同之影像處理程式碼，以達成投影影像更多的功能及普遍性。然而，儘管我們以成像系統縮短了遠場繞射所需距離，但在投影影像與 SLM 間距大於 2 公尺的情況下，應用於電子產品投影影像依然欠缺實用性，因此投影距離之遠場限制仍是此投影方法最重要的課題。

第 6 章 電腦全像片之影像誤碼率評估

6.1 雲端運算帶動之資訊儲存系統革新

近年來，網路的蓬勃發展帶動了各領域全新的變革。2006 年 GOOGLE 執行長 Eric Schmidt 在搜尋引擎大會(SES SAN JOSE 2006)首次提出了雲端運算(Cloud Computing)的概念。在 2012 年 4 月 24 日，GOOGLE 公司正式提供客戶 GOOGLE 雲端硬碟。發展自今，隨著付費額度增加，GOOGLE 雲端硬碟最大的儲存空間可以達到 16TB。

隨著雲端運算概念的提出，學術界以及產業界大量湧入資訊儲存的研究。在未來，所有資料的儲存與運算將被集中在某一資料中心，由高速電腦管理之。從此程式運算與資料搜尋的處理，是由用戶端的指令藉由網路傳輸至高速電腦中心，直接使用高速電腦的運算資源或資料庫。現在能夠以高速中央處理器自給自足的各種電腦將逐漸被取代，用戶端只需輸入與輸出的使用者介面，用戶端所有操作將由網路傳送至雲端處理。因用戶端看不見處理器的存在，故以雲端來形容位於網路遙遠彼端的高速電腦。屆時，用戶端只需要在伺服器中申請專屬的空間，即可享受雲端電腦所提供的各種服務，諸如應用軟體、資料存取、病毒防護等等。如圖 61 示意，用戶端僅需將需求指令藉由網路提供給雲端中心，接著交由雲端中心進行高速運算並回傳結果，即可完成用戶端需求。

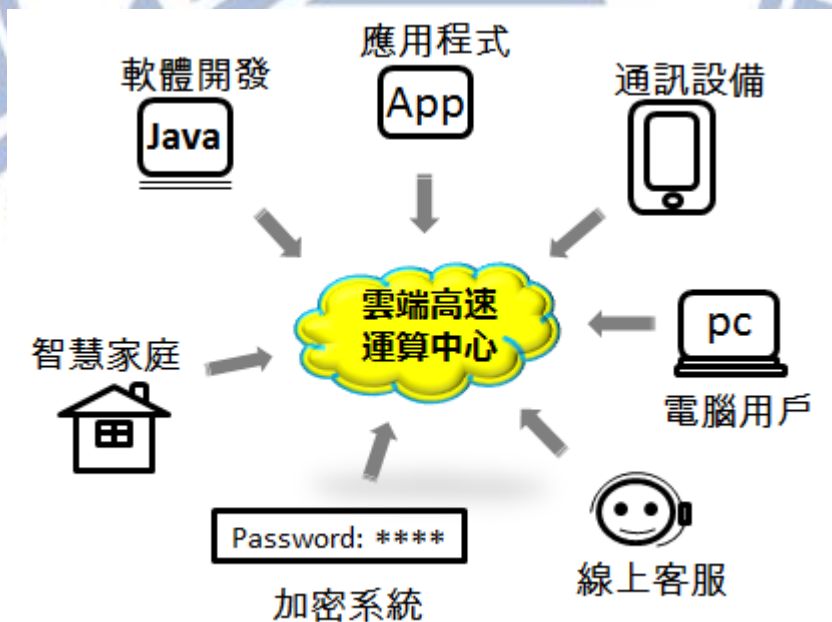


圖 61 未來用戶端與資料中心端關係示意圖

隨著不同需求，雲端技術可應用於多種規模的單位，將可細分為公用雲、私有

雲、混合雲等等。不論是何種需求，關鍵的技術皆包含高速網路、高存取速率以及高容量。

在高速網路方面，現今主要網路資料傳輸技術為光纖通訊，資料傳輸速率即是光速，其研究重點著重於光傳播時所承載的資料量。以目前由國際制定的被動式光網路(Passive Optical Network, PON)傳輸規格為例，傳輸方法必須能夠傳播 10 公里並達到10GB/s的資料傳輸速度。在下一代，新的規格必須達到40GB/s的資料傳輸速度並將傳輸距離從 10 公里漸漸提升到 100 公里。

然而，在存取速率方面，若利用網路存取資訊，無論上傳速率及下載速率皆大約僅數MB/s等級；若利用硬體存取速率如 DVD 或者 USB 進行寫入或者讀取，其速率亦受限於光碟機之機械設備，大約為數十最高至數百MB/s等級。由前述我們可以發現，現今的資訊技術已擁有高傳播速率且持續進步中，但存取的速率卻遠遠不及傳播速率，就如同行車於高速公路，儘管公路上暢行無阻，倘若交流道或者匝道處壅塞，亦將嚴重地影響整體行車時間。而在眾多的儲存技術之中，全像儲存技術以下三項特性使其成為新一代的技術中極有潛力的研究方向：

1. 高儲存容量：資訊儲存於材料的體積之中，根據光學繞射極限，可知其理論儲存容量為材料體積除以使用光波波長三次方，達到每立方公分儲存 10^{12} 位元之資訊密度($10^{12} \text{ bits/cm}^3$)。
2. 高存取速率：頁面式(page-oriented)儲存架構之特性可一次讀取一整頁的資訊內容，可達每秒 10 億位元(1 GB/s)以上的讀取速度。
3. 光學運算特性：可同時處理多筆資料的光學平行運算特性，在圖像辨識領域中應用相當廣，可同時比對近千張影像。

