

# 國立交通大學

## 土木工程學系

### 碩士論文

三維靜水壓  $k-\varepsilon$  明渠水流模式之發展

A 3D Hydrostatic  $k-\varepsilon$  model for Open-Channel Flow



研究生：林怡君

指導教授：楊錦釗 博士

謝德勇 博士

中華民國一〇三年七月

三維靜水壓  $k-\varepsilon$  明渠水流模式之發展

A 3D Hydrostatic  $k-\varepsilon$  model for Open-Channel Flow

研究生：林怡君

Student : Yi-Chun Lin

指導教授：楊錦釗

Advisor : Jinn-Chuang Yang

謝德勇

Te-Yung Hsieh

國立交通大學

土木工程研究所

碩士論文



A Thesis

Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Civil Engineering

July 2014

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇三年七月

# 三維靜水壓 $k-\varepsilon$ 明渠水流模式之發展

學生：林怡君

指導教授：楊錦釗

謝德勇

國立交通大學土木工程研究所

## 摘要

本研究採垂直水平分離演算(VHS)之概念發展三維靜水壓水理模式，搭配紊流模式計算紊流黏滯係數，其中紊流模式分別採用雙方程模式之標準  $k-\varepsilon$  紊流模式及兩種零方程模式。在座標系統上，水平方向與垂直方向分別採用正交曲線座標系統與  $\sigma$  座標系統，使模式邊界能夠更貼近真實渠道之蜿蜒與底床起伏。水理模式之架構係先由深度平均之控制方程式求解水平二維每個計算格點之水面高程以及水深平均流速，並將之代入流速差異量方程式，求得三維每個計算格點相對於水深平均流速之流速差異量，即可求解出三維空間上每個計算格點之流速分佈。數值方法方面，水平、垂直模式與  $k-\varepsilon$  方程式皆採隱式法求解。分別採用直渠道案例以及急彎彎道案例進行模擬分析，並比較三種模式之紊流黏滯係數表現以及模擬結果之差異性，以探討明渠流之紊流流場現象。

**關鍵字：**三維、靜水壓、明渠流、 $k-\varepsilon$  紊流模式

# **A 3D Hydrostatic k- $\epsilon$ model for Open-Channel Flow**

Student : Yi-Chun Lin

Advisor : Jinn-Chuang Yang

Te-Yung Hsieh

Department of Civil Engineering National Chiao-Tung University

## **ABSTRACT**

A 3D hydrostatic model based on a vertical horizontal splitting (VHS) concept is developed in this study. The standard k- $\epsilon$  model, a two-equation turbulent model, and two kinds of zero-equation models are adopted to calculate eddy viscosity. The orthogonal curvilinear coordinate system and the sigma coordinate system are used to cope with the irregularity of channel geometry. The water elevation and the depth-averaged velocity will be solved by the 2D depth-averaged model, and then the velocity profile along the vertical direction will be solved by the velocity defect model. The implicit numerical schemes are used to discretize all of the equations to preserve the model stability unconditionally. Two experimental cases including the flow in straight channel and sharp bend were simulated by the model. Through the comparison between the experimental data and simulation results, the eddy viscosity computed from two-equation and zero-equation turbulent models were examined and discussed in depth.

***Keywords : 3 dimensional 、 hydrostatic 、 open channel flow 、 k-  $\epsilon$  turbulent model***

## 致謝

承蒙楊教授錦釗以及謝博士德勇之悉心指導與鼓勵，使我碩士研究得以順利完成，十分感謝紊流專家傅教授武雄於機械領域研究之餘仍撥空指導，同時亦感謝口試委員們傅教授武雄、黃教授良雄、蔡教授長泰給予之寶貴意見及指教，使研究能更加完善。

碩士兩年生涯中，研究室各位的扶持是我最大的動力，特別感謝志聰學長、浩榮學長、建華學長、聖翔學長、蓉瑩學姊給予研究上的指導；同時感謝胤隆學長、世偉學長、宏恩學長、家偉學長、芳綺學姊、醇國學長、瑋廷學長、亞雯學姊無私的照顧與協助；同學柏華、瑋宸，承儒、佩衡凡事相挺共度歡笑與淚水；更不忘各位辛苦學弟們紹健、宗原、羿豪、仁翔、鈺程的大力幫忙與無怨無悔；而助理筱雯更是幫助我協助處理繁多大小瑣事，十分辛勞。

除此之外，也謝謝在我身邊愛我以及我愛的人，特別是我的爸爸、媽媽、Angela、廷瑜、又允，我的室友貞文、怡中，對我的無限包容與支持，我的好朋友琨淇給予我許多歡笑與陪伴，謝謝朋友們阿村、柏宇、吳謙、曉慶、穎如、佩琳、湘鈴、詩涵、偉豪、哲瑜、柏安、又中、又仁、張爸爸、張媽媽，謝謝大家給我的愛與照顧，讓我能夠那麼無後顧之憂地完成學業。

# 目錄

摘要 .....	I
ABSTRACT .....	II
致謝 .....	III
目錄 .....	IV
表目錄 .....	VI
圖目錄 .....	VII
符號表 .....	IX
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究動機與方向 .....	1
1.2 文獻回顧 .....	1
1.3 研究目的與方法 .....	3
1.4 章節介紹 .....	4
第二章 理論基礎 .....	5
2.1 水理模式控制方程式 .....	5
2.1.1 三維動量方程式 .....	5
2.1.2 水平二維模式 .....	6
2.1.3 速度差異量方程式 .....	7
2.2 輔助關係式 .....	9
2.2.1 層流與紊流應力 .....	9
2.2.2 底床剪應力 .....	9
2.2.3 垂向剪應力與流速梯度之轉換 .....	10
2.3 紊流黏滯係數 .....	10
2.3.1 k- $\epsilon$ 模式 .....	10
2.3.2 零方程模式 .....	11
2.4 邊界條件設定 .....	11
2.4.1 二維水平部分 .....	11
2.4.2 垂直部分 .....	12
2.4.3 k- $\epsilon$ 模式 .....	12

2.4.4 牆函數 .....	12
第三章 數值架構 .....	16
3.1 水平二維模式 .....	16
3.2 流速差異量方程式 .....	18
3.3 k- $\epsilon$ 模式 .....	19
第四章 結果與討論 .....	23
4.1 直渠道案例 .....	23
4.1.1 數值參數敏感度測試 .....	23
4.1.2 模擬結果與實驗之比對分析 .....	24
4.1.3 不同紊流模式之模擬比對分析 .....	25
4.2 急彎案例 .....	26
4.2.1 數值敏感度測試 .....	26
4.2.2 模擬結果與實驗之比對分析 .....	27
4.2.3 不同紊流模式之模擬比對分析 .....	27
第五章 結論與建議 .....	52
5.1 結論 .....	52
5.2 建議 .....	52
參考文獻 .....	54
附錄 A .....	57

## 表目錄

表 2.1 曼寧 $n$ 係數與粗糙高度 $k_s$ 對照表 .....	14
表 4.1 直渠道底床邊界條件測試近底床流速與實驗比較誤差 .....	29
表 4.2 直渠案例三方向網格配置表 .....	29
表 4.3 直渠道案例模擬時間表 .....	29
表 4.4 急彎案例三方向網格配置表 .....	30
表 4.5 彎道案例模擬時間表 .....	30





## 圖目錄

圖 2.1 正交曲線座標轉換示意圖 .....	14
圖 2.2 水深方向流速剖面示意圖 .....	14
圖 2.3 $\sigma$ 座標轉換示意圖 .....	15
圖 2.4 垂向紊流邊界層之各層定義範圍示意圖 .....	15
圖 3.1 模式計算流程圖 .....	20
圖 3.2 水平二維模式控制體積法示意圖 .....	21
圖 3.3 垂直模式控制體積法示意圖(計算區域).....	22
圖 4.1 Nezu and Rodi(1986)實驗水槽布置圖.....	31
圖 4.2 直渠案例實驗 6 於量測斷面中間水柱近底床流速比較圖 .....	32
圖 4.3 直渠案例實驗 8 於量測斷面中間水柱近底床流速比較圖 .....	32
圖 4.4 直渠案例實驗 6 於量測斷面中間水柱流速網格測試比較圖 .....	33
圖 4.5 直渠案例實驗 8 於量測斷面中間水柱流速網格測試比較圖 .....	33
圖 4.6 直渠案例實驗 6 於量測斷面中間水柱流速比較圖 .....	34
圖 4.7 直渠案例實驗 8 於量測斷面中間水柱流速比較圖 .....	34
圖 4.8 直渠案例實驗 6 於量測斷面中間水柱流速比較圖 .....	35
圖 4.9 直渠案例實驗 8 於量測斷面中間水柱流速比較圖 .....	35
圖 4.10 模擬直渠案例實驗 6 於量測斷面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖 .....	36
圖 4.11 模擬直渠案例實驗 8 於量測斷面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖 .....	36
圖 4.12 模擬直渠案例實驗 6 於量測斷面中央水柱流速比較圖 .....	37
圖 4.13 模擬直渠案例實驗 8 於量測斷面中央水柱流速比較圖 .....	37
圖 4.14 模擬直渠案例實驗 6 於量測斷面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖 .....	38
圖 4.15 模擬直渠案例實驗 8 於量測斷面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖 .....	38
圖 4.16 急彎實驗案例幾何示意圖 .....	39
圖 4.17 彎道案例 65° 斷面左岸、渠道中央、右岸之網格測試流速比較圖 .....	40
圖 4.18 彎道案例 143° 斷面左岸、渠道中央、右岸之網格測試流速比較圖 .....	40
圖 4.19 Rozovskii(1961)案例 65°、100° 及 143° 斷面縱向流速比較圖 .....	41

圖 4.20 Rozovskii(1961)案例 $65^\circ$ 、 $100^\circ$ 及 $143^\circ$ 斷面側向流速比較圖 .....	42
圖 4.21 Rozovskii(1961)彎道案例流速分佈圖 .....	43
圖 4.22 Rozovskii(1961)採 k- $\epsilon$ 模式模擬之水位等高線圖 .....	44
圖 4.23 Rozovskii(1961)案例於 $65^\circ$ 、 $100^\circ$ 及 $143^\circ$ 斷面縱向流速比較圖 .....	45
圖 4.24 Rozovskii(1961)案例 $65^\circ$ 、 $100^\circ$ 及 $143^\circ$ 斷面側向流速比較圖 .....	46
圖 4.25 Rozovskii(1961)側壁水深比較圖 .....	47
圖 4.26 Rozovskii(1961) $65^\circ$ 斷面採 k- $\epsilon$ 模式模擬之 V、W 向量圖 .....	48
圖 4.27 Rozovskii(1961) $100^\circ$ 斷面採 k- $\epsilon$ 模式模擬之 V、W 向量圖 .....	48
圖 4.28 Rozovskii(1961) $143^\circ$ 斷面採 k- $\epsilon$ 模式模擬之 V、W 向量圖 .....	49
圖 4.29 Rozovskii(1961) $65^\circ$ 斷面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖 .....	50
圖 4.30 Rozovskii(1961) $100^\circ$ 斷面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖 .....	50
圖 4.31 Rozovskii(1961) $143^\circ$ 斷面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖 .....	51



## 符號表

$B$  = 渠道寬度

$C_f$  = 摩擦係數 ( $= g / c^2$ )

$c$  = Chezy 係數

$\varepsilon$  = 紊流動能消散率

$f_c$  = 科氏力係數

$F_r$  = 福祿數

$g$  = 重力加速度

$h_1$  = 正交曲線座標在  $\xi$  方向之轉換係數

$h_2$  = 正交曲線座標在  $\eta$  方向之轉換係數

$h$  = 水深

$K$  = Von Karman's 係數

$k$  = 紊流動能

$p$  = 壓力

$R_e$  = 雷諾數

$S$  = 渠道縱向坡度

$T$  = 有效剪應力項

$t$  = 時間

$u_\tau$  = 剪力速度

$u$  =  $\xi$  方向流速

$v$  =  $\eta$  方向流速

$w$  =  $\sigma$  方向流速

$y^+$  = 無因次距邊壁垂直距離

$z$  = 卡式座標系統之垂直方向座標

$z_b$  = 底床高程



$z_s$  = 水面高程

$z_i$  = 近底床格網之厚度

$\mu$  = 動力黏滯係數

$\nu_l$  = 層流黏滯係數

$\nu_t$  = 紊流黏滯係數

$\nu_H$  = 水平方向黏滯係數

$\nu_V$  = 垂直方向黏滯係數

$\rho$  = 流體密度

$\tau$  = 層流剪應力

$\Delta t$  = 時間間距

$\Delta\xi$ 、 $\Delta\eta$ 、 $\Delta z$  =  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\sigma$  方向之格網間距。

### 上標

$b$  = 底床代號

$s$  = 水面代號

$(-)$  空間平均

$(\bar{\quad})$  水深平均

$(\cdot)$  時間平均瞬時擾動量

$(\sim)$  物理量之空間微變量



### 下標

$b$  = 底床代號

$p$  = 近邊壁之物理量

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與方向

水流依流況被大致分為兩種，分別為層流(laminar flow)與紊流(turbulent flow)，在自然中或是工程應用上，無論是大氣風場、天然明渠流，或是在人造水工結構物中之水流，紊流流場占相對多數。紊流是於雷諾數高時因擾動被放大而產生，由不同尺寸之渦流(eddy)組成，且為三維維度之流場現象，在時間以及空間上皆十分不規則且不穩定，在紊流數值模式(turbulent model)發展初期無相對應之計算機設備輔助時模擬難度尤高，而如今隨著科技之發展，紊流數值模式已普遍被應用於各式學術以及工程計算上，提供規劃以及瞭解紊流流場現象。

紊流數值模式發展已有近百年歷史，紊流模式種類眾多，主要可分為三大類，分別為雷諾平均數值模式(RANS, Reynolds-averaged Navier-Stokes simulation)、大渦模式(LES, Large Eddy Simulation)，以及數值直解法(DNS, Direct Numerical Simulation)，而雷諾平均數值模式又依加入之紊流特性之傳輸偏微分方程式數目，可分為零方程模式、單方程模式、雙方程模式，以此類推至多方程模式；大渦模式因不為時均化模式，能夠觀察紊流中渦流隨時間變化之現象，卻因所需耗費之網格數或是計算時間皆太過龐大，較無法符合實際應用上之經濟效益；而數值直解法其計算網格及時間步階必須非常小，才能計算所有尺度之渦流，故受限於低雷諾數之流場。

紊流數值模式之主要工作為尋找紊流黏滯係數(eddy viscosity)之適當表示法，而紊流黏滯係數對模擬精確度之重要性已有研究驗證(鐘，2012)。故本研究採計算花費與模擬精度權衡之下較為普遍接受使用之雷諾平均數值模式，分別模擬直渠道與急彎彎道兩種不同類型的實驗案例，探究紊流黏滯係數與流場現象之模擬。

## 1.2 文獻回顧

於 1877 年，Boussinesq 提出了紊流黏性理論，以及 Reynolds 於 1895 年提出雷諾平均下之 Navier-Stokes 方程式，便開啟了紊流數值之先端。直至 1925 年，

紊流數值模式便開始蓬勃發展，首先為普朗特混合長度假說(Prandtl mixing-length hypothesis)，普朗特假設擾動流速與混合長度以及平均速度之梯度成正比，應用此混合長度概念之模式統稱為代數模式(Algebraic model)或是零方程模式(Zero-Equation model)，此種模式因不含偏微分方程式故計算較為經濟，但在許多流場中難以推斷正確之混合長度而有所限制；而後為改善零方程模式在混合長度判定之困難，捨棄了擾動速度與平均流速梯度關聯性而改採於模式中加入了紊流特性之傳輸方程式來求得紊流黏滯係數，又由所加入之偏微分方程式數量區分為單方程模式(One-Equation model)、雙方程模式(Two-Equation model)，以此類推至多方程模式。單方程模式始於 Prandtl 單方程模式(1945)，加入了紊流動能(turbulent kinetic energy)之傳輸方程式，但此模式仍與零方程模式相同，需額外給定混合長度，因此只侷限適用於某些簡單流場，或是在剪力層(Shear layer)中。進一步為考量工程規劃之需求，於 1967 年開始便陸續發展雙方程模式，雙方程模式較單方程模式多一紊流特性傳輸方程式，通常是紊流動能與其他紊流特性量的搭配，最常見的有  $k-\varepsilon$  模式(Harlow and Nakayama 1967；Jone and Launder 1972；Launder and Spalding 1974)、 $k-\omega$  模式(Kolmogorov 1942；Rodi and Spalding 1970；Saffman 1970)等，此些模式於壓力梯度較小之邊界層流、管流等已被模擬驗證皆能有合理之成果，且容易執行，因此在工程上已被廣泛應用。 $k-\varepsilon$  模式之發展始於標準  $k-\varepsilon$  模式(Jones and Launder, 1972；Launder and Sharma, 1974)，但因模式假設紊流黏滯係數為等向性(isotropy)，在某些流場例如分離現象明顯之流場、旋轉流場、軸對稱噴流(axisymmetric jets)等模擬成果較不佳，皆續有許多學者依據不同流場發展各式修正模式，例如: RNG  $k-\varepsilon$  模式(Yaknot et al. 1992)、Realizable  $k-\varepsilon$  模式(Shih et al. 1995)等，前者使用 RNG 方法重新考慮不同尺度之渦流對紊流擴散之影響，經過驗證在旋轉流場中之模擬結果較標準  $k-\varepsilon$  模式理想；後者修正了  $\varepsilon$  方程式，模式中係數  $C_\mu$  不為定值而改由平均應變率(mean strain rate)關係式得來。標準  $k-\varepsilon$  模式發展至今已有數十年之久，已有各種不同維度、不同座標系統以及驗證不同的流場之研究，包含二維模式(Jones and Launder 1972；Keller and Rastogi 1975；Singhal and Spalding 1975；Svensson, U. 1978；Rastogi, A.K. 1978)、三維模

式(Leschziner and Rodi 1979)、管流(Ha Minh, H. and Chassaing, P. 1977 ; Stephensen, A.K. 1976)、環流流場(Gosman et al. 1979 ; Li and Yu 1996)等。在雙方程模式之後亦發展雷諾應力模式(Donaldson and Rosenbaum 1968 ; Daly and Harlow 1970 ; Launder et al. 1975 )，不同於上述模式皆採 Boussinesq 黏性理論，此模式建立於雷諾應力傳輸方程式上，可以計算非均質性、非等向性紊流場，特別是雷諾應力及紊流動能的生成、擴散和消散，但此模式為多方程模式建構十分複雜，且有許多係數需要實驗數據予以驗證，故不被普遍應用。

紊流為全三維之流場現象，故須採三維模式計算始較能正確描述，但為節省計算時間，且垂向流速遠小於水平流速時，水深方向以靜水壓假設之擬似三維模式亦能夠提供三維流速資訊，近年來採水平垂直分離演算概念(VHS)所發展之擬似三維模式愈來愈常被採用，而最初此種模式多應用於海洋與湖泊等大型水體之流場分析，模擬因溫度或是鹽分在水深方向之變化所產生之密度分層現象(Lardner and Cekirge 1988 ; Jin and Kranenburg 1993 ; Wang 1994)，後漸被應用於明渠流之計算(Blanckaert and de Vriend 2003 ; 洪，2011 ; 鐘，2012)。鐘於 2012 年採用擬似三維模式搭配兩種零方程模式測試紊流黏滯係數對水理計算之影響，為深入探討不同雷諾平均數值模式所模擬之紊流黏滯係數分布於模擬計算之差異性，本研究採靜水壓三維水理模式與採用正交曲線座標及  $\sigma$  座標處理不規則渠道與底床邊界，發展一雙方程模式之標準  $k-\varepsilon$  模式分別模擬直渠道與急彎彎道案例，除由實驗數據驗證外，亦與兩種零方程模式所計算之紊流黏滯係數比較分析。

### 1.3 研究目的與方法

本研究由一水深平均二維水理模式(謝，2003)應用垂直水平分離演算的概念加入流速差異量方程式(洪，2011)之靜水壓三維水理模式，配合標準  $k-\varepsilon$  模式(Jones and Launder, 1972)計算紊流黏滯係數而成，而水平方向座標系統採正交曲線座標，使能在計算不規則渠道時更貼切；水深方向則採  $\sigma$  座標系統(Blumberg and Mellor, 1983)，能夠將因起伏底床所導致之不規則格網轉換為規則之矩形格網。

分別採用實驗量測數據予以驗證，並與兩種零方程模式比對分析，藉以了解標準  $k-\varepsilon$  模式於不同流場之紊流黏滯係數計算與適用性，及探討紊流黏滯係數之差異對於模擬是否隨流場改變而影響程度有所不同。

## 1.4 章節介紹

前三小節已依序說明研究動機與方向、文獻回顧以及研究目的與方法，接下來總共還有四章，本節將扼要說明本研究各章內容。

第一章為緒論，說明本研究之背景與目的，並回顧相關模式發展的文獻，提出本研究之方法與研究之重點。

第二章為理論基礎，依序介紹在正交曲線座標下由納維爾-斯托克方程式導出之模式控制方程式、紊流動能、紊流動能消散率(turbulent kinetic energy dissipation rate)之模式化方程式，以及輔助方程式的使用及邊界條件設定。

