

# 國立交通大學

電子物理學系

碩士論文

光彈調變式橢圓偏光儀

對扭轉式液晶盒的量測

Measurement of the twist nematic liquid crystal cell

by photoelastic modulated ellipsometry

研究生：劉育承

指導教授：趙如蘋 教授

趙于飛 教授

中華民國九十四年七月

光彈調變式橢圓偏光儀對扭轉式液晶盒的量測

Measurement of the twist nematic liquid crystal cell  
by photoelastic modulated ellipsometry

研究生：劉育承

Student : Yu-Chen Liu

指導教授：趙如蘋 博士

Advisor : Dr. Ru-Pin Pan

趙于飛 博士

Dr. Yu-Faye Chao

國立交通大學

電子物理學系



Submitted to Department of Electrophysics

College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Electrophysics

July 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年七月

# 光彈調變式橢圓偏光儀 對扭轉式液晶盒的量測

學生:劉育承

指導教授:趙如蘋 博士

趙于飛 博士

國立交通大學電子物理學系碩士班



本論文以橢圓偏極術為基礎，在不需轉動樣本方位角的情況下，以不同偏振方向的線性偏振光入射樣本，藉由出射光偏振態的變化，用數值方法擬合出樣本矩陣模型參數；我們所量測的樣本為扭轉式液晶盒，其矩陣模型包含了三個參數：總相位延遲、扭轉角及第一層液晶錨定方向。根據我們的量測結果，標準差最大為  $0.1^\circ$ ，將量測結果和一般常見的量測方法結果做比較，結果相當一致。此外我們還從實驗數據中，驗證了符合偏振追隨 (Adiabatic Following) 之液晶盒矩陣模型與旋轉矩陣的關係。最後，我們提出一個光偏振態的即時量測方法，可即時觀察光偏振態在邦加球上的變化。

# Measurement of the twist nematic liquid crystal cell by photoelastic modulated ellipsometry

Student : Yu-Chen Liu

Advisor : Dr. Ru-Pin Pan

Dr. Yu-Faye Chao

Department of Electrophysics  
National Chiao Tung University



This ellipsometric method does not need to rotate the sample azimuthally. The physical parameters of sample are measured under various linear polarized lights through the numerical fitting to its theoretical model. In addition to the orientation of the first layer of nematic liquid crystal is considered, the total phase retardation and twist angle of twist Nematic Liquid Crystal cell are the physical parameters measured by this method. In our error analysis: the maximum error of these three parameters is  $0.1^\circ$ . By comparison, our results agree well with that measured by the conventional method of A. Lien. The adiabatic following model is closely analyzed. In our measurements, the condition of adiabatic following model is demonstrated. In the end, we also propose a technique to trace out the polarization state on Poincare sphere in real time.

## 誌 謝

兩年的碩士班生活，感謝許多人陪我一路走來。首先，感謝我的兩位指導老師：趙如蘋教授及趙于飛教授，感謝他們在一開始給我這個機會成為共同指導生，讓我能依照自己的興趣做研究；碩士論文也仰賴兩位老師給我的建議及指導才能順利完成。也感謝電物系液晶物理實驗室及光電所偏光實驗室的所有學長：雅峰學長、建遠學長、昭遠學長、康源學長、柏儒學長、信穎學長、凱元學長、宗達學長、家任學長、卓帆學長、宇泰學長、政達學長及修銘學長，論文中的每一個部分，都紀錄著每位學長對我的教導。還要感謝我的好友們以及實驗室的夥伴：阿凱、威利、阿倫、莊姊姊、阿輝、台南的阿家、台中的洪聲仔、台北的小陪及屏東的小眼睛，謝謝你們帶給我歡笑，在我失落的時候給我打氣。最後，我要感謝我的家人：爸爸、媽媽、姊姊、妹妹及我的奶奶，感謝你們一值在我身後支持我，照顧遠在新竹的我。

要感謝的人實在太多了，沒有你們就不會有現在的我，謝謝大家！

育承

# 章節目錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
章節目錄	.....	iv
圖目錄	.....	vi
表目錄	.....	viii
第一章	緒論	1
第二章	基本原理	4
2.1	光的橢圓偏極態理論及表示法	4
2.2	史托克參數 (Stokes Parameters) 和穆勒矩陣 (Mueller Matrix)	8
2.3	邦加球 (Poincare Sphere)	13
2.4	扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 的穆勒矩陣	15
2.5	光彈調變器 (PhotoElastic Modulator-PEM)	22
2.6	利用 PEM 量測史托克參數	24
2.7	$\Delta_I$ 校正	29
2.8	各倍頻優化法	31
第三章	樣品製作與實驗架構	35
3.1	扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 製作	35
3.2	實驗架構	39
第四章	實驗結果	41
4.1	系統校正	41
4.1.1	PEM 內稟相位延遲 $\Delta_I$ 校正	42
4.1.2	起偏片誤差角 $\delta P$ 校正	44
4.1.3	考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$	47
4.2	扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 的量測	50
4.2.1	樣本量測結果	50

4.2.2	偏振追隨 (Adiabatic Following) .....	54
4.3	光偏振態的即時量測.....	60
第五章	結論.....	65
參考文獻	.....	69
附錄 A	Chebyshev's Identity .....	70
附錄 B	各倍頻訊號優化處理及史托克參數的換算 (Matlab)	71
附錄 C	變數變換 Jacobian matrix .....	75
附錄 D	偏振追隨 (Adiabatic Following) 的穿透特性 .....	76



# 圖目錄

圖 2-1	橫向傳播光場	4
圖 2-2	旋轉的橢圓偏振光	5
圖 2-3	線性偏振光	6
圖 2-4	圓偏振光	6
圖 2-5	橢圓偏振光	6
圖 2-6	邦加球 (Poincare Sphere)	14
圖 2-7	扭轉式液晶示意圖	15
圖 2-8	方位角 $P$ 的線性偏振光通過待測樣本	19
圖 2-9	Hinds PEM-90 外觀及功能介紹	22
圖 2-10	利用光彈調制器及析光片架構量測史托克參數系統 架構圖	24
圖 2-11	校正 $\Delta_I$ 的實驗架構圖	29
圖 2-12	倍頻訊號與析光片方位角關係圖	31
圖 2-13	優化前及優化後 $I_{1f}/I_{3f}$ 對析光片方位角的關係圖	34
圖 3-1	液晶盒夾製示意圖	37
圖 3-2	光彈調變式橢圓偏光儀	39
圖 3-3	實驗步驟流程圖	40
圖 4-1	不放樣本時，考慮 PEM 為理想矩陣的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)	42
圖 4-2	不放樣本時，考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 的實驗數據 (exp) 與 理論圖形 (th)	43
圖 4-3	量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ$ )，考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ 的實驗數據 (exp) 與理論圖 形 (th)	48



圖 4-4	量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ - 2^\circ$ )，考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ 的實驗數據 (exp) 與理論圖 形 (th).....	48
圖 4-5	量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ - 90^\circ$ )，考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ 的實驗數據 (exp) 與理論圖 形 (th).....	49
圖 4-6	量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ - 92^\circ$ )，考慮 $\Delta_I = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ 的實驗數據 (exp) 與理論圖 形 (th).....	49
圖 4-7	量測扭轉式液晶盒 NO.1 (扭轉角度 $\Phi = 1.8^\circ$ )，實驗 數據 (exp) 與理論圖形 (th).....	52
圖 4-8	量測扭轉式液晶盒 NO.2 (扭轉角度 $\Phi = 27.72^\circ$ )，實 驗數據 (exp) 與理論圖形 (th).....	52
圖 4-9	量測扭轉式液晶盒 NO.3 (扭轉角度 $\Phi = -90.08^\circ$ )，實 驗數據 (exp) 與理論圖形 (th).....	53
圖 4-10	扭轉式液晶盒 NO.1 (扭轉角度 $\Phi = 1.8^\circ$ ) 實驗數據	55
圖 4-11	扭轉式液晶盒 NO.2 (扭轉角度 $\Phi = 27.72^\circ$ ) 實驗數 據.....	56
圖 4-12	扭轉式液晶盒 NO.3 (扭轉角度 $\Phi = -90.08^\circ$ ) 實驗數 據.....	57
圖 4-13	任意偏振狀態的入射光通過純旋轉矩陣後，偏振態 沿著邦加球緯線切線方向做變化.....	59
圖 4-14	利用 PEM-A 即時量測史托克參數系統架構圖.....	60
圖 4-15	轉動一線性偏振片，出射光偏振態在邦加球上的軌 跡變化理論圖.....	63
圖 4-16	在線性偏振片後方擺放一四分之一波長延遲片，延 遲片光軸方位角位於實驗室座標 $45^\circ$ ，轉動偏振片， 在邦加球上的軌跡變化理論圖.....	63

# 表 目 錄

表 4-1	mica quarter wave plate 規格表·····	44
表 4-2	考慮 $\Delta_l = 4.8^\circ$ ，四組延遲片數據所擬合出的結果	45
表 4-3	石英 (quartz) 與雲母 (mica) 的特性比較·····	45
表 4-4	令扭轉角度 ( $\Phi = 0$ )，考慮誤差項 $\delta P$ ，所擬合出的 結果·····	46
表 4-5	考慮 $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ ，所擬合出的結果···	47
表 4-6	三種扭轉式液晶盒樣本資訊·····	50
表 4-7	三種扭轉式液晶盒量測結果·····	51
表 5-1	四分之一波長延遲片在四組不同方位角的量測結果	66
表 5-2	三種扭轉式液晶盒量測結果·····	66



# 第一章 緒論

光波具有很多有趣的特性，包括光的波長、光的強度、光的同調性以及光的偏振性。偏振性之研究，最早是始於丹麥科學家 Bartholinus 於1669年發現了光在方解石晶體中之雙折射現象；1690年德國科學家 Huygens 發現光之偏振現象；1852年，Stokes 利用四個參數 Stokes polarization parameters 來描述光的偏振態，即 Stokes vector；1940年代初，Mueller 以 Stokes vector 為基礎發展一套數學，用以表示偏振光與偏光元件之關係，即為 Mueller matrix calculus；約在同時，Jones 發展出較簡單但只能運算純偏振光的運算法，即為 Jones matrix calculus。至此，偏光理論趨於成熟 [1]。20世紀初期因為鍍膜技術的需求，光的偏振性才比較受到重視並受到更多更廣泛的研究以及應用。利用已知偏振態之偏振光入射至一待測物，經由量測找出偏振態變化，可計算出此待測物之光學性質，此方法稱為橢圓偏極術 (Ellipsometry) [2]。

1888年，澳洲的植物學家 F. Reinitzer 發現膽固醇苯脂 (Cholesteryl Benzoate,  $C_{6}H_{5}CO_{2}C_{27}H_{45}$ ) 在 $145.5^{\circ}C$ 時為固體，隨著溫度的上升會轉變成白濁狀的液體，直到 $178.5^{\circ}C$ 才轉變成清澈的液體，並且觀察到許多顏色的光譜圖案。1889年，德國的物理學家 O. Lehmann 以偏光顯微鏡發現膽固醇苯脂具有異方性 (anisotropy) 晶體所特有的雙折射 (birefringence) 性質。具有此一特性的材料我們稱為液態晶體 (liquid crystals)，簡稱「液晶」。1970年後液晶領域快速的發展，許多液晶的物理與化學性質也慢慢的被人們所瞭解 [3]，也因此許多利用液晶做為材料的產品也大量出現在市場上，其中最大的一部份就是液晶顯示器；而在液晶顯示器市場上最早也最普遍被使用的液晶結構為扭轉式向列型液晶 (Twist Nematic Liquid Crystal，

TN-LC)。

扭轉式向列型液晶的兩個重要光學參數為總相位延遲及扭轉角，這兩個光學參數除了直接影響到液晶顯示器在亮、暗態的表現，在研究其它液晶材料參數時，也常間接利用到這兩個參數，如：配向膜經配向後的錨定強度 (Anchoring strength) [4]。目前最常見的扭轉角量測方法為 A. Lien [4] 所提出的，此方法是藉由固定比例旋轉析光片及樣本方位角，尋找出射光強最暗態，不過前題是總相位延遲需事先以其它方法量測 [10]，因此總相位延遲的準確度，間接的影響到扭轉角的準確度。本論文以橢圓偏極術為基礎，在不需轉動樣本方位角的情況下，以不同偏振方向的線性偏振光入射樣本，利用光彈調變器及析光片 (PEM-A) 的架構建立一個量測光偏振態 (史托克參數) 的系統，在各式線性偏振態入射的情況下量測出射光的偏振態變化，藉由這些資訊擬合出樣本矩陣模型參數。根據 Yeh [5] 對於扭轉式向列型液晶盒的矩陣模型推導，假設第一層液晶錨定方向位於零度，其結果僅包含了兩個參數：總相位延遲及扭轉角，我們考慮樣本方位角 (第一層液晶錨定方向) 改寫其矩陣作為我們的樣本矩陣模型。

類似的工作在2001年林肇廉 [6] 以一光彈調變式橢圓偏光儀 (P-PEM-S-A) 量出了扭轉式向列型液晶的扭轉角及其總相位延遲，先根據傳統的方式定出扭轉式向列型液晶第一層液晶錨定方向，固定起偏片及析光片，根據出射光強各倍頻訊號，利用電腦數值模擬找出扭轉角及總相位延遲。在2003年林柏儒 [7] 以簡式橢圓偏光儀 (P-S-A) 量出了扭轉式向列型液晶的扭轉角、總相位延遲及第一層液晶錨定方向，他轉動起偏片及析光片，利用六組光強度運算出總相位延遲、扭轉角及第一層液晶錨定方向的解析解。

相較於上述兩法，本論文所提出的方法，藉由旋轉起偏片每  $15^\circ$  所得的波訊可得到較為完整的資訊，且量測樣本不僅侷限於扭轉式向列型液晶，對於其它不同矩陣模型的樣本也可嘗試以此法測量，如：線性延遲片。

本論文內容重點可分為三部分：

### 第一部分：訊號優化及系統校正

藉由轉動析光片消除析光片誤差角和各倍頻系統誤差項以優化各倍頻訊號。考慮內稟相位延遲修正理想的 PEM 穆勒矩陣。利用雲母材料四分之一波長延遲片的無旋光性，校正起偏片誤差角。

### 第二部分：扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 的量測及液晶盒矩陣的偏振追隨 (Adiabatic Following)

量測自製的扭轉式液晶盒，並用 A. Lien [4] 的方法驗證量測結果。從實驗數據中討論液晶盒矩陣的偏振追隨 (Adiabatic Following) 與旋轉矩陣的關係。

### 第三部分：光偏振態的即時量測

提出一個方法達到光偏振態的即時量測以充分利用 PEM 的高調變頻率 51kHz。結合 LabVIEW 及 MatLAB 軟體，可以從電腦螢幕上即時觀察入射光偏振態在邦加球上的變化。

## 第二章 基本原理

### 2.1 光的橢圓偏極態理論及表示法 [1]

光波實質上就是電磁波，完整描述光波要用到四個基本的場向量，分別是：電場強度  $\vec{E}$ 、電位移密度  $\vec{D}$ 、磁場強度  $\vec{H}$  及磁通量密度  $\vec{B}$ 。我們通常以光波電場的時變分布來定義光波之偏振狀態。假設光波沿  $z$  軸方向前進，則電場之振動方向將位於  $x$ - $y$  平面上，如圖 2-1：

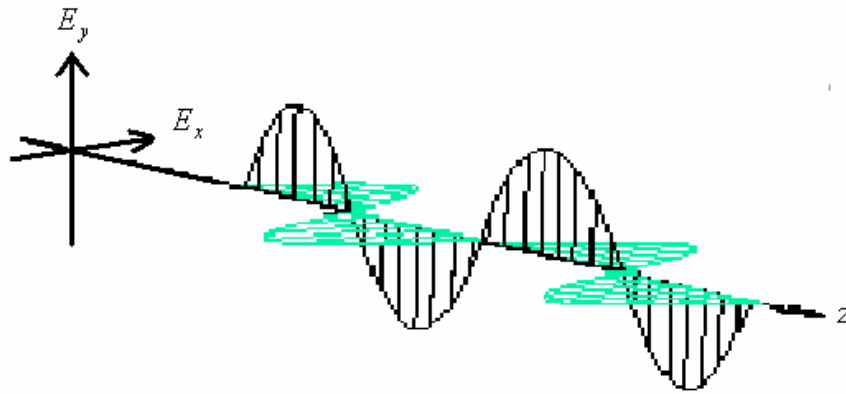


圖 2-1 橫向傳播光場

電場可表示為

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{i} + E_y(z, t)\hat{j} \quad (2-1)$$

其中

$$E_x(z, t) = E_{ox} \cos(\omega t - \kappa z + \delta_x) \quad (2-2a)$$

$$E_y(z, t) = E_{oy} \cos(\omega t - \kappa z + \delta_y) \quad (2-2b)$$

$\kappa$ ：波數 (wave number)

$\omega$ ：角頻率 (angular frequency)

$\delta_x$ 、 $\delta_y$ ： $x$  及  $y$  方向電場之相位 (phase)



將 (2-2a) 及 (2-2b) 兩式作三角函數展開可得：

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} = \cos(\omega t - \kappa z) \cos(\delta_x) - \sin(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_x) \quad (2-3a)$$

$$\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}} = \cos(\omega t - \kappa z) \cos(\delta_y) - \sin(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_y) \quad (2-3b)$$

將 (2-3a) 及 (2-3b) 化簡合併可得一與時間及空間相位無關的方程式(2-4)：

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\right)^2 - 2\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (2-4)$$

$\delta = \delta_y - \delta_x$ ：為 y 方向與 x 方向電場的相位差

方程式(2-4) 為一橢圓方程式的通式，為了能更直觀的了解，我們將  $x - y$  座標軸旋轉一角度  $\theta$ ，改以橢圓長短軸方向  $x' - y'$  為座標軸，如圖 2-2。

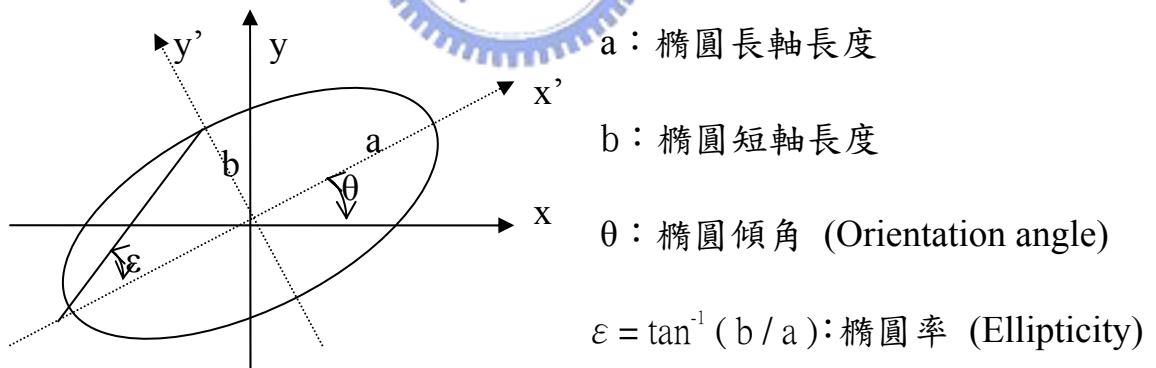


圖 2-2 旋轉的橢圓偏振光

式(2-4) 可簡化成：

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2-5)$$

其中  $E_x' = E_x \cos(\theta) + E_y \sin(\theta)$  (2-6a)

$$E'_y = -E_x \sin(\theta) + E_y \cos(\theta) \quad (2-6b)$$

$$a^2 = E_{ox}^2 \cos^2 \theta + E_{oy}^2 \sin^2 \theta + 2E_{ox}E_{oy} \sin \theta \cos \theta \cos \delta \quad (2-6c)$$

$$b^2 = E_{ox}^2 \sin^2 \theta + E_{oy}^2 \cos^2 \theta - 2E_{ox}E_{oy} \sin \theta \cos \theta \cos \delta \quad (2-6c)$$