6.2 USB 系統、BD 光儲存與全像儲存系統表現參數比較

個人電腦 PC 最初被廣為使用時，由於外接式裝置的傳輸介面各不相同，例如印表機之接線為 LPT port、而數據機之接孔為 RS232、滑鼠鍵盤只能接 PS/2 等，且各種不同介面系統，必須另外安裝各別的驅動程式始可正常使用，常造成使用者的不便利。1994 年，通用序列匯流排(Universal Serial Bus，簡稱 USB)的概念由英特爾及微軟公司提出，其為連結電腦系統與外部硬體的一種輸入輸出介面的技術標準規範。USB 的創意，提供使用者一個統一的外接式傳輸介面，此後逐漸被廣泛運用在各種硬體與電腦系統連結。在資料處理方面，USB 與外接硬碟的結合，使其可以同時擁有外接硬碟高容量及 USB 的存取速度。在這一節之中，我們將簡單地比較 USB 外接硬碟與全像儲存技術之差異以及其技術特性。

USB2.0 與 USB3.0 分別為 2000 年與 2008 年所提出的版本。兩者最大的差異在於資料傳輸線的部分，前者為單向雙工匯流排，在傳送與接收時以 2 條資料線(D+、D-)共用頻寬，限制了整體性能表現。而後者變更為雙重單工匯流排，規劃出 4 條資料傳輸線(SSTX+/-、SSRX+/-)，讓傳送與接收有獨立通道，能同時雙向傳輸資料，增加了 USB3.0 的傳輸頻寬。表 15 為 USB2.0 與 3.0 版本的之性能比較：

USB 版本	3.0	2.0
傳輸頻寬	5 GB/s	480 MB/s
存取速率	140 MB/s	30 MB/s

表 15 USB 不同版本性能比較

不同於 USB 以電訊號乘載資訊，全像資訊儲存技術和傳統 DVD 光儲存系統一樣以光訊號乘載資訊。DVD 光碟片使用位元式(bit-oriented)的方式做紀錄，也就是一個位置儲存一位元的資訊。因此，光碟片的儲存容量就與碟片總面積有關，一般來說，單層的 DVD 之儲存容量約為 5GB 左右。若使用波長較短的藍光紀錄及讀取之藍光光碟 BD，單層儲存容量可達到 25GB。根據透鏡不同的聚焦位置，BD 可以增加層數使總儲存容量增加，最高可以記錄四層共 128GB。而存取速率的部分，光儲存系統最大的優勢就是資料以光速傳播，故存取速率僅與光碟機的機械式讀取速率有關，現行 24 倍轉速的光碟機之存取速度受制於機械極限為 32.4MB/s。

全像儲存技術採用頁面式(page-oriented)的方式紀錄資訊。我們可以利用透鏡聚焦，將一頁的資訊壓縮在一個資料點中。比起二維紀錄的光碟片，全像儲存紀錄更考慮了材料厚度方向來提升儲存容量。在影響範圍可接受的情況下，我們更可以利用各種多工技巧，將干涉條紋妥善地分布於材料三維體積之中，將多頁資訊儲存在材料中同一單位體積之中。在存取速率方面，由於我們在記錄時記錄了整頁資訊，由光學的平行處理特性，我們可以一次讀出記錄的整頁資訊。以現在的顯示及偵測元件畫素皆可達到 1000×1000 舉例，一頁資訊可包含 10^6 位元，存取速率僅和機械位移及元件反應時間有關。考慮各種因素下全像儲存技術的存取速率可以達到 1GB/s。以下我們以表 16 為三種不同的儲存方式做總結。

儲存系統	USB3.0	Blu-ray Disc	全像資訊儲存
資訊介面	電訊號對電訊號	光電訊號轉換	光電訊號轉換
儲存容量	視外接硬碟容量 可達 1TB	可達 128GB	可達 $1\text{TB}/\text{cm}^3$
存取速率	140 MB/s	32.4MB/s	1GB/s

表 16 不同資訊儲存方式表現參數比較

6.3 電腦全像儲存系統

6.3.1 電腦全像儲存系統簡介

由前幾章敘述之電腦全像投影技術，我們將產生相位電腦全像的 IFTA 演算法及 SIFTA 演算法衍伸應用於全像資訊儲存系統。根據數位化的概念，我們考慮某資訊經由二進位編碼後，成為一頁 10×10 二元資訊，接著將其灰階化後如下圖 62 表示，圖中黑色部分代表二進位訊號 0、灰階值 0，白色部分代表二進位訊號 1、灰階值 255。

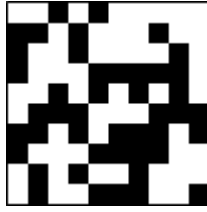


圖 62 二元資訊頁面(10 × 10)示意圖

我們欲將此二元資訊頁面儲存至電腦全像片中，故我們以上圖做為 IFTA 之目標影像算出電腦全像片，並且設定遞迴圈數為 50 圈，得到重建影像如下圖：

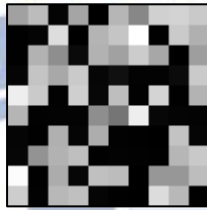


圖 63 二元資訊頁面(10 × 10)IFTA 重建影像

比較圖 62 及圖 63，我們發現到重建影像之二進位訊號 0 的部分，與目標影像大致相同；然而在訊號 1 的部分則有灰階強度失真的狀況。在下一小節，我們以機率分布函數(Probability Density Function，簡稱 PDF)及誤碼率(Bit Error Rate，簡稱 BER)定量地描述重建影像品質。

6.3.2 機率分布函數與誤碼率

由於 Kinoform 電腦全像片捨去了其傅氏振幅，使得重建影像與原始影像有資訊損失，造成影像失真。考慮一頁 600×600 之亂數二元影像並灰階化，接著把每一灰階數與其對應的畫素數目記錄下來，並對數目總和歸一，得到該灰階的出現機率。我們以此機率與灰階數作圖得到機率分布函數 PDF 如下：