第三章為數值架構，本章說明水平二維水理模式、垂直水理模式與紊流模式之數值方法，並簡述模式之計算流程。

第四章為模式驗證，針對模式發展部分，採用具有實驗量測數據的案例進行模式驗證，並簡述應用之案例。

第五章為結論與建議，對研究成果做綜合性之歸納說明，並針對研究尚未考量、不盡完備或日後可繼續研究之處提出建議。



## 第二章 理論基礎

本研究之水理模式為在靜水壓假設下應用垂直水平分離演算概念，將三維動量方程式，分為水平二維方程式與流速差異量方程式(洪, 2011)；紊流黏滯係數採雙方程模式之標準 k-ε 模式計算，另外並與兩種零方程模式相互比較。模式在水平方向之座標系統採正交曲線座標，如圖 2.1 所示。

### 2.1 水理模式控制方程式

#### 2.1.1 三維動量方程式

基於不可壓縮流之假設下，對那威爾-史托克司(Navier-Stokes)方程式取時間平均，得控制方程式如下：

連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(h_2 \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_1 \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(h_1 h_2 \bar{w}) = 0 \quad (2.1)$$

動量方程式

ξ 方向

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u}^2) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{u} \bar{w}) + \frac{2(\rho \bar{u} \bar{v})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{(\rho \bar{u}^2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{(\rho \bar{v}^2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u}'^2) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{u'w'}) + \frac{2(\rho \overline{u'v'})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{(\rho \overline{u'^2})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{(\rho \overline{v'^2})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \\ & = \rho f_c \bar{v} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_2 \tau_{11}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_1 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial z}(h_1 h_2 \tau_{13}) \right] + \frac{\tau_{12}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{\tau_{22}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

η 方向

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v}^2) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{v} \bar{w}) + \frac{2(\rho \bar{u} \bar{v})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{(\rho \bar{v}^2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{(\rho \bar{u}^2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \\ & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v}'^2) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{v'w'}) + \frac{2(\rho \overline{u'v'})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{(\rho \overline{v'^2})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{(\rho \overline{u'^2})}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \\ & = \rho f_c \bar{u} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta}(h_1 \tau_{22}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(h_2 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial z}(h_1 h_2 \tau_{23}) \right] + \frac{\tau_{12}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{\tau_{11}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Z 方向：

在一般淺水的天然水道，垂直方向之動量方程式可用靜水壓分布來簡化，

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (2.4)$$

而垂直方向流速可由連續方程式求得，以減少模式之計算量。

以上諸式中， $\xi$ 、 $\eta$ 、 $z$  為三維正交曲線座標方向，其中  $\xi$ 、 $\eta$  為水平方向， $z$  為水深方向；下標 1、2、3 分別代表物理量在  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $z$  方向代號； $h_1$ 、 $h_2$  分別為  $\xi$ 、 $\eta$  方向之轉換係數； $u$ 、 $v$ 、 $w$  分別為  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $z$  方向流速； $g$  為重力加速度； $t$  為時間； $\tau$  為層流剪應力； $(\bar{\quad})$  表時間平均； $(\prime)$  表時間平均瞬時擾動量； $f_c = (2\omega \sin \theta)$  為科氏力係數； $\omega$  為地球自轉角速度； $\rho$  為密度； $p$  為壓力。

### 2.1.2 水平二維模式

將 2.1.1 節之三維水理控制方程式(2.1)、(2.2)、(2.3)利用萊布尼茲法則對深度方向積分，加上運動邊界條件及動力邊界條件並取深度平均值，可得水平二為水理控制方程式。

連續方程式

$$h_1 h_2 \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 \bar{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 \bar{v} d) = 0 \quad (2.5)$$

動量方程式

$\xi$  方向：

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\bar{uv}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{\bar{v}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) &= \rho f_c \bar{v} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p^s}{\partial \xi} - \frac{\rho g}{h_1} \frac{\partial z^s}{\partial \xi} \\ + \frac{1}{dh_1 h_2} \left( T_{11} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + 2T_{12} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - T_{22} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) &+ \frac{1}{dh_2} \frac{\partial T_{12}}{\partial \eta} + \frac{1}{dh_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} + \frac{(\tau_1^s - \tau_1^b)}{d} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\eta$  方向：

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\bar{uv}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) &= -\rho f_c \bar{u} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial p^s}{\partial \eta} - \frac{\rho g}{h_2} \frac{\partial z^s}{\partial \eta} \\ + \frac{1}{dh_1 h_2} \left( T_{22} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + 2T_{12} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - T_{11} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) &+ \frac{1}{dh_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \xi} + \frac{1}{dh_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \eta} + \frac{(\tau_2^s - \tau_2^b)}{d} \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中，

$$T_{11} = \int_{z^b}^{z^s} \left( \tau_{11} - \rho \tilde{u}^2 - \rho \overline{u'^2} \right) dz \quad (2.8)$$

$$T_{22} = \int_{z^b}^{z^s} \left( \tau_{22} - \rho \tilde{v}^2 - \rho \overline{v'^2} \right) dz \quad (2.9)$$

$$T_{12} = \int_{z^b}^{z^s} \left( \tau_{12} - \rho \tilde{u}\tilde{v} - \rho \overline{u'v'} \right) dz \quad (2.10)$$

以上諸式中， $d$  為水深； $z^s$  為水面高程； $z^b$  為底床高程； $\tau_i^s$  為  $i$  方向水面剪應力； $\tau_i^b$  為  $i$  方向底床剪應力； $(\bar{\quad})$  表水深平均； $(\tilde{\quad})$  表物理量之空間微變量(例： $\tilde{u} = \bar{u} - u$ )；上標  $s$ 、 $b$  分別為水面及底床代號； $T$  為有效剪應力項(effective stress term)，其包含層流剪應力、延散剪應力與紊流剪應力。

### 2.1.3 速度差異量方程式

將 2.1.1 節之三維水理控制方程式(2.2)、(2.3)以靜水壓假設代入，並令  $\bar{u} = \tilde{u} + u$ 、 $\bar{v} = \tilde{v} + v$ (如圖 2.2)，得到之方程扣掉 2.1.2 節之水平二維水理控制方程式(2.6)、(2.7)，即可得到垂直水理控制方程式(2.11)、(2.12)，其中垂向座標系統改採  $\sigma$  座標系統(Blumberg & Mellor 1983)，如圖 2.3 所示。

$\xi$  方向：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \omega \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} \\ & + \frac{\bar{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{2\bar{v}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{\tilde{v}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \\ & = f_c \tilde{v} + \frac{1}{\rho d} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \sigma} - \frac{(\tau_1^s - \tau_1^b)}{\rho d} + (\text{Horizontal Diffusion in } \xi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\eta$  方向：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \sigma} \\
& + \frac{\bar{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{2\bar{u}\tilde{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{\tilde{u}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \\
& = -f_c \tilde{u} + \frac{1}{\rho d} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \sigma} - \frac{(\tau_2^s - \tau_2^b)}{\rho d} + (\text{Horizontal Diffusion in } \eta) \tag{2.12}
\end{aligned}$$

式中，

$$\omega = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} \tag{2.13}$$

$$\sigma = \frac{z - z^b}{d} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial t} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = -\frac{1}{d} \frac{\partial z^b}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial \xi} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = -\frac{1}{d} \frac{\partial z^b}{\partial \eta} - \frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial \eta} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{d} \tag{2.18}$$



$$\begin{aligned}
(\text{Horizontal Diffusion in } \xi) &= -\frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left( T_{11} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + 2T_{12} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - T_{22} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) \\
&- \frac{1}{\rho d h_2} \frac{\partial T_{12}}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho d h_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \left[ \frac{2v_H}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{2v_H}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right] + \frac{2v_H}{h_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \\
&+ \frac{2v_H}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{v_H}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + \frac{v_H}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \\
&+ \frac{v_H h_1}{h_2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) + 2v_H \left[ \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{2v_H}{h_1 h_2^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Horizontal Diffusion in } \eta) = & -\frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left( T_{22} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + 2T_{12} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - T_{11} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) \\
& - \frac{1}{\rho d h_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho d h_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \left[ \frac{2\nu_H}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_2} \right) + \frac{2\nu_H}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] + \frac{2\nu_H}{h_2^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} \\
& + \frac{2\nu_H}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{\nu_H}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + \frac{\nu_H}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \\
& + \frac{\nu_H h_2}{h_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + 2\nu_H \left[ \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \right] \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{2\nu_H}{h_1^2 h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial h_1}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$\nu_H$  為水平黏滯係數 =  $\nu_l + \nu_t$ ;  $\nu_l$  為層流黏滯係數;  $\nu_t$  為紊流黏滯係數, 於下節中分別使用 k- $\epsilon$  模式以及零方程模式計算。

## 2.2 輔助關係式

### 2.2.1 層流與紊流應力

採用 Boussinesq 之渦流黏性理論, 層流與紊流剪應力可合併表示為

$$\frac{\tau_{11} - \overline{u'^2}}{\rho} = 2\nu_H \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) \tag{2.21}$$

$$\frac{\tau_{22} - \overline{v'^2}}{\rho} = 2\nu_H \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) \tag{2.22}$$

$$\frac{\tau_{12} - \overline{u'v'}}{\rho} = 2\nu_H \left[ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \right] \tag{2.23}$$

### 2.2.2 底床剪應力

底床剪應力採用 French(1986)之經驗式

$$\frac{\tau_1^b}{\rho} = \bar{u}^{-b} \left| \bar{u} \right|^{-b} \left[ 2.5 \ln \left( \frac{30z_l}{2.72k_s} \right) \right]^{-2} \tag{2.24}$$

$$\frac{\tau_2^b}{\rho} = \bar{v}^{-b} \left| \bar{v} \right|^{-b} \left[ 2.5 \ln \left( \frac{30z_l}{2.72k_s} \right) \right]^{-2} \tag{2.25}$$

式中,  $\bar{u}^{-b}$ 、 $\bar{v}^{-b}$  分別為  $\xi$ 、 $\eta$  方向之近底床流速;  $z_l$  為近底床流速之格網與底床間垂

直距離;  $k_s$  為粗糙高度，曼寧  $n$  係數與粗糙高度  $k_s$  對照表如表 2.1。

### 2.2.3 垂向剪應力與流速梯度之轉換

$$\frac{\tau_{13}}{\rho} = \frac{\nu_v}{d} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\tau_{23}}{\rho} = \frac{\nu_v}{d} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right) \quad (2.27)$$

式中， $\nu_v$  為垂向黏滯係數。

## 2.3 紊流黏滯係數

### 2.3.1 k- $\varepsilon$ 模式

k- $\varepsilon$  紊流模式是雙方程模式的其中一種，而其探討紊流動能的變化機制來決定紊流黏滯係數，模式包含了紊流動能(k)以及紊流動能消散率( $\varepsilon$ )兩者之傳輸方程式，並且此模式假設紊流黏滯係數為等向性。本研究採用標準 k- $\varepsilon$  紊流模式 (Launder & Spalding, 1974)，而式(2.28)、(2.29)為正交曲線座標轉換後之方程式。

k 方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u} k h_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v} k h_1) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w} k) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho \nu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\rho \nu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho \nu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] + G - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\varepsilon$  方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u} \varepsilon h_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v} \varepsilon h_1) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w} \varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho \nu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\rho \nu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho \nu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2.29)$$

以上兩式中左邊第一項為 k 或  $\varepsilon$  之改變率；左邊第二項為 k 或  $\varepsilon$  之對流傳輸項；右邊第一項為 k 或  $\varepsilon$  之擴散傳輸項；右邊第二項為 k 或  $\varepsilon$  之產生項；右邊第

三項則為  $k$  或  $\varepsilon$  之消滅項。

式中，

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \left[ \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + h_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + h_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.30)$$

紊流黏滯係數

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.31)$$

以上諸式中包含了五個經驗常數，此經驗常數是由 Launder & Spalding 於 1974 由實驗決定，分別為  $C_\mu = 0.09$ ,  $\lambda_k = 1.0$ ,  $\lambda_\varepsilon = 1.3$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ 。

### 2.3.2 零方程模式

#### typeI

採用 Elder(1959)提出之紊流黏滯係數經驗式

$$\nu_t = u_\tau d \kappa / 6 \quad (2.32)$$

其中， $\kappa$  為 von karman's 係數； $u_\tau$  為剪力速度； $d$  為水深。

#### typeII

採用 Jobson and Sayre(1970)提出之紊流黏滯係數經驗式

$$\nu_t = d \kappa u_\tau \sigma (1 - \sigma) \quad (2.33)$$

## 2.4 邊界條件設定

### 2.4.1 二維水平部分

水平二維水理模式考量三種邊界條件設定，分別為渠道入流、渠道出流與固體邊界。一般而言，渠道入流邊界條件設定為單寬入流量，渠道出流邊界條件則

採用水位高程設定。在固定邊界處，沿固體邊界法線方向採不透水邊界條件，而延固體切線方向可分為滑移(slip)與非滑移(no-slip)條件。

## 2.4.2 垂直部分

垂直水理模式考量渠道入流、渠道出流、自由液面及底床邊界條件。在渠道入流及渠道出流處假設均勻流邊界條件；自由液面採風剪力邊界條件 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = \frac{d\tau^s}{\nu_v \rho}$ 、 $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} = \frac{d\tau^s}{\nu_v \rho}$ ；而底床部分由牆函數設定邊界條件，請參照 2.4.4 節說明。

## 2.4.3 k- $\epsilon$ 模式

於自由液面邊界，紊流動能(k)採對稱邊界， $\frac{\partial k}{\partial \sigma} = 0$ ，而紊流動能消散率( $\epsilon$ )採 $\epsilon_s = C_\mu \frac{3}{4} k_s \frac{3}{2} / 0.07 \kappa h$  (Hossain & Rodi 1980)；而在底床邊界條件採牆函數，請參照 2.4.4 節說明。

## 2.4.4 牆函數

k- $\epsilon$  模式只適用於完全紊流區之高雷諾數流場，故於靠近邊壁處須採特殊之處理方法—牆函數(Launder and Spalding 1974)，又因黏滯次層中流速與能量變化劇烈導致流速分佈斜率過大而需密集格網點才能確保相當之計算精度，牆函數能使在黏滯次層外距邊壁第一格網點連結邊壁上之各種流體特性(例如:剪應力)因此節省網格點之布置，綜合以上原因故有使用牆函數之必要性。

牆函數之設定是以紊流邊界層之流體特性為依據，圖 2.4 為紊流邊界層之分布圖，紊流邊界層大致可分為內層與外層，而內層又細分為黏滯次層(viscous sublayer)、緩衝層(buffer layer)與對數分布層(log law region)。黏滯次層範圍分佈 $y^+$ 介於 0 至 5 之間，在此區域內，雷諾應力作用遠小於分子黏滯力，其流速分布接近線性，為 $u^+ = y^+$  ( $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$  為無因次流速； $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu_v}$  為無因次距邊壁垂直距離)；而緩衝層介於兩者之間， $y^+$  大致介於 5 至 30，為黏滯次層與對數分布層之交界地帶；在對數分布層中，雷諾應力變得顯著，其速度分佈為對數分布，位置大致在



$y^+$  介於 30 至 100，本研究主要將底床邊界位置設定於對數分布層中，其流速分佈如式(2.34)

$$\frac{\bar{u}_p}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ E) \quad (2.34)$$

在  $y^+$  介於 30 至 100 之間，雷諾應力大致為定值，紊流動能之傳輸項與擴散項亦可被忽略，因此產生項與消散項達成局部平衡，經過推導後可得

$$k_p = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_p = \frac{u_\tau^3}{\kappa y_p} \quad (2.36)$$

式中之  $u_\tau$  為剪力速度 ( $= \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}$ )； $\tau_b$  為邊壁上之剪力； $\kappa$  為 von Karman's 係數； $E$  為粗糙參數(對於光滑邊壁，當  $y^+ > 30$  時，此兩參數分別約為 0.41 與 9.0)，下標  $p$  表近邊壁之物理量。



表 2.1 曼寧 n 係數與粗糙高度  $k_s$  對照表

渠道類型	曼寧 n	$k_s$ (mm)
Very smooth concrete surface	0.011~0.015	0.15~0.30
Gunite(smooth)	0.016~0.019	0.50~1.5
Rough concrete	0.018~0.022	3.0~4.5
Earth channels(straight, uniform)	0.016~0.02	3.0
Rubble masonry	0.02~0.025	6.0
Untreated gunite	0.018~0.03	3.0~10.0

資料來源”Flow in Open Channels” Second Edition, K. Subramanya

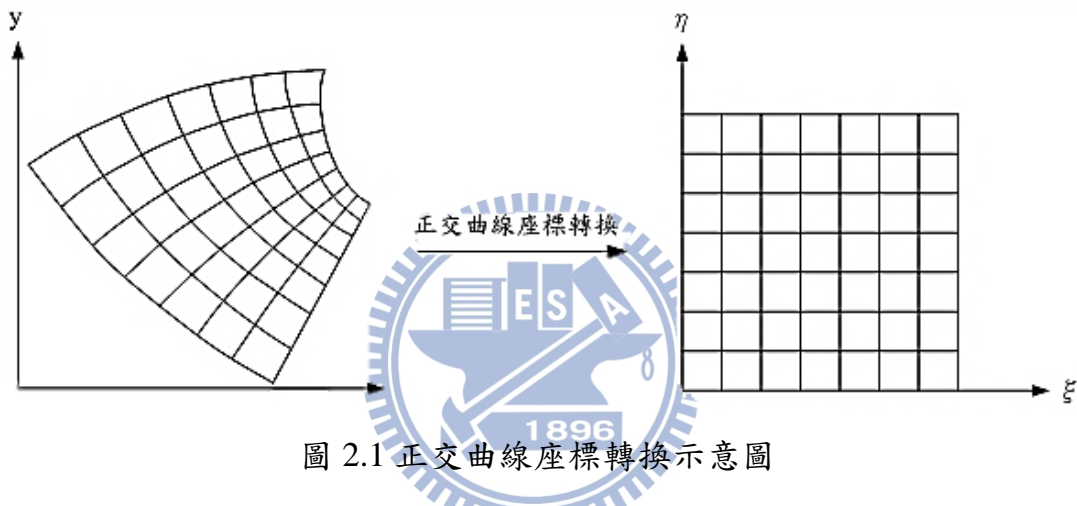


圖 2.1 正交曲線座標轉換示意圖

(摘錄自洪聖翔, 2011)

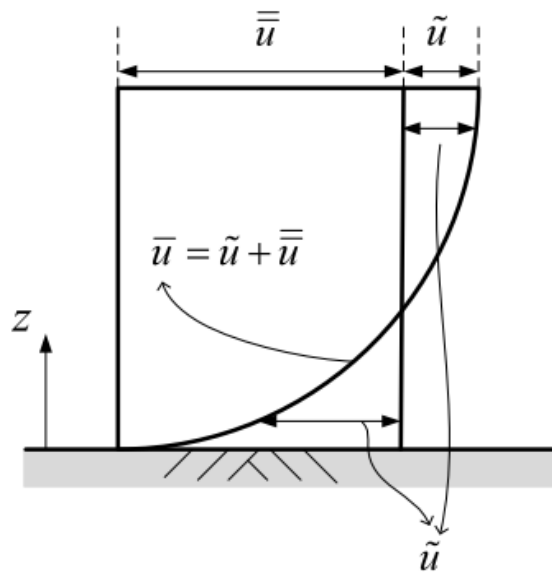


圖 2.2 水深方向流速剖面示意圖

( $\bar{u}$ 為實際流速剖面； $\bar{u}$ 為水深平均流速； $\tilde{u}$ 流速差異量)(摘錄自洪聖翔, 2011)

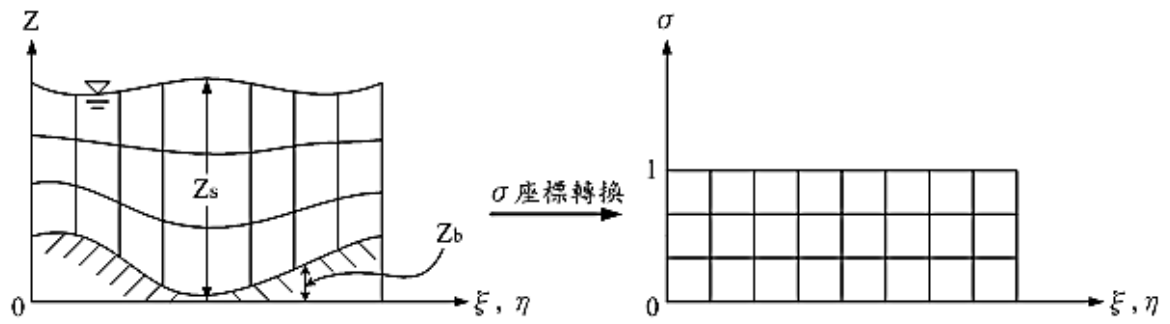


圖 2.3  $\sigma$  座標轉換示意圖

(摘錄自洪聖翔, 2011)