方程式(2-5) 為一正橢圓方程式，也就是說電場在時間及空間上的傳播軌跡構成一橢圓形，故稱之為光波的橢圓偏振態。控制電場在 x 與 y 分量的相位差或振幅比，即可改變光波的橢圓偏振態，以下討論幾種特例：

- (1) 當  $\delta=0$  或  $\delta=\pm\pi$  時，電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光 (圖 2-3)。
- (2) 當  $\delta=\frac{\pi}{2}$  並且 x 與 y 方向之振幅相等時，電場在 x-y 平面的振幅永遠相同，稱為圓偏振光 (圖 2-4)。
- (3) 當  $\delta \neq 0, \delta \neq \pm\pi$  時，電場之振動方向投影於平面為橢圓，稱為橢圓偏振光 (圖 2-5)

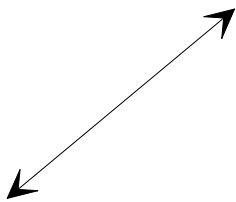


圖 2-3 線性偏振光

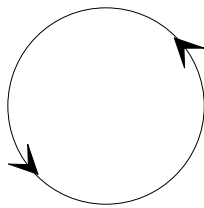


圖 2-4 圓偏振光

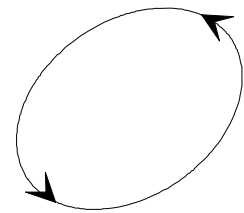


圖 2-5 橢圓偏振光



為了方便描述光波之偏振態，通常以 2x1 階矩陣表示光波在 x 及 y 方向的電場分量，並利用數學上常用的向矢 (phasor) 來表示，以利矩陣運算，此 2x1 階矩陣稱為瓊斯向量 (Jones vector)。

$$|E\rangle = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\delta_x} \\ E_{oy} e^{i\delta_y} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa z)} \quad (2-7)$$

一般而言，瓊斯向量只能表示純偏振光 (pure polarized light)，不能表示非偏振光 (unpolarized light) 或部份偏振光 (partially polarized light)，但光波大部份為部份偏振光，故須用史托克參數 (Stokes Parameter) 來表示，我們將在下個章節作介紹。



## 2.2 史托克參數 (Stokes Parameters) 和穆勒矩陣

### (Mueller Matrix) [1]

在光線為純偏振光的前提下，史托克參數與瓊斯向量有以下關係式：

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* = E_{ox}^2 + E_{oy}^2 \quad (2-8a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* = E_{ox}^2 - E_{oy}^2 \quad (2-8b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_x^* E_y = 2E_{ox} E_{oy} \cos \delta \quad (2-8c)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_x^* E_y) = 2E_{ox} E_{oy} \sin \delta \quad (2-8d)$$

$$|E\rangle = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

其中  $S_0$  代表著此光線的總強度； $S_1 = \pm 1$  代表偏振狀態為水平 (+) 或鉛直 (-) 方向； $S_2 = \pm 1$  代表偏振狀態為  $45^\circ$  (+) 或  $-45^\circ$  (-) 方向； $S_3 = \pm 1$  代表偏振狀態為右旋 (+) 或左旋 (-) 方向。我們要注意的是這四個參數皆為實數。

通常我們將史托克參數以一  $4 \times 1$  階矩陣來表示，稱之為史托克向量 (Stokes Vector)。

$$S(\text{Stokes-Vector}) = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

一個橢圓率  $\varepsilon$  的正橢圓偏極光其瓊斯向量可寫為：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

將式(2-9) 乘以一旋轉矩陣即可得到一個橢圓傾角為  $\theta$  的斜橢圓偏極光：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = R(-\theta) \cdot \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \cdot R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varepsilon - j \sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon + j \cos \theta \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

今將式(2-10) 以史托克向量來表示，代入定義式(2-8) 可得：

$$\begin{aligned} S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} &= (E_x E_x^* + E_y E_y^*) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \\ &= I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-11)$$

以上皆假設光線為純偏振光，為了表示非偏振光或部份偏振光我們引入一個新的參數；偏光率  $P$ ，則廣義的橢圓偏極光可用史托克向量表示：

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ P \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

- 其中
- $I_0$ ：光波的總亮度 (Intensity)
  - $P$ ：偏光率 (Degree of Polarization)
  - $\theta$ ：橢圓傾角 (Orientation angle)
  - $\varepsilon$ ：橢圓率 (Ellipticity)

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad P = \begin{cases} 0, & \text{unpolarized} \\ 1, & \text{pure polarized} \\ 0 < P < 1, & \text{partially polarized} \end{cases}$$

由式(2-12) 可知  $\tan 2\theta = \frac{S_2}{S_1}$        $\sin 2\varepsilon = \frac{S_3}{P \cdot S_0}$

所以橢圓偏振光的橢圓傾角和橢圓率可以簡單的由史托克參數計算出。

穆勒矩陣 (Mueller matrix) 是一個 4x4 階的矩陣，用來表示光學元件的傳導矩陣，主要架構建立在史托克參數上。當一入射光進入偏光元件時，元件本身所帶有的光學特性會改變入射光的偏振態，出射光的史托克參數和入射光的史托克參數會存在一線性關係，如式

(2-13) :

$$\begin{aligned} S_0' &= m_{11}S_0 + m_{12}S_1 + m_{13}S_2 + m_{14}S_3 \\ S_1' &= m_{21}S_0 + m_{22}S_1 + m_{23}S_2 + m_{24}S_3 \\ S_2' &= m_{31}S_0 + m_{32}S_1 + m_{33}S_2 + m_{34}S_3 \\ S_3' &= m_{41}S_0 + m_{42}S_1 + m_{43}S_2 + m_{44}S_3 \end{aligned} \quad (2-13)$$

我們用一 4×4 階的矩陣 (M) 結合入射光史托克向量 (S) 和出射光史托克向量 (S') 來描述這個線性關係：

$$S' = M \cdot S \Rightarrow \begin{bmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

M 即為元件的穆勒矩陣

以下列舉常用到的矩陣：

(1) 旋轉矩陣 (旋轉角為  $C$  )

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2C & \sin 2C & 0 \\ 0 & -\sin 2C & \cos 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

(2) 偏振片 (穿透軸方位角為  $P$  )

$$M_{pol}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & -\sin 2P & 0 \\ 0 & \sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ 0 & -\sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{polarizer}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

(3) 線性延遲片 (光軸方位角為  $\theta$  相位延遲為  $\phi$  )

$$M_{retarder}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & -\sin \phi \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \phi \sin 2\theta & \sin \phi \cos 2\theta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

當光路徑中有數個偏光元件，則出射光的史托克向量 ( $S_{out}$ ) 等於各元件的穆勒矩陣 ( $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ ...) 依序作用於入射光史托克向

量 ( $S_{in}$ ) 的結果：

$$S_{out} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots S_{in} \quad (2-18)$$



## 2.3 邦加球 (Poincare Sphere) [1]

根據式(2-12)

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ P \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

將式(2-19) 對  $S_0$  作歸一化：

$$\begin{bmatrix} S_0/S_0 \\ S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ P \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

以  $S_1/S_0$ 、 $S_2/S_0$ 、 $S_3/S_0$  為軸，固定  $P$ (偏光率) 改變  $\theta$  (橢圓傾角) 及  $\varepsilon$ (橢圓率) 產生的所有點，可在三維空間中描繪出一半徑為  $P$  的球面，如下頁圖 2-6 所示，球面上任一點皆代表一種偏振態，任一種偏振態就可在球面上找到。此圓的半徑等於偏光率  $P$ 。任一點偏光態 (O 點) 和  $S_1$ - $S_2$  平面所夾角度為  $2\varepsilon$ ，對  $S_1$ - $S_2$  平面的投影和軸  $S_1$  所夾角度為  $2\theta$ 。然而在  $S_1$ - $S_2$  平面上的所有偏光狀態均為線偏振光，只是每一點的方位角不同，在邦加球的兩極分別是右旋和左旋偏振光，其它位置點皆為橢圓偏振光。

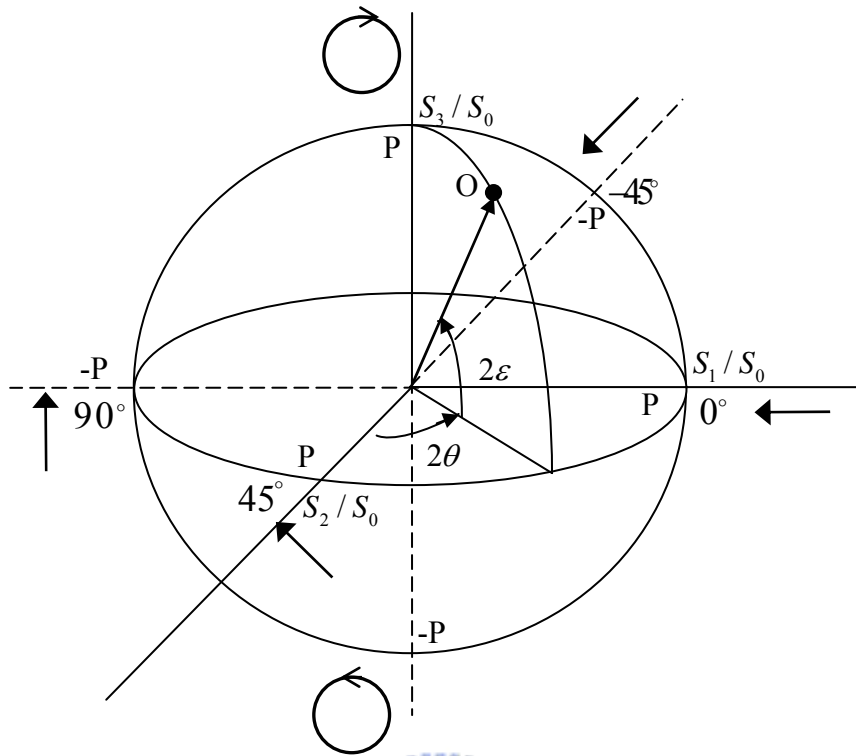


圖 2-6 邦加球 (Poincare Sphere)





## 2.4 扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 的穆勒矩陣 [5]

扭轉式液晶盒如圖 2-7 所示，上下層液晶分子各受到上下層玻璃基板表面錨定力的作用，會傾向平行於配向膜方向 (easy direction) 作排列，而介於其間的液晶分子指向分布，根據彈性連體理論 [3] (Elastic Continuum Theory) 需滿足總自由能為極小值，根據理論推導，液晶分子將沿著垂直玻璃基板方向作線性的扭轉分布。

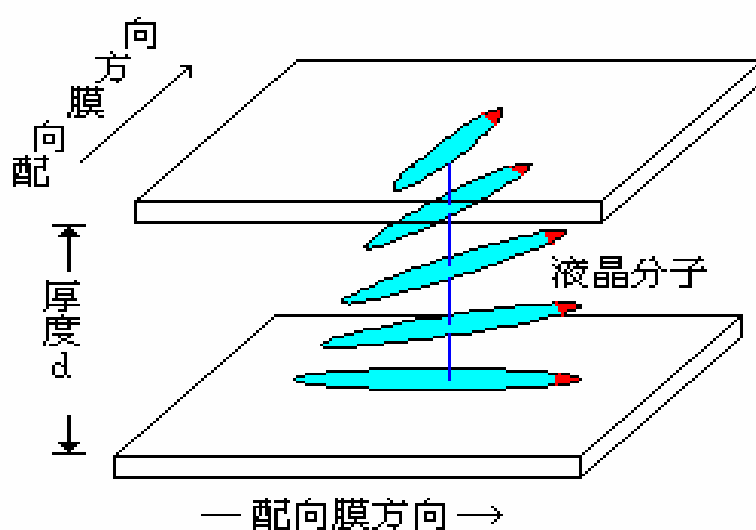


圖 2-7 扭轉式液晶盒示意圖

根據 Yeh [5] 對於扭轉式液晶盒的計算，是將液晶盒在垂直基板方向作  $N$  層的切割，當  $N$  極大時，可將每一層看作是一個線性雙折射效應 (Linear Birefringence—LB) 結構，整個樣本可看成多層 LB 結構的疊加。推倒如下：

首先需定義扭轉式液晶盒的光學參數；令  $\Phi$  為液晶樣本的扭轉角， $\alpha$  為液晶分子扭轉角度的變化斜率， $d$  為液晶樣品的總厚度。

$$\Phi = \alpha \cdot d \quad (2-21)$$

$\Gamma$  為液晶樣品無扭轉行為時的總相位變化， $\lambda$  表示入射光的波長，且  $\Delta n = n_e - n_o$ 。

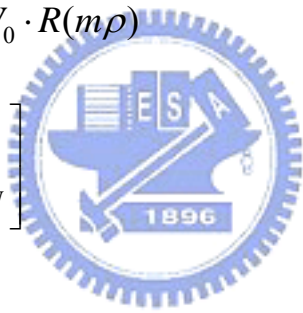
$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n \cdot d \quad (2-22)$$

因為考慮  $N$  層的結合，每層的相位延遲為  $\frac{\Gamma}{N}$ ，而各層 LB 的光軸方位角為  $\rho$ 、 $2\rho$ 、 $3\rho$ 、……、 $(N-1) \cdot \rho$ ； $\rho = \frac{\Phi}{N}$ ，將各層矩陣依序作矩陣運算，如式(2-23)  $M$  所示：

$$M = W_N \cdot W_{N-1} \cdots W_3 \cdot W_2 \cdot W_1 = \prod_{m=1}^N W_m$$

$$= \prod_{m=1}^N R(-m\rho) \cdot W_0 \cdot R(m\rho) \quad (2-23)$$

其中  $W_0 = \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2N} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2N} \end{bmatrix}$



$M$  可以簡化如下：

$$M = R(-\Phi) \cdot \left[ W_0 \cdot R\left(\frac{\Phi}{N}\right) \right]^N$$

$$= R(-\Phi) \begin{bmatrix} \cos \frac{\Phi}{N} \cdot e^{-i\Gamma/2N} & \sin \frac{\Phi}{N} \cdot e^{-i\Gamma/2N} \\ -\sin \frac{\Phi}{N} \cdot e^{i\Gamma/2N} & \cos \frac{\Phi}{N} \cdot e^{-i\Gamma/2N} \end{bmatrix}^N \quad (2-24)$$

當  $N$  趨近無窮大，藉由 Chebyshev's identity (附錄 A)，則式 (2-24) 可簡化為：

$$M = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi - i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} & \Phi \frac{\sin \chi}{\chi} \\ -\Phi \frac{\sin \chi}{\chi} & \cos \chi + i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

其中  $\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

上述的推導是將液晶盒的第一層液晶錨定方向假設在零度，本論文實驗的目的也包括找出第一層液晶錨定方向，因此我們對式(2-25)的矩陣作座標轉換，考慮一參數 ( $\alpha$ ) 來代表第一層液晶錨定方向，則包含方位角的液晶盒矩陣可寫為：

$$M_{azi} = R(-\alpha) \cdot M \cdot R(\alpha) \quad (2-26)$$

其中  $R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

將式(2-26) 轉換成穆勒矩陣 ( $M_{LC}$ ) 來表示

$$M_{LC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

其中

$$m_{22}(\Gamma, \Phi, \alpha) = \frac{2 \cdot \cos(2\Phi) \cdot (-\Phi^2 + \chi^2 + \cos(2\chi) \cdot (\Phi^2 + \chi^2))}{4\chi^2} + \frac{\Gamma^2 \cdot \cos(4\alpha + 2\Phi) \cdot \sin^2(\chi) + 4\Phi \cdot \chi \cdot \sin(2\chi) \cdot \sin(2\Phi)}{4\chi^2} \quad (2-28a)$$

$$\begin{aligned}
m_{23}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= \frac{(\sin(2\Phi) \cdot (2\Phi^2 - 2\chi^2 - 2\cos(2\chi) \cdot (\Phi^2 + \chi^2)))}{4\chi^2} \\
&+ \frac{(\sin(2\Phi) \cdot (\Gamma^2 \cdot \cos(4\alpha) \cdot \sin^2(\chi))}{4\chi^2} \\
&+ \frac{\cos(2\Phi) \cdot (\Gamma^2 \cdot \sin(4\alpha) \cdot \sin^2(\chi) + 4\Phi \cdot \chi \cdot \sin(2\chi))}{4\chi^2} \quad (2-28b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{24}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= \frac{\Gamma \cdot \sin(\chi) \cdot (\sin(2(\alpha + \Phi) - \chi) \cdot (\Phi + \chi))}{2\chi^2} \\
&+ \frac{\sin(2(\alpha + \Phi) + \chi) \cdot (-\Phi + \chi)}{2\chi^2} \quad (2-28c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{32}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= \frac{((\Phi + \chi)^2 \cdot \sin(2(\Phi - \chi)) + \Gamma^2 \cdot \cos(2\Phi) \cdot \sin(4\alpha) \cdot \sin^2(\chi))}{4\chi^2} \\
&+ \frac{\sin(2\Phi) \cdot (-2\Phi^2 + 2\chi^2 + \Gamma^2 \cdot \cos(4\alpha) \cdot \sin^2(\chi))}{4\chi^2} \\
&+ \frac{\sin(2(\Phi + \chi)) \cdot (\Phi - \chi)^2}{4\chi^2} \quad (2-28d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{33}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= \frac{2 \cdot \cos(2\Phi) \cdot (-\Phi^2 + \chi^2 + \cos(2\chi) \cdot (\Phi^2 + \chi^2))}{4\chi^2} \\
&- \frac{\Gamma^2 \cdot \cos(4\alpha + 2\Phi) \cdot \sin^2(\chi) + 4\Phi \cdot \chi \cdot \sin(2\chi) \cdot \sin(2\Phi)}{4\chi^2} \quad (2-28e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{34}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= -\frac{\Gamma \cdot (2\Phi \cdot \sin(2(\alpha + \Phi)) \cdot \sin^2(\chi))}{2\chi^2} \\
&- \frac{\Gamma \cdot (\chi \cdot \cos(2(\alpha + \Phi)) \cdot \sin(2\chi))}{2\chi^2} \quad (2-28f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{42}(\Gamma, \Phi, \alpha) &= -\frac{\Gamma \cdot \sin^2(\chi) \cdot (\chi \cdot \cos(\chi) \cdot \sin(2\alpha))}{\chi^2} \\
&- \frac{\Gamma \cdot \sin^2(\chi) \cdot (\Phi \cdot \cos(2\alpha) \cdot \sin(\chi))}{\chi^2} \quad (2-28g)
\end{aligned}$$

$$m_{43}(\Gamma, \Phi, \alpha) = \frac{\Gamma \cdot (-2\Phi \cdot \sin(2\alpha) \cdot \sin^2(\chi) + \chi \cdot \cos(2\alpha) \cdot \sin(2\chi))}{2\chi^2} \quad (2-28h)$$

$$m_{44}(\Gamma, \Phi, \alpha) = \frac{-\Gamma^2 + 4(\Phi^2 + \chi^2) + (\Gamma^2 - 4\Phi^2 + 4\chi^2) \cdot \cos(2\chi)}{8\chi^2} \quad (2-28i)$$

$$\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

扭轉式液晶盒穆勒矩陣 ( $M_{LC}$ ) 內的各元素 ( $m_{22}$ 、 $m_{23}$ 、 $m_{24}$ 、 $m_{32}$ 、 $m_{33}$ 、 $m_{34}$ 、 $m_{42}$ 、 $m_{43}$ 、 $m_{44}$ ) 皆為相位延遲 ( $\Gamma$ )、扭轉角 ( $\Phi$ )、第一層液晶錨定方向 ( $\alpha$ ) 的函數。