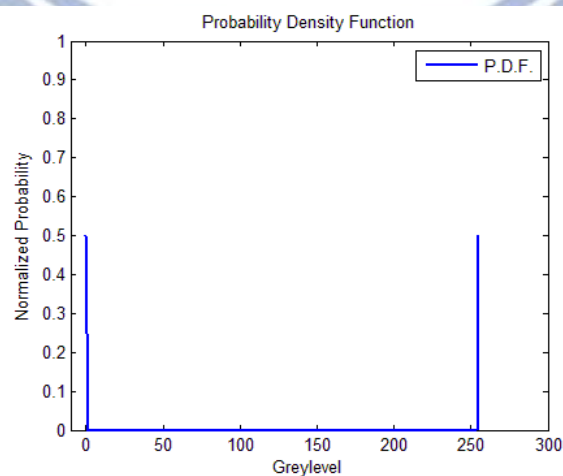


圖 64 二元資訊影像之機率分布函數 PDF

由於我們假設的資訊影像為畫素 600×600 之亂數分布二元影像，故僅有 0 及

255 兩種灰階值。且因其為亂數影像，產生 0 或者 1 的機率相同，故 PDF 在灰階值 0 及 255 得到的機率即為 0.5

我們以 IFTA 以 50 圈遞迴及相位階數 200 階將此二元影像製作成 Kinoform，接著以電腦重建影像，畫出每個畫素的出現機率，得到 PDF 作圖如下：

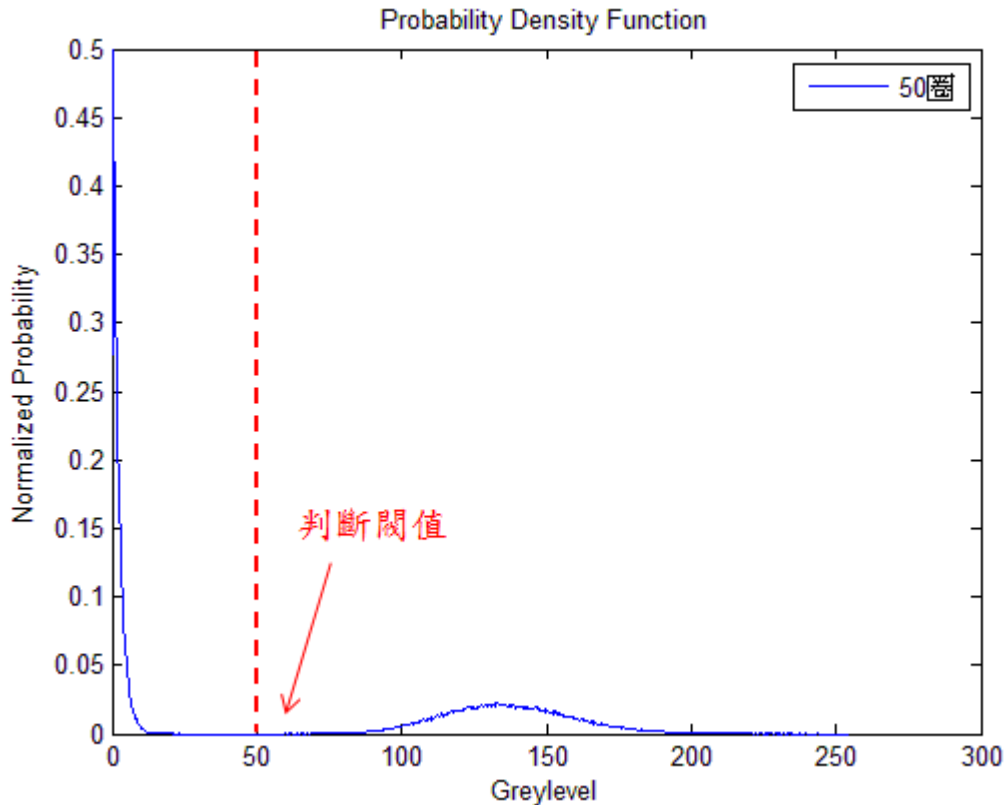


圖 65 以 IFTA 計算之電腦全像片計算其重建影像之機率分布函數

從上圖，我們可以發現重建影像資訊主要分布在兩個區域：第一個區域大約落於灰階值 0 至 20，另外一區大約在灰階值 80 至 190。這兩個區域即對應到原始二進位影像的 0 及 1。從 PDF 分佈得知，0 與 1 位元在經過了電腦全像片的產生過程後，大致上都有出現灰階分散的狀況，且 1 位元的分散情形較 0 位元的分散更為嚴重，此分散現象已符合上一小節 6.3.1 之重建影像圖 63，故我們常以 PDF 作為重建影像品質的量化指標。

訊號 1 與 0 在透過儲存及重建後的響應是判斷此儲存系統品質的重要指標，若在輸出平面上觀測到對應訊號位元 1 與 0 的光強度機率分佈能夠清楚分辨，即 0 與 1 的機率分佈沒有重疊，就能夠以圖中紅線所在之灰階數 50 作為閾值，完整地讀出 Kinoform 所儲存的資訊。但若機率分佈重疊，代表部分之 0 位元將會被判斷成 1；反之，某部分 1 位元將被判斷成 0，此時我們稱之判斷錯誤的畫素為錯誤碼。在此，我們將誤碼率定義如下：

$$\text{Bit Error Rate} = \frac{\text{錯誤碼之畫素數量總和}}{\text{所有畫素數量總和}} \quad (86)$$

依照上述誤碼率 BER 之定義，我們可以簡單地量化影像產生錯誤碼的機率。更

嚴謹的誤碼率公式如(87)式：

$$BER = \pi_0 \sum_{I=I_{th}}^{255} p_0(I) + \pi_1 \sum_0^{I=I_{th}} p_1(I) \quad (87)$$

其中 $\pi_{0/1}$ 為原始二元影像中訊號 1 與 0 之機率， $p_{0/1}(I)$ 為重建影像中訊號 0 與 1 之機率分佈函數， I_{th} 則為灰階閾值。在亂數產生二元影像的前提下， $\pi_0 = \pi_1 = 0.5$ ，(86)式與(87)式可得到的相同的誤碼率值。