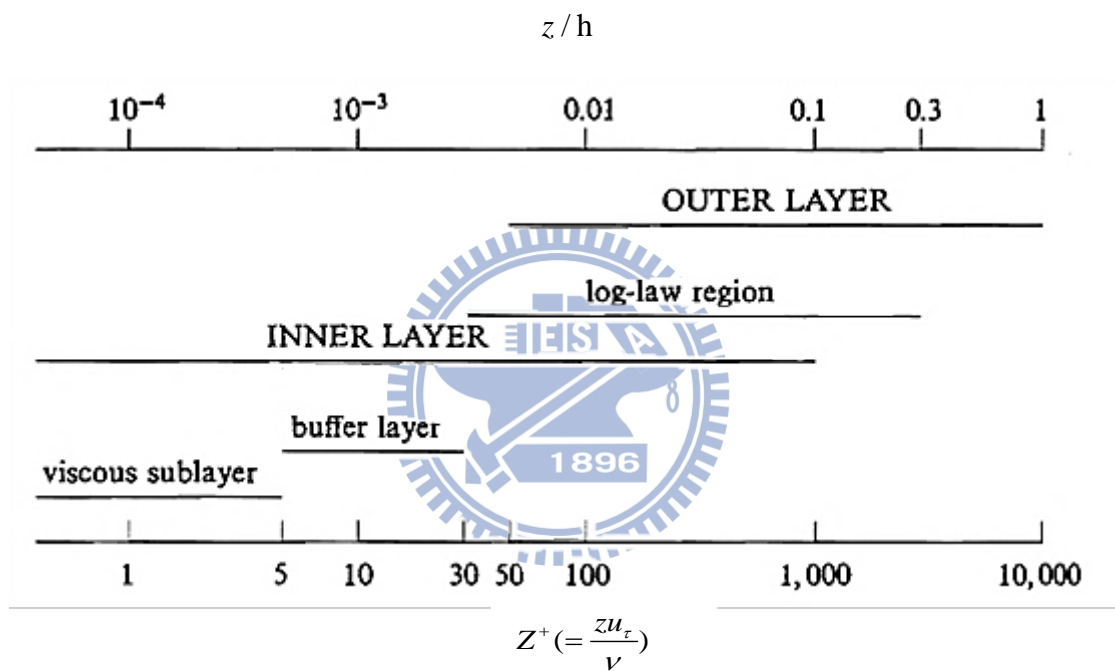


圖 2.4 垂向紊流邊界層之各層定義範圍示意圖

( $z^+$  為無因次距底床之垂直距離)

(摘錄自 Stephen B.Pope, Turbulent Flows)

### 第三章 數值架構

模式之數值架構分為水平二維以及垂直流速差異量方程式兩大部分，其計算流程如圖 3.1 所示，由水平二維模式求解各水柱之水面高程以及水深平均流速，再代入垂直模式由連續方程式求解垂向流速，以及差異量方程式求解水深方向流速剖面，並由 k-ε 模式計算紊流黏滯係數，垂直模式收斂後，水深方向流速剖面與紊流黏滯係數再代回水平二維模式計算有效剪應力項(式 2.8~式 2.10)，重複疊代直至所求之水面高程、水深平均流速、水深方向流速以及紊流動能、紊流動能消散率皆達收斂條件。二維與垂直模式皆採用控制體積法來離散控制方程式，控制體積法之概念如圖 3.2 與圖 3.3 所示，其中(a)圖為實際區域，(b)圖為計算區域，E、W、N、S 表相鄰格點，e、w、n、s 表控制面。

#### 3.1 水平二維模式

二維水理部分採隱式雙階分割操作，將動量方程式分割成延散與傳播兩步驟，並利用隱式數值方法求解。延散步驟求解移流項和擴散項，傳播步驟求解壓力項、底床剪應力項與連續方程式。據此，水理控制方程式改寫成以下

延散步驟

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} = -\left(V^n \cdot \nabla\right)V^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot T^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

傳播步驟

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^{n+1} - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} = -g\nabla(z_b + d)^{n+1} - \frac{\tau_b}{\rho d} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot V^{n+1} = 0 \quad (3.3)$$

式中，V 表示速度向量；T 表示擴散及延散項；上標 n+1 表示(n+1)Δt 時刻之未知變數；Δt=t<sup>n+1</sup>-t<sup>n</sup>；上標 n 表示 nΔt 時刻之已知變數；上標 n+1/2 表示在(n+1) Δt 與 nΔt 間之未知數。

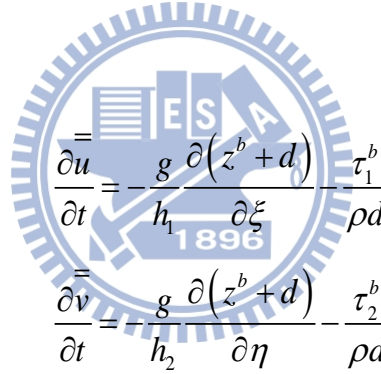
(3.1)~(3.3)的一般式可表示成

延散步驟

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = & -\frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \left( \frac{\bar{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{\bar{v}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) \\ & + \frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left( T_{11} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + 2T_{12} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - T_{22} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\rho d h_2} \frac{\partial T_{12}}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho d h_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left[ -(h_2 \tau_{11})^s \frac{\partial z^s}{\partial \xi} + (h_2 \tau_{11})^b \frac{\partial z^b}{\partial \xi} - (h_1 \tau_{12})^s \frac{\partial z^s}{\partial \eta} + (h_1 \tau_{12})^b \frac{\partial z^b}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = & -\frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \left( \frac{\bar{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left( T_{22} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + 2T_{12} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - T_{11} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\rho d h_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho d h_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \eta} \\ & + \frac{1}{\rho d h_1 h_2} \left[ -(h_2 \tau_{12})^s \frac{\partial z^s}{\partial \xi} + (h_2 \tau_{12})^b \frac{\partial z^b}{\partial \xi} - (h_1 \tau_{22})^s \frac{\partial z^s}{\partial \eta} + (h_1 \tau_{22})^b \frac{\partial z^b}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

傳播步驟



$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{g}{h_1} \frac{\partial (z^b + d)}{\partial \xi} - \frac{\tau_1^b}{\rho d} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{g}{h_2} \frac{\partial (z^b + d)}{\partial \eta} - \frac{\tau_2^b}{\rho d} \quad (3.7)$$

和

$$h_1 h_2 \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 \bar{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 \bar{v} d) = 0 \quad (3.8)$$

針對  $n+1$  時刻的水深值( $d^{n+1}$ )做線性化處理，且僅保留一階項，(3.8)式可改寫成

$$h_1 h_2 \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha_1 \frac{\partial (\Delta d)}{\partial \xi} + \beta_1 \Delta d + \gamma_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \alpha_2 \frac{\partial (\Delta d)}{\partial \eta} + \beta_2 \Delta d + \gamma_2 \right) = 0 \quad (3.9)$$

式中，  $\alpha_1 = -\frac{h_2 g \Delta t}{C_r h_1} d^n$  ;  $\beta_1 = \frac{h_2}{C_r} \bar{u}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h_2 g \Delta t}{C_r h_1} \left[ \frac{\partial (z^b)^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial d^n}{\partial \xi} \right]$  ;  $\gamma_1 = \beta_1 d^n$  ;

$$\alpha_2 = -\frac{h_1 g \Delta t}{C_r h_2} d^n$$
 ;  $\beta_2 = \frac{h_1}{C_r} \bar{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h_1 g \Delta t}{C_r h_2} \left[ \frac{\partial (z^b)^{n+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial d^n}{\partial \eta} \right]$  ;  $\gamma_2 = \beta_2 d^n$  ;

$$C_r = 1 + \Delta t \frac{C_f \sqrt{(u^{\overline{n+\frac{1}{2}}})^2 + (v^{\overline{n+\frac{1}{2}}})^2}}{d^n} ; \Delta d = d^{n+1} - d^n ; C_f = g / c^2 \text{ 為摩擦係數 ; } C \text{ 為 Chezy}$$

係數。

控制方程式中，移流項採用一階精度混合型上風法(hybrid scheme)(Spalding 1972)差分，其餘所有空間差分皆採二階精度的中央差分法，時間則採前項差分法。

### 3.2 流速差異量方程式

垂直水理模式每一水柱以隱式法分別求解，將(2.11)與(2.12)式改寫為  $\xi$  方向：

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \left( \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \omega \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} + \frac{\tilde{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{v_v}{d^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} \right)^{n+1} = M_u^n \quad (3.10)$$

$\eta$  方向：

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \left( \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \sigma} + \frac{\tilde{u}\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \frac{v_v}{d^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \sigma} \right)^{n+1} = M_v^n \quad (3.11)$$

式中，

$$M_u^n = \left[ f_c \tilde{v} - \frac{(\tau_1^s - \tau_1^b)}{\rho d} \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\bar{u}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{2\tilde{v}\tilde{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{v_v}{dh_1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + (\text{Horizontal Diffusion in } \xi) \right]^n \quad (3.12)$$

$$M_v^n = \left[ f_c \tilde{u} - \frac{(\tau_2^s - \tau_2^b)}{\rho d} \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} - \frac{\tilde{v}}{h_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} - \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\bar{v}\tilde{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{2\tilde{u}\tilde{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{\tilde{u}^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{v_v}{dh_2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + (\text{Horizontal Diffusion in } \eta) \right]^n \quad (3.13)$$

其中 Horizontal Diffusion in  $\xi$  與 Horizontal Diffusion in  $\eta$  為水平方向之剪應力，如(2.19)、(2.20)所示。

等式左邊採 Crank-Nicolson method，其時間差分為二階精度；而等式右邊  $M_u$  和

$M_v$ 之空間差分則採中央差分法。

### 3.3 k- $\varepsilon$ 模式

k 與  $\varepsilon$  之求解亦與垂直水理模式相同，每一水柱以隱式法計算，將(2.28)與(2.29)改寫為

k 方程式

$$k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \left[ \omega \left( \rho \frac{\partial k}{\partial \sigma} + k \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) + \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{1}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} - \frac{\rho v_t}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} \right]^{n+1} = M_k^n \quad (3.14)$$

$\varepsilon$  方程式

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[ \omega \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) + \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{1}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} - \frac{\rho v_t}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} \right]^{n+1} = M_\varepsilon^n \quad (3.15)$$

式中，

$$M_k^n = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial (\rho v_t)}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial (\rho v_t)}{\partial \eta} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} - \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} - \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] + G - \rho \varepsilon \quad (3.16)$$

$$M_\varepsilon^n = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\rho v_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial (\rho v_t)}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial (\rho v_t)}{\partial \eta} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho v_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} - \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.17)$$

式中，G 如式(2.30)。

等式左邊採 Crank-Nicolson method，其時間差分為二階精度；而等式右邊  $M_k$  和  $M_\varepsilon$  之空間差分則採中央差分法。

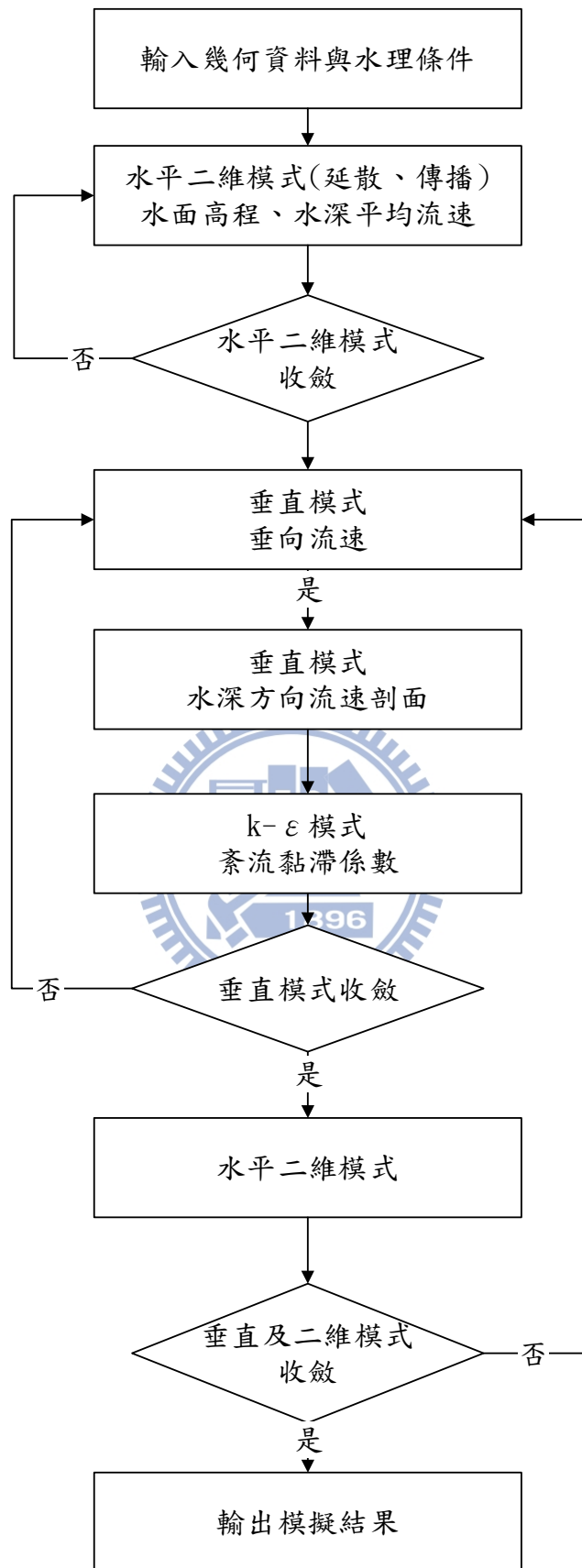
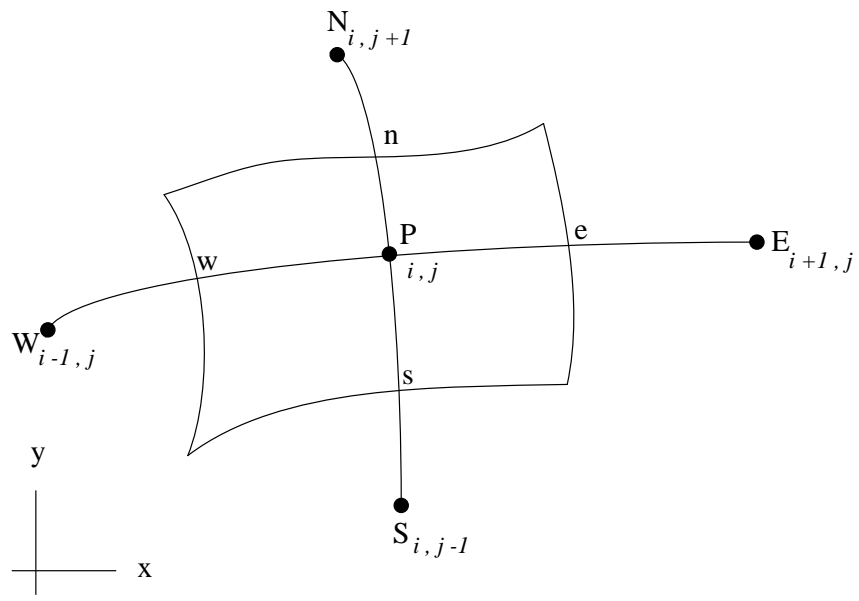
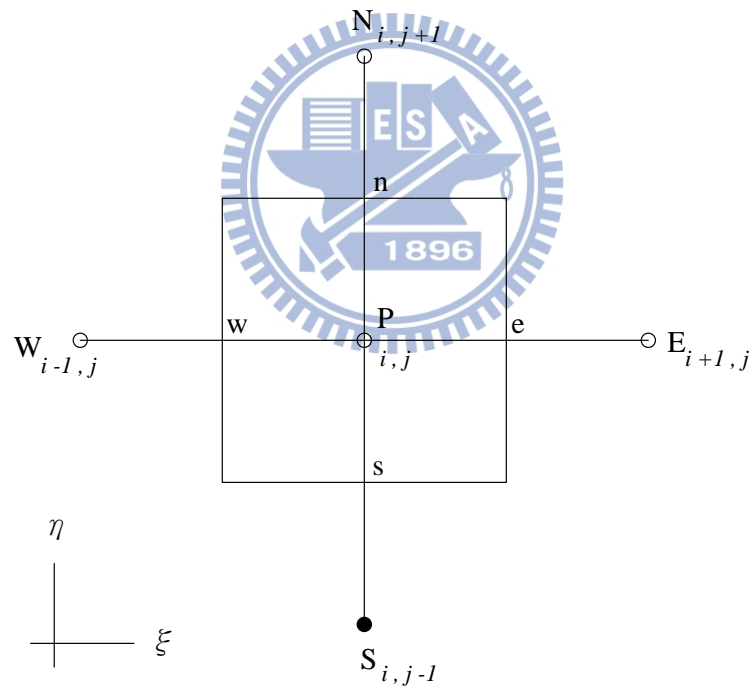


圖 3.1 模式計算流程圖





(a)



(b)

(謝德勇, 2002)

圖 3.2 水平二維模式控制體積法示意圖

$i$ 、 $j$  分別代表水平格網上任一點之縱向及橫向位置；(a) 實際區域；(b) 計算區域

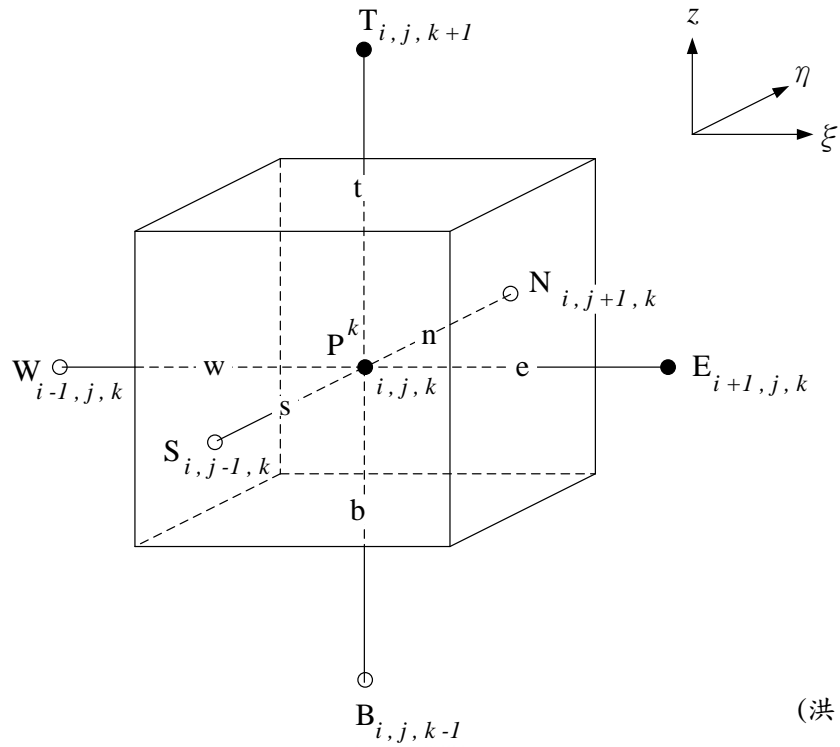


圖 3.3 垂直模式控制體積法示意圖(計算區域)

$i$ 、 $j$ 分別代表水平格網上任一點之縱向及橫向位置； $k$ 代表在垂向格網上的位置

## 第四章 結果與討論

數值模擬之關鍵往往取決於兩大設定因素，分別為物理參數以及數值參數。物理參數依據不同流場與模式設定需求包含流量、水位、渠道坡降，以及粗糙係數等，此些可由實驗案例設置或由真實河川量測資料獲知；而數值參數則包含網格大小、邊界條件設定(牆函數)等，則需要經過敏感度測試與調整。故本研究採靜水壓三維水理模式搭配標準  $k-\varepsilon$  紊流模式，首先測試採直渠道案例與急彎案例探討牆函數之使用與計算網格大小，後採實驗量測數據予以驗證，亦與兩種零方程模式比較探討。

### 4.1 直渠道案例

本研究採用 Nezu and Rodi(1986)之實驗案例其試驗水槽布置如圖 4.1 所示，渠道長度 20m，渠寬  $B$  為 0.6m，模擬兩種不同寬深比案例，分別為實驗 6(寬深比為 7.8)，下游水深  $H$  為 0.077m，平均流速為 0.591m/s，渠道坡度  $S$  為 0.00125，福祿數  $F_r$  及雷諾數  $R_e$  分別為 0.68、 $14.5 \times 10^4$ ；以及實驗 8(寬深比為 16.9)，下游水深  $H$  為 0.036m，平均流速為 0.417m/s，渠道坡度  $S$  為 0.00142，福祿數  $F_r$  及雷諾數  $R_e$  分別為 0.707、 $4.8 \times 10^4$ 。其實驗量測斷面為距上游 18m 處之水柱，探討垂向分佈資訊。本案例模擬之側壁採用非滑移邊界條件，上游邊界條件為固定單寬流量，下游則為給定水位資料。

