

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

雙對稱斷面開口薄壁梁之幾何非線性動態分析
的一致性共旋轉推導法

A consistent co-rotational formulation for Geometric Nonlinear
Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled open-section
Beams

研究生：高嘉鴻

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百零三年九月

雙對稱斷面開口薄壁梁之幾何非線性動態分析
的一致性共旋轉推導法

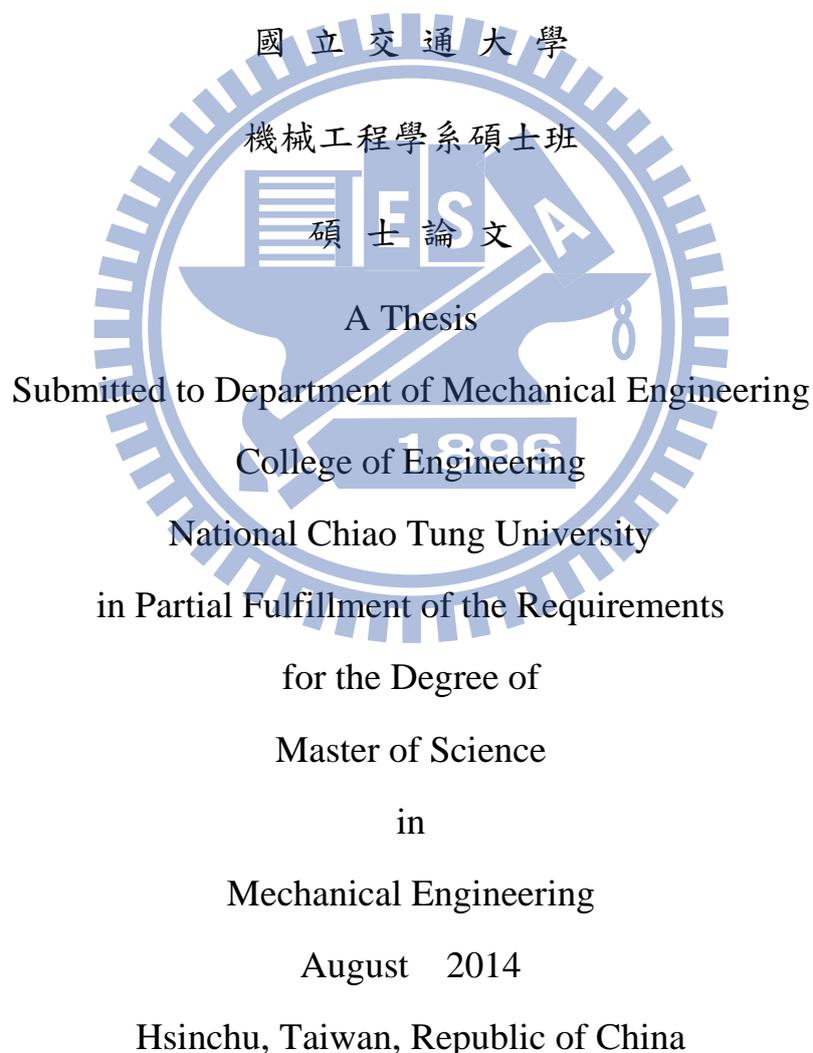
A consistent co-rotational formulation for Geometric Nonlinear
Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled
open-section Beams

研究生：高嘉鴻

Student：Chia-Hung Kao

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao



中華民國一百零三年九月

雙對稱斷面開口薄壁梁之幾何非線性動態分析 的一致性共旋轉推導法

A consistent co-rotational formulation for Geometric Nonlinear
Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled
open-section Beams

研究生：高嘉鴻

指導教授：蕭國模博士



國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究以一致性共旋轉法推導一個雙對稱斷面開口薄壁尤拉梁元素，探討三維梁之非線性動態反應。

本文中推導的梁元素有兩個節點十四個自由度。本研究用元素節點對固定座標的位移及旋轉向量更新其位置及其斷面的方位，並在梁元素節點當前的位置及斷面方位建立一個固定元素座標及與其重合的移動元素座

標。本研究用三個旋轉參數來描述元素斷面的方位與元素座標的關係。本研究利用在當前固定元素座標的元素節點位移、旋轉向量及其擾動量、速度、加速度、角速度、角加速度，推導出元素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉向量與元素節點旋轉參數之擾動量的關係、擾動後之移動元素座標與當前固定元素座標的關係、移動元素座標的角速度及角加速度、元素節點的變形參數對時間的一次及二次微分。本研究利用虛功原理和 D'Alembert 原理，以及完整的幾何非線性梁理論的一致性二階線性化在當前的固定元素座標推導元素節點變形力及慣性力。本研究由元素節點變形內力的改變與擾動位移的關係推導梁元素的切線剛度矩陣。本研究將元素節點慣性力表示成元素節點之絕對速度、加速度、角速度、角加速度的函數，所以元素的質量矩陣與陀螺效應之關係矩陣分別由元素的節點慣性力對元素之節點加速度向量的微分及元素之節點速度向量的微分求得。本研究發現以一致性共旋轉推導法與共旋轉全拉格朗日推導法得到的節點慣性力有些差異，但這些差異會在元素增加時會趨近於零。

本研究以數值例題說明本研究之梁元素的準確性，並探討本文之一致性共旋轉法與文獻上共旋轉全拉格朗日法在動態分析時之差異性。另外本研究比較 Newmark 積分法與中央差分法在不同例題之效率及準確性。

A consistent co-rotational formulation for Geometric Nonlinear
Dynamic Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled
open-section Beams

Student : Chia-Hung Kao

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

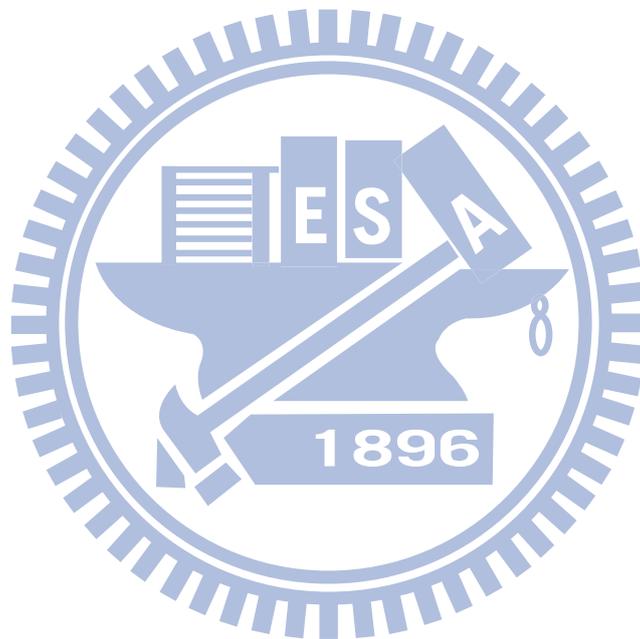
A consistent co-rotational (CCR) finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of doubly symmetric thin-walled beam with large rotations but small strain is presented. The element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the centroids of the end cross sections of the beam element and the centroid axis is chosen to be the reference axis. A rotation vector is used to represent the finite rotation of coordinate systems rigidly tied to each node of the discretized structure. The incremental nodal displacement vectors and rotation vectors in global coordinates are used to update the node locations and orientation of the element. The deformations of the beam element are described in a current moving element coordinate system constructed at the current node locations and orientation of the beam element. Three rotation parameters are defined to describe the relative orientation between the element cross section coordinate system rigidly tied to the

unwrapped cross section and the current element coordinate system. The element equations are derived in a fixed current element coordinates which are coincident with the current moving element coordinates. The perturbed displacements and spatial rotation, velocity and acceleration, angular velocity and angular acceleration of the current moving element coordinates, and the variation of the element nodal rotation parameters corresponding to the perturbation of element nodal displacement vectors and rotation vectors in the current fixed element coordinates are consistently determined and expressed in terms of the current element nodal displacements and rotation parameters, nodal velocities and accelerations, and nodal angular velocities and angular accelerations. The element deformation and inertia nodal forces are derived using the virtual work principle, the d'Alembert principle, and the consistent second order linearization of the fully geometrically nonlinear beam theory. In element deformation nodal forces, all coupling among bending, twisting, and stretching deformations of the beam element is considered. In the element inertia nodal forces, the terms up to the second order of time derivatives of deformation parameters are retained. However, the coupling between rotation parameters and their time derivatives are not considered in the element inertia nodal forces. In this study, the element inertia nodal forces are expressed in terms of element nodal velocities and accelerations, and nodal angular velocities and accelerations. Thus, the element inertia matrices may be obtained by differentiating the element inertia nodal forces with respect to the element nodal velocities and accelerations.

There is a slight difference between the present element inertia nodal forces and that derived using corotational total Lagrangian (CRTL) formulation. However, the effect of the difference may be negligible with the decrease of

element size.

An incremental-iterative method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson method is employed for the solution of nonlinear equations of motion. Numerical examples are presented to investigate the accuracy and efficiency of the proposed method. It is found that the difference between the dynamic responses obtained using CCR formulation and CRTL formulation is negligible for all examples studied.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士這兩年在學業上的指導以及生活上的照顧，使得本文能夠順利完成，在此致上最高的敬意和謝意。同時也感謝蔡佳霖老師、尹慶中老師擔任口試委員，對本文提出了寶貴的建議。非常感謝黃楚璋、林琮琪、沈佳鴻、莊士緯學長對於學業的細心指導及日常生活的照顧，同學林群禮、學弟金長虹、蔡耀賢的朝夕相處以及課業上的相互討論，使我這兩年能順順利利的度過，在我的生活上亦幫助很多，十分感謝你們。

最後要感謝我的家人、親戚及朋友的鼓勵與支持，使我能完成這段學業，在此以此成果獻給所有關心我的人。

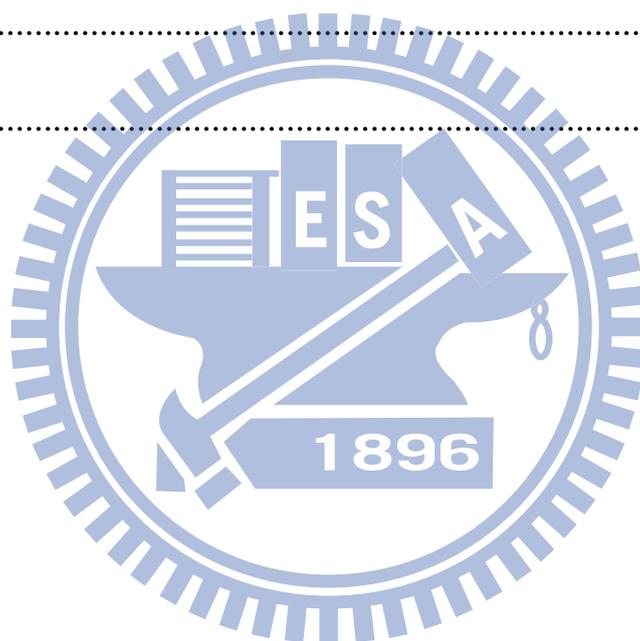


目錄

中文摘要	I
英文摘要	III
誌謝	VI
目錄	VII
表目錄	X
圖目錄	XI
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	5
2.1 基本假設	5
2.2 座標系統描述	5
2.3 旋轉向量	7
2.4 梁之剪心軸的位移及其斷面的旋轉	9
2.5 節點參數與節點力	13
2.6 元素斷面座標、移動元素座標、元素節點位移及旋轉 參數之決定	16
2.7 移動元素座標與固定元素座標的關係	17
2.7.1 擾動後之移動元素座標及元素節點參數	18
2.7.2 移動元素座標的角速度、角加速度與元素節點	

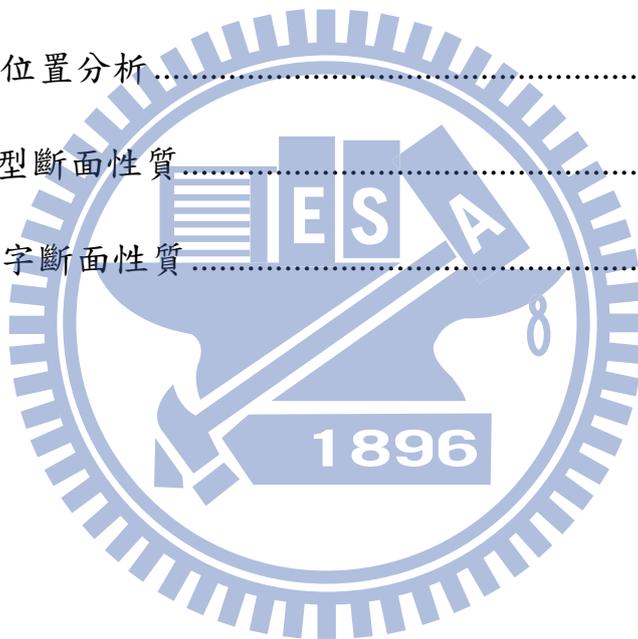
參數對時間的微分.....	22
2.8 梁元素之變形描述.....	27
2.8.1 梁元素之位置向量.....	27
2.8.2 梁元素之應變.....	28
2.8.3 梁元素應變之變分.....	31
2.9 元素節點力之推導.....	33
2.9.1 元素節點變形力向量之推導.....	35
2.9.2 元素節點慣性力向量之推導.....	39
2.10 元素剛度矩陣及質量矩陣.....	44
2.11 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣.....	50
2.12 系統平衡方程式與收斂準則.....	52
第三章 數值計算方法與程序.....	54
3.1 Newmark 直接積分法.....	54
3.1.1 Newmark 直接積分法.....	54
3.1.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme.....	56
3.2 中央差分法.....	57
第四章 數值例題與結果.....	60
第五章 結論.....	70
參考文獻.....	72
附表.....	76

附圖	84
附錄 A	139
附錄 B	148
附錄 C	161
附錄 D	163
附錄 E	172
附錄 F	177
附錄 G	184



表目錄

表一 例題二之 I 型斷面性質.....	76
表二 例題三之 I 型斷面性質.....	77
表三 例題四之矩型斷面性質.....	78
表四 例題五之 I 型斷面性質.....	79
表五 例題六之矩型斷面性質.....	80
表六 例題六質心位置分析.....	81
表七 例題七之 I 型斷面性質.....	82
表八 例題八之十字斷面性質.....	83



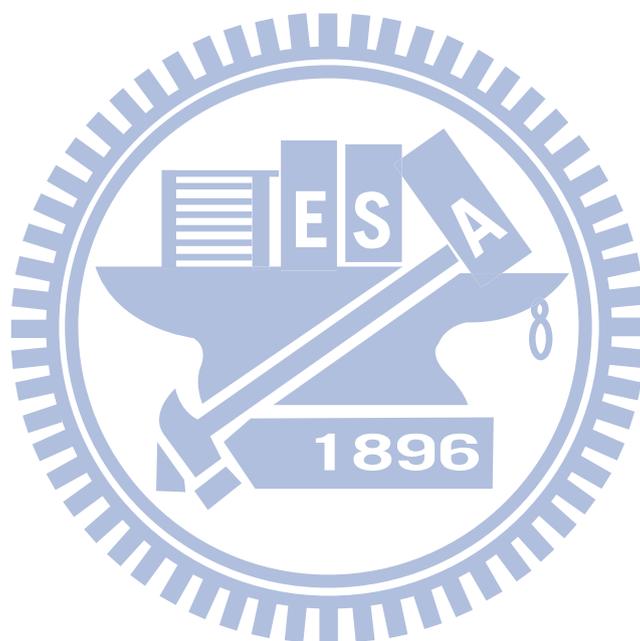
圖目錄

圖 2.1 元素座標以及元素截面座標	84
圖 2.2 固定元素座標與移動元素座標	85
圖 2.3 旋轉向量	86
圖 2.4 元素節點參數與節點力	86
圖 2.5 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第一步驟	87
圖 2.6 決定 x_2 軸與 x_3 軸之第二步驟	88
圖 2.7 剛性桿受力作用機制圖	89
圖 4.1 例題一懸臂直角梁之幾何及受力圖	90
圖 4.2 例題一 Newmark 積分法位移-時間曲線圖	91
圖 4.3 例題一數值方法不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較	92
圖 4.4 例題二 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖	93
圖 4.5 例題二簡支梁受偏心軸力之負荷-位移曲線圖	94
圖 4.6 例題二數值方法不同端點 B 之位移-時間曲線圖	95
圖 4.7 例題二數值方法不同端點 C 之位移-時間曲線圖	96
圖 4.8 例題二簡支梁受偏心軸力之位移-時間曲線圖($P_0 = 50kip$)....	97
圖 4.9 例題二簡支梁受偏心軸力之位移-時間曲線圖($P_0 = 100kip$)..	98
圖 4.10 例題二簡支梁受偏心軸力之位移-時間曲線圖 ($P_0 = 150kip$).....	99

圖 4.11 例題三 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖.....	100
圖 4.12 例題三簡支梁受力之負荷-位移曲線圖	101
圖 4.13 例題三簡支梁受力之位移-時間曲線圖	102
圖 4.14 例題四矩形斷面固端梁之幾何及受力圖.....	103
圖 4.15 例題四數值方法不同中點 C 之位移(Case (a))	104
圖 4.16 例題四數值方法不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b)) ..	105
圖 4.17 例題四數值方法不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b)) ..	106
圖 4.18 例題四數值方法不同中點 C 的轉角(Case (b)).....	107
圖 4.19 例題五直角懸臂梁之幾何及受力圖(Case (a)).....	108
圖 4.20 例題五直角懸臂梁之幾何及偏心受力圖(Case (b))	109
圖 4.21 例題五 C 點之負荷-位移曲線圖(Case(a)).....	110
圖 4.22 例題五 C 點之負荷-位移曲線圖(Case(b)).....	111
圖 4.23 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10 \text{ kip}$, $Q = 0$).....	112
圖 4.24 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10 \text{ kip}$, $Q = 0.001P$).....	113
圖 4.25 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10 \text{ kip}$, $Q = 0.01P$).....	114
圖 4.26 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0$).....	115
圖 4.27 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0.001P$)	116
圖 4.28 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0.01P$).....	117
圖 4.29 例題五 C 點之位移(Case(b), $P_0 = 10 \text{ kip}$).....	118

圖 4.30 例題五 C 點之位移(Case(b), $P_0 = 15 \text{ kip}$).....	119
圖 4.31 例題六三維矩形斷面梁之幾何及受力圖.....	120
圖 4.32 例題六 E 點之位移	121
圖 4.33 例題六質心在 X_2^G 位移.....	122
圖 4.34 例題六梁在三維空間中之變形位置圖($t=0\text{s}-t=20\text{s}$).....	123
圖 4.35 例題七 I 型斷面梁中點承受一偏心力之結構圖	124
圖 4.36 例題七 I 型斷面梁中點承受偏心力之負荷-位移 曲線圖($e = 0$).....	125
圖 4.37 例題七 I 型斷面梁中點承受偏心力之負荷-位移 曲線圖($e = b/2$).....	126
圖 4.38 例題七中點 C 在 X_2^G 方向的位移-時間曲線圖($P_0 = 10^5 \text{ lb}$).....	127
圖 4.39 例題七中點 C 在 X_3^G 方向的位移-時間曲線圖($P_0 = 10^5 \text{ lb}$).....	128
圖 4.40 例題七中點 C 的轉角-時間曲線圖($P_0 = 10^5 \text{ lb}$).....	129
圖 4.41 例題七中點 C 在 X_2^G 方向的位移-時間曲線圖 ($P_0 = 2 \times 10^5 \text{ lb}$).....	130
圖 4.42 例題七中點 C 在 X_3^G 方向的位移-時間曲線圖 ($P_0 = 2 \times 10^5 \text{ lb}$).....	131
圖 4.43 例題七中點 C 的轉角-時間曲線圖($P_0 = 2 \times 10^5 \text{ lb}$).....	132
圖 4.44 例題八十字斷面梁之幾何及受力圖.....	133

圖 4.45 例題八十字斷面梁中點之負荷-位移曲線圖	134
圖 4.46 例題八十字斷面梁中點承受一偏心力之 負荷-位移曲線圖.....	135
圖 4.47 例題八中點 C 在 X_2^G 方向的位移-時間曲線圖.....	136
圖 4.48 例題八中點 C 在 X_3^G 方向的位移-時間曲線圖.....	137
圖 4.49 例題八中點 C 的轉角-時間曲線圖.....	138



第一章 緒論

三維梁在結構工程系統中，長久以來一直扮演著非常重要的角色，在機械、航空太空、建築、車輛及土木工程中皆有很廣泛的應用。這些結構在使用中，常伴隨著高速旋轉及大變形，所以在結構設計及分析時，必須考慮其幾何非線性的動態反應。

常見的幾何非線性分析的推導方法有三種：全拉格朗日法(total Lagrangian formulation)、更新拉格朗日法(updated Lagrangian formulation)和共旋轉法(Co-rotational formulation)。全拉格朗日法是用初始狀態為參考位置來表示總位移和旋轉；更新拉格朗日法是以結構上一個平衡狀態為參考位置來表示增量位移和旋轉；共旋轉法是利用建立在元素當前變形位置的元素座標將剛體位移及旋轉從總位移及旋轉中扣除，剩下的位移和旋轉即為小位移和小旋轉，因此若使用共旋轉法，原本在線性分析的元素也可以應用在大位移、小應變的幾何非線性分析，共旋轉法在梁結構的幾何非線性分析已經被廣泛的使用[1-13]。

共旋轉法很少應用在非線性動態分析[7]，因為將元素運動分解成剛體運動以及變形，導致慣性項變得相當複雜[7]，所以在動態分析，大部分的文獻採用全拉格朗日法[14-18]，慣性項較為簡潔。

文獻[7]分別使用 Co-rotational 去處理變形力項，Total Lagrangian 去處

理慣性力項。文獻[1]使用 Consistent 2D Co-rotational formulation，該方法在動態與靜態皆是採用共旋轉法。文獻[9]將文獻[1]的 Consistent 2D Co-rotational formulation 延伸至 3D 梁結構，因為慣性項相當複雜，所以在慣性矩陣省略一些次要的項[7]，以加強迭代的計算效率。

文獻[2,6]在梁元素當前位置建立固定元素座標系統，元素受擾動前及擾動後變形皆在該固定元素座標系統上描述，再利用非線性梁理論、d'Alembert 原理、虛功原理推導梁元素的節點變形力、節點慣性力，此方法在推導上結合共旋轉法及全拉格朗日法，文獻[2,6]將此方法稱為共旋轉全拉格朗日推導法(Co-rotational Total Lagrangian(CRTL) formulation)。文獻[2]的梁元素有兩個節點，十二個自由度，並無考慮翹曲的自由度，該梁元素保留變形力至節點參數二次項，忽略變形對慣性力之影響，且不考慮轉換矩陣對慣性力之影響，慣性矩陣僅考慮質量矩陣。文獻[6]推導一個雙對稱斷面的開口薄壁梁元素，該梁元素有兩個節點，十四個自由度，考慮翹曲的自由度。該梁元素保留變形力至節點參數二次項，忽略變形對慣性力之影響，但考慮轉換矩陣對慣性力之影響，文獻[6]推導出的慣性力項相當簡單。

文獻 [5] 利用一致性共旋轉推導法 (Consistent Co-rotational(CCR) formulation) 推導一個不對稱斷面的開口薄壁梁元素，在移動元素座標上描述元素的變形，在一個與當前的移動元素座標重合的固定元素座標上，推

導出元素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉與元素節點旋轉參數的擾動量的關係。文中利用元素節點在當前固定元素座標的位移和旋轉及其擾動量、速度、加速度、角速度、角加速度，推導出移動元素座標的角速度及角加速度。最後利用非線性梁理論、d'Alembert 原理和虛功原理，推導出元素的節點變形力、節點慣性力，文獻[5]忽略變形及轉換矩陣對慣性力之影響，並在推導慣性力時，將節點的虛位移直接表示成定義在當前的固定元素座標上之節點參數的變分，以簡化慣性力的表示式，其慣性矩陣僅考慮質量矩陣。

上述的文獻[5]與文獻[6]在推導三維梁元素，方法上主要的差異為一致性共旋轉推導法(CCR) [5,9]在移動元素座標上描述元素的變形，共旋轉全拉格蘭日推導法(CRTL) [2,6]則在當前變形位置建立的固定元素座標上描述元素的變形。由於文獻[5]在移動元素座標上描述元素的變形，所以其絕對加速度的表示式包含了定義在當前的固定元素座標及移動元素座標之節點參數對時間的一次及二次微分，導致推導出之慣性力的表示式相當複雜，又因為文獻[5]推導的梁元素為不對稱斷面，使其慣性力更為複雜，而文獻[6]所推導出的慣性力則相對簡單。文獻[2,6]在推導上，使用之共旋轉全拉格蘭日推導法，僅需保留到變形參數的二次項，不過其精神接近全拉格蘭日法。因為在文獻上非線性動態分析很少使用一致性共旋轉推導法，因此本研究利用文獻[5]之一致性共旋轉推導法(CCR)推導一雙對稱斷面之開口薄

壁三維梁元素，探討三維梁之非線性動態行為，並與文獻[6]的梁元素比較兩種推導法的慣性項之差異與動態分析時之效率及準確性。為了方便與文獻[6]比較，本研究以文獻[5]的慣性力表示式為基礎，將元素的節點慣性力表示成定義在當前的固定元素座標上之節點參數對時間微分的函數。由於完整的慣性矩陣相當複雜，文獻[5]僅考慮對應於加速度的質量矩陣，本研究還考慮了對應於速度耦合項的慣性矩陣，即陀螺矩陣，因文獻[6]中發現考慮陀螺矩陣會改善平衡迭代的收斂速率。

第二章為理論推導，在推導時採用一致性共旋轉法，為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件、以及與結構變形位置相關的外力，定義四套座標系統，一致性共旋轉法在當前的移動元素座標定義元素的變形、節點變形參數，在當前的固定元素座標定義元素的節點位移向量及旋轉向量、節點位移向量及旋轉向量的擾動量，節點速度及加速度、節點角速度及角加速度、節點力、剛度矩陣、質量矩陣、陀螺矩陣。第三章介紹本研究求解非線性運動方程式的數值計算方法與程序，隱積分法使用 Newmark 直接積分法和 Newton-Raphson 增量迭代法來求解非線性動態平衡方程式，顯積分法使用中央差分法。第四章以數值例題探討本文所推導之慣性力、剛度矩陣、質量矩陣、陀螺矩陣之效率及準確性，並與文獻[6]比較結果之差異，以及比較 Newmark 積分法與中央差分法效率及準確性。

第二章 理論推導

本章採用一致性共旋轉法推導一個雙對稱斷面開口之薄壁梁元素，梁斷面之形心與剪心重合，本章推導梁元素之節點變形力、慣性力、剛度矩陣及慣性矩陣的推導方法和文獻[5]中所採用的方法大都相同。為了本文的完整性，本章將會重複與文獻[5]中相同的部分。

2.1 基本假設

本文對非線性梁元素的推導，作如下的假設：

- (1) 梁為細長的等斷面及雙對稱的開口薄壁梁，且Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3) 梁元素在斷面平面上沒有變形。
- (4) 梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。
- (5) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。

2.2 座標系統

本文採用一致性共旋轉法(Consistent Co-rotational formulation)。為了描述系統的運動、元素的變形、邊界條件、以及與結構變形位置相關的外力(configuration dependent load)，本文中共定義了四套直角座標系統，並說明如下：

- (1) 固定總體座標系統(圖2.1), $X_i^G (i=1, 2, 3)$; 系統的節點座標、方位、位移、旋轉、速度、加速度、角速度、角加速度, 系統的運動方程式, 其他座標系統之座標軸的方向餘弦, 皆在此座標系統中定義。
- (2) 元素座標系統(圖2.1, 圖2.2), $x_i (i=1, 2, 3)$ 、 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$; 本研究採用兩組元素座標, 一組為與元素一起剛體運動, 但不一起變形的移動元素座標 $x_i (i=1, 2, 3)$, 一組為固定在元素當前的變形位置之固定元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 。兩組元素座標在當前梁元素變形的位置上重合的。此座標系統附屬在每一梁元素上, 其原點位於該元素的節點1上, x_1 軸通過該元素的兩端節點(1、2, 即兩端斷面的剪心), x_2 軸與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致, 而元素變形後的 x_2 軸與 x_3 軸, 可由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定[13], 即分別將位於節點 1、2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形, 否則斷面的法線方向無法定義), 然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為 x_2 軸及 x_3 軸的方向。本研究在當前的移動元素座標定義元素的變形、節點變形參數, 在當前的固定元素座標定義元素的節點位移向量及旋轉向量、節點位移向量及旋轉向量的擾動量, 節點速度及加速度、節點角速度及角加速度、節點力、剛度矩陣、質量矩陣、陀螺矩陣。當梁元素在當前的變形位置受到擾動時, 擾動後的移動元素座標及對應的元素節點變形參數是由元素當前的元素座標及節點變形參數、節點位移向量與旋轉向量、擾動節點位移向量與旋轉向量決定。元素節點變形參數的擾動量是指元素在擾動前及擾動後, 移動元素座標上之節點變形參數的差。移動元素座標的速度、加速度、角速度、角加速度是由當前的元素節點速度、加速度、角速度、角加速度、節點變形參數決定。

(3) 元素斷面座標系統(圖2.1)， $x_i^S (i=1, 2, 3)$ ；此座標系統與元素的斷面一起平移和旋轉，其原點剛接於未翹曲斷面的形心上， x_1^S 軸為未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 軸與 x_3^S 軸分別與未翹曲斷面的主軸重合。元素的變形是由斷面座標相對於元素座標的旋轉來決定。

(4) 負荷基地座標系統， $X_i^P (i=1, 2, 3)$ ；此座標系統是用來描述與結構變形位置相關的作用力機制。該作用力機制造成的系統節點外力及力矩，和負荷剛度矩陣(load stiffness matrix)，皆建立在此座標系統中。此座標系統的原點剛接於與結構變形位置相關的作用力作用的節點上。

本文中用符號{}代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{X_1^G, X_2^G, X_3^G\}$ 與元素座標 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 、元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{x_1^S, x_2^S, x_3^S\}$ 、負荷基地座標 $\mathbf{X}^P = \{X_1^P, X_2^P, X_3^P\}$ 之關係可表示如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x}, \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S, \\ \mathbf{X}^G &= \mathbf{A}_{GP} \mathbf{X}^P, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 、 \mathbf{A}_{GP} 分別代表元素座標、元素斷面座標、負荷基地座標相對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

2.3 旋轉向量及其對時間的微分

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖2.3所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}$ 的作用而轉到一個新的位置 $\tilde{\mathbf{b}}$ ，向量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成[19]

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}\cos\phi + (1 - \cos\phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \sin\phi(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \\
&= \left[\mathbf{I} + \frac{\sin\phi}{\phi}(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) + \frac{1 - \cos\phi}{\phi^2}\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \right] \mathbf{b} \\
&= \mathbf{R}_\phi \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 \mathbf{I} 為 3×3 的單位矩陣， \times 表向量外積， \cdot 表向量內積， ϕ 表繞旋轉軸的旋轉角， \mathbf{e} 表旋轉軸的單位向量， \mathbf{R}_ϕ 稱為旋轉矩陣。

當 $\phi \ll 1$ 時， $\frac{\sin\phi}{\phi} = 1$ ， $\frac{1 - \cos\phi}{\phi^2} = \frac{1}{2}$ ， \mathbf{R}_ϕ 的近似式可表示成

$$\mathbf{R}_\phi = \mathbf{I} + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 \tag{2.3}$$

$$\Phi = \phi \times \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

其中 Φ 為對應於旋轉向量 ϕ 的反對稱矩陣

由(2.2)式 $\tilde{\mathbf{b}}$ 對時間的微分可表示成

$$\frac{d\tilde{\mathbf{b}}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{b} = \dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^t \tilde{\mathbf{b}} \tag{2.5}$$

因 $\tilde{\mathbf{b}}$ 的長度固定，所以其對時間的微分可表示成

$$\frac{d\tilde{\mathbf{b}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{b}} \tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 為角速度向量。

從(2.5)式和(2.6)式可得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^t \tag{2.7}$$

因 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}$ 為一反對稱矩陣，所以 $\dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^t$ 也為反對稱矩陣。

由(2.2)及(2.6)式可得 $\boldsymbol{\omega}$ 和旋轉向量 ϕ 對時間的一次微分有以下關係[3]：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\phi}) = [\mathbf{I} + a_1(\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + b_1\boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I})] \quad (2.8)$$

其中 $a_1 = \frac{1 - \cos\phi}{\phi^2}$ ， $b_1 = \frac{1}{\phi^2}(1 - \frac{\sin\phi}{\phi})$ ，當 $\phi \rightarrow 0$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $b_1 = \frac{1}{6}$ 。

當旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}$ 有一微小變量 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 時會使向量 $\tilde{\mathbf{b}}$ 繞 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸做微小旋轉 $\delta\varphi_i$ ， $\delta\boldsymbol{\phi}$ 與 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的關係和 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 與 $\boldsymbol{\omega}$ 的關係相同[3]，即

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.9)$$

將(2.8)式對時間微分可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\phi})\ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\phi}) = & \dot{a}_1(\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + \dot{b}_1\boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + a_1(\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{I}) \\ & + b_1\dot{\boldsymbol{\phi}} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) + b_1\boldsymbol{\phi} \times (\dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{I}) \end{aligned}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 為角加速度， $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ 為旋轉向量對時間的兩次微分。

由(2.8)、(2.10)式可知當 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ 時， $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ ， $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}$ 所以

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.12)$$

即在旋轉向量 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ 時，其對時間的一次、二次微分之值，等於角速度、角加速度。

2.4 梁之剪心軸的位移及其斷面的旋轉

本文是在當前的移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 上，描述梁元素當前的的變形，由2.1節中的基本假設可知，梁元素的變形可由其剪心軸在移動元素座標上的位移及其斷面繞剪心軸的旋轉決定。本文以梁元素之剪心軸為參考軸、以梁元素兩端斷面的剪心為節點，節點自由度及廣義力都在剪心上

定義，所以本文在描述梁元素的變形前，先描述其剪心軸的位移及其斷面的旋轉。

本文中若 $()$ 表示定義於移動元素座標中的變數，則 $(\bar{\quad})$ 表示定義於固定移動元素座標中的對應變數，在當前梁元素變形的位置上，固定元素座標與移動元素座標是重合的，所以定義在兩座標系統的對應變數有相同的值，但其擾動量及對時間的微分並不相同。

令梁剪心軸上的任一點P(見圖2.1)，在不計扭轉翹曲時，變形前後的位置向量分別為 $\{x, 0, 0\}$ 及 $\{x_p(x,t), v(x,t), w(x,t)\}$ ，其中 $v(x,t)$ 與 $w(x,t)$ 為剪心軸的側向位移。

本文中符號 $()'$ 代表 $()_{,x} = \partial() / \partial x$ 。變形後剪心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos\theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.13)$$

$$\cos\theta_n = \frac{\partial x_p(x,t)}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.14)$$

$$\theta_2 = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.15)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v(x,t)}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \varepsilon_o} \quad (2.16)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_o = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.17)$$

其中 θ_n 為元素座標之 x_1 軸和 \mathbf{t} 的夾角， s 為節點1至點P間的剪心軸在不計扭轉翹曲時，變形後的弧長， ε_o 為剪心軸的單位伸長量(unit extension)。

由梁剪心軸上的任一點P在變形後的位置向量及(2.14)至(2.17)式，在 ε_o 、 $v_{,x}$ 與 $w_{,x}$ 都遠小於1時， $x_p(x,t)$ 可以表示成

$$x_p(x,t) = \int_0^x (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.18)$$

由(2.18)式可知 $u_1 = x_p(0,t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由移動元素座標系統的定義方式可知 u_1 、其擾動量 δu_1 及對時間的微分都為零。

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.18)式，可以得到形心軸單位長度伸長量 ε_o 可表示如下

$$\varepsilon_o = \frac{\ell - L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.19)$$

$$\ell = x_p(L,t) = \int_0^L (1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.20)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， ℓ 為梁元素變形後之形心軸的弦長，由移動元素座標的定義方式節點2在 x_1 方向的位移 u_2 可以表示成

$$u_2 = \ell - L \quad (2.21)$$

本文用元素斷面座標軸的旋轉表示梁之斷面的旋轉。令 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$)分別代表移動元素座標的 x_i ($i=1,2,3$)方向的單位向量與元素斷面座標的 x_i^S ($i=1,2,3$)軸方向的單位向量。由座標系統的定義方式可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S 軸的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_1^S 與(2.13)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$)的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$)來決定：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{n} = \{0, \theta_2/(\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3/(\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\}, \quad (2.24)$$

其中 \mathbf{n} 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 定義於(2.14)式， \mathbf{t} 定義於(2.13)式， θ_1 為斷面繞 \mathbf{t} 旋轉的角度。

旋轉向量 θ_n 作用在 \mathbf{e}_i 上，將其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ($i=1, 2, 3$)，此時 \mathbf{e}'_1 與 \mathbf{t} 重合，再將 θ_t 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 θ_n 、以及 θ_t 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 θ_n 與 θ_t 亦唯一決定。

由(2.2)、(2.13)、(2.14)式與(2.22)–(2.24)式， \mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$) 之關係可表示如下

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t} \quad \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_\theta \mathbf{e}_i \quad (2.25)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R}_θ 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R}_θ 為 θ_i ($i=1, 2, 3$) 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

本文中假設梁元素變形後的剪心軸，其側向位移 $v(x,t)$ 與 $w(x,t)$ 及剪力中心軸的扭轉角 $\theta_1(x,t)$ 皆為 x 的三次Hermitian氏多項式。因此(2.17)式之 $v(x,t)$ 與 $w(x,t)$ 可表成

$$v(x,t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.26)$$

$$w(x,t) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w'_1, w_2, -w'_2\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.27)$$

$$\theta_1(x,t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), & N_2 &= \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), & N_4 &= \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.30)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v'_j 及 w'_j 則是(2.17)式中 v' 及 w' 在節點 j ($j=1, 2$) 之節點值， θ_{1j} ($j=1, 2$) 是(2.23)式之 θ_1 在節點 j 的節點值， β_j ($j=1, 2$) 是 $\theta_{1,x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 代表形狀函數(shape function)。由移動座標的定義方式可知 v_j 與 w_j ($j=1, 2$)，其變分及其對時間的微分皆為零。

2.5 節點參數與節點力

本文中用旋轉向量描述梁元素兩端節點之斷面的有限旋轉，但用旋轉參數描述梁元素在兩端節點及內部之斷面的有限旋轉，因對應於旋轉向

量及旋轉參數的廣義力矩不一樣且非向量，所以不同元素在共同節點的廣義力矩不能以向量的方式相加，傳統力矩為向量，所以本文將元素節點的廣義力矩轉換成等效的傳統力矩，使其能以向量的方式相加，因對應於傳統力矩向量的廣義位移為繞該力矩向量的微小旋轉，所以本文在推導梁元素時需使用以下七類元素節點參數：

(1) \bar{u}_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)，如圖2.4所示， \bar{u}_{ij} ($\bar{u}_{1j} = \bar{u}_j$ ， $\bar{u}_{2j} = \bar{v}_j$ ， $\bar{u}_{3j} = \bar{w}_j$) 為元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 在其當前的固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，由固定元素座標系統的定義方式可知 \bar{u}_{ij} 中除了 \bar{u}_{12} 外，其餘的值皆為零，但 \bar{u}_{ij} 的增量 $\Delta\bar{u}_{ij}$ 、 \bar{u}_{ij} 的擾動量 $\delta\bar{u}_{ij}$ 、及 \bar{u}_{ij} 對時間的微分 $\dot{\bar{u}}_{ij}$ 、 $\ddot{\bar{u}}_{ij}$ 並不為零。對應於 $\delta\bar{u}_{ij}$ 的廣義節點力 f_{ij} ，為在 \bar{x}_i 軸方向的力。

(2) $\delta\phi_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， $\delta\phi_{ij}$ 是元素節點 j 繞其當前的固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 的擾動旋轉，對應於 $\delta\phi_{ij}$ 的廣義節點力 m_{ij}^ϕ ，為繞 \bar{x}_i 軸的傳統力矩(見圖 2.4)。

(3) ϕ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， ϕ_{ij} 是元素節點 j 的旋轉向量 ϕ_j 在其固定元素座標軸 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，本研究中，在任何時刻及位置都將節點的旋轉向量 ϕ_j 的值重新設定為零，但 ϕ_{ij} 的增量 $\Delta\phi_{ij}$ 、擾動量 $\delta\phi_{ij}$ 及對時間的微分並不為零。對應於 $\delta\phi_{ij}$ 的廣義節點力 m_{ij}^ϕ 為一廣義力矩。因 ϕ_j 的值重新設定為零，由(2.8)及(2.9)式可知 $\delta\phi_{ij}$ 和 $\delta\phi_{ij}$ 的值相同，所以廣義力矩 m_{ij}^ϕ 和傳統力矩 m_{ij}^ϕ 的值相同，且可視為是向量，但對應於 $\delta\phi_{ij}$ 和 $\delta\phi_{ij}$ 的切線剛度矩陣並不相同。

(4) u_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， u_{ij} ($u_{1j} = u_j$ ， $u_{2j} = v_j$ ， $u_{3j} = w_j$) 為元素節點 j 的位移向量 \mathbf{u}_j 在其當前的移動元素座標軸 x_i ($i=1, 2, 3$) 方向的分量，

由移動元素座標系統的定義方式可知除了 u_{12} 外， u_{ij} 、 u_{ij} 的增量 Δu_{ij} 、 u_{ij} 的擾動量 δu_{ij} 及 u_{ij} 對時間的微分 \dot{u}_{ij} 、 \ddot{u}_{ij} 的值皆為零。對應於 δu_{ij} 的廣義節點力 f_{ij}^θ ，為在 x_i 軸方向的力。

(5) θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， θ_{ij} 是元素旋轉參數 θ_i 在節點 j 的值， θ_1 定義於(2.23)式， θ_2 與 θ_3 定義於(2.15)與(2.16)式， θ_{ij} 是用來描述梁元素在兩端節點及內部之斷面的有限旋轉。因元素變形後 θ_{ij} 的值不為零，所以 $\delta\theta_{ij}$ 並不是繞 x_i 軸的無限小旋轉。

(6) β_j ($j=1, 2$)，如圖 2.4 所示， β_j 是梁元素之剪心軸的扭轉率 $\beta = \partial\theta_1 / \partial x$ 在元素節點 j 的值。對應於 β_j 之擾動量 $\delta\beta_j$ 的廣義節點力 B_j 為雙力矩(Bimoment)。 β_j 及 $\delta\beta_j$ 與標系統無關。

(7) θ_{ij}^* ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)， $\theta_{1j}^* = \theta_{1j}$ 、 $\theta_{2j}^* = -w'_j$ 、 $\theta_{3j}^* = v'_j$ ，其中 θ_{1j} 是元素旋轉參數 θ_1 在節點 j 的節點值， θ_1 定義於(2.23)式， v'_j 與 w'_j 為(2.17)式中 v' 與 w' 在節點 j 的節點值。本文中採用 θ_{ij}^* 及 β_j 來決定梁元素剪心軸的側向位移及軸向扭轉角。對應於 θ_{ij}^* 之擾動量 $\delta\theta_{ij}^*$ 的節點力為廣義力矩 m_{ij}^θ 。因為 θ_{ij}^* 在變形後不為零，所以 $\delta\theta_{ij}^*$ 並不是繞固定元素座標 x_i 軸的無限小旋轉，所以廣義力矩 m_{ij}^θ 並非繞固定元素座標 x_i 軸的傳統力矩。

本文中在元素節點 j ($j=1, 2$) 對應於元素節點參數 \bar{u}_{ij} 、 ϕ_{ij} 、 $\delta\phi_{ij}$ 及 β_j ($i=1, 2, 3$)的系統節點參數為 u_{ij}^G 、 ϕ_{ij}^G 、 $\delta\phi_{ij}^G$ 及 β_j ，其中 u_{ij}^G 是節點 j 的位移向量 \mathbf{u}_j^G 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1, 2, 3$)方向的分量； ϕ_{ij}^G 是元素節點 j 的旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j^G$ 在固定總體座標軸 X_i^G ($i=1, 2, 3$)方向的分量。本研究中，在任何時刻及位置都將節點的旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j^G$ 的值重新設定為零，但 ϕ_{ij}^G 的增量 $\Delta\phi_{ij}^G$ 、擾動量 $\delta\phi_{ij}^G$ 及對時間的微分並不為零。本文用元素節點 j ($j=1, 2$)的

位移增量 Δu_{ij}^G 及 $\Delta \phi_{ij}^G$ 決定當前的元素斷面座標、移動元素座標、元素節點變形位移 u_{ij} 及旋轉參數 θ_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) (詳見2.6節)，因本文中 ϕ_j^G 的值重新設定為零，所以由(2.9)式可知 $\Delta \phi_{ij}^G$ 和 $\Delta \phi_{ij}^G$ 的值相同。對應於 $\delta \phi_{ij}^G$ 的廣義節點力，為繞 X_i^G 軸的傳統力矩；對應於 u_{ij}^G 的擾動量 δu_{ij}^G 的廣義節點力為在 X_i^G 方向的力；因 β_j 與座標系統無關，對應於 $\delta \beta_j$ 的廣義節點力，亦為廣義雙力矩 (Bimoment) B_j 。 Δu_{ij}^G 、 $\Delta \phi_{ij}^G$ 與 $\Delta \bar{u}_{ij}$ 、 $\Delta \phi_{ij}$ 的關係可以由標準的座標轉換求得。