今假設一雷射光先經過透光軸方位角為  $P$  的偏光片，再經過一未知樣本，如圖 2-8：

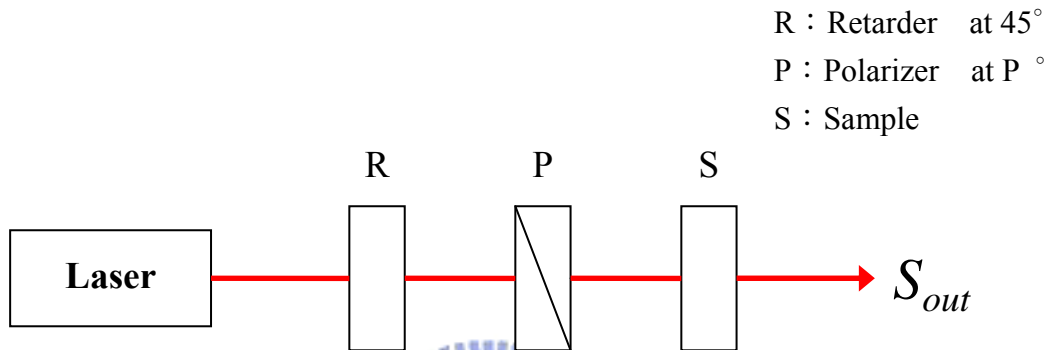


圖 2-8 方位角  $P$  的線性偏振光通過待測樣本

利用矩陣運算可算出出射光史托克向量 ( $S_{out}$ ) 和未知樣本穆勒矩陣 ( $M_{unk}$ ) 的理論關係式：

$$S_{out} = M_{unk} \cdot M_{pol} \cdot I_{in} \quad (2-29)$$

其中  $I_{in} = \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M_{pol} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{unk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

所以

$$S_{out} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ m_{22} \cdot \cos 2P + m_{23} \cdot \sin 2P \\ m_{32} \cdot \cos 2P + m_{33} \cdot \sin 2P \\ m_{42} \cdot \cos 2P + m_{43} \cdot \sin 2P \end{bmatrix}$$

$$= \frac{I_0}{2} \left( \cos 2P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix} + \sin 2P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \end{bmatrix} \right) \quad (2-30)$$

由式(2-30)，可看出出射光史托克向量 ( $S_{out}$ ) 和樣本穆勒矩陣

( $M_{unk}$ ) 各元素的關係，出射光史托克向量 ( $S_{out}$ ) 可看成  $\begin{bmatrix} 1 \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix}$  及

$\begin{bmatrix} 1 \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \end{bmatrix}$  兩向量的線性組合，兩向量貢獻程度，可用起偏片方位角  $P$

來調變：

當  $P = 0^\circ$  ;  $P = 45^\circ$

$$S_{out} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix} \quad S_{out} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \end{bmatrix}$$

若我們能測量出射光的史托克參數，藉由改變  $P$  角，便能找出待測樣本穆勒矩陣的六個元素 ( $m_{22}$ 、 $m_{32}$ 、 $m_{42}$ 、 $m_{23}$ 、 $m_{33}$ 、 $m_{43}$ )，再利用扭轉式液晶盒理論矩陣式(2-28) 進一步找出樣本參數  $(\Gamma, \Phi, \alpha)$ 。



## 2.5 光彈調變器 (PhotoElastic Modulator-PEM)

圖 2-9 為 Hinds PEM-90 的外觀



圖 2-9 Hinds PEM-90 外觀及功能介紹

在控制面板上設定相位調變振幅  $\Delta_p$  的大小及入射光波長，經計算後，控制面板將適當的信號傳入高壓驅動器產生交流高壓以驅動光學頭作相位變化。光學頭由  $\text{CaF}_2$  晶體及一壓電晶體 (Quartz) 所組成，壓電晶體在交流高壓的作用下產生震盪，擠壓相黏的  $\text{CaF}_2$  晶體，當  $\text{CaF}_2$  晶體受到外加應力作用會在特定方向產生 LB 效應。此機型的震盪頻率固定為 51kHz。

因此，PEM 可視為一個隨時變的相位延遲片 (Phase retarder)，其相位延遲 ( $\Delta_p$ ) 會隨著時間做角頻率為  $\omega$  的弦波變化：

$$\Delta_p = 2\pi \cdot \delta_0 \sin \omega t \quad (2-31)$$

PEM 的穆勒矩陣如下：(實驗中 PEM 光軸固定於 0 度)

$$M_{PEM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & -\sin \Delta_p \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{bmatrix} \quad (2-32)$$



式(2-32) 為理想的 PEM 穆勒矩陣，在我們實驗過程中發現實際上 PEM 並非理想，因此我們引入一個參數  $\Delta_I$  (內稟相位延遲) 來解釋實驗上所看到的不理想。我們假設 PEM 相位延遲除了時變項 ( $\Delta_p = 2\pi \cdot \delta_0 \sin \omega t$ ) 外，還帶有一非時變項的相位延遲  $\Delta_I$  (內稟相位延遲)，修正後的穆勒矩陣如下：

$$M_{PEM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p' & -\sin \Delta_p' \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p' & \cos \Delta_p' \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

其中  $\Delta_p' = \Delta_I + \Delta_p$



## 2.6 利用 PEM 量測史托克參數

我們利用光彈調變器及析光片 (PEM-A) 的架構來量測史托克參數，如圖 2-10：

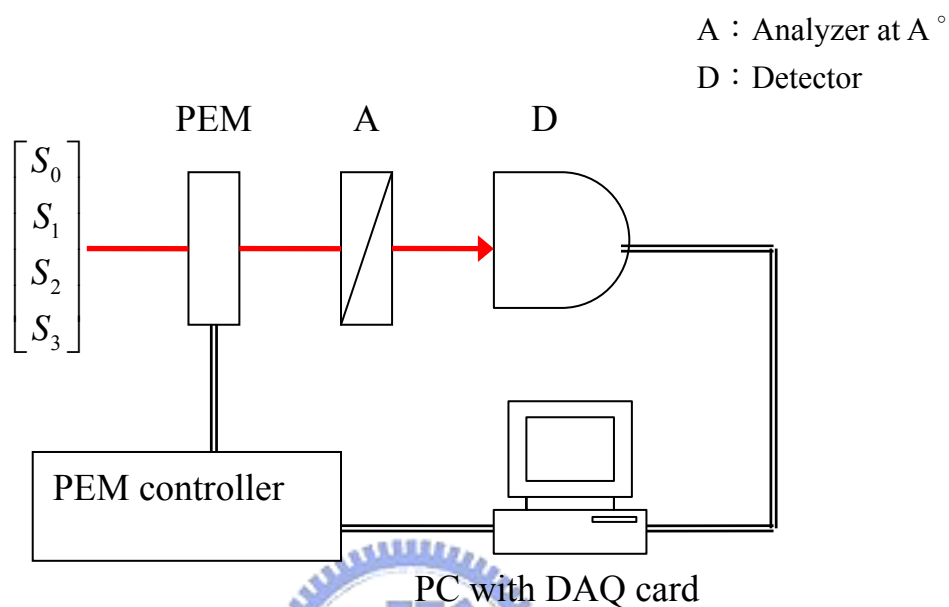


圖 2-10 利用光彈調變器及析光片架構量測史托克參數系統架構圖

如圖 2-10，一個未知偏振態的純偏振光 ( $S_{in}$ ) 通過光彈調變器  $M_{pem}(\Delta_p)$ ，再經過析光片  $M_{ana}(A)$ ，出射光的史托克向量 ( $S_{out}$ ) 我們可以表示為。

$$S_{out} = \begin{bmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} = M_{ana}(A) \cdot M_{pem}(\Delta_p) \cdot S_{in} \quad (2-34)$$

其中  $S_{in} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$

$$M_{pem}(\Delta_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & -\sin \Delta_p \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{bmatrix}$$

$$M_{ana}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2A & \sin 2A & 0 \\ \cos 2A & \cos^2 2A & \sin 2A \cos 2A & 0 \\ \sin 2A & \sin 2A \cos 2A & \sin^2 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

經運算可得出射光的史托克向量 ( $S_{out}$ ) 理論式，光偵測器只能紀錄出射光的光強度 ( $I_{out}$ )，因此我們只看  $S_{out}$  的第一項：

$$I_{out} = S_0' = \frac{1}{2} (S_0 + S_1 \cdot \cos(2A) + S_2 \cdot \sin(2A) \cdot \cos(\Delta_p)) - \frac{1}{2} (S_3 \cdot \sin(2A) \cdot \sin(\Delta_p)) \quad (2-35)$$

其中  $\Delta_p = 2\pi \cdot \delta_0 \sin \omega t$

$\Delta_p$  的週期性變化，使得出射光強 ( $I_{out}$ ) 也有週期性的改變。我們嘗試對出射光強 ( $I_{out}$ ) 作傅立葉分析。

利用傅立葉貝索展開 (Fourier Bessel Expansion) 可以得到以下的關係式：

$$\sin(2\pi \cdot \delta_0 \sin \omega t) = 2J_1(2\pi \cdot \delta_0) \sin \omega t + 2J_3(2\pi \cdot \delta_0) \sin 3\omega t + \dots \quad (2-36a)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \cdot \delta_0 \sin \omega t) &= J_0(2\pi \cdot \delta_0) + 2J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cos 2\omega t \\ &+ 2J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cos 4\omega t + \dots \quad (2-36b) \end{aligned}$$

將式(2-36) 代回式(2-35)，經整理可得各倍頻訊號強度為：

$$I_{DC} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cdot \cos(2A) + S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)) \quad (2-37a)$$

$$I_{1f} = -S_3 \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-37b)$$

$$I_{2f} = S_2 \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-37c)$$

$$I_{3f} = -S_3 \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-37d)$$

$$I_{4f} = S_2 \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-37e)$$

藉由各倍頻優化法 (章節 2.8) 我們可將各倍頻變為：

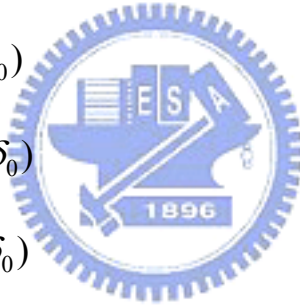
$$I_{DC}'' = \frac{1}{2} \sqrt{(S_1^2 + (S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0))^2)} \quad (2-38a)$$

$$I_{1f}'' = |S_3| \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \quad (2-38b)$$

$$I_{2f}'' = |S_2| \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \quad (2-38c)$$

$$I_{3f}'' = |S_3| \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \quad (2-38d)$$

$$I_{4f}'' = |S_2| \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \quad (2-38e)$$



將優化後的各倍頻作簡單的運算即可求得入射光的史托克參數

$(S_0、S_1、S_2、S_3)$ 。

由式(2-38a)、(2-38b)、(2-38c)

$$|S_1| = \sqrt{(2I_{DC})^2 - \left(\frac{I_{2f} \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0)}{J_2(2\pi \cdot \delta_0)}\right)^2} \quad (2-39a)$$

$$|S_2| = \frac{I_{2f}}{J_2(2\pi \cdot \delta_0)} \quad (2-39b)$$

$$|S_3| = \frac{I_{1f}}{J_1(2\pi \cdot \delta_0)} \quad (2-39c)$$

$$S_0 = \sqrt{|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2} \quad (2-39d)$$

$|S_1|$ 、 $|S_2|$ 、 $|S_3|$  的正負號，我們可從原始資料中確定。將  $\delta_0$  代入即可求得 ( $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ )。實際量測時，我們發現實際  $\delta_0$  跟面板上所顯示的值有出入，利用以下運算，可求得實際  $\delta_0$ 。

由式(2-38b)、(2-38c)、(2-38d) 及 (2-38e)

$$\frac{I_{1f}}{I_{3f}} = \frac{J_1(2\pi \cdot \delta_0)}{J_3(2\pi \cdot \delta_0)} \quad (2-40a)$$

$$\frac{I_{2f}}{I_{4f}} = \frac{J_2(2\pi \cdot \delta_0)}{J_4(2\pi \cdot \delta_0)} \quad (2-40b)$$

即可求出  $\delta_0$ 。我們撰寫 MatLAB 程式將倍頻訊號轉換為入射光的史托克參數 ( $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ )，詳見附錄 B。

以上推導皆假設 PEM 為理想，根據章節 2.5 我們提出了一個新參數  $\Delta_I$  (內稟相位延遲) 來解釋 PEM 的不理想，若考慮  $\Delta_I$ ，利用式(2-39) 所算出的入射光史托克參數 ( $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ )，跟實際入射光史托克參數 ( $S_{0act}$ 、 $S_{1act}$ 、 $S_{2act}$ 、 $S_{3act}$ ) 有些許差異，其關係式為：

$$S_0 = S_{0act} \quad (2-41a)$$

$$S_1 = S_{1act} \quad (2-41b)$$

$$S_2 = S_{2act} \cdot \cos(\Delta_I) - S_{3act} \cdot \sin(\Delta_I) \quad (2-41c)$$

$$S_3 = S_{3act} \cdot \cos(\Delta_I) + S_{2act} \cdot \sin(\Delta_I) \quad (2-41d)$$

實驗前，我們先做校正工作，找出  $\Delta_I$  的值，量測時便利用  $\Delta_I$  將結果修正回來。



## 2.7 $\Delta_I$ 校正

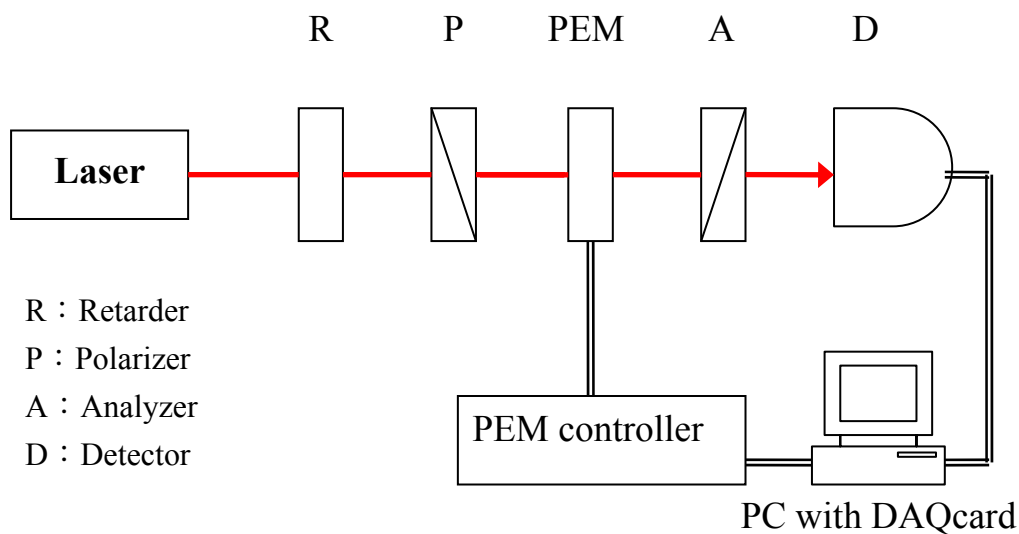


圖 2-11 校正  $\Delta_I$  的實驗架構圖

校正  $\Delta_I$  的實驗架構如圖 2-11；我們利用 PEM-A 架構量測雷射光通過偏光片後的光偏振態。經由矩陣運算雷射通過偏光片後的光偏振態 ( $S_{act}$ ) 為：

$$S_{act} = \begin{bmatrix} S_{0act} \\ S_{1act} \\ S_{2act} \\ S_{3act} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_0 \cdot \cos 2P \\ I_0 \cdot \sin 2P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

根據 (章節 2.6) 式(2-41)，實際光偏振態 ( $S_{act}$ ) 和 PEM-A 架構所量得的光偏振態 ( $S$ ) 有以下關係：

$$S_0 = S_{0act} \quad (2-43a)$$

$$S_1 = S_{1act} \quad (2-43b)$$

$$S_2 = S_{2act} \cdot \cos(\Delta_I) - S_{3act} \cdot \sin(\Delta_I) \quad (2-43c)$$

$$S_3 = S_{3act} \cdot \cos(\Delta_I) + S_{2act} \cdot \sin(\Delta_I) \quad (2-43d)$$

將式(2-42) 代入式(2-43) 可得

$$S_0 = I_0 \quad (2-44a)$$

$$S_1 = I_0 \cdot \cos 2P \quad (2-44b)$$

$$S_2 = I_0 \cdot \sin 2P \cdot \cos(\Delta_I) \quad (2-44c)$$

$$S_3 = I_0 \cdot \sin 2P \cdot \sin(\Delta_I) \quad (2-44d)$$

利用式(2-44)

$$\frac{S_3}{S_2} = \tan(\Delta_I)$$

$$\Delta_I = \tan^{-1}\left(\frac{S_3}{S_2}\right) \quad (2-45)$$





## 2.8 各倍頻優化法 [8]

根據章節 2.6 式(2-37)

$$I_{DC} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cdot \cos(2A) + S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)) \quad (2-46a)$$

$$I_{1f} = -S_3 \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-46b)$$

$$I_{2f} = S_2 \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-46c)$$

$$I_{3f} = -S_3 \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-46d)$$

$$I_{4f} = S_2 \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A) \quad (2-46e)$$

各倍頻皆為析光片方位角  $A$  的函數。我們旋轉析光片從  $0^\circ \sim 180^\circ$  每  $15^\circ$  取一次值，比較實驗所量得倍頻訊號與理論圖形，如圖 2-12：

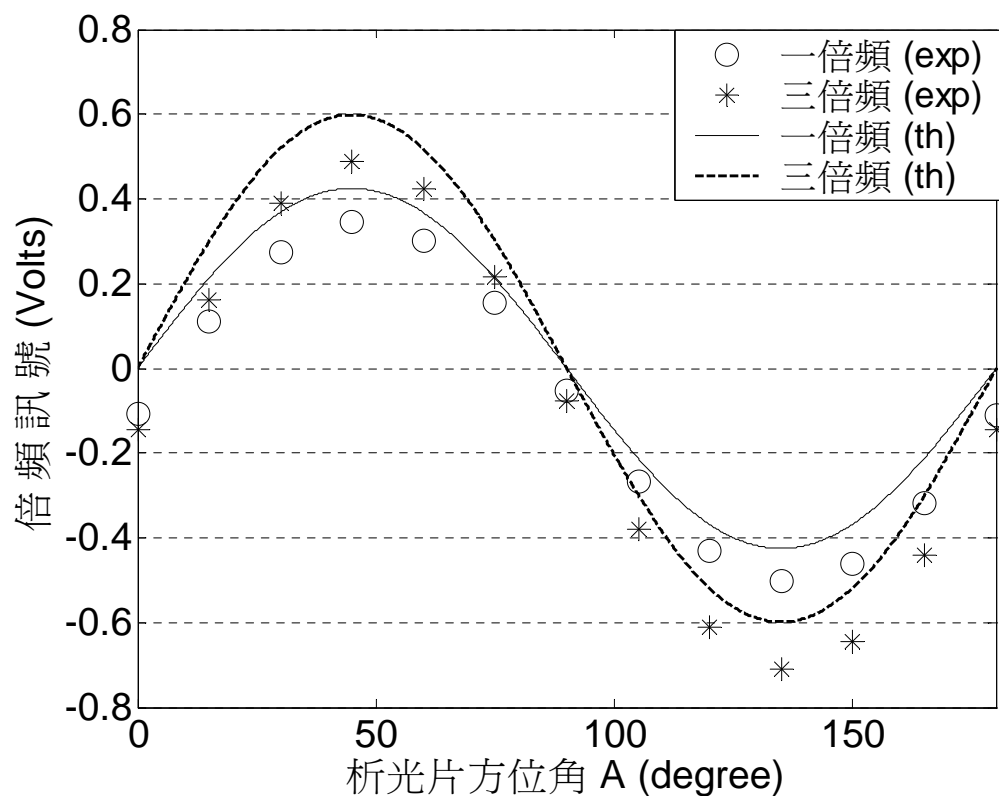


圖 2-12 倍頻訊號與析光片方位角關係圖

從理論式來看一、三倍頻對析光角應該是弦波函數的變化，比較實驗數據點與理論圖形，我們發現兩個不理想的地方；數據點分別在上下及左右有平移的現象，我們將理論式改寫如下：

$$I_{DC} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cdot \cos(2(A + \delta A)) + S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)))$$