#### 4.1.1 數值參數敏感度測試

##### 底床邊界條件

如 2.4.4 節中之牆函數敘述，在本節採用直渠實驗案例，探討底床邊界條件牆函數之使用成效，分別採用三種邊界條件模擬作比較，分別採滑移條件、非滑移條件與牆函數。圖 4.2 與圖 4.3 為實驗 6 與實驗 8 於量測斷面接近底床流速剖面比較圖，邊界點之流速準確與否為影響水柱流速剖面之重點，故此比較接近底床之流速做為各種底床邊界條件之使用成效依據，圖中為採  $k-\varepsilon$  模式使用  $81 \times 5 \times 13$  之網格布置之模擬結果。

由此兩張圖之底床流速比較可以看出，相同之格網布置下，實驗 6 與實驗 8 在三種底床邊界條件測試結果皆一致，在近底床紊流邊界層內層與外層有一流速梯度之轉折點，若採非滑移條件或是滑移條件在此轉折點皆難以有良好的估算，水深方向流速剖面形狀與真實流速剖面有所出入，採牆函數之結果驗證與 2.4.4 節敘述相符，近底床之邊界條件採牆函數能夠連結底床之物理特性，故近底床之流速剖面有較為合理之模擬結果。兩實驗近底床流速與實驗流速之相對誤差計算列於表 4.1。

### 網格布置

在此採三種格網布置，觀察網格加密前後，流速分佈之趨勢，判斷案例最適用之格網布置，探討網格加密之程度對流速模擬之影響，三種網格布置分別為  $81 \times 5 \times 13$ 、 $201 \times 7 \times 15$  與  $363 \times 13 \times 21$ ，水平方向格網採均勻分佈格網，垂向格網部分在底床處依據牆函數需求，而接近水面則採局部加密。三方向網格配置列於表 4.2。

圖 4.4 與圖 4.5 分別為實驗 6 與實驗 8 網格測試之流速比較圖，由圖 4.5 可看出，實驗 8 在三種網格布置下之模擬流速剖面隨著網格之加密有一趨勢，且網格加密至  $201 \times 7 \times 15$  與  $363 \times 13 \times 21$  時，兩者所模擬之流速剖面已無太大差異，因此，推測按照此趨勢，若將網格持續加密，流速剖面可能不再有明顯之差異，故實驗 8 在後續之模擬比較採  $201 \times 7 \times 15$  之網格布置；而由圖 4.4 得知，實驗 6 亦與實驗 8 相同隨著格網逐漸加密，三者模擬之流速剖面變化有一趨勢且彼此間有些微差距，但差異皆不明顯，考量網格加密對  $k-\varepsilon$  模式之模擬成效助益有限，故實驗 6 在後面小節之模擬採  $81 \times 5 \times 13$ ，以節省計算時間。

#### **4.1.2 模擬結果與實驗之比對分析**

經過上小節之數值參數敏感度分析後，可以歸納出標準  $k-\varepsilon$  模式在直渠案例之實驗 6 與實驗 8 兩者之模擬之底床邊界條件應採牆函數，而網格布置實驗 6 採  $81 \times 5 \times 13$ ，實驗 8 則採  $201 \times 7 \times 15$  最為合適，故此小節按照敏感度分析結果設定數值參數，並將量測斷面中央水柱流速剖面模擬結果與實驗量測數據比較。

圖 4.6 與圖 4.7 為實驗 6 與實驗 8 於量測斷面之流速分布比較圖，實驗 6 與實驗 8 由 k- $\epsilon$  模式模擬之流速剖面形狀與流速值皆與實驗數據十分相近，兩種寬深比案例皆能夠確切模擬出紊流於水深方向之流速分布。

### 4.1.3 不同紊流模式之模擬比對分析

本小節加入零方程模式 I 與零方程模式 II 採相同格網布置模擬，兩者與 k- $\epsilon$  模式皆為雷諾平均模式，皆建立在 Boussinesq 黏性理論上，而 k- $\epsilon$  模式則是將紊流動能與紊流動能消散率之傳輸變化加入計算，故探討比較兩模式之模擬成果與所耗費之計算成本。

圖 4.8 與圖 4.9 為兩實驗採零方程模式 I 與 k- $\epsilon$  模式之模擬流速比較圖，零方程模式 I 在兩實驗近底床處皆無法如 k- $\epsilon$  模式模擬出紊流邊界層之流速梯度，而在整體流速剖面亦與實驗值有很大之偏離。圖 4.10 與圖 4.11 為實驗 6 與實驗 8 在量測斷面之紊流黏滯係數比較圖，圖中實驗之紊流黏滯係數乃是量測速度擾動量以及平均流速經由雷諾應力與紊流黏滯係數之關係式(式 4.1)得出，k- $\epsilon$  模式在近底床之紊流黏滯係數採牆函數設定邊界條件，且依據紊流動能之產生、傳輸與消散決定各格網點之紊流黏滯係數；而零方程模式 I 則依據公式由底床剪應力與水深計算紊流黏滯係數，但在水深方向不改變，而由兩實驗之模擬結果可知，k- $\epsilon$  模式所模擬之紊流黏滯係數剖面較能夠與實驗之拋物線剖面形狀吻合。除此之外，比對紊流黏滯係數與流速之模擬結果得知，紊流黏滯係數若未隨水深改變，則難以反應紊流在水深方向之流速分布。

$$\nu_t \equiv \overline{u'v'} / \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

零方程模式 I 與零方程模式 II 之紊流黏滯係數計算皆由底床剪應力與水深決定，但零方程模式 II 假設沿水深方向為拋物線剖面，由於實驗所估算以及 k- $\epsilon$  模式所計算之紊流黏滯係數剖面皆為拋物線狀，因此加入零方程模式 II 計算比較。圖 4.12 與圖 4.13 為兩實驗採零方程式 II 與 k- $\epsilon$  模式計算之流速分佈比較圖；圖 4.14 與圖 4.15 為兩實驗採零方程式 II 與 k- $\epsilon$  模式所模擬之紊流黏滯係數比較圖。比較三種模式與實驗在水深方向之紊流黏滯係數分布情況，驗證直渠道流場於近

水面以及近底床處之紊流黏滯係數遞減之現象，此種分布方能使流速模擬較為合理，以及呈現近底床之紊流邊界層流速變化。

表 4.3 為直渠案例之模擬時間表，因  $k-\varepsilon$  模式較零方程模式需額外計算紊流動能與紊流動能消散率之方程式，故計算時間必然較零方程模式來得多，隨著網格加密，時間差距更是以倍數增加。

## 4.2 急彎案例

急彎的驗證採用 Rozovskii(1961)之實驗案例，採用彎道實驗 1，圖 4.16 為實驗 1 之幾何示意圖，上游為長 6m 之直渠道，下游為長 3m 之直渠道，彎道為一蜿蜒 180° 固定曲率半徑渠道。渠道斷面為寬度 0.8m 之矩形斷面，中心線曲率半徑為 0.8m，渠寬與曲率半徑比值為 1，整個實驗水槽為平床，Chezy 係數為  $60\text{m}^{0.5}/\text{s}$ ，平均流速為 0.265m/s，平均水深為 0.058m，福祿數為 0.35。上游邊界條件為固定入流量  $0.0123\text{m}^3/\text{s}$ ，下游邊界條件給定水位資料，側壁為滑移邊界條件。實驗分別在  $\Theta=65^\circ$ 、 $100^\circ$  及  $143^\circ$  斷面量測數據。

### 4.2.1 數值敏感度測試

#### 網格布置

底床邊界條件已由上節中直渠道案例確認牆函數之適用性，故彎道案例則省略底床邊界條件之敏感度測試，而彎道採兩組網格布置進行測試，分別為  $127 \times 9 \times 13$  與  $217 \times 17 \times 20$ ，觀察各斷面之流速分佈隨網格加密之變化趨勢。三方向之網格配置列於表 4.4。

圖 4.17 與圖 4.18 為於進入彎道後  $65^\circ$  斷面以及接近彎道出口之  $143^\circ$  斷面之左岸、渠道中央，以及右岸水柱之縱向及側向流速比較圖，比較後發現， $65^\circ$  斷面之縱向流速在網格加密後，左岸之流速明顯加快，中間流速則變得稍慢，右岸流速幾乎沒有什麼改變；而  $143^\circ$  斷面中間流速變慢，右岸流速變快，縱向流速之改變大致符合彎道在入口處內岸(凸岸)流速快於外岸(凹岸)之現象，而接近出口處此現象會愈趨緩和，然而在網格加密後，側向流速幾乎沒有改變，整體觀察網格加密對模擬之助益並不明顯，故基於相同原因往後小節之網格布置採

127×9×13；表 4.5 為彎道案例之模擬時間表，由表可看出彎道案例採 k-ε 模式之模擬在網格加密前後模擬時間差距甚大，而比較模擬結果差距卻不大，故確實選擇 127×9×13 之網格布置模擬較為恰當。

#### 4.2.2 模擬結果與實驗之比對分析

圖 4.19 與圖 4.20 為在斷面 65°、100°，以及 143° 斷面之縱向流速與側向流速比較圖，每張圖由左至右為內岸至外岸之各水柱流速分布。由 k-ε 模式所模擬之縱向流速在水深方向分布大致與實驗相符，部分剖面之流速值相較於實驗略為高估，且在接近內岸處之模擬則相對較不理想；由圖 4.20 可知在接近底床處水流往內岸流，側向流速為負，而在接近水面處，水流往外岸流，側向流速為正，此流速分佈是因水面超高現象產生之側向壓力差，而側向之壓力差與縱向流速之徑向慣性力形成之二次流現象(secondary flow)，k-ε 模式雖有模擬出此流速趨勢，但未能達到與實驗相同程度之正負流速差異，而除了斷面中央處主要之二次流外，由圖 4.20 之實驗數據可以看出，在外岸接近水面處有另一小渦流，但 k-ε 模式並無法呈現。

圖 4.21 為實驗值與 k-ε 模式之流速分佈圖，由實驗之流速分佈圖可以說明在定床條件下，水流由直線道進入彎道時，最大流速會出現在靠近凸岸處，漸漸地流速分佈會慢慢變形，在出彎道後，最大流速會在靠近凹岸處，而 k-ε 模式雖有模擬出此流速分布變化，但是內外岸流速差距並未與實驗之相當，考量可能是受側壁邊界採滑移條件影響；圖 4.22 為 k-ε 模式所模擬之水位等高線圖，可以看出內岸水深較外岸水深低之情形，為水面超高現象。總體而言，k-ε 模式彎道流場之縱向流速模擬表現與實驗值大致相近，但在彎道二次流現象之計算則較不理想。

#### 4.2.3 不同紊流模式之模擬比對分析

零方程模式 I 採相同格網布置與邊界條件模擬與上小節 k-ε 模式之模擬結果比對分析，並探討紊流黏滯係數可能之影響。

圖 4.23 與圖 4.24 為兩模式模擬之縱向與側向流速比較圖，縱向流速之模擬兩模式大致相近，所模擬之三斷面縱向流速分布與實驗值大致符合，然而皆在近內岸處之流速剖面與實驗值有較明顯差異；側向流速方面，零方程模式 I 依舊未能完整模擬出正負流速差異，且接近內岸處之近底床負流速更是與實驗值有明顯差距；圖 4.25 為岸壁水深比較圖，同樣兩模式所模擬之內外岸水深變化情形十分相近，亦與實驗量測水深變化大致吻合。圖 4.26 至圖 4.28 分別為在  $65^\circ$ 、 $100^\circ$ ，以及  $143^\circ$  斷面採用  $k-\varepsilon$  模式模擬之 V、W 向量圖，能夠觀察彎道流場於垂向之二次流現象，以及內外岸流速與水位之差異

圖 4.29 至圖 4.31 分別為在  $65^\circ$ 、 $100^\circ$ ，以及  $143^\circ$  斷面之紊流黏滯係數模擬結果比較圖， $k-\varepsilon$  模式所模擬之紊流黏滯係數由上游至下游在外岸以及中央水柱之變動皆不明顯，唯內岸之紊流黏滯係數剖面形狀有較顯著之變化；而零方程模式 I 在上下游變化則是左右岸之紊流黏滯係數逐漸趨於與中央水柱之紊流黏滯係數一致。





表 4.1 直渠道案例近底床流速與實驗之相對誤差

實驗 6	非滑移	滑移	牆函數
誤差(%)	42.02	31.34	3.017
實驗 8	非滑移	滑移	牆函數
誤差(%)	61.25	80.39	15.42

表 4.2 直渠案例三方向網格配置表

網格布置	$\Delta\xi(m)$	$\Delta\eta(m)$	$\Delta z(m)$
81×5×13	0.25	0.15	非均勻(水面加密，底床配合牆函數)
201×7×15	0.1	0.1	非均勻(水面加密，底床配合牆函數)
363×13×21	0.055	0.05	非均勻(水面加密，底床配合牆函數)

表 4.3 直渠道案例模擬時間表

直渠案例(Rodi&Nezu 1986)				
網格布置		紊流模式	$\Delta t(s)$	模擬時間(s)
Case6	81×5×13	零方程模式 I	0.01	84
	81×5×13	零方程模式 II	0.01	118
	81×5×13	k- $\epsilon$ 模式	0.01	305
	201×7×15	k- $\epsilon$ 模式	0.01	3,687
	363×13×21	k- $\epsilon$ 模式	0.001	61,144
Case8	81×5×13	k- $\epsilon$ 模式	0.01	346
	201×7×15	零方程模式 I	0.01	473
	201×7×15	零方程模式 II	0.01	511
	201×7×15	k- $\epsilon$ 模式	0.01	1,092
	363×13×21	k- $\epsilon$ 模式	0.002	51,117

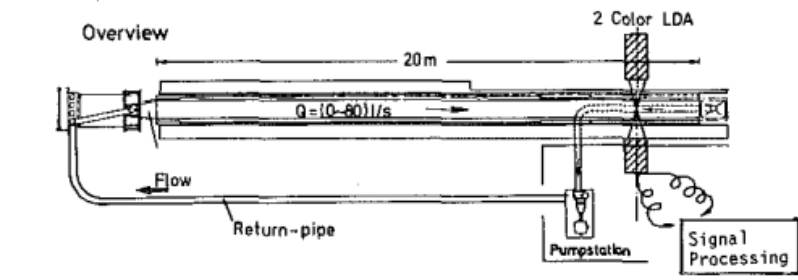
表 4.4 急彎案例三方向網格配置表

網格布置	$\Delta\xi(m)$	$\Delta\eta(m)$	$\Delta z(m)$
127×9×13	直渠:0.1 彎道:5°	0.1	非均勻(水面加密, 底床配合牆函數)
217×17×20	直渠:0.05 彎道:5°	0.05	非均勻(水面加密, 底床配合牆函數)

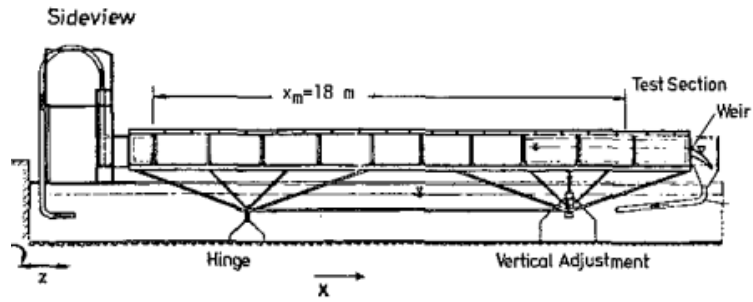
表 4.5 彎道案例模擬時間表

急彎案例(Rozovskii 1961)			
網格布置	紊流模式	$\Delta t(s)$	模擬時間(s)
127×9×13	k- $\epsilon$ 模式	0.1	6,150
127×9×13	零方程模式 I	0.1	1,680
217×17×20	k- $\epsilon$ 模式	0.01	88,000

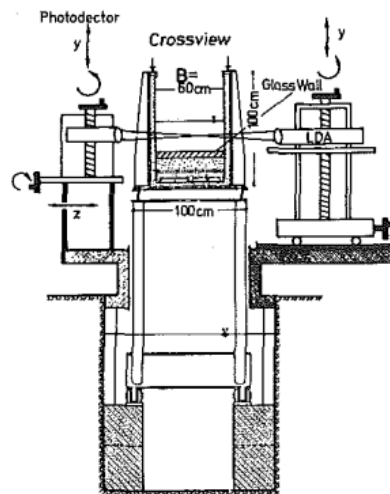
※註:本研究使用 CPU 為 i7(2.67G Hz.)/8 cores/Max memory:12GB



(a)



(b)



(c)

圖 4.1 Nezu and Rodi(1986)實驗水槽布置圖

(摘錄自 Nezu and Rodi 1986)