2.6 元素斷面座標、固定元素座標、元素節點位移及旋轉參數之決定

本文是使用增量迭代法 (incremental iterative method) 解非線性平衡方程式。假設第 I 個位置為已知，此處所謂的第 I 個位置，是指第 I 個增量的平衡位置，或是指某一增量中第 I 次迭代後的位置。本節中所有的向量都是表示成在總體座標的分量。令 ${}^I \mathbf{X}_j^G$ 、 ${}^I \bar{x}_{ij}^S$ 、 ${}^I \bar{\mathbf{e}}_{ij}^S$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 分別是在第 I 個變形位置時，元素節點 j 在總體座標的位置向量、元素斷面座標與元素斷面座標軸的單位向量。令 $\Delta \mathbf{u}_j^G$ 與 $\Delta \phi_j^G$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 在總體座標系統中的增量(或改正)位移向量與增量(或改正)旋轉向量。當元素節點 j ($j=1, 2$) 受到 $\Delta \mathbf{u}_j^G$ 及 $\Delta \phi_j^G$ 作用後，其當前的座標 \mathbf{X}_j^G 可由 ${}^I \mathbf{X}_j^G$ 加上 $\Delta \mathbf{u}_j^G$ 得到，當前的元素弦長 ℓ (即兩元素節點的距離) 及當前的固定元素座標之 \bar{x}_1 軸可以由 \mathbf{X}_j^G 求得， $\bar{u}_{12} = \bar{u}_2$ 的值可以由(2.21)式求得。當前的元素斷面座標 \bar{x}_{ij}^S 之座標軸的單位向量 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S$ 是將旋轉向量 $\Delta \phi_j^G$ 作用在 ${}^I \bar{\mathbf{e}}_{ij}^S$ 得到。

本文以下列方法決定在當前變形位置的固定元素座標[13]。

由通過當前元素兩節點的軸決定當前固定元素座標的 \bar{x}_1 軸。令 $\boldsymbol{\theta}_{nj}$ ($j=1, 2$) 為(2.22)式中旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 在節點 j 之節點值，由 $\boldsymbol{\theta}_n$ 的定義方式， $\boldsymbol{\theta}_{nj}$ 可以表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{nj} &= \theta_{nj} \mathbf{n}_j \\ \sin \theta_{nj} \mathbf{n}_j &= \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_{1j}^S\end{aligned}\quad (2.31)$$

其中 $\bar{\mathbf{e}}_1$ 為 \bar{x}_1 軸的單位向量， $\bar{\mathbf{e}}_{1j}^S$ 為 \bar{x}_{1j}^S ($j=1, 2$) 軸的單位向量。

當前固定元素座標的 \bar{x}_2 及 \bar{x}_3 軸可由下列兩個步驟決定：

步驟1：將旋轉向量 $-\boldsymbol{\theta}_{nj}$ 作用在 \bar{x}_{ij}^S 軸上(圖2.5)，使其旋轉到標示為 $\bar{x}_{ij}^{S'}$ (圖2.6)

的新位置。此時， $\bar{x}_{1j}^{S'}$ 軸與 \bar{x}_1 軸重合，且 $\bar{x}_{2j}^{S'}$ 和 $\bar{x}_{3j}^{S'}$ 軸與 \bar{x}_1 軸垂直。

步驟2：定義固定元素座標之 \bar{x}_i ($i=2, 3$) 軸的單位向量 $\bar{\mathbf{e}}_i$ ($i=2, 3$) 如下

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \frac{\bar{\mathbf{e}}_{i1}^{S'} + \bar{\mathbf{e}}_{i2}^{S'}}{\|\bar{\mathbf{e}}_{i1}^{S'} + \bar{\mathbf{e}}_{i2}^{S'}\|}\quad (2.32)$$

其中 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^{S'}$ ($i=2, 3; j=1, 2$) 為 $\bar{x}_{ij}^{S'}$ 軸的單位向量。

在當前的變形位置及固定元素座標上，元素節點的旋轉參數，可依下列的方法決定。令 $\theta_{1j} \bar{\mathbf{e}}_1$ ($j=1, 2$) 表示將 x_2 軸旋轉到 $\bar{x}_{2j}^{S'}$ 軸的旋轉向量，則由(2.23)式可知 θ_{1j} 為節點旋轉參數，本文中以下式計算 θ_{1j}

$$\theta_{1j} = \sin^{-1}(\bar{\mathbf{e}}_2 \times \bar{\mathbf{e}}_{2j}^{S'} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)\quad (2.33)$$

由(2.22)、(2.24)、以及(2.31)式，節點旋轉參數 θ_{ij} ($i=2, 3; j=1, 2$) 可用下式求得

$$\theta_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_{1j}^S \cdot \bar{\mathbf{e}}_i\quad (2.34)$$

2.7 移動元素座標與固定元素座標的關係

移動元素座標與固定元素座標在梁元素當前的變形位置上是重合的，但定義在固定元素座標的元素節點參數受到擾動時，移動元素座標就不再與固定元素座標重合，且定義在其上的元素節點參數亦有一對應的擾動，本節中將探討擾動後之移動元素座標與固定元素座標的關係及元素節點參數的改變量。本文中移動元素座標對固定元素座標的速度及加速度是由定義在固定元素座標的節點速度及加速度決定，本節中亦將推導其關係。

2.7.1 擾動後之移動元素座標及元素節點參數

令 t 表示當前的時間， \bar{x}_i 與 x_i ($i=1, 2, 3$) 表示在當前變形位置重合的固定元素座標與移動元素座標，在當前變形位置的固定元素座標與移動元素座標是重合的。本節中所有向量的分量都是在元素當前的變形位置之固定元素座標的分量。令 $\bar{\mathbf{u}}_j = \bar{\mathbf{u}}_j(t) = \{\bar{u}_{1j}, \bar{u}_{2j}, \bar{u}_{3j}\} = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j\}$ 、 $\phi_j = \phi_j(t) = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}\}$ ($j=1, 2$) 分別表示元素節點 j 當前的位移向量、旋轉向量， $\theta_{ij} = \theta_{ij}(t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 及 $\ell = \ell(t)$ 分別表示元素節點 j 當前的旋轉參數及元素當前的弦長。本文中旋轉向量 ϕ_j 的值在當前變形位置重新設定為零， $\bar{\mathbf{u}}_j$ 的分量除了 \bar{u}_{12} (即 \bar{u}_2) 外其餘的值皆為零，但因推導移動元素座標的速度、角速度、加速度及角加速度過程的需要，故仍保留全部的 ϕ_j 及 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 。

令 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 與旋轉向量 ϕ_j 的擾動量， δt 代表元素節點 j 受擾動的時間。當元素節點 j 受到 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta\phi_j$ ($j=1, 2$) 作用後，可由 2.5 節的方法及一致性一階線性化 (consistent first order linearization) 決定受擾動後的移動元素座標、元素節點旋轉參數 $\theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)、元素弦長 $\ell(t + \delta t)$ ，其推導過程詳見附錄 A。

令 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 、 $\mathbf{r}(t)$ 是為梁元素變形後，梁元素中任意點在當前的固定及移動

元素座標上的位置向量。梁元素受擾動後， $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 與 $\mathbf{r}(t + \delta t)$ 為該點在當前的固定元素座標及擾動後之移動元素座標的移動元素上的位置向量。由附錄 A 可知位置向量 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 與 $\mathbf{r}(t)$ 及 $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 與 $\mathbf{r}(t + \delta t)$ 有如下的關係

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)\mathbf{r}(t) + \bar{\mathbf{u}}_1(t) \quad (2.35)$$

$$\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) = {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)\mathbf{r}(t + \delta t) + \bar{\mathbf{u}}_1(t + \delta t) \quad (2.36)$$

$${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} + {}^{11}\mathbf{A}_{\bar{x}x} \quad (2.37)$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{l} \\ \frac{\Delta\bar{v}}{l} & 1 & -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \\ \frac{\Delta\bar{w}}{l} & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$${}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$${}^{11}\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{w}}{l}\delta\phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{v}}{l}\delta\phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{w}}{l}\delta\phi_{1m} & 0 & -A_1 \\ -\frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{v}}{l}\delta\phi_{1m} & A_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

其中 ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)$ ， ${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t)$ 分別為擾動前的移動元素座標相對於固定元素座標的方向餘弦矩陣及擾動後的移動元素座標相對於擾動前的元素座標的方向餘弦矩陣，

$$A_1 = \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{l} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{l} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} (\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} (\phi_{31} + \phi_{32})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{21} \right) + \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{32} \right) \\
& + \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{w}}{2\ell^2} - \frac{\Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{v}}{2\ell^2}, \quad \phi_{1m} = \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2}, \quad \delta \phi_{1m} = \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2}.
\end{aligned}$$

擾動後元素弦長可表示成(詳見附錄 A)

$$\ell(t + \delta t) = \ell + \delta \Delta \bar{u} + \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} \Delta \bar{v} + \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} \Delta \bar{w} \quad (2.41)$$

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1, \quad \Delta \bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \quad \Delta \bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \quad (2.42)$$

$$\delta \Delta \bar{u} = \delta \bar{u}_2 - \delta \bar{u}_1, \quad \delta \Delta \bar{v} = \delta \bar{v}_2 - \delta \bar{v}_1, \quad \delta \Delta \bar{w} = \delta \bar{w}_2 - \delta \bar{w}_1 \quad (2.43)$$

擾動後元素節點 j 的旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t + \delta t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 在擾動後的移動元素座標上可表示成(詳見附錄 A)

$$\hat{\theta}_{12} = -\hat{\theta}_{11} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\phi_{12} - \phi_{11}}{2} - \frac{\theta_{11}}{2} + \frac{\theta_{12}}{2} - \frac{\delta \phi_{11}}{2} + \frac{\delta \phi_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) \\
& - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta \phi_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \delta \phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta \phi_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \delta \phi_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} (\delta \phi_{22} - \delta \phi_{21}) \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} (\delta \phi_{32} - \delta \phi_{31}) + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{2j} & = \underbrace{\phi_{2j} + \frac{\Delta \bar{w}}{\ell}} + \theta_{2j} + \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{2j} + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \delta \phi_{1j} \\
& + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{3j} \right) \\
& - \frac{\Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{3j} \delta \phi_{1j} - \frac{1}{2} \phi_{1j} \delta \phi_{3j}
\end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_{3j} = \underbrace{\phi_{3j} - \frac{\Delta \bar{v}}{\ell}} + \theta_{3j} - \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} + \delta \phi_{3j} - \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \delta \phi_{1j}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} \right) \\
& + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{1j} + \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{2j}
\end{aligned}$$

(2.44)式中加底線之項可視為在擾動前之元素座標上之節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t)$ 。本文中元素節點旋轉參數的擾動量 $\delta\theta_{ij}$ ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 為擾動後元素節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t+\delta t)$ 與擾動前元素節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t)$ 的差，即

$$\delta\theta_{ij} = \hat{\theta}_{ij}(t+\delta t) - \hat{\theta}_{ij}(t) \quad (2.45)$$

詳見附錄A之(A. 38)–(A. 43)式。

本文中元素的弦長及元素節點旋轉參數的擾動量指擾動前後之元素弦長的差及節點旋轉參數的差。由(2.41)式可得

$$\delta\ell = \ell(t+\delta t) - \ell = \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell}\Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}\Delta\bar{w} \quad (2.46)$$

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$)的定義可知元素節點位移在 x_i 方向的擾動可表示成

$$\delta u_1 = \delta v_j = \delta w_j = 0 \quad (2.47)$$

由(2.21)、(2.41)及(2.46)式可得

$$\delta u_2 = \delta\ell = \delta\Delta\bar{u} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell}\Delta\bar{v} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}\Delta\bar{w} \quad (2.48)$$

由(2.15)、(2.16)式可得

$$\delta\theta_{2j}^* = -\delta w'_j = (1 + \varepsilon_o)\delta\theta_{2j} + \theta_{2j}\delta\varepsilon_o \quad (2.49)$$

$$\delta\theta_{3j}^* = \delta v'_j = (1 + \varepsilon_o)\delta\theta_{3j} + \theta_{3j}\delta\varepsilon_o$$

其中 ε_o 為剪心軸的單位伸長量，定義於(2.19)式， $\delta\theta_{ij}$ ($i=2, 3; j=1, 2$) 為(2.45)式之元素旋轉參數 θ_i 在元素節點 j 的擾動量。

2.7.2 移動元素座標的角速度、角加速度與元素節點參數對時間的微分

本文中 $(\dot{\quad})$ 代表 (\quad) 對時間的微分。令 $\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_{1j}, \dot{u}_{2j}, \dot{u}_{3j}\} = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_{1j}, \ddot{u}_{2j}, \ddot{u}_{3j}\} = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}$ 、 $\dot{\phi}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$ 與 $\ddot{\phi}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$ ($j=1, 2$) 分別代表在時間 t ，元素節點 j 在當前的固定元素座標中的絕對速度、絕對加速度、絕對角速度、絕對角加速度。

令 $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) = \bar{\mathbf{r}}(t) + \delta \bar{\mathbf{r}}$ 及 $\bar{\mathbf{u}}_1(t + \delta t) = \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \delta \bar{\mathbf{u}}_1$ ，由(2.35)–(2.40)式，梁元素中任意點在當前的固定元素座標上的絕對速度可表示成

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t)}{\delta t} = {}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}} \mathbf{r} + {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1(t) \quad (2.50)$$

$${}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{{}^1\mathbf{A}_{\bar{x}\bar{x}}(t + \delta t) - \mathbf{I}_3}{\delta t} = {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} + {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} = \boldsymbol{\Omega} + {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} \quad (2.51)$$

$${}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} = \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} & -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l} \\ \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} & 0 & -\frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \\ \frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l} & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$${}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta \bar{v} \Delta \dot{\bar{u}}}{l^2} - \frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_x & \frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{\bar{u}}}{l^2} + \frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_x \\ -\frac{\Delta \bar{v} \Delta \dot{\bar{u}}}{l^2} + \frac{\Delta \bar{w}}{l} \Omega_x & 0 & -\dot{A}_1 \\ -\frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{\bar{u}}}{l^2} - \frac{\Delta \bar{v}}{l} \Omega_x & \dot{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\Omega_x = \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2}, \quad \Omega_y = -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l}, \quad \Omega_z = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} \quad (2.54)$$

$$\Delta \dot{\bar{u}} = \dot{u}_2 - \dot{u}_1 \quad (2.55)$$

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{l} (\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{l} (\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) + \frac{1}{4} \Omega_z (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{1}{4} \Omega_y (\phi_{31} + \phi_{32})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \theta_{31} (-\Omega_y + \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{4} \theta_{32} (-\Omega_y + \dot{\phi}_{22}) + \frac{1}{4} \theta_{21} (\Omega_z - \dot{\phi}_{31}) + \frac{1}{4} \theta_{22} (\Omega_z - \dot{\phi}_{32}) \\
& - \frac{\Delta \bar{v} \Omega_y}{2\ell} - \frac{\Delta \bar{w} \Omega_z}{2\ell}
\end{aligned}$$

其中(2.50)式中 $\dot{\mathbf{u}}_1$ 為元素節點1的絕對速度，亦為移動元素座標的速度，(2.51)式中之 ${}^1\dot{\mathbf{A}}_{xx}$ 為移動元素座標的角速度矩陣(Angular velocity matrix)，因本文中不考慮隨元素減小時會趨近於零的變形參數，角速度矩陣僅考慮(2.52)式中之 Ω ，故(2.51)式中之 Ω_x 、 Ω_y 及 Ω_z 可視為移動元素座標對固定元素座標之 \bar{x}_i 軸的角速度。因推導移動元素座標的角加速度的需要，(2.53)式中之 ${}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{xx}$ 仍需保留， $\dot{\mathbf{r}}$ 梁元素中任意點在當前的移動元素座標上的速度。

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$)的定義，可知元素節點在 x_i 方向對移動元素座標的速度中

$$\dot{u}_1 = \dot{v}_j = \dot{w}_j = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.56)$$

由(2.21)及(2.41)式可得

$$\dot{u}_2 = \dot{\ell} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ell(t + \delta) - \ell(t)}{\delta} = \Delta \dot{u} + \Omega_z \Delta \bar{v} - \Omega_y \Delta \bar{w} \quad (2.57)$$

由(2.45)、(A.38)–(A.43)式及 $\dot{\theta}_{ij} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta \theta_{ij}}{\delta t}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$)可得

$$\dot{\theta}_{12} = -\dot{\theta}_{11} = -\frac{\dot{\phi}_{11}}{2} + \frac{\dot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \theta_{31} \dot{\phi}_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \dot{\phi}_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \dot{\phi}_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \dot{\phi}_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} (\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} (\dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31}) \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31})
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_{2j} = \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} \right) + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} \right) - \frac{\Delta \bar{w} \Delta \dot{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{3j} \dot{\phi}_{1j} - \frac{1}{2} \phi_{1j} \dot{\phi}_{3j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_{3j} &= -\frac{\Delta\dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \dot{\phi}_{1j} \\
&\quad - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) + \frac{\Delta\bar{v}\Delta\dot{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{2j} \dot{\phi}_{1j} + \frac{1}{2} \phi_{1j} \dot{\phi}_{2j} \\
\dot{\theta}_{21} &= \frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{31} - \theta_{31} \dot{\phi}_{11} \\
&\quad + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{31} \right) + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{31} \right) - \frac{\Delta\bar{w}\Delta\dot{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{31} \dot{\phi}_{11} - \frac{1}{2} \phi_{11} \dot{\phi}_{31} \\
\dot{\theta}_{22} &= \frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{32} - \theta_{32} \dot{\phi}_{12} \\
&\quad + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{32} \right) + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{32} \right) - \frac{\Delta\bar{w}\Delta\dot{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{32} \dot{\phi}_{12} - \frac{1}{2} \phi_{12} \dot{\phi}_{32} \\
\dot{\theta}_{31} &= -\frac{\Delta\dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{31} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{21} + \theta_{21} \dot{\phi}_{11} \\
&\quad - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{21} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{21} \right) + \frac{\Delta\bar{v}\Delta\dot{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{21} \dot{\phi}_{11} + \frac{1}{2} \phi_{11} \dot{\phi}_{21} \\
\dot{\theta}_{32} &= -\frac{\Delta\dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{32} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \theta_{22} + \theta_{22} \dot{\phi}_{12} \\
&\quad - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{22} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{22} \right) + \frac{\Delta\bar{v}\Delta\dot{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{22} \dot{\phi}_{12} + \frac{1}{2} \phi_{12} \dot{\phi}_{22}
\end{aligned}$$

將(2.15)、(2.16)式對時間微分並取其於節點 j ($j=1, 2$) 之值可得

$$\dot{\theta}_{2j}^* = -\dot{w}'_j = (1 + \varepsilon_o) \dot{\theta}_{2j} + \theta_{2j} \dot{\varepsilon}_o \quad (2.59)$$

$$\dot{\theta}_{3j}^* = \dot{v}'_j = (1 + \varepsilon_o) \dot{\theta}_{3j} + \theta_{3j} \dot{\varepsilon}_o$$

其中 $\dot{\theta}_{ij}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已在(2.58)式中定義。

梁元素中任意點在當前的固定元素座標上的絕對加速度可由(2.50)式對時間微分求得，若不考慮隨元素減小時會趨近於零的變形參數，(2.50)式對時間微分可表示成

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}(t) &= {}^1\ddot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} \mathbf{r} + {}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} {}^0\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} \mathbf{r} + {}^1\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} \dot{\mathbf{r}} + {}^0\dot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x} \dot{\mathbf{r}} + {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}_1(t) \\
&= (\dot{\boldsymbol{\Omega}} + {}^1\ddot{\mathbf{A}}_{\bar{x}x}) \mathbf{r} + (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}_1(t) = (\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}_1(t)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} -\Omega_z^2 - \Omega_y^2 & \Omega_x\Omega_y & \Omega_x\Omega_z \\ \Omega_x\Omega_y & -\Omega_z^2 - \Omega_x^2 & \Omega_y\Omega_z \\ \Omega_x\Omega_z & \Omega_y\Omega_z & -\Omega_y^2 - \Omega_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= \frac{\ddot{\phi}_{11} + \ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{2}\Omega_z(\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) - \frac{1}{2}\Omega_y(\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) \\
\alpha_y &= -\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{\ell} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell}\Omega_y + \Omega_z\Omega_x \\
\alpha_z &= \frac{\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1}{\ell} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{\ell}\Omega_z - \Omega_y\Omega_x
\end{aligned}$$

其中(2.60)式中 $\ddot{\mathbf{u}}_1$ 為元素節點1的絕對加速度，亦為移動元素座標的加速度 $\boldsymbol{\Omega}$ ，已在(2.52)式定義， α_x 、 α_y 及 α_z 為移動元素座標對固定元素座標之 \bar{x}_i 軸的角加速度， $\dot{\mathbf{r}}$ 梁元素中任意點在當前的移動元素座標上的加速度。

由移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$)的定義，可知元素節點在 x_i 方向對移動元素座標的加速度中

$$\ddot{u}_1 = \ddot{v}_j = \ddot{w}_j = 0 \quad (j=1, 2) \tag{2.62}$$

將(2.57)式對時間微分可得

$$\ddot{u}_2 = \ddot{\ell} = \Delta\ddot{u} + \Omega_z\Delta\dot{v} - \Omega_y\Delta\dot{w} = \ddot{u}_2 - \ddot{u}_1 + \ell(\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \tag{2.63}$$

將(2.58)式對時間微分，並忽略隨元素減小時會趨近於零的變形參數可

得

$$\ddot{\theta}_{12} = -\ddot{\theta}_{11} = -\frac{\ddot{\phi}_{11}}{2} + \frac{\ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{31}) \quad (2.64)$$

$$-\frac{1}{4} \dot{\theta}_{31} \dot{\phi}_{21} + \frac{1}{4} \dot{\theta}_{32} \dot{\phi}_{22} + \frac{1}{4} \dot{\theta}_{21} \dot{\phi}_{31} - \frac{1}{4} \dot{\theta}_{22} \dot{\phi}_{32}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\Delta \dot{v}}{\ell} (\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{21}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \dot{w}}{\ell} (\dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31})$$

$$\ddot{\theta}_{2j} = \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} + \ddot{\phi}_{2j} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{3j} - \dot{\theta}_{3j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$+ (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(-\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{3j} \right) - 2 \frac{\Delta \dot{w} \Delta \dot{u}}{\ell^2} - \dot{\phi}_{3j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$\ddot{\theta}_{3j} = -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + \ddot{\phi}_{3j} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{2j} + \dot{\theta}_{2j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$- (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(\frac{\Delta \dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{2j} \right) + 2 \frac{\Delta \dot{v} \Delta \dot{u}}{\ell^2} + \dot{\phi}_{2j} \dot{\phi}_{1j}$$

$$\ddot{\theta}_{21} = \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} + \ddot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{31} \dot{\phi}_{11}$$

$$+ (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(-\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{31} \right) - 2 \frac{\Delta \dot{w} \Delta \dot{u}}{\ell^2} - \dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11}$$

$$\ddot{\theta}_{22} = \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} + \ddot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{32} \dot{\phi}_{12}$$

$$+ (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(-\frac{\Delta \dot{v}}{\ell} + \dot{\phi}_{32} \right) - 2 \frac{\Delta \dot{w} \Delta \dot{u}}{\ell^2} - \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12}$$

$$\ddot{\theta}_{31} = -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + \ddot{\phi}_{31} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{21} \dot{\phi}_{11}$$

$$- (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}) \left(\frac{\Delta \dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{21} \right) + 2 \frac{\Delta \dot{v} \Delta \dot{u}}{\ell^2} + \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11}$$

$$\ddot{\theta}_{32} = -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + \ddot{\phi}_{32} - \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2} \dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{22} \dot{\phi}_{12}$$

$$-(\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12})\left(\frac{\Delta\dot{w}}{\ell} + \dot{\phi}_{22}\right) + 2\frac{\Delta\dot{v}\Delta\dot{u}}{\ell^2} + \dot{\phi}_{22}\dot{\phi}_{12}$$

將(2.59)式對時間微分，並忽略隨元素減小時會趨近於零的變形參數可得

$$\ddot{\theta}_{2j}^* = -\dot{w}'_j = (1 + \varepsilon_o)\ddot{\theta}_{2j} + 2\dot{\theta}_{2j}\dot{\varepsilon}_o \quad (2.65)$$

$$\ddot{\theta}_{3j}^* = \dot{v}'_j = (1 + \varepsilon_o)\ddot{\theta}_{3j} + 2\dot{\theta}_{3j}\dot{\varepsilon}_o$$

2.8 梁元素之變形描述

本文採用一致性共旋轉法，即在梁元素當前的移動元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 描述梁元素當前的變形；在梁元素受擾動後的移動元素座標描述梁元素受擾動後的變形。本推導是在元素當前的變形位置之固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 上進行，所有向量的分量都是指在該座標上的分量。

2.8.1 梁元素之位置向量

圖 2.1 中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在剪心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於同一斷面上。令當前的時間為 t ， \mathbf{r}_0 為梁元素變形前，Q 點在當前的移動元素座標上的位置向量， $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 、 $\mathbf{r}(t)$ 是為梁元素變形後，Q 點在當前的固定及移動元素座標上的位置向量。 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 與 $\mathbf{r}(t)$ 的關係已在(2.35)式中得知， \mathbf{r}_0 與 $\mathbf{r}(t)$ 可表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & x_p(x,t)\mathbf{e}_1 + v(x,t)\mathbf{e}_2 + w(x,t)\mathbf{e}_3 \\ & + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S \end{aligned} \quad (2.67)$$

其中 \mathbf{e}_i 為 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸的單位向量， \mathbf{e}_i^S 為 x_i^S 軸的單位向量， $x_p(x,t)$ 、 $v(x,t)$ 、以及 $w(x,t)$ 分別是 P 點在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸上的座標(見 2.4 節)， y 、 z

是 Q 在 x_2^S 軸與 x_3^S 軸的座標。(2.64)式中前三項是 P 點的位置向量，四、五項是 Q 相對於 P 的位置向量，最末項表示 Q 點扭轉翹曲的位移。

$\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x}$ 是沿變形後的剪心軸的斷面之軸向扭轉率， $\omega = \omega(y,z)$ 代表等斷面梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數。

本文中若 $(\bar{\quad})$ 表示定義於固定元素座標中的變數，則 (\quad) 表示定義於移動元素座標中的對應變數，例如 $\bar{\mathbf{r}}$ 是定義在固定元素座標上的位置向量， $\mathbf{r}(t)$ 是定義在移動元素座標上的位置向量。

將(2.25)式代入(2.67)式，並利用近似式 $\cos \theta_n = 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ ，可得 \mathbf{r} 在 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 r_i 如下

$$\begin{aligned}
 r_1 &= x_p + y(\theta_2 \sin \theta_1 - \theta_3 \cos \theta_1) + z(\theta_2 \cos \theta_1 + \theta_3 \sin \theta_1) + \theta_{1,x} \left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \omega \\
 r_2 &= v + y \left[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \sin \theta_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \cos \theta_1 \right] + z \left[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \cos \theta_1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \sin \theta_1 \right] + \theta_{1,x} \theta_3 \omega \\
 r_3 &= w + y \left[\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right) \sin \theta_1 \right] + z \left[\left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right) \cos \theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \sin \theta_1 \right] - \theta_{1,x} \theta_2 \omega
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

2.8.2 梁元素之應變

本文中應變的度量是採用 Green strain。本文中以 ε_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) 表示 Green strain。由於基本假設(4)，所以本文只考慮 ε_{11} 、 ε_{12} 與 ε_{13} ，並表示如下

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2 \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \tag{2.70}$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 定義於(2.68)式。

將(2.18)、(2.68)式代入(2.70)式，並保留變形參數及其微分到二次項，
 可得 \mathbf{g}_i 的分量 $g_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 如下

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \varepsilon_o - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_3^2) + y(\theta_1 \theta_{2,x} + \theta_2 \theta_{1,x} - \theta_{3,x}) \\
&\quad + z(\theta_1 \theta_{3,x} + \theta_3 \theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx} \omega \\
g_{12} &= (1 + \varepsilon_o) \theta_3 - y(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_3 \theta_{3,x}) \\
&\quad + z\left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx} \theta_3 \omega + \theta_{1,x} \theta_{3,x} \omega \\
g_{13} &= -(1 + \varepsilon_o) \theta_2 + y\left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right) \\
&\quad - z(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_2 \theta_{2,x}) - \theta_{1,xx} \theta_2 \omega - \theta_{1,x} \theta_{2,x} \omega \\
g_{21} &= \theta_1 \theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x} \omega_{,y} \\
g_{22} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x} \theta_3 \omega_{,y} \\
g_{23} &= \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 - \theta_{1,x} \theta_2 \omega_{,y} \\
g_{31} &= \theta_1 \theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x} \omega_{,z}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$g_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_{1,x}\theta_3\omega_{,z}$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x}\theta_2\omega_{,z}$$

將(2.71)式代入(2.69)式，並保留所有項至二次項，可得應變為

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^2 = & \frac{1}{2}\varepsilon_o^2 + \omega\varepsilon_o\theta_{1,xx} + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\theta_{1,x}^2 \\ & + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2 + \frac{1}{2}z^2w_{,xx}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,xx}^2 - y\theta_1w_{,xx} \\ & + z\theta_1v_{,xx} + yzv_{,xx}w_{,xx} - y\omega v_{,xx}\theta_{1,xx} - z\omega w_{,xx}\theta_{1,xx} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - z)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,y}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x}v_{,xx} - z\omega_{,y}\theta_{1,x}w_{,xx} + \omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}z(v_{,x}w_{,xx} - w_{,x}v_{,xx}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.74)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2}(\omega_{,z} + y)\theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2}[\omega_{,z}\varepsilon_o\theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}w_{,xx} - y\omega_{,z}\theta_{1,x}v_{,xx} + \omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4}y(w_{,x}v_{,xx} - v_{,x}w_{,xx})\end{aligned}$$

其中 ε_{1j}^k ($j=1, 2, 3, k=1, 2$) 代表 ε_{1j} 中之 k 次項。

2.8.3 梁元素應變之變分

本研究採用虛功原理及 D'Alembert 原理推導元素節點內力，所以需要應變的變分。將(2.72)–(2.74)式變分可得

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{11}^0 + \delta\varepsilon_{11}^1 \quad (2.75)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^0 = \delta\varepsilon_o + \delta v_{,xx}(-y) + \delta w_{,xx}(-z) + \delta\theta_{1,xx}\omega$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{11}^1 = & \delta\varepsilon_o(\varepsilon_o + \omega\theta_{1,xx}) \\ & + \delta v_{,xx}(y^2v_{,xx} + yzw_{,xx} + z\theta_1 - y\omega\theta_{1,xx}) \\ & + \delta w_{,xx}(yzv_{,xx} + z^2w_{,xx} - y\theta_1 - z\omega\theta_{1,xx}) \\ & + \delta\theta_1(zv_{,xx} - yw_{,xx}) + \delta\theta_{1,x}(y^2 + z^2)\theta_{1,x} \\ & + \delta\theta_{1,xx}(\omega\varepsilon_o - y\omega v_{,xx} - z\omega w_{,xx} + \omega^2\theta_{1,xx})\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{12}^0 + \delta\varepsilon_{12}^1 \quad (2.76)$$

$$\delta\varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,y} - z)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{12}^1 &= \delta\varepsilon_o \left(\frac{1}{2} \omega_{,y} \theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(-\frac{1}{4} z v_{,xx} \right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left[\frac{1}{4} z v_{,x} - \frac{1}{2} \omega_{,y} z \theta_{1,x} \right] + \delta v_{,x} \left(\frac{1}{4} z w_{,xx} \right) \\
&+ \delta v_{,xx} \left[\frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) \theta_{1,x} - \frac{1}{4} z w_{,x} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,x} \left[\frac{1}{2} \omega_{,y} \varepsilon_o + \frac{1}{2} (\omega - y \omega_{,y}) v_{,xx} - \frac{1}{2} z \omega_{,y} w_{,xx} + \frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,xx} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2} \omega \omega_{,y} \theta_{1,x} \right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.77)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \frac{1}{2} \delta \theta_{1,x} (\omega_{,z} + y)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{13}^1 &= \delta\varepsilon_o \left(\frac{1}{2} \omega_{,z} \theta_{1,x} \right) + \delta w_{,x} \left(\frac{1}{4} y v_{,xx} \right) \\
&+ \delta w_{,xx} \left[-\frac{1}{4} y v_{,x} + \frac{1}{2} (\omega - z \omega_{,z}) \theta_{1,x} \right] \\
&+ \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{4} y w_{,xx} \right) + \delta v_{,xx} \left(-\frac{1}{2} y \omega_{,z} \theta_{1,x} + \frac{1}{4} y w_{,x} \right) \\
&+ \delta \theta_{1,x} \left[\frac{1}{2} \omega_{,z} \varepsilon_o + \frac{1}{2} (\omega - z \omega_{,z}) w_{,xx} - \frac{1}{2} y \omega_{,z} v_{,xx} + \frac{1}{2} \omega \omega_{,z} \theta_{1,xx} \right] \\
&+ \delta \theta_{1,xx} \left(\frac{1}{2} \omega \omega_{,z} \theta_{1,x} \right)
\end{aligned}$$

由(2.15)、(2.16)、(2.26)、(2.27)、(2.49)、(2.20)式，可得

$$\delta\varepsilon_o = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c \quad (2.78)$$

$$\mathbf{G}_a = \frac{1}{L} \{-1, 1\} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{G}_b = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.80)$$

$$\mathbf{G}_c = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_c w_{,x} dx$$

(2.80)式中 \mathbf{G}_b 、 \mathbf{G}_c 在元素很小時會趨近於零，故本文中計算時將其忽略。

2.9 元素節點力之推導

本文利用完整之幾何非線性梁理論、D'Alembert 原理及虛功原理推導出節點變形力及節點慣性力。由於採用共旋轉法(corotational formulation)，只要減小元素的大小，一定可使元素節點參數的值遠小於一，所以可以對完整之節點變形力及慣性力作一致性線性化(consistent linearization)將其簡化。為保留各變形間之耦合項，所以在變形力中保留至節點參數之二次項，因薄壁梁之扭轉率的三次項對其幾何非線性的分析的影響不能忽略[20]，故本研究將扭轉率的三次項保留。採用共旋轉法時，隨著元素減小，元素的長度，位移、旋轉參數都會趨近於零，但元素的曲率、扭轉率會趨近常數，本文將忽略變形力中隨元素減小會趨近於零的項。在慣性力中保留至變形參數的零次項，即不考慮變形參數與其對時間微分間的耦合。在高速的三維運動時，速度間之耦合效果可能不可忽略，所以在慣性力中保留全部的速度間耦合項。

由 D'Alembert 原理及虛功原理，可知

$$\delta \mathbf{q}_\phi^t \mathbf{f}_\phi = \int_V [(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) + \rho \delta \mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}}] dV \quad (2.81)$$

$$\delta \mathbf{q}_\phi = \{\delta \bar{\mathbf{u}}_1, \delta \phi_1, \delta \bar{\mathbf{u}}_2, \delta \phi_2, \delta \beta\} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{f}_\phi = \mathbf{f}_\phi^D + \mathbf{f}_\phi^I = \{\mathbf{f}_1^\phi, \mathbf{m}_1^\phi, \mathbf{f}_2^\phi, \mathbf{m}_2^\phi, \mathbf{B}\} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{f}_\phi^D = \{\mathbf{f}_1^{\phi D}, \mathbf{m}_1^{\phi D}, \mathbf{f}_2^{\phi D}, \mathbf{m}_2^{\phi D}, \mathbf{B}^D\} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{f}_\phi^I = \{\mathbf{f}_1^{\phi I}, \mathbf{m}_1^{\phi I}, \mathbf{f}_2^{\phi I}, \mathbf{m}_2^{\phi I}, \mathbf{B}^I\} \quad (2.85)$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 為定義於固定元素座標的元素節點虛擾動位移向量， $\delta \bar{\mathbf{u}}_j = \{\delta \bar{u}_j, \delta \bar{v}_j, \delta \bar{w}_j\}$ ， $\delta \phi_j = \{\delta \phi_1, \delta \phi_2, \delta \phi_3\}$ ， $\delta \beta = \{\delta \beta_1, \delta \beta_2\}$ ， $j=1, 2$ ， $\delta \bar{\mathbf{u}}_j$ 為

節點 j 對固定元素座標的擾動位移向量， $\delta\phi_j$ 為節點 j 之斷面對固定元素座標的擾動旋轉向量， $\delta\beta$ 為擾動扭轉率向量， $\delta\beta_j$ 為元素扭轉率在節點 j 的擾動量。 \mathbf{f}_ϕ 為對應於 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 的元素節點力向量， \mathbf{f}_ϕ^D 和 \mathbf{f}_ϕ^I 分別為元素節點變形力及慣性力向量， $\mathbf{f}_j^{\phi D} = \{f_{1j}^{\phi D}, f_{2j}^{\phi D}, f_{3j}^{\phi D}\}$ ， $\mathbf{m}_j^{\phi D} = \{m_{1j}^{\phi D}, m_{2j}^{\phi D}, m_{3j}^{\phi D}\}$ ， $\mathbf{B}^D = \{B_1, B_2\}$ ， $\mathbf{f}_j^{\phi I} = \{f_{1j}^{\phi I}, f_{2j}^{\phi I}, f_{3j}^{\phi I}\}$ ， $\mathbf{m}_j^{\phi I} = \{m_{1j}^{\phi I}, m_{2j}^{\phi I}, m_{3j}^{\phi I}\}$ ， $\mathbf{B}^I = \{B_1^I, B_2^I\}$ ($j=1, 2$)， f_{ij}^ϕ 、 m_{ij}^ϕ 及 B_j ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 已經在 2.5 節中說明， $()^I$ 為對應於變形力 $()^D$ 之慣性力。 V 為未變形梁元素的體積， ε_{1j} ($j=1, 2, 3$) 為梁元素之應變(見(2.72)–(2.74)式)， $\delta\varepsilon_{1j}$ 為梁元素之應變的變分(見(2.75)–(2.77)式)， σ_{1j} ($j=1, 2, 3$) 是對應於 ε_{1j} 的第二類 Piola-Kirchhoff 應力。 ρ 為梁元素之密度， $\delta\mathbf{r}$ 為對固定元素座標的位移擾動量(見(2.35)式)， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為絕對加速度(見(2.60)式)。本文中假設材料為線彈性材料，其應力–應變關係為

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (2.86)$$

其中 E 是楊氏係數(Young's modulus)， G 是剪力係數(Shear modulus)。

因 $\delta\varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$) 中之節點參數的擾動量都在移動元素座標中定義，為了推導上的方便，本研究將(2.81)式改寫成

$$\delta\mathbf{q}_\phi^t \mathbf{f}_\phi^D = \delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^D = \int_V (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}) dV \quad (2.87)$$

$$\delta\mathbf{q}_\phi^t \mathbf{f}_\phi^I = \int_V \rho \delta\mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.88)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\theta_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\theta_2^*, \delta\beta\} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{f}_\theta^D = \{\mathbf{f}_1^{\theta D}, \mathbf{m}_1^{\theta D}, \mathbf{f}_2^{\theta D}, \mathbf{m}_2^{\theta D}, \mathbf{B}^D\} \quad (2.90)$$

其中 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 為一定義於移動元素座標的廣義元素節點擾動位移向量， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta\beta = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j$ 為節點 j 對移動元素座標的擾動位移向量， $\delta\theta_{1j}$ 為元素扭轉角在節點 j 的擾動量， $\delta v'_j$ 及 $\delta w'_j$ 為定義於(2.17)式之 w' 及 v' 在元素節點 j 的擾動量， $\delta\beta_j$ 為元

素扭轉率在節點 j 的擾動量。 \mathbf{f}_θ^D 為對應於 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點變形力向量， $\mathbf{f}_j^{\theta D} = \{f_{1j}^{\theta D}, f_{2j}^{\theta D}, f_{3j}^{\theta D}\}$ ， $\mathbf{m}_j^{\theta D} = \{m_{1j}^{\theta D}, m_{2j}^{\theta D}, m_{3j}^{\theta D}\}$ ， $\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $j=1, 2$ ， f_{ij}^θ 、 m_{ij}^θ 及 B_j ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已經在 2.5 節中說明。

(2.89)式之 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 與(2.82)式之 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 有以下的關係

$$\delta\mathbf{q}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R)\delta\mathbf{q}_\phi \quad (2.91)$$

(2.91)式的推導在附錄B中， $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 、 \mathbf{T}_R 的顯式在附錄B之(B.5)式(B.13)式中。

利用(2.91)式與(2.87)式，可求得(2.84)式及(2.90)式中元素節點變形力向量 \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係如下

$$\mathbf{f}_\phi^D = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t + \mathbf{T}_R^t)\mathbf{f}_\theta^D \quad (2.92)$$

\mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係的顯式在附錄 C 中。

為了推導上的方便，本研究推導元素節點變形力向量 \mathbf{f}_ϕ^D 時，先將 $\delta\varepsilon_{1j}$ ($j=1, 2, 3$) 表示成 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的函數，由(2.87)式推導出 \mathbf{f}_θ^D ，再由(2.92)式求得 \mathbf{f}_ϕ^D ，其推導過程在 2.9.1 節說明；推導元素節點慣性力向量 \mathbf{f}_ϕ^I 時，將 $\delta\mathbf{r}$ 表示成 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 的函數，由(2.88)式推導出 \mathbf{f}_ϕ^I ，其推導過程在 2.9.2 節說明。

2.9.1 元素節點變形力向量之推導

為推導方便，本文將(2.89)式之 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 拆成以下四個擾動位移向量

$$\delta\mathbf{u}_a = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad , \quad \delta\mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v'_1, \delta v_2, \delta v'_2\} \quad (2.93)$$

$$\delta\mathbf{u}_c = \{\delta w_1, -\delta w'_1, \delta w_2, -\delta w'_2\} \quad , \quad \delta\mathbf{u}_d = \{\delta\theta_{11}, \delta\beta_1, \delta\theta_{12}, \delta\beta_2\}$$

其中 $\delta\mathbf{u}_i$ ($i=b, c, d$) 為定義於(2.26)–(2.28)式中之 \mathbf{u}_i 的擾動量。

對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^θ ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a^{\theta D} &= \{f_{11}^{\theta D}, f_{12}^{\theta D}\}, & \mathbf{f}_b^{\theta D} &= \{f_{21}^{\theta D}, m_{31}^{\theta D}, f_{22}^{\theta D}, m_{32}^{\theta D}\} \\ \mathbf{f}_c^{\theta D} &= \{f_{31}^{\theta D}, m_{21}^{\theta D}, f_{32}^{\theta D}, m_{22}^{\theta D}\}, & \mathbf{f}_d^{\theta D} &= \{m_{11}^{\theta D}, B_1^D, m_{12}^{\theta D}, B_2^D\}\end{aligned}\quad (2.94)$$

利用(2.93)及(2.94)式，(2.87)式可改寫成

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^{\theta D} + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^{\theta D} + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^{\theta D} + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^{\theta D} \\ = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV\end{aligned}\quad (2.95)$$

將(2.86)式代入(2.95)式可得

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^\theta + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^\theta \\ = E \int (\int \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} dA) dx + G \int [4 \int (\varepsilon_{12} \delta \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13}) dA] dx\end{aligned}\quad (2.96)$$

由(2.72)、(2.75)式及 $\int y dA = \int z dA = \int yz dA = 0, \int \omega dA = \int y \omega dA = \int z \omega dA = 0$ 可將(2.96)式中之 $\int \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} dA$ 表示成

$$\begin{aligned}\int \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} dA \\ = \delta \varepsilon_o \left\{ A \varepsilon_o + \frac{3}{2} A \varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} I_p \theta_{1,x}^2 + \frac{1}{2} I_z v_{,xx}^2 + \frac{1}{2} I_y w_{,xx}^2 + \frac{3}{2} I_\omega \theta_{1,xx}^2 \right\} \\ + \delta \theta_1 [(I_z - I_y) v_{,xx} w_{,xx}] \\ + \delta \theta_{1,x} [I_p \varepsilon_o \theta_{1,x} + \delta \theta_{1,x} (I_p \varepsilon_o \theta_{1,x} + \frac{1}{2} K_I \theta_{1,x}^3)] \\ + \delta \theta_{1,xx} [(1 + 3\varepsilon_o) I_\omega \theta_{1,xx} + 3\alpha_{\omega yz} v_{,xx} w_{,xx}] \\ + \delta v_{,xx} [(1 + \varepsilon_o) I_z v_{,xx} + (I_z - I_y) \theta_1 w_{,xx} + 3\alpha_{\omega yz} \theta_{1,xx} w_{,xx}] \\ + \delta w_{,xx} [(1 + \varepsilon_o) I_y w_{,xx} + (I_z - I_y) \theta_1 v_{,xx} + 3\alpha_{\omega yz} \theta_{1,xx} v_{,xx}]\end{aligned}\quad (2.97)$$

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA, \quad K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA \quad (2.98)$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA, \quad \alpha_\omega = \int \omega^3 dA, \quad \alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA, \quad I_p = I_y + I_z$$