系統特性決定了輸出訊號的機率分佈方式，而誤碼率就是判斷儲存系統優劣的指標。另外，由(87)式可以知道，只要決定了灰階閾值 I_{th} 的位置，就可以計算出 BER。而所謂的灰階閾值，指的就是判斷重建影像中信號為 1 位元還是 0 位元的灰階值。影像畫素灰階值超過此閾值我們便判斷為 1 位元；低於此閾值則判斷為 0 位元。以圖像舉例來說，我們將重建影像圖 63，以灰階閾值 50 判斷後，得到的影像比較原圖如下：

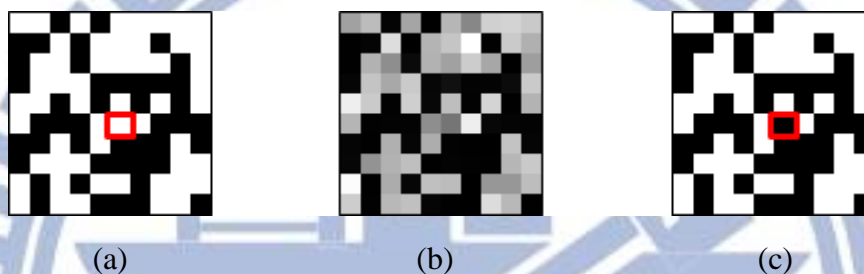


圖 66 判斷灰階閾值之二元影像比較圖 (a)原始二元影像(b)閾值判斷前重建影像
(c)閾值判斷後重建影像

比較圖 66(a)及(c)，可以看到紅色框框即為錯誤碼發生處。當二元影像畫素大幅增加至 100×100 、 500×500 時，便無法簡單地看出錯誤碼發生位置及數量。因此，我們常以 BER 作為判斷儲存系統優劣的重要量化指標。

在第二章中，我們以重建影像之 RMSE 值，量化並比較不同的演算法參數對重建影像造成的影響。下一節中，我們將以此章節介紹之 PDF 與 BER，比較 IFTA 與 SIFTA 之遞迴圈數以及 Kinoform 之相位取樣階數對重建影像品質造成的影響。

6.4 演算法參數之誤碼率比較

考慮畫素大小為 600×600 之亂數二元影像如圖 67：

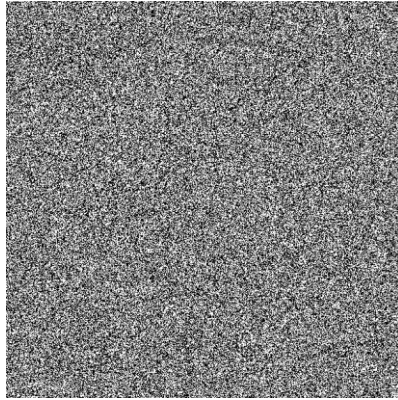


圖 67 畫素大小 600×600 之二元影像

經過遞迴圈數 4 圈以及 100 圈、相位階數皆為 200 階之 IFTA 設計電腦全像後，各別以電腦計算重建影像(見下圖 68)及訊號 0 與 1 之 PDF(見下圖 69)：