(a) 側視圖(b)俯視圖(c)斷面圖

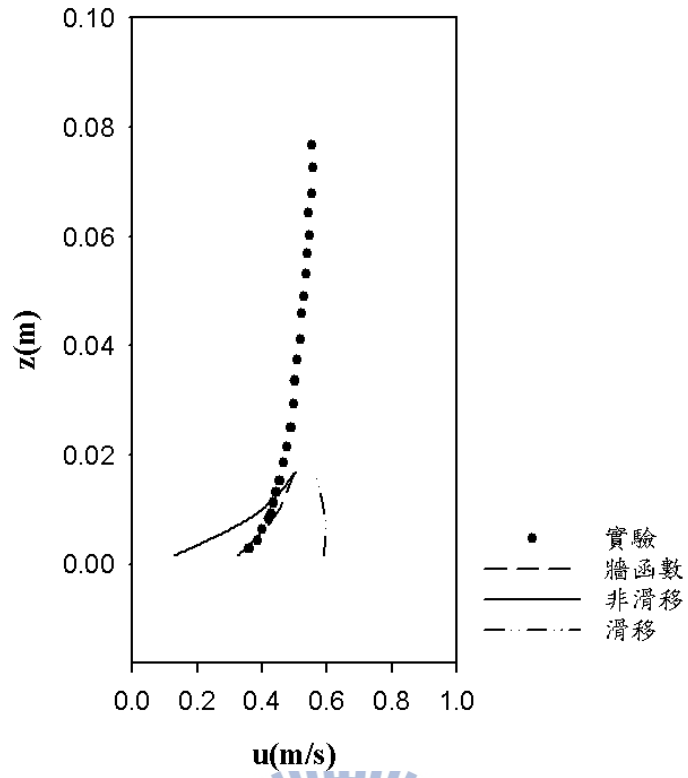


圖 4.2 直渠案例實驗 6 於量測断面中間水柱近底床流速比較圖

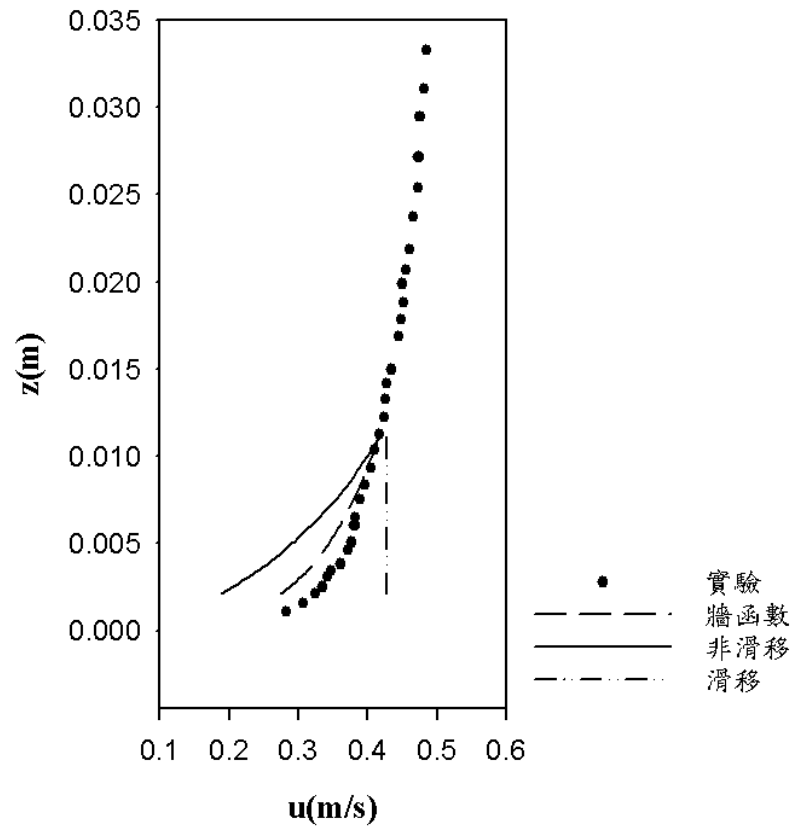


圖 4.3 直渠案例實驗 8 於量測断面中間水柱近底床流速比較圖

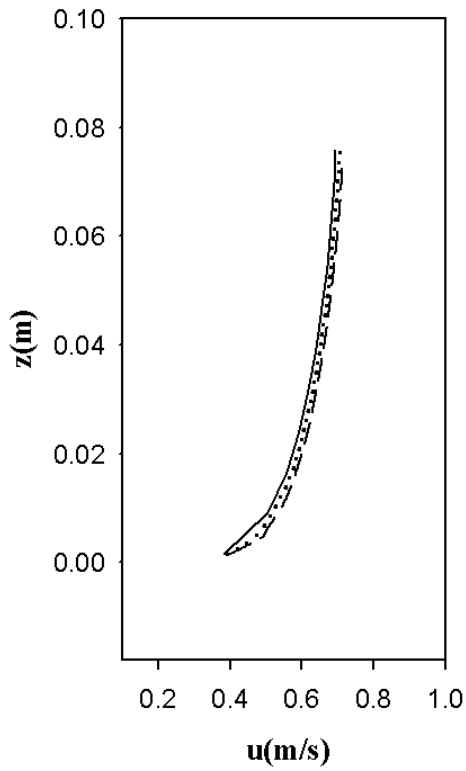


圖 4.4 直渠案例實驗 6 於量測断面中間水柱流速網格測試比較圖

(---)363×13×21 (···)201×7×15 (—)81×5×13

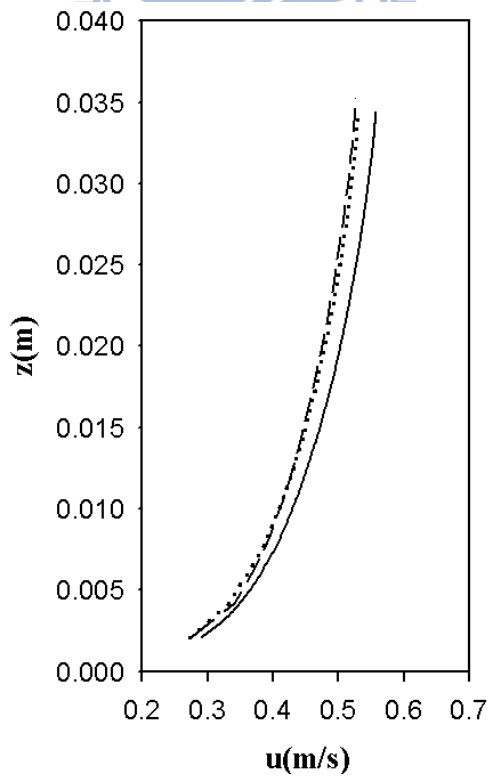


圖 4.5 直渠案例實驗 8 於量測断面中間水柱流速網格測試比較圖

(---)363×13×21 (···)201×7×15 (—)81×5×13

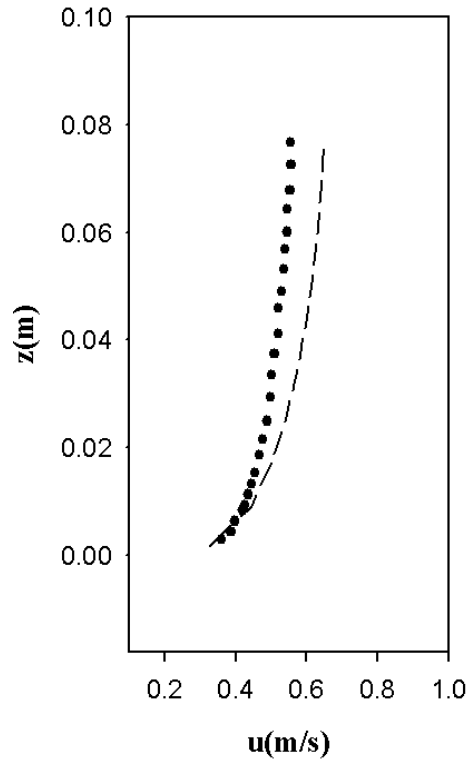


圖 4.6 直渠案例實驗 6 於量測断面中間水柱流速比較圖

(●) 實驗值 (---) k-ε 模式

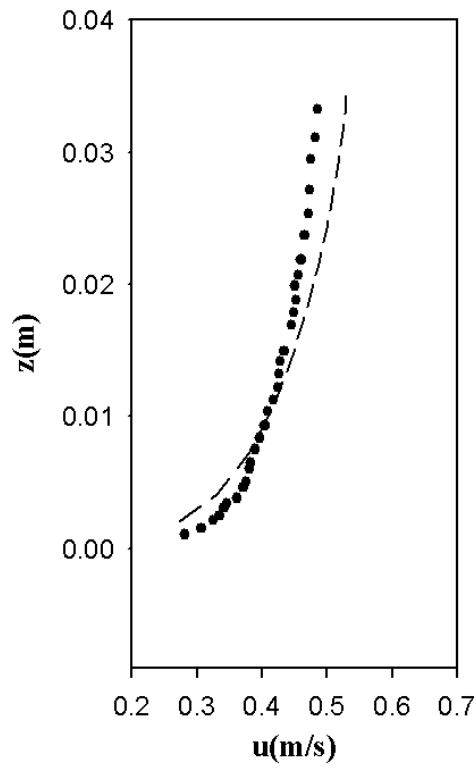


圖 4.7 直渠案例實驗 8 於量測断面中間水柱流速比較圖

(●) 實驗值 (---) k-ε 模式

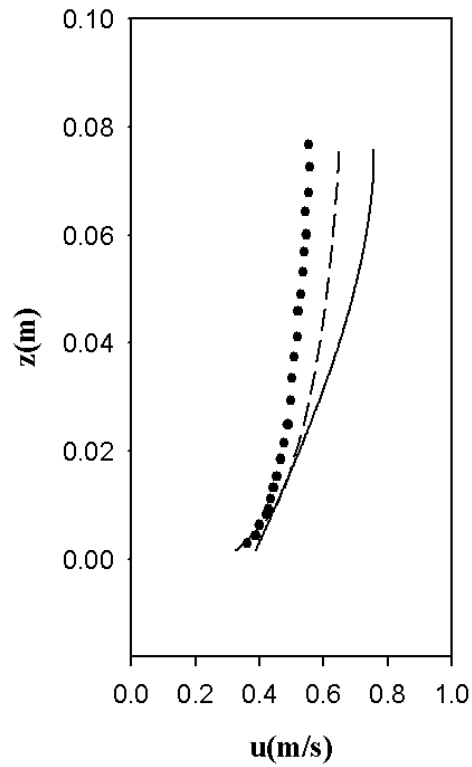


圖 4.8 直渠案例實驗 6 於量測断面中間水柱流速比較圖

(---)k- $\epsilon$  模式(—)零方程模式 I (●)實驗值

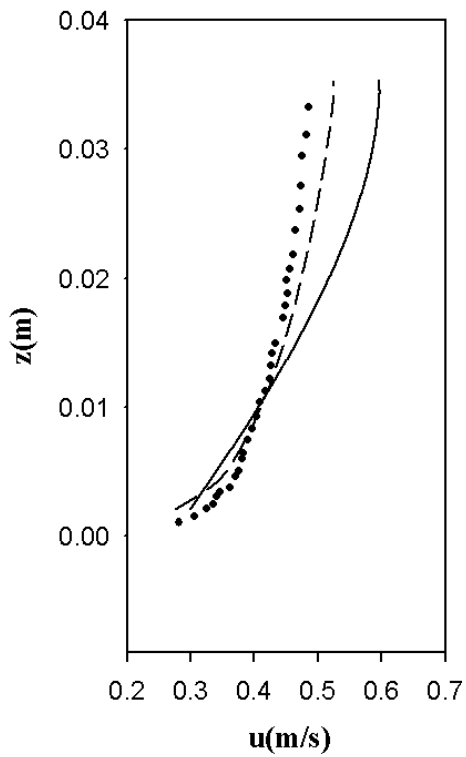


圖 4.9 直渠案例實驗 8 於量測断面中間水柱流速比較圖

(---)k- $\epsilon$  模式(—)零方程模式 I (●)實驗值

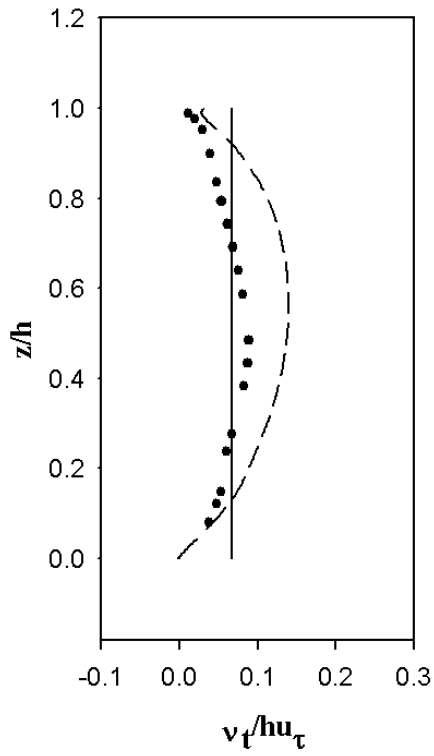


圖 4.10 模擬直渠案例實驗 6 於量測断面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖

(---)  $k-\epsilon$  模式 (—) 零方程模式 I (●) 實驗估算值

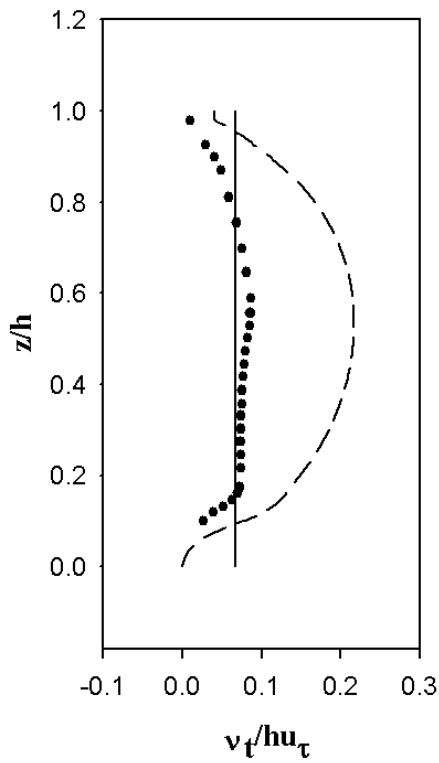


圖 4.11 模擬直渠案例實驗 8 於量測断面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖

(---)  $k-\epsilon$  模式 (—) 零方程模式 I (●) 實驗估算值



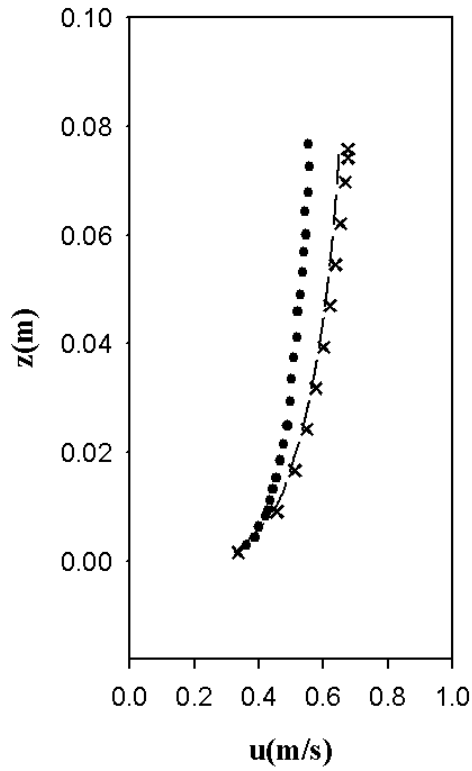


圖 4.12 模擬直渠案例實驗 6 於量測断面中央水柱流速比較圖

(---)  $k-\varepsilon$  模式 (x) 零方程模式 II (●) 實驗值

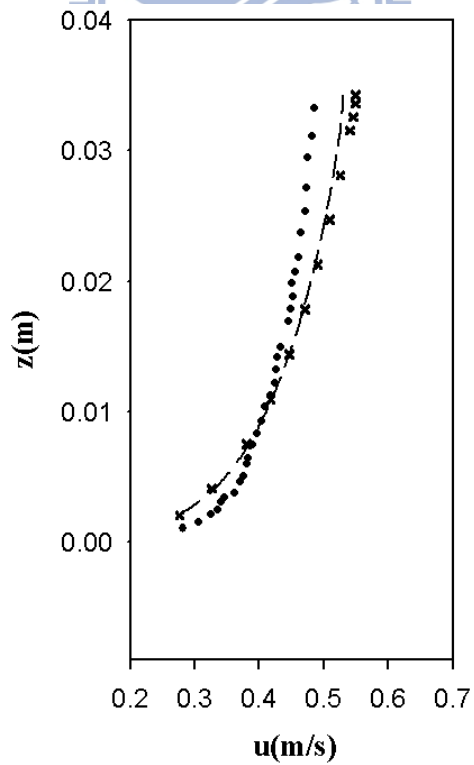


圖 4.13 模擬直渠案例實驗 8 於量測断面中央水柱流速比較圖

(---)  $k-\varepsilon$  模式 (x) 零方程模式 II (●) 實驗值

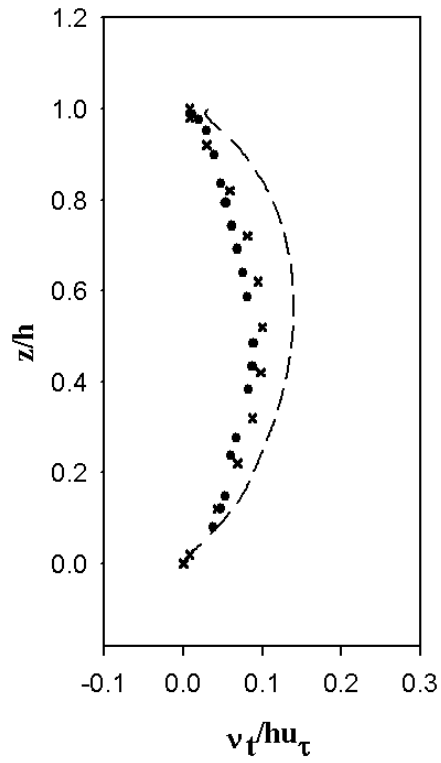


圖 4.14 模擬直渠案例實驗 6 於量測断面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖

(---)  $k-\epsilon$  模式 (x) 零方程模式 II (●) 實驗估算值

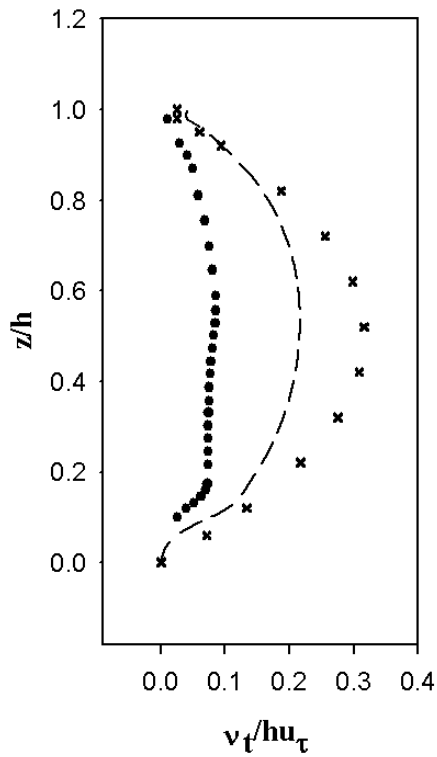


圖 4.15 模擬直渠案例實驗 8 於量測断面中央水柱紊流黏滯係數之比較圖

(---)  $k-\epsilon$  模式 (x) 零方程模式 II (●) 實驗估算值

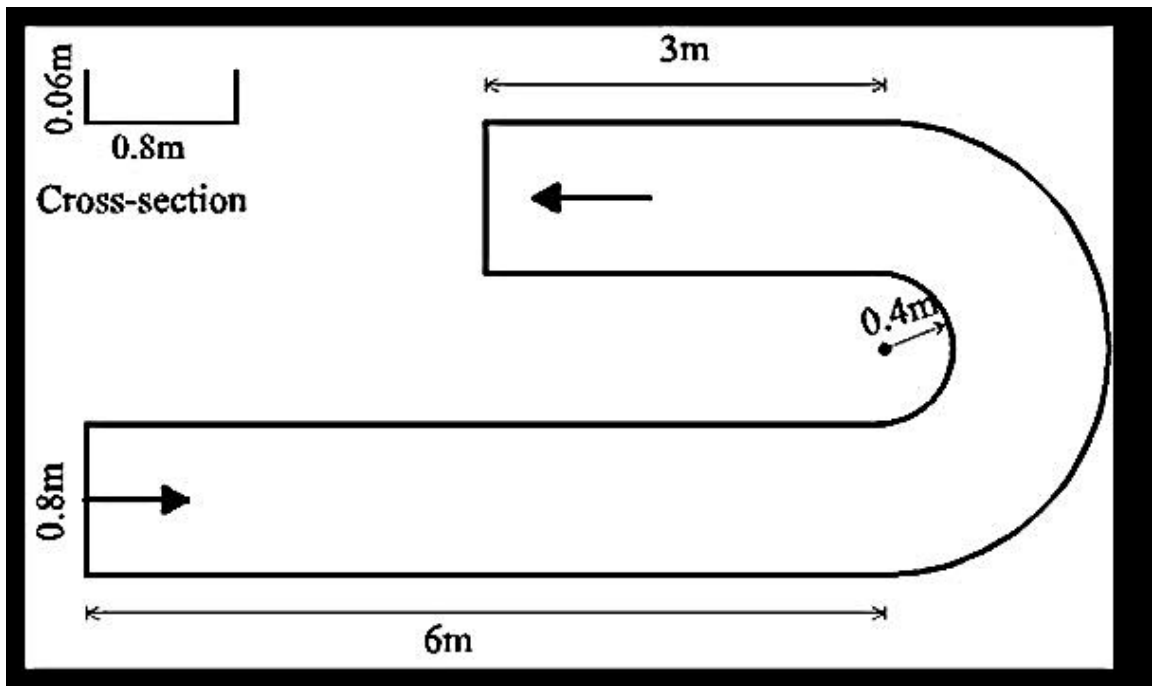


圖 4.16 急彎實驗案例幾何示意圖



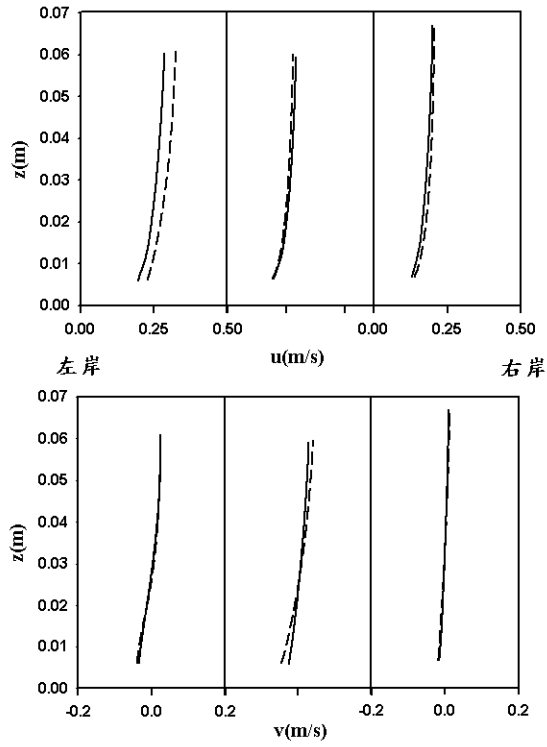


圖 4.17 彎道案例  $65^\circ$  断面左岸、渠道中央、右岸之網格測試流速比較圖  
 (---)217×17×20(—) 127×9×13

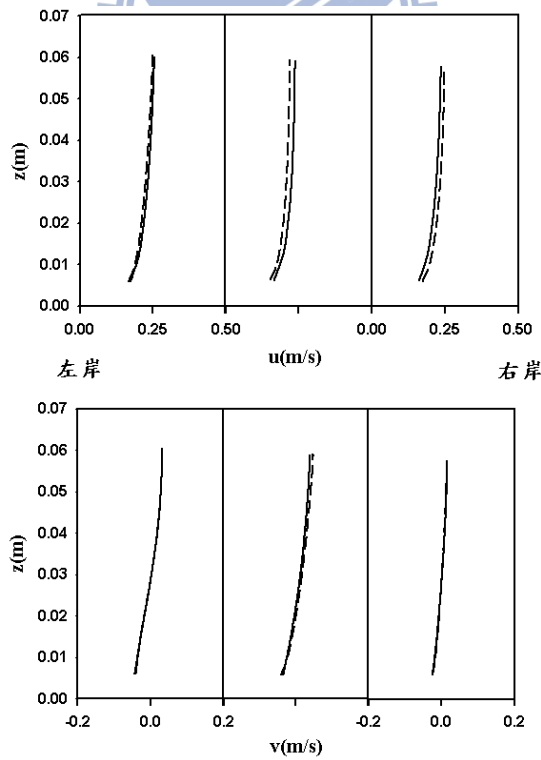
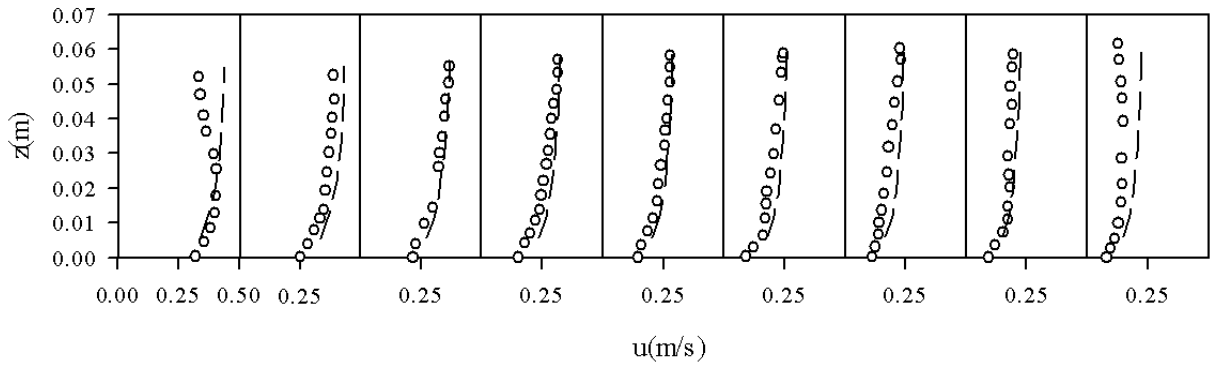
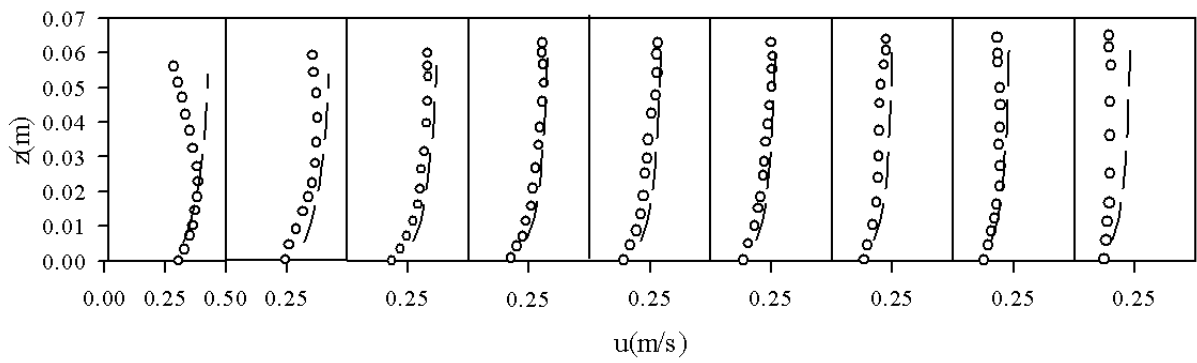