其中 A 為截面的面積，(2.97) 式中保留節點參數至二次項，及 $\theta_{1,x}$ 的三次項。

由 (2.73)、(2.74)、(2.76)、(2.77) 式可將 (2.96) 式中之 $\int 4(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\delta\varepsilon_{13})dA$ 表示成

$$\begin{aligned} & \int 4(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\delta\varepsilon_{13})dA \\ & = \delta v_{,x} \left(-\frac{1}{2} J \theta_{1,x} w_{,xx}\right) + \delta w_{,x} \left(\frac{1}{2} J \theta_{1,x} v_{,xx}\right) \\ & \quad + \delta \theta_{1,x} \left[J \theta_{1,x} + \frac{1}{2} J (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} & + \delta v_{,xx} \left(+\frac{1}{2} J w_{,x} \theta_{1,x}\right) + \delta w_{,xx} \left(-\frac{1}{2} J v_{,x} \theta_{1,x}\right) \\ J & = \int \{[-z + \omega_y]^2 + [y + \omega_z]^2\} dA \end{aligned} \quad (2.100)$$

將(2.97)、(2.99)式代入(2.96)式中，並保留元素節點參數至二次項，由(2.96)式的等號兩邊的 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i=a,b,c,d$) 之係數對等之關係，可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i=a,b,c,d$) 的節點變形力向量為

$$\mathbf{f}_a^{\theta D} = [A_1 - AE\varepsilon_o] \mathbf{G}_a \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} A_1 & = AEL\varepsilon_o + \frac{3}{2} AEL\varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx \\ & \quad + \frac{1}{2} EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^{\theta D} &= \underline{f_{12}^{\theta D} \mathbf{L} \mathbf{G}_b} \\
&\underline{EI_z(1+\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx} \\
&\underline{E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \theta_1 w_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx} \\
&+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \theta_{1,x} w_{,x} - \mathbf{N}_b' \theta_{1,x} w_{,xx}) dx
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_c^{\theta D} &= \underline{f_{12}^{\theta D} \mathbf{L} \mathbf{G}_c} \\
&\underline{EI_y(1+\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx} \\
&\underline{+ E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \theta_1 v_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx} \\
&+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c' \theta_{1,x} v_{,xx} - \mathbf{N}_c'' \theta_{1,x} v_{,x}) dx
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^{\theta D} &= \{GJ + EI_p \varepsilon_o\} \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega(1+3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} dx \\
&+ 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_d'' v_{,xx} w_{,xx} dx + E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d v_{,xx} w_{,xx} dx \\
&+ \frac{1}{2} GJ \int \mathbf{N}_d' (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx
\end{aligned} \tag{2.105}$$

上列各式的積分範圍是由0至L，(2.101)–(2.105)式中加底線”---”之項，含 θ_1 或 $v_{,x}$ 或 $w_{,x}$ 之一次項，加底線”-·-·-”之項，含元素長度L之一次項或二次項，在元素很小時都會趨近於零，本文中將這些項忽略。(2.105)式中畫實線底線之項為 $\theta_{1,x}$ 之三次項。

節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 可以由(2.101)–(2.105)式之 $\mathbf{f}_i^{\theta D}$ ($i=a, b, c, d$)組合而成，因 \mathbf{f}_θ^D 僅保留至隱節點參數的二次項及部分之三次項，所以由(2.92)·(B.5)式，節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 可以表示成

$$\mathbf{f}_\phi^D = (\mathbf{T}_R^t + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t})\mathbf{f}_\theta^D + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{2t})\mathbf{f}_\theta^{D1} \quad (2.106)$$

其中 \mathbf{f}_θ^{D1} 為節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 的一次項， $\mathbf{T}_{\theta\phi}^0$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 及 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^2$ 為(2.91)式中 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 的零次、一次及二次項，在(B.5)式已有定義。因為 $\bar{v}_j = \bar{w}_j = 0$ 及 $\phi_{ij} = 0$ ，所以 $\mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ ，對節點變形力向量 \mathbf{f}_θ^D 沒有貢獻，但對其微分會對元素切線剛度矩陣有影響。若將(2.103)及(2.104)式中之 $f_{12}^{\theta D} \mathbf{G}_i L$ ($i = b, c$) 改成 $f_{12}^{\phi D} \mathbf{G}_i L$ ，則須拿掉 (C.10)–(C.13)式中的 $f_{12}^{\theta\phi} G_{ij} L$ ($i = b, c$) ($j = 2, 4$) 項，(2.106)式可以改寫成

$$\mathbf{f}_\phi^D = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^{0t} + \mathbf{T}_{\theta\phi}^{1t} + \mathbf{T}_R^t)\mathbf{f}_\theta^{D+} \quad (2.107)$$

其中 \mathbf{f}_θ^{D+} 是將 \mathbf{f}_θ^D 在(2.103)及(2.104)式中 $f_{12}^{\theta D} \mathbf{G}_i L$ ($i = b, c$) 改成 $f_{12}^{\phi D} \mathbf{G}_i L$ 。

2.9.2 元素節點慣性力向量之推導

為推導方便，本文將(2.82)式之 $\delta \mathbf{q}_\phi$ 拆成四個廣義位移向量

$\delta \mathbf{u}_i^\phi$ ($i = a, b, c, d$)

$$\delta \mathbf{u}_a^\phi = \{\delta \bar{u}_1, \delta \bar{u}_2\}, \quad \delta \mathbf{u}_b^\phi = \{\delta \bar{v}_1, \delta \phi_{31}, \delta \bar{v}_2, \delta \phi_{32}\} \quad (2.108)$$

$$\delta \mathbf{u}_c^\phi = \{\delta \bar{w}_1, \delta \phi_{21}, \delta \bar{w}_2, \delta \phi_{22}\}, \quad \delta \mathbf{u}_d^\phi = \{\delta \phi_{11}, \delta \beta_1, \delta \phi_{12}, \delta \beta_2\}$$

對應於 $\delta \mathbf{u}_i^\phi$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$\mathbf{f}_a^I = \{f_{11}^I, f_{12}^I\}, \quad \mathbf{f}_b^I = \{f_{21}^I, m_{31}^I, f_{22}^I, m_{32}^I\} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{f}_c^I = \{f_{31}^I, m_{21}^I, f_{32}^I, m_{22}^I\}, \quad \mathbf{f}_d^I = \{m_{11}^I, B_1^I, m_{12}^I, B_2^I\}$$

其中 f_{ij}^{ϕ} 、 m_{ij}^{ϕ} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 為節點 j 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 方向的慣性力及對應於 $\delta\phi_{ij}$ 的廣義慣性力矩， B_j^I ($j=1, 2$) 為節點 j 的慣性雙力矩。

利用(2.108)及(2.109)式，(2.88)式可改寫成

$$\delta\mathbf{u}_a^{\phi t} \mathbf{f}_a^{\phi} + \delta\mathbf{u}_b^{\phi t} \mathbf{f}_b^{\phi} + \delta\mathbf{u}_c^{\phi t} \mathbf{f}_c^{\phi} + \delta\mathbf{u}_d^{\phi t} \mathbf{f}_d^{\phi} = \int_V \rho \delta \bar{\mathbf{r}}^t \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.110)$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則由(2.35)、(2.36)式， $\delta \bar{\mathbf{r}}$ 可表示成

$$\delta \bar{\mathbf{r}} = ({}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} - \mathbf{I})\mathbf{r} + \delta \bar{\mathbf{r}} + \delta \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.111)$$

其中 ${}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 在(2.39)式已經定義， $\delta \bar{\mathbf{u}}_1 = \{\delta \bar{u}_1, \delta \bar{v}_1, \delta \bar{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的擾動位移向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 軸上的位置向量， \mathbf{r} 已在(2.68)式定義， $\delta \bar{\mathbf{r}}$ 為位置向量 \mathbf{r} 的變分。

$\delta \bar{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 $\delta \bar{r}_i$ 可表示成

$$\delta \bar{r}_1 = \mathbf{N}_a^t \delta \mathbf{u}_a^{\phi} - y \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^{\phi} - z \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^{\phi} + \omega \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^{\phi} \quad (2.112)$$

$$\delta \bar{r}_2 = \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^{\phi} - z \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^{\phi} + \omega \theta_{1,x} \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^{\phi}$$

$$\delta \bar{r}_3 = \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^{\phi} + y \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d^{\phi} + \omega \theta_{1,x} \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c^{\phi}$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.113)$$

其中 \mathbf{N}_i ($i=b, c, d$) 及 ξ 已在(2.26)–(2.28)、(2.29)式中定義， $\delta \mathbf{u}_a^{\phi}$ 、 $\delta \mathbf{u}_b^{\phi}$ 、 $\delta \mathbf{u}_c^{\phi}$ 、 $\delta \mathbf{u}_d^{\phi}$ 已在(2.108)式中定義。(2.112)–(2.113)式的推導詳見附錄 D。

若保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則(2.60)式之 $\ddot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \ddot{r}_i 可表示成

$$\ddot{r}_1 = \ddot{u} + \frac{x}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \quad (2.114)$$

$$+ y[-2\dot{w}_{,x}\dot{\theta}_1 - \ddot{v}_{,x} + 2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x} - N_2'(2\dot{\varepsilon}_o \dot{\phi}_{31} + \frac{3}{2}\dot{\phi}_{21}\dot{\phi}_{11} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_y - \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{21}}{2})$$

$$- N_4'(\frac{2\Delta\ddot{u}}{L}\dot{\phi}_{32} + \frac{3}{2}\dot{\phi}_{22}\dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_y - \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{22}}{2})$$

$$\begin{aligned}
& + z[2\dot{\bar{v}}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_1 - \ddot{\bar{w}}_{,x} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\bar{w}}_{,x} + N'_2(2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{21} - \frac{3}{2}\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_z + \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{31}}{2}) \\
& + N'_4(2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{22} - \frac{3}{2}\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_z + \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{32}}{2}) \\
& - \omega\theta_{1,x}[\dot{\bar{w}}_{,x}^2 + \dot{\bar{\theta}}_1^2] \\
\ddot{\bar{r}}_2 = & \ddot{\bar{v}} + N_2(\frac{3}{2}\dot{\phi}_{21}\dot{\phi}_{11} - \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{21}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_y) \\
& + N_4(\frac{3}{2}\dot{\phi}_{22}\dot{\phi}_{12} - \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{22}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_y) - y(\dot{\bar{\theta}}_1^2 + \dot{\bar{v}}_{,x}^2) \\
& + z[-\dot{\bar{v}}_{,x}\dot{\bar{w}}_{,x} - \ddot{\bar{\theta}}_1 - \Omega_z(\dot{\bar{w}}_{,x} + N_1\dot{\phi}_{21} + N_3\dot{\phi}_{22}) \\
& - \Omega_y(\dot{\bar{v}}_{,x} - N_1\dot{\phi}_{31} - N_3\dot{\phi}_{32})] + 2\omega\dot{\bar{w}}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_{1,x} \\
\ddot{\bar{r}}_3 = & \ddot{\bar{w}} - N_2(-\frac{3}{2}\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_z) \\
& - N_4(-\frac{3}{2}\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_z) - z(\dot{\bar{w}}_{,x}^2 + \dot{\bar{\theta}}_1^2) \\
& + y[-\dot{\bar{w}}_{,x}\dot{\bar{v}}_{,x} + \ddot{\bar{\theta}}_1 + \Omega_z(\dot{\bar{w}}_{,x} + N_1\dot{\phi}_{21} + N_3\dot{\phi}_{22}) \\
& + \Omega_y(\dot{\bar{v}}_{,x} - N_1\dot{\phi}_{31} - N_3\dot{\phi}_{32})] - 2\omega\dot{\bar{w}}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_{1,x}
\end{aligned}$$

其中， $\ddot{\bar{u}}$ 、 $\ddot{\bar{v}}$ 、 $\ddot{\bar{w}}$ 、 $\dot{\bar{v}}_{,x}$ 、 $\dot{\bar{w}}_{,x}$ 、 $\dot{\bar{\theta}}_1$ 、 $\dot{\bar{\theta}}_1$ 定義於(D.38)–(D.41)式， $\dot{\varepsilon}_o$ 定義於(D.25)式， $\dot{\bar{u}}_j$ 、 $\dot{\bar{v}}_j$ 、 $\dot{\bar{w}}_j$ 、 $\dot{\phi}_{1j}$ 、 $\dot{\phi}_{2j}$ 、 $\dot{\phi}_{3j}$ 、 $\ddot{\bar{u}}_j$ 、 $\ddot{\bar{v}}_j$ 、 $\ddot{\bar{w}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_{1j}$ 、 $\ddot{\phi}_{2j}$ 、 $\ddot{\phi}_{3j}$ ($j=1, 2$) 定義於 2.7.2 節。(2.114)式的推導詳見附錄 D。

將 (2.112)、(2.114)式及 $\int ydA = \int zdA = \int yzdA = 0$ ， $\int \omega dA = \int y\omega dA = \int z\omega dA = 0$ 關係代入(2.110)式等號右邊的項，並保留至變形參數的零次項，(2.110)式中 $\int_V \rho \delta \bar{\mathbf{r}}^t \ddot{\bar{\mathbf{r}}} dV$ 可表示成

$$\int_V \rho \delta \bar{\mathbf{r}}^t \ddot{\bar{\mathbf{r}}} dV = \delta \mathbf{u}_a^{\phi t} \{ \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^{\phi} dx \} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
& + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx \} \\
& + \delta \mathbf{u}_b^\theta \{ \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (\ddot{v}_{,x} + 2\dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x}) dx \\
& + 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx \\
& + \rho A \int \mathbf{N}_b [N_2 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11} - \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{21}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y \right) \\
& + N_4 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{12} - \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{22}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y \right)] dx \\
& + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b [N'_2 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{21} - \frac{\dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{12}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y \right) \\
& + N'_4 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{22} - \frac{\dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{11}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y \right)] dx \} \\
& + \delta \mathbf{u}_c^\theta \{ \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\ddot{w}_{,x} - 2\dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\frac{\Delta \ddot{u}}{\ell} \dot{w}_{,x}) dx \\
& + 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx \\
& + \rho A \int \mathbf{N}_c [-N_2 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z \right)] dx \\
& + \rho A \int \mathbf{N}_c [-N_4 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z \right)] dx \\
& + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c [-N'_2 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z \right) \\
& - N'_4 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z \right)] dx \} \\
& + \delta \mathbf{u}_d^\theta \{ \rho I_P \int \mathbf{N}_d \ddot{\theta}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\theta}_{1,x} dx \\
& + \rho (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \dot{w}_{,x} \dot{v}_{,x} dx \\
& - \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2) \theta_{1,x} dx \\
& + \rho I_P \int \mathbf{N}_d [\Omega_y (\dot{v}_{,x} - N_1 \dot{\phi}_{31} - N_3 \dot{\phi}_{32}) + \Omega_z (\dot{w}_{,x} + N_1 \dot{\phi}_{21} + N_3 \dot{\phi}_{22})] dx
\end{aligned}$$

$$I_y = \int z^2 dA, I_z = \int y^2 dA, I_\omega = \int \omega^2 dA, I_p = I_y + I_z \quad (2.116)$$

上式中 A 為梁的斷面積， $\int()dx$ 中的積分範圍從0到 L 。

將(2.115)式代入(2.110)式，等號兩邊之 $\delta \mathbf{u}_i^{\phi t}$ ($i = a, b, c, d$)的係數相等，則

節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)可表示成

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi dx \quad (2.117)$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_a [\int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx] dx$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (\ddot{v}_{,x} + 2\dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x}) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} dx$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_b [N_2 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11} - \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{21}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y)] dx$$

$$+ N_4 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{12} - \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{22}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y)] dx$$

$$+ \rho I_z \int \mathbf{N}'_b [N'_2 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{21} - \frac{\dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{12}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y)] dx$$

$$+ N'_4 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{22} - \frac{\dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{11}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y)] dx$$

$$\mathbf{f}_c^I = \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\ddot{w}_{,x} - 2\dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\frac{\Delta \ddot{u}}{\ell} \dot{w}_{,x}) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} dx$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_c [-N_2 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z)] dx$$

$$- N_4 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z)] dx$$

$$+ \rho I_y \int \mathbf{N}'_c \left[-N'_2 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z \right) \right. \\ \left. - N'_4 \left(-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z \right) \right] dx$$

$$\mathbf{f}'_d = \rho I_P \int \mathbf{N}_d \ddot{\theta}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\theta}_{1,x} dx \\ + \rho (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \ddot{w}_{,x} \dot{v}_{,x} dx \\ - \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2) \theta_{1,x} dx \\ + \rho I_P \int \mathbf{N}_d \left[\Omega_y (\dot{v}_{,x} - N_1 \dot{\phi}_{31} - N_3 \dot{\phi}_{32}) + \Omega_z (\dot{w}_{,x} + N_1 \dot{\phi}_{21} + N_3 \dot{\phi}_{22}) \right] dx$$

本文之慣性力 \mathbf{f}' 與文獻[6]之 \mathbf{f}' 在元素數目較多的時候，兩者所推導出的慣性力相同，詳見附錄E。

2.10 元素剛度矩陣及質量矩陣

令 $d\mathbf{q}_\phi = \{d\bar{\mathbf{u}}_1, d\phi_1, d\bar{\mathbf{u}}_2, d\phi_2, d\beta\}$ 表示元素節點參數向量之真實擾動量，其定義與(2.82)式之虛擾動量 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 一致。當元素節點受到 $d\mathbf{q}_\phi$ 擾動時，其節點變形力向量 \mathbf{f}_ϕ^D (見(2.107)式)會有一對應的擾動 $d\mathbf{f}_\phi^D$ ，由於節點變形力向量 \mathbf{f}_ϕ^D 是與元素一起剛體運動(但在使用虛功原理時需將 \mathbf{f}_ϕ^D 的方向和大小固定)，所以還需考慮 \mathbf{f}_ϕ^D 隨剛體運動造成的方向改變， $d\mathbf{f}_\phi^D$ 與 $d\mathbf{q}_\phi$ 的關係可表示成

$$d\mathbf{f}_\phi^D = \mathbf{k} d\mathbf{q}_\phi = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^D}{\partial \mathbf{q}_\phi} d\mathbf{q}_\phi + (\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}} - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\phi^D \quad (2.118) \\ = \frac{\partial (\mathbf{T}_R^t \mathbf{f}_\theta^{D+})}{\partial \mathbf{q}_\phi} d\mathbf{q}_\phi + \frac{\partial (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^{D+})}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}_\phi} d\mathbf{q}_\phi + \mathbf{H}_R d\mathbf{q}_\phi \\ = [\mathbf{H}_\phi + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{k}_\theta + \mathbf{H}_\theta) \mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{H}_R] d\mathbf{q}_\phi$$

$$\mathbf{R}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0} & {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{\partial(\mathbf{T}_R^t \mathbf{f}_\theta^{D+})}{\partial \mathbf{q}_\phi} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^{D+}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\partial \mathbf{T}_{\theta\phi}^t}{\partial \mathbf{q}_\theta} \mathbf{f}_\theta^{D+} \quad (2.122)$$

其中 \mathbf{k} 稱為元素切線剛度矩陣， ${}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 已在(2.39)式定義。由 $\mathbf{H}_R d\mathbf{q}_\phi = (\mathbf{R}_{\bar{x}x} - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{f}_\phi^D$ 可得 \mathbf{H}_R ， \mathbf{H}_ϕ 、 \mathbf{H}_R 及 \mathbf{H}_θ 是 14×14 的非對稱矩陣，其顯式在附錄 F 中有詳細的表示。

利用直接剛度法，(2.121)式之 \mathbf{k}_θ 可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{\theta+}}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.123)$$

其中 $\mathbf{f}_i^{\theta+}$ ($i = a, b, c, d$) 是將(2.103)及(2.104)式之 \mathbf{f}_i^θ ($i = b, c$) 中之 $f_{12}^\theta \mathbf{G}_i L$ 換成 $f_{12} \mathbf{G}_i L$ 。而 $\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\}$ ， \mathbf{u}_j ($j = b, c, d$) 已在(2.26)–(2.28)式中定義。矩陣 \mathbf{k}_{ij} 可表示如以下各式

$$\mathbf{k}_{aa} = AEL(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t \quad (2.124)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{G}_a [AELG_b^t + EI_z \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \mathbf{G}_a [AELG_c^t + EI_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \mathbf{G}_a \{ [EI_p \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx] \}$$

$$\mathbf{k}_{bb} = EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx + f_{12} \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,x} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t - \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_c''^t) \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,x} - \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_d''^t w_{,xx}) dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx + f_{12} \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_c''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = E(I_z - I_y) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx$$

$$+ \frac{1}{2} GJ \int (\mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} - \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d''^t v_{,x}) dx$$

$$\mathbf{k}_{dd} = \{GJ + EI_p \varepsilon_o\} \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d''^t dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d'' \mathbf{N}_d''^t dx + \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x}^2 dx$$

上式中加底線” --- ”之項含 θ_1 或 $v_{,x}$ 或 $w_{,x}$ 之一次項，加底線”-...- ”之項，含元素長度 L 之一次項或二次項，在元素很小時都會趨近於零，本文中將這些項忽略。畫實線底線之項為 $\theta_{1,x}$ 之二次項。

元素的質量矩陣 \mathbf{m} 可表示成

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\phi} \quad (2.125)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{\beta}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\phi}_2, \ddot{\beta}_2\} \quad (2.126)$$

其中 \mathbf{f}_ϕ^I 定義在(2.85)式，可以由(2.117)式之 f_i^I ($i = a, b, c, d$) 組合而成， $\ddot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\ddot{\phi}_j$ ($j = 1, 2$) 分別為節點 j 的絕對加速度及絕對角加速度。 \mathbf{m} 為一對稱矩陣，利用直接剛度法， \mathbf{m} 可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial f_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j} \quad (2.127)$$

其中 $i, j = a, b, c, d$ ， \mathbf{f}_i^I 為(2.117)式之節點慣性力， $\ddot{\mathbf{u}}_i^\phi$ ($i = a-d$) 定義於(D.42)–(D.45)。將(D.38)–(D.41)、(2.26)–(2.30)及(2.117)式代入(2.127)式可得

$$\mathbf{m}_{aa} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.128)$$

$$\mathbf{m}_{ab} = 0$$

$$\mathbf{m}_{ac} = 0$$

$$\mathbf{m}_{ad} = 0$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{bc} = 0$$

$$\mathbf{m}_{bd} = 0$$

$$\mathbf{m}_{cc} = \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{cd} = 0$$

$$\mathbf{m}_{dd} = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

元素的陀螺矩陣 \mathbf{c} 可表示成

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}_\phi^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\phi} \quad (2.129)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\phi}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\phi}_2, \dot{\beta}_2\} \quad (2.130)$$

其中 \mathbf{f}_ϕ^I 定義在(2.85)式，可以由(2.117)式之 f_i^I ($i = a, b, c, d$) 組合而成， $\dot{\mathbf{u}}_j$ 、 $\dot{\phi}_j$ ($j = 1, 2$) 分別為節點 j 的絕對速度及絕對角速度。利用直接剛度法， \mathbf{c} 可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial f_i^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j^\phi} \quad (2.131)$$

其中 $i, j = a, b, c, d$ ， \mathbf{f}_i^I 為(2.122)式之節點慣性力， $\dot{\mathbf{u}}_i^\phi$ ($i = a - d$) 定義於(D.42) — (D.45)。將(D.38) — (D.41)、(2.26) — (2.30)及(2.117)式代入(2.131)式，且不考慮(2.117)式中加底線的項則可得 \mathbf{c}_{ij} 的近似式如下

$$\mathbf{c}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.132)$$

$$\mathbf{c}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_b^t - \int_0^x \mathbf{N}_b^{tt} \dot{\mathbf{v}}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_c^t - \int_0^x \mathbf{N}_c^{tt} \dot{\mathbf{w}}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ba} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = -2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{v}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b^{tt} \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_c^{tt} \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = 2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_d^{tt} \dot{\mathbf{w}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{ca} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = -2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{w}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{cb} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_b^{tt} \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = -2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_c^{tt} \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d^{tt} \dot{\mathbf{v}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{da} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{db} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \rho(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_b^{tt} \dot{\mathbf{w}}_{,x} dx - 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_b^{tt} \theta_{1,x} \dot{\mathbf{v}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{dc} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \rho(I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_c^{tt} \dot{\mathbf{v}}_{,x} dx - 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_c^{tt} \theta_{1,x} \dot{\mathbf{w}}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

本文的 \mathbf{c}_{ij} 與文獻[6]未經過轉換矩陣的 \mathbf{c}_θ 相同。

因為系統平衡方程式是定義於總體座標系統中，所以(2.118)式的元素顯切線剛度矩陣及(2.128)、(2.132)式質量矩陣與陀螺矩陣需經下列的座標轉換，方可組合成系統矩陣。

$$\mathbf{k}^G = \mathbf{T}_{GE} \mathbf{k} \mathbf{T}_{GE}^t, \quad (2.133)$$

$$\mathbf{m}^G = \mathbf{T}_{GE} \mathbf{m} \mathbf{T}_{GE}^t,$$

$$\mathbf{c}^G = \mathbf{T}_{GE} \mathbf{c} \mathbf{T}_{GE}^t,$$

$$\mathbf{T}_{GE} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

其中 $\mathbf{0}$ 是一 3×3 階的零矩陣， $\bar{\mathbf{0}}$ 是一 3×2 階的零矩陣。及 \mathbf{A}_{GE} 為(2.1)式中總體座標與元素座標間之轉換矩陣。

2.11 與變形位置相關之節點作用力與負荷剛度矩陣

偏心作用力機制。如圖2.7所示，一長度為 R 的剛性桿，一端剛接於節點上，另一端受到一保守力向量 $\mathbf{P} = P \mathbf{e}_P^P$ 的作用，其中 P 是向量的大小， $\mathbf{e}_P^P = \{l_1, l_2, l_3\}$ 為一單位向量。此機制的 X_1^P 軸是定義在剛性桿上， X_2^P 軸是與 X_1^P 軸垂直的任意軸， X_3^P 軸則由右手定則決定。

此作用力機制對 O 點造成的力矩向量 \mathbf{M}_ϕ 可表示成

$$\mathbf{M}_\phi = \{M_1^\phi, M_2^\phi, M_3^\phi\} = RP\mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \quad (2.135)$$

當與剛性桿相接的節點受到一微小的旋轉 $\Delta\phi^P = \{\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3\}$ 擾動時， \mathbf{e}_1^P 會有微小變量 $\Delta\mathbf{e}_1^P$

$$\Delta\mathbf{e}_1^P = \Delta\phi^P \times \mathbf{e}_1^P = \{0, \Delta\phi_3, -\Delta\phi_2\} \quad (2.136)$$

所以(2.135)式中之 \mathbf{M}_ϕ 有一如下之變量 $\Delta\mathbf{M}_\phi$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M}_\phi &= RP\Delta\mathbf{e}_1^P \times \mathbf{e}_P^P \\ &= RP\{\ell_2\Delta\phi_2 + \ell_3\Delta\phi_3, -\ell_1\Delta\phi_2, -\ell_1\Delta\phi_3\} \end{aligned} \quad (2.137)$$

因本文僅考慮與變形位置相關的節點力矩，所以依定義，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_ϕ^P 可由下式求得

$$\Delta\mathbf{M}_\phi = \mathbf{K}_\phi^P \Delta\phi^P \quad (2.138)$$

由(2.137)及(2.138)式，可得負荷剛度矩陣

$$\mathbf{K}_\phi^P = RP \begin{bmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & -\ell_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell_1 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

由(2.9)式可得 \mathbf{M}_ϕ 與 \mathbf{M}_ϕ 的關係如下

$$\mathbf{M}_\phi = \Gamma^t \mathbf{M}_\phi \quad (2.140)$$

由(2.140)式可得

$$\Delta\mathbf{M}_\phi = \mathbf{K}_\phi^P \Delta\phi^P = \Gamma^t (\Delta\mathbf{M}_\phi) + (\Delta\Gamma^t) \mathbf{M}_\phi \quad (2.141)$$

因本文中旋轉向量在當前變形位置重設為 $\mathbf{0}$ ，所以 $\phi^P = \mathbf{0}$ ， $\Gamma(\phi^P) = \mathbf{I}$ ，

$\Delta\Gamma(\phi^P) = \frac{1}{2} \Delta\phi^P \times \mathbf{I}$ ， $\Delta\phi^P = \Delta\phi^P$ ，所以(2.141)式可以表示成

$$\Delta\mathbf{M}_\phi = \mathbf{K}_\phi^P \Delta\phi^P = \Delta\mathbf{M}_\phi + \frac{1}{2} (\Delta\phi^P \times \mathbf{I})^t \mathbf{M}_\phi = (\mathbf{K}_\phi^P + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}}_\phi) \Delta\phi^P \quad (2.142)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -M_3^{\phi} & M_2^{\phi} \\ M_3^{\phi} & 0 & -M_1^{\phi} \\ -M_2^{\phi} & M_1^{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

由(2.142)式可得

$$\mathbf{K}_{\phi}^P = \mathbf{K}_{\phi}^P + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}}_{\phi} \quad (2.144)$$

由於系統平衡方程式是定義在固定總體座標系統中，負荷剛度矩陣 \mathbf{K}_{ϕ}^P 需先經以下的座標轉換，方可疊加到系統剛度矩陣中，亦即

$$\mathbf{K}_P^G = \mathbf{A}_{GP} \mathbf{K}_{\phi}^P \mathbf{A}_{GP}^t \quad (2.145)$$

其中 \mathbf{A}_{GP} 為(2.1)式中，總體座標與負荷基底座標間的轉換矩陣。

2.12 系統平衡方程式與收斂準則

系統離散化後的動平衡方程式，是由在當前的固定元素座標上算出的元素節點變形力、慣性力經標準的座標轉換後，在總體座標上所合成之系統內力向量及系統外力向量所組成，可表示如下

$$\Psi = \mathbf{F}^D + \mathbf{F}^I - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.146)$$

其中 Ψ 為不平衡力向量， \mathbf{F}^D 為系統變形力內力向量， \mathbf{F}^I 是系統慣性力內力向量， \mathbf{P} 表系統外力向量。 \mathbf{F}^D 、 \mathbf{F}^I 可分別由(2.107)式之元素節點變形力向量及(2.85)式之元素節點慣性力向量經由元素座標轉換到固定總體座標上組合而成， \mathbf{P} 可由與變形位置相關的節點作用力及與變形無關之節點作用力組合而成。由(2.117)式可知，慣性力可拆成速度項及加速度項

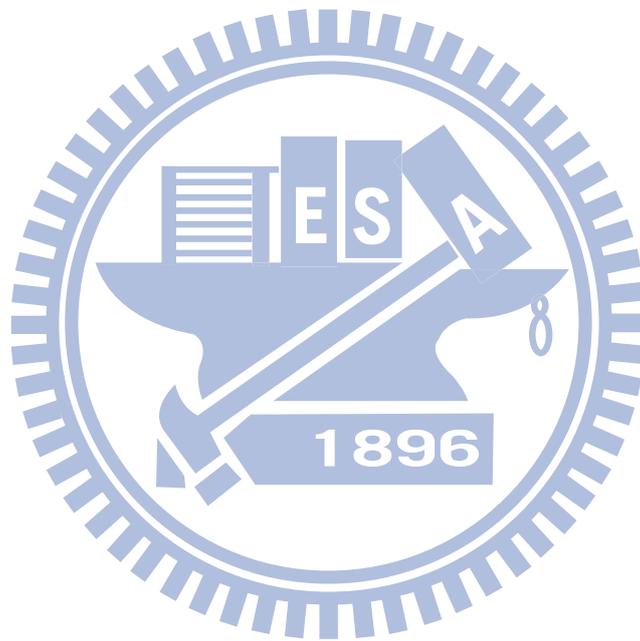
$$\Psi = \mathbf{F}^{I1} + \mathbf{F}^{I2} + \mathbf{F}^D - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.147)$$

\mathbf{F}^{I1} 為慣性力加速度項， \mathbf{F}^{I2} 為慣性力速度耦合項

本文以不平衡力向量 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N}} \leq e_{tol} \quad (2.148)$$

其中 N 為系統方程式的數目， $\|\Psi\|$ 不平衡力的 Euclidean Norm， e_{tol} 是容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文使用顯積分法及隱積分法求解非線性運動方程式，本章將介紹兩種不同的數值計算之方法，隱積分法使用 Newmark 直接積分法和 Newton-Raphson 增量迭代法來求解非線性動態平衡方程式，然而此法應用在受拘束的系統時，會有不穩定的現象發生，若加入 Numerical damping 則可獲得改善，如 Newmark- β damping scheme 及 Hilber-Hughes-Taylor scheme [21]。故本文亦探討上述兩種具 damping 效果的數值方法。而本文中顯積分法使用中央差分法。

本文中探討 t_n 時刻的動平衡方程式時，初始時間 $t_0 = 0$ ，而 $t_n = n\Delta t$ ，其中 Δt 為時間增量， n 為增量次數

3.1 Newmark 直接積分法

3.1.1 Newmark 直接積分法

Newmark 直接積分法乃假設在時間 t_n 時($n \geq 0$)，滿足動平衡方程式(2.145)的平衡位置，速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 為已知，則在 t_{n+1} 時刻之平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 可由下述迭代過程得到。

1. 令在 t_{n+1} 時刻的初始增量位移猜測值 $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0] \quad (3.12)$$

2. 令 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$ ， $\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$

3. 由 ΔU (或 δU) 及上次迭代後的變形位置得到此次迭代後的變形位置，再算出系統的節點變形力 \mathbf{F}_{n+1}^D 。由 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及最新的變形位置算出系統的節點慣性力 \mathbf{F}_{n+1}^I 。由在 t_{n+1} 時刻的外力 \mathbf{P}_{n+1} 、 \mathbf{F}_{n+1}^D 、 \mathbf{F}_{n+1}^I 、及系統動平衡方程式(2.146)算出系統不平衡力

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + \mathbf{F}_{n+1}^D - \mathbf{P}_{n+1} \quad (3.13)$$

4. 檢查 $\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|$ 是否滿足收斂準則，若滿足則迭代停止，本文採用的收斂準則為

$$\frac{\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|}{\sqrt{N}} < e_{tol}$$

e_{tol} 為給定的容許誤差， N 為方程式的數目

5. 若不滿足，則由

$$\delta \mathbf{U} = -[\hat{\mathbf{K}}]^{-1} \mathbf{\Psi}_{n+1} \quad (3.14)$$

得一增量位移修正量 $\delta \mathbf{U}$ ，其中

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] \quad (3.15)$$

為系統有效剛度矩陣(effective stiffness matrix)， $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$ 、 $[\mathbf{K}]$

表系統之質量、陀螺與剛度矩陣。

6. 令

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{U} \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \delta\mathbf{U} \quad (3.17)$$

7. 回到 2.

Newmark 直接積分法中，若取 $\beta = 0.25$ $\gamma = 0.5$ 則稱 Newmark trapezoidal rule，因 Newmark trapezoidal rule[21]不會造成振幅衰減無法除掉高頻的振動，為了使 Newmark 直接積分法能造成振幅衰減，以除掉不必要的高頻振動， β 和 γ 必需滿足下式[17]：

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{2}(1-2\alpha) \end{aligned} \quad (3.18)$$

上式中 $\alpha < 0$ 。

Newmark 直接積分法中若 β 和 γ 滿足(3.18)式，則稱為 Newmark- β damping scheme[21]。本文中取 $\alpha = -0.05$ 、 $\beta = 0.275625$ 、 $\gamma = 0.55$ 。

3.1.2 Hilber-Hughes-Taylor scheme

Hilber-Hughes-Taylor scheme(HHT)是一種 Multistep 的數值方法[21]，及其在求取目前的收斂位置時，不僅考慮目前的內力、外力，同時亦考慮了上一次收斂時刻的內力、外力。在應用 HHT scheme 時，前節中 Newmark 直接積分法之數值方法及方程式(3.11)式、(3.12)式、(3.16)式及(3.17)式仍可適用，但(3.13)式之不平衡力需改為

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + (1+\alpha)\mathbf{F}_{n+1}^D - \alpha\mathbf{F}_n^D - (1+\alpha)\mathbf{P}_{n+1} + \alpha\mathbf{P}_n \quad (3.19)$$

其中 \mathbf{F}_n^D 及 \mathbf{P}_n 為 t_n 時刻在平衡位置的節點變形力及外力， $\alpha \leq 0$ 為一控制參數，當 $\alpha = 0$ 時，(3.19)式與(3.13)式，及 Newmark trapezoidal rule 相同。

HHT scheme 中之 β 、 γ 亦需符合(3.18)式之要求。

3.2 中央差分法

中央差分法[1]在計算二階運動方程中擁有最高的精確度及穩定度，其缺點為時間增量 Δt 需要取非常小，其原理為 t_n 時刻建立運動方程式，求下一個時刻 t_{n+1} 的位移 \mathbf{U}_{n+1} ，其過程如下：

當 $n \geq 1$ 時在時間 t_n 之位移 \mathbf{U}_n 及之時間 t_{n-1} 之位移 \mathbf{U}_{n-1} 已知，欲求 t_{n+1} 時刻的位移 \mathbf{U}_{n+1} ，由動平衡方程式(2.147)，並將慣性力加速度項 \mathbf{F}_n^{I1} ，由質量矩陣 \mathbf{M} 以及 t_n 時刻的加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 表示可得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{F}_n^D(\mathbf{U}_n) - \mathbf{F}_n^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n) \quad (3.20)$$

\mathbf{F}_n^D 為 t_n 時刻的變形力， \mathbf{P}_n 為 t_n 時刻的外力， \mathbf{F}_n^{I2} 在計算時需用到 t_n 時刻的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ ，但在顯積分法中在 t_n 時刻速度為未知，故本研究以 t_{n-1} 時刻速度代替以求得 \mathbf{F}_n^{I2} 。

令時間 t_n 下速度及加速度(其推導詳見附錄 B)

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{U}_n + \Delta\mathbf{U}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.21)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - 2\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta\mathbf{U}_n - \Delta\mathbf{U}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.22)$$

其中

$$\Delta\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n \quad (3.23)$$

$$\Delta\mathbf{U}_{n-1} = \mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1} \quad (3.24)$$

$\Delta\mathbf{U}_n$ 為 t_n 時刻的位移增量， $\Delta\mathbf{U}_{n-1}$ 為 t_{n-1} 時刻的位移增量

將(3.22)式代入(3.20)式得位移增量 $\Delta\mathbf{U}_n$

$$\Delta\mathbf{U}_n = (\mathbf{M}_{eff})^{-1} \mathbf{F}_{eff} \quad (3.25)$$

其中

$$\mathbf{M}_{eff} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}$$

$$\mathbf{F}_{eff} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \Delta\mathbf{U}_{n-1} + \mathbf{P}_n - \mathbf{F}_n^D(\mathbf{U}_n) - \mathbf{F}_n^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n)$$

將位移增量 $\Delta\mathbf{U}_n$ 代回(3.21)、(3.22)可得 t_n 時刻速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 、加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$

當 $n=0$ 時，初始位移 \mathbf{U}_0 、初始速度 $\dot{\mathbf{U}}_0$ 已知，將 \mathbf{U}_0 及 $\dot{\mathbf{U}}_0$ 代入(3.20)式可得初始加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_0$ ，由中央差分法之定義 $\dot{\mathbf{U}}_0$ 及 $\ddot{\mathbf{U}}_0$ 又可寫成

$$\dot{\mathbf{U}}_0 = \frac{\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.26)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \frac{\mathbf{U}_1 - 2\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.27)$$

但 \mathbf{U}_{-1} 值實際並不存在，故將(3.26)式、(3.27)式聯立消去 \mathbf{U}_{-1} 項可得

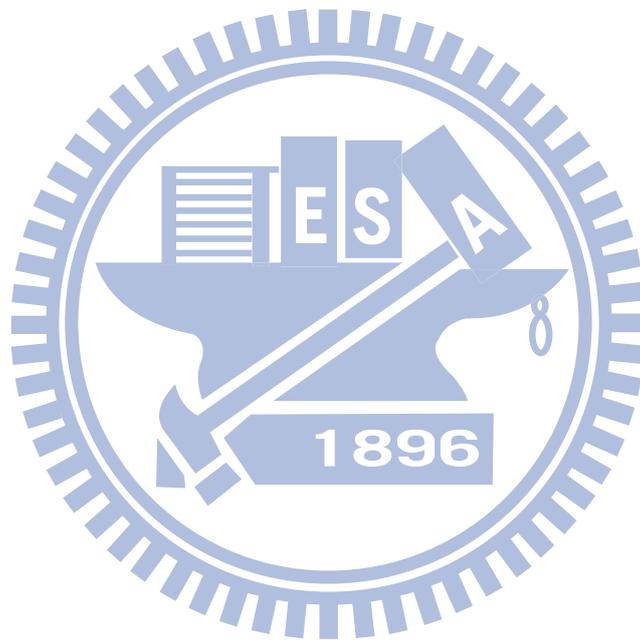
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (3.28)$$

當 $n \geq 1$ 時，在 t_n 時刻計算 $\Delta\mathbf{U}_n$ 之數值計算過程如下：

1. 令 $\dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_{n-1}$
2. 利用當前的變形位置 \mathbf{U}_n 及 $\Delta\mathbf{U}_{n-1}$ ，計算系統的節點變形力 $\mathbf{F}^D(\mathbf{U}_n)$ 、由

當前的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 及變形位置求出節點慣性力速度耦合項 $\mathbf{F}^{I2}(\dot{\mathbf{U}}_n)$

3. 由(3.25)式解出位移增量 $\Delta\mathbf{U}_n$ 代回(3.21)、(3.22)可得 t_n 時的速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 、加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$
4. $\mathbf{U}_{n+1} = \Delta\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_n$



第四章 數值例題與結果

本章中將探討不同推導法，Consistent Co-rotational formulation(CCR) [5] 及 Co-rotational Total Lagrangian formulation(CRTL)[2,6]，在動態分析時之差異性，以及比較不同之數值計算方法的準確性及效率。例題一、二、三、四、七、八，除了 Newmark trapezoidal rule 外，還使用中央差分法(CDM)，例題五、例題六只使用 Newmark trapezoidal rule，在比較數值方法的效率時，是以分析時全部位移增量及改正量的計算次數以及所需的 CPU 運算時間做為比較的基準，Newmark 法的計算次數即為總迭代次數，CDM 法的計算次數則為增量次數。本章中結果的呈現，如僅有一個時間增量之結果，則該時間增量的結果為收斂的結果，即時間增量繼續減小時，結果已無明顯變化，如有不同的時間增量之結果，則時間增量較小的結果為收斂的結果，本章中以該時間增量的結果來進行準確性及效率的比較。當 CCR 與 CRTL[6]結果相同時，本章中僅呈現 CCR 之結果。本章中靜態分析的結果是使用文獻[22]之梁元素及程式分析的結果，平衡迭代的容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。

本研究考慮三種類型的變形內力 \mathbf{f}_θ^D 及剛度 \mathbf{k}_θ ，並說明如下

第一類型變形內力：(2.101)–(2.105)式全部考慮

第二類型變形內力：(2.101)–(2.105)式中去掉加底線 _____ 的項

第三類型變形內力：(2.101)–(2.105)式中去掉加底線 _____ 及 _____ 的項

第一類型剛度：(2.124)式全部考慮

第二類型剛度：(2.124)式中去掉加底線 _____ 的項

第三類型剛度：(2.124)式中去掉加底線 _____ 及 _____ 的項

文獻[6]的變形內力 \mathbf{f}_θ^D 及剛度 \mathbf{k}_θ 與本文相同，本章中 CCR 所使用的慣性矩陣為 (2.127)式之 \mathbf{m} 、(2.131)式之 \mathbf{c} ，CRTL 所使用的慣性矩陣為文獻[6]的 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 及 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$ ，本文將文獻[6]之質量矩陣 \mathbf{m}_θ 及陀螺矩陣 \mathbf{c}_θ 之子矩陣的顯式列於附錄 G。

例題一 懸臂直角梁

如圖 4.1 所示，考慮一根在 $X_1 - X_2$ 平面上成直角的 L 形懸臂梁，端點為自由翹曲，在其肘處受 $-X_3$ 方向上的外力作用，其作用力大小如圖 4.1 所示，在時間 $t=2$ 時移除外力，讓它自由振動。此題之幾何及材料性質為： $L=10$ ， $EA=10^6$ ， $EI_y = EI_z = GJ = 10^3$ ， $A\rho=1$ ， $\rho I_y = \rho I_z = 10$ 。數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM。本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第二類型的剛度。

本例題分析時分別使用四及八個元素，Newmark 積分法使用的時間增量 $\Delta t = 0.15$ ，平衡迭代的容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-4}$ ，CDM 使用的時間增量，在四個元素時為 $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ ，在八個元素時為 $\Delta t = 10^{-3}$ 。圖 4.2 為使用 Newmark 積分法的位移-時間曲線，由圖 4.2 可以發現四個元素與八個元素的解仍有少許差異，圖 4.2 也可以發現 CCR 與 CRTL 的結果相當接近，且八個元素比四個元素的結果更為接近，在附錄 E 中所提到的元素較多時 CCR 與 CRTL 的慣性力相同，其結果也會幾乎相同的結果相符。