+DC系統誤差項 (2-47a)

$$I_{1f} = -S_3 \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) + 1f \text{系統誤差項} \quad (2-47b)$$

$$I_{2f} = S_2 \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) + 2f \text{系統誤差項} \quad (2-47c)$$

$$I_{3f} = -S_3 \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) + 3f \text{系統誤差項} \quad (2-47d)$$

$$I_{4f} = S_2 \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) + 4f \text{系統誤差項} \quad (2-47e)$$

我們引用了  $\delta A$  和各倍頻系統誤差項來解釋實驗數據的不理想，為了消除  $\delta A$  和各倍頻系統誤差項我們提出以下的優化方法：

首先，利用  $A=0^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $120^\circ$  消除系統誤差項：

$$I_{DC}'(A) = I_{DC}(A) - \frac{I_{DC}(0^\circ) + I_{DC}(60^\circ) + I_{DC}(120^\circ)}{3}$$

$$= \frac{1}{2}(S_1 \cdot \cos(2(A + \delta A)) + S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A))) \quad (2-48a)$$

$$I_{1f}'(A) = I_{1f}(A) - \frac{I_{1f}(0^\circ) + I_{1f}(60^\circ) + I_{1f}(120^\circ)}{3}$$

$$= -S_3 \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) \quad (2-48b)$$

$$I_{2f}'(A) = I_{2f}(A) - \frac{I_{2f}(0^\circ) + I_{2f}(60^\circ) + I_{2f}(120^\circ)}{3}$$

$$= S_2 \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A)) \quad (2-48c)$$

$$\begin{aligned}
I_{3f}'(A) &= I_{3f}(A) - \frac{I_{3f}(0^\circ) + I_{3f}(60^\circ) + I_{3f}(120^\circ)}{3} \\
&= -S_3 \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A))
\end{aligned} \tag{2-48d}$$

$$\begin{aligned}
I_{4f}'(A) &= I_{4f}(A) - \frac{I_{4f}(0^\circ) + I_{4f}(60^\circ) + I_{4f}(120^\circ)}{3} \\
&= S_2 \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2(A + \delta A))
\end{aligned} \tag{2-48e}$$

再利用  $A=0^\circ$ 、 $45^\circ$  消除  $\delta A$

$$\begin{aligned}
I_{DC}'' &= \sqrt{I_{DC}'(0^\circ)^2 + I_{DC}'(45^\circ)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(S_1^2 + (S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0))^2)}
\end{aligned} \tag{2-49a}$$

$$I_{1f}'' = \sqrt{I_{1f}'(0^\circ)^2 + I_{1f}'(45^\circ)^2} = |S_3| \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \tag{2-49b}$$

$$I_{2f}'' = \sqrt{I_{2f}'(0^\circ)^2 + I_{2f}'(45^\circ)^2} = |S_2| \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \tag{2-49c}$$

$$I_{3f}'' = \sqrt{I_{3f}'(0^\circ)^2 + I_{3f}'(45^\circ)^2} = |S_3| \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \tag{2-49d}$$

$$I_{4f}'' = \sqrt{I_{4f}'(0^\circ)^2 + I_{4f}'(45^\circ)^2} = |S_2| \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \tag{2-49e}$$

得到 (章節 2.6) 所引述的結果式(2-38)。

為了驗證此優化步驟是否有效，我們比較優化前和優化後實驗數據  $I_{1f}/I_{3f}$  對  $A$  的關係圖 2-13：

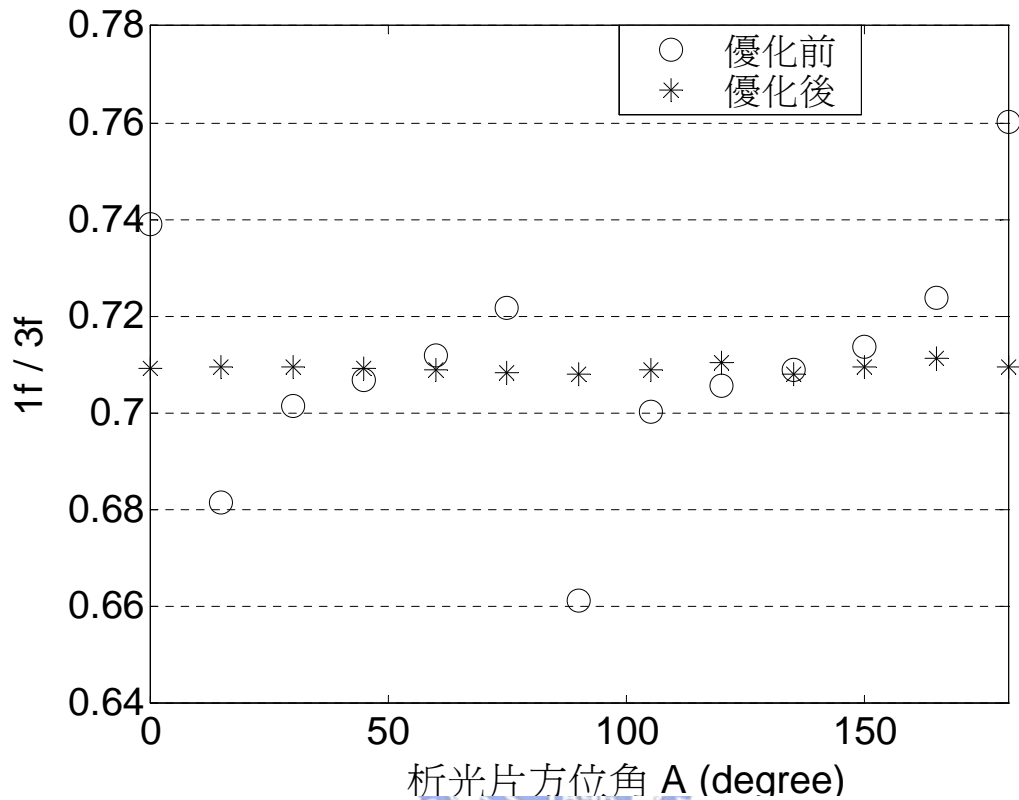


圖 2-13 優化前及優化後  $I_{1f}/I_{3f}$  對析光片方位角的關係圖

根據理論式， $I_{1f}/I_{3f}$  應該為與  $A$  無關的常數，由圖 2-13 可看出此優化法的確有效。我們撰寫 MatLAB 程式作此優化步驟，詳見附錄 B。

## 第三章 樣品製作與實驗架構

### 3.1 扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 製作 [9]

#### (1) 清洗玻璃

1. 本實驗我們使用 ITO 玻璃 (用於磨刷的基板)。將所要使用的玻璃切割為 10×15 mm。
2. 將玻璃放入燒杯內，加入中性玻璃清潔劑，在加水蓋過玻璃，將燒杯放入超音波機器中用超音波清洗 10 分鐘。
3. 將玻璃從原有燒杯中拿出，用去離子水 (DI water) 將玻璃沖洗乾淨，放入加有丙酮 (Acetone) 的燒杯內，將燒杯放入超音波機器中用超音波震盪清洗 10 分鐘，將丙酮回收以免污染。
4. 將玻璃從原有燒杯中拿出，用去離子水 (DI water) 將玻璃沖洗乾淨，放入加有甲醇 (Methyl Alcohol) 的燒杯內，將燒杯放入超音波機器中用超音波震盪清洗 10 分鐘，將丙酮回收以免污染。
5. 將玻璃從原有燒杯中拿出，用去離子水 (DI water) 將玻璃沖洗乾淨，放入加有去離子水 (DI water) 的燒杯內，將燒杯放入超音波機器中用超音波震盪清洗 10 分鐘。
6. 將玻璃從原有燒杯中拿出，再以去離子水沖洗，並使用氮氣吹乾，放入烤箱中烤乾，冷卻備用。(清洗完成的玻璃必須在一天內上完配向劑，以免玻璃被污染，配向劑無法附著上。)

#### (2) 磨刷配向基板之製作

1. 本實驗所使用的磨刷配向劑為 Nissan 的 SE-130B 配向劑。
2. 將 SE-130B 由冰箱中取出，待其回復到室溫再行使用。

3. 將清洗後的 ITO 玻璃放於旋轉塗佈機 (spin-coater)(半導體製程中上光阻的機器) 上。
4. 用微量滴管取 SE-130B 滴數滴在 ITO 玻璃的 ITO 面上，旋轉分為兩步驟，條件分別為第一步 2000 rpm (15 sec) ，第二步 4000 rpm (25 sec) 。
5. 將玻璃取下平放於加熱板上預熱 5 分鐘。
6. 將鍍好磨刷配向劑的玻璃放入已預熱到 120°C 的烤箱中烤 30 分鐘，接著升溫到 180°C ，等到烤箱溫度到 180°C ，再繼續烤 30 分鐘。
7. 硬烤完成後，將玻璃取出放入培養皿中，冷卻備用。
8. 將冷卻後的玻璃基板以適當的方位角 (可用來控制 TN-LC cell 的扭轉角度) 放上磨刷機器進行磨刷。(※注意：磨刷平台移動的速度和磨刷布旋轉的速度要保持一定，不然配向效果會不同)
9. 磨刷完成後，記錄磨刷方向備用。

### (3) 夾製液晶盒

1. 選取兩片磨刷完成的玻璃基板，將鍍有配向膜的那面相對，如下頁圖 3-1：
2. 將預先切割好的聚酯薄膜 (mylar) ，放於兩玻璃基板中間，作為間隙物 (spacer) ，液晶盒上下基板間距 (d) 可由間隙物的薄厚來控制，本實驗所採用的間隙物為 6 $\mu$ m 的聚酯薄膜。(※注意：聚酯薄膜的大小須配合玻璃基板的尺寸，其形狀近似口字型，使液晶盒中產生一空腔)

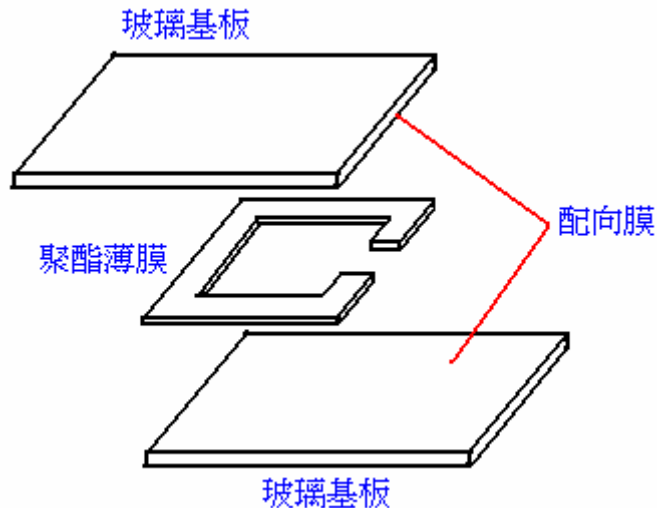


圖 3-1 液晶盒夾製示意圖

3. 以長尾夾將樣本夾緊固定，用 ab 膠將樣本側邊封填，留下一缺口以便日後注入液晶，靜置一天，待 ab 膠固化。
4. 靜置一天後，將長尾夾取下，此即為空樣品，雖然我們使用已知厚度的聚酯薄膜作為間隙物，不過真正的樣品厚度與間隙物厚度有所誤差，因此必須量測實際的樣品厚度。我們利用不同入射角穿透光強度變化 [10]，來量取實際樣品厚度。

#### (4) 注入液晶

1. 將空樣品放進真空腔中，滴適量的液晶在預留的缺口處，抽真空。(※注意：抽真空的速率不要太快，以避免缺口處的液晶會噴出)
2. 當真空腔飽和後，停止抽真空，微開洩氣伐，以緩慢的速率破真空，缺口處的液晶受到外界氣壓的推擠，會漸漸注入樣本空腔。
3. 破真空完成後，觀察樣本空腔內是否注滿液晶，若還有氣泡存在，可重複上一個步驟，直到空腔內注滿液晶。

4. 完成後。將缺口以 ab 膠封填，TN-LC cell 完成。(※注意：預設樣本扭曲角的大小可利用上下玻璃基板的相對方位角配合磨刷方向來控制)
5. 樣本的均勻性，可將樣本置於交叉偏光片 (cross polarizer) 中間觀察。





## 3.2 實驗架構

實驗架構如圖 3-2：

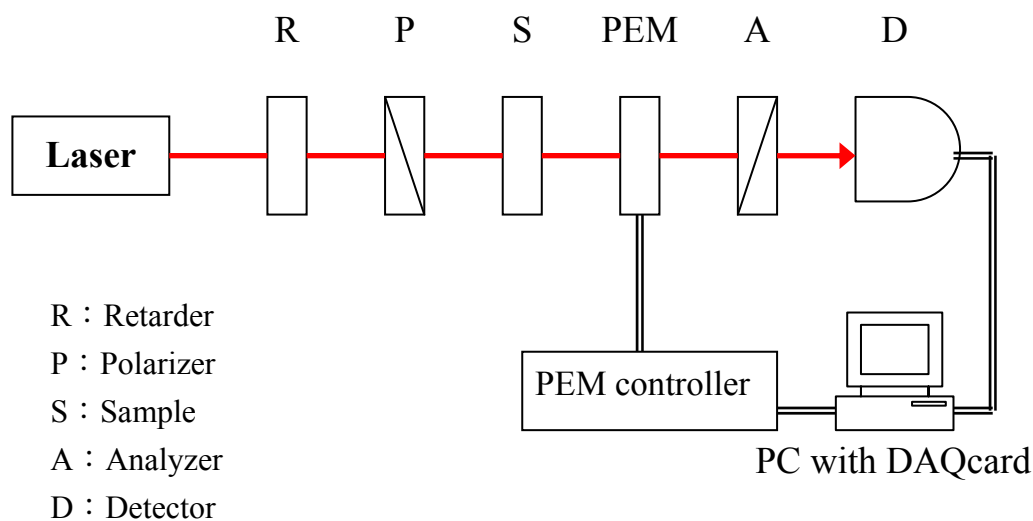


圖 3-2 光彈調變式橢圓偏光儀

各元件規格如下：

雷射光源： He-Ne Laser： Melles Griot laser 10mw

起偏片及析光片： Melles Griot 03FPG sheet polarizer  
of extinction ratio  $10^{-4}$

光偵測器： Thorlabs PDA55 silicon pin diode

Spectral Range： 400-1100nm

數據擷取卡 DAQ (Data Acquisition)： NI PCI-6115

光彈調變器： Hinds PEM-90

雷射光通過起偏片再通過待測樣本，產生史托克參數為 ( $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ ) 的偏振光，藉由 PEM-A 架構，此偏振態資訊會呈現在周期性出射光強的各倍頻訊號中。利用數據擷取卡將偵測到的光強度擷取下來，利用撰寫好的 LabVIEW 程式分析出各倍頻訊號並存檔。

下圖 3-3 為實驗步驟流程圖：



圖 3-3 實驗步驟流程圖

## 第四章 實驗結果

根據以上對 TN-LC cell 穆勒矩陣的了解，我們要量測的參數有三：液晶樣品無扭轉行為時的總相位延遲 ( $\Gamma$ )、扭轉角度 ( $\Phi$ )、第一層液晶錨定方向 ( $\alpha$ )。

### 4.1 系統校正

我們將藉由量測已知樣本做系統校正，根據樣本實驗值與理論值的差異，逐一考慮各誤差項找出其大小，修正實驗值與理論值的不吻合。



### 4.1.1 PEM 內稟相位延遲 $\Delta_l$ 校正

首先，我們不放樣本，假設 PEM 模型矩陣為理想 (式 2-32)，觀察旋轉起偏片所產生的出射光偏振態變化，實驗數據如圖 4-1 數據點 (exp)。根據理論推導，任何偏振態的入射光穿過一偏振片，其出射光偏振態皆為線性，旋轉起偏片僅改變其偏振方向，因此出射光偏振態理論圖形 (th) 應如圖 4-1 曲線圖形。

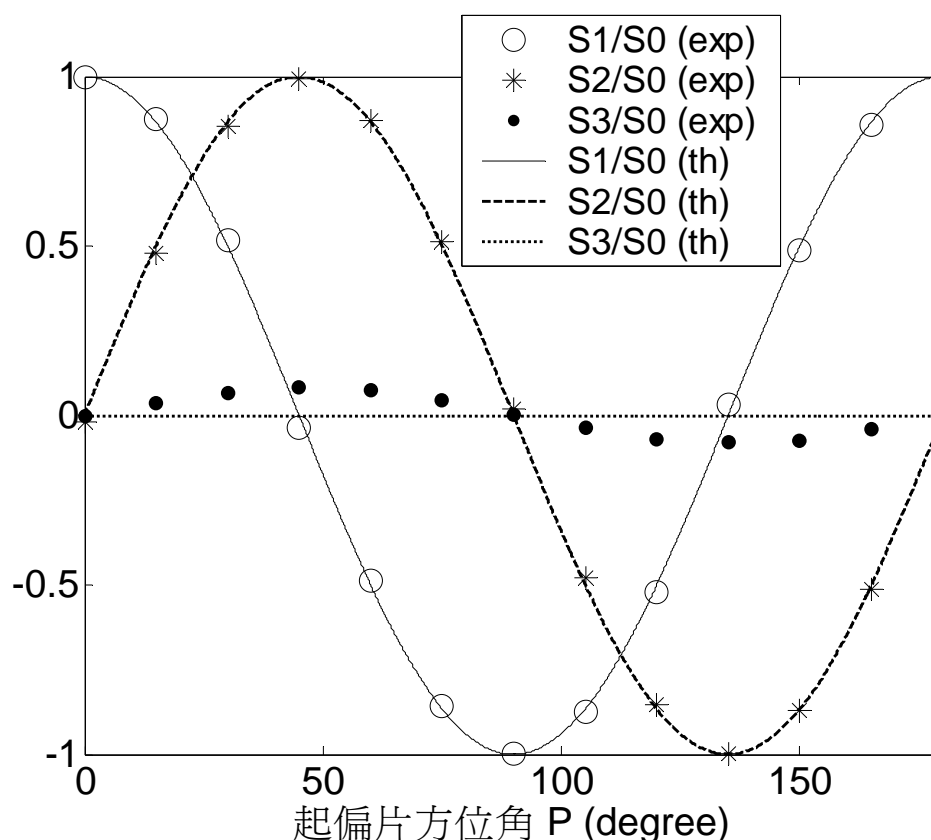


圖 4-1 不放樣本時，考慮 PEM 為理想矩陣的實驗數據 (exp) 與理論圖形

很明顯看出實驗 (exp) 跟理論 (th) 差異，尤其是  $S_3/S_0$ ，根據理論，在不同起偏片方位角 ( $P$ )， $S_3/S_0$  應皆為零；在實際量測數據中卻發現明顯變化。我們考慮到 PEM 矩陣模型的不理想，引入一個參數  $\Delta_l$  (內稟相位延遲)(式 2-33) 來解釋實驗上所看到  $S_3/S_0$  的變化，並利用章節 2.7 的方法，將  $\Delta_l$  量化，結果為

$\Delta_l = 4.8^\circ \pm 0.3^\circ$ ，圖 4-2 為考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$  所得到的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)：