圖 4.18 彎道案例  $143^\circ$  断面左岸、渠道中央、右岸之網格測試流速比較圖  
 (---)217×17×20(—) 127×9×13

65°



100°



143°

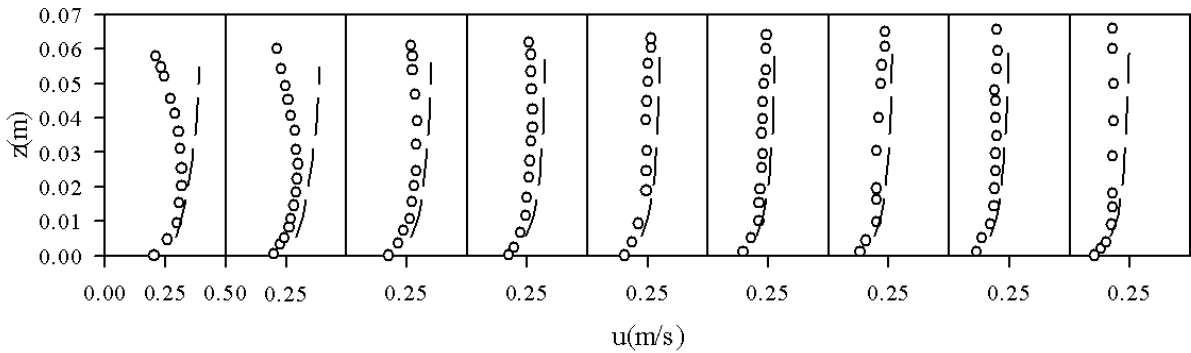


圖 4.19 Rozovskii(1961)案例 65°、100° 及 143° 斷面縱向流速比較圖

(○)實驗值 (---) $k-\epsilon$  模式

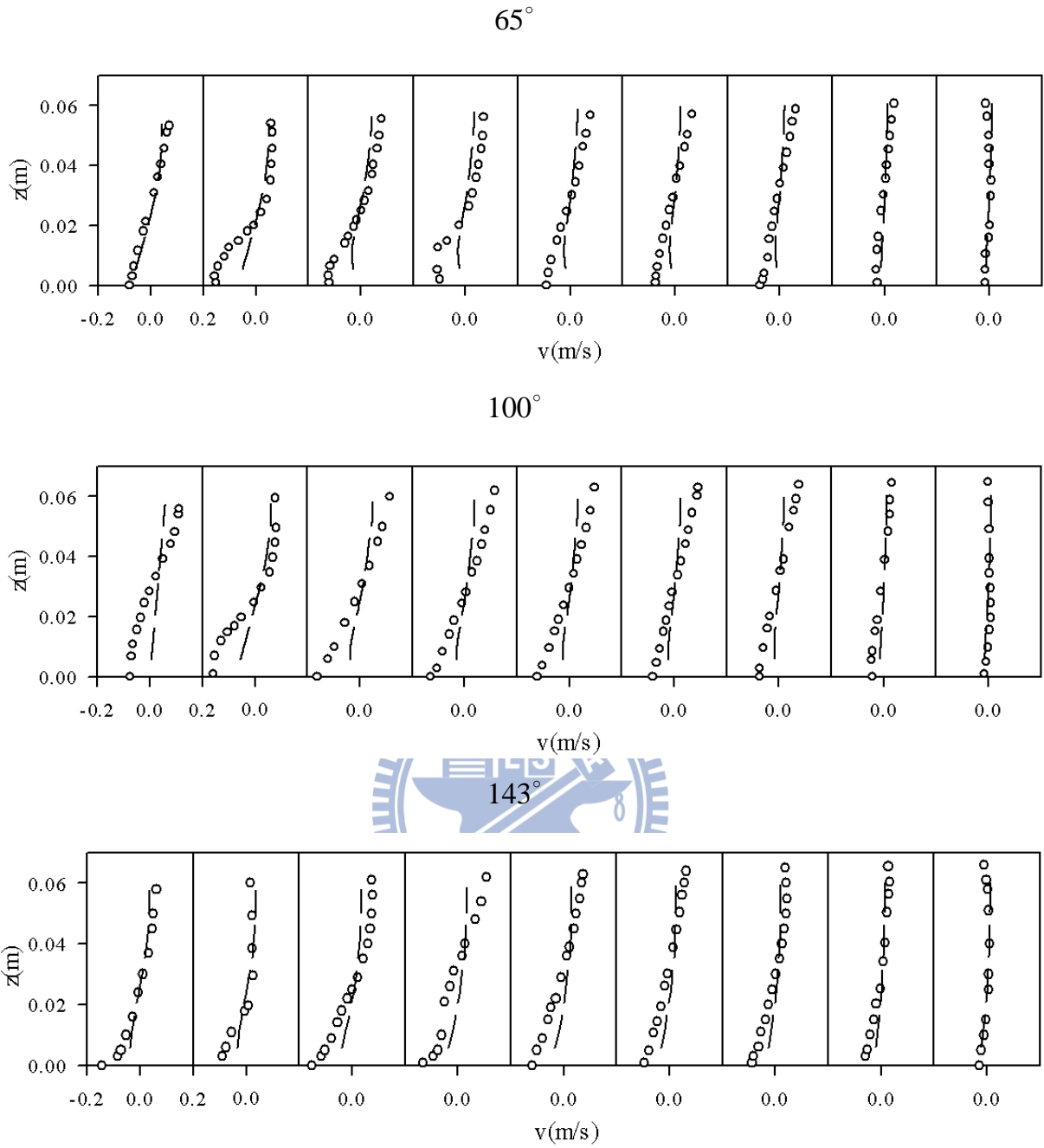
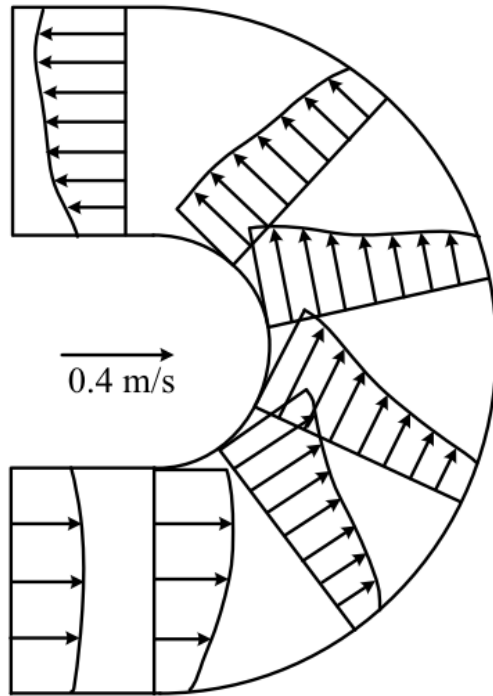


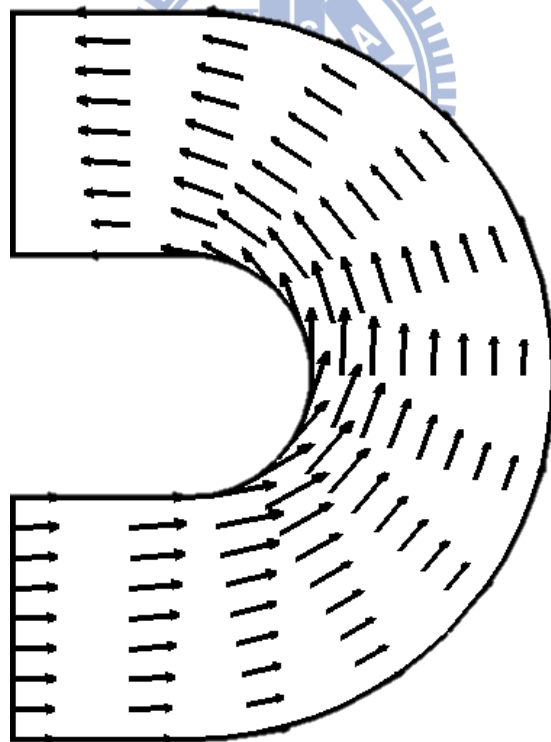
圖 4.20 Rozovskii(1961)案例 65°、100° 及 143° 斷面側向流速比較圖

(○)實驗值 (---)k-ε 模式



(摘錄自洪聖翔 2011)

(a) 實驗流速分佈圖



(b)  $k-\varepsilon$  模式模擬結果

圖 4.21 Rozovskii(1961)彎道案例流速分佈圖

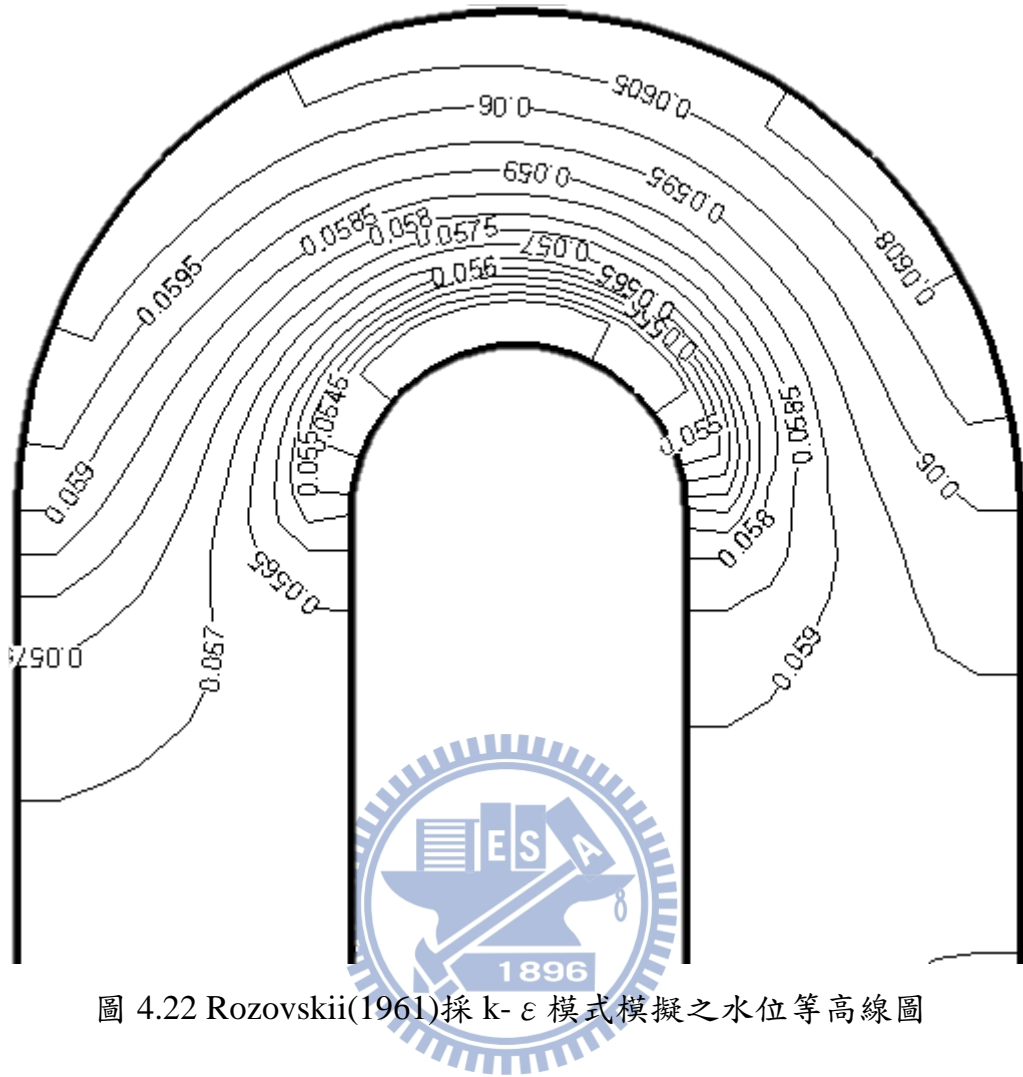
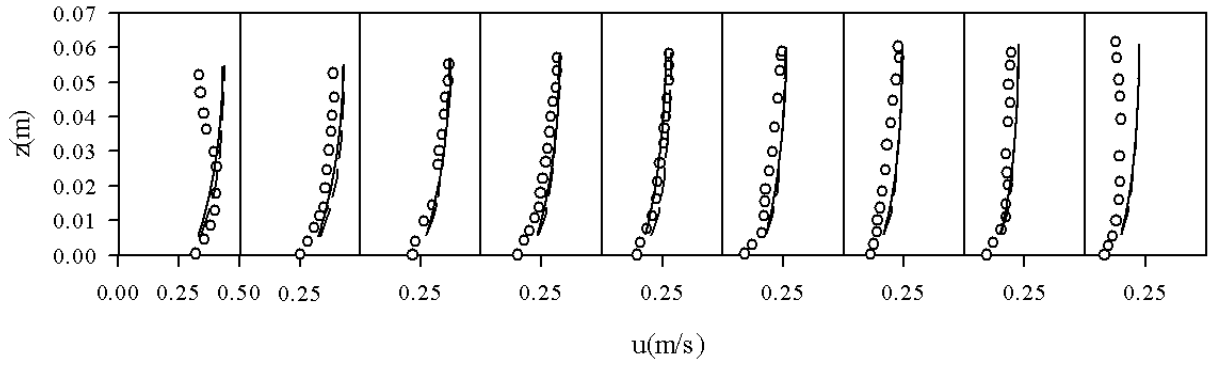


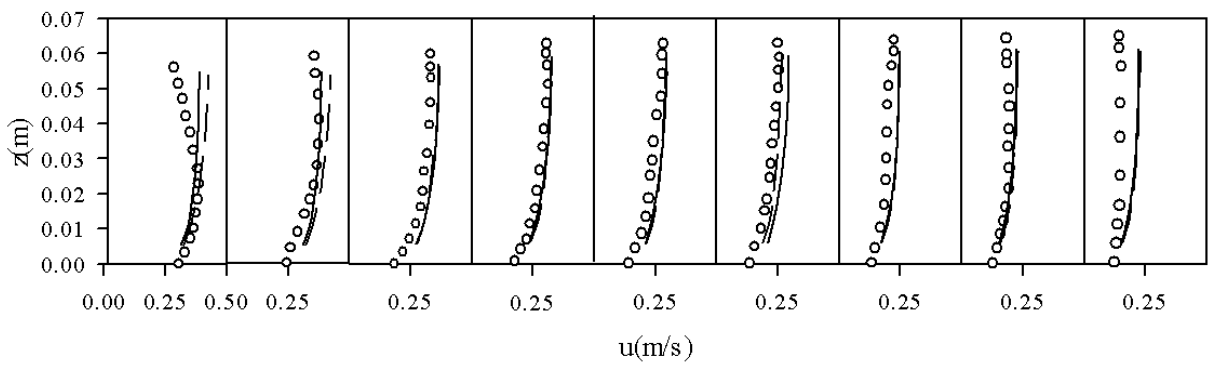
圖 4.22 Rozovskii(1961)採  $k-\epsilon$  模式模擬之水位等高線圖



65°



100°



143°

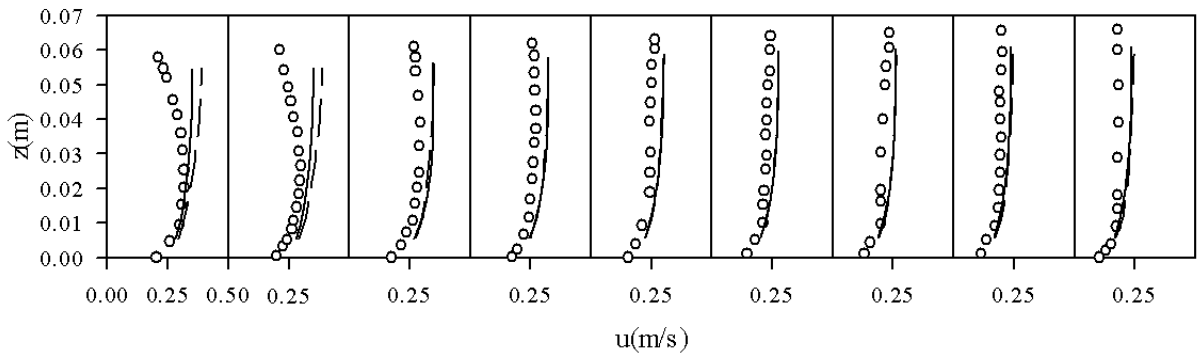
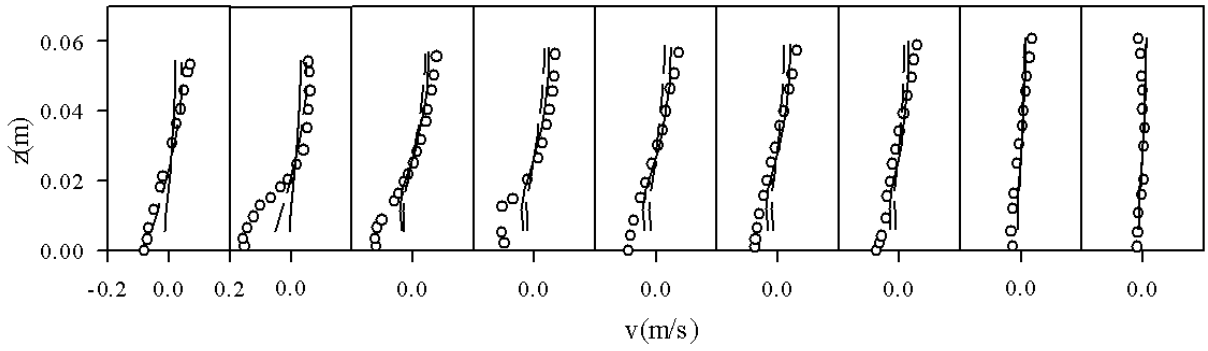