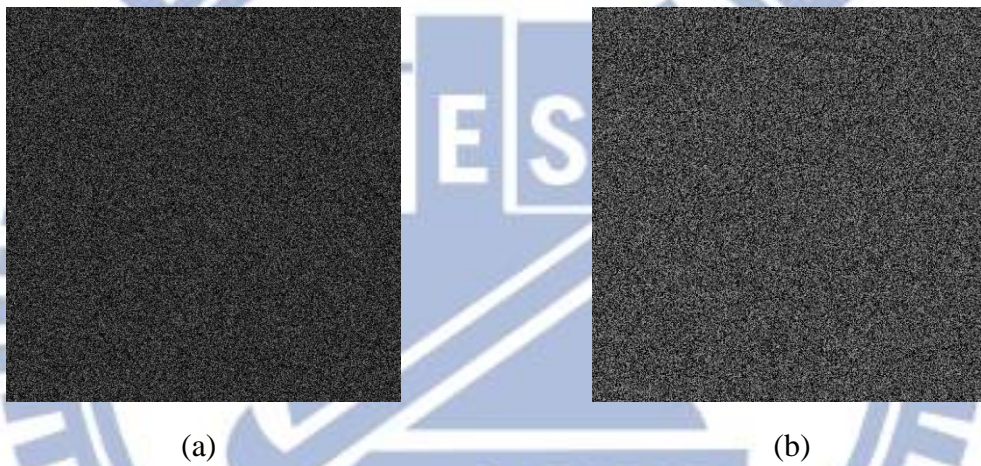


圖 68 二元影像之 IFTA 電腦全像重建影像比較(a).遞迴 4 圈 (b).遞迴 100 圈

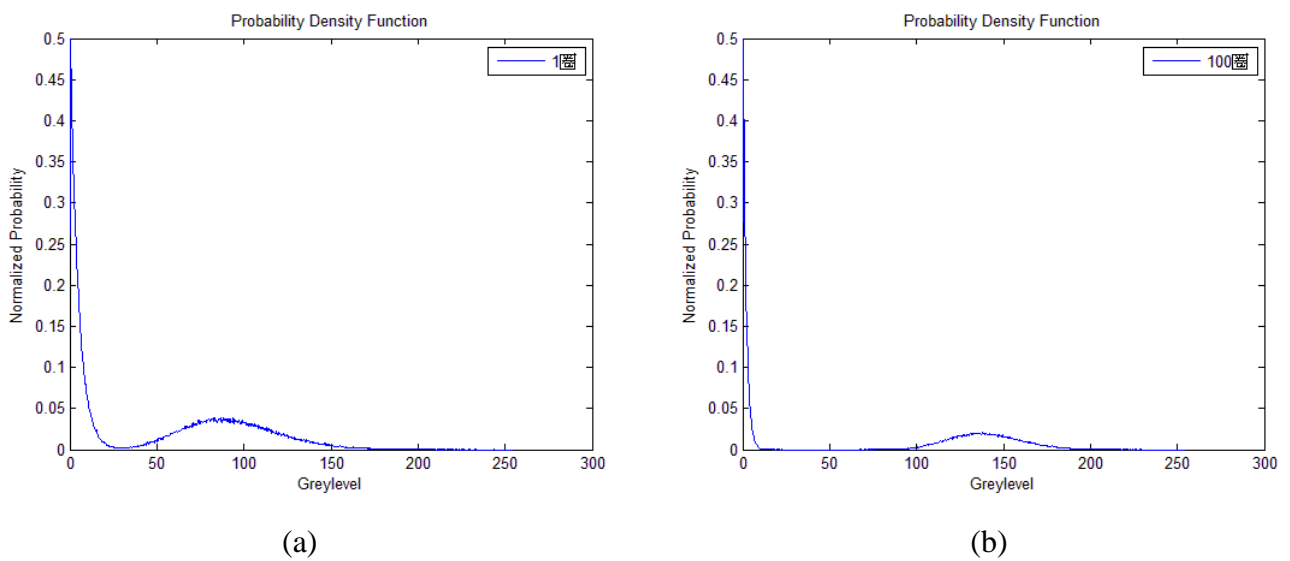


圖 69、IFTA 重建影像之 PDF 比較(a).遞迴 4 圈 (b).遞迴 100 圈

我們可以發現圖 69(a)中，訊號 0 與 1 的機率分佈有交互重疊的狀況，而圖 69(b)

則幾乎完全分開，再次證明產生 CGH 之演算法參數將影響重建影像品質。對於通訊及儲存系統來說，位元的錯誤將造成資訊錯亂。在此節，我們將討論演算法之遞迴圈數以及 0 至 2π 的相位階數跟誤碼率的關係。

6.4.1 遞迴圈數影響

考慮圖 67 之二元影像，我們分別以 IFTA 及 SIFTA 產生電腦全像片，並模擬重建影像、計算 PDF 及 BER。為避免相位階數影響我們模擬結果，我們將 Kinoform 相位階數固定於 200 階，漸漸改變演算法之遞迴圈數自 1 圈至 200 圈。下表為 IFTA 之運算模擬結果：

遞迴圈數	1				2			
BER	灰階閾值 128	0.486	閾值最佳化	0.057	灰階閾值 128	0.492	閾值最佳化	0.0135
PDF								
遞迴圈數	4				50			
BER	灰階閾值 128	0.449	閾值最佳化	0.0019	灰階閾值 128	0.161	閾值最佳化	3.889×10^{-5}
PDF								
遞迴圈數	100				200			
BER	灰階閾值 128	0.132	閾值最佳化	2.50×10^{-5}	灰階閾值 128	0.080	閾值最佳化	3.33×10^{-5}

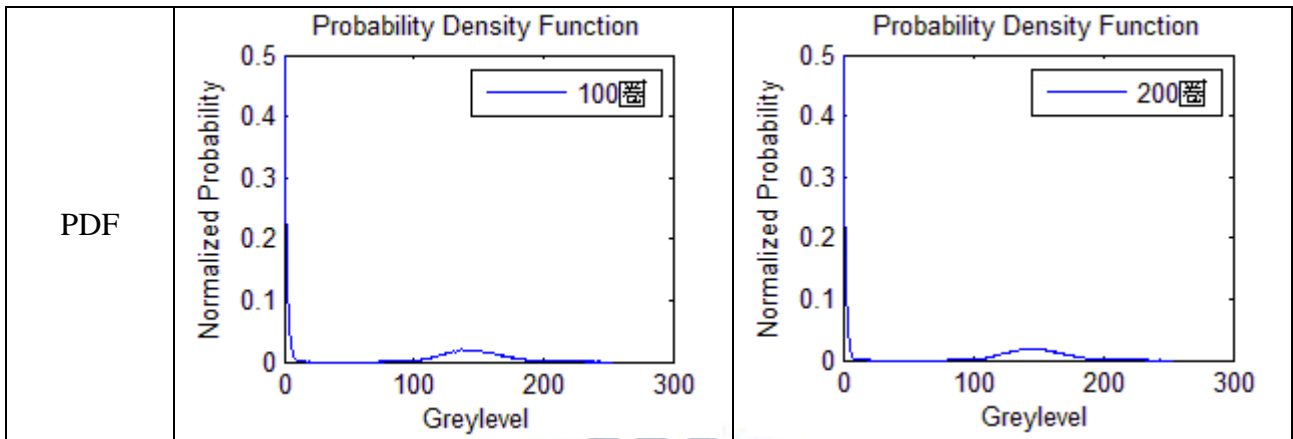


表 17 IFTA 遞迴圈數與誤碼率關係表

上表中，我們首先定義 BER 之閾值為 128 灰階值，從 1 圈遞迴的 PDF 圖可以發現，重建影像訊號位元 0 之灰階機率皆小於 128 灰階值，而大部分訊號位元 1 之機率亦小於 128 灰階值，故 BER 大約為 0.486，表示有接近一半的畫素將被判斷為錯誤碼，這一半的畫素之中，大多數就是原來為訊號 1 之畫素位置造成誤碼。

為了增加判斷位元時之正確度以及降低錯誤碼的發生率，此處我們撰寫一個簡單的最佳化演算法，找到 PDF 圖中第一個波谷位置對應之灰階數。此位置即是將重建影像 0 與 1 之機率分佈分開的最佳灰階值。透過尋找波谷之演算法，設定最佳閾值重新判斷重建影像品質，便可得到表格中「閾值最佳化」之 BER 值。以 1 圈遞迴為例，BER 值從 0.486 降至 0.0057，再度地說明選定灰階閾值的重要性。

根據上表，隨著遞迴圈數的增加，重建影像訊號位元 0 與 1 之機率分佈將逐漸分開。然而，當迴圈到達一定次數後，分開的情形便不會再改善，影像之誤碼率也將收斂至 10^{-5} 數量級。我們將各種迴圈次數之 PDF 圖結合於圖 70 之中：