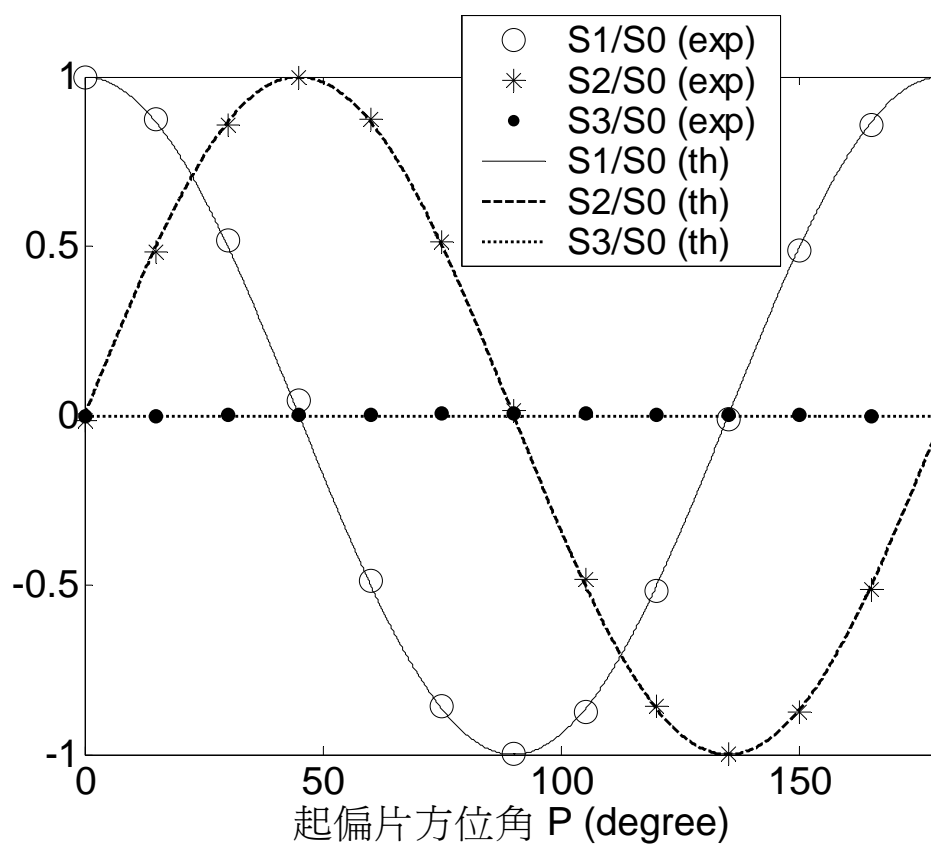


圖 4-2 不放樣本時，考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$  的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

由圖可看出考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$  的實驗數據和理論圖形相當吻合，我們藉由量測空樣本找出了 PEM 內稟相位延遲  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 。

## 4.1.2 起偏片誤差角 $\delta P$ 校正

根據章節 2.4 TN-LC cell 理論矩陣，當扭轉角度 ( $\Phi$ ) 為零時，TN-LC cell 理論矩陣同等於一個延遲片，此矩陣模型也適用於延遲片，因此，我們藉由量測四分之一波長延遲片 (quarter wave plate) 作系統校正。

我們所量測的樣本為 Melles Griot 的 02 WRM 011/632 Mica Retardation Plate，其規格如表 4-1：

表 4-1 mica quarter wave plate 規格表

Detailed Specifications :

Wavelength :	632 nm
Wavefront Distortion :	$2\lambda$ at 550 nm
Retardation Tolerance :	$\lambda/50$
Diameter :	$10.0 \pm 0.25$ mm
Thickness :	2.5 mm
Material :	Selected mica sheet
Laser Type :	HeNe (red)
Type :	Retardation Plates

\*資料來源：<http://www.mellesgriot.com/>

藉由改變樣本方位角，我們對此樣本做了四次的量測，方位角分別為： $\alpha_0^\circ$ 、 $\alpha_0^\circ - 2^\circ$ 、 $\alpha_0^\circ - 90^\circ$ 、 $\alpha_0^\circ - 92^\circ$ 。在此我們定義  $\alpha_0$  為第一次量測時的第一層液晶錨定方向，利用各樣本方位角的相對關係，可推算第一次量測時的第一層液晶錨定方向，根據章節 4.1.1 我們找出 PEM 內稟相位延遲  $\Delta_l = 4.8^\circ$ ，考慮 PEM 內稟相位延遲，我們對四組延遲片數據進行擬合，得到下頁結果：

結果如表 4-2：

表 4-2 考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ ，四組延遲片數據所擬合出的結果

$\alpha$	$\alpha_0^\circ$	$\alpha_0^\circ - 2^\circ$	$\alpha_0^\circ - 90^\circ$	$\alpha_0^\circ - 92^\circ$
$\Gamma$ (degree)	90.01	89.85	89.62	89.22
$\Phi$ (degree)	0.7	0.7	0.6	0.6
$\alpha_0$ (degree)	37.7	37.7	38.0	38.0

備註： $\Gamma$  (總相位延遲)、 $\Phi$  (扭轉角)、 $\alpha$  (延遲片光軸方位角)

觀察結果，相位延遲 ( $\Gamma$ )、扭轉角度 ( $\Phi$ ) 的值有了一致性。延遲片方位角 ( $\alpha$ ) 的相對關係也跟實際所轉的角度相符合。

一般市售的四分之一波長延遲片，選用的材料可分為兩種，石英 (quartz) 及雲母 (mica)，根據文獻 [11]，這兩種材料各有其優缺點，簡單整理如表 4-3：

表 4-3 石英 (quartz) 與雲母 (mica) 的特性比較

	旋光性 (optical activity)	平整性
石英 (quartz)	有旋光性	優
雲母 (mica)	無旋光性	差

根據樣本的理论矩陣-扭轉式液晶盒的穆勒矩陣 (章節 2.4)，旋光性主要反映在扭轉角度 ( $\Phi$ )，平整性則反映在相位延遲 ( $\Gamma$ )。

我們的量測樣本材料為雲母，根據表 4-3 材料特性，驗證表 4-2 的擬合結果，相位延遲 ( $\Gamma$ ) 在不同方位角有  $0.8^\circ$  的差異，可能來自於旋轉樣本時，量測點不固定所造成。扭轉角 ( $\Phi$ ) 介於  $0.6^\circ \sim 0.7^\circ$ ，對於無旋光性材料，理想的扭轉角度應為  $0^\circ$ ，我們研判這  $0.7^\circ$  的偏移來自於系統誤差。

本實驗在量測前，對於系統架構上幾個光學元件 (起偏片、光彈

調變器、析光片) 的相對方位角，並無作重新校正的動作。析光片方位角誤差，已藉由倍頻項優化步驟消除 (章節 2.8)，在此我們假設光彈調變器方位角實際零點和起偏片方位角實際零點存在一誤差值  $\delta P$ ，改寫擬合程式考慮  $\delta P$  並將扭轉角度 ( $\Phi$ ) 強制為零，對延遲片的四組量測數據再作一次擬合。欲擬合的參數為相位延遲 ( $\Gamma$ )、延遲片方位角 ( $\alpha$ )、起偏片方位角誤差 ( $\delta P$ )。結果如表 4-4：

表 4-4 令扭轉角度 ( $\Phi=0$ )，考慮誤差項  $\delta P$ ，所擬合出的結果

$\alpha$	$\alpha_0^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 2^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 90^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 92^{\circ}$
$\Gamma$ (degree)	90.01	89.85	89.61	89.22
$\alpha_0$ (degree)	37.9	37.9	38.3	38.3
$\delta P$ (degree)	-0.19	-0.19	-0.15	-0.15

備註： $\Gamma$  (總相位延遲)、 $\alpha$  (延遲片光軸方位角)、 $\delta P$  (誤差角)

發現  $\delta P$  有  $-0.15^{\circ} \sim -0.19^{\circ}$  的偏差量，取其平均  $\delta P = -0.17^{\circ}$  為實際誤差值。我們藉由量測雲母製的四分之一波長延遲片找出了起偏片方位角誤差  $\delta P = -0.17^{\circ}$ 。

考慮  $\Delta_l = 4.8^{\circ}$ 、 $\delta P = -0.17^{\circ}$ ，對延遲片的四組量測數據再作一次擬合。



### 4.1.3 考慮 $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$

結果如表 4-5：

表 4-5 考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ ，所擬合出的結果

$\alpha$	$\alpha_0^\circ$	$\alpha_0^\circ - 2^\circ$	$\alpha_0^\circ - 90^\circ$	$\alpha_0^\circ - 92^\circ$
$\Gamma (\pm 0.03)$ (degree)	90.01	89.85	89.62	89.22
$\Phi (\pm 0.3)$ (degree)	0.1	0.1	-0.1	-0.1
$\alpha_0 (\pm 0.2)$ (degree)	37.9	37.9	38.3	38.3

備註：  $\Gamma$  (總相位延遲)、 $\Phi$  (扭轉角)、 $\alpha$  (延遲片光軸方位角)

總相位延遲 ( $\Gamma$ ) 介於  $89.22^\circ \sim 90.01^\circ$ ，我們研判可能由於樣本本身厚度的不均勻，而入射光束也沒控制在轉軸圓心所造成；考慮  $\delta P$  的影響，扭轉角度 ( $\Phi$ ) 趨近於零度 ( $0^\circ \pm 0.1^\circ$ )；延遲片方位角 ( $\alpha$ ) 的相對關係也符合預期。在系統架構維持不變的前提下，我們後來所量測的任何樣本，皆須考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$ 。藉由變數變換 (Jacobian matrix) (附錄 C)，我們可由實驗數據標準差反推擬合參數的標準差： $\Gamma (\pm 0.03^\circ)$ 、 $\Phi (\pm 0.3^\circ)$ 、 $\alpha (\pm 0.2^\circ)$ 。

四組數據的擬合曲線 (fitting curve) 如下頁圖 4-3、4-4、4-5、4-6：

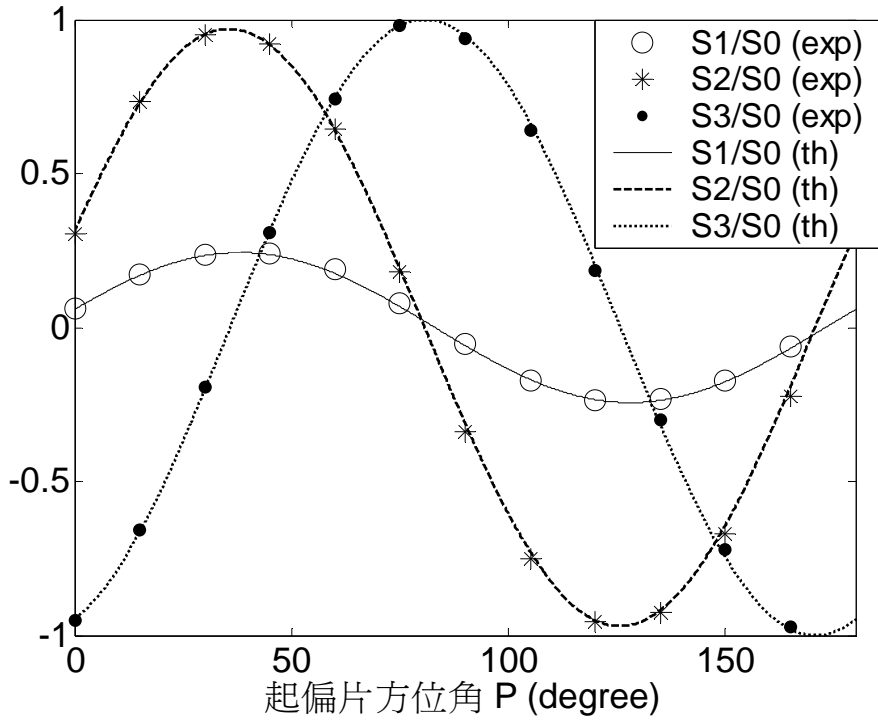


圖 4-3 量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0$ )，考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$  的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

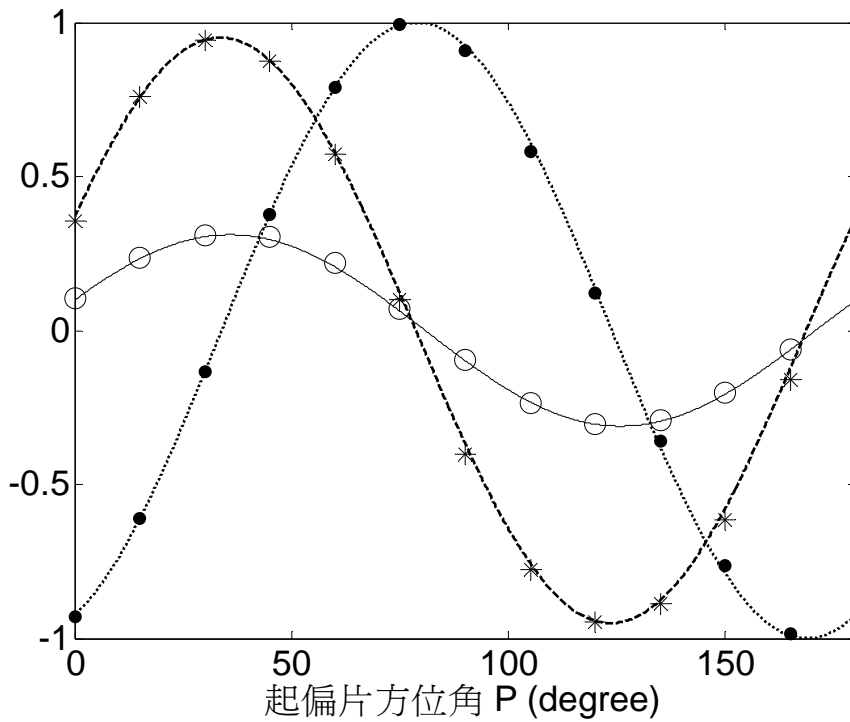


圖 4-4 量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0 - 2^\circ$ )，考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$  的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

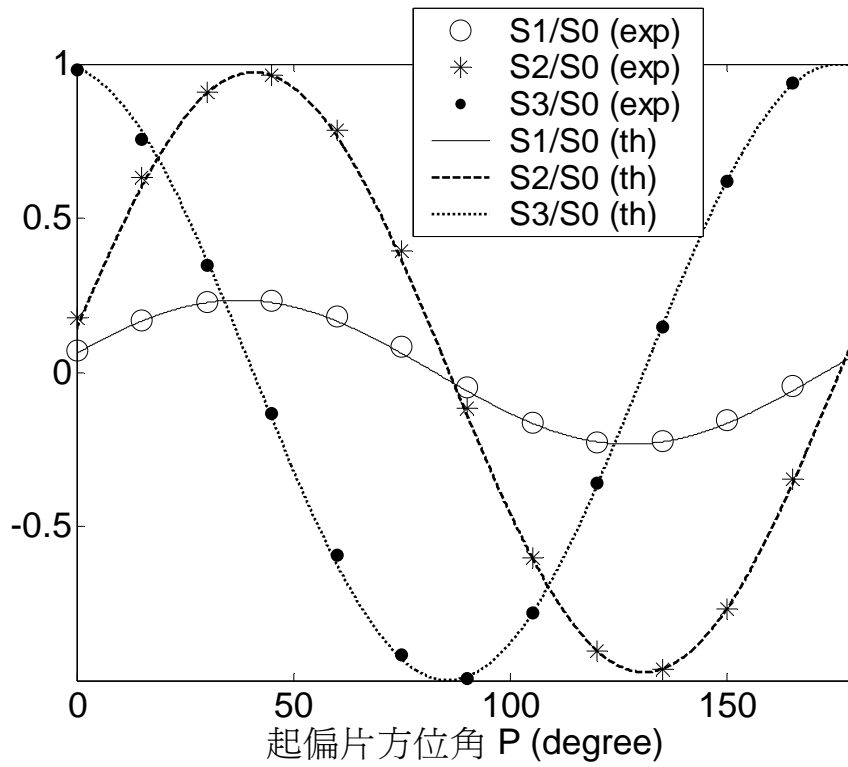


圖 4-5 量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ - 90^\circ$ )，考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$  的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

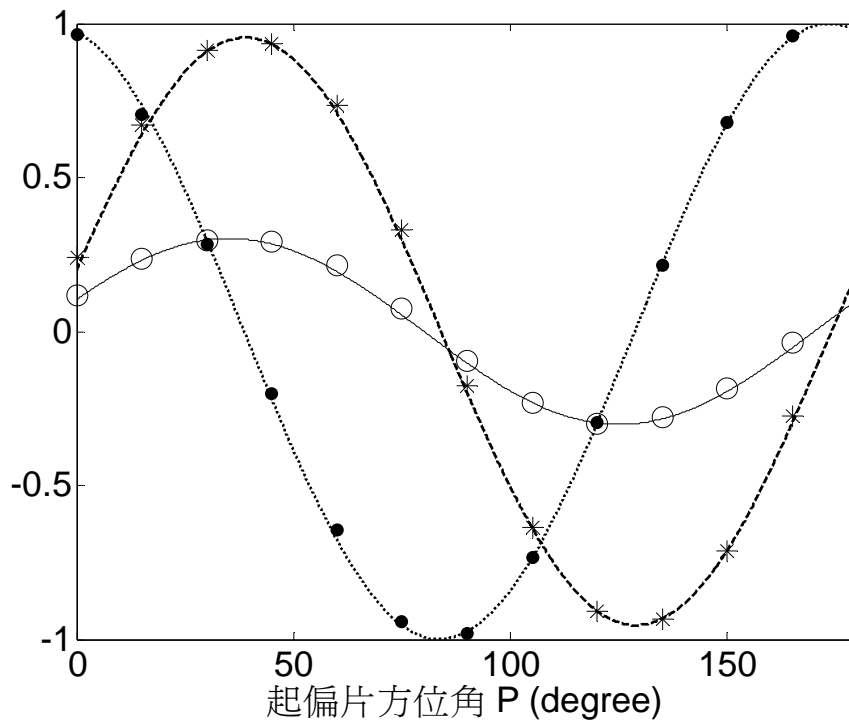


圖 4-6 量測四分之一波長延遲片 ( $\alpha = \alpha_0^\circ - 92^\circ$ )，考慮  $\Delta_l = 4.8^\circ$ 、 $\delta P = -0.17^\circ$  的實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

## 4.2 扭轉式液晶盒 (TN-LC cell) 的量測

### 4.2.1 樣本量測結果

上一章節我們對量測系統作了校正，考慮了 PEM 內稟相位延遲  $\Delta_l = 4.8^\circ$  以及起偏片方位角誤差  $\delta P = -0.17^\circ$ ，在量測系統不作任何改變的前提下，我們對三種扭轉式液晶盒樣本做了量測，樣本資訊如表 4-6：

表 4-6 三種扭轉式液晶盒樣本資訊

	N0.1	N0.2	N0.3
來源	自行製作	自行製作	業界學長提供
液晶材料	5CB	5CB	N/A
$\Delta n$ 文獻值	0.18	0.18	N/A
扭轉角度 (degree)	0	30	-90
空樣本厚度 ( $\mu\text{m}$ )	14.39	12.11	N/A
推算的總相位延遲 (degree)	1474	1240	232
量測時擺放的方位角 (degree)	50	20	135
量測溫度 ( $^\circ\text{C}$ )	26.5	26.5	26.5

前二種樣本是自行製作，材料為 5CB，根據文獻 [12] 在  $26.5^\circ\text{C}$  時 5CB 的折射率差值 ( $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ ) 約為 0.18，利用下式：

$$\Gamma = 360 \times \frac{\Delta n \times d}{\lambda}$$

$\lambda$ ：入射光波長 (632.8 nm)

$d$ ：樣本厚度

將空樣本厚度 [10] 代入，可推算出總相位延遲 ( $\Gamma$ )。藉由改變上下玻璃基板的配向方向，我們可預設樣本的扭轉角度 ( $\Phi$ )。

第三個為業界樣本，基於商業機密，學長僅提供  $\Delta n \times d$  的數值

為 408 (nm)，扭轉角度為  $-90^\circ$ ；扭轉角度 ( $\Phi$ ) 的正負代表扭轉方向為右旋扭轉 (+) 或左旋扭轉 (-)。利用上式推算，總相位延遲 ( $\Gamma$ ) 為  $232^\circ$ 。量測時擺放的方位角為目測結果並非相當精準。表 4-7 為量測結果：