圖 4.3 為 CDM 與 Newmark 積分法的位移-時間曲線比較。兩種方法都是使用 CCR 及八個元素的結果，由圖 4.3 可發現 CDM 與 Newmark 積分法數值結果非常接近。CDM 在分析時共使用了 3×10^4 個時間增量，CPU 時間為 85.7s，Newmark 積分法在分析時共使用了 200 個時間增量，827 次迭代 CPU 時間為 3.12 s。因本例題 CDM 的最大容許時間增量為 $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ ，遠小於 Newmark 積分法的 $\Delta t = 0.15$ ，CDM 的計算內力的次數遠大於 Newmark

積分法，CPU 運行的時間也較久，故在本例題使用 Newmark 積分法效率比 CDM 好。

例題二 一雙對稱 I 型斷面簡支梁承受二偏心力的軸向力

一斷面為 W14×43 型鋼的簡支梁兩端各承受一軸向偏心階躍負載(step loading) $P(t)$ ，其偏心位置如圖 4.4 所示，其大小考慮了 $P_0 = 50kip$ ， $P_0 = 100kip$ ， $P_0 = 150kip$ 三種情況。梁的兩端皆為自由翹曲，並可繞著 X_2^G 、 X_3^G 旋轉，但不可繞 X_1^G 軸旋轉。其端點 A 在 X_1^G 方向不可位移，端點 B 在 X_1^G 方向是可以平移的。此梁之幾何及材料性質： $L = 22.05 ft$ ， $b = 0.66625 ft$ ， $t_f = 0.044167 ft$ ， $d = 1.13833 ft$ ， $t_w = 0.0254167 ft$ ，楊氏係數 $E = 4.176 \times 10^9 lb/ft^2$ ，剪力係數 $G = 1.6128 \times 10^9 lb/ft^2$ ，密度 $\rho = 15.187392 slug/ft^3$ ，表一為其斷面性質。本例題用四十個元素與二十個元素分析的結果相當接近，因此本例題採用二十個元素的結果，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM，本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第一類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。

本例題分別使用 CCR 與 CTRL 進行動態分析，由於結果相同，所以僅呈現 CCR 之結果。圖 4.5 為靜態分析的負荷-位移曲線，圖 4.6 至 4.10 為動態分析位移-時間曲線，由圖 4.6、4.7 可以看出 Newmark 積分法($\Delta t = 2 \times 10^{-4} s$)的結果仍有些不準，由圖 4.6 可以看出 Newmark 積分法($\Delta t = 9 \times 10^{-5} s$)與 CDM($\Delta t = 1 \times 10^{-5} s$)在 X_1^G 軸方向的結果幾乎相同，Newmark 積分法($\Delta t = 9 \times 10^{-5} s$)與 CDM($\Delta t = 1 \times 10^{-5} s$)在 X_2^G 、 X_3^G 軸方向的結果完全重合，所以 CDM 的結果在圖 4.7 沒有呈現。圖 4.8-圖 4.10 為使用 Newmark 積分法($\Delta t = 9 \times 10^{-5} s$)之位移-時間曲線圖，由圖 4.8-圖 4.10 可見 $P_0 = 150 kip$ 的位

移-時間曲線與 $P_0 = 50 \text{ kip}$ 和 $P_0 = 100 \text{ kip}$ 的位移-時間曲線明顯的不同，本例題承受通過形心軸力時之靜態挫屈負荷為 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} = 184.665 \text{ kip}$ ，由動態效應及圖 4.5 可知 $P_0 = 150 \text{ kip}$ 時，此梁應已發生動態挫屈，這應可說明為何 $P_0 = 150 \text{ kip}$ 的位移-時間曲線與 $P_0 = 50 \text{ kip}$ 和 $P_0 = 100 \text{ kip}$ 的位移-時間曲線明顯的不同。在軸力 $P_0 = 50 \text{ kip}$ 、 $P_0 = 100 \text{ kip}$ 及 $P_0 = 150 \text{ kip}$ 的動態分析，Newmark 積分法 ($\Delta t = 9 \times 10^{-5} \text{ s}$) 皆使用了 3334 個增量，分別使用了 13603、18131、25452 次迭代，CPU 時間分別為 119s、183s、266s，CDM ($\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$) 皆使用了 30000 個時間增量、CPU 時間皆為 178s。本例題 Newmark 積分法與 CDM 需要的計算時間相差不大，但 Newmark 積分法的計算次數及運算時間都隨著軸力增加而增加，CDM 則是維持相同的計算次數及運算速率。

例題三 一雙對稱 I 型斷面簡支梁承受兩端彎矩

本題考慮如圖 4.11 所示之簡支梁兩端分別受到繞 X_2^G 及 $-X_2^G$ 軸的彎矩 M ， $M_0 = 1 \text{ MN} \cdot \text{m}$ ，其中 B 點還受到繞 X_3^G 軸的彎矩 $0.01M$ ，梁兩端不能繞 X_1^G 軸轉動，但能繞 X_2^G 、 X_3^G 軸轉動，梁兩端皆為自由翹曲，其端點 A 在 X_1^G 方向不可位移，端點 B 在 X_1^G 方向是可以平移的。此梁之幾何及材料性質： $L = 6.1 \text{ m}$ ， $b = 0.262636 \text{ m}$ ， $t_f = 0.028448 \text{ m}$ ， $d = 0.28194 \text{ m}$ ， $t_w = 0.017272 \text{ m}$ ，楊氏係數 $E = 199.94804 \text{ GPa}$ ，剪力係數 $G = 82.73712 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ，表二為其斷面性質。本例題中使用二十個元素來進行分析，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM，本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第二類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-4}$ 。

圖 4.12 為靜態分析的負荷-位移曲線圖，圖 4.13 為使用 Newmark 積分

法與 CDM 的位移-時間曲線圖。本例題使用 CCR 與 CRTL 得到的位移-時間曲線幾乎完全重合，所以圖 4.13 中僅呈現 CCR 的結果。由圖 4.13 可以看出 Newmark 積分法 ($\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$) 與 CDM ($\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$) 的結果非常接近。本例題 Newmark 積分法 ($\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$) 分析時共使用了 600 個增量，3009 次迭代，CPU 時間為 32s，CDM 的最大容許時間增量為 $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$ ，分析時共使用了 3×10^4 個增量，CPU 時間為 201.4s，故本例題使用 Newmark 積分法效率比 CDM 好。因為動態的效應，由圖 4.13 可以看出動態分析的最大位移，大於圖 4.12 中靜態分析 $M_0 = 1 \text{ MN} \cdot \text{m}$ 的位移，且圖 4.13 中 X_2^G 方向的位移 V_C -時間曲線之振幅亦隨著時間增加而增加，所以此梁似乎已發生動態挫屈。

例題四 矩形斷面固端梁受側向負載

如圖 4.14 所示，考慮一兩端固定的矩形斷面梁之中點受一偏心載重 F 作用，其作用力大小如圖所示，梁的固定端皆為抑制翹曲，本例題考慮兩種偏心距 Case (a) $e = 0 \text{ m}$ ，Case (b) $e = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。Case (a) 在文獻[23-27]中都曾探討。梁的幾何及材料性質為： $L = 0.508 \text{ m}$ ， $b = 0.0254 \text{ m}$ ， $h = 3.175 \times 10^{-3} \text{ m}$ ， $E = 207 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ， $\rho = 2713 \text{ kg/m}^3$ ，其斷面性質列於表三。本例題因對稱僅分析一半的結構，Case (a) 將其離散成六個元素，Case (b) 將其離散成十五個元素，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM，本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第一類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-4}$ 。

本例題使用 CCR 與 CRTL 的位移-時間曲線幾乎完全重合，所以本例題僅呈現 CCR 的結果。圖 4.15 為 Case (a) 使用 Newmark 積分法與 CDM 之位移-時間曲線，由圖 4.15 可見，Newmark 積分法 ($\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$) 的結果才

有足夠的精度並與 CDM($\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ s) 之位移-時間曲線幾乎完全重合。使用 Newmark 積分法($\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ s)時，共使用了 500 個時間增量、1957 次平衡迭代、CPU 時間 6.1s，使用 CDM($\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ s)時，共使用了 1667 個時間增量、CPU 時間 4.31s。圖 4.16 至 4.18 為 Case (b)之歷時分析的結果，從圖中可以看出 Newmark 積分法($\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ s) 的結果才有足夠的精度並與 CDM($\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ s) 之位移-時間曲線幾乎完全重合。使用 Newmark 積分法($\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ s)時，共使用了 2500 個時間增量、20114 次平衡迭代、CPU 時間 175.4s，使用 CDM($\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ s)時，共使用了 10000 個時間增量、CPU 時間 68.3s，故本例題使用 CDM 較 Newmark 積分法有效率。

例題五 一雙對稱 I 型斷面直角懸臂梁承端點受集中力

本例題考慮如圖 4.19、4.20 所示之直角懸臂梁在其自由端承受不同的集中力，本例題考慮兩類的作用力：Case(a) 如圖 4.19 所示，一個在 X_1^G 方向的集中力 $P(t)$ 及一個在 X_3^G 方向的集中力 $Q(t)$ 作用在 C 點斷面的形心，Case(b) 如圖 4.20 所示，一個在 X_1^G 方向的偏心集中力 $P(t)$ 作用在 C 點斷面。 P_0 為 $P(t)$ 的大小，本例題考慮 $P_0 = 10 \text{ kip}$ 及 $P_0 = 15 \text{ kip}$ ， $Q = 0$ 、 $Q = 0.001P$ 及 $Q = 0.01P$ 。該懸臂梁 A、B 點為抑制翹曲，C 點為自由翹曲。此梁之幾何及材料性質： $L = 20 \text{ ft}$ ， $b = 0.70167 \text{ ft}$ ， $t_f = 0.0775 \text{ ft}$ ， $d = 1.80167 \text{ ft}$ ， $t_w = 0.04833 \text{ ft}$ ，楊氏係數 $E = 4.176 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$ ，剪力係數 $G = 1.6128 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$ ，密度 $\rho = 15.187392 \text{ slug/ft}^3$ ，表四為其斷面性質。本例題使用二十個元素，數值方法使用 Newmark 積分法進行分析，時間增量 $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ ，在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，平衡迭代時採用第二類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-4}$ 。

本例題使用 CCR 與 CRTL 得到的結果幾乎完全一樣。圖 4.21、圖 4.22

為靜態分析的負荷-位移曲線圖，當 $Q = 0$ 時的挫屈負載 $P_{cr} = 18.695 \text{ kip}$ ， X_3^G 方向的挫屈位移為 $U_C^{cr} = 5.70504 \text{ in}$ ， X_2^G 方向的挫屈位移為 $V_C^{cr} = 2.20461 \text{ in}$ 。圖 4.23 至圖 4.25 為 Case(a) $P_0 = 10 \text{ kip}$ 時自由端 C 點之時間-位移曲線圖，圖 4.26 至圖 4.28 為 Case(a) $P_0 = 15 \text{ kip}$ 時自由端 C 點之時間-位移曲線圖，由圖 4.23 至圖 4.28 中可發現當 $P_0 = 10 \text{ kip}$ 或 $P_0 = 15 \text{ kip}$ 在 $Q = 0.001P$ 時位移在 X_1^G 方向的位移最大，在 $Q = 0.01P$ 時位移在 X_3^G 方向的位移最大，皆與圖 4.21 的靜態負荷-位移曲線圖一致。圖 4.29、4.30 為 Case(b) 自由端 C 點之位移-時間曲線圖，因為動態的效應，動態分析時的最大位移對應於靜態分析的負荷-位移時，靜態分析之負荷會大於動態分析時所受之負荷，由圖 4.29 及 4.30 及圖 4.22，可以發現 W_C 在 $P_0 = 10 \text{ kip}$ 和 $P_0 = 15 \text{ kip}$ 時的最大值對應到圖 4.22 中 $P \geq P_{cr}$ 的 W_C ，且 $P_0 = 10 \text{ kip}$ 和 $P_0 = 15 \text{ kip}$ 時， W_C 的最大值的比約為一比五，由上述的觀察可見 $P_0 = 10 \text{ kip}$ 時，應剛造成動態挫屈， $P_0 = 15 \text{ kip}$ 時動態挫屈的程度應更高。

例題六 三維梁自由運動

如圖 4.31 所示，考慮在三維空間自由移動之矩形斷面梁。梁的幾何及材料性質為： $L_1 = 20 \text{ m}$ ， $L_2 = 5 \text{ m}$ ， $b = 0.1 \text{ m}$ ， $E = 70 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ， $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ，表五為其斷面性質，所受之外力 $F_1 = F(t)$ ， $F_2 = F(t)/10$ ， $F_3 = F(t)/8$ ，其中外力力矩為 Follower Moment $M_1 = L_1 F(t)/10$ ，所謂的 Follower Moment 指此 Moment 附著在梁的斷面上，其方向隨斷面一起旋轉，此例題在文獻[28]首先被提出。本例題數值方法使用 Newmark 積分法，時間增量 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ，在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，平衡迭代時採用第二類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-4}$ 。

本例題使用兩百四十、一百八十與一百二十個元素進行分析，分析時

CPU 時間分別為 915s、670s、433s，其結果相當接近，因此僅呈現一百二十個元素之結果，圖 4.32 為 E 點位移的歷時分析，由圖 4.32 可見，當 $t \leq 10s$ ，本文與文獻[6]的結果幾乎完全重合但與[28]的結果些微不同，當 $t > 10s$ ，本文與文獻[6]及[28]的結果趨勢相同，但時間-位移曲線有相當的差異。為了驗證本研究之結果的正確性，我們使用牛頓運動方程式來檢驗此結構之質心運動軌跡，如圖 4.33 及表六，本文的結果與解析解相當吻合。圖 4.34 為梁在三維空間中之變形位置圖，由圖中可見在時刻 0s 至 20s，增量時間為 1s，各個時間的變形位置圖。

例題七 I 型斷面兩端固接梁中點承受一偏心力負荷

如圖 4.35 所示，一長度 L 斷面為 I 型的兩端固接梁在其中點斷面 X_3^G 的方向受一偏心距 $e = b/2$ 的偏心階躍負載(step loading) $P(t)$ ，其大小為 $P_0 = 10^5 lb$ 及 $P_0 = 2 \times 10^5 lb$ ，梁的固定端皆為抑制翹曲。其幾何與材料性質為： $L = 20 ft$ ， $b = 0.70167 ft$ ， $t_f = 0.0775 ft$ ， $d = 1.80167 ft$ ， $t_w = 0.04833 ft$ ，楊氏係數 $E = 4.176 \times 10^9 lb/ft^2$ ，剪力係數 $G = 1.6128 \times 10^9 lb/ft^2$ ，密度 $\rho = 15.187392 slug/ft^3$ ，其斷面性質列於表七。本例題因對稱僅分析一半的結構，分析時使用十個元素，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM，本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第二類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。

本例題使用 CCR 與 CRTL 的分析結果幾乎相同，所以僅呈現 CCR 之結果。圖 4.36、4.37 分別為偏心距 $e = 0$ 及 $e = b/2$ 之靜態分析的負荷-位移曲線圖，圖 4.38 至圖 4.43 為使用 Newmark 積分法與 CDM 的位移-時間曲線圖。由圖 4.38、4.39 可以發現 V_C -時間曲線之最大位移大於 W_C -時間曲線之最大位移，這與圖 4.37 受偏心距 $e = b/2$ 之靜態分析的負荷-位移曲線圖的趨

勢較接近，與圖 4.36 受偏心距 $e = 0$ 之靜態分析之負荷-位移曲線圖的趨勢較不一樣，這可能是因 $P_0 = 10^5 N$ 的偏心階躍負載之動態效應仍不會造成動態挫屈。由圖 4.41、4.42 亦可以發現 V_C -時間曲線之最大位移遠大於 W_C -時間曲線之最大位移，這與圖 4.37 受偏心距 $e = b/2$ 之靜態分析的負荷-位移曲線圖的趨勢不一樣，與 4.36 受偏心距 $e = 0$ 之靜態分析挫屈後之負荷-位移曲線圖的趨勢較接近，這可能是因動態效應， $P_0 = 2 \times 10^5 N$ 的偏心階躍負載會造成動態挫屈。在圖 4.38 至圖 4.43 中可見 Newmark 積分法在時間增量 $\Delta t = 2 \times 10^{-4} s$ 才有足夠的精度並與 CDM 幾乎重合，CDM 在最大容許時間增量 $\Delta t = 1 \times 10^{-5} s$ 才會收斂，分析時共使用了 8×10^3 個增量，CPU 時間為 34.4s，Newmark 積分法 ($\Delta t = 2 \times 10^{-4} s$) 在分析時共使用了 400 個增量，1923 次迭代，CPU 時間為 10.5s，因本例題 CDM 的計算次數及 CPU 的運行時間皆大於 Newmark 積分法，故在本例題使用 Newmark 積分法效率比 CDM 好。

例題八 十字斷面兩端固接梁中點承受一偏心力負荷

如圖 4.44 所示，一長度 L 斷面為十字的兩端固接梁在其中點斷面受一偏心力， $P_0 = 1.4 \times 10^4 N$ ，梁的固定端皆為抑制翹曲。其幾何與材料性質為： $L = 2.4m$ ， $b = 0.06m$ ， $h = 0.1m$ ， $t = 5 \times 10^{-3}m$ ，楊氏係數 $E = 2.1 \times 10^{11} N/m^2$ ，浦松比 $\nu = 0.3$ ，其斷面性質列於表八，本例題因對稱僅分析一半的結構，分析時使用十個元素，數值方法使用 Newmark 積分法及 CDM，本例題在計算變形內力時採用第二類型的變形內力，Newmark 積分法在平衡迭代時採用第一類型的剛度，容許誤差為 $e_{tol} = 10^{-5}$ 。

圖 4.45、4.46 分別為偏心距 $e = 0$ 及 $e = b/2$ 之靜態分析的負荷-位移曲線圖，本例題偏心距 $e = 0$ 時的挫屈負載為 $P_{cr} = 3.5594 \times 10^4 N$ ， X_3^G 方向的挫屈位移為 $W_C^{cr} = 2.70286 cm$ 。圖 4.47 至圖 4.49 為梁中點之位移-時間曲線圖。

本例題使用 CCR 與 CRTL 的分析結果幾乎相同，所以僅呈現 CCR 之結果。因為動態的效應，動態分析的最大位移，大約為靜態分析 $P = 2P_0$ 的位移，因 $P = 2P_0$ 仍小於 P_{cr} ，所以動態分析的最大位移與圖 4.46 中對應於 $P = 2P_0$ 的位移較接近。本例題使用 CDM 分析時，最大容許時間增量約為 $\Delta t = 7 \times 10^{-6}$ s。圖 4.47 至圖 4.49 中可見使用 Newmark 積分法時，在時間增量 $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$ s 的結果才有足夠的精度，並與 CDM 的結果重合，另外本例題使用 Newmark 積分法，時間增量 $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$ s 時，共使用了 1000 個時間增量、10175 次平衡迭代、CPU 時間 44.5s，使用 CDM，時間增量 $\Delta t = 7 \times 10^{-6}$ s 時，共使用了 4286 個時間增量、CPU 時間 18.1s，故本例題使用 CDM 比使用 Newmark 積分法省計算時間。



第五章 結論

本研究以一致性共旋轉法推導一個雙對稱斷面開口薄壁梁元素，探討三維梁之非線性動態反應，並比較一致性共旋轉推導法(CCR)與共旋轉全拉格朗日推導法(CRTL)推導之梁元素的差異及本在非線性動態分析時的效率及準確性。

本文中推導的梁元素有兩個節點十四個自由度。本研究在移動元素座標上描述元素的變形，在一個與當前的移動元素座標重合的固定元素座標上，推導出元素節點在當前固定元素座標的擾動位移和擾動旋轉與元素節點旋轉參數的擾動量的關係。一致性共旋轉法在推導元素的節點變形內力時，須過濾掉擾動位移中剛體運動的部分，在推導元素的節點慣性力時需要先推導移動元素座標的角速度及角加速度，且節點慣性力的表示式相當複雜。本研究將元素節點慣性力表示成元素節點之絕對速度、加速度、角速度、角加速度的函數，本研究發現以一致性共旋轉推導法與共旋轉全拉格朗日推導法得到的節點慣性力僅有一些小差異，但這些差異會在元素增加時會趨近於零。由本研究推導的結果及分析例題的數值結果可以得到以下結論：

一致性共旋轉法(CCR)推導出之節點變形力 \mathbf{f}_θ^D 與 CRTL 未經轉換矩陣的節點變形力相同，差異為轉換矩陣的不同，剛度矩陣也是因為轉換矩陣的不同而有所差異，節點慣性力在元素數目較多時與 CRTL 相同，質量矩陣及陀螺矩陣不考慮耦合項與 CRTL 之質量矩陣 \mathbf{m}_θ 及陀螺矩陣 \mathbf{c}_θ 相同。由第四章的數值例題結果發現，除例題一與例題六外，CCR 與 CRTL 的結果幾乎一樣，例題一之結果在元素數目增多時，CCR 與 CRTL 的結果幾乎相同，這與第二章的理論相符。例題六之結果，在前段的時間也與 CRTL 幾乎相同，後段時間的結果雖有差異但趨勢仍相同，所以由上述之結果可得，

CCR 與 CRTL 在動態分析時，迭代次數以及分析的效率差別不大，且在大部分的題目結果幾乎相同。

第四章的數值例題中，例題一、二、三、四、七、八，使用 Newmark 積分法與 CDM，其結果幾乎相同，在例題一、二、三、七，Newmark 積分法的效率較 CDM 好，在例題四、八，則是 CDM 效率較好，由上述的結果可以發現 Newmark 積分法與 CDM 在不同題目之動態分析的效率上，各有優劣。

在靜態分析時兩種推導法 CCR 與 CRTL，皆無明顯優勢，但在動態分析時，建議採用共旋轉全拉格朗日法(CRTL)進行推導，雖然兩種推導法在動態分析的結果相同，但一致性共旋轉法(CCR)在推導時較為繁瑣以及慣性力的表示式相當複雜。



參考文獻

- [1] Le T.N., Battini J.M., Hjiat M., "Efficient formulation for dynamics of co-rotational 2D beams," *Computational Mechanics*, Vol.48, No.2, pp.153–161, 2011.
- [2] 林哲言, 三維梁之非線性動態分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 1994.
- [3] Hsiao K.M., Lin J.Y., Lin W.Y., "A Consistent Co-rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.169, pp.1–18, 1999.
- [4] Hsiao K.M., Lin W.Y., Chen R. H., "Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Thin-Walled Beams," *Proceedings of The World Congress on Engineering*, Vol.2, pp.1442–1446, 2009.
- [5] 陳弘虎, 薄壁開口梁之自由振動分析及幾何非線性動態反應研究, 國立交通大學機械工程研究所博士論文, 臺灣, 新竹, 2007.
- [6] 林琮棋, 雙對稱斷面薄壁梁之幾何非線性動態分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹, 2013.
- [7] Le T.N., Battini J.M., Hjiat M., "Dynamics of 3-D Beam Elements in a Co-rotational Context: A Comparative Study of Established and new Formulation", *Finite Elements in Analysis and Design*, pp. 97–111, 2012.
- [8] Le T.N., Battini J.M., Hjiat M., "A New Corotational Element for Nonlinear Dynamic Analysis of 3D Beams," *COMPADYN 2013 4th*

- ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Kos Island, Greece, 12–14 June, 2013.
- [9] Le T.N., Battini J.M., Hjjaj M., "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.269, pp.538–565, 2013.
- [10] Hsiao K.M., Lin W.Y, "A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analysis of spatial beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.188, pp.567–594, 2000.
- [11] Pacoste C., Eriksson A., "Beam element in instability problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.144, pp.163–197, 1997.
- [12] Crisfield M.A., "A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.81, pp.131–150, 1990.
- [13] Teh L.H., Clarke M.J., "Co-rotational and lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements," *Journal of Constructional Steel Research*, Vol.48, pp.123–144, 1998.
- [14] Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L., "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.9, pp.353–386, 1975.
- [15] Betsch P., Steinmann P., "Constrained dynamics of geometrically exact beams," *Computational Mechanics*, Vol.31, pp.49–59, 2003.
- [16] Cardona A., Geradin M., "A beam finite element non-linear theory with finite rotations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, pp.2403–2438, 1988.

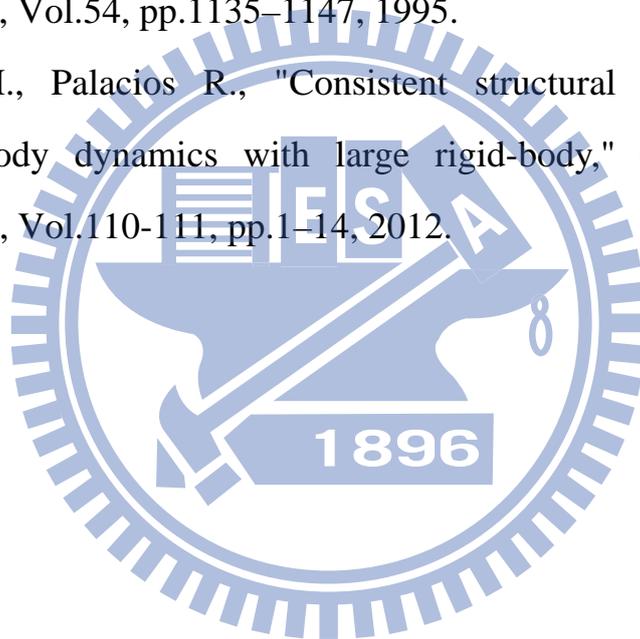
- [17] Geradin M., Cardona A., "Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra," Computational Mechanics, Vol. 4, pp.115–135, 1989.
- [18] Ibrahimbegovic´ A., Mikdad M.A., "Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.41, pp.781–814, 1998.
- [19] Goldstein H., Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1980.
- [20] Hsiao K.M., Lin W.Y, "A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analysis of spatial beams," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.188, pp.567-594, 2000.
- [21] Cardona A., Geradin M., "Time Integration of the Equations of Motion in Mechanism Analysis," Computers and Structures, Vol.33, No.3, pp.801-820, 1989.
- [22] 游敬義, 雙對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 2000.
- [23] Katsikadelies J.T., Tsiatas G. C., "Non-linear dynamic analysis of beams with variable stiffness," Journal of Sound and Vibration, Vol.270, pp.847-863, 2004.
- [24] McNamara J.E., "Solution schemes for problems of nonlinear structural dynamics," Journal of Pressure Vessel Technology, American Society of Mechanical Engineers, Vol.96, pp.96–102, 1974.
- [25] Mondkar D.P., Powell G.H., "Finite element analysis of nonlinear

static and dynamic response," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.11, pp.499–520, 1977.

[26] Yang T. Y., Saigal S., "A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.20, pp.851–867, 1984.

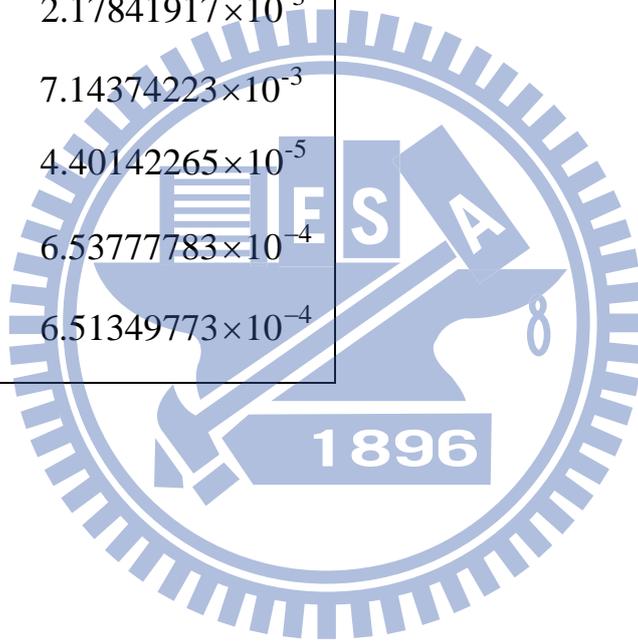
[27] Leung A.Y.T., Mao S.G., "Symplectic integration of an accurate beam finite element in non-linear vibration," *Computers and Structures*, Vol.54, pp.1135–1147, 1995.

[28] Henrik H., Palacios R., "Consistent structural linearisation in flexible-body dynamics with large rigid-body," *Computers and Structures*, Vol.110-111, pp.1–14, 2012.



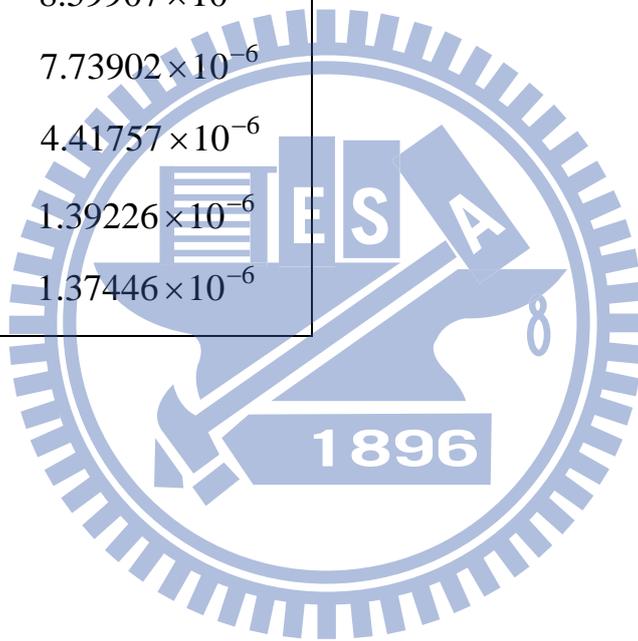
表一 例題二之 I 型斷面性質

Section geometry of I section:	
$d = 1.13833 \text{ ft}, b = 0.66625 \text{ ft}$	
$t_f = 0.044167 \text{ ft}, t_w = 0.0254167 \text{ ft}$	
$A \text{ (ft}^2\text{)}$	$8.55395833 \times 10^{-2}$
$I_y \text{ (ft}^4\text{)}$	$2.00754244 \times 10^{-2}$
$I_z \text{ (ft}^4\text{)}$	$2.17841917 \times 10^{-3}$
$K_I \text{ (ft}^6\text{)}$	$7.14374223 \times 10^{-3}$
$J \text{ (ft}^4\text{)}$	$4.40142265 \times 10^{-5}$
$I_\omega \text{ (ft}^6\text{)}$	$6.53777783 \times 10^{-4}$
$\alpha_{\omega yz} \text{ (ft}^6\text{)}$	$6.51349773 \times 10^{-4}$



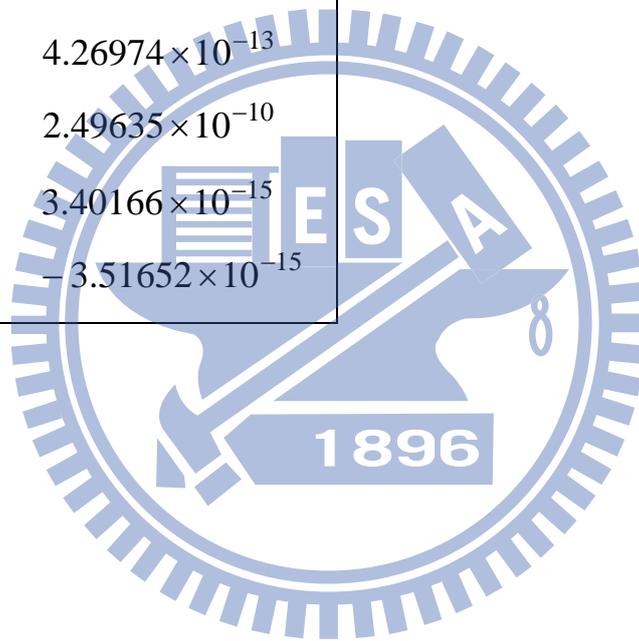
表二 例題三之 I 型斷面性質

Section geometry of I section:	
$d = 0.28194m, b = 0.262636m$,	
$t_f = 0.028448m, t_w = 0.017272m$	
A (m^2)	1.88229×10^{-2}
I_y (m^4)	2.57464×10^{-4}
I_z (m^4)	8.59907×10^{-5}
K_I (m^6)	7.73902×10^{-6}
J (m^4)	4.41757×10^{-6}
I_ω (m^6)	1.39226×10^{-6}
$\alpha_{\omega yz}$ (m^6)	1.37446×10^{-6}



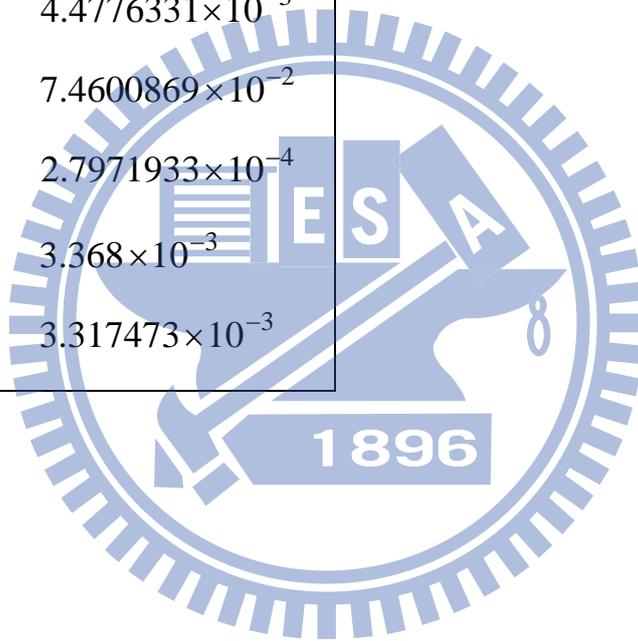
表三 例題四之矩型斷面性質

Section geometry of rectangle section: $b = 0.0254m, h = 0.003175m$	
$A (m^2)$	8.0645×10^{-5}
$I_y (m^4)$	6.7746×10^{-11}
$I_z (m^4)$	4.33574×10^{-9}
$K_I (m^6)$	4.26974×10^{-13}
$J (m^4)$	2.49635×10^{-10}
$I_\omega (m^6)$	3.40166×10^{-15}
$\alpha_{\omega yz} (m^6)$	-3.51652×10^{-15}



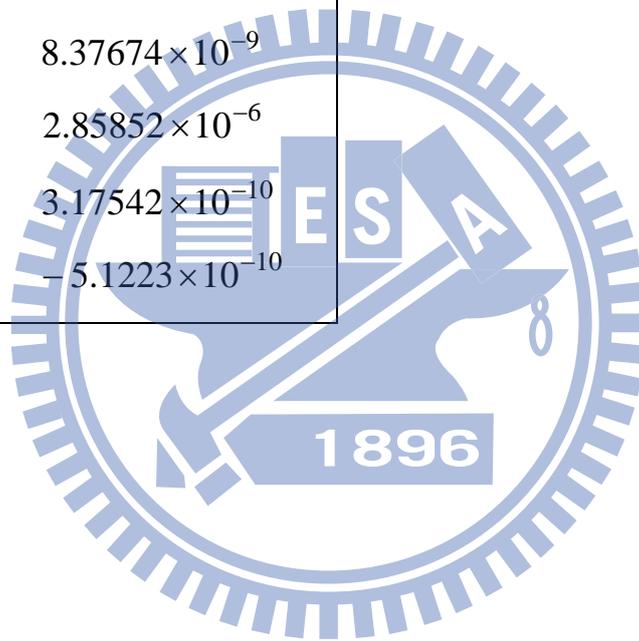
表四 例題五之 I 型斷面性質

Section geometry of I section:	
$d = 1.80167 \text{ ft}, b = 0.70167 \text{ ft}$	
$t_f = 0.0775 \text{ ft}, t_w = 0.04833 \text{ ft}$	
$A \text{ (ft}^2\text{)}$	0.18834722
$I_y \text{ (ft}^4\text{)}$	0.09886622
$I_z \text{ (ft}^4\text{)}$	4.4776331×10^{-3}
$K_I \text{ (ft}^6\text{)}$	7.4600869×10^{-2}
$J \text{ (ft}^4\text{)}$	2.7971933×10^{-4}
$I_\omega \text{ (ft}^6\text{)}$	3.368×10^{-3}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (ft}^6\text{)}$	3.317473×10^{-3}



表五 例題六之矩型斷面性質

Section geometry of rectangle section: $b = 0.1m, h = 0.05m$	
$A (m^2)$	5×10^{-3}
$I_y (m^4)$	1.04167×10^{-6}
$I_z (m^4)$	4.16667×10^{-6}
$K_I (m^6)$	8.37674×10^{-9}
$J (m^4)$	2.85852×10^{-6}
$I_\omega (m^6)$	3.17542×10^{-10}
$\alpha_{\omega yz} (m^6)$	-5.1223×10^{-10}



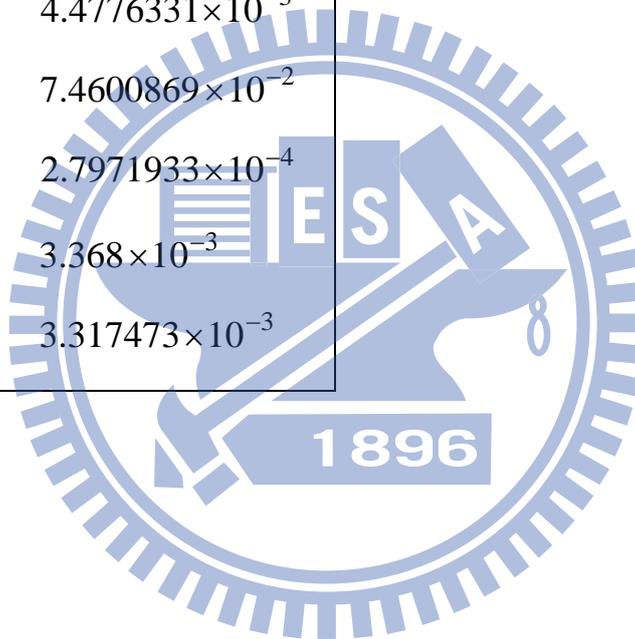
表六 例題六質心位置分析

Time (sec)	Present			Analytical		
	$X_1^m (10^{-2} m)$	$X_2^m (m)$	$X_3^m (m)$	$X_1^m (m)$	$X_2^m (m)$	$X_3^m (m)$
0	0.0	0.0	0.83333	0.0	0.0	0.83333
2.5	-0.00115	0.1608	0.83333	0.0	0.1606	0.83333
5	-0.00642	1.2860	0.83308	0.0	1.2850	0.83333
7.5	0.05195	4.43402	0.83284	0.0	4.3369	0.83333
10	0.10072	10.2881	0.83369	0.0	10.2800	0.83333
12.5	0.05660	19.9330	0.83337	0.0	19.9237	0.83333
15	0.19428	33.4371	0.83337	0.0	33.4250	0.83333
17.5	0.28706	50.7986	0.83295	0.0	50.7838	0.83333
20	0.48615	72.0182	0.83271	0.0	72.0000	0.83333

其中 X_i^m ($i=1,2,3$) 為質心的座標，總體座標的原點為 C 點 $t=0$ 時的位置。

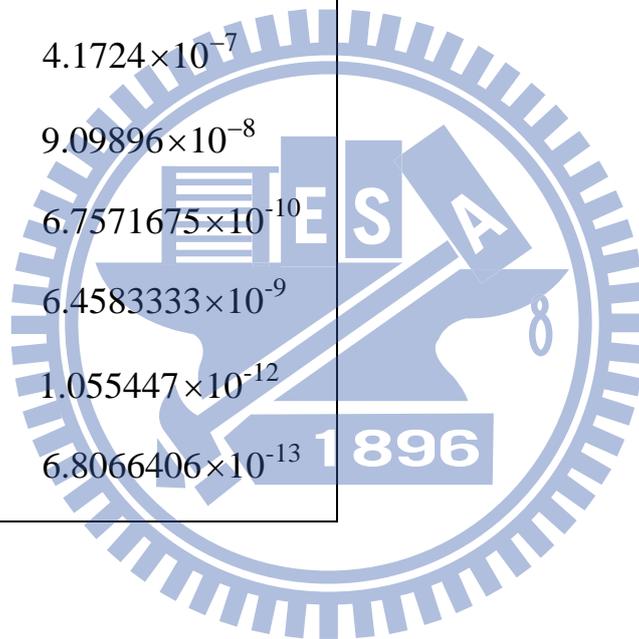
表七 例題七之 I 型斷面性質

Section geometry of I section:	
$d = 1.80167 \text{ ft}, b = 0.70167 \text{ ft}$	
$t_f = 0.0775 \text{ ft}, t_w = 0.04833 \text{ ft}$	
$A \text{ (ft}^2\text{)}$	0.18834722
$I_y \text{ (ft}^4\text{)}$	0.09886622
$I_z \text{ (ft}^4\text{)}$	4.4776331×10^{-3}
$K_I \text{ (ft}^6\text{)}$	7.4600869×10^{-2}
$J \text{ (ft}^4\text{)}$	2.7971933×10^{-4}
$I_\omega \text{ (ft}^6\text{)}$	3.368×10^{-3}
$\alpha_{\omega yz} \text{ (ft}^6\text{)}$	3.317473×10^{-3}



表八 例題八之十字斷面性質

Section geometry of symmetric cross section:	
$L = 2.4m, b = 0.06m, h = 0.1m$	
$t = 5 \times 10^{-3}m, \rho = 7.8 \times 10^3 kg/m^3$	
$G = 8.076923077 \times 10^{10} N/m^2$	
$A (m^2)$	7.75×10^{-4}
$I_y (m^4)$	4.1724×10^{-7}
$I_z (m^4)$	9.09896×10^{-8}
$K_I (m^6)$	$6.7571675 \times 10^{-10}$
$J (m^4)$	6.4583333×10^{-9}
$I_\omega (m^6)$	1.055447×10^{-12}
$\alpha_{\omega yz} (m^6)$	$6.8066406 \times 10^{-13}$