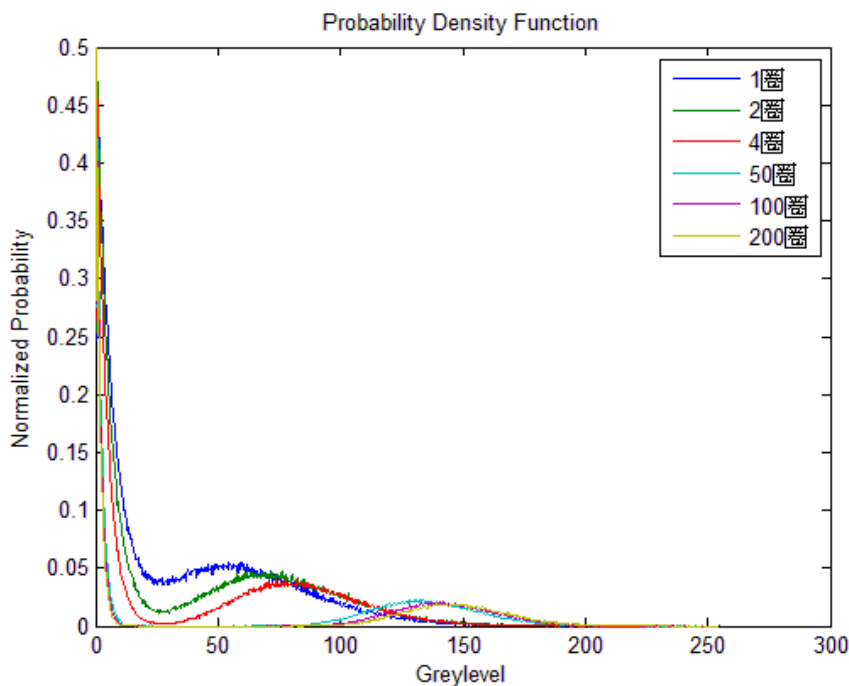


圖 70 PDF 圖與 IFTA 迴圈數之關係

同樣地，我們以 SIFTA 產生電腦全像片、重建出二元影像，獲得 PDF 與遞迴圈數關係如圖：

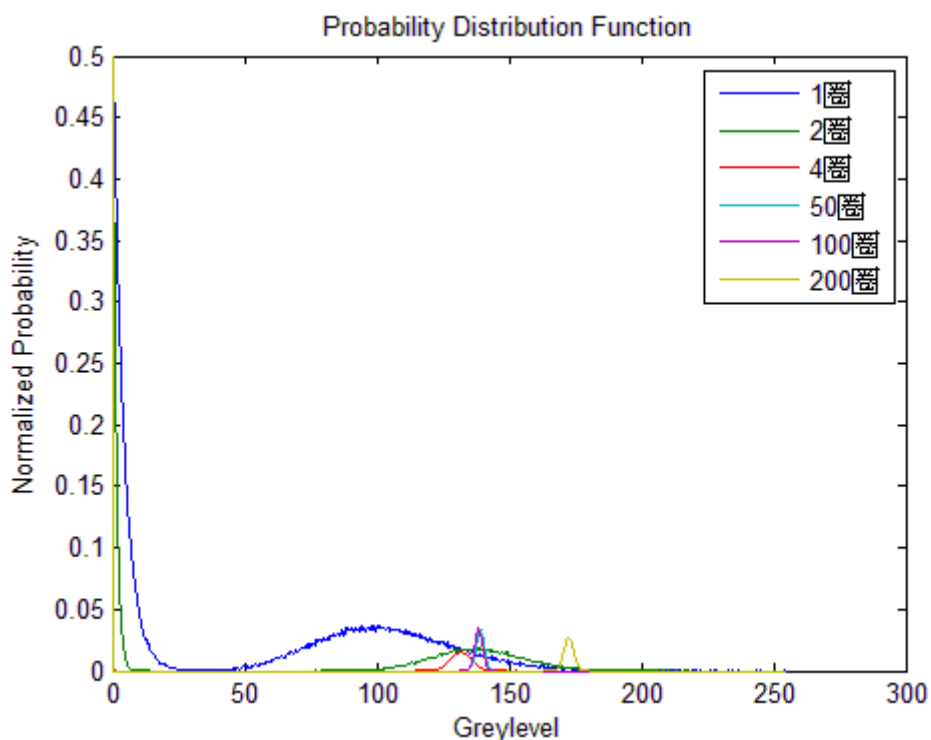


圖 71 PDF 圖與 SIFTA 迴圈數之關係

由此機率分佈函數，我們可以個別定義灰階閾值，並計算 BER 與遞迴圈數之關係如下表：

遞迴圈數	BER(灰階閾值 128)	BER(閾值最佳化)
1	0.492	0.055
2	0.399	3.722×10^{-5}
4	0.047	1.111×10^{-5}
50	0	0
100	0	0
200	0	0

表 18 BER 值與 SIFTA 迴圈數之關係

根據 SIFTA 演算法重建影像之 PDF 與 BER 資料，我們發現 SIFTA 在重建影像判讀位元的表現比 IFTA 優良許多。隨著遞迴數增加，我們發現 SIFTA 甚至可以在 600×600 的重建影像中，使誤碼率降為零，且重建影像在位元 1 的機率分佈區域也較 IFTA 集中許多，代表二元影像亮處灰階相當均勻，這部分和我們第二章之鍵盤影像模擬分析吻合，也再度證實了 SIFTA 演算法之 CGH 在影像品質上較 IFTA 佳。然而，SIFTA 在最初設計尺寸 $N \times N$ 之圖像時，必須擴增為 $2N \times 2N$ 的目標影像，並分出訊號區及雜訊區以增加演算法之自由度，又演算出之 Kinoform 畫素將與目標影像相同。因此若使用 SIFTA 產生電腦全像片，將導致顯示器顯示 Kinoform 畫素要