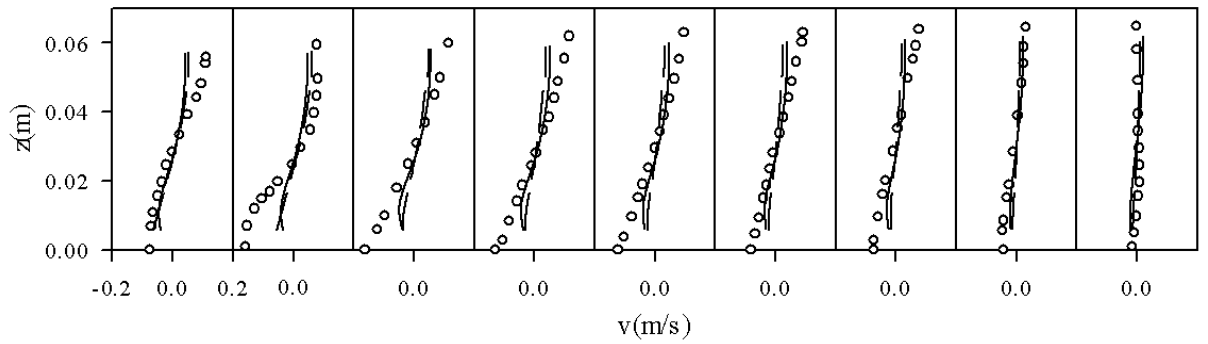
圖 4.23 Rozovskii(1961)案例於 65°、100° 及 143° 斷面縱向流速比較圖

(○)實驗值(—)零方程模式 I (--) $k-\epsilon$  模式

65°



100°



143°

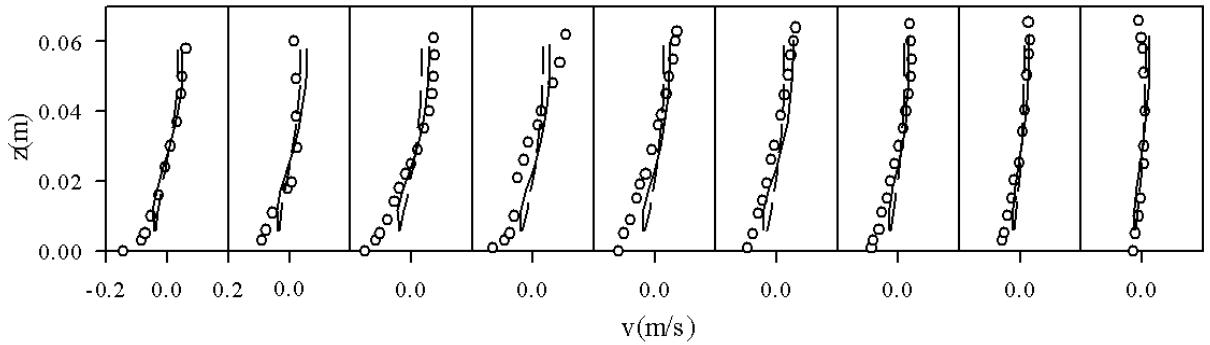


圖 4.24 Rozovskii(1961)案例 65°、100° 及 143° 斷面側向流速比較圖

(○)實驗值(—)零方程模式 I(--)-k-ε 模式

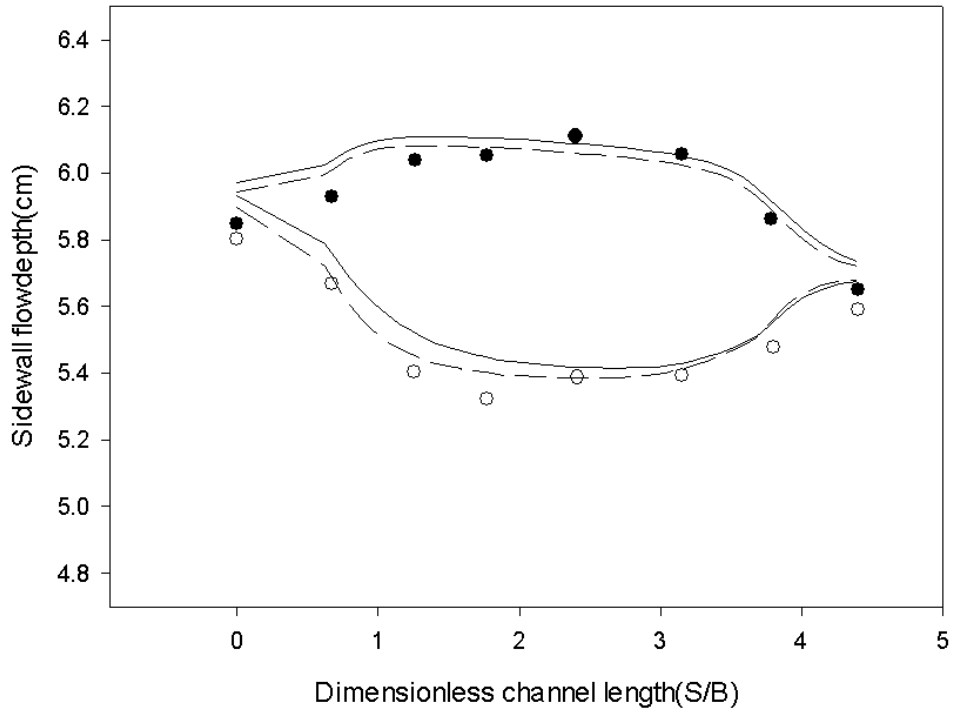


圖 4.25 Rozovskii(1961)側壁水深比較圖

(--) $k-\varepsilon$  模式 (—) 零方程模式 I (●) 外岸側壁水深實驗值 (○) 內岸側壁水深實驗值



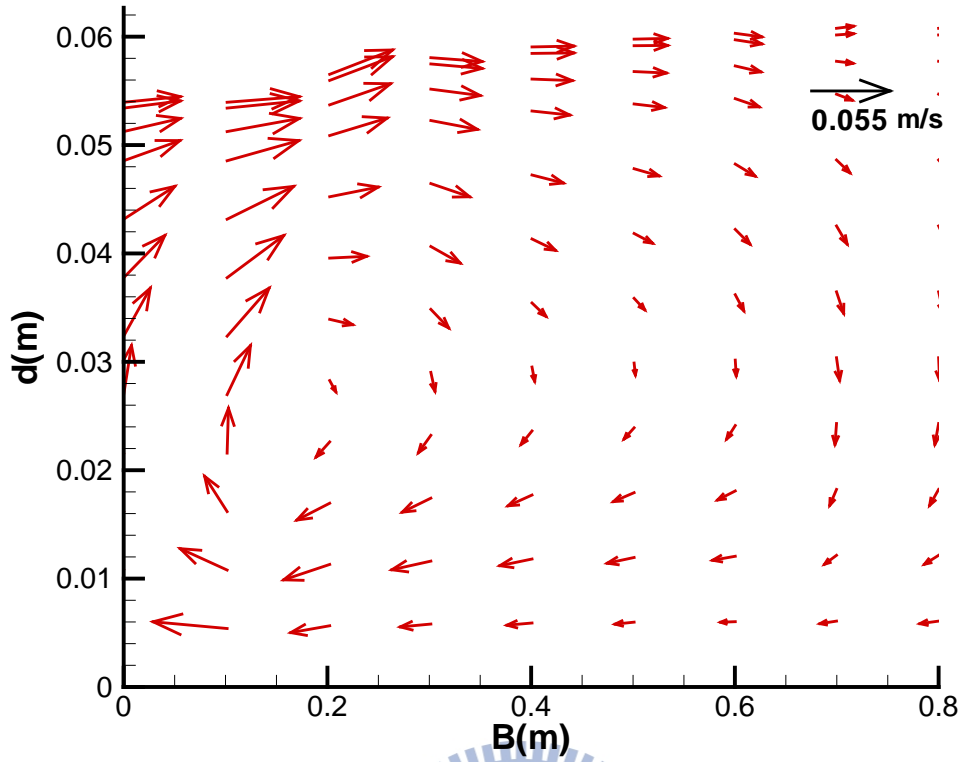


圖 4.26 Rozovskii(1961) 65° 斷面採 k- $\epsilon$  模式模擬之 V、W 向量圖

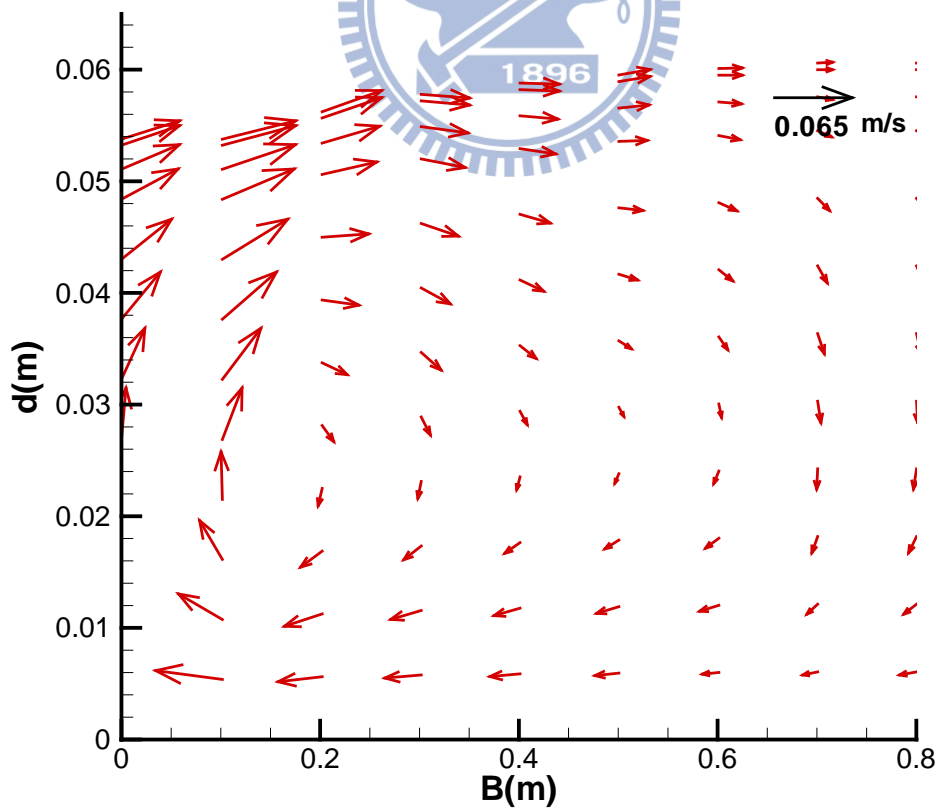


圖 4.27 Rozovskii(1961) 100° 斷面採 k- $\epsilon$  模式模擬之 V、W 向量圖

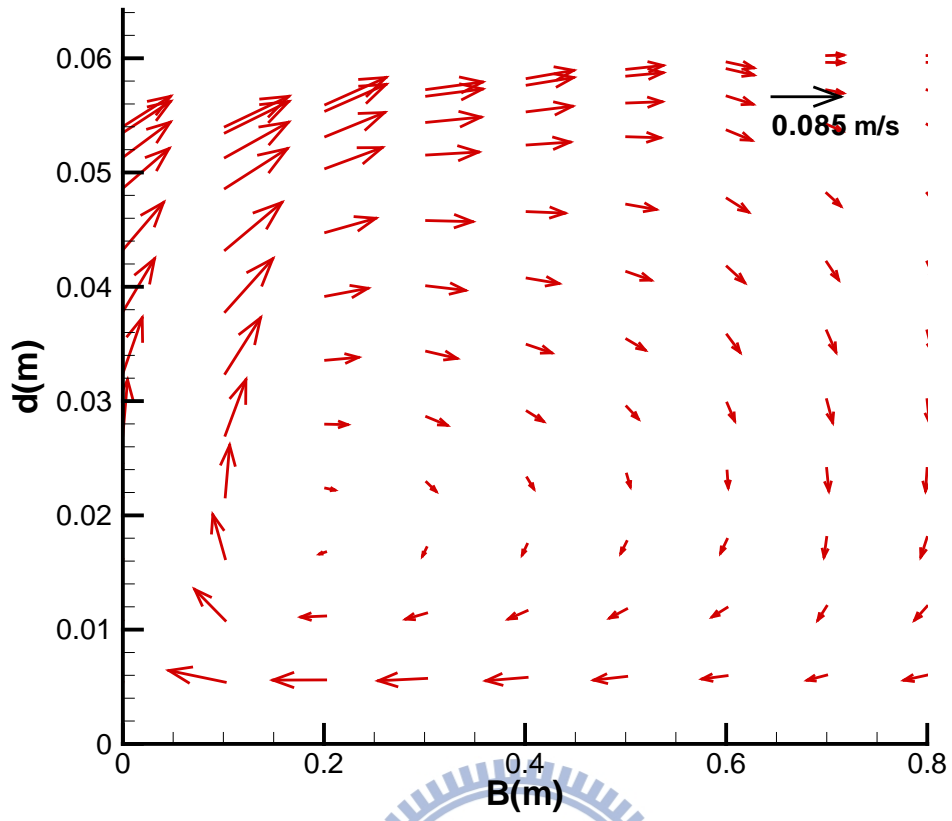


圖 4.28 Rozovskii(1961) 143° 斷面採 k- $\epsilon$  模式模擬之 V、W 向量圖



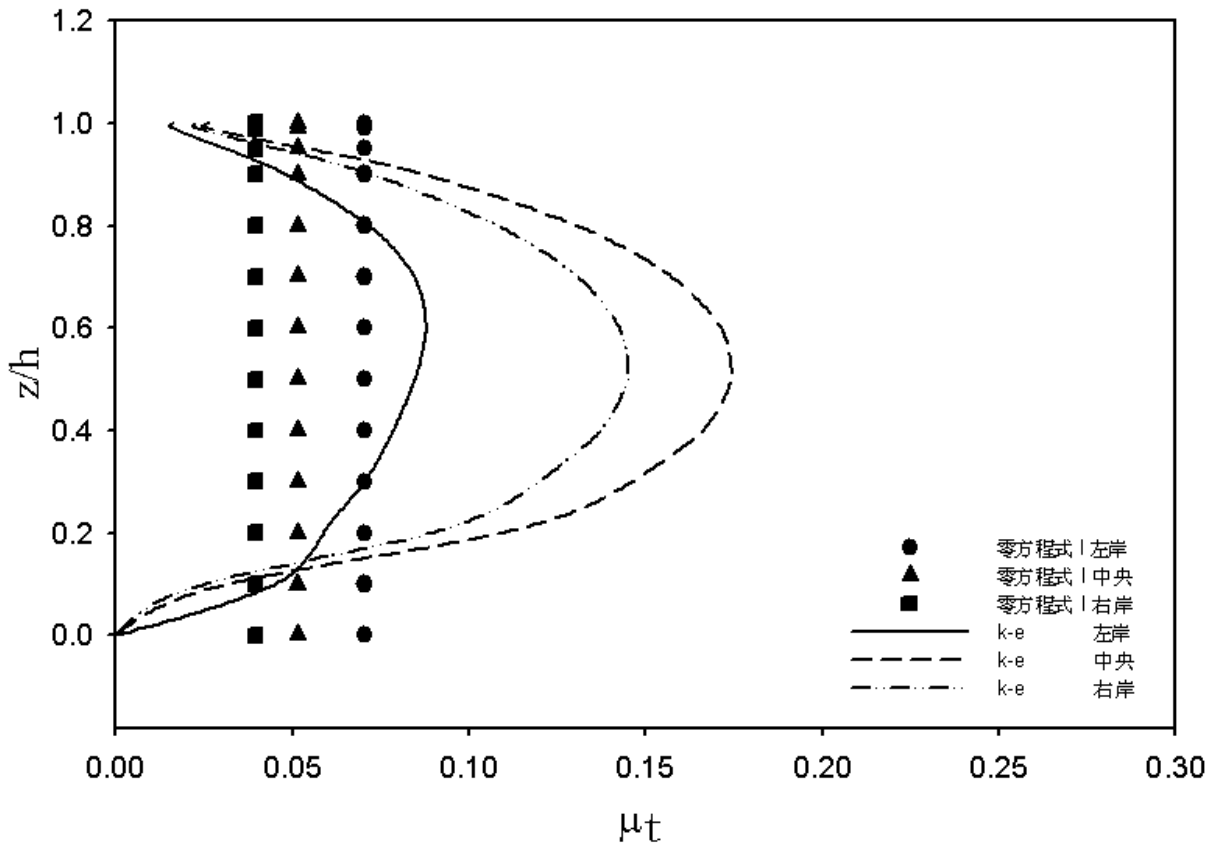


圖 4.29 Rozovskii(1961) 65° 斷面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖

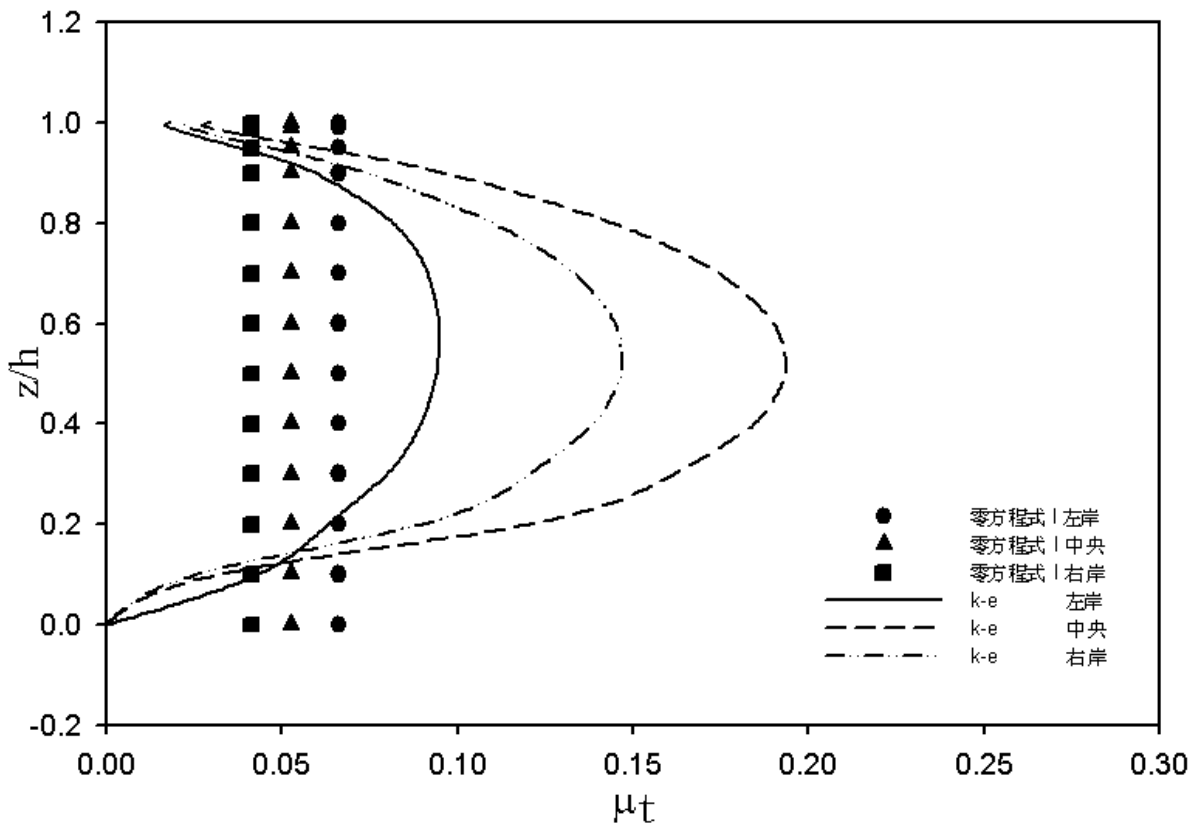


圖 4.30 Rozovskii(1961) 100° 斷面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖