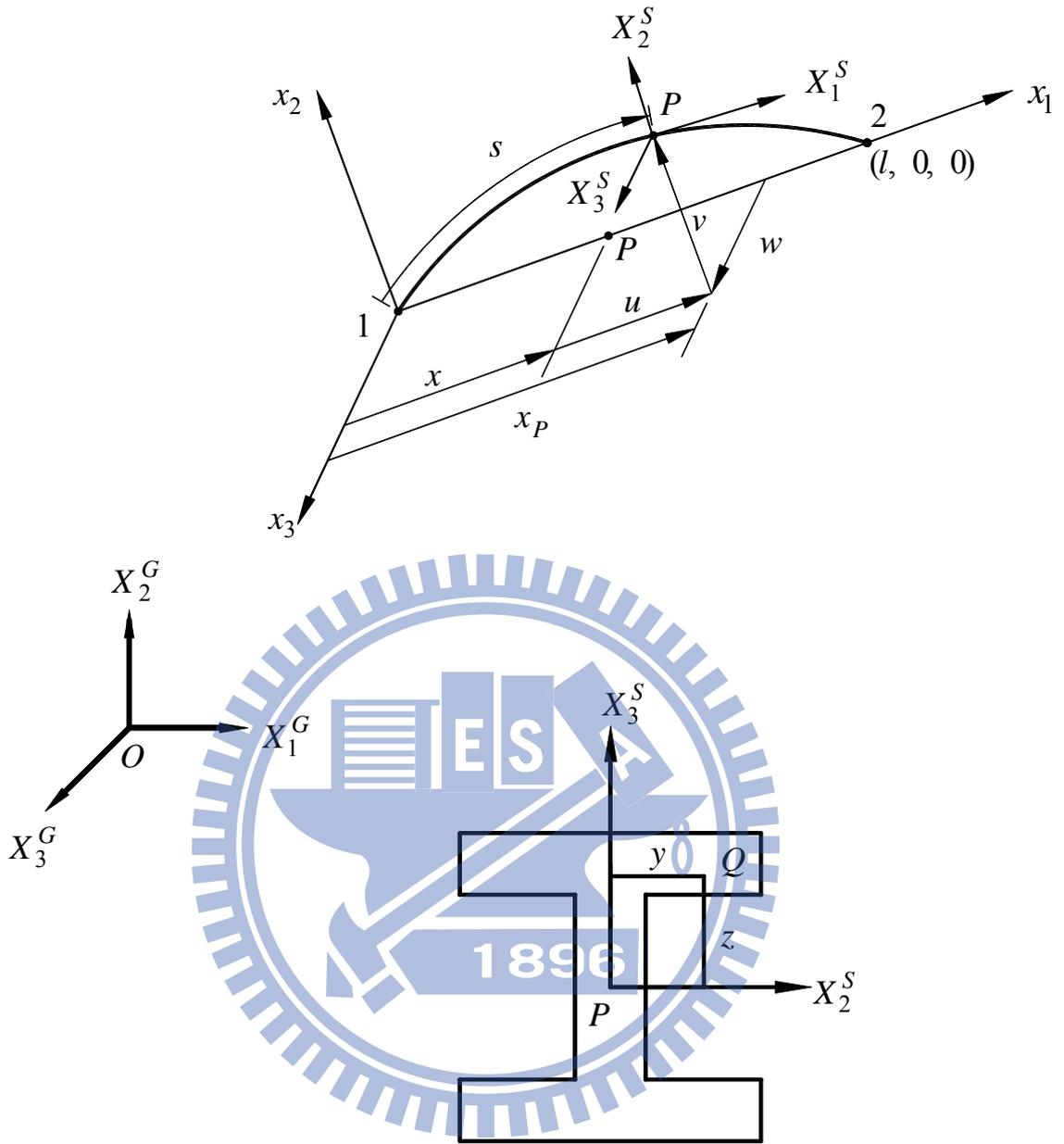


圖 2.1 元素座標與元素截面座標

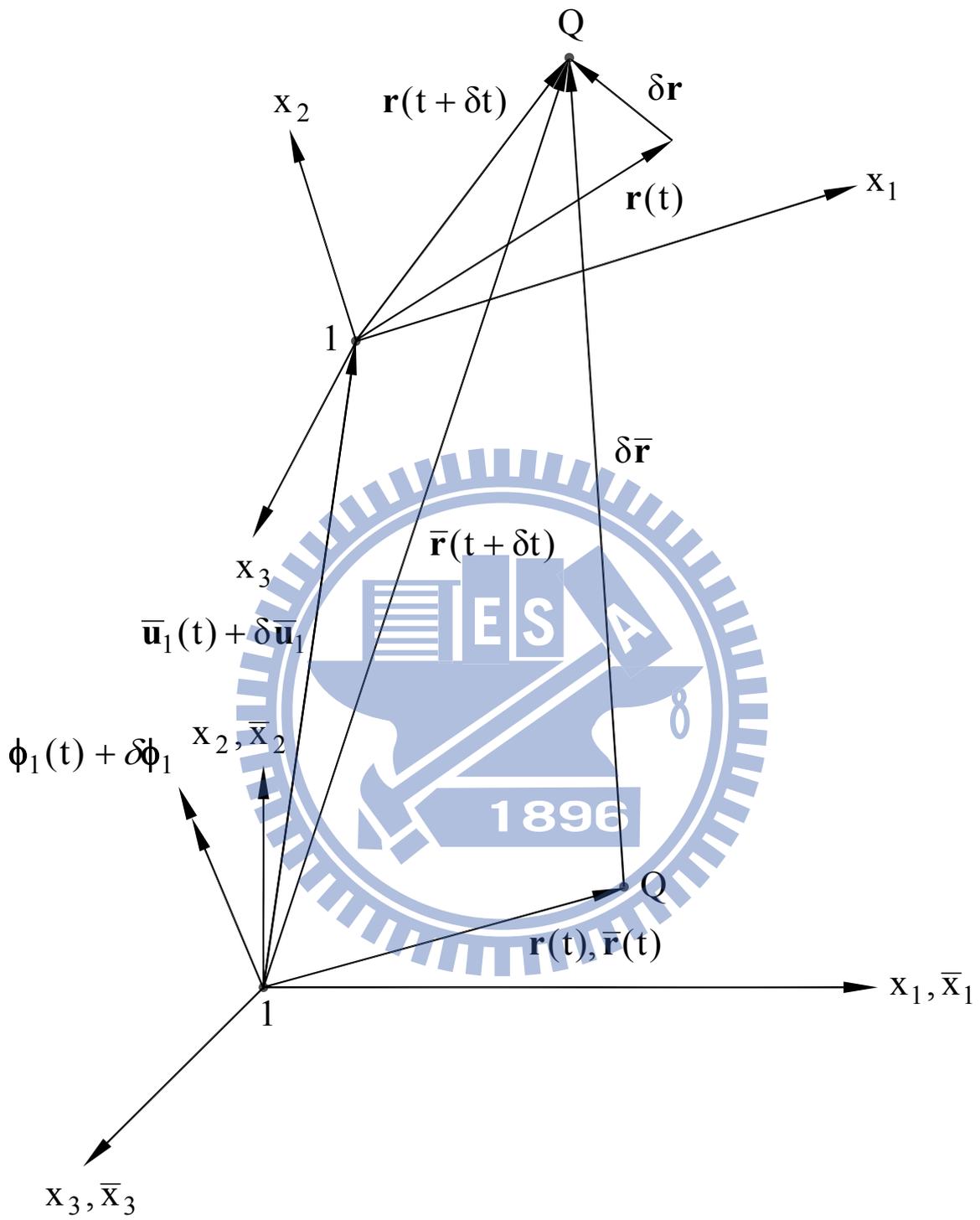
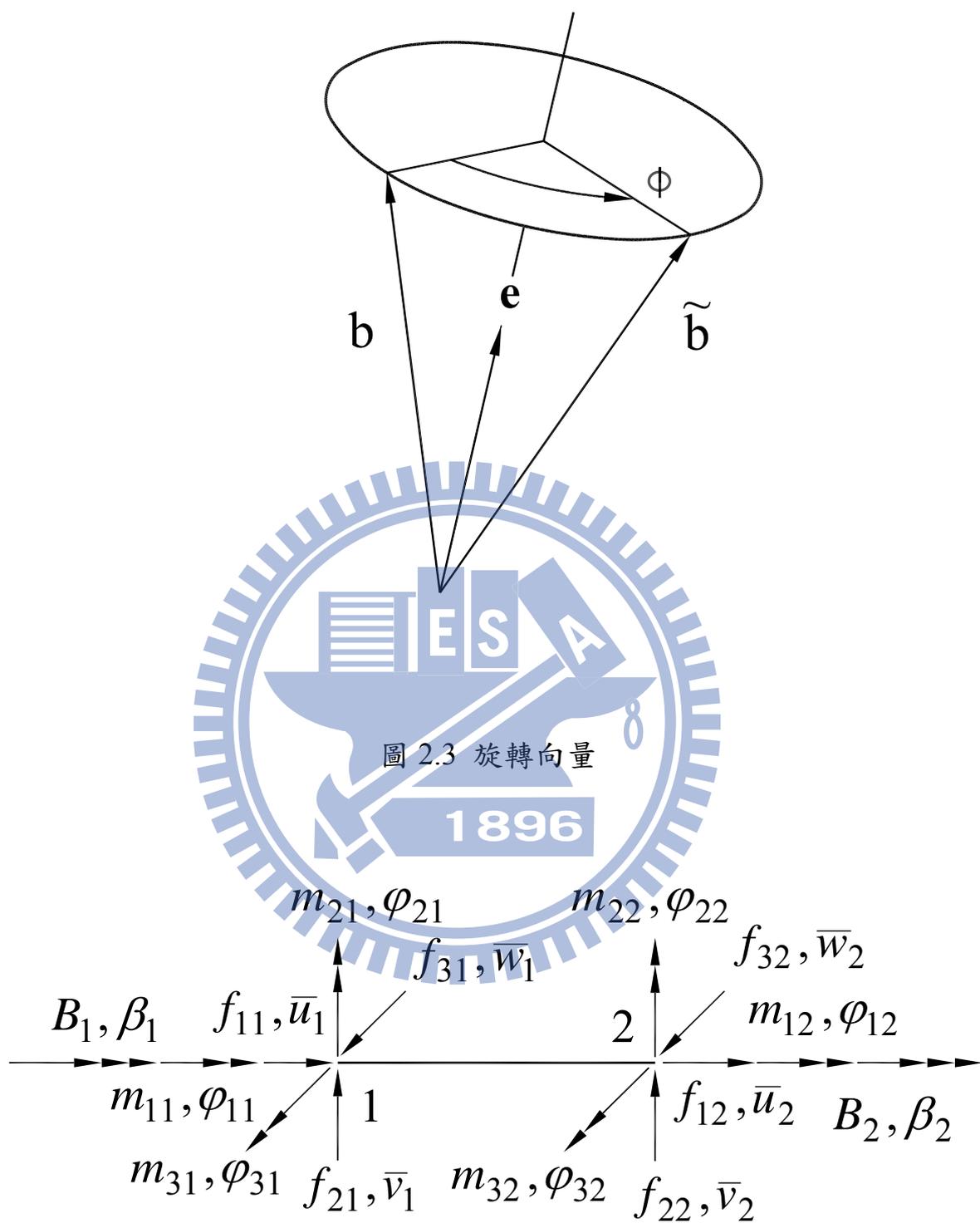


圖 2.2 固定元素座標與移動元素座標



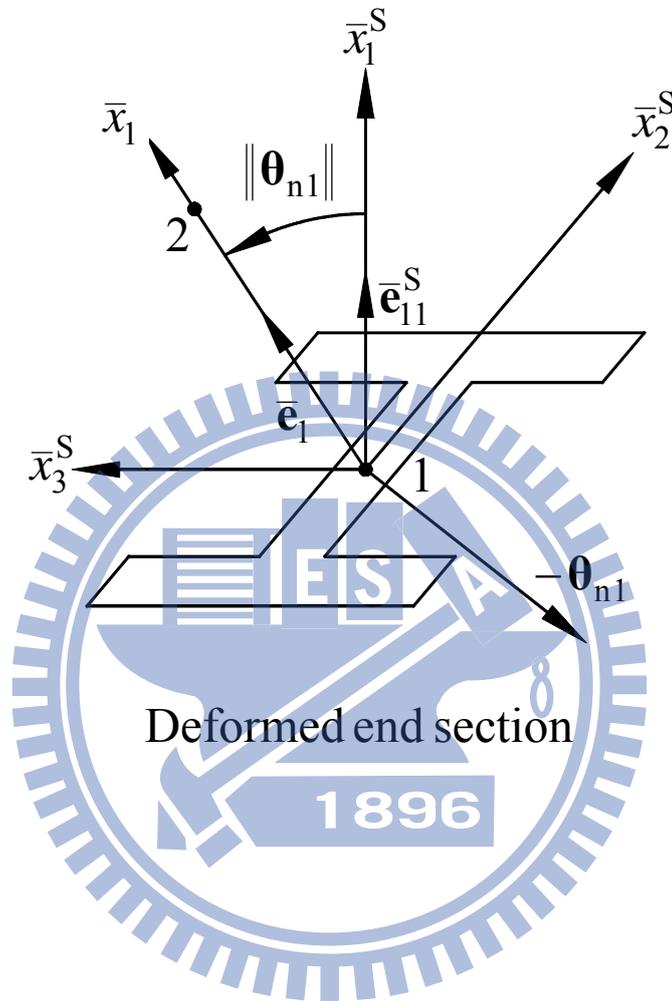


圖 2.5 決定 \bar{x}_2 軸與 \bar{x}_3 軸之第一步驟

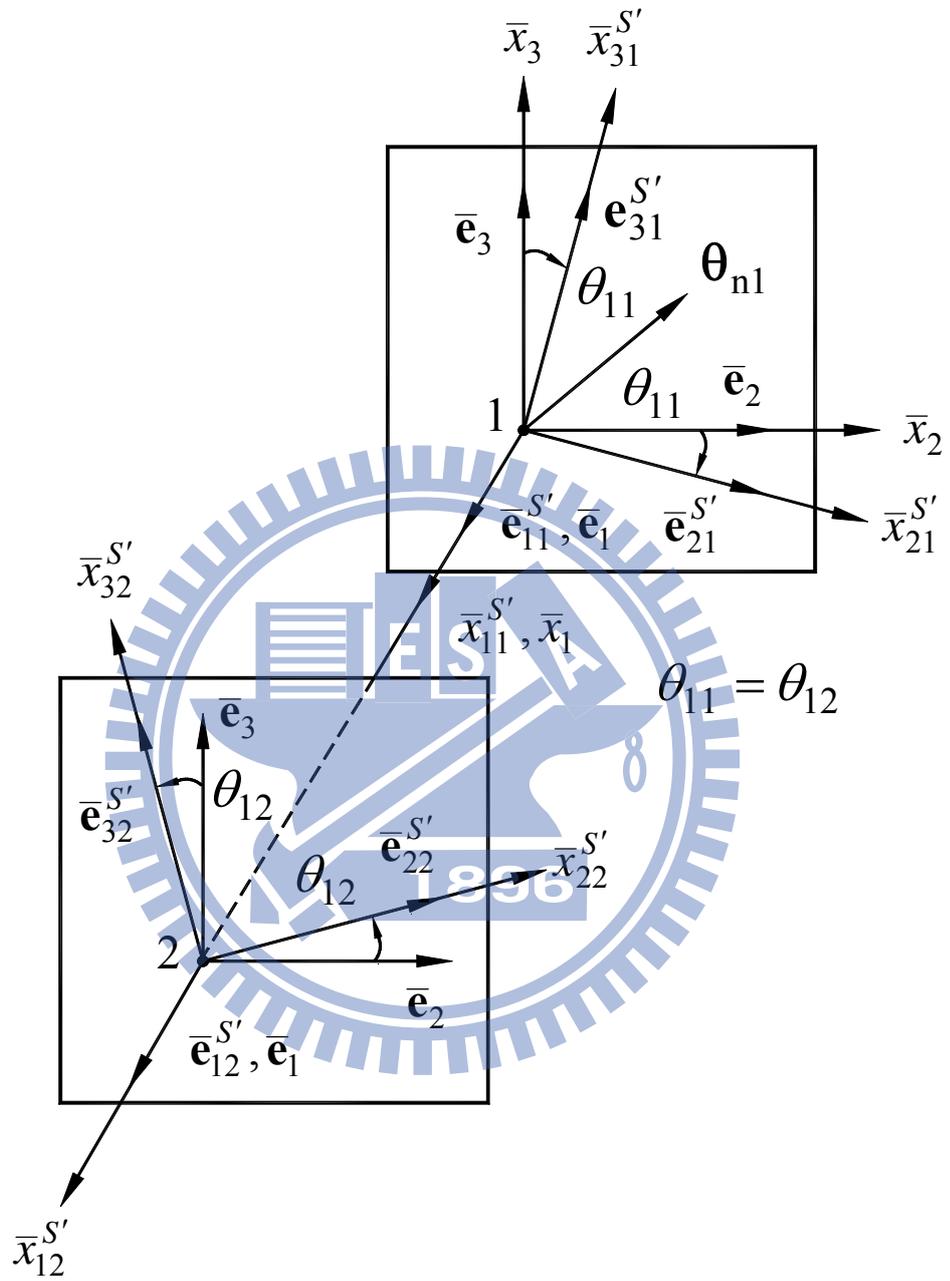


圖 2.6 決定 \bar{x}_2 軸與 \bar{x}_3 軸之第二步驟

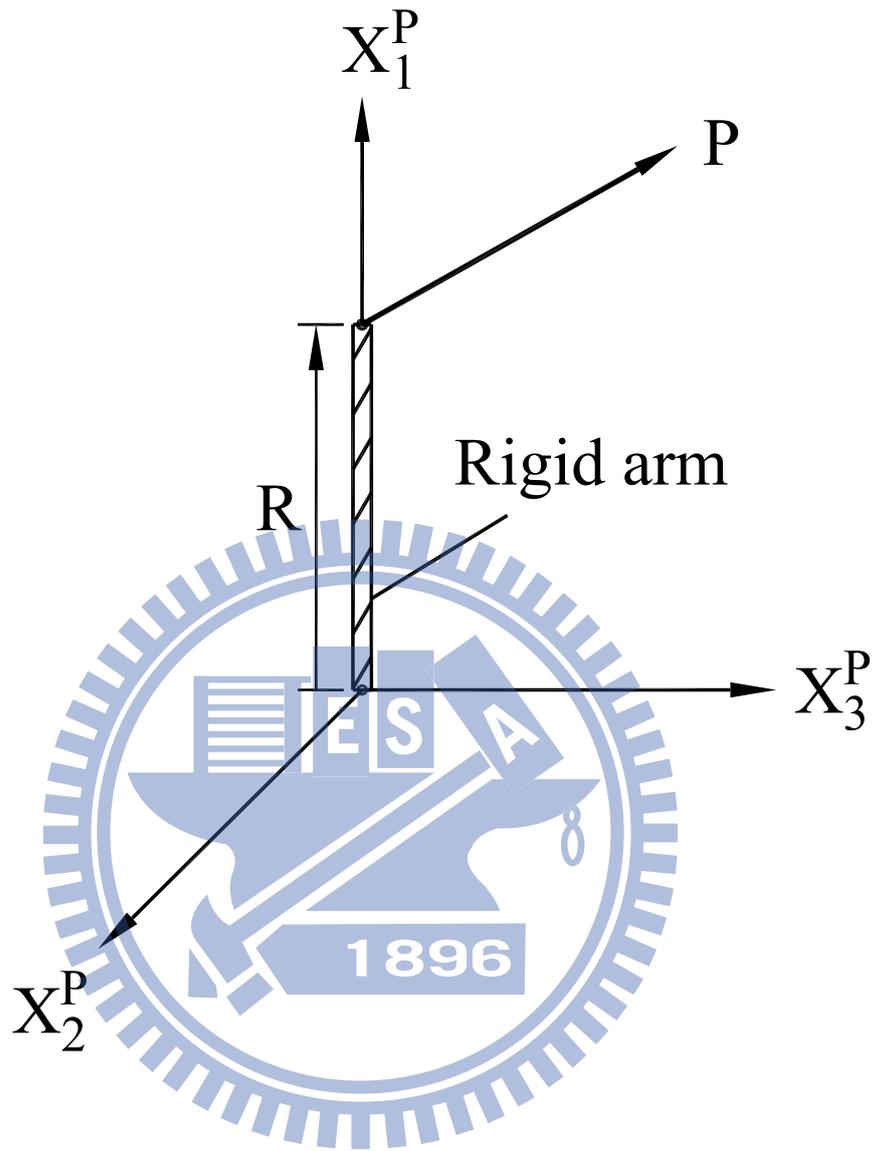


圖 2.7 剛性桿受力作用機制圖

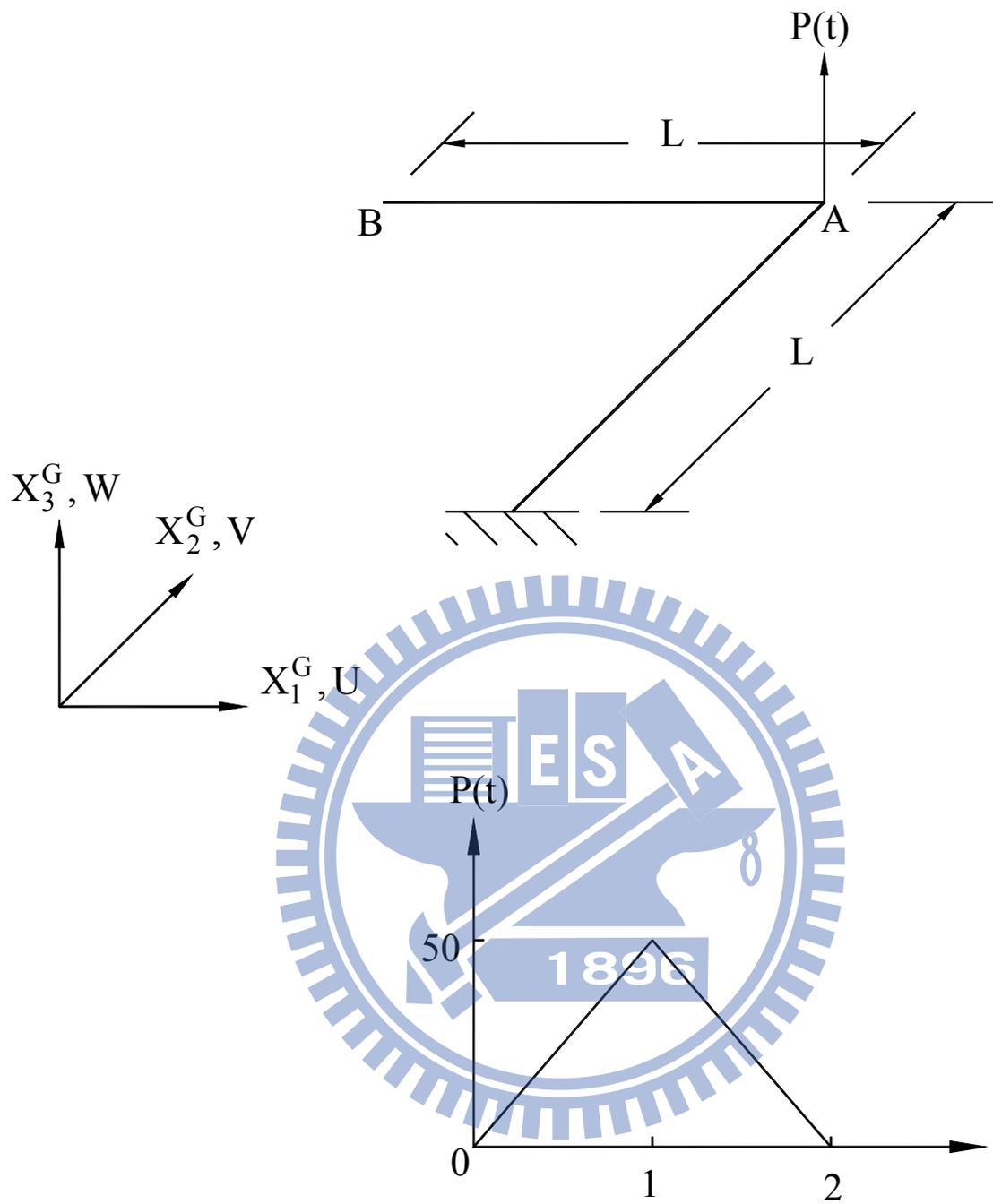


圖 4.1 例題一懸臂直角梁之幾何及受力圖

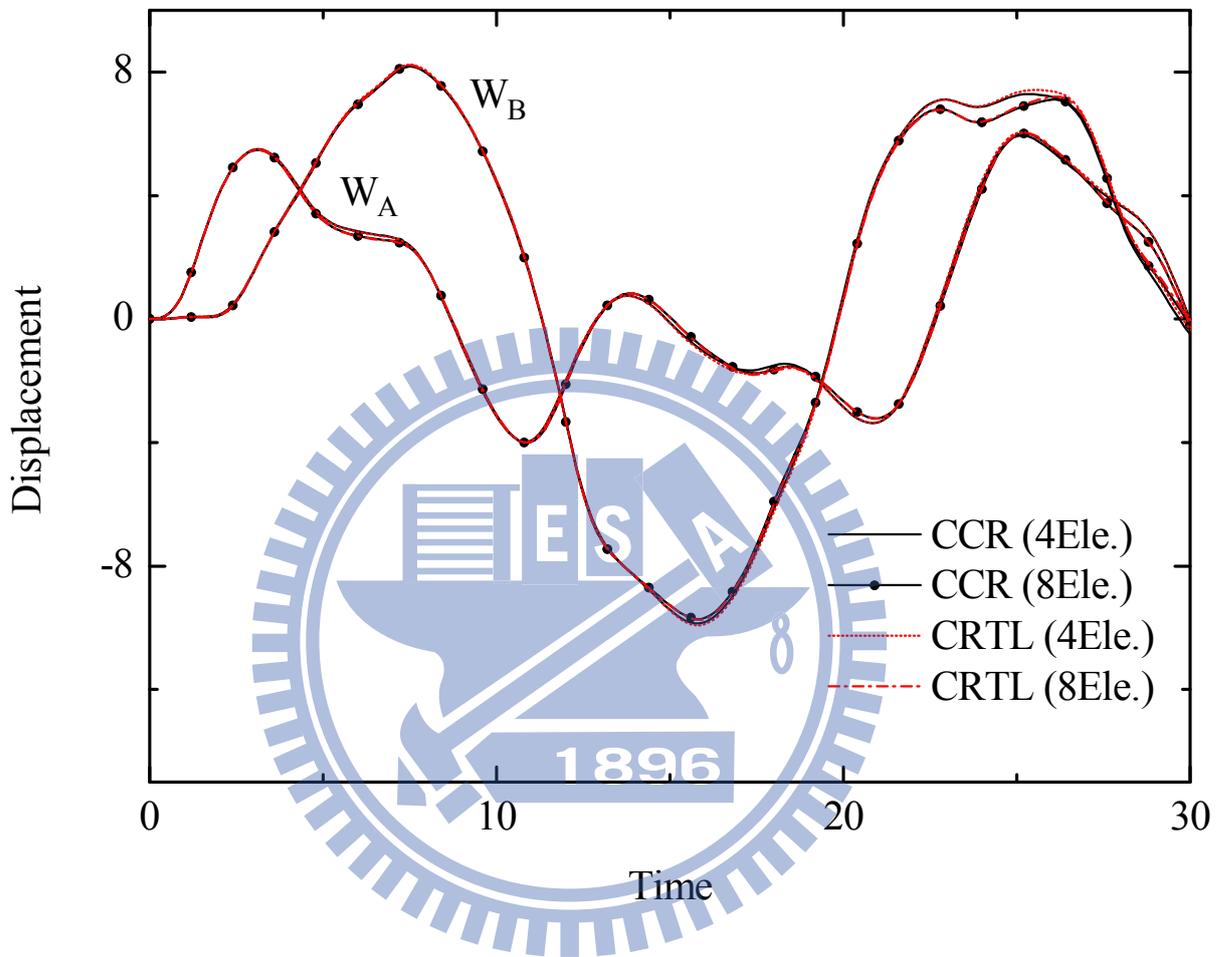


圖 4.2 例題一 Newmark 積分法位移—時間曲線圖

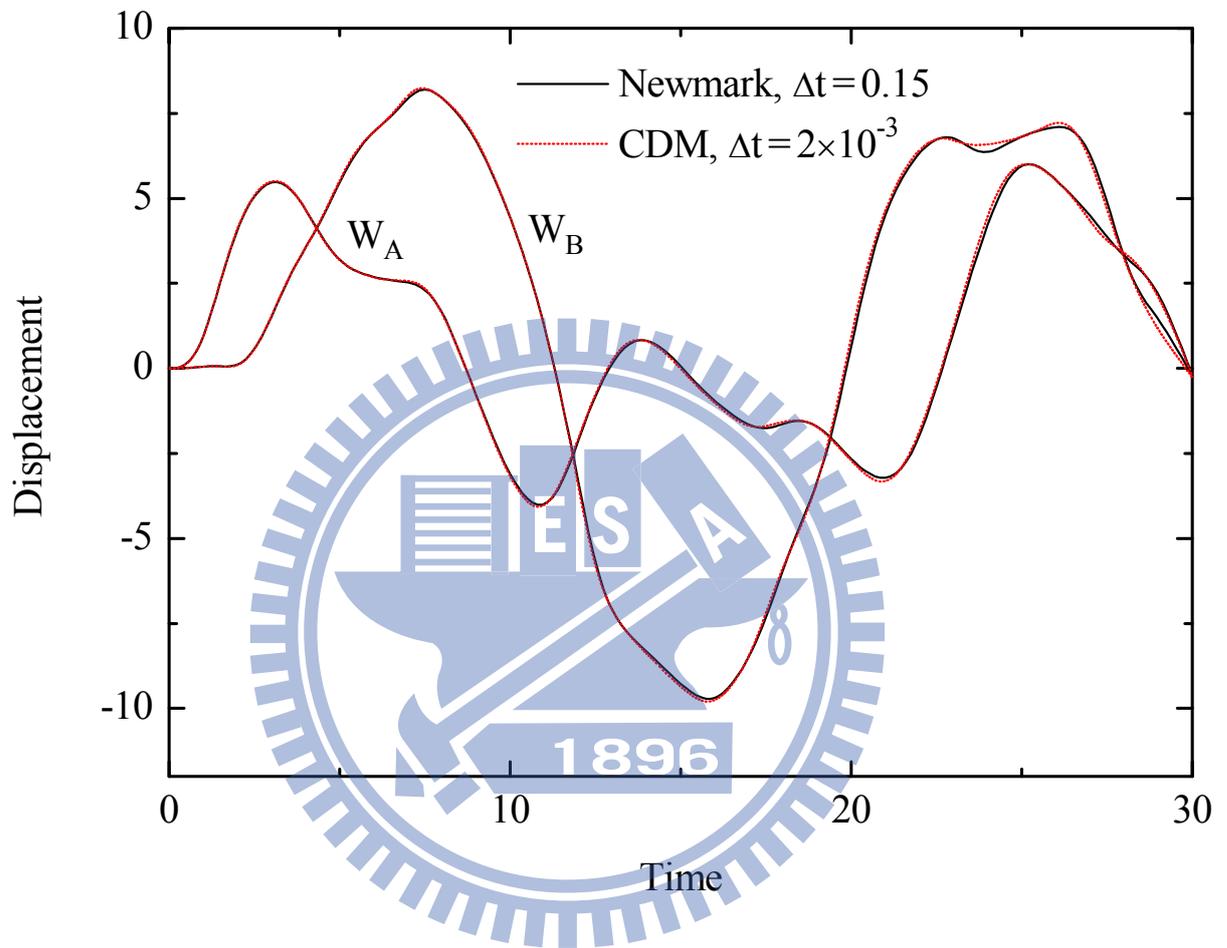
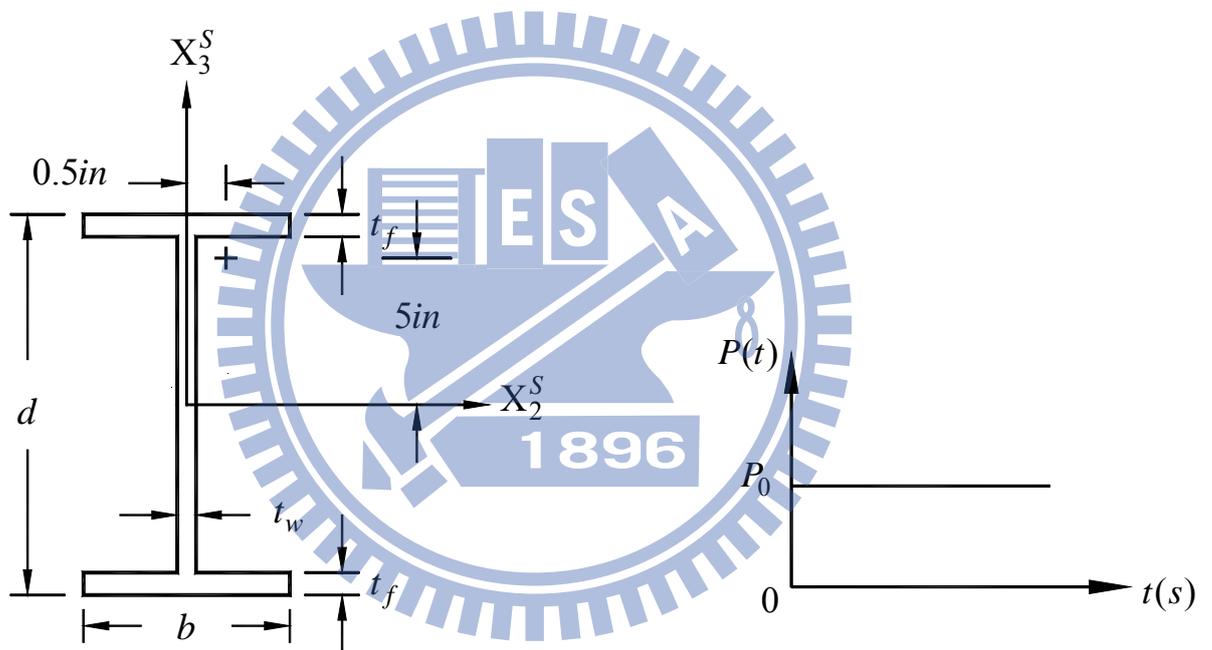
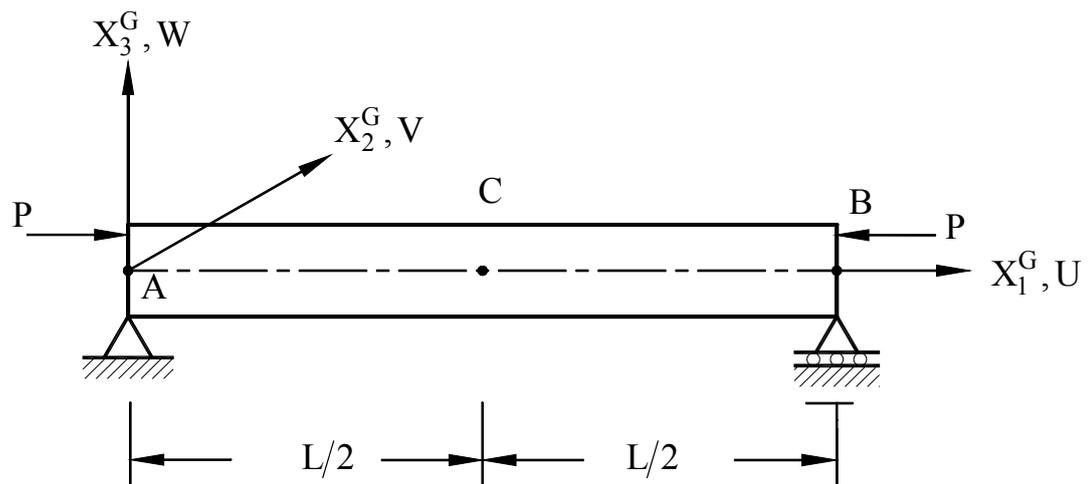


圖 4.3 例題一數值方法不同之 A、B 點 X_3^G 方向位移比較



+ Loading point

Time History of Load

Cross section

圖 4.4 例題二 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖

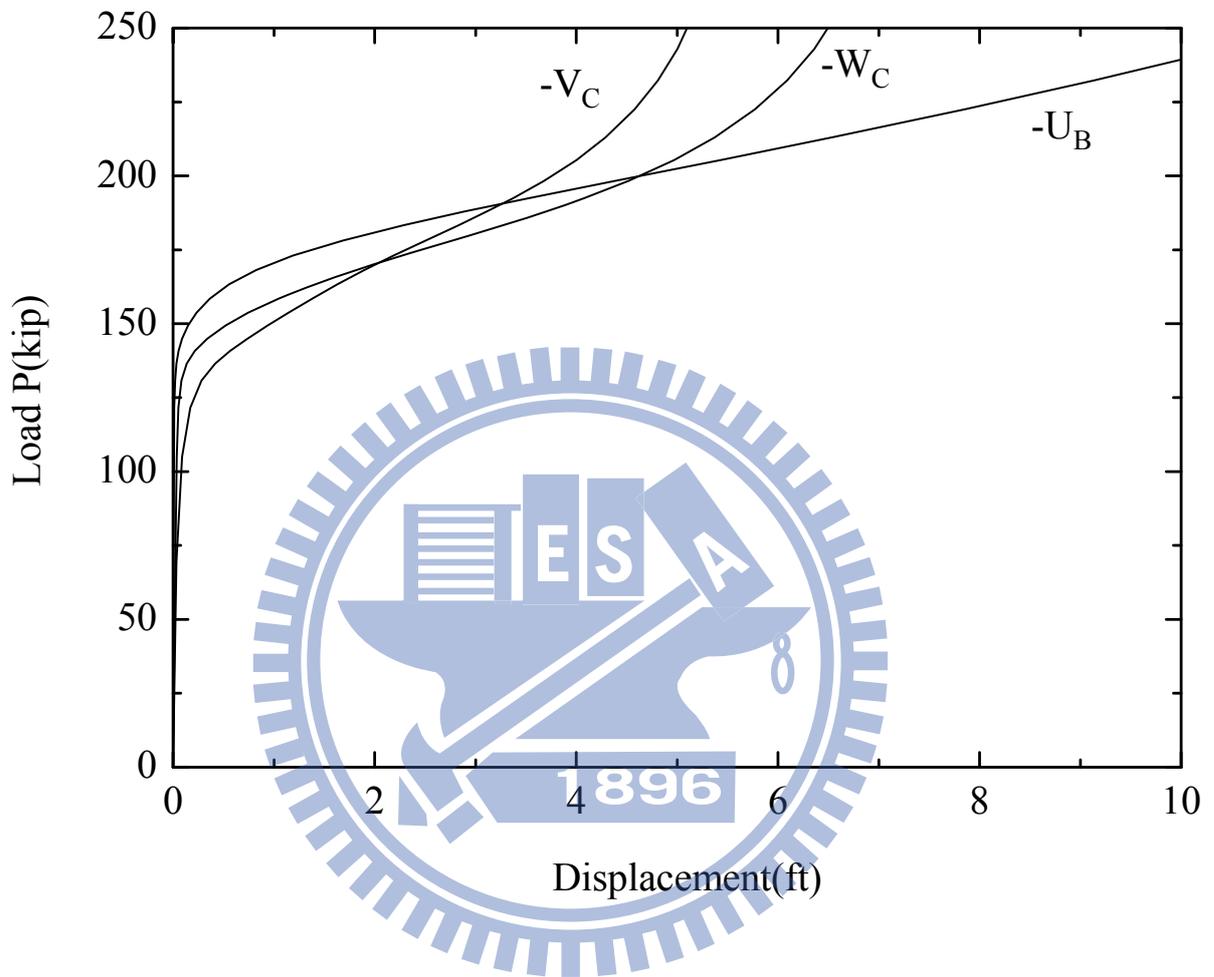


圖 4.5 例題二簡支梁受偏心軸力之負荷—位移曲線圖

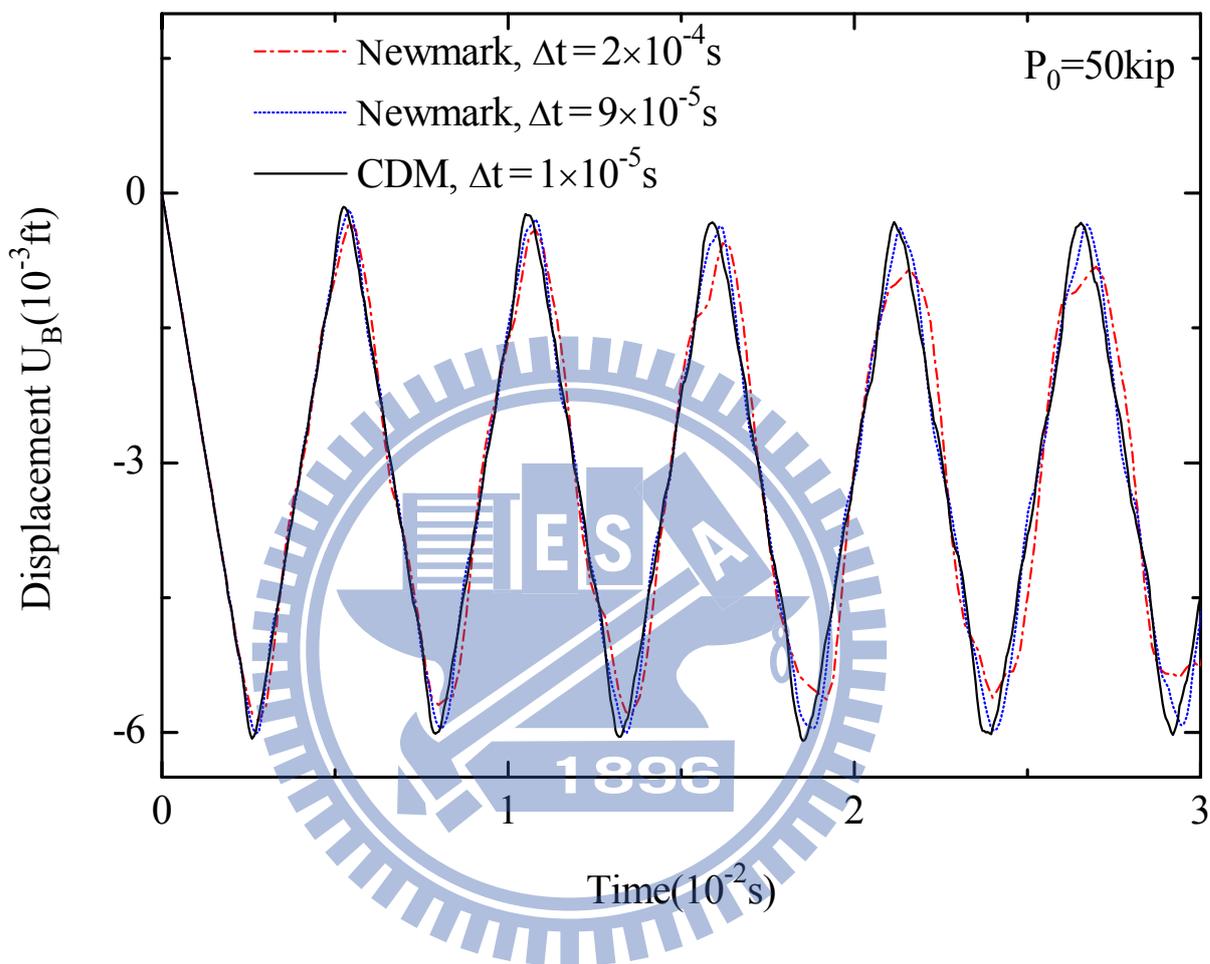


圖 4.6 例題二數值方法不同端點 B 之位移—時間曲線圖

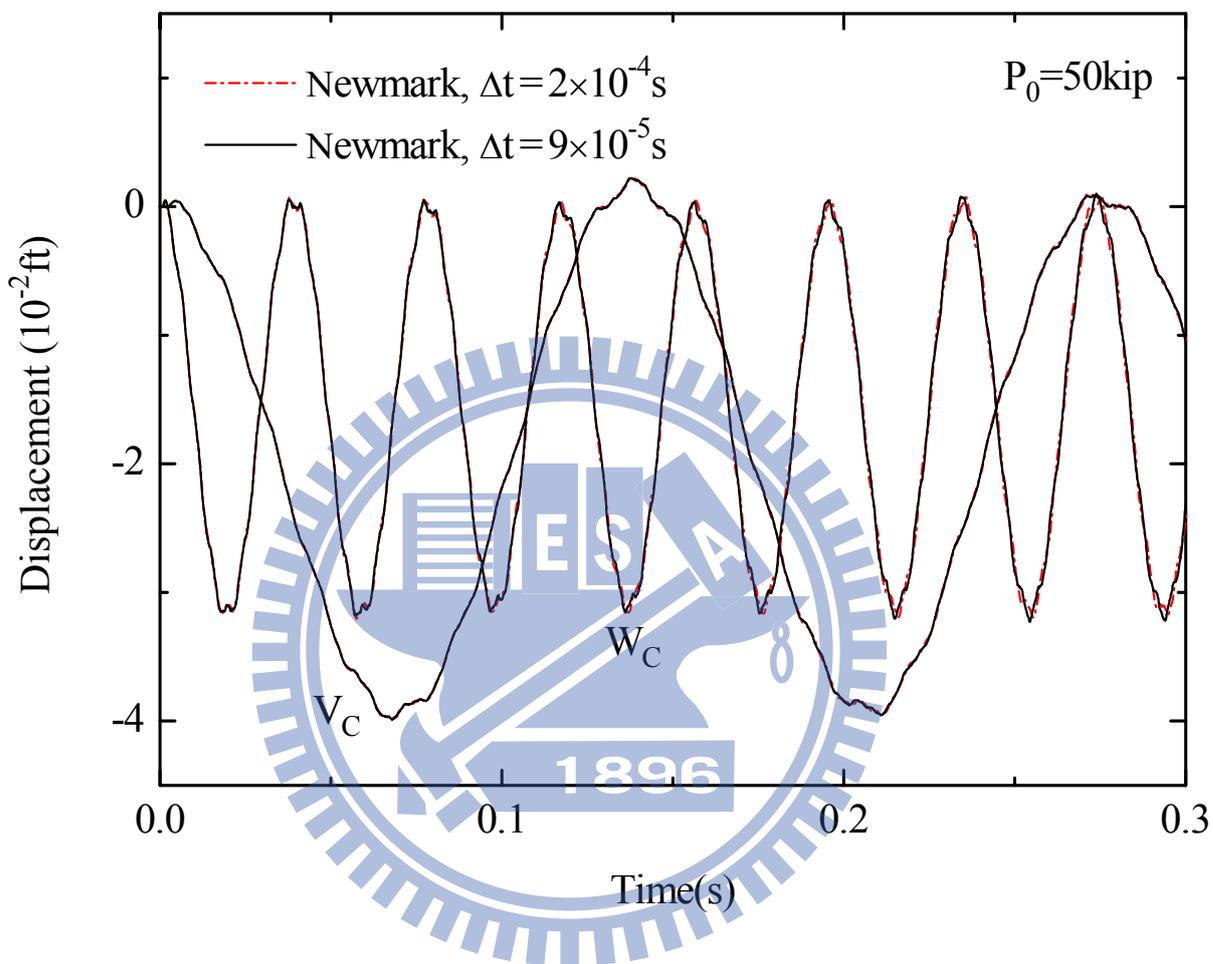


圖 4.7 例題二數值方法不同端點 C 之位移—時間曲線圖

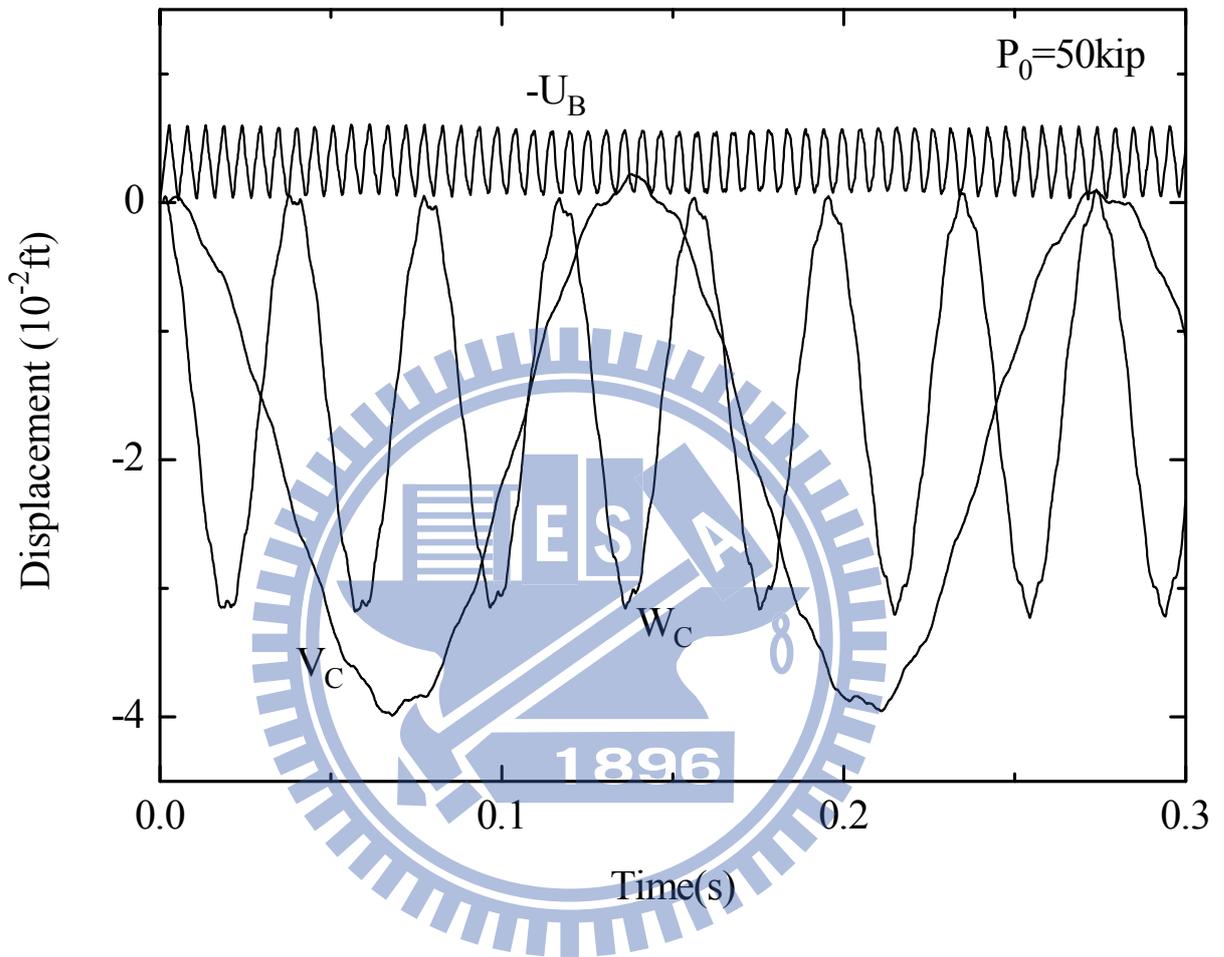


圖 4.8 例題二簡支梁受偏心軸力之位移—時間曲線圖($P_0 = 50\text{kip}$)