求增加。

6.4.2 相位階數影響

如同我們在第二章所提，光經過傳統全像片所受到的相位調制量為連續分佈；由於電腦全像系統為離散之數位系統，光經過數位化之電腦全像片後相位調制量並非連續，因此0至 2π 之間所細分的階數便與其重建影像有密不可分的關係。在上一小節介紹完遞迴圈數的影響，我們接著討論 Kinoform 的相位取樣階數與重建之二元影像 BER 之關係。為避免多重參數影響，我們此時設定演算法遞迴圈數為 20 圈，所得到之結果如下表：

IFTA 之重建二元影像		SIFTA 之重建二元影像	
相位取樣階數	BER(閥值最佳化)	相位取樣階數	BER(閥值最佳化)
2	0.4117	2	0.0979
4	0.0841	4	0.0013
8	0.0096	8	8.0×10^{-6}
16	2.94×10^{-4}	16	3.0×10^{-6}
32	3.89×10^{-5}	32	0
64	2.78×10^{-5}	64	0
128	1.94×10^{-5}	128	0

表 19 IFTA 與 SIFTA 計算之電腦全像片相位取樣階數與誤碼率之關係

從上表可以看出不同的演算法之相位取樣階數對 BER 的影響。在遞迴圈數夠多的前提下，若目標影像為二元資訊亂數分布影像，SIFTA 之電腦全像只需 32 階(或是 5-bit)便可以將所記錄之二元影像完整重建出來。

本章中，我們提出一種電腦全像儲存方法，並以電腦模擬的方式，觀察其重建影像，計算並討論不同演算法之演算法參數對於誤碼率及位元機率分佈函數。又由以上的模擬可知，本論文所提之電腦全像方法，不只可應用於投影顯示技術，若將欲投影之影像，轉換成數位二元資訊影像，亦可以相同演算法產生電腦全像片，並應用於資料儲存系統上，藉由適當的解碼演算法，得以準確地重建資訊。

第 7 章 結論及未來工作

本篇論文根據手機的發展趨勢，探討未來顯示系統的技術需求，我們探討利用電腦全像片遠場繞射投影顯示技術，並結合電腦全像片投影系統及紅外線人體感測系統達成互動式投影影像之目的。我們發現電腦全像片投影系統保留全像特性：資訊分佈於全像片任一處。此外，根據遠場繞射特性，滿足遠場繞射條件之投影影像將不會隨投影距離改變而模糊，與傳統投影系統相較有較高的影像穩定度。

為增進電腦全像片之成像品質，我們以對稱式遞迴傅立葉轉換演算法 SIFTA 設計純相位電腦全像片。接著以理論推導顯示電腦全像片之 SLM 透光函數，分析成像影像參數，我們發現，此系統之投影成像大小僅和使用雷射波長、投影距離以及 SLM 畫素大小有關，而與投影影像之畫素數量無關。若欲投影之影像畫素增加，將使屏幕上投影影像畫素間距縮短而不影響影像大小。人眼之解析角度約為 1 弧分，在適當的觀看距離下，我們可藉此特性設計目標影像之畫素，使得人眼看見投影影像為連續分布。

藉由電腦模擬分析重建投影鍵盤影像，當 SIFTA 的遞迴圈數 40 圈以及電腦全像片的相位階數 80 階所得到的重建影像即為最佳重建影像，再增加遞迴圈數只會延長遞迴運算所需的時間而影像品質無太大進步；相位階數則可以視實際 SLM 之設定，超過 80 階即可使用。

然而，在我們使用的 SLM 畫素大小 $20\mu\text{m}$ 之前提下，根據遠場繞射的距離限制，觀看傅立葉轉換影像所需之投影距離須達 270 公尺，投影成像大小約 28 公尺，食用上尚缺可行性，因此我們設計了一組由傅立葉透鏡與成像透鏡組成之投影系統以縮短投影距離。根據設計的方法，我們發現當傅立葉透鏡焦距愈大、成像透鏡焦距愈小的情況下，投影所需要的距離相對越短。實驗上我們使用焦距為 84 公分之傅立葉透鏡，焦距為 16 公分之成像透鏡，在成像透鏡後 1.52 公尺處，可以獲得 $10\text{公分} \times 10\text{公分}$ 、畫素大小 300×300 之鍵盤影像。

我們評估了用於顯示 CGH 之 SLM 的光學調制能力對投影成像之影響。模擬及實驗結果皆明確地指出：若用於顯示純相位之電腦全像片，當振幅調制不能隨灰階變化保持均 1，將導致成像對比度下降，部分地能量將轉移至 DC 亮點；當相位調制不能隨灰階變化線性調制至 2π ，將產生共軛影像，亦將導致對比度下降。然而，我們發現即使振幅調制區間位於 0.3 至 1 或者相位僅能調制至 1.5π ，仍然可以顯示清楚的鍵盤影像，影像區之訊雜比 SNR 值約為 30。

由我們的模擬及實驗結果，我們將此電腦全像顯示技術延伸至數位資訊儲存系統。畫素大小 $N \times N$ 的頁面式二元數位影像經過 SIFTA 運算，將得到畫素大小為 $2N \times 2N$ 大小之電腦全像片。此外，由 Matlab 模擬電腦全像片重建影像之影像灰階機率分佈函數以及誤碼率可知，二位元的黑白影像分布可以清楚地區別，進而解碼讀取數位資訊。經過分析後我們發現， 600×600 的數位影像以 SIFTA 遞迴圈數 10

圈，設計相位階數 32 階以上之電腦全像片，便可以重建出誤碼率低於 10^{-6} 之數位影像。

在未來工作上，我們希望能夠達到更高的繞射效率。由於實驗的光路有許多的光學元件，導致光強隨著各元件界面的反射與散射逐漸衰減。根據文獻指出，入射光若非垂直入射 LCoS，而與 LCoS 表面夾著某一角度，依然可以達到良好的相位調製效果[19]。若是可以某一角度入射 LCoS 進行光學調變，將可以捨去光路之中的分光鏡，使繞射效率加倍。