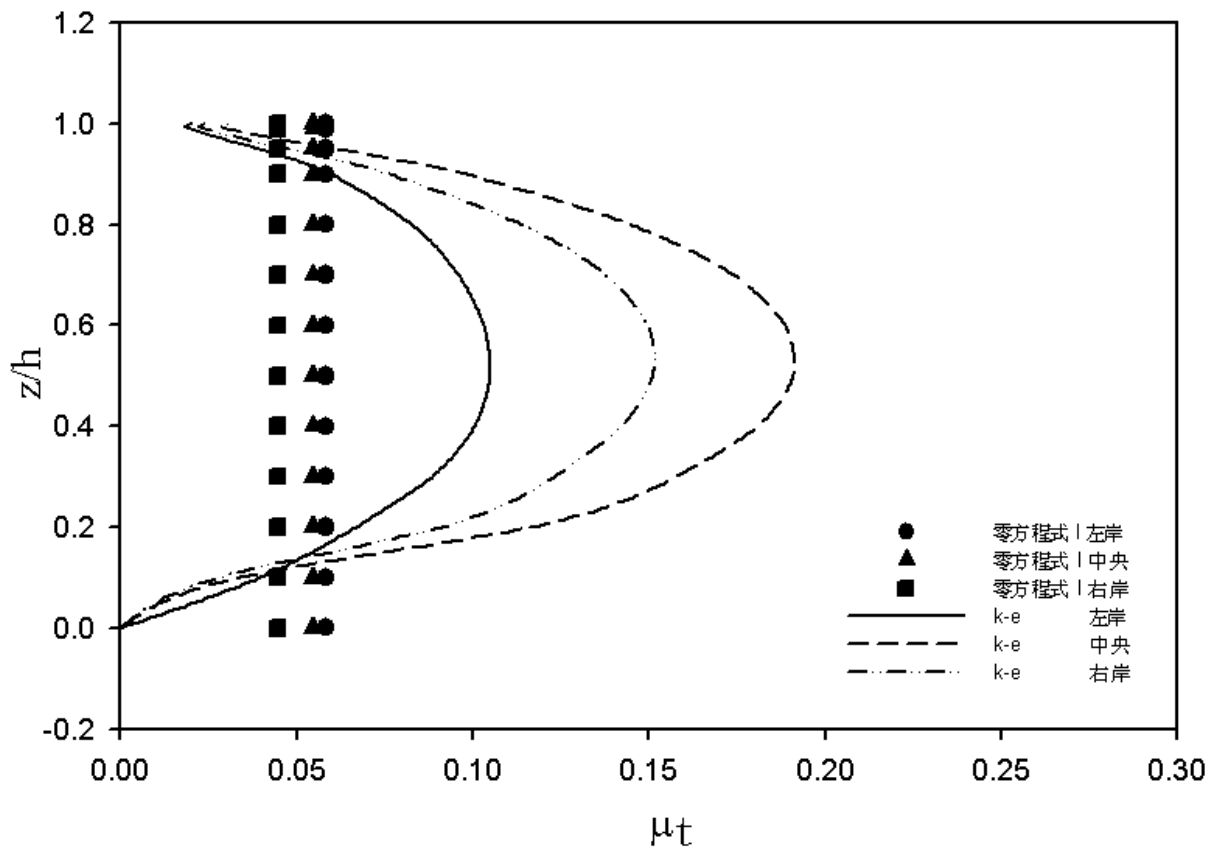


圖 4.31 Rozovskii(1961) 143° 断面之模擬紊流黏滯係數剖面比較圖

## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

1. 本研究以採用水平分離演算概念發展三維靜水壓模式，水平方向採正交曲線座標，垂向採 $\sigma$ 座標，並植入標準 k- $\epsilon$  紊流模式，分別模擬直渠道案例與急彎彎道案例，探討紊流黏滯係數之計算與流場現象，並與兩種零方程模式模擬結果比較分析。
2. 在直渠道案例部分，共模擬兩種寬深比實驗。
  - (1)採用 k- $\epsilon$  模式，底床邊界條件測試上，只有牆函數能夠合理掌握近底床邊界的流速值，滑移與非滑移條件則分別會有高估與低估近底床流速值的現象。
  - (2)藉由網格敏感度分析，可據此決定合適之網格配置，確保模擬結果不受格網大小影響(grid independent)。
  - (3)零方程模式 I 所模擬之紊流黏滯係數不隨水深改變，而零方程模式 II 與 k- $\epsilon$  模式之紊流黏滯係數雖計算方式不同但剖面皆為拋物線形狀與實驗之估算值較一致；而流速模擬部分，亦只有零方程模式 I 未能模擬出與實驗相符之紊流流速分布。
3. 急彎彎道案例部分
  - (1)完成網格布置之敏感度測試，確保網格配置達 grid independent 條件。
  - (2)縱向流速之模擬，兩模式模擬結果相當，在內岸模擬較不理想；而在側向流速方面，兩模式所模擬之近內岸二次流流速變化現象均不如實驗結果顯著。
  - (3)兩模式在內外岸紊流黏滯係數模擬由上游至下游之剖面變化不盡相同。
  - (4)由於彎道流場為非單向流場，使用零方程模式模擬混合長度應隨區域改變，但此次模擬並未有所調整；而採用 k- $\epsilon$  模式則欠缺考量側壁邊界之設定，可能為兩模式在模擬彎道流場時之誤差來源。

### 5.2 建議

1. 彎道案例之網格測試需至少再增加一組，始能看出趨勢。



2. 彎道案例補上零方程模式 II 之模擬結果與比較，需進一步驗證直接假設拋物線剖面與實際隨流場運算之紊流黏滯係數在各式流場之模擬差異。
3. 本研究採標準  $k-\varepsilon$  模式模擬，在前人研究中已有許多由標準  $k-\varepsilon$  模式修正之模式，可以在模式中增加開關使能依流場變化修正方程式或是係數。
4. 本研究之模式因有淺水之假設，故垂向壓力採靜水壓分佈，但在寬深比較小之案例則有所限制，故未來可以建構非靜水壓模式。



## 參考文獻

- 顏志偉(1995)，「複雜自由液面之模擬與分析」，國立成功大學水利及海洋工程研究所博士論文。
- 謝德勇(2003)，「二維水理、汙染傳輸及沉滓運移模式之研發與應用」，國立交通大學土木工程研究所博士論文。
- 洪聖翔(2011)，「正交曲線座標擬似三維水理模式於彎道水流之模擬研究」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文。
- 鐘浩榮(2012)，「河道三維高含砂水流沉滓運移模式發展與應用」，國立交通大學土木工程研究所博士論文。
- 陳蓉瑩(2013)，「三維大渦模式在明渠流之應用」，國立交通大學土木工程研究所碩士論文。
- C.J. Chen & S.Y. Jaw, 1997. Fundamentals of Turbulence Modeling. Taylor & Francis.
- C. W. LI & T.S. YU, 1996. Numerical Investigation of Turbulent Shallow Recirculating Flows by a Quasi-three-dimensional  $k-\epsilon$  model. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 23, 485-501.
- Elder, J. W., 1959. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. Journal of Fluid Mech., 5:554-560.
- George L. Mellor & Alan F. Blumberg, 1985. Modeling Vertical and Horizontal Diffusivities with the Sigma Coordinate System. Mon. Wea. Rev., 113, 1379-1383.
- Gosman, A.D., Khail, E. E., Whitelaw, J.H., 1974. The calculation of two-dimensional turbulent recirculating flows, Turbulent Shear Flow I, Springer Verlag, Heidelberg.
- Ha Minh, H. and Chassaing, P., 1977. Perturbation of turbulent pipe flow, Proceedings Symposium on Turbulent Shear Flows, Pennsylvanis State University.
- H. Tennekes & J. L. Lumley, 1972. A First Course in Turbulence. MIT Press, Cambridge, MA
- I. Nezu & H. Nakagawa, 1993. Turbulence in Open-Channel Flows. Balkema, Rotterdam.

- Jin, X. and Kranenburg, C., 1993. Quasi-3D Numerical Modeling of Shallow Water Circulation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 119:458-472.
- Jobson, H. E. and Sayre, W. W., 1970. Vertical transfer in open channel flow. *Journal of the Hydraulics Division* 96
- Keller, R.J. and Rastogi, A.K., 1975. Prediction of flow development on spillways, *J. of the Hydraulics Division, ASCE, HY9*, pp.1171-1184.
- Lardner R.W. and Cekirge, H.M., 1988. A New Algorithm for 3-Dimensional Tidal and Storm-Surge Computations. *Appl Math Model*, 12:471-481.
- Lauder, BE & Spalding, D.B., 1974. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 3, 269-289.
- Leschziner, M.A. and W. Rodi, 1979. Calculation of strongly curved open channel flow. *J. Hydr. Division.*, 105: 1297-1314.
- Naot, D. and Rodi, W, 1982. Calculation of secondary currents in channel flows. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, 108(8): 948-968.
- Nezu, I., W. Rodi, 1986. Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer, *J. Hydraul. Eng.*, 1125, 335-355.
- Peter S. Bernard & James M. Wallace, 2001. *Turbulent flow: analysis, measurement, and prediction*. Hoboken, N.J.: Wiley.
- Rodi, Wolfgang & International Association for Hydraulic Research, 1993. *Turbulence models and their application in hydraulics: a state-of-the-art review (3rd ed)*. Balkema, Rotterdam
- Rozovskii, I.L., 1957. *Flow of Water in Bends of Open Channels*. Ac. Sc. Ukr. SSR; Isr. Progr. Sc. Transl., Jerusalem.
- S. B. Pope, 1978. The Calculation of Turbulent Recirculating Flows in General Orthogonal Coordinates, *Journal of Computational Physics* 26, 197-217.
- Shih, T.H., Liou, W.W., Shabbir, A., Yang, Z., and Zhu, J., 1994. A new k-epsilon Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows: Model development and validation. *Computers and Fluids* 24, no. 3, pp. 227-238.
- Singhal, A.k. and Spalding, D. B., 1975. Prediction of two-dimensional boundary layers with the aid of the k-e model of turbulence, *Imperial College, Mech. Eng.*
- S. Poroseva & G. Iaccarino, 2001. Simulating separated flows using the k- $\epsilon$  model.

Center for Turbulence Research Annual Research Briefs.

Stephenson, P. L., 1976. Theoretical study of heat transfer in two dimensional turbulent flow in a circular pipe and between parallel and diverging plates, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 413-423.

Svesson, U., 1978. Mathematical model of the seasonal thermocline, University of Lund, Dept. Of Water Resource Engg., Sweden, Rept. No. 1002.

Wang, K. H., 1994. Characterization of Circulation and Salinity Change in Galveston Bay. J EngMech-Asce, 120: 557-579.

Wilcox, D. C., 2000. Turbulence Modeling for CFD, 2nd edition, DCW Industries, Inc., La Canada CA



## 附錄A k-ε 方程式及數值方法

紊流動能方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u}k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \bar{v}k) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w}k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial z}\right) + G - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \bar{v}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w}\varepsilon) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

式中，

$$G = \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{A.3})$$

式中係數(Launder and Spalding, 1974)

$$C_\mu=0.09, \quad \lambda_k=1.0, \quad \lambda_\varepsilon=1.3, \quad C_1=1.44, \quad C_2=1.92$$

將(A.1)、(A.2)經過正交曲線座標轉換可得:

紊流動能方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u} k h_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v} k h_1) \right] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w} k) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \bar{u} \varepsilon h_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \bar{v} \varepsilon h_1) \right] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \bar{w} \varepsilon) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

式中，

$$\begin{aligned} G = \mu_t \left\{ 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \left[ \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + h_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{v}}{h_2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + h_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{u}}{h_1} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

將(A.5)、(A.6)以非保守型式表示：

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
& k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho k h_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} + \rho \bar{u} k \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right. \\
& \left. + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho k h_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} + \rho \bar{v} k \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \bar{w} k \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho k \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \rho \bar{w} \frac{\partial k}{\partial z} \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \mu_t}{\partial z} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + G - \rho \varepsilon \quad (A.7)
\end{aligned}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \varepsilon h_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \rho \bar{u} \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right. \\
& \left. + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \varepsilon h_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + \rho \bar{v} \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \bar{w} \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \varepsilon \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \rho \bar{w} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \mu_t}{\partial z} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = \mu_t \left\{ 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right. \\
\left. + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\bar{u} h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\bar{v} h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right]^2 \right\} \quad (A.9)
\end{aligned}$$

將(A.7)、(A.8)刪去質量守恆項後可得:

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
 & k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + \bar{w} k \frac{\partial \rho}{\partial z} + \bar{\rho} w \frac{\partial k}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \mu_t}{\partial z} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + G - \rho \varepsilon
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \bar{w} \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial z} + \bar{\rho} w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \mu_t}{\partial z} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$



將(A.10)、(A.11)經過 $\sigma$ 座標轉換後可得:

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
& k \frac{\partial \rho}{\partial t} + k \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} \right. \\
& \left. + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{w} k}{d} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\rho \bar{w}}{d} \frac{\partial k}{\partial \sigma} \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} + \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} + G - \rho \varepsilon
\end{aligned} \tag{A.12}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right. \\
& \left. + \rho \bar{u} h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + \rho \bar{v} h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{w} \varepsilon}{d} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\rho \bar{w}}{d} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} + \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
G & = \mu_t \left\{ 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
& \left. + 2 \left( \frac{1}{d} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\bar{u} h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v} h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{1}{d} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} \right]^2 + \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{d} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

將(A.12) 、(A.13)整理後可得:

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
& k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \omega \left( k \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial k}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} + \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} + G - \rho \varepsilon
\end{aligned} \tag{A.15}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \omega \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{\rho} u h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{\rho} v h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \\
& = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} + \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

式中，

$$\omega = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{h_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\bar{w}}{d} \tag{A.17}$$

$$\sigma = \frac{z - z^b}{d} \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial t} \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = -\frac{1}{d} \frac{\partial z^b}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial \xi} \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = -\frac{1}{d} \frac{\partial z^b}{\partial \eta} - \frac{\sigma}{d} \frac{\partial d}{\partial \eta} \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{d} \tag{A.22}$$

以隱式法求解，將(A.15) 、(A.16)改寫為：

紊流動能方程式

$$k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \omega \left( k \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial k}{\partial \sigma} \right) + \bar{u} k h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{v} k h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{1}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} - \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} = M_k \quad (\text{A.23})$$

$$M_k = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\ \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} - \bar{\rho} \bar{v} h_1 \frac{\partial k}{\partial \eta} - \bar{\rho} \bar{u} h_2 \frac{\partial k}{\partial \xi} \right] + G - \rho \varepsilon \quad (\text{A.24})$$

紊流動能消散率方程式

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \omega \left( \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right) + \bar{u} \varepsilon h_2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{v} \varepsilon h_1 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{1}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} - \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} = M_\varepsilon \quad (\text{A.25})$$

$$M_\varepsilon = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \xi} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \right. \\ \left. + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} - \bar{\rho} \bar{v} h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} - \bar{\rho} \bar{u} h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{A.26})$$

(A.23)、(A.25)採用 Crank-Nicolson method ；(A.24)、(A.26)採用中央差分法。

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
 & k^{n+1} \left( \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \right) + \rho \left( \frac{k^{n+1} - k^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \rho \omega \left( \frac{k_{k+1}^{n+1} - k_{k-1}^{n+1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \omega k^{n+1} \left( \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right. \\
 & + \bar{u} k^{n+1} h_2 (\rho_e - \rho_w) + \bar{v} k^{n+1} h_1 (\rho_n - \rho_s) - \frac{1}{d^2 \lambda_k} \left( \frac{k_{k+1}^{n+1} - k_{k-1}^{n+1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \\
 & \left. - \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_k} \left[ \frac{(k_{k+1}^{n+1} - k_k^{n+1})}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} - \frac{(k_k^{n+1} - k_{k-1}^{n+1})}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right] \right\} + \frac{1}{2} S_k^n = M_k^n \quad (A.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_k^n = & \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\mu_t}{\lambda_k} (k_e^n - k_w^n) \left( \frac{h_{2e}}{h_{1e}} - \frac{h_{2w}}{h_{1w}} \right) + \frac{h_2}{h_1} (k_e^n - k_w^n) \frac{1}{\lambda_k} (\mu_{te} - \mu_{tw}) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_k} (k_{j+1}^n - 2k_j^n + k_{j-1}^n) \right. \\
 & + \frac{\mu_t}{\lambda_k} (k_n^n - k_s^n) \left( \frac{h_{1n}}{h_{2n}} - \frac{h_{1s}}{h_{2s}} \right) + \frac{h_1}{h_2} (k_n^n - k_s^n) (\mu_m - \mu_{ts}) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_k} (k_{j+1}^n - 2k_j^n + k_{j-1}^n) \\
 & \left. - \rho \bar{u} h_2 (k_e^n - k_w^n) - \rho \bar{v} h_1 (k_n^n - k_s^n) + G - \rho \varepsilon \right\} \quad (A.28)
 \end{aligned}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{n+1} \left( \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \right) + \rho \left( \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \rho \omega \left( \frac{\varepsilon_{k+1}^{n+1} - \varepsilon_{k-1}^{n+1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \omega \varepsilon^{n+1} \left( \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right. \\
 & + \bar{u} \varepsilon^{n+1} h_2 (\rho_e - \rho_w) + \bar{v} \varepsilon^{n+1} h_1 (\rho_n - \rho_s) - \frac{1}{d^2 \lambda_\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon_{k+1}^{n+1} - \varepsilon_{k-1}^{n+1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \\
 & \left. - \frac{\mu_t}{d^2 \lambda_\varepsilon} \left[ \frac{(\varepsilon_{k+1}^{n+1} - \varepsilon_k^{n+1})}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} - \frac{(\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_{k-1}^{n+1})}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right] \right\} + \frac{1}{2} S_\varepsilon^n = M_\varepsilon^n \quad (A.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_\varepsilon^n = & \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} (\varepsilon_e^n - \varepsilon_w^n) \left( \frac{h_{2e}}{h_{1e}} - \frac{h_{2w}}{h_{1w}} \right) + \frac{h_2}{h_1} (\varepsilon_e^n - \varepsilon_w^n) \frac{1}{\lambda_\varepsilon} (\mu_{te} - \mu_{tw}) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} (\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n) \right. \\
 & + \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} (\varepsilon_n^n - \varepsilon_s^n) \left( \frac{h_{1n}}{h_{2n}} - \frac{h_{1s}}{h_{2s}} \right) + \frac{h_1}{h_2} (\varepsilon_n^n - \varepsilon_s^n) \frac{1}{\lambda_\varepsilon} (\mu_m - \mu_{ts}) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\mu_t}{\lambda_\varepsilon} (\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n) \\
 & \left. - \rho \bar{u} h_2 (\varepsilon_e^n - \varepsilon_w^n) - \rho \bar{v} h_1 (\varepsilon_n^n - \varepsilon_s^n) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \right\} \quad (A.30)
 \end{aligned}$$

整理(A.27)~(A.30):

紊流動能方程式

$$\begin{aligned}
& k^{n+1} \left\{ \left( 2\rho^{n+1} - \rho^n \right) + \frac{\Delta t \omega}{2} \left( \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \bar{u}h_2(\rho_e - \rho_w) + \bar{v}h_1(\rho_n - \rho_s) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_k} \left[ \frac{1}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} + \frac{1}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right] \right\} \\
& + k_{k+1}^{n+1} \left\{ \frac{\rho \omega \Delta t}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) - \frac{\Delta t}{2d^2 \lambda_k} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_k} \left[ \frac{1}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} \right] \right\} \\
& + k_{k-1}^{n+1} \left\{ \frac{\rho \omega \Delta t}{2} \left( \frac{-1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \frac{\Delta t}{2d^2 \lambda_k} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) - \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_k} \frac{1}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right\} \\
& = \frac{\Delta t}{2} S_k^n + \Delta t M_k^n + \rho k^n
\end{aligned} \tag{A.31}$$

紊流動能消散率方程式

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{n+1} \left\{ \left( 2\rho^{n+1} - \rho^n \right) + \frac{\Delta t \omega}{2} \left( \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \bar{u}h_2(\rho_e - \rho_w) + \bar{v}h_1(\rho_n - \rho_s) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_\varepsilon} \left[ \frac{1}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} + \frac{1}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{k+1}^{n+1} \left\{ \frac{\rho \omega \Delta t}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) - \frac{\Delta t}{2d^2 \lambda_\varepsilon} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_\varepsilon} \left[ \frac{1}{(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1})} \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{k-1}^{n+1} \left\{ \frac{\rho \omega \Delta t}{2} \left( \frac{-1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) + \frac{\Delta t}{2d^2 \lambda_\varepsilon} \left( \frac{1}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \left( \frac{\mu_{tk+1} - \mu_{tk-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) - \frac{\mu_t \Delta t}{2d^2 \lambda_\varepsilon} \frac{1}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2} \right\} \\
& = \frac{\Delta t}{2} S_\varepsilon^n + \Delta t M_\varepsilon^n + \rho \varepsilon^n
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
G = \mu_t & \left\{ 2 \left[ \frac{1}{h_1} (\bar{u}_e - \bar{u}_w) + \frac{1}{h_1} \left( \frac{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{h_1 h_2} (h_{1n} - h_{1s}) \right]^2 \right. \\
& + 2 \left[ \frac{1}{h_2} (\bar{v}_n - \bar{v}_s) + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\bar{u}}{h_1 h_2} (h_{2e} - h_{2w}) \right]^2 \\
& + 2 \left[ \frac{1}{d} \left( \frac{\bar{w}_{k+1} - \bar{w}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right]^2 + \left[ \frac{(\bar{u}_n - \bar{u}_s)}{h_2} + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{\bar{u} h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(\bar{v}_e - \bar{v}_w)}{h_1} + \frac{1}{h_1} \left( \frac{\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\bar{v} h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{(\bar{w}_n - \bar{w}_s)}{h_2} + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\bar{w}_{k+1} - \bar{w}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \frac{1}{d} \left( \frac{\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right]^2 \\
& \left. + \left[ \frac{(\bar{w}_e - \bar{w}_w)}{h_1} + \frac{1}{h_1} \left( \frac{\bar{w}_{k+1} - \bar{w}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{d} \left( \frac{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-1}}{\sigma_{k+1} - \sigma_{k-1}} \right) \right]^2 \right\} \tag{A.33}
\end{aligned}$$