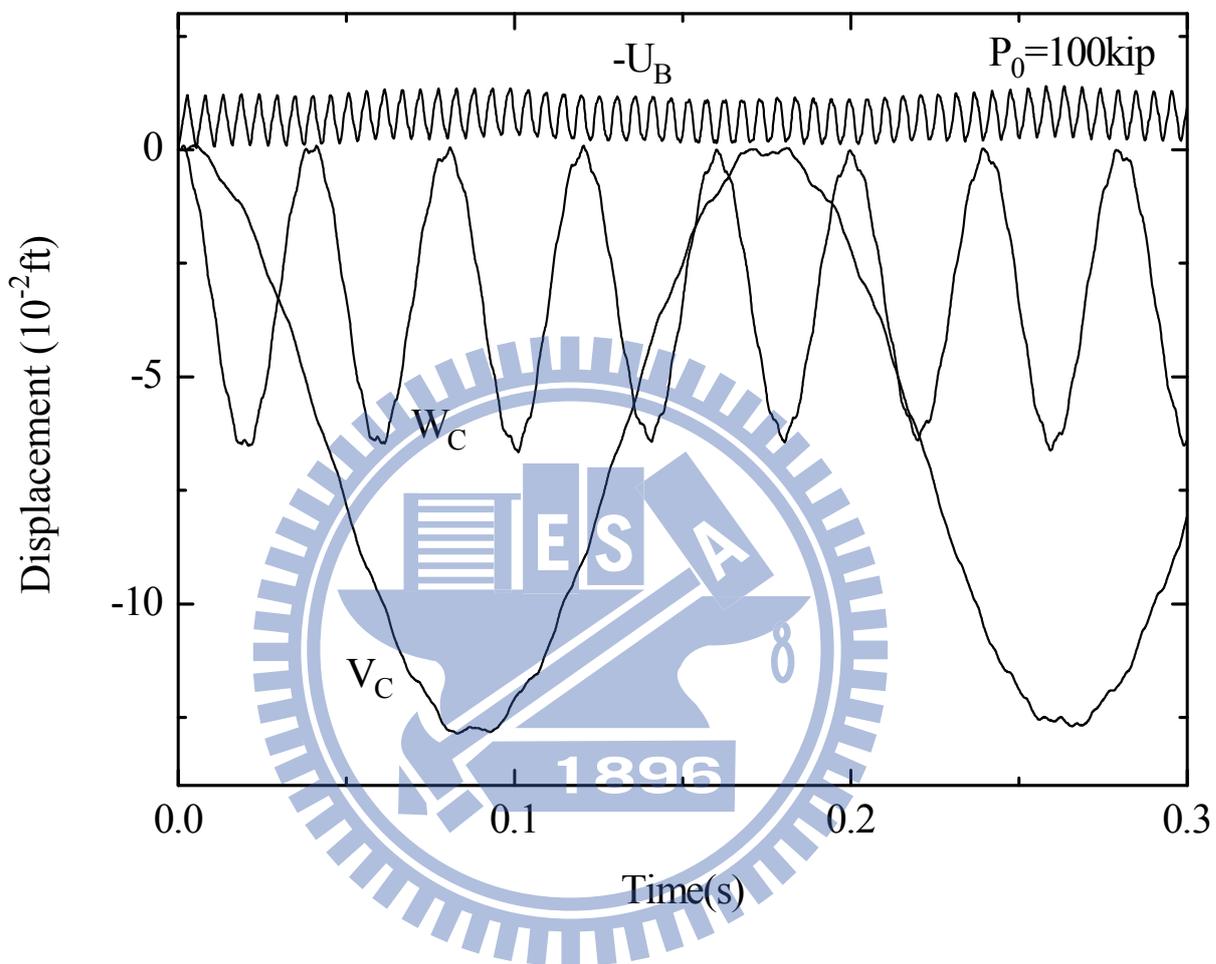


圖 4.9 例題二簡支梁受偏心軸力之位移—時間曲線圖($P_0 = 100 \text{ kip}$)

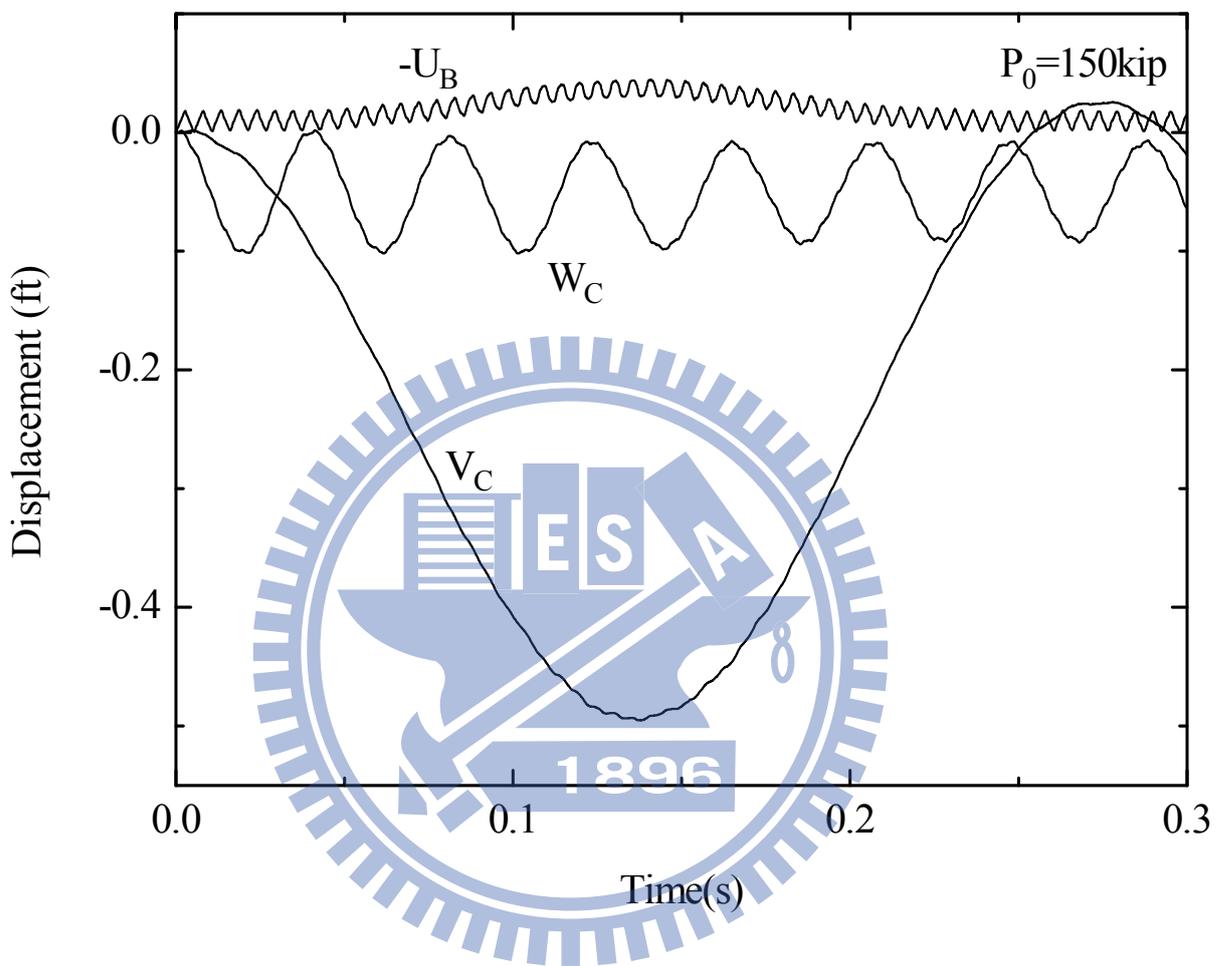
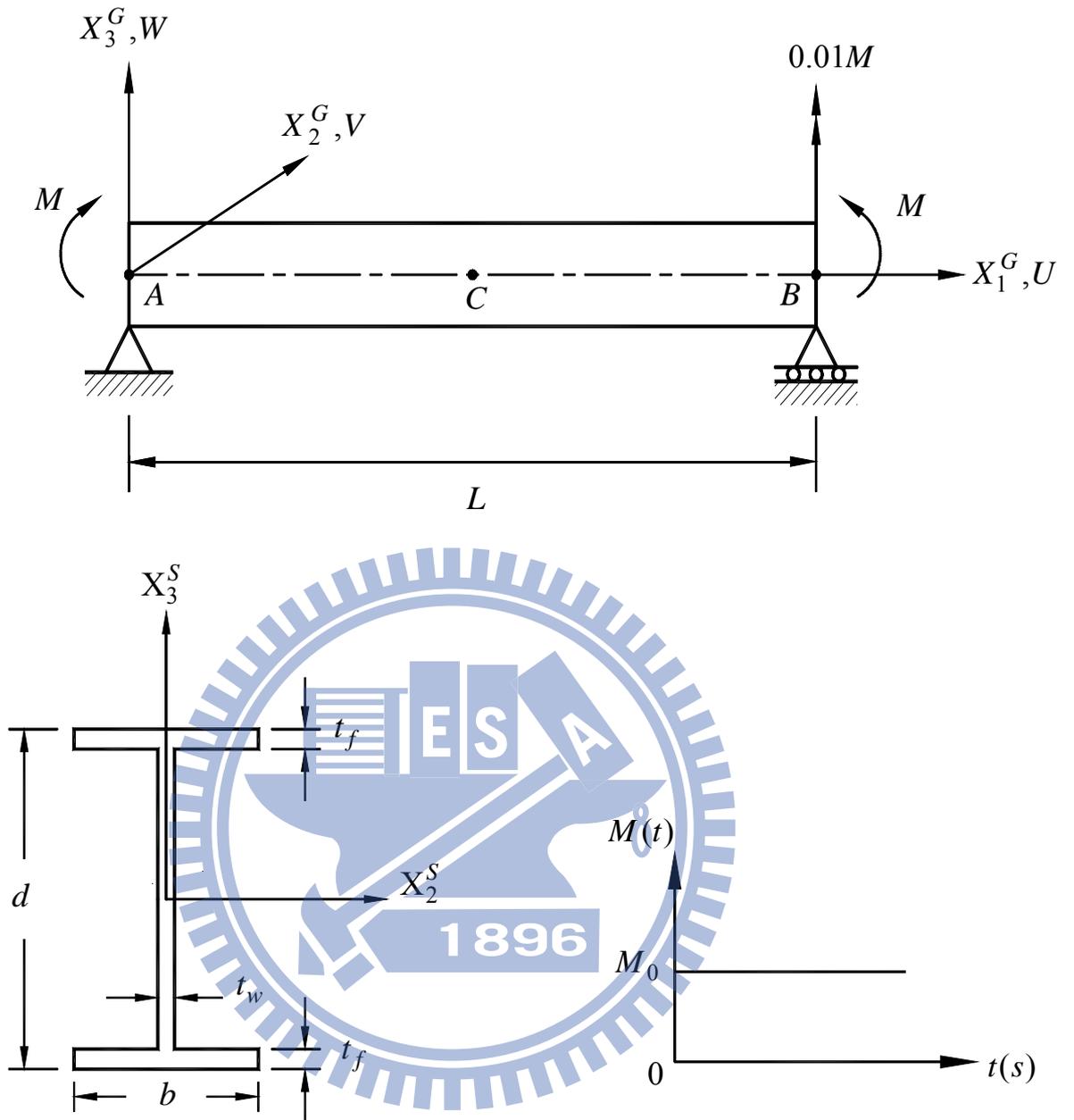


圖 4.10 例題二簡支梁受偏心軸力之位移—時間曲線圖($P_0 = 150\text{kip}$)



Time History of Load

Cross section

圖 4.11 例題三 I 型斷面簡支梁之幾何及受力圖

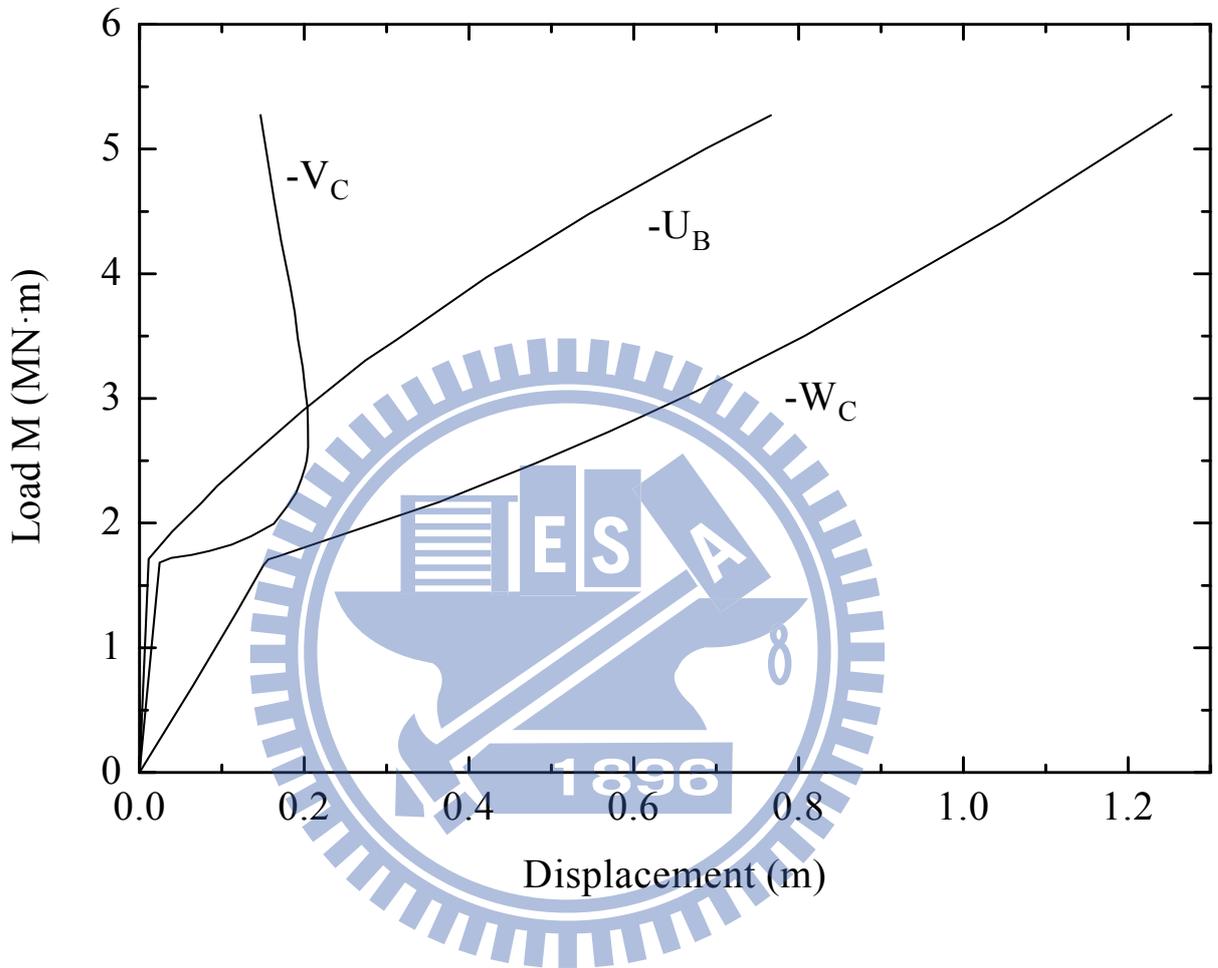


圖 4.12 例題三簡支梁受力之負荷—位移曲線圖

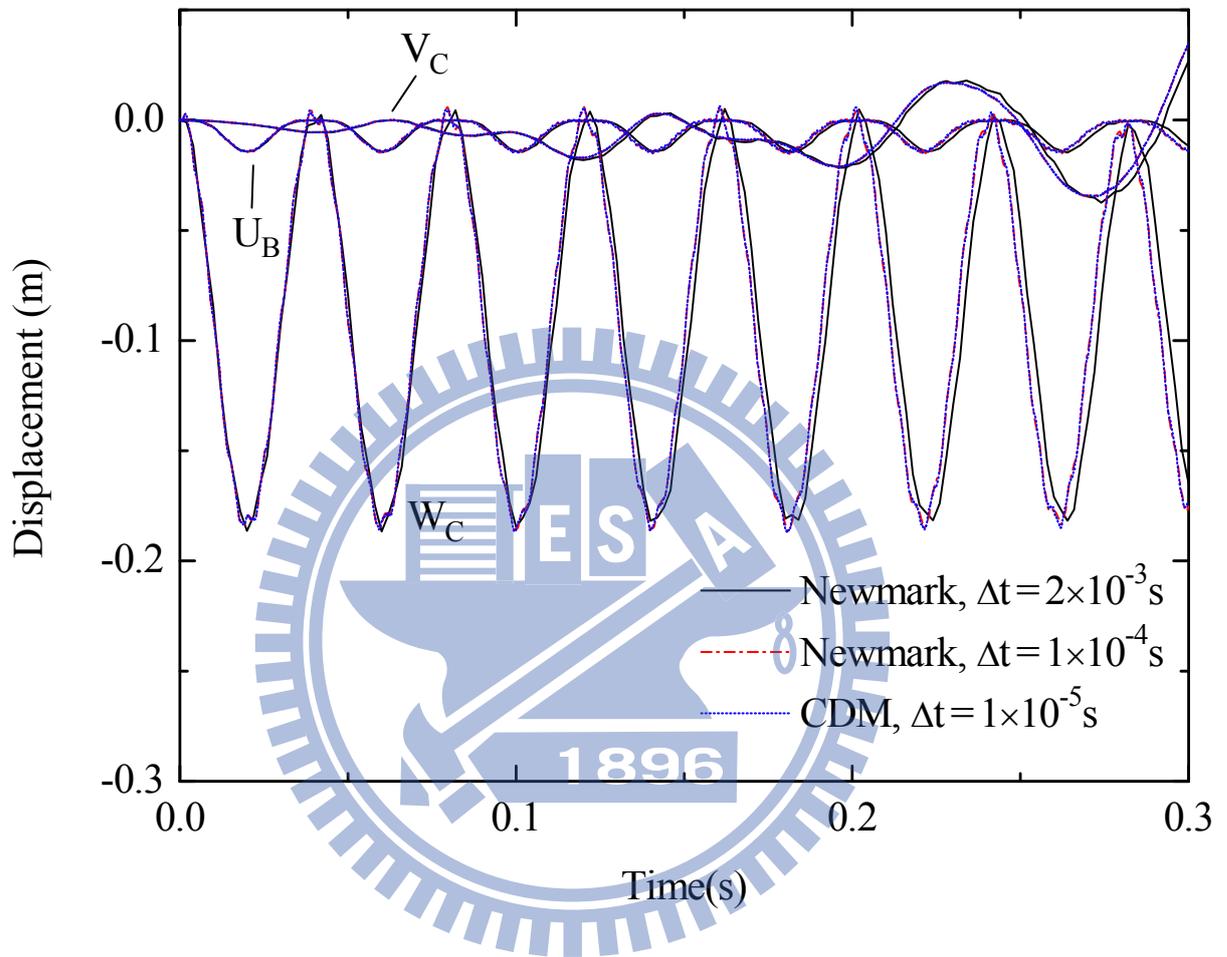


圖 4.13 例題三簡支梁受力之位移—時間曲線圖

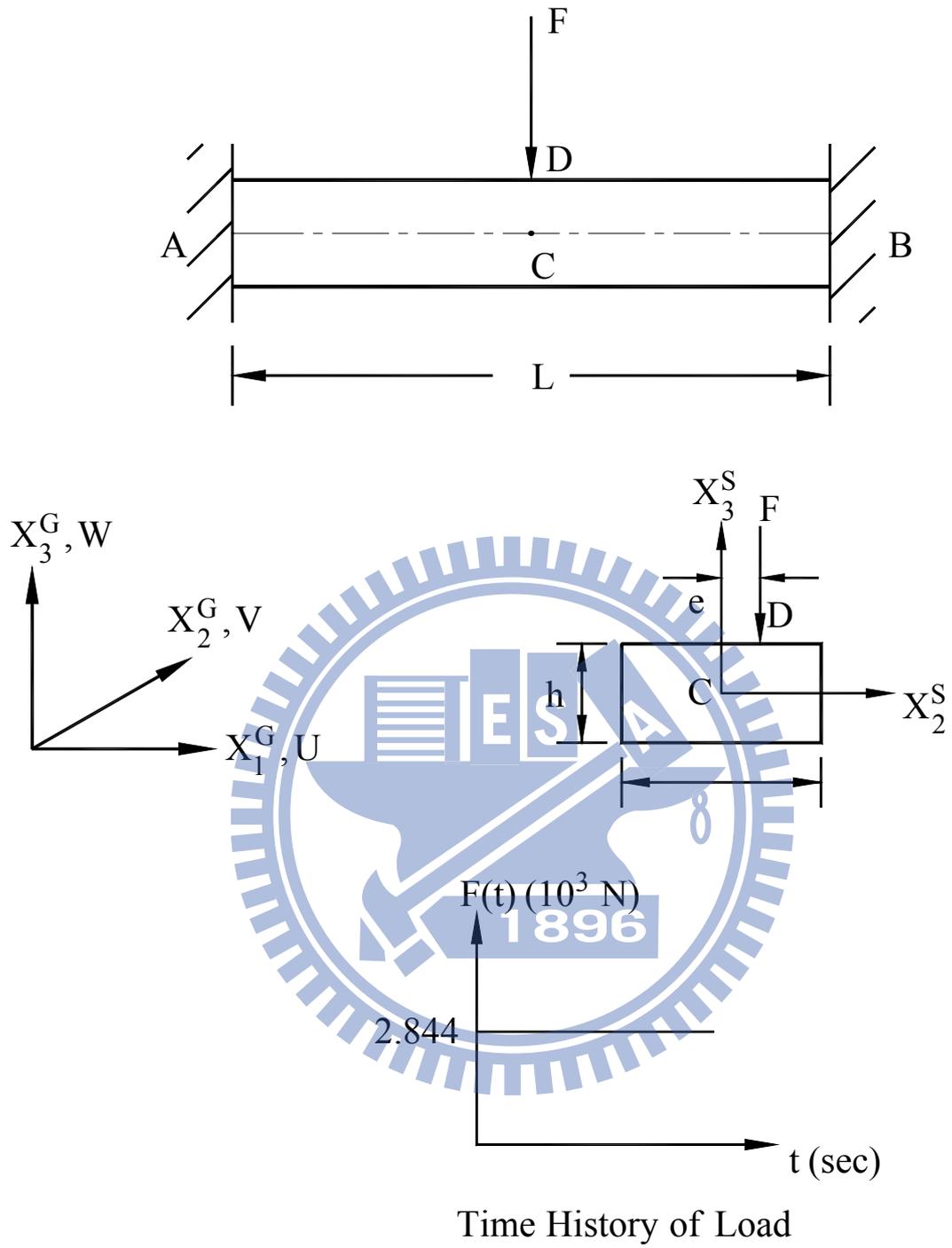


圖 4.14 例題四矩形斷面固端梁之幾何及受力圖

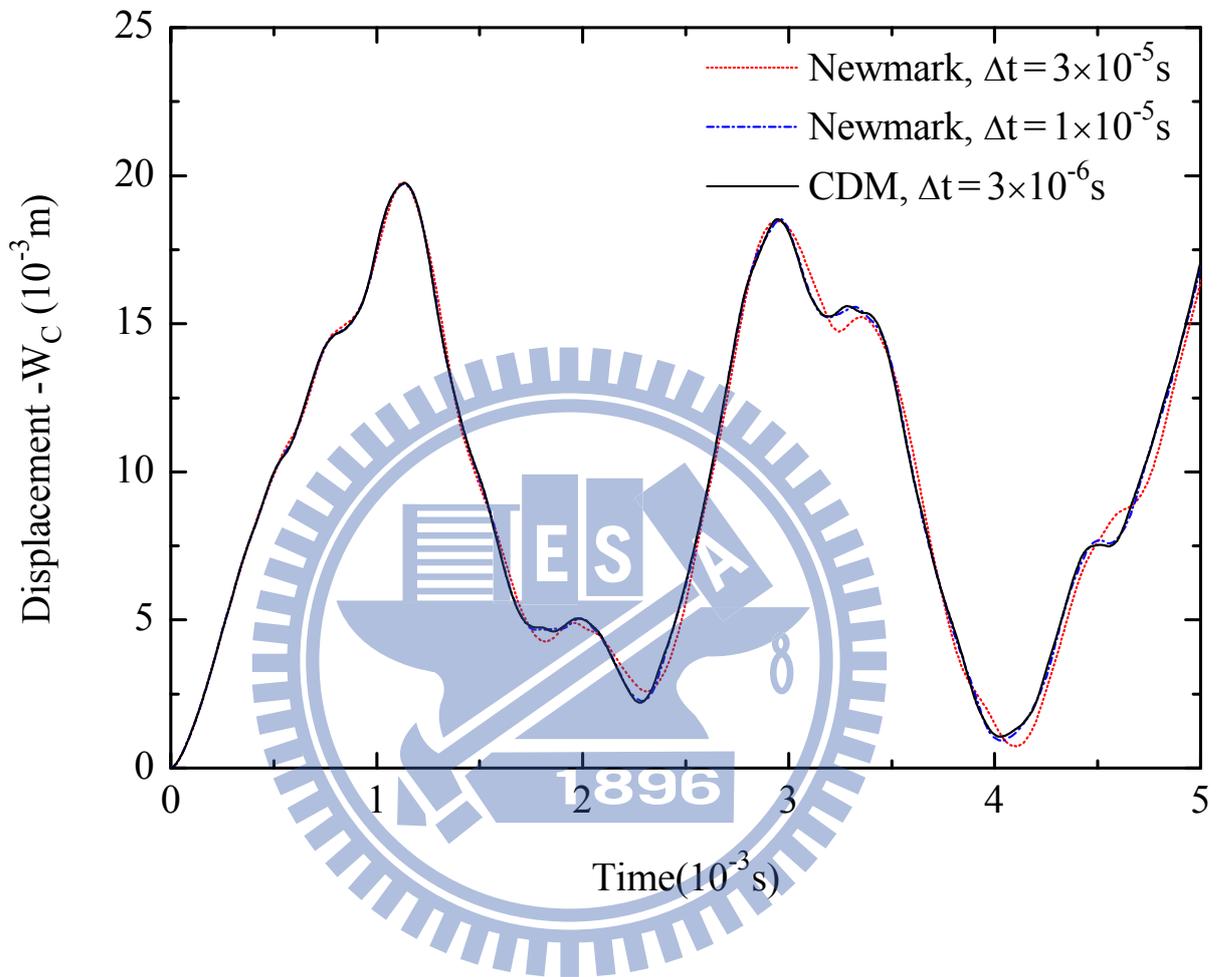


圖 4.15 例題四數值方法不同之中點 C 位移(Case (a))

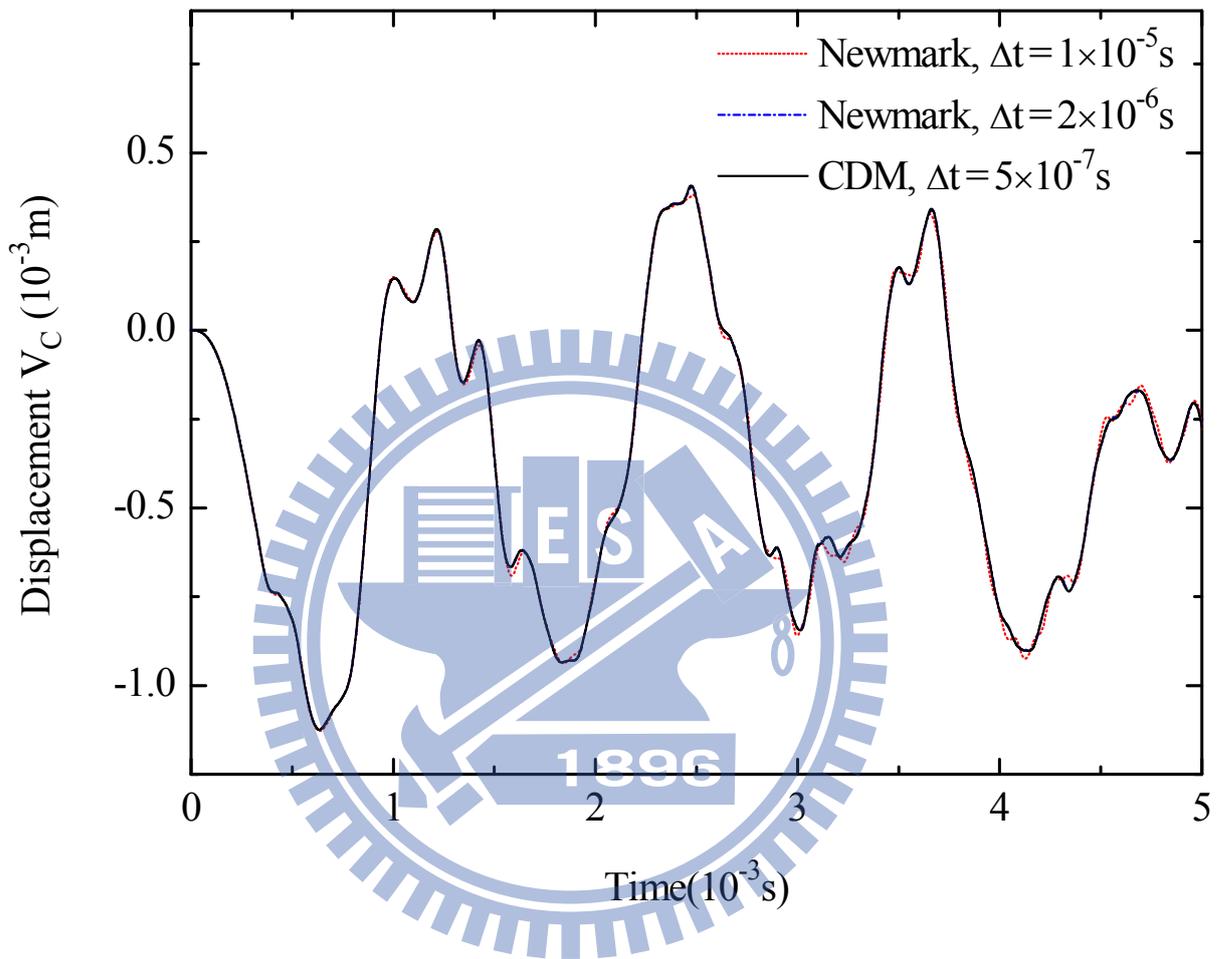


圖 4.16 例題四數值方法不同中點 C 在 X_2^G 方向的位移(Case (b))

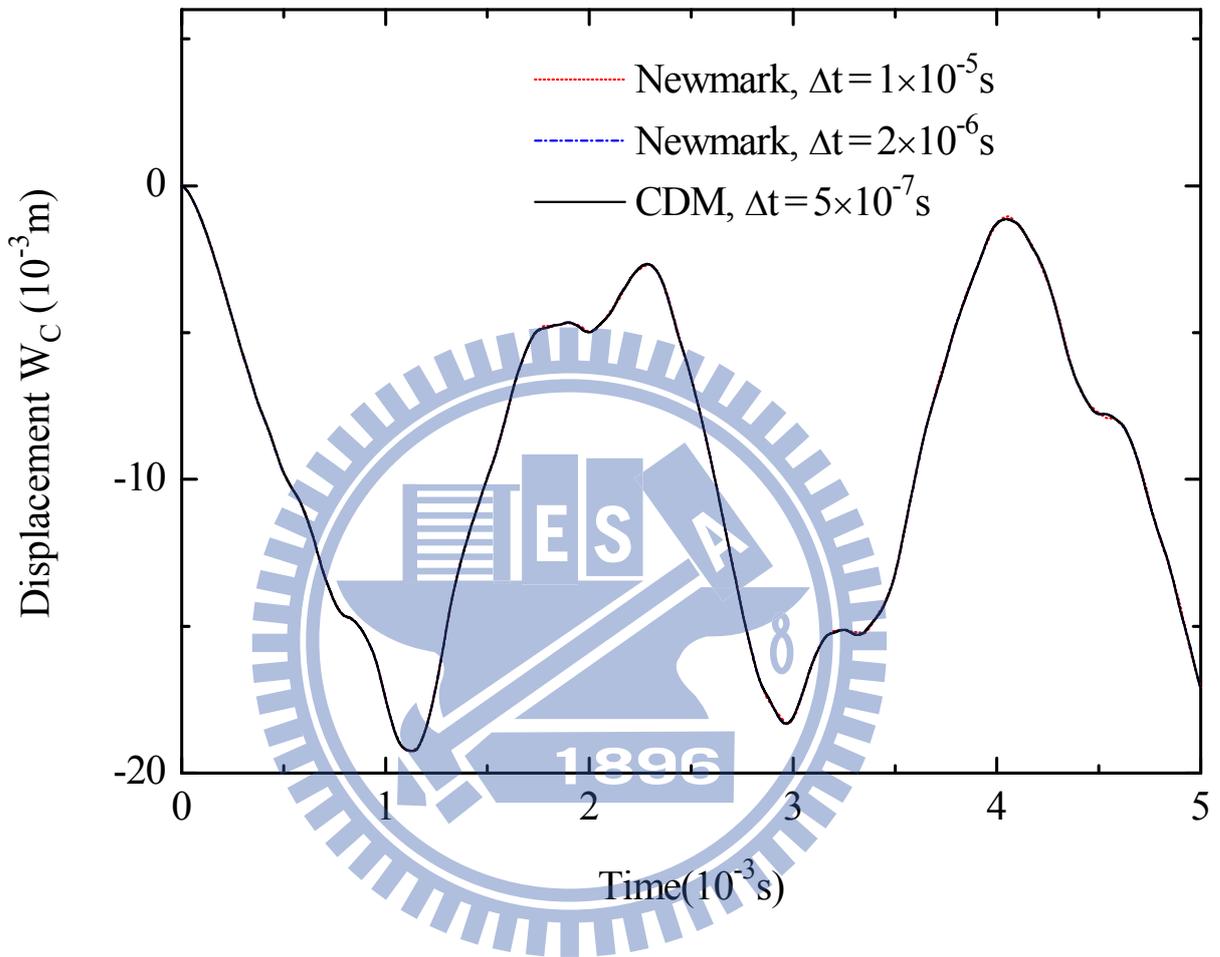


圖 4.17 例題四數值方法不同中點 C 在 X_3^G 方向的位移(Case (b))

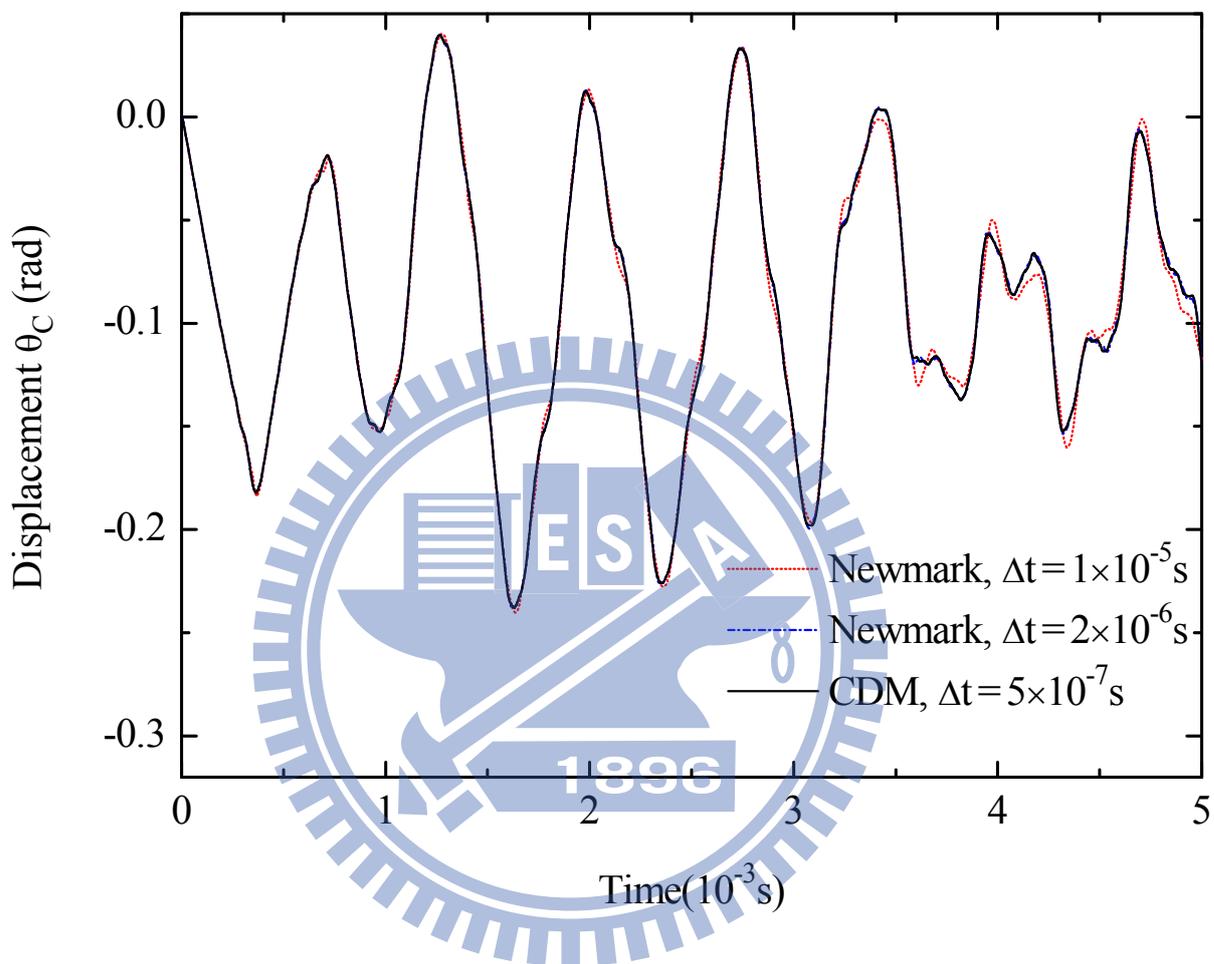


圖 4.18 例題四數值方法不同中點 C 的轉角(Case (b))

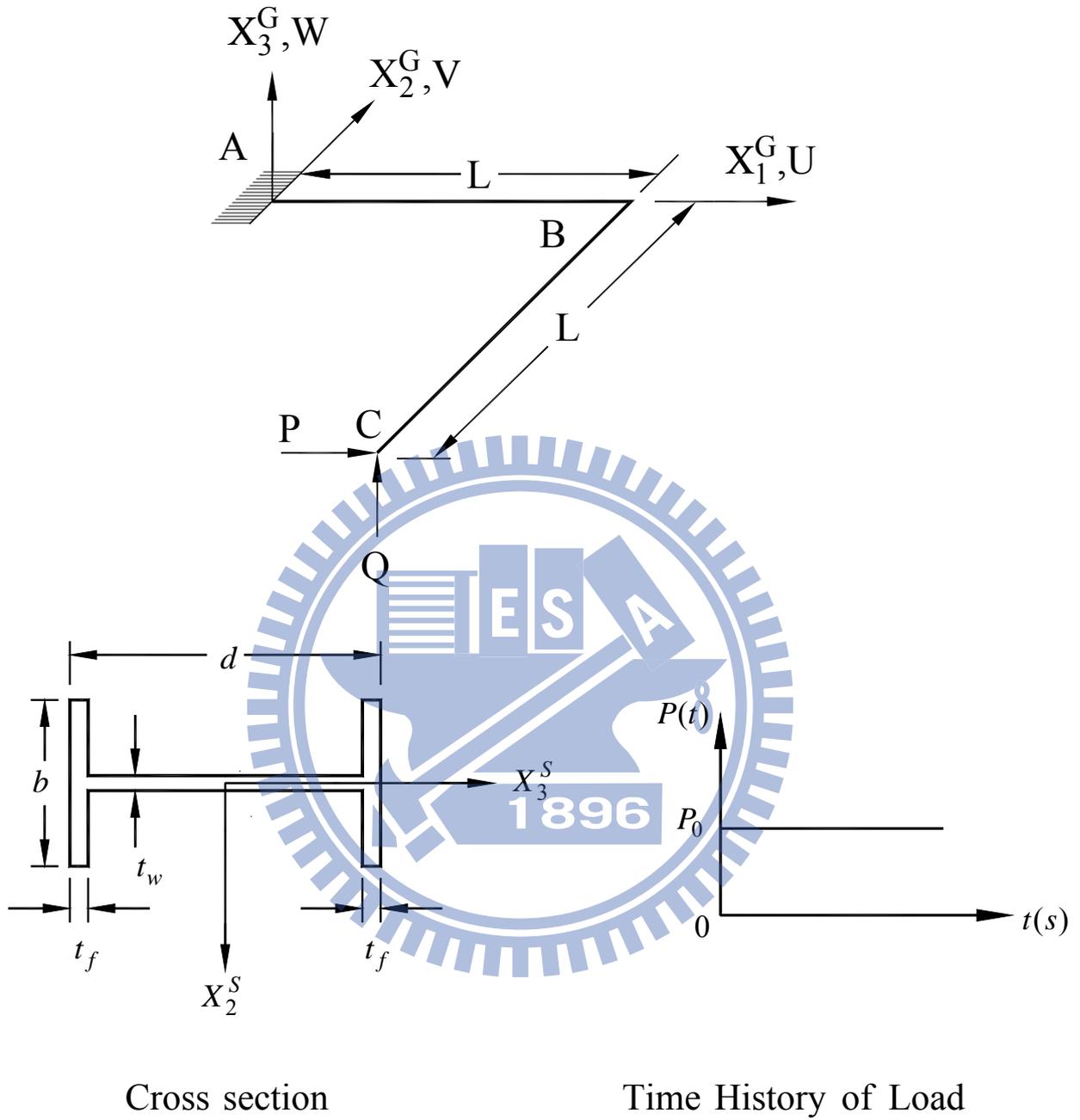


圖 4.19 例題五直角懸臂梁之幾何及受力圖(Case (a))