表 4-7 三種扭轉式液晶盒量測結果

	N0.1	N0.2	N0.3
預設條件			
$\Gamma$ (degree)	1474	1240	232
$\Phi$ (degree)	0	30	-90
$\alpha$ (degree)	50	20	135
量測結果			
$\Gamma$ (degree)	1461.10 ( $\pm 0.03$ )	1143.000 ( $\pm 0.003$ )	227.70 ( $\pm 0.03$ )
$\Phi$ (degree)	1.8 ( $\pm 0.2$ )	27.72 ( $\pm 0.05$ )	-90.08 ( $\pm 0.04$ )
$\alpha$ (degree)	53.62 ( $\pm 0.03$ )	24.03 ( $\pm 0.02$ )	134.361 ( $\pm 0.003$ )
A. Lien [4] 的量測方法			
$\Phi$ (degree)	1.7 ( $\pm 0.23$ )	27.6 ( $\pm 0.1$ )	-89.67 ( $\pm 0.25$ )

備註： $\Gamma$  (總相位延遲)、 $\Phi$  (扭轉角)、 $\alpha$  (第一層液晶錨定方向)

預設條件對實驗結果有實質上的幫助，當我們在擬合三個參數時，通常不只一個解，根據理論式，我們用來擬合的理論函數大部分由三個參數的三角函數所組成，所得到的解往往具有周期性，預設條件可以提供一個合理範圍，幫助我們找解。

觀察結果，與預設條件大致上符合，藉由變數變換 (Jacobian matrix) (附錄 C)，我們由實驗數據標準差反推擬合參數的標準差，標示在表 4-7 中。為了驗證我們的量測結果，我們利用 A. Lien [4] 的方法對三個樣本進行測量，結果也標示在表 4-7。

三組數據的擬合曲線 (fitting curve) 如下頁圖 4-7、4-8、4-9：

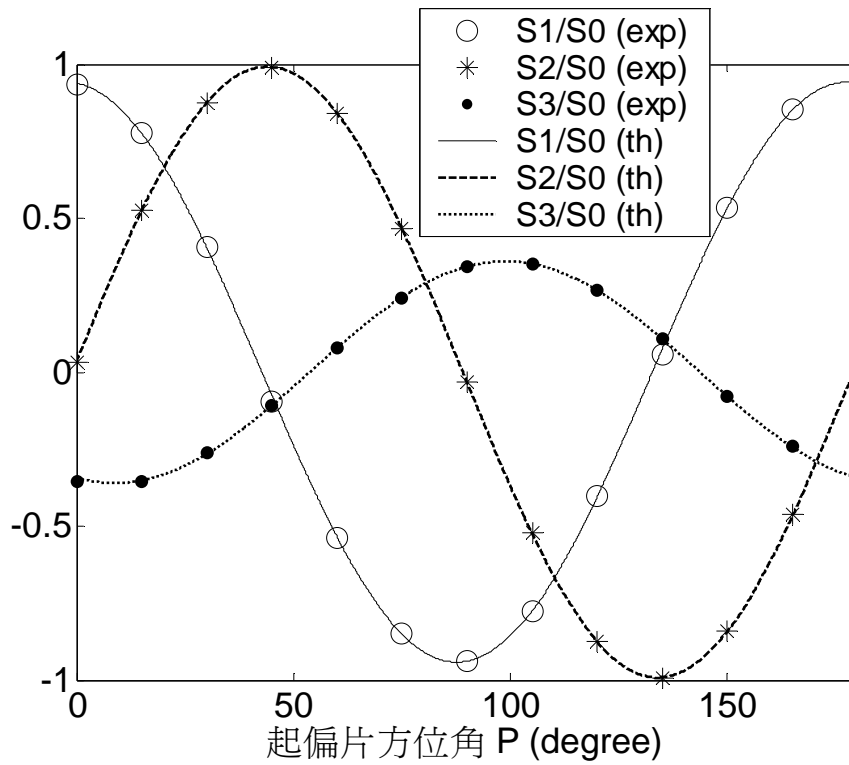


圖 4-7 量測扭轉式液晶盒 NO.1 (扭轉角度  $\Phi = 1.8^\circ$ )，實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

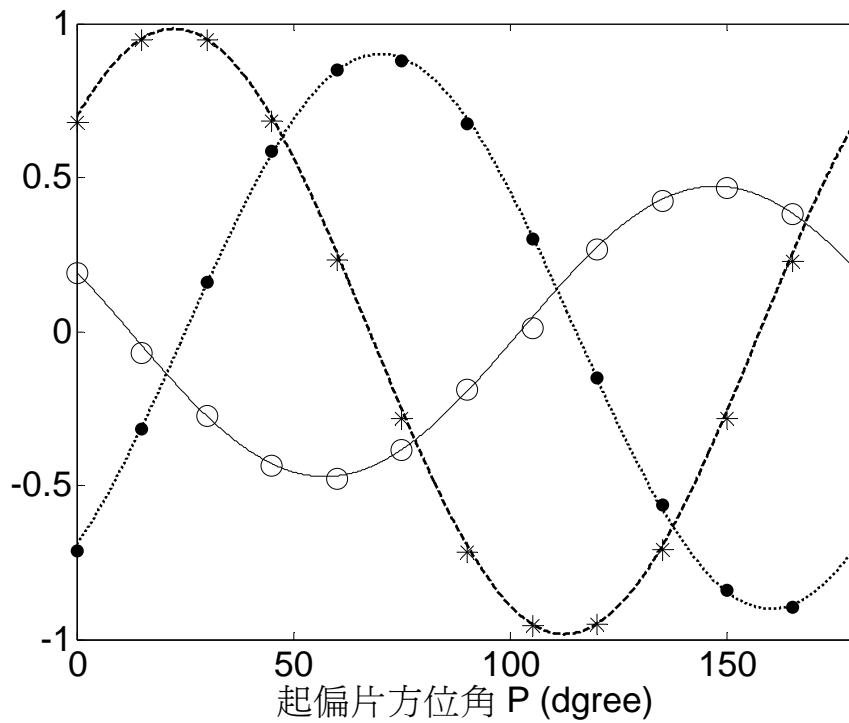
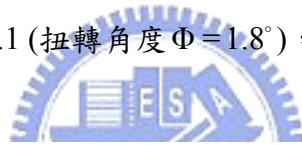


圖 4-8 量測扭轉式液晶盒 NO.2 (扭轉角度  $\Phi = 27.72^\circ$ )，實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)

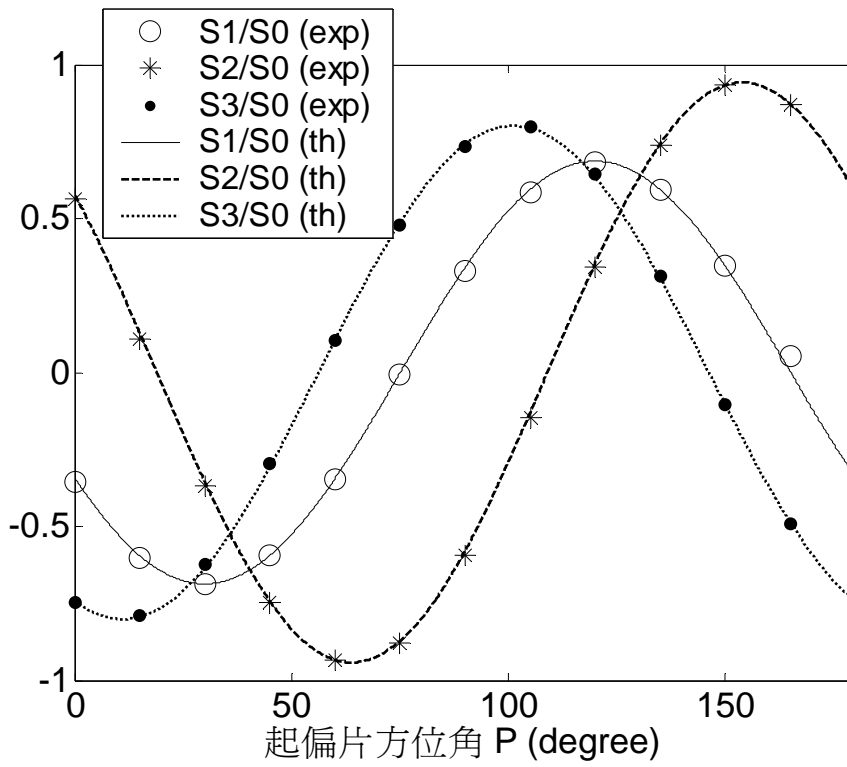


圖 4-9 量測扭轉式液晶盒 NO.3 (扭轉角度  $\Phi = -90.08^\circ$ )，實驗數據 (exp) 與理論圖形 (th)



## 4.2.2 偏振追隨 (Adiabatic Following)

根據 Yeh [5]，書中提到一種條件近似-偏振追隨 (Adiabatic Following)，當液晶盒的第一層液晶錨定方向假設在零度，液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  可寫為： (如式 2-25)

$$M = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi - i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} & \Phi \frac{\sin \chi}{\chi} \\ -\Phi \frac{\sin \chi}{\chi} & \cos \chi + i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} \end{bmatrix}$$

其中  $\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

當  $\Gamma \gg \Phi \Rightarrow \chi \cong \frac{\Gamma}{2}$

上式可近似為

$$M \cong \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix}$$

總相位變化  $\Gamma$  遠大於扭轉角  $\Phi$  時，液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  可近似為一個相位延遲片和旋轉矩陣的結合，此延遲片的相位延遲為  $\Gamma$ ；旋轉矩陣的旋轉角度為扭轉角  $\Phi$ 。

今假設一平行或垂直於第一層液晶錨定方向的線偏光通過液晶盒，經計算：

$$E_{out} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix}$$

出射光  $E_{out}$  將不受延遲片的影響，僅做偏振方向的旋轉；仍維持其線偏振態，但偏振方向會旋轉  $\Phi$ 。



觀察我們三個量測樣本 NO.1~NO.3，總相位變化  $\Gamma$  與扭轉角  $\Phi$  的比值約為：811.46 及 2.5，我們觀察這三個樣本  $S_1/S_0$ 、 $S_2/S_0$ 、 $S_3/S_0$  實驗值與起偏片方位角 ( $P$ ) 的關係圖：

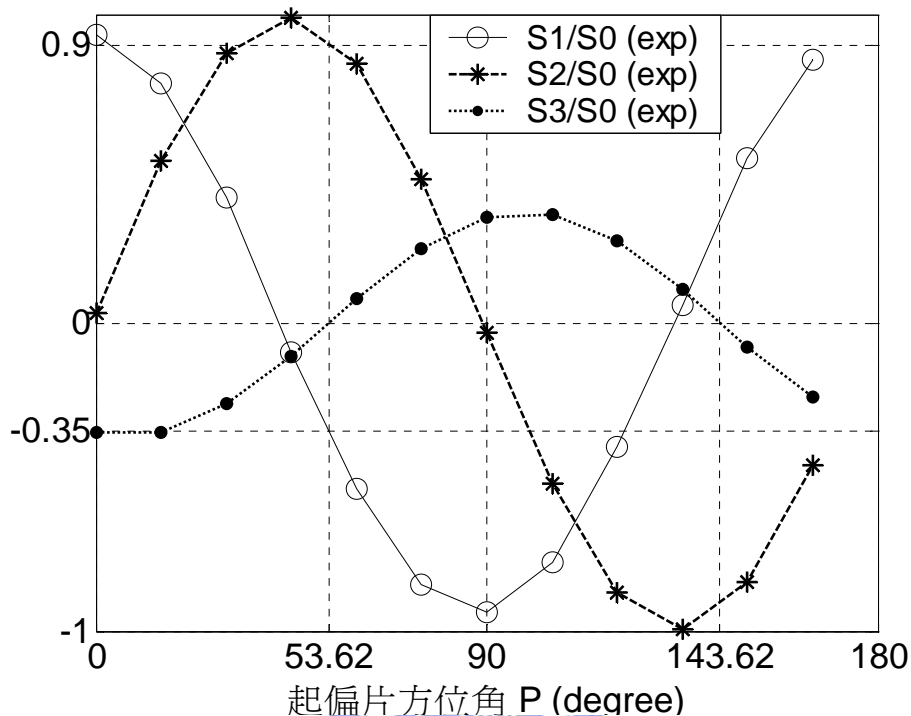


圖 4-10 扭轉式液晶盒 NO.1 (扭轉角度  $\Phi=1.8^\circ$ ) 實驗數據

根據我們的實驗架構圖 (圖 3-2)，起偏片的方位角代表入射樣本的線偏光偏振方向； $S_1/S_0$ 、 $S_2/S_0$ 、 $S_3/S_0$  實驗值則為量測到的出射光偏振態。如圖 4-10 為樣本 NO.1 的實驗數據。我們量得的第一層液晶錨定方向為  $53.62^\circ$ ，觀察圖 4-10，當入射線偏光偏振方向在  $53.62^\circ$  及  $143.62^\circ$  時，出射光史托克參數  $S_3/S_0$  為零，根據章節 2.2 的定義表示出射光為一線偏光，利用下式：

$$S_{lin} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2p) \\ \sin(2p) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{S_3}{S_2}\right)$$

可求出出射光的線偏方向 ( $p$ ) 約為  $55.6^\circ$  及  $145.6^\circ$ ，出射光旋轉了約  $2^\circ$ ，接近我們所量測出的扭轉角度  $\Phi = 1.8^\circ$ 。

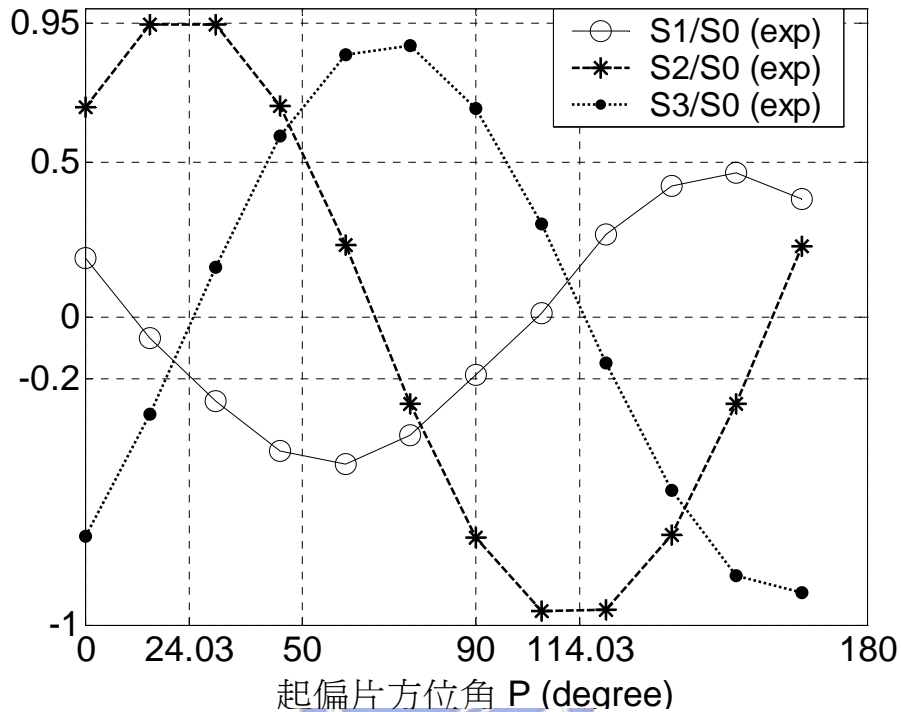


圖 4-11 扭轉式液晶盒 NO.2 (扭轉角度  $\Phi = 27.72^\circ$ ) 實驗數據

圖 4-11 為樣本 NO.2 的實驗數據。我們量得的第一層液晶錨定方向為  $24.03^\circ$ ，觀察圖 4-11，當入射線偏光偏振方向在  $24.03^\circ$  及  $114.03^\circ$  時，所得到的出射光偏振態為線偏光，經計算其偏振方向約為  $50.9^\circ$  及  $140.9^\circ$ ，入射光旋轉了約  $26.9^\circ$ ，同樣也接近我們所量測出的扭轉角度  $\Phi = 27.72^\circ$ 。

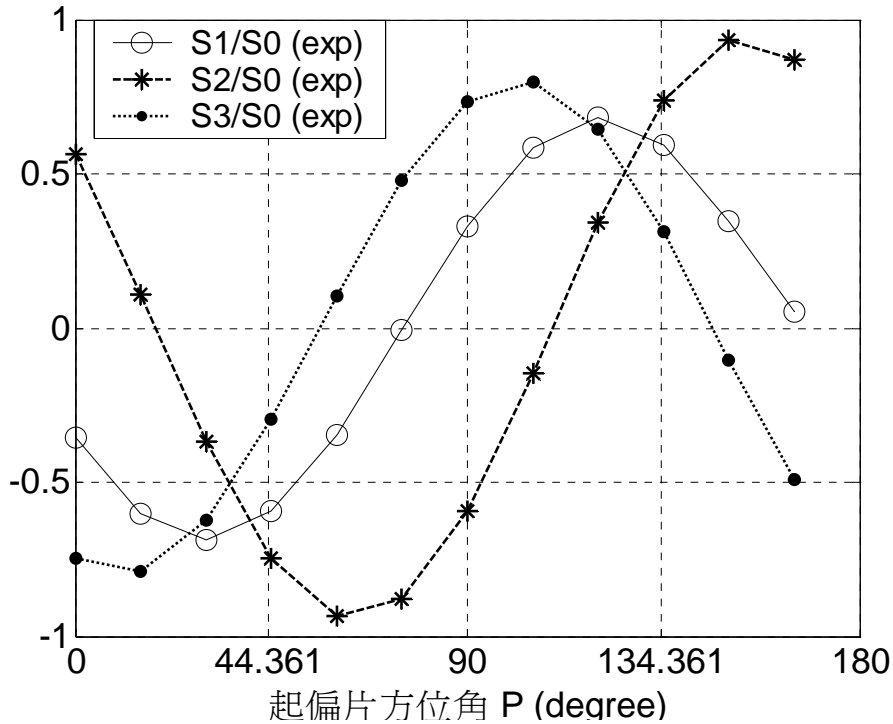


圖 4-12 扭轉式液晶盒 NO.3 (扭轉角度  $\Phi = -90.08^\circ$ ) 實驗數據

圖 4-12 為樣本 NO.3 的實驗數據。我們量得的第一層液晶錨定方向為  $44.361^\circ$ ，觀察圖 4-12，當入射線偏光偏振方向在  $44.361^\circ$  及  $134.361^\circ$  時，所得到的出射光偏振態並非線偏光，觀察樣本 NO.3 總相位變化  $\Gamma$  與扭轉角  $\Phi$  的比值為 2.5，並不滿足偏振追隨的條件近似。

由以上的觀察，我們證實了，當總相位變化  $\Gamma$  遠大於扭轉角  $\Phi$  時，液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  可近似為一個相位延遲片和旋轉矩陣的結合，旋轉矩陣的旋轉角度為扭轉角  $\Phi$ 。

上述結果也證明了一件事，即使樣本符合偏振追隨的近似條件，由於相位延遲片的存在，僅有對特定偏振方向（平行或垂直於第一層液晶錨定方向）的線偏入射光，才能將液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  等效為一個旋轉矩陣，且此等效僅為近似結果，與實際樣本矩陣還是存有些許

差異，此差異將影響顯示器亮暗態的表現 (Yeh [5])。若要將液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  完全視為一個純旋轉矩陣 (pure rotator)，則需滿足下列條件：

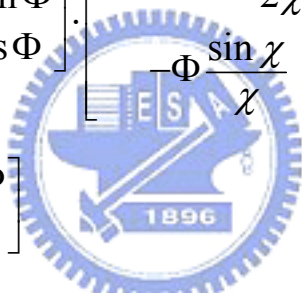
$$\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = n \cdot 180^\circ$$

其中  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \sin \chi = 0, \quad \cos \chi = \pm 1$$

液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  可改寫為：

$$M = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi - i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} & \Phi \frac{\sin \chi}{\chi} \\ -\Phi \frac{\sin \chi}{\chi} & \cos \chi + i \frac{\Gamma \sin \chi}{2\chi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$