對於現有的光學元件之遠場繞射距離限制，可試著以多個透鏡組合成像系統，減短放大實像所需之像距。此外，可以試著將傅立葉之透鏡函數寫入電腦全像片之中，縮減傅立葉轉換影像之所需距離。

我們亦可嘗試以現有的微影技術，製作小尺寸電腦全像晶片。由於尺寸小，雷射光源入射時不須擴束，藉由雷射入射電腦全像片，可以在短距離內達成遠場繞射條件。根據我們的估計，當畫素大小為 $0.442\mu\text{m}$ ，顯示總畫素 500×250 的 CGH 影像，可於晶片後 50 公分的地方得到 $55\text{ cm} \times 27.5\text{ cm}$ 之鍵盤影像。

在數位應用方面，當畫素大小為 $N \times N$ 之數位二元影像，以 SIFTA 設計出畫素為大小 $2N \times 2N$ 之電腦全像片，可以試著分析若以其中 $N \times N$ 或者 $N/2 \times N/2$ 之畫素重建影像之灰階機率分佈以及誤碼率。

我們以 IFTA 設計全像片，發現重建影像之中心亮點將影響我們觀看影像。為避免中心亮點影響觀看，常用的解決方法除了以 SIFTA 設計目標影像，我們還可以試著將鍵盤影像分成四個象限，讓第一與第三象限互換、第二與第四象限互換，成為新的 IFTA 目標影像。以 IFTA 計算出 CGH 後重建，將出現多階繞射影像，其中第一階影像將與第二階繞射影像結合成為完整的鍵盤影像，且鍵盤影像將可避開中心亮點。

另外，在設計 SIFTA 目標影像時，我們將鍵盤影像擺置目標影像左下角四分之一處，剩下的四分之三部分設為雜訊區以增加演算法自由度。然而，以 SIFTA 設計出的 CGH 總畫素量為 IFTA 四倍。若將來中心亮點的問題可由其他方法解決，我們可以另外設定 SIFTA 雜訊區範圍，藉由減少雜訊區的畫素數量來降低 CGH 總畫素需求。

若有機會使用多個 SLM 系統，可以製作全彩投影。由於成像大小與波長成正比，因此若使用同一傅立葉成像系統，將導致 RGB 三色影像無法疊合。在設計電腦全像片時，我們可以針對不同顏色的影像預先進行目標影像的縮放，使三色之 CGH 影像之重建影像能在屏幕疊合，實現全彩影像投影。

參考文獻

- [1] D.Gabor. “A New Microscopic Principle”, Nature, 161, pp. 777-778, May 1948.
- [2] B. R. Brown, A. W. Lohmann. “Complex Spatial Filtering with Binary Masks”, Applied Optics, 5, 6, pp. 967-969, June 1966.
- [3] A. W. Lohmann, D.P. Paris. “Binary Fraunhofer Holograms Generated by Computer”, Applied Optics, 6, pp.1739, 1967.
- [4] L. B. Lesem, P. M. Hirsch, J. A. Jordan, Jr. “The Kinoform: A New Wavefront Reconstruction Device”, IBM Journal of Research and Development, 13, 2, pp.150-155, 1969.
- [5] J. M. Florence and R.D. Juday.“Full-Complex Spatial Filtering with A Phase Mostly DMD”, Proceedings of SPIE,1558, p. 487, 1991.
- [6] D. Mendlovic, G. Shabtay, U. Levi, Z. Zalersky, and E. Marom.“Encoding Technique for Design of Zero-Order (on-axis) Fraunhofer Computer-Generated-Holograms”, Applied Optics, 36, p.8427, 1997.
- [7] D. Leseberg. “Computer-Generated Three-Dimensional Image Holograms”, Applied Optics, 31, 2, pp. 223-229, January 1992.
- [8] D. Leseberg, C. Frere.“Computer-Generated Holograms of 3-D Objects Composed of Tilted Planar Segments”, Applied Optics, 27, 14, pp. 3020-3024, July 1988.
- [9] Y. Li, D. Abookasis, J. Rose. “Computer-Generated Holograms of Three-Dimensional Realistic Objects Recorded without Wave Interference”, Applied Optics, 40, 17, pp. 2864-2870, June 2001
- [10] T. Yatagai. “Stereoscopic Approach to 3-D Display Using Computer Generated Hologram”, Applied Optics, 15, 11, pp. 2722-2729, November 1976
- [11] 劉仁崇,「相位電腦全像片的設計與應用」, 國立交通大學, 碩

士論文，民國 93 年。

- [12] M. K. Kim. “Principles and Techniques of Digital Holographic Microscopy”, SPIE Reviews, 1, 018005, pp. 7-13, May 2010.
- [13] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, “A Practical Algorithm for The Determination of The Phase from Image and Diffraction Plane Pictures”, Optik, 35, 2, 237-246, 1972.
- [14] F. Wyrowski, O. Bryngdahl. “Iterative Fourier-Transform Algorithm Applied to Computer Holography”, J. Opt. Soc. Am. A, 5, 7, pp. 1058-1065, July 1988.
- [15] J. S. Liu, A. J. Caley, M. R. Taghizadeh, “Symmetrical Iterative Fourier-Transform Algorithm Using Both Phase and Amplitude Freedoms”, Optics Communications, 267, pp. 347-355, 2006.
- [16] P. Yeh, C. Gu, Optics of Liquid Crystal Displays, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [17] K. D. Wulff, et al. “Aberration Correction in Holographic Optical Tweezers”, Optics Express, 14, 9, 4170-4715, May 2006.
- [18] E. Pleguezuelos, et al. “Design of A Low-Cost, Interactive, Holographic Optical Tweezers System”, Optical Trapping and Optical Micromanipulation III, San Diego, August 2006.
- [19] J. E. Rueda, A. L. Romero, L. Guerra. “Characterization of Reflective TN-LCD, Tuned in Phase-Only Modulation and to Six Wavelengths”, Photonics Society of Poland, 2, 4, 174-176, 2010.