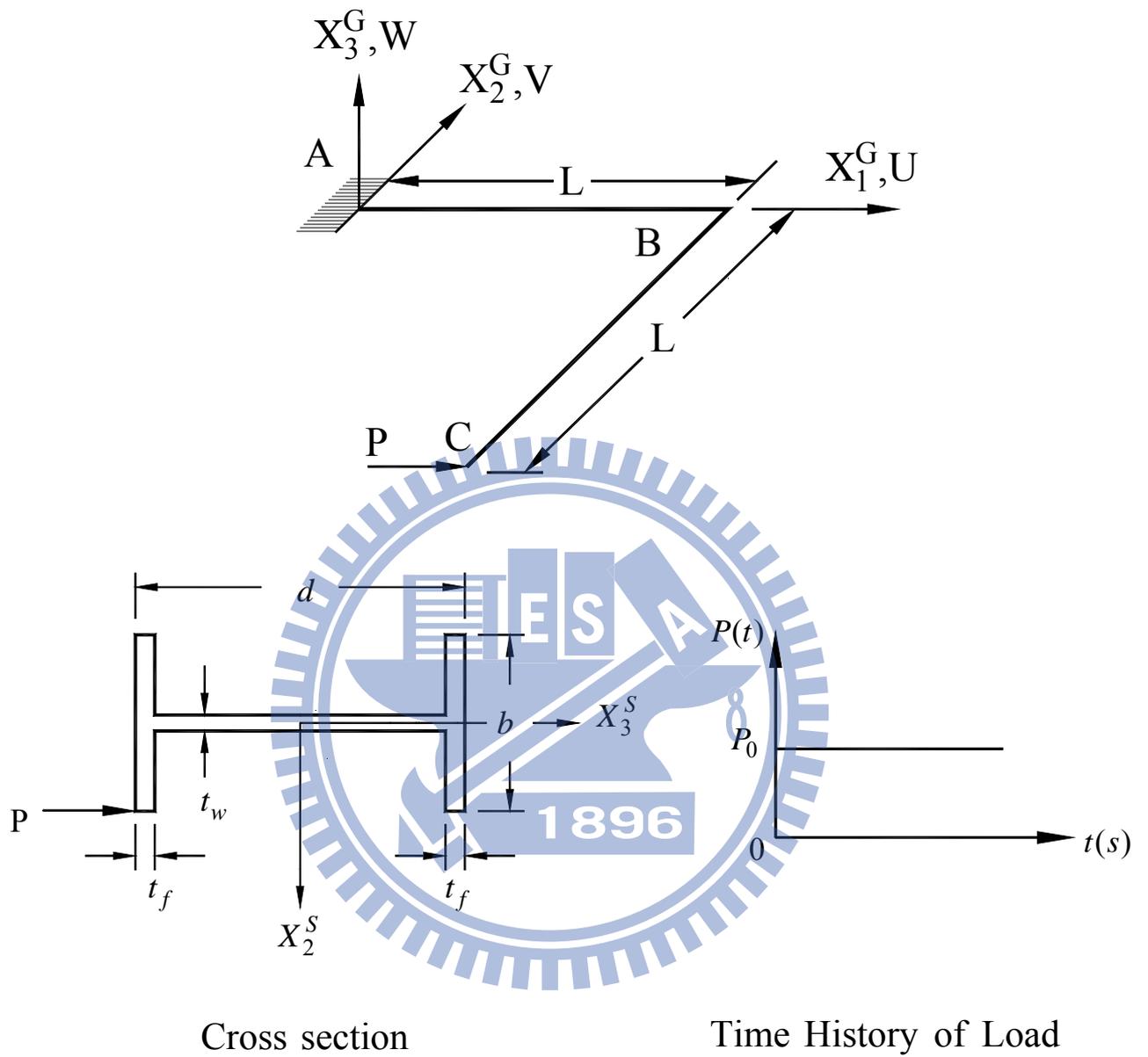


圖 4.20 例題五直角懸臂梁之幾何及偏心受力圖(Case (b))

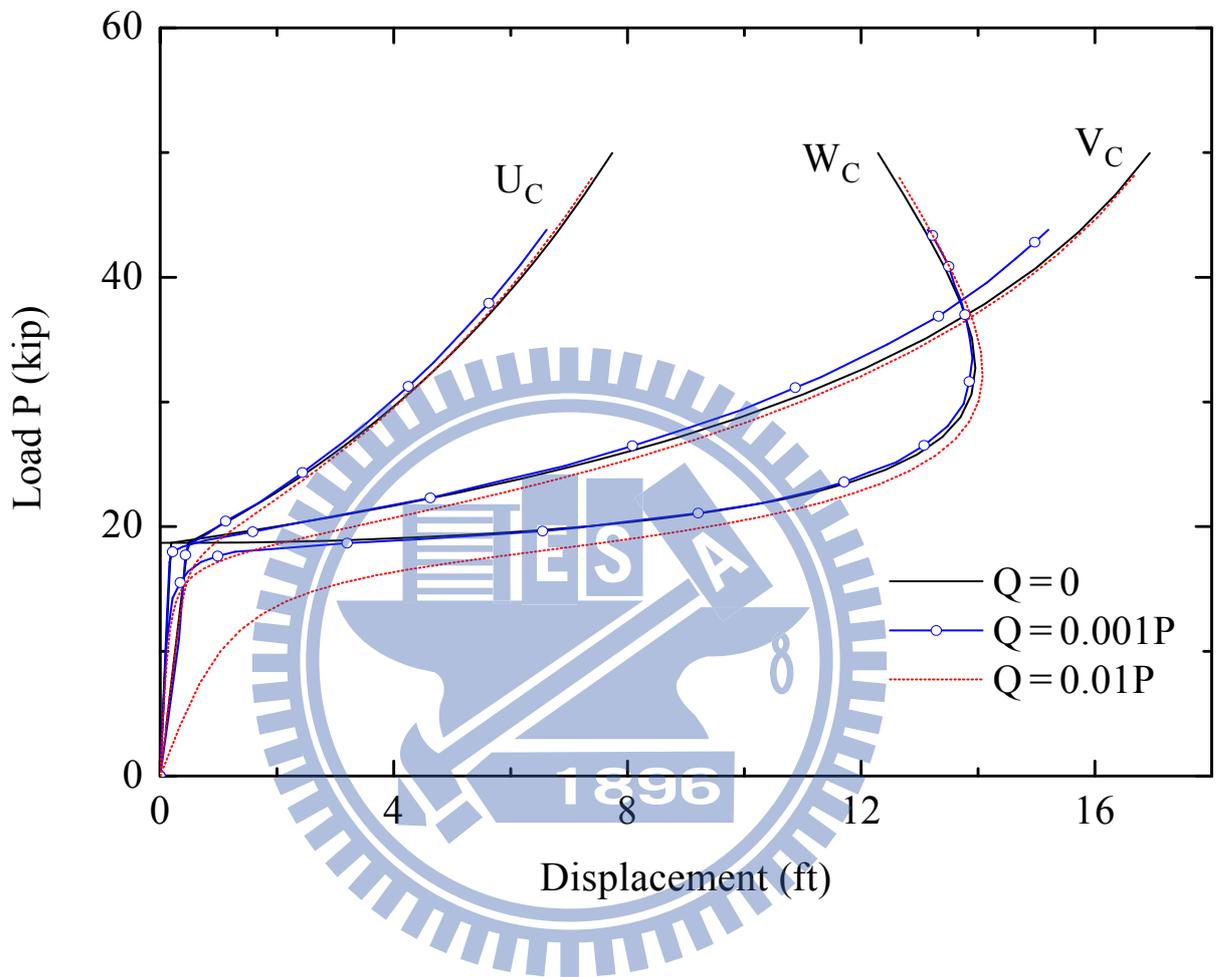


圖 4.21 例題五 C 點之負荷—位移曲線圖(Case(a))

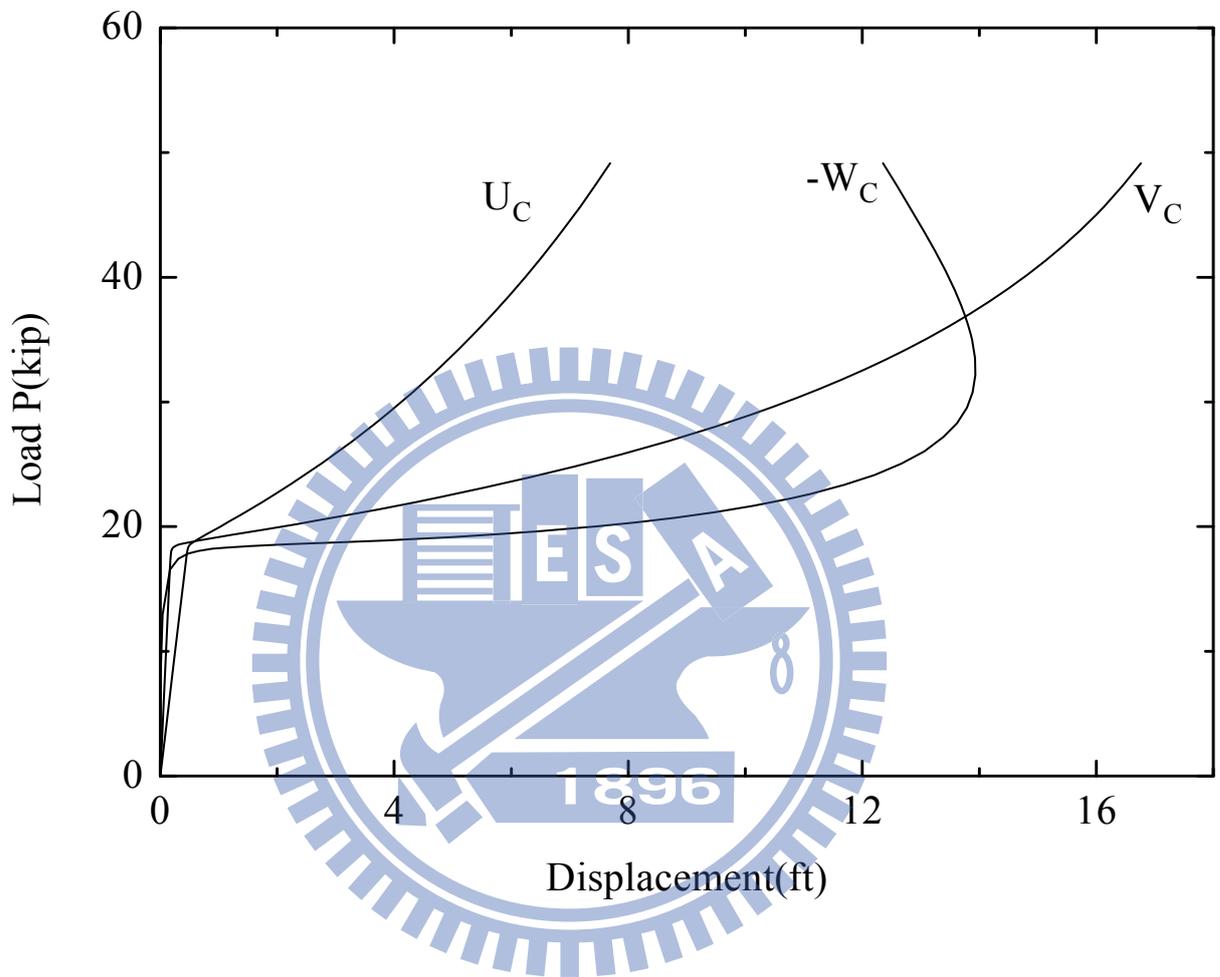


圖 4.22 例題五 C 點之負荷—位移曲線圖(Case(b))

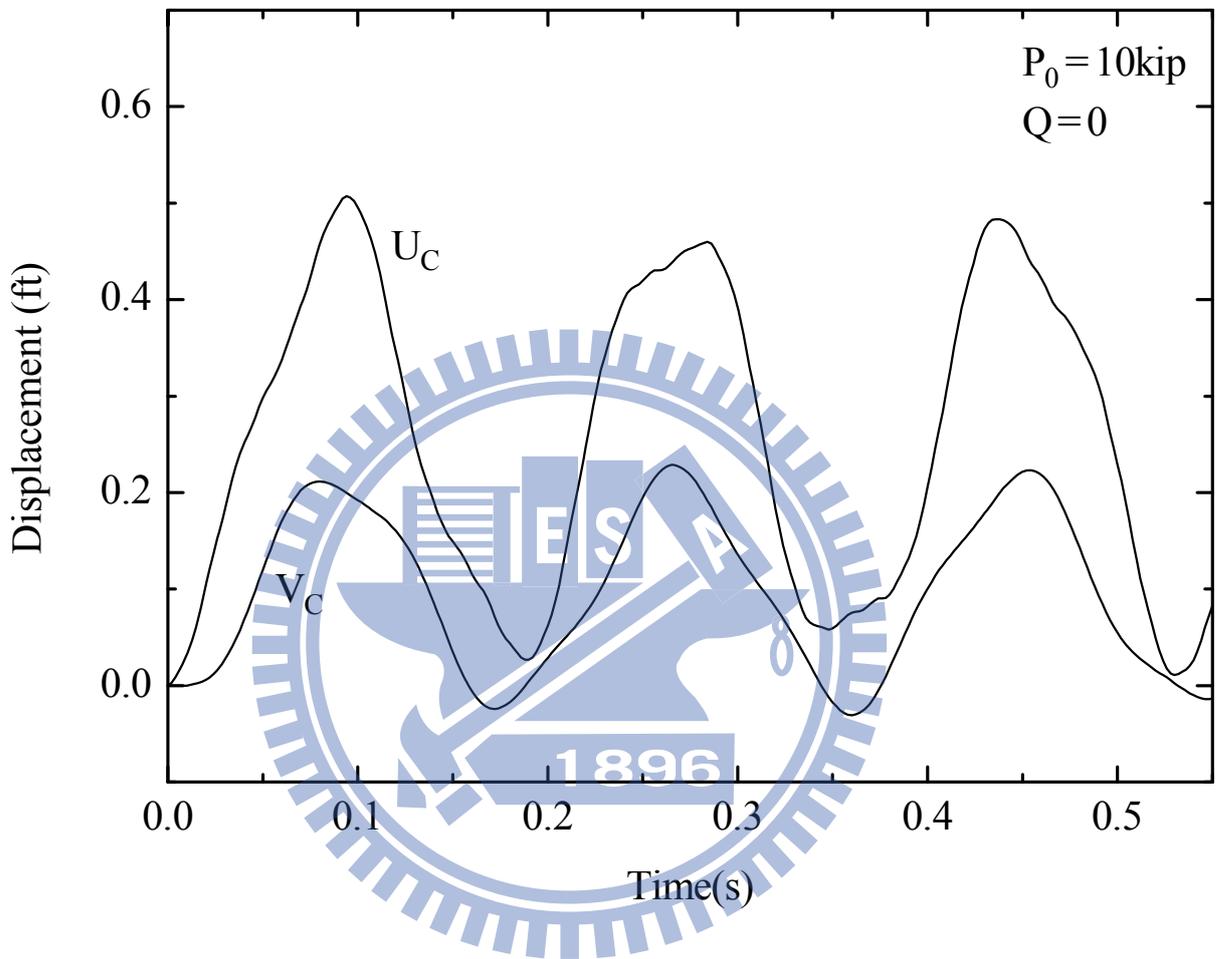


圖 4.23 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10 \text{ kip}$, $Q = 0$)

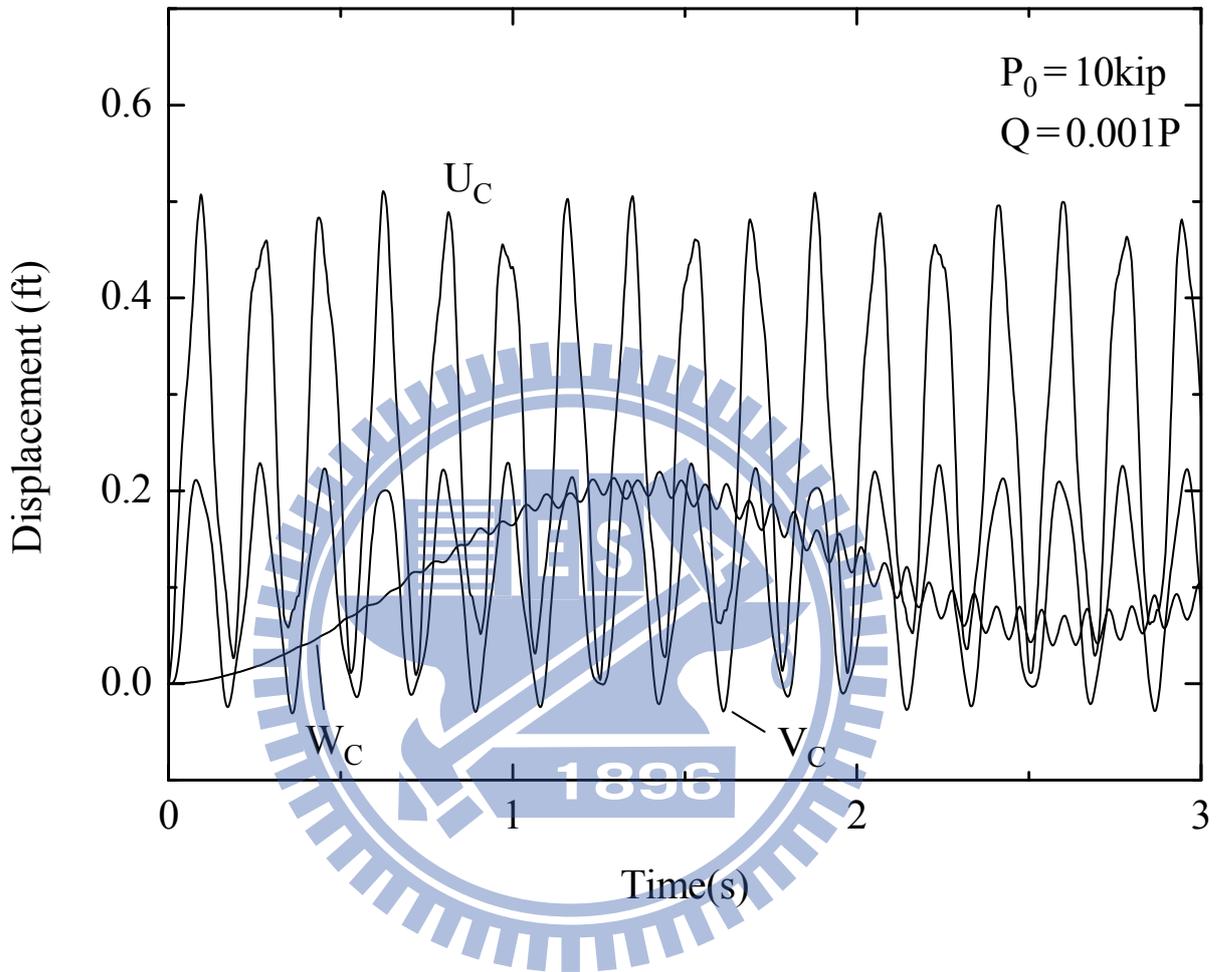


圖 4.24 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10\text{ kip}$, $Q = 0.001P$)

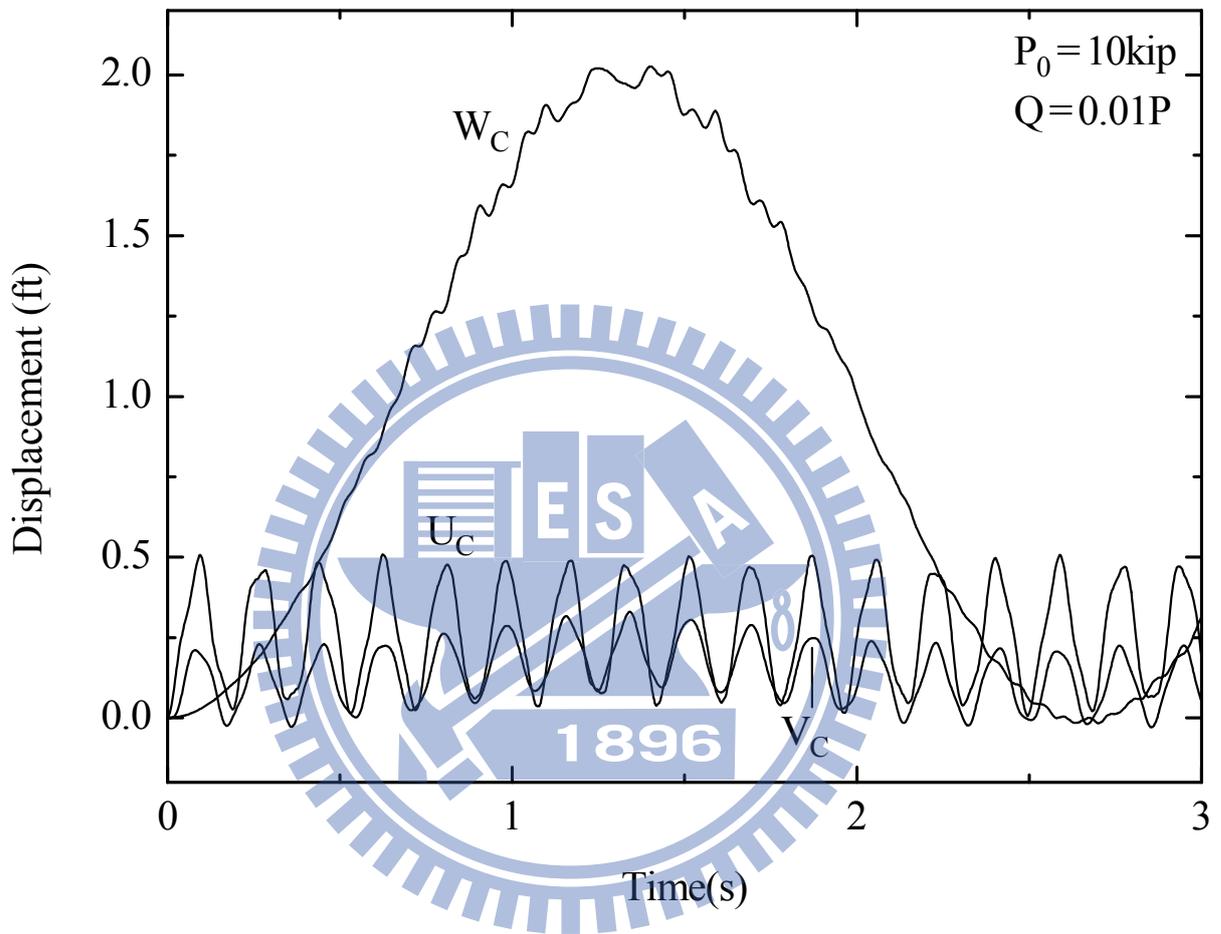


圖 4.25 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 10 \text{ kip}$, $Q = 0.01P$)

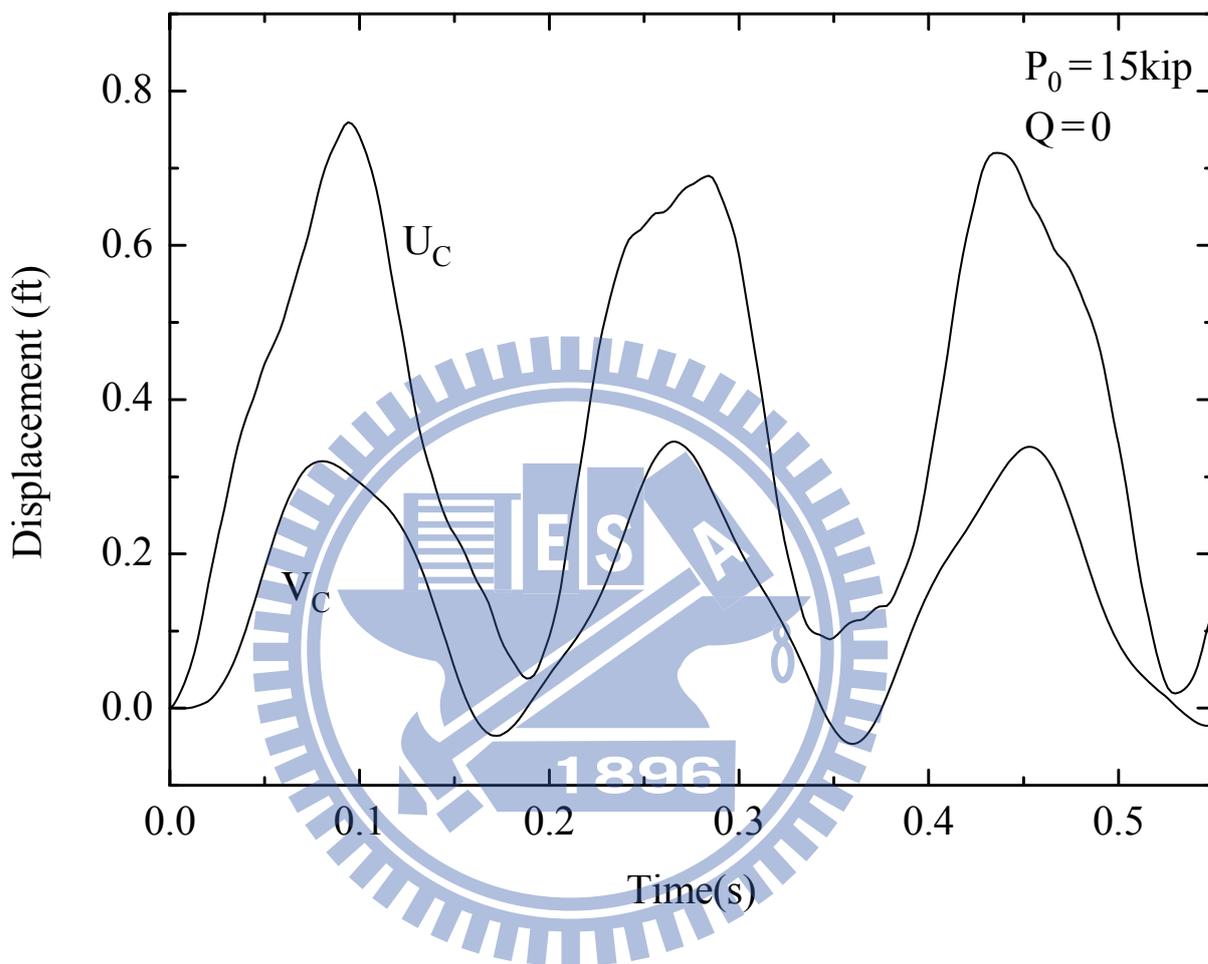


圖 4.26 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0$)

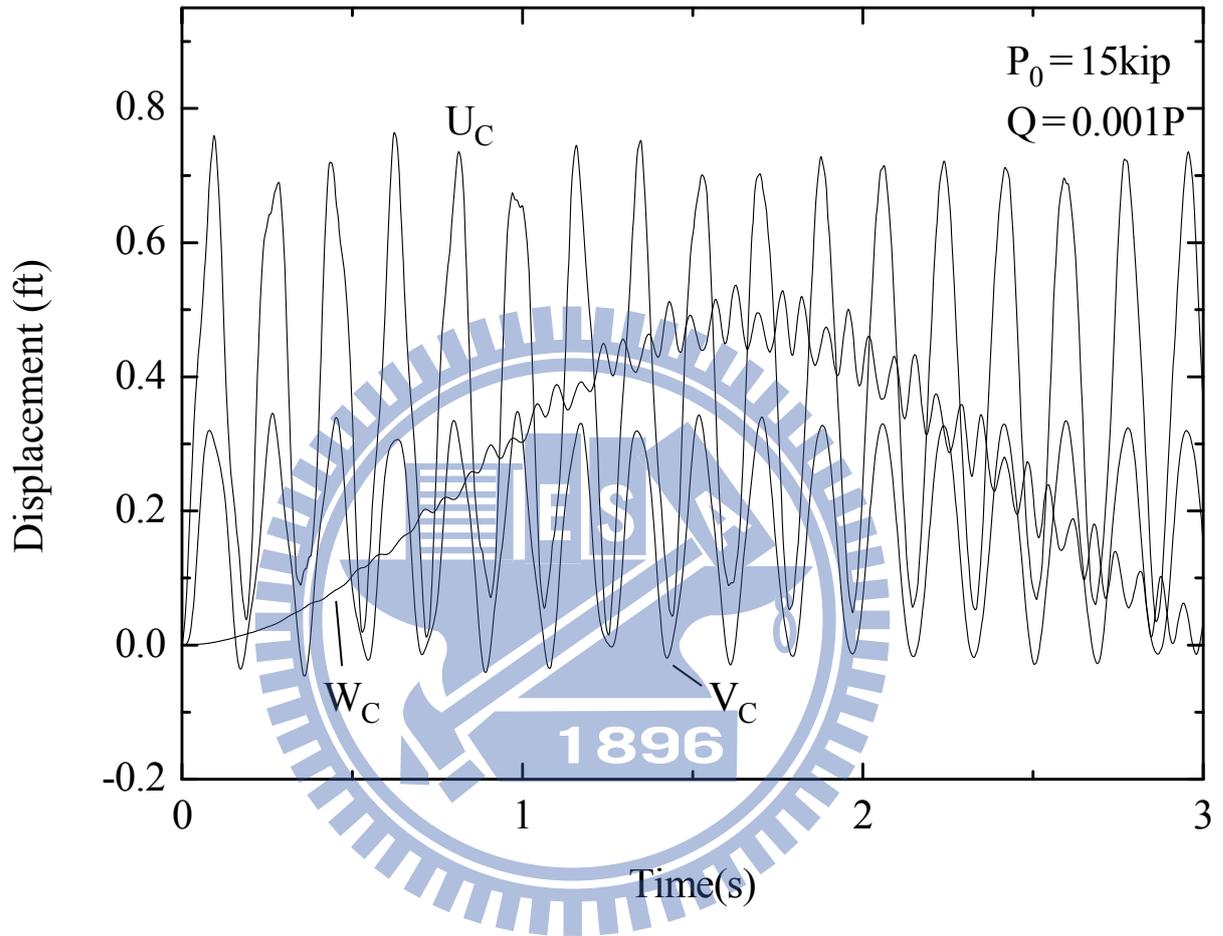


圖 4.27 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0.001P$)

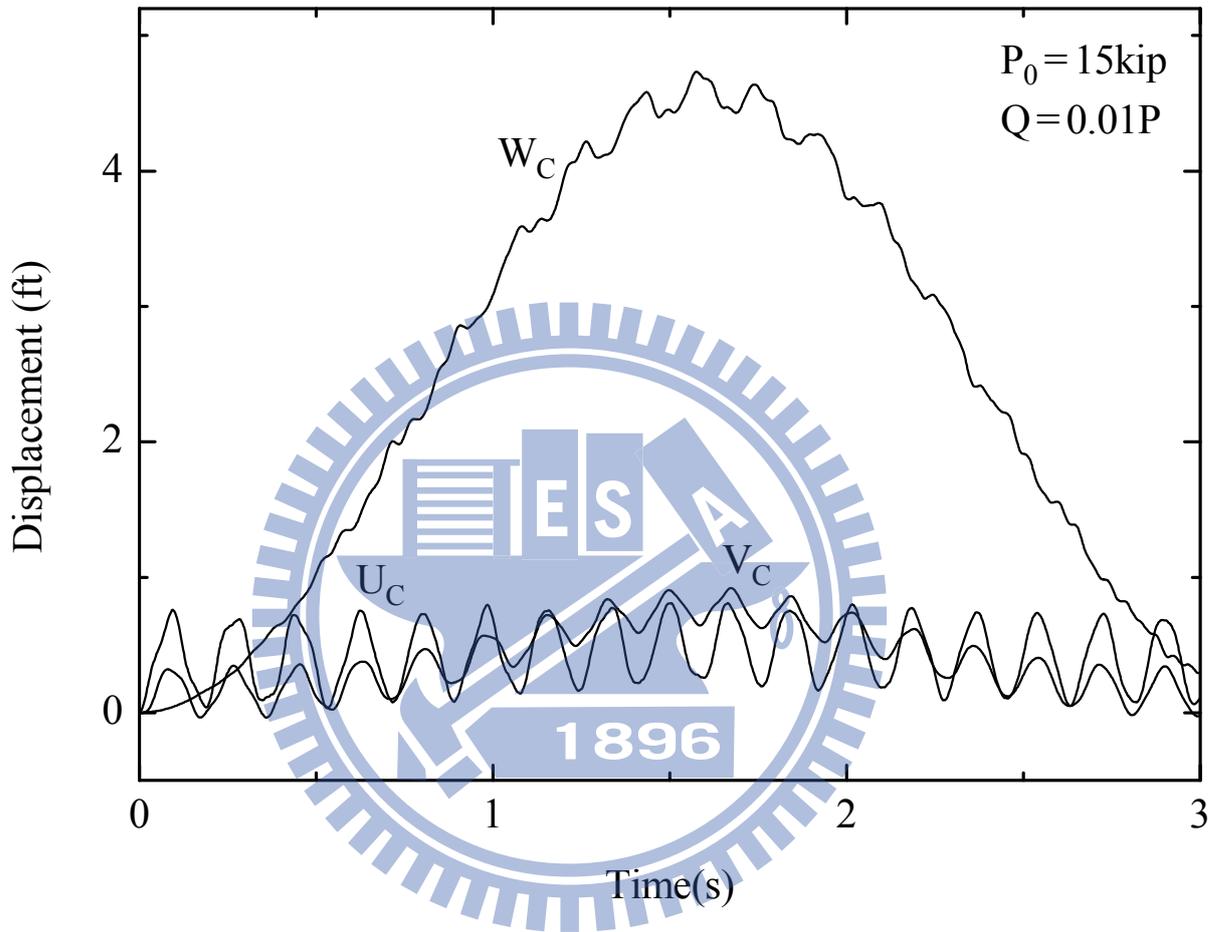


圖 4.28 例題五 C 點之位移(Case(a), $P_0 = 15 \text{ kip}$, $Q = 0.01P$)

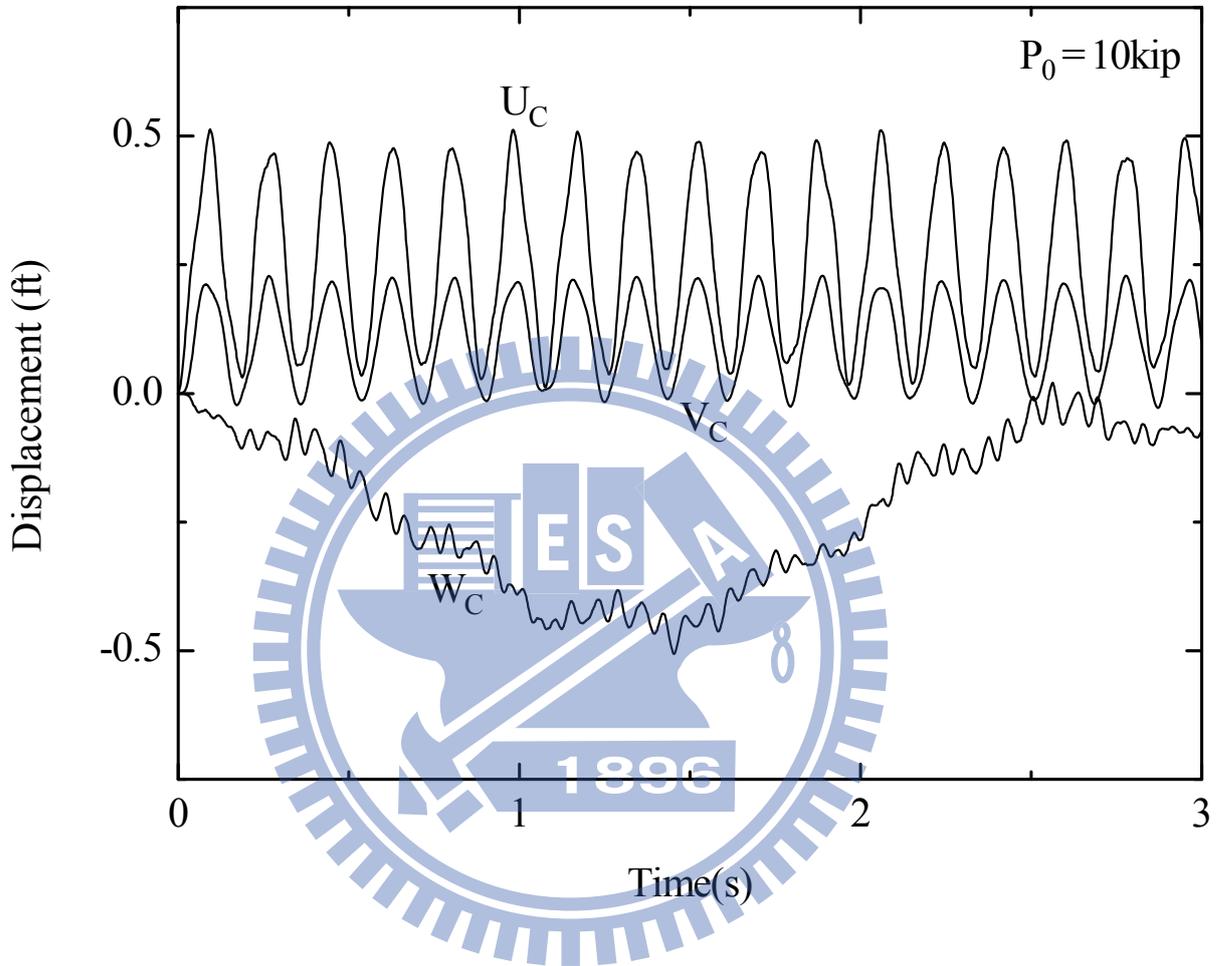


圖 4.29 例題五 C 點之位移(Case(b), $P_0 = 10\text{ kip}$)

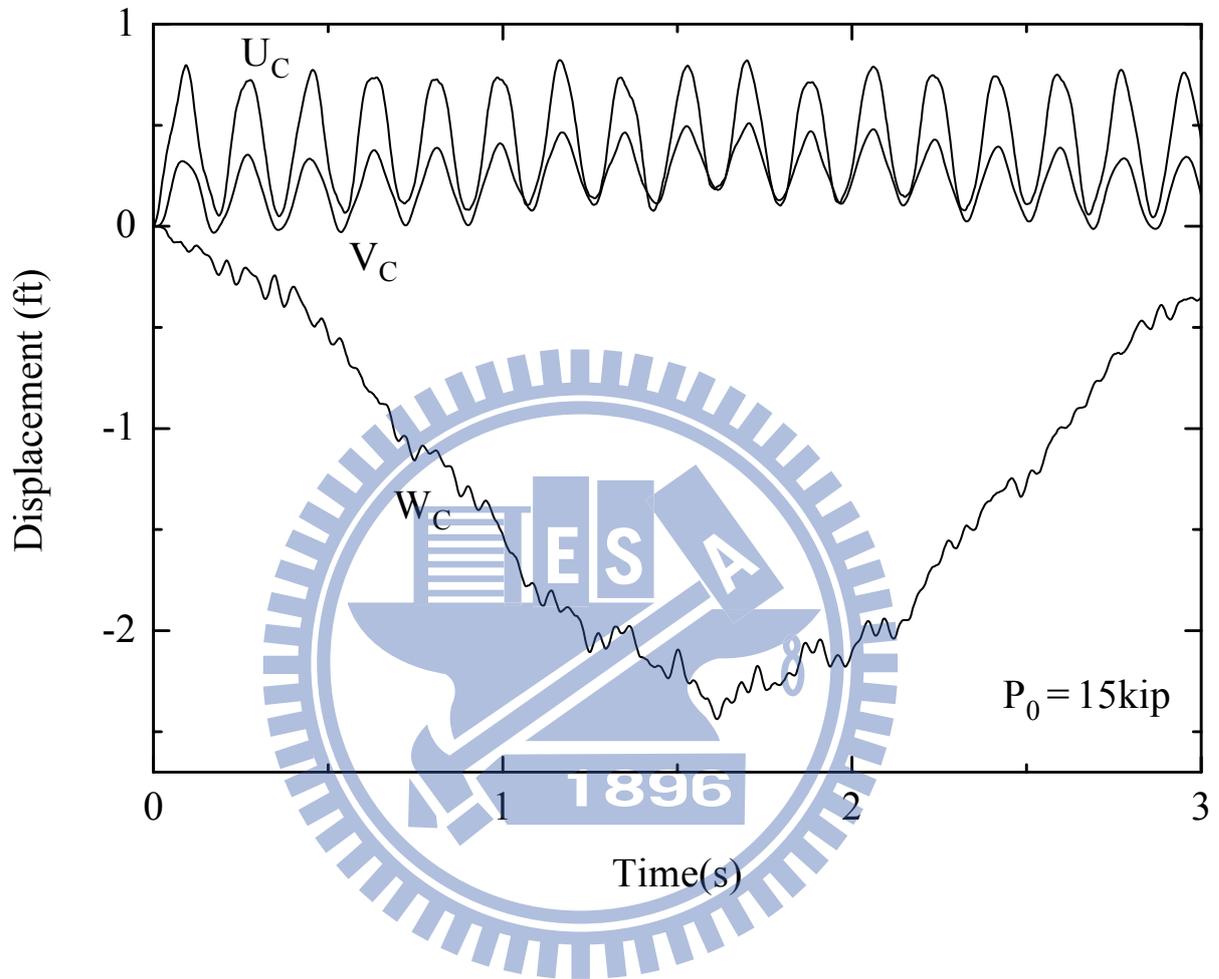


圖 4.30 例題五 C 點之位移(Case(b), $P_0 = 15\text{kip}$)