當  $\chi$  ( $\sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$ ) 為  $180^\circ$  的倍數時，液晶盒的瓊斯矩陣  $M$  將成為一個旋轉角度為扭轉角  $\Phi$  的純旋轉矩陣，任何偏振狀態的入射光在通過純旋轉矩陣後，僅改變其橢圓傾角 ( $\theta$ )，而橢圓率 ( $\epsilon$ ) 不做任何變化 (式 2-10、圖 2-2)；從邦加球圖形來看，如下頁圖 4-13，偏振態將沿著緯線切線方向做變化，而且光強度可維持不變，目前市面上在可見光範圍內少有純圓偏光元件。

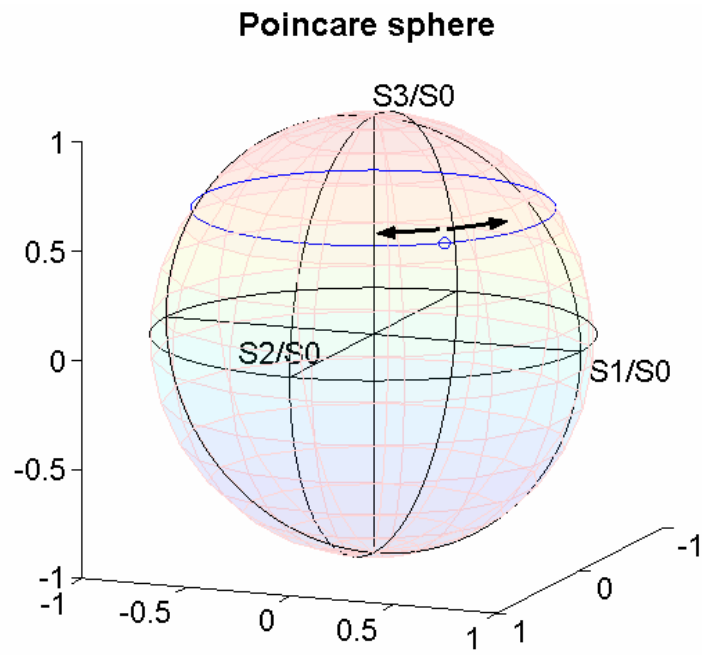


圖 4-13 任意偏振狀態的入射光通過純旋轉矩陣後，偏振態沿著邦加球緯線切線方向做變化



### 4.3 光偏振態的即時量測

根據章節 2.6，我們利用 PEM-A 的架構來量測入射光的史托克參數。為了得到更精準的結果，藉由旋轉析光片，作優化的處理以消除系統誤差。也由於析光片的旋轉，入射光條件將被受限為靜態，對於光偏振態具有動態變化的入射光，是無法作即時量測的。PEM 的特性在於具有高頻率震盪 (51kHz)，適用工業界製程上的即時監控以及觀察生物系統的動態反應。本章節將提供一個方法，達到光偏振態的即時量測。實驗架構如圖 4-14：

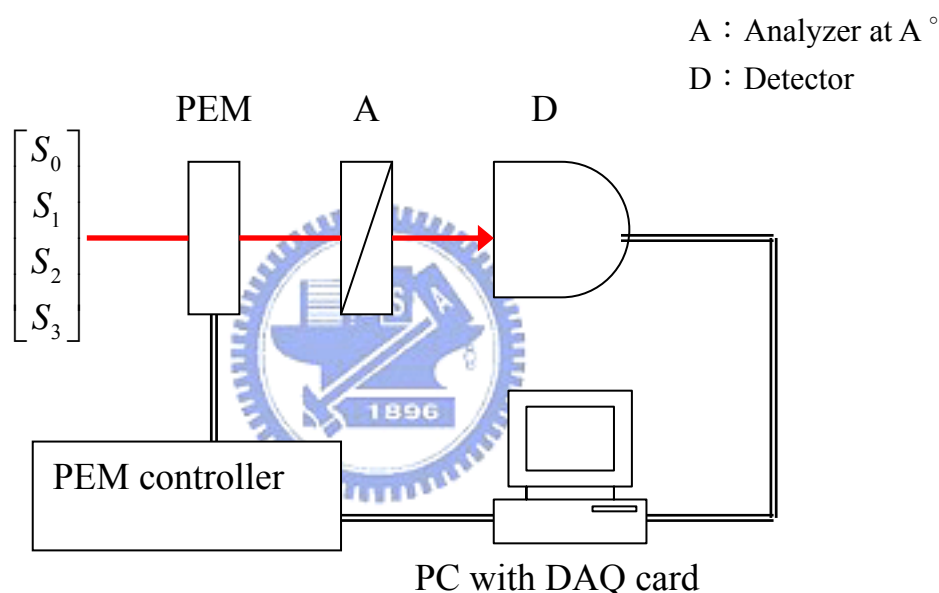


圖 4-14 利用 PEM-A 即時量測史托克參數系統架構圖

根據章節 2.8，我們由 DAQ card 所擷取到的各倍頻訊號如式 (2-47)；其中包含著析光片誤差項 ( $\delta A$ ) 以及各倍頻誤差項，要達到即時量測，首要必須將這些誤差項排除。

經由事先精準的方位角校正我們可以將析光片誤差項 ( $\delta A$ ) 消去。對於各倍頻系統誤差項，我們發現是 DAQ card 擷取所造成，若用傳統鎖相放大器來取值，並不會發現此誤差項，其原因為何？我們尚在釐清，在即時的情況下也很難定量的去評估此誤差項的大小，此

問題有待後人努力。從圖 2-12 看出，其實各倍頻誤差項並不大，對於即時量測的結果，在定量上將造成些許的誤差，不過定性上的變化還是值得參考的。

誤差項消除後的各倍頻訊號如下：

$$I_{DC} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cdot \cos(2A) + S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A))$$

$$I_{1f} = -S_3 \cdot J_1(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)$$

$$I_{2f} = S_2 \cdot J_2(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)$$

$$I_{3f} = -S_3 \cdot J_3(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)$$

$$I_{4f} = S_2 \cdot J_4(2\pi \cdot \delta_0) \cdot \sin(2A)$$

我們將析光片放置在  $A = 22.5^\circ$ ， $\delta_0$  可由一、三或二、四倍頻相除求得，經整理各倍頻如下：

$$I_{DC} = \frac{1}{2}\left(S_0 + \frac{\sqrt{2} \cdot S_1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot S_2 \cdot J_0(2\pi \cdot \delta_0)}{2}\right)$$

$$S_3 = \frac{-\sqrt{2} \cdot I_{1f}}{J_1(2\pi \cdot \delta_0)}$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot I_{2f}}{J_2(2\pi \cdot \delta_0)}$$

又  $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

解以上四個方程式，可求得  $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$

由於 PEM  $\Delta_I$  (內稟相位延遲) 的關係，我們求得的史托克參數和實際有以下的關係：

$$S_0 = S_{0act}$$

$$S_1 = S_{1act}$$

$$S_2 = S_{2act} \cdot \cos(\Delta_I) - S_{3act} \cdot \sin(\Delta_I)$$

$$S_3 = S_{3act} \cdot \cos(\Delta_I) + S_{2act} \cdot \sin(\Delta_I)$$

利用章節 2.7，可事先求得  $\Delta_I$  的大小以求得實際史托克參數。

以上推導，皆可用 LabVIEW 作即時的運算，利用 LabVIEW 軟體中 MatLAB script 功能，將運算結果 (史托克參數) 以邦加球顯示，可以即時看出入射光偏振態在邦加球上的變化。目前此即時架構參數換算速率為 3 frames/sec，此速率受限於 LabVIEW 內建鎖相放大器 (lock-in Amplifier) 程式的取樣頻率 (Sampling Rate) 及取樣點數 (Frame Size)。



我們轉動一線性偏振片，即時觀察出射光偏振態在邦加球上的變化軌跡，理論圖形如下圖 4-15：

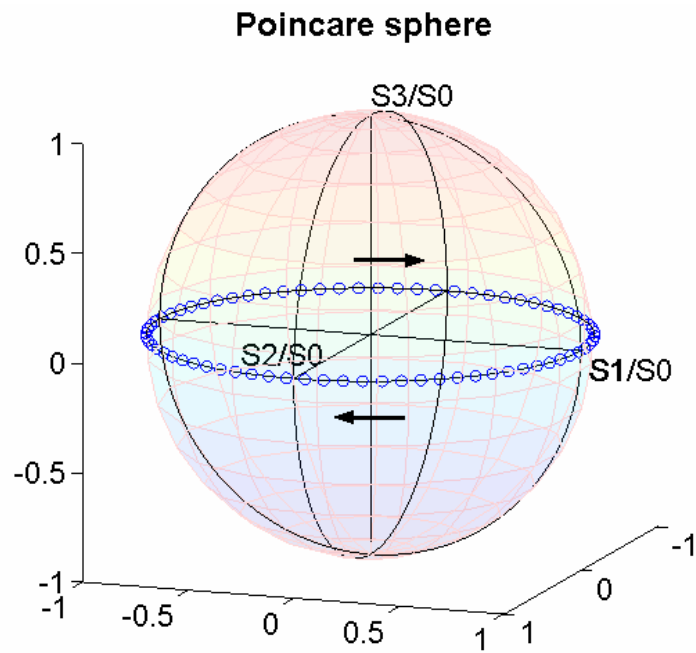


圖 4-15 轉動一線性偏振片，出射光偏振態在邦加球上的軌跡變化理論圖

我們在線性偏振片後方擺放一四分之一波長相位延遲片，延遲片光軸方位角位於實驗室座標  $45^\circ$ ，轉動偏振片，即時觀察出射光偏振態在邦加球上的變化軌跡，理論圖形如下圖 4-16：

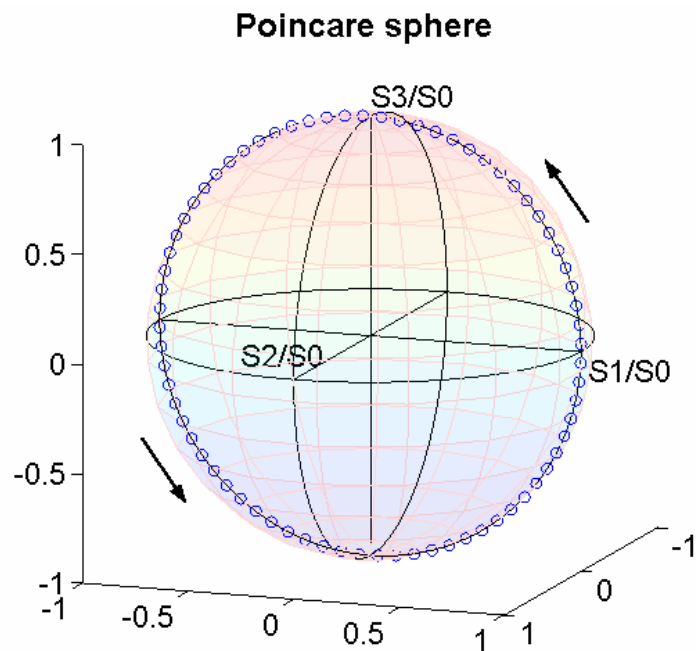


圖 4-16 在線性偏振片後方擺放一四分之一波長延遲片，延遲片光軸方位角位於實驗室座標  $45^\circ$ ，轉動偏振片，在邦加球上的軌跡變化理論圖

藉由我們的即時量測架構，可以很清楚的從電腦螢幕上觀察以上兩種變化軌跡。



## 第五章 結論

本論文利用光彈調變器及析光片架構建立一個量測光偏振態 (史托克參數) 的系統，藉由析光片的旋轉消除出射光強各倍頻訊號的誤差項 (章節 2.8)，再將優化後的各倍頻訊號換算為史托克參數 (章節 2.6)。

由於在不放樣本旋轉起偏片時，量測到的光偏振態變化與考慮 PEM 為理想矩陣的理論圖形並不吻合 (圖 4-1)，故我們引入內稟相位延遲  $\Delta_l$  來修正理想 PEM 的穆勒矩陣 (式 2-33)，並量出  $\Delta_l$ ，結果為  $\Delta_l = 4.8 \pm 0.3^\circ$ ；當考慮  $\Delta_l$  後其理論圖形則與實驗結果相當吻合 (圖 4-2)。

以不同偏振方向的線性偏振光入射樣本，利用光彈調變器及析光片 (PEM-A) 的架構建立一個量測光偏振態 (史托克參數) 的系統，在各式線性偏振態入射的情況下，量測出射光的偏振態變化，藉由這些資訊擬合出樣本矩陣模型參數。根據 Yeh [5] 對於扭轉式液晶盒的矩陣模型推導，假設第一層液晶錨定方向位於零度，其結果僅包含了兩個參數：總相位延遲及扭轉角，我們則考慮樣本的方位角 (第一層液晶的錨定方向) 改寫其矩陣作為我們的樣本矩陣模型；此模型亦適用於線性延遲片，唯其扭轉角應為零，因此我們分別量測了延遲片及扭轉式液晶盒，以評估本法的實用性。

我們所量測的四分之一波長延遲片是由雲母片組成，利用雲母材料的無旋光特性，校正了光彈調變器 (PEM) 方位角實際零點和起偏片方位角實際零點的誤差值  $\delta P$ ，所量出的結果為  $\delta P = -0.17^\circ \pm 0.02^\circ$ 。經修正後，四分之一波長延遲片在四組不同方位角的量測結果如下頁表 5-1：

表 5-1 四分之一波長延遲片在四組不同方位角的量測結果

$\alpha$	$\alpha_0^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 2^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 90^{\circ}$	$\alpha_0^{\circ} - 92^{\circ}$
$\Gamma (\pm 0.03)$ (degree)	90.01	89.85	89.62	89.22
$\Phi (\pm 0.3)$ (degree)	0.1	0.1	-0.1	-0.1
$\alpha_0 (\pm 0.2)$ (degree)	37.9	37.9	38.3	38.3

備註：  $\Gamma$  (總相位延遲)、 $\Phi$  (扭轉角)、 $\alpha$  (延遲片光軸方位角)

由結果可看出雲母延遲片總相位延遲 ( $\Gamma$ ) 介於  $89.22^{\circ} \sim 90.01^{\circ}$ ，我們研判可能由於樣本本身厚度的不均勻，而入射光束也沒控制在轉軸圓心所造成；而其扭轉角度 ( $\Phi$ ) 正如預期，趨近於零度 ( $0 \pm 0.1^{\circ}$ )；第一層液晶錨定方向 ( $\alpha$ ) 的相對關係也符合預期。

至於扭轉式液晶盒的量測結果，如表 5-2：

表 5-2 三種扭轉式液晶盒量測結果

	N0.1	N0.2	N0.3
預設條件			
$\Gamma$ (degree)	1473.57	1240.09	232
$\Phi$ (degree)	0	30	-90
$\alpha$ (degree)	50	20	135
量測結果			
$\Gamma$ (degree)	1461.10 ( $\pm 0.03$ )	1143.000 ( $\pm 0.003$ )	227.70 ( $\pm 0.03$ )
$\Phi$ (degree)	1.8 ( $\pm 0.2$ )	27.72 ( $\pm 0.05$ )	-90.08 ( $\pm 0.04$ )
$\alpha$ (degree)	53.62 ( $\pm 0.03$ )	24.03 ( $\pm 0.02$ )	134.361 ( $\pm 0.003$ )
A. Lien 的量測方法			
$\Phi$ (degree)	1.7 ( $\pm 0.23$ )	27.6 ( $\pm 0.1$ )	-89.67 ( $\pm 0.25$ )

備註：  $\Gamma$ (總相位延遲)、 $\Phi$ (扭轉角)、 $\alpha$ (第一層液晶錨定方向)

為了驗證我們的量測結果，我們還利用 A. Lien [4] 的方法對三個樣

本進行測量，兩種方法結果相當吻合。我們所提出的方法可以在不旋轉樣本的條件下，同時求出扭轉式液晶盒的三個參數：總相位延遲 ( $\Gamma$ )、扭轉角 ( $\Phi$ ) 及第一層液晶錨定方向 ( $\alpha$ )，由於我們利用數值方法擬合求解，根據其數值分析，各參數準確度 (見附錄 C) 介於  $0.1^\circ \sim 0.001^\circ$  間。

我們利用最小平方法 (least squares method) 來求解，將一個三維矩陣代入理論式，找出理論值與實驗數據差異最小的那組，即為解。在處理數據的過程中，我們發現當  $\Gamma=0$  及  $\sqrt{\Phi^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} = n \cdot 180^\circ$ ，理論式將與第一層液晶錨定方向無關，故無法解析，我們稱之為量測上的”盲點”，目前我們對盲點的位置尚未完全找出。此方面的工作，尚需更進一步的分析。

除了求出扭轉式液晶盒的三個參數外我們還從實驗數據中觀察到扭轉式液晶盒的偏振追隨 (Adiabatic Following, Yeh [5])，當總相位延遲  $\Gamma$  遠大於扭轉角  $\Phi$  時，液晶盒的瓊斯矩陣可近似為一個延遲片和旋轉矩陣的結合，由圖 4-10、4-11、4-12 的觀察，我們從實驗數據中看出了滿足偏振追隨近似條件的液晶盒樣本 NO.1、NO.2，其偏振態變化與理論近似結果相符，僅有當入射光是線偏且偏振方向平行或垂直於第一層液晶錨定方向，才能將液晶盒的瓊斯矩陣等效為一個旋轉矩陣。

在液晶顯示器產業中，最普遍也最基本的應用原理即為扭轉式液晶盒的偏振追隨，利用液晶盒矩陣與旋轉矩陣的等效，在交叉偏光片 (cross polarizer) 或平行偏光片 (parallel polarizer) 中，產生正常亮 (normally white) 或正常暗 (normally black) 兩種操作模式。但偏振追隨的近似結果為延遲片和旋轉矩陣的結合，由於相位延遲片的存在，僅有當入射光是線偏且偏振方向平行或垂直於第一層液晶錨定方

向，才能將液晶盒的瓊斯矩陣等效為一個旋轉矩陣，且此等效僅為近似結果，與實際樣本矩陣還是存有些許差異，此差異將影響顯示器亮暗態的表現 (附錄 D)。若要將液晶盒的瓊斯矩陣完全視為一個純旋轉矩陣，則需滿足  $\chi \left( \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \right)$  為  $180^\circ$  的倍數，液晶盒的瓊斯矩陣即可成為一個旋轉角度為扭轉角  $\Phi$  的純旋轉矩陣。任何偏振狀態的入射光在通過純旋轉矩陣後，僅改變其橢圓傾角 ( $\theta$ )，而橢圓率 ( $\varepsilon$ ) 不做任何變化 (式 2-10、圖 2-2)；從邦加球圖形來看 (圖 4-13)，偏振態將沿著緯線切線方向做變化，而且光強度可維持不變。

最後我們提出即時量測光偏振態的方法 (章節 4.3) 藉以充分利用 PEM 的高調變頻率 51kHz。結合了 LabVIEW 及 MatLAB 軟體，可以從電腦螢幕上即時觀察入射光偏振態在邦加球上的變化。目前此及時參數換算速率為  $3 \text{ frames/sec}$ ，此速率受限於 LabVIEW 內建鎖相放大器 (lock-in Amplifier) 程式的取樣頻率 (Sampling Rate) 及取樣點數 (Frame Size)，希望未來可以突破此限制則可量測更快的變化。

對於扭轉式液晶盒的量測結果，將來可針對量測盲點做分析，找出所有的盲點位置，進一步找出其補救方法。對於量測方法的應用，將來可考慮用以量測其它不同理論模型的樣本，藉由轉動起偏片方位角，我們可獲取足夠的資訊來分析樣本，求其樣本參數。對於光偏振態的即時量測，將來可考慮用來對動態樣本進行量測，利用出射光偏振態的變化，分析樣本光學結構的變化。對於扭轉式液晶盒，可嘗試製作出一純旋轉矩陣，目前市面上在可見光範圍內少有純圓偏光元件。



## 參考文獻

- [1] E. Collet: “*Polarized Light*,” (Marcel Dekker, New York, 1992).
- [2] M. Azzam, and N. M. Bashara, “*Ellipsometry and Polarized Light*,” (North- Holland, Amsterdam, 1980).
- [3] P. G. de Gennes, J. Prost, “*The Physics of Liquid Crystals*,” 2nd edition, (Oxford Science Publications, 1995).
- [4] Y. Saitoh and A. Lien, Jpn. J. Appl. Phys, Vol. 39, pp. 1743-1746, (2000).
- [5] P. Yeh and C. Gu, “*Optics of Liquid Crystal Displays*”, (John Wiley & Sons, 1999).
- [6] 林肇廉,“光彈調變式偏光儀對線偏及圓偏的測量”,國立交通大學光電工程研究所碩士論文,2001.
- [7] 林伯儒,“扭轉向列型液晶盒相對橢圓延遲片之等效”,國立交通大學光電工程研究所碩士論文,2003.
- [8] 蔡裴欣,“光彈調變器線上校正及橢圓偏光參數量測”,國立交通大學光電研究所碩士論文, 2003.
- [9] 湯宗達,“紫外光之液晶光配向及紅外線雷射之雙光子吸收之研究”, 國立交通大學電子物理系碩士論文,2003.
- [10] K. H. Yang, J. Appl. Phys, Vol. 64, pp. 4780-4782, (1988).
- [11] Y. F. Chao, Wen-Chi Lee, C. S. Hung and J. J. Lin, J. Phys. D : Appl. Phys, Vol. 31, pp. 1968-1974, (1998).
- [12] Shin-Tson Wu, Chiung-Sheng Wu, Marc Warengem and Mimoun Ismaili, Optical Engineering, Vol. 32, pp. 1775-1780, (1993).

## 附錄 A

### Chebyshev's Identity

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \frac{A \cdot \sin(m \cdot Z) - \sin((m-1) \cdot Z)}{\sin(Z)} & \frac{B \cdot \sin(m \cdot Z)}{\sin(Z)} \\ \frac{C \cdot \sin(m \cdot Z)}{\sin(Z)} & \frac{D \cdot \sin(m \cdot Z) - \sin((m-1) \cdot Z)}{\sin(Z)} \end{pmatrix}$$

where  $Z = \cos^{-1}\left(\frac{A+D}{2}\right)$

此恆等式節錄自 [5] P. Yeh and C. Gu, “*Optics of Liquid Crystal Displays*”, (John Wiley & Sons, 1999).





## 附錄 B

### 各倍頻訊號優化處理及史托克參數的換算 (MatLAB)

```
clear
```

```
% 開啟各倍頻實驗數據檔案 %
```

```
data=fopen('data.txt') ;  
data=fscanf(data,'%g') ;  
for h=1 : 13  
Idcor(h)=data(5*h-4) ;  
I1for(h)=data(5*h-3) ;  
I2for(h)=data(5*h-2) ;  
I3for(h)=data(5*h-1) ;  
I4for(h)=data(5*h) ;
```

```
end
```

```
figure(1)
```

```
a=0 : 15 : 180 ;
```

```
plot(a,Idcor,'b',a,I1for,'k',a,I2for,'r',a,I3for,'y',a,I4for,'g')
```

```
rat1f3for=I1for./I3for ;
```

```
rat2f4for=I2for./I4for ;
```

```
figure(2)
```

```
a=0 : 15 : 180 ;
```

```
plot(a,rat1f3for,'b',a,rat2f4for,'k')
```



```
% 消除系統誤差項 %
```

```
for i=1 : 25
```

```
shift(i)=(data(i)+data(20+i)+data(40+i))/3 ;
```

```
end
```

```
for j=1 : 5
```

```
    shiftave(j)=(shift(j)+shift(j+5)+shift(j+10)+shift(j+15)+shift(j+20))/5 ;
```

```
end
```

```
for k=1 : 13
```

```
    Idc(k)=data(5*k-4)-shiftave(1) ;
```

```

I1f(k)=data(5*k-3)-shiftave(2);
I2f(k)=data(5*k-2)-shiftave(3);
I3f(k)=data(5*k-1)-shiftave(4);
I4f(k)=data(5*k)-shiftave(5);
end
figure(3)
a=0 : 15 : 180 ;
plot(a,Idc,'b',a,I1f,'k',a,I2f,'r',a,I3f,'y',a,I4f,'g')
rat1f3f=I1f./I3f;
rat2f4f=I2f./I4f;
figure(4)
a=0 : 15 : 180 ;
plot(a,rat1f3f,'b',a,rat2f4f,'k')

```

### % 消除析光片誤差角 %

```

for l=1 : 10
    Idcsq(l)=((Idc(l))^2+(Idc(l+3))^2)^0.5;
    I1fsq(l)=((I1f(l))^2+(I1f(l+3))^2)^0.5;
    I2fsq(l)=((I2f(l))^2+(I2f(l+3))^2)^0.5;
    I3fsq(l)=((I3f(l))^2+(I3f(l+3))^2)^0.5;
    I4fsq(l)=((I4f(l))^2+(I4f(l+3))^2)^0.5;
end
for m=1 : 3
    Idcsq(10+m)=((Idc(10+m))^2+(Idc(1+m))^2)^0.5;
    I1fsq(10+m)=((I1f(10+m))^2+(I1f(1+m))^2)^0.5;
    I2fsq(10+m)=((I2f(10+m))^2+(I2f(1+m))^2)^0.5;
    I3fsq(10+m)=((I3f(10+m))^2+(I3f(1+m))^2)^0.5;
    I4fsq(10+m)=((I4f(10+m))^2+(I4f(1+m))^2)^0.5;
end
figure(5)
a=0 : 15 : 180 ;
plot(a,Idcsq,'b',a,I1fsq,'k',a,I2fsq,'r',a,I3fsq,'y',a,I4fsq,'g')
rat1f3fsq=I1fsq./I3fsq;
rat2f4fsq=I2fsq./I4fsq;
figure(6)
a=0 : 15 : 180 ;

```

```

plot(a, rat1f3fsq, 'b', a, rat2f4fsq, 'k')

% 求出 delta0 值 %

if std(rat1f3fsq) < std(rat2f4fsq)
    ratexp = I1fsq./I3fsq ; f=1 ; g=3 ;
else
    ratexp = I2fsq./I4fsq ; f=2 ; g=4 ;
end
for n=1 : 13
    for o=1 : 20000
        z = ((o/100000)+0.4)*2*pi ;
        w(o) = abs((besselj(f,z)./besselj(g,z))-ratexp(n)) ;
    end
    [p] = find(w==min(w)) ;
    bessel(n) = ((p/100000)+0.4)*2*pi ;
end
figure(7)
plot(bessel)

```



```

% 求出 S0 S1 S2 S3 %

```

```

for q=1 : 13

S1(q) = 2 * (((Idcsq(q))^2 - ((0.5 * (I2fsq(q) / (besselj(2, bessel(q)))) * (besselj(0, bessel(q)))
)^2))^0.5 * (Idc(1) / abs(Idc(1)))) ;
S2(q) = (I2fsq(q) / (besselj(2, bessel(q)))) * (I2for(4) / abs(I2for(4))) ;
S3(q) = (I1fsq(q) / (besselj(1, bessel(q)))) * (I1for(4) / abs(I1for(4))) ;
S0(q) = ((S1(q))^2 + (S2(q))^2 + (S3(q))^2)^0.5 ;
end

```

```

% 算 S0 S1 S2 S3 的標準差 %

```

```

X = S1./S0 ;
Y = S2./S0 ;
Z = S3./S0 ;

```

```
format long ;  
s1=mean(X)  
format long ;  
s1std=std(X,1)  
format long ;  
s2=mean(Y)  
format long ;  
s2std=std(Y,1)  
format long ;  
s3=mean(Z)  
format long ;  
s3std=std(Z,1)
```



## 附錄 C

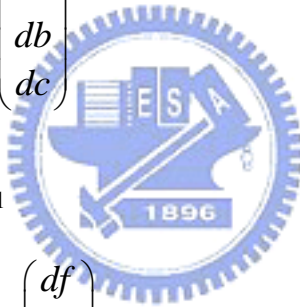
### 變數變換 Jacobian matrix

$f$ 、 $g$ 、 $h$  為三個實驗上的量測量，其理論式為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三個

參數的函數  $f(a,b,c)$ 、 $g(a,b,c)$ 、 $h(a,b,c)$ 。

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot dc \\ \Rightarrow dg &= \frac{\partial g}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial g}{\partial c} \cdot dc \\ dh &= \frac{\partial h}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial h}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial h}{\partial c} \cdot dc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \begin{pmatrix} df \\ dg \\ dh \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial g}{\partial a} & \frac{\partial g}{\partial b} & \frac{\partial g}{\partial c} \\ \frac{\partial h}{\partial a} & \frac{\partial h}{\partial b} & \frac{\partial h}{\partial c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial g}{\partial a} & \frac{\partial g}{\partial b} & \frac{\partial g}{\partial c} \\ \frac{\partial h}{\partial a} & \frac{\partial h}{\partial b} & \frac{\partial h}{\partial c} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} df \\ dg \\ dh \end{pmatrix}\end{aligned}$$



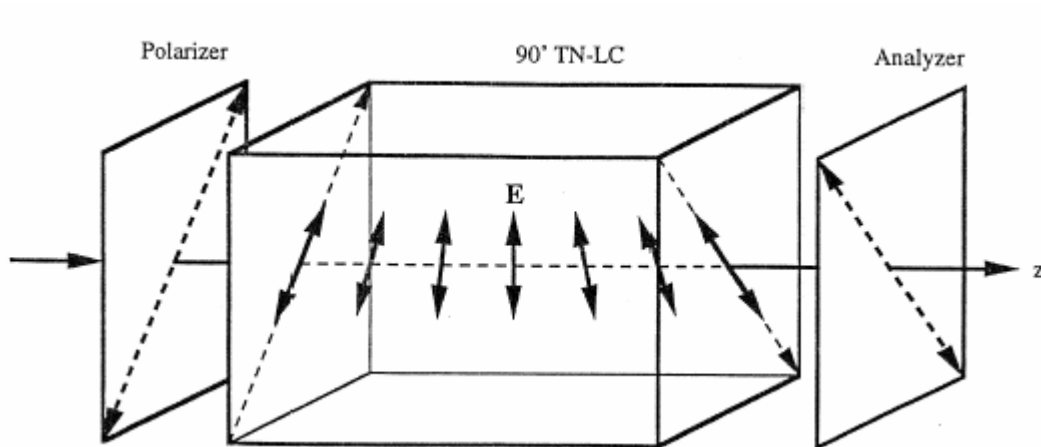
根據以上推導，我們可藉由實驗數據標準差  $df$ 、 $dg$ 、 $dh$  反推出參

數的標準差  $da$ 、 $db$ 、 $dc$ 。

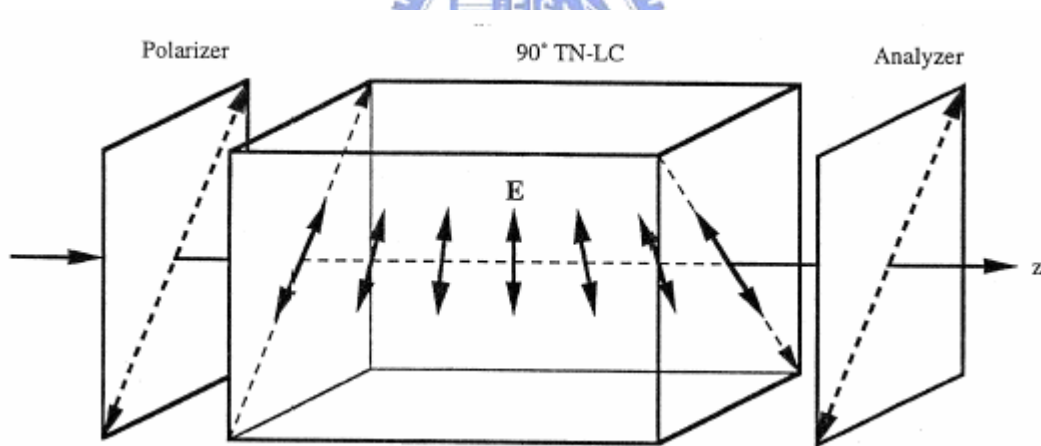
## 附錄 D

### 偏振追隨 (Adiabatic Following) 的穿透特性 [5]

下圖為無外加電場下 TN displays 的示意圖：



(a) 無外加電場時，入射光可穿透 (normally white - NW TN displays)



(b) 無外加電場時，入射光不穿透 (normally black - NB TN displays)

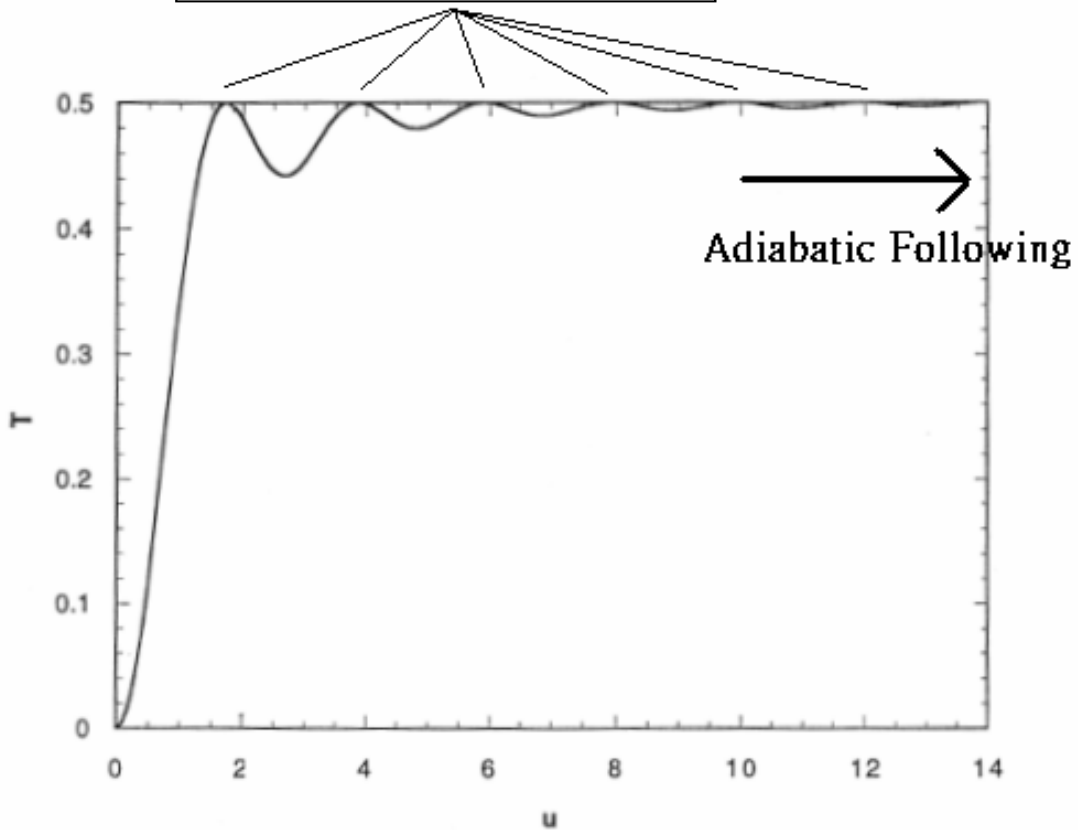
起偏片透光軸與第一層液晶取向平行，液晶盒扭轉角  $\Phi$  為  $90^\circ$ ，析光片透光軸垂直起偏片透光軸 (NW TN displays) 或平行 (NB TN displays)。假設液晶盒矩陣同等於一旋轉矩陣，對 NW TN displays，其出射光等於出射起偏片的光強度，可視為完全穿透；對 NB TN displays，其出射光強為零，可視為完全不穿透。根據章節 2.4

所推導出的液晶盒矩陣模型，經矩陣運算，可得到出射光對總相位延

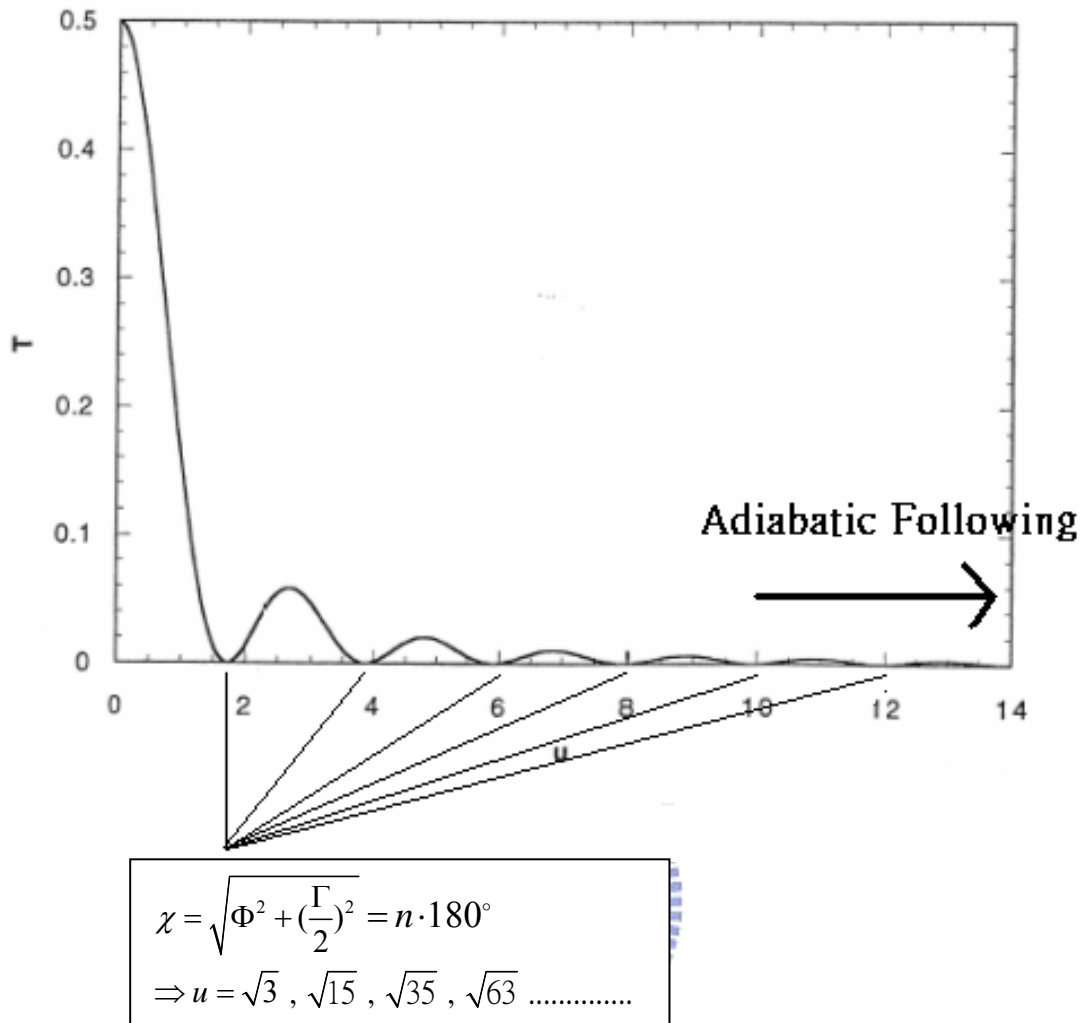
遲 ( $\Gamma$ ) 的理論圖形如下：  $(u = \frac{\Gamma}{2 \cdot \Phi} = \frac{\Gamma}{180^\circ})$

$$\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = n \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{3}, \sqrt{15}, \sqrt{35}, \sqrt{63} \dots\dots\dots$$



(a) NW TN displays ( $\Gamma$  vs  $u$ )



(b) NB TN displays (T vs u)

觀察圖形，當  $\chi = \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = n \cdot 180^\circ$ ，液晶盒矩陣模型同等於一旋轉矩陣 (章節 4.2.2)，我們可得到理想的亮、暗態 (完全穿透及完全不穿透)；當 u 值增大 ( $\Gamma \gg \Phi$ )，滿足偏振追隨的條件近似，亮、暗態表現越來越近似理想，但離理想仍有些許差異。