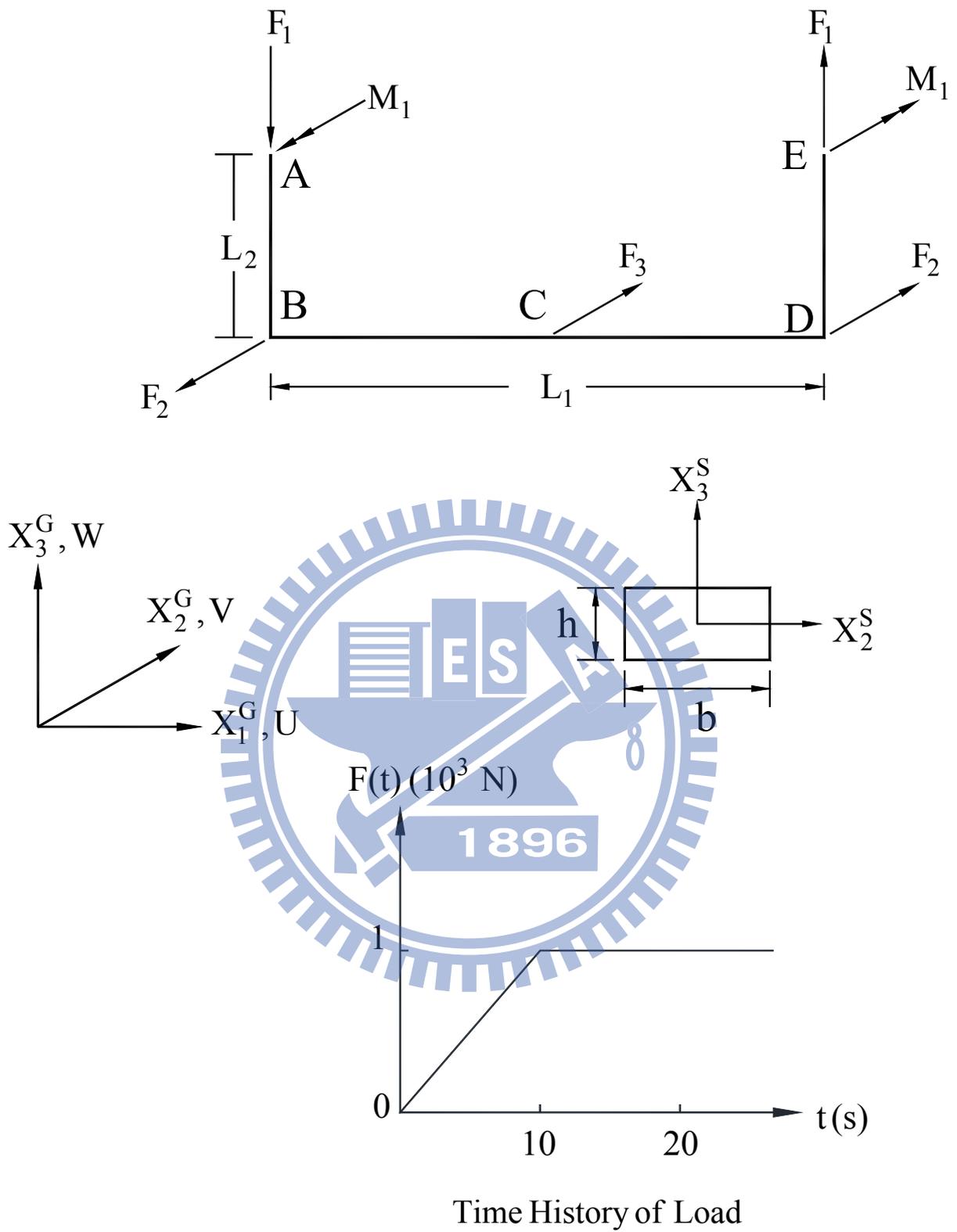


圖 4.31 例題六三維矩形斷面梁之幾何及受力圖

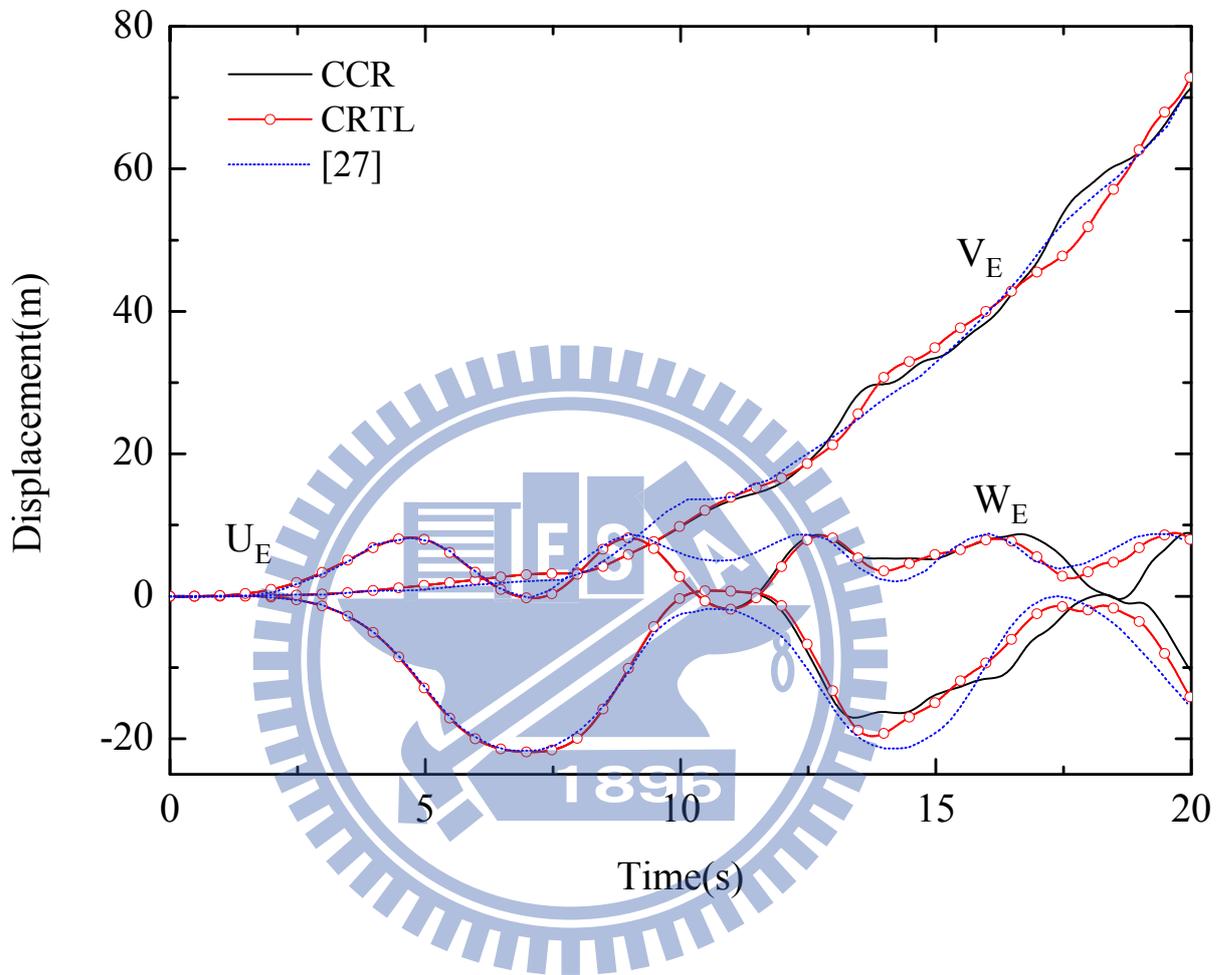


圖 4.32 例題六 E 點之位移

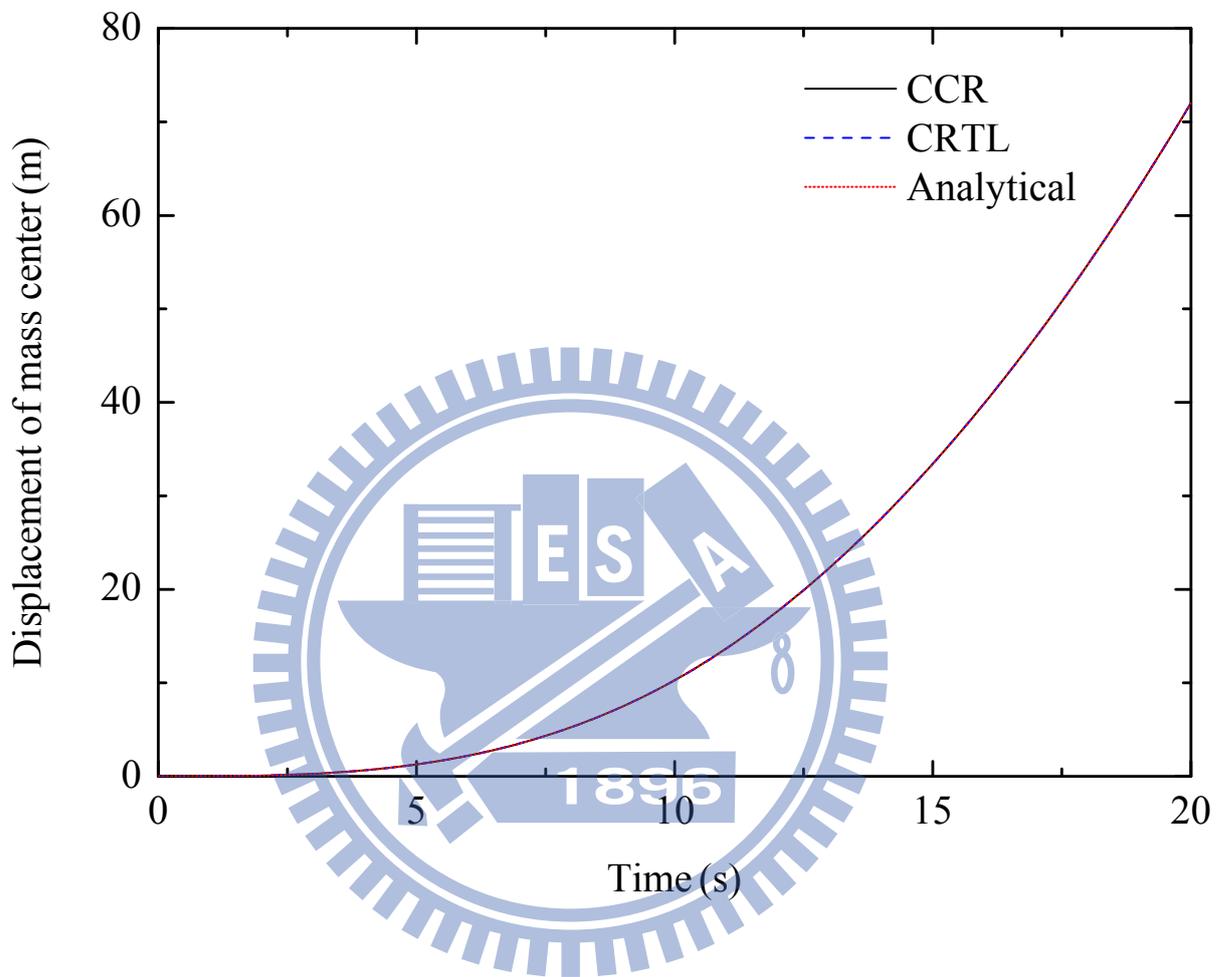


圖 4.33 例題六質心在 X_2^G 位移

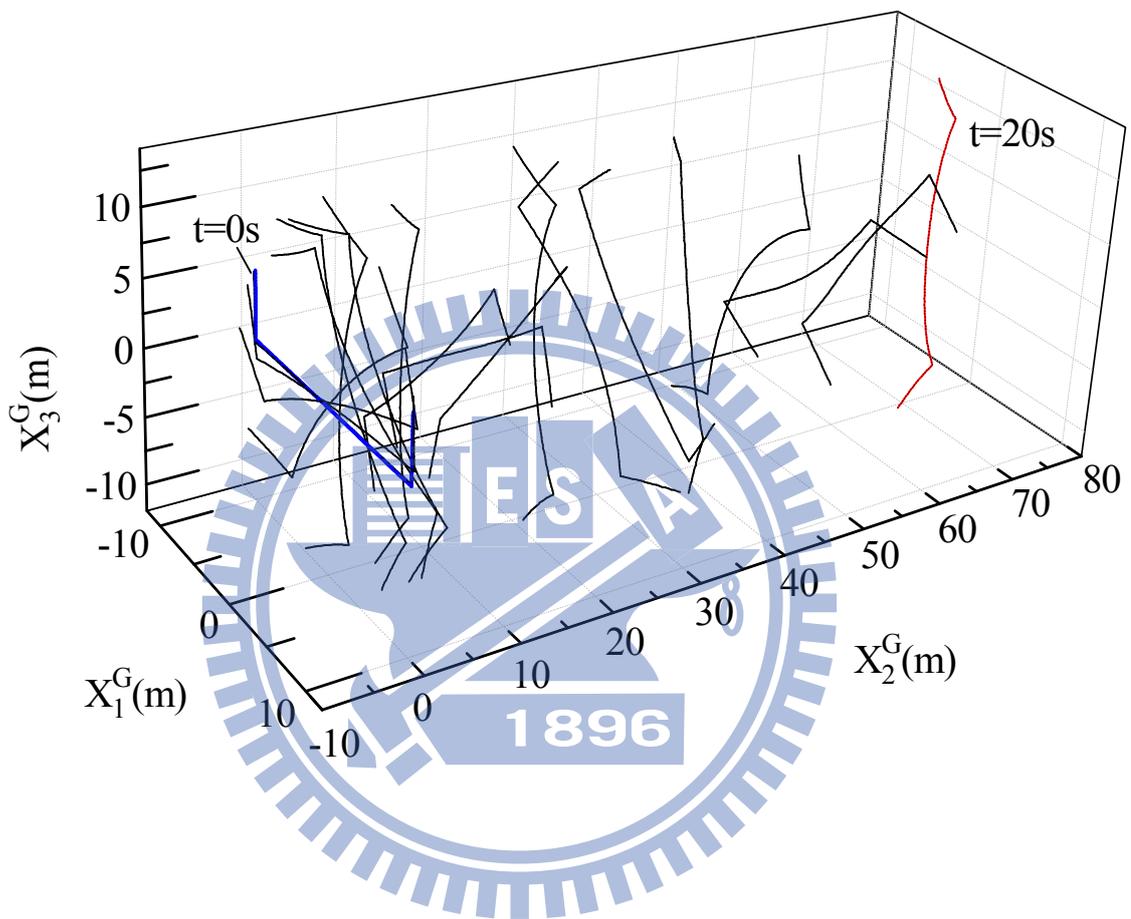
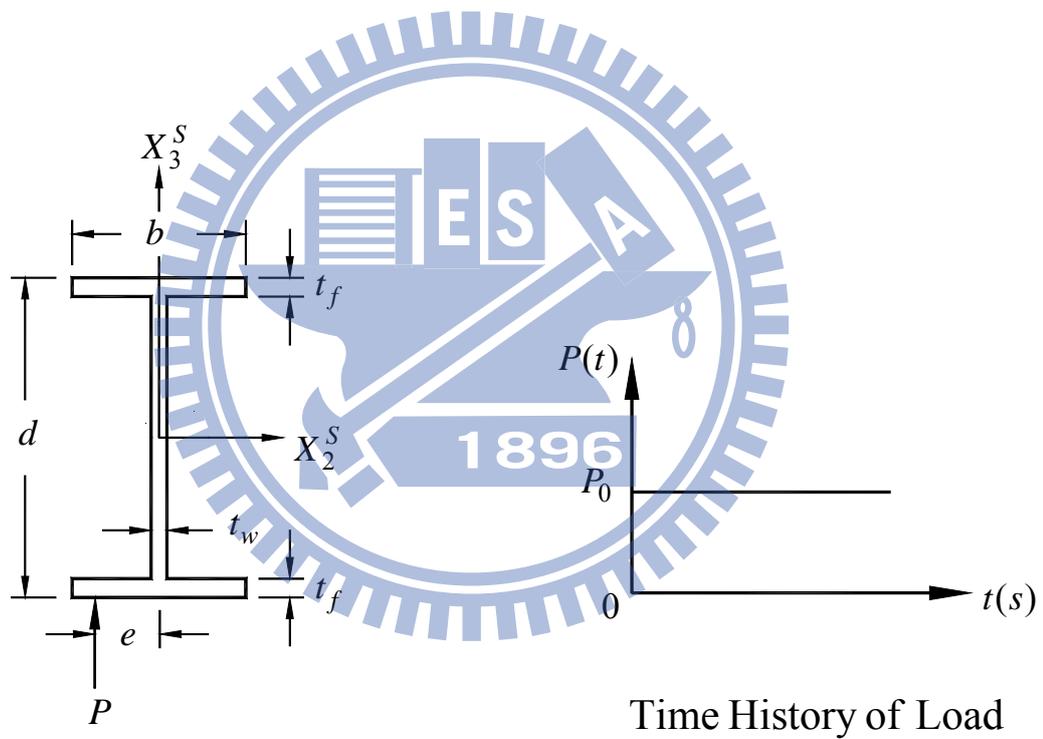
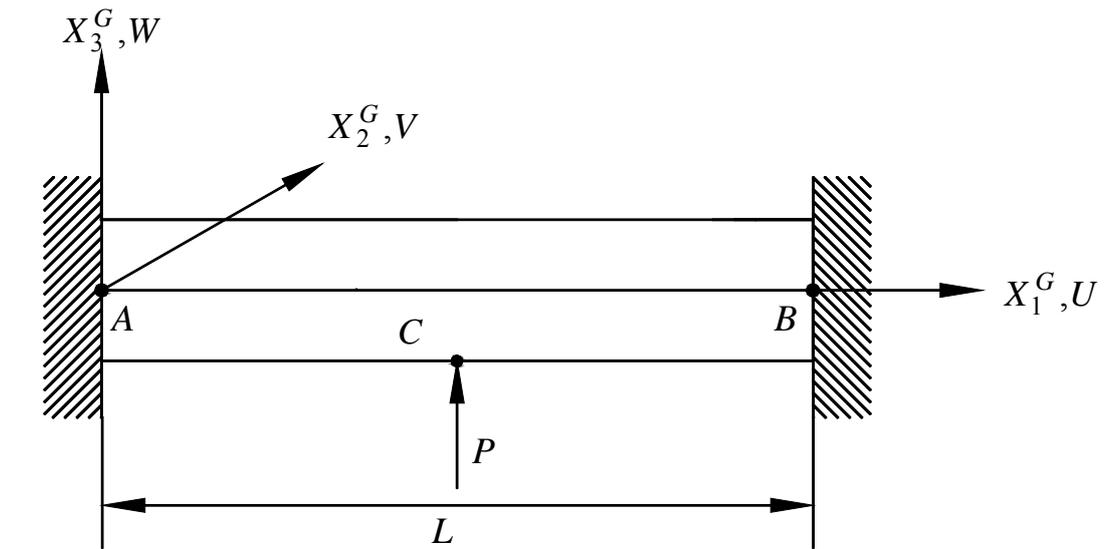


圖 4.34 例題六梁在三維空間中之變形位置圖($t=0s-t=20s$)



Cross section

Time History of Load

圖 4.35 例題七 I 型斷面梁中點承受一偏心力之結構圖

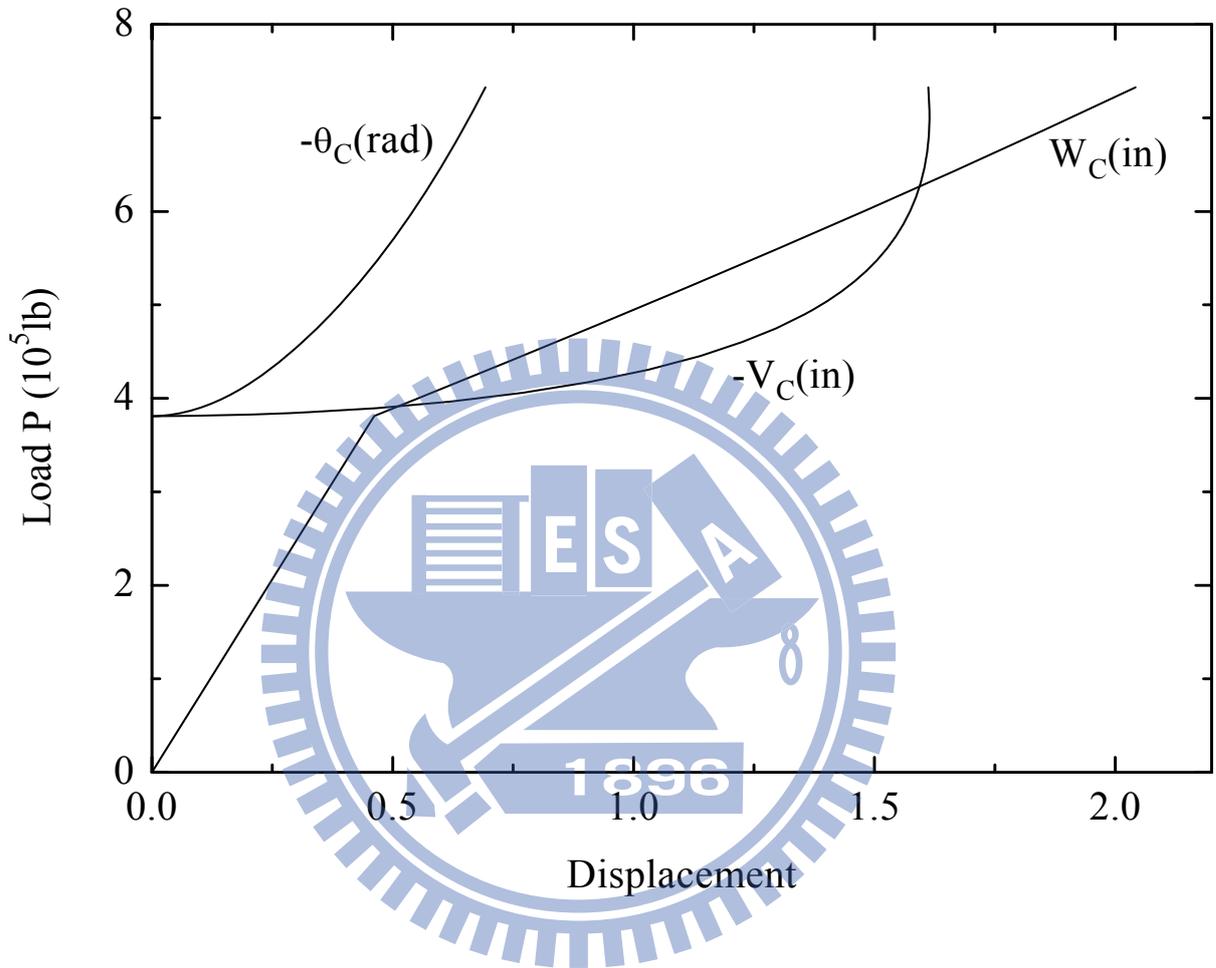


圖 4.36 例題七 I 型斷面梁中點承受偏心力之負荷—位移曲線圖($e = 0$)

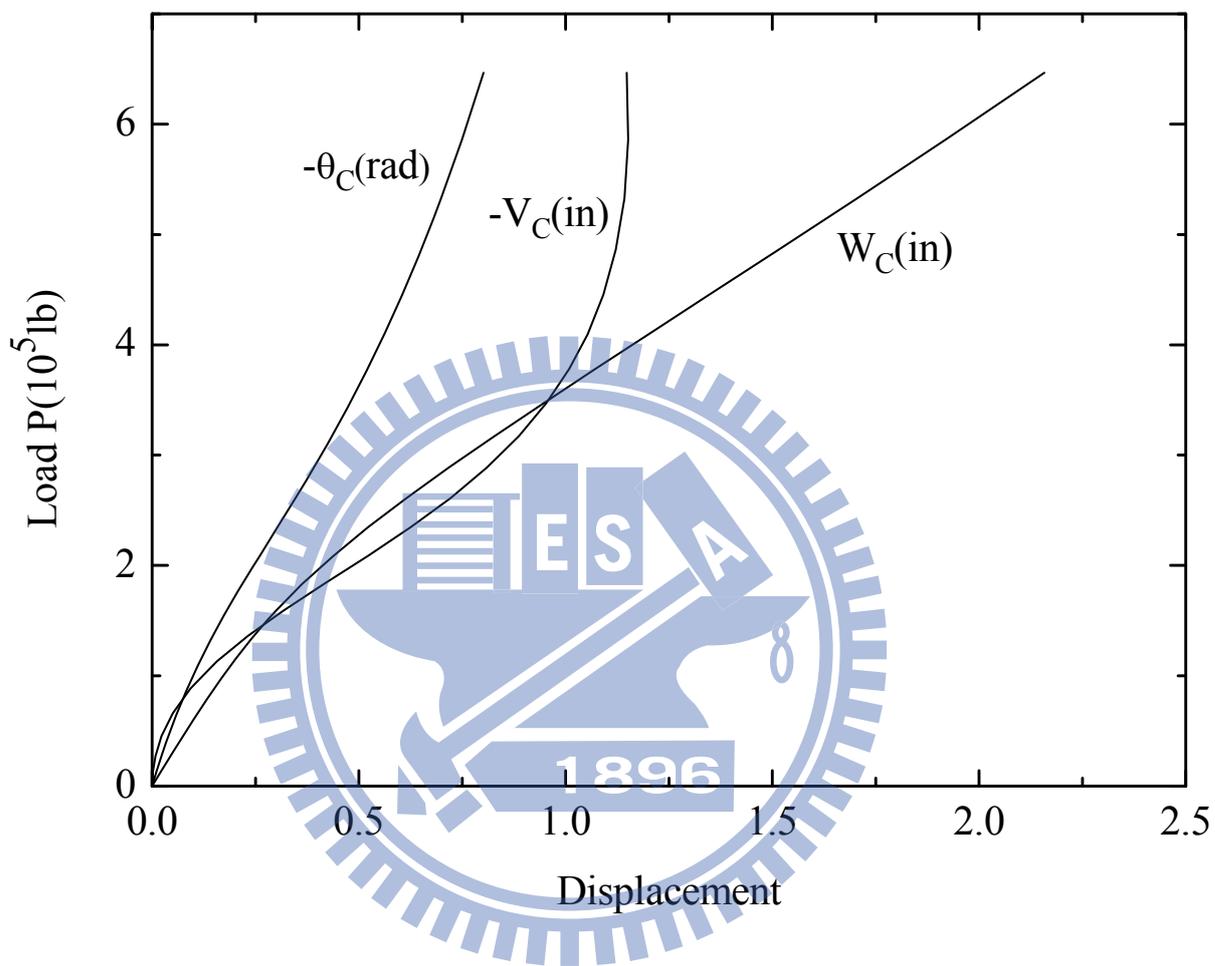


圖 4.37 例題七 I 型斷面梁中點承受偏心力之負荷—位移曲線圖($e = b/2$)

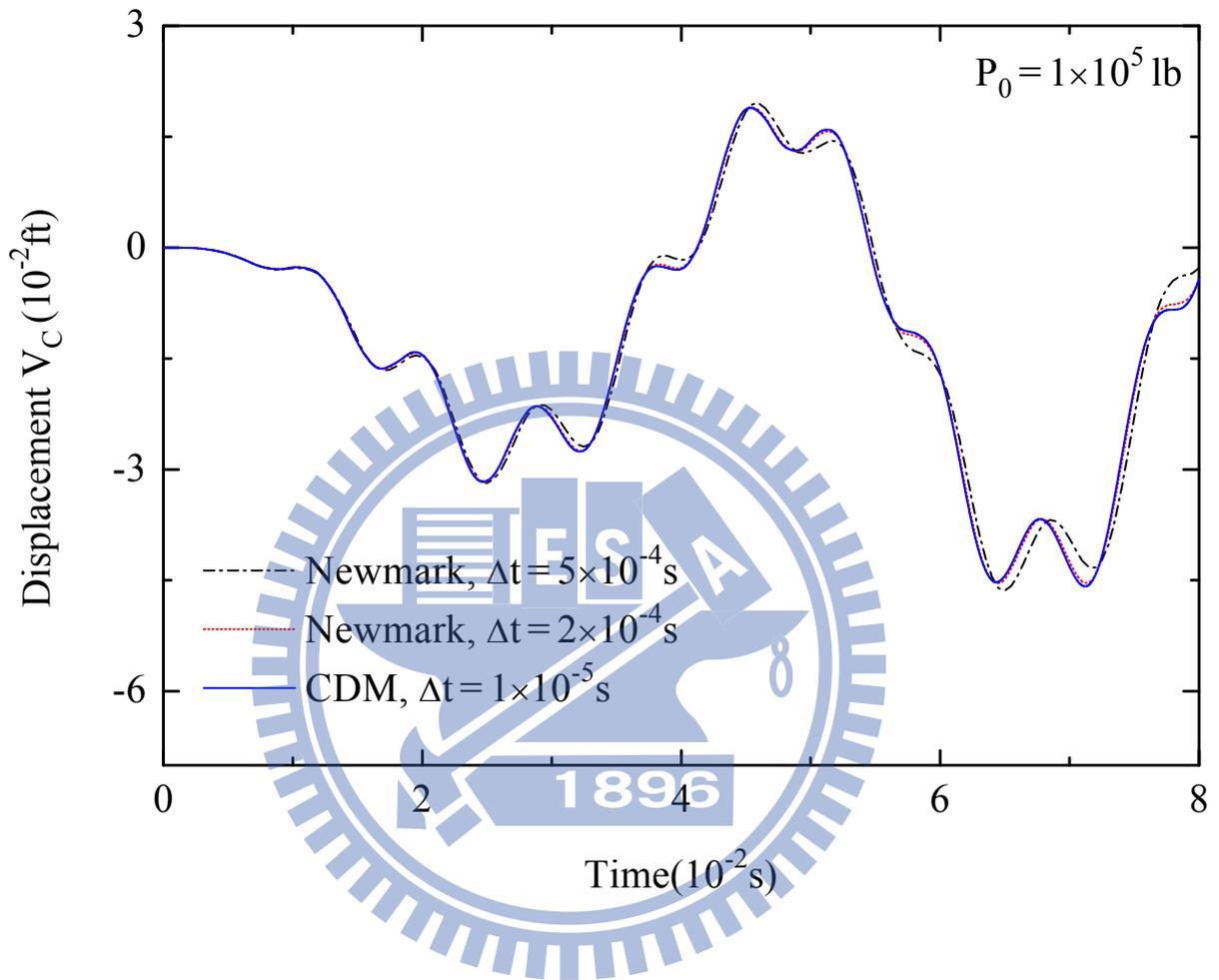


圖 4.38 例題七中點 C 在 X_2^G 方向的位移—時間曲線圖($P_0 = 10^5$ lb)

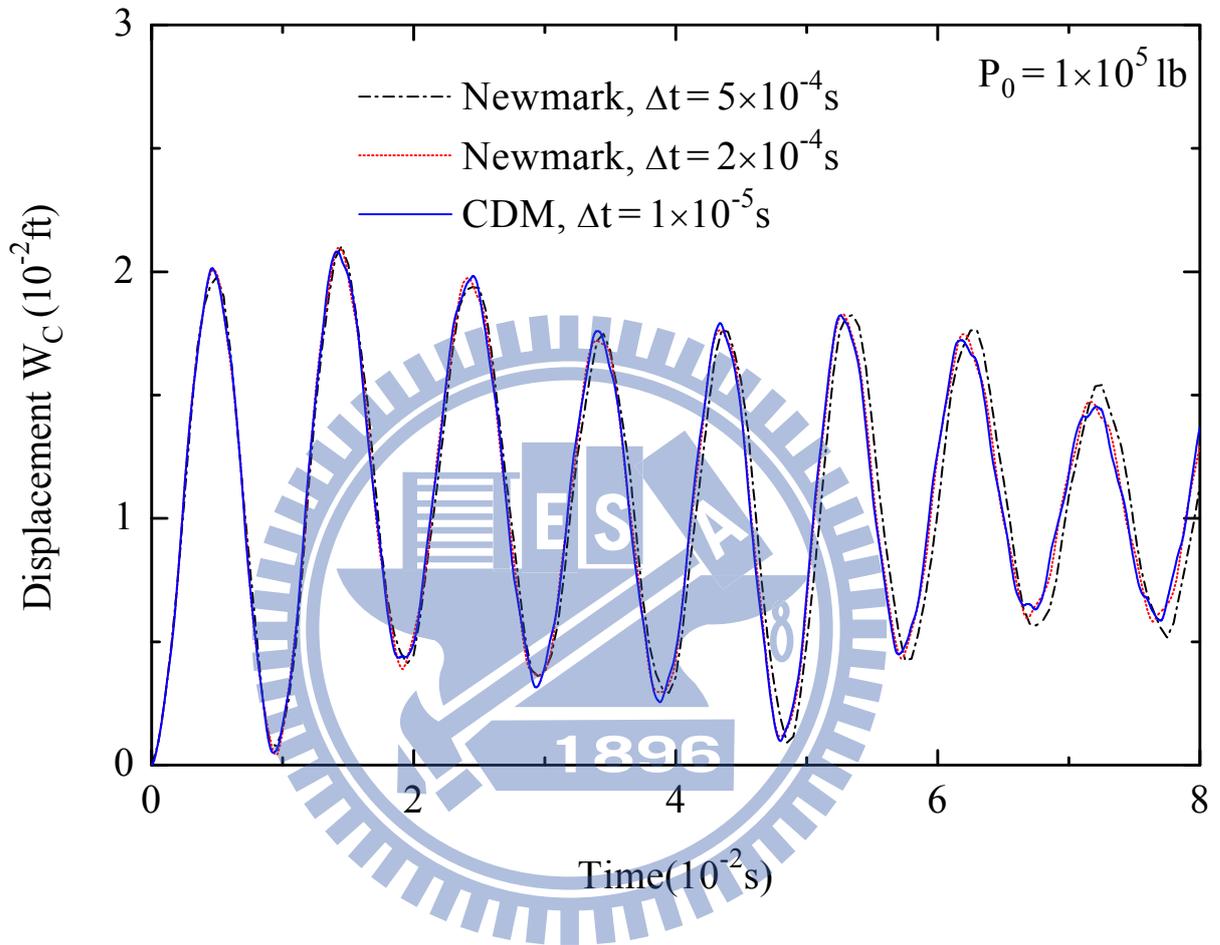


圖 4.39 例題七中點 C 在 X_3^G 方向的位移—時間曲線圖 ($P_0 = 10^5$ lb)

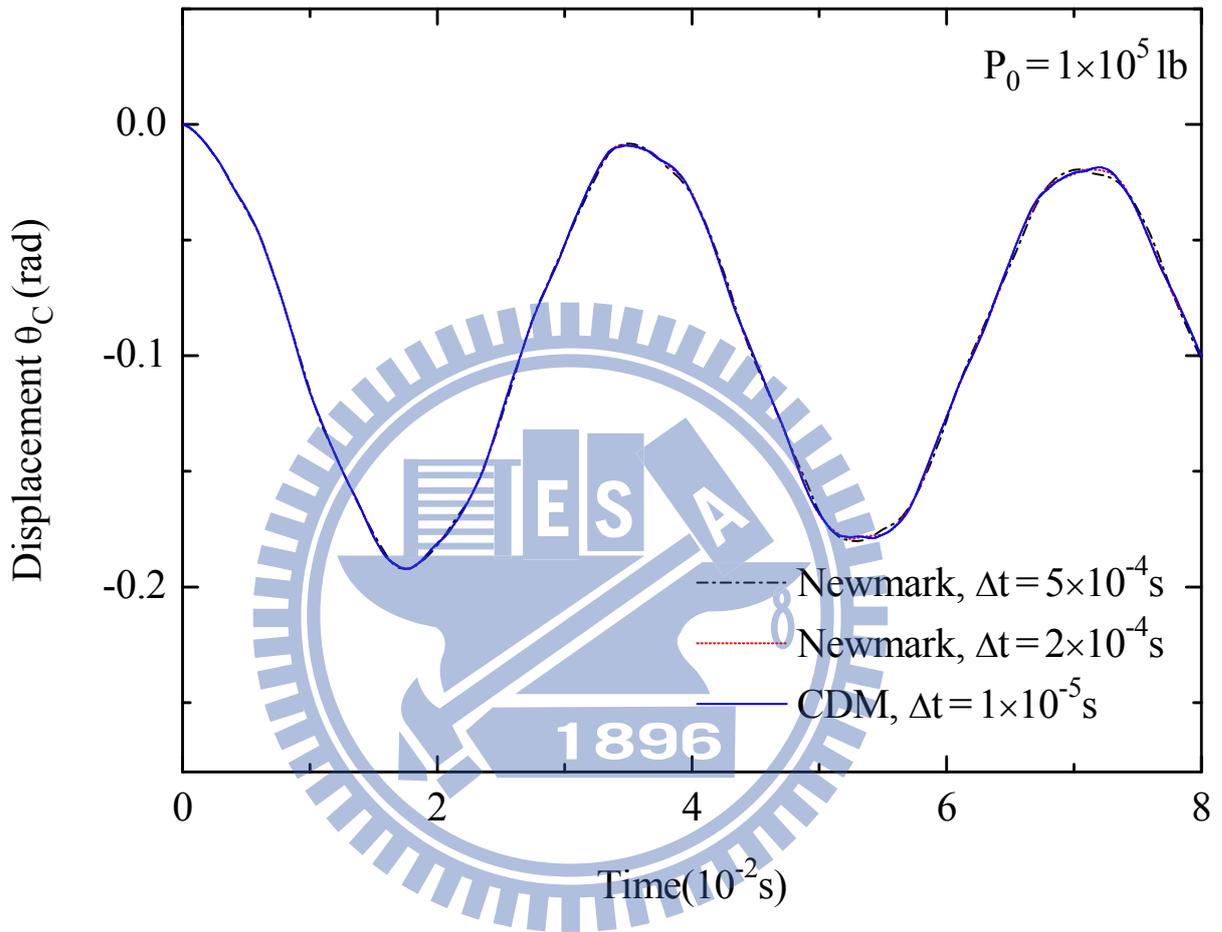


圖 4.40 例題七中點 C 的轉角—時間曲線圖($P_0 = 10^5 \text{ lb}$)

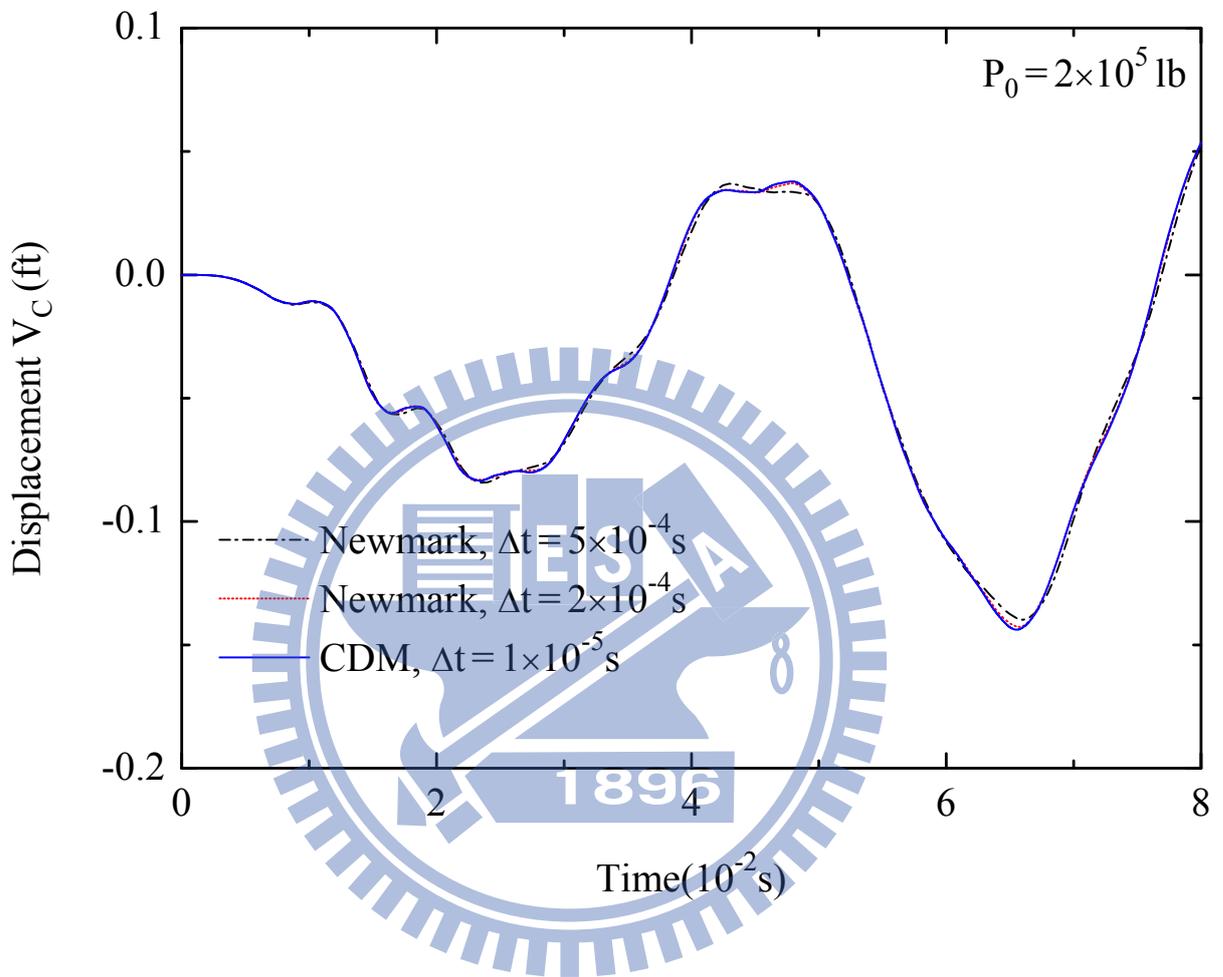


圖 4.41 例題七中點 C 在 X_2^G 方向的位移—時間曲線圖($P_0 = 2 \times 10^5$ lb)

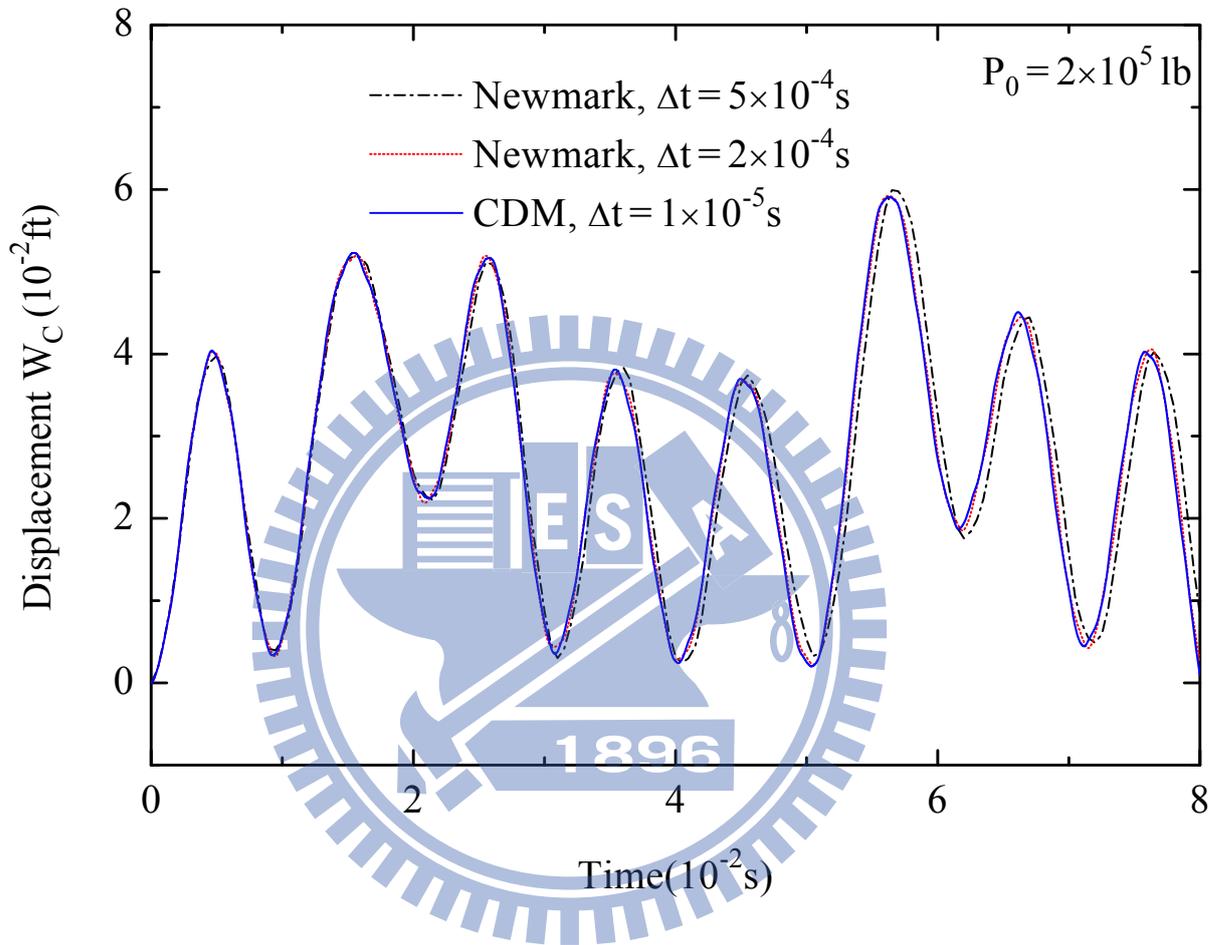


圖 4.42 例題七中點 C 在 X_3^G 方向的位移—時間曲線圖 ($P_0 = 2 \times 10^5$ lb)

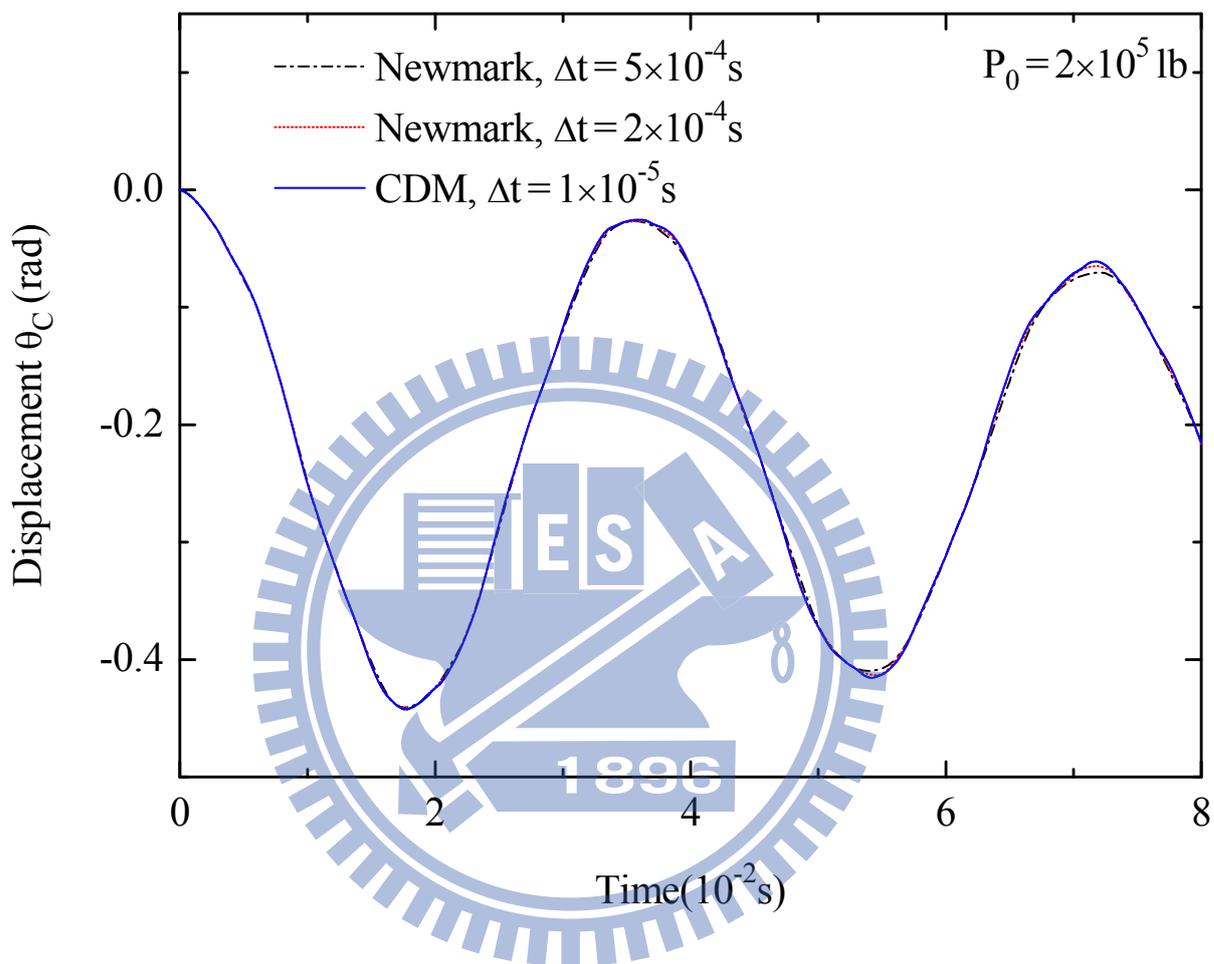


圖 4.43 例題七中點 C 的轉角—時間曲線圖($P_0 = 2 \times 10^5 \text{ lb}$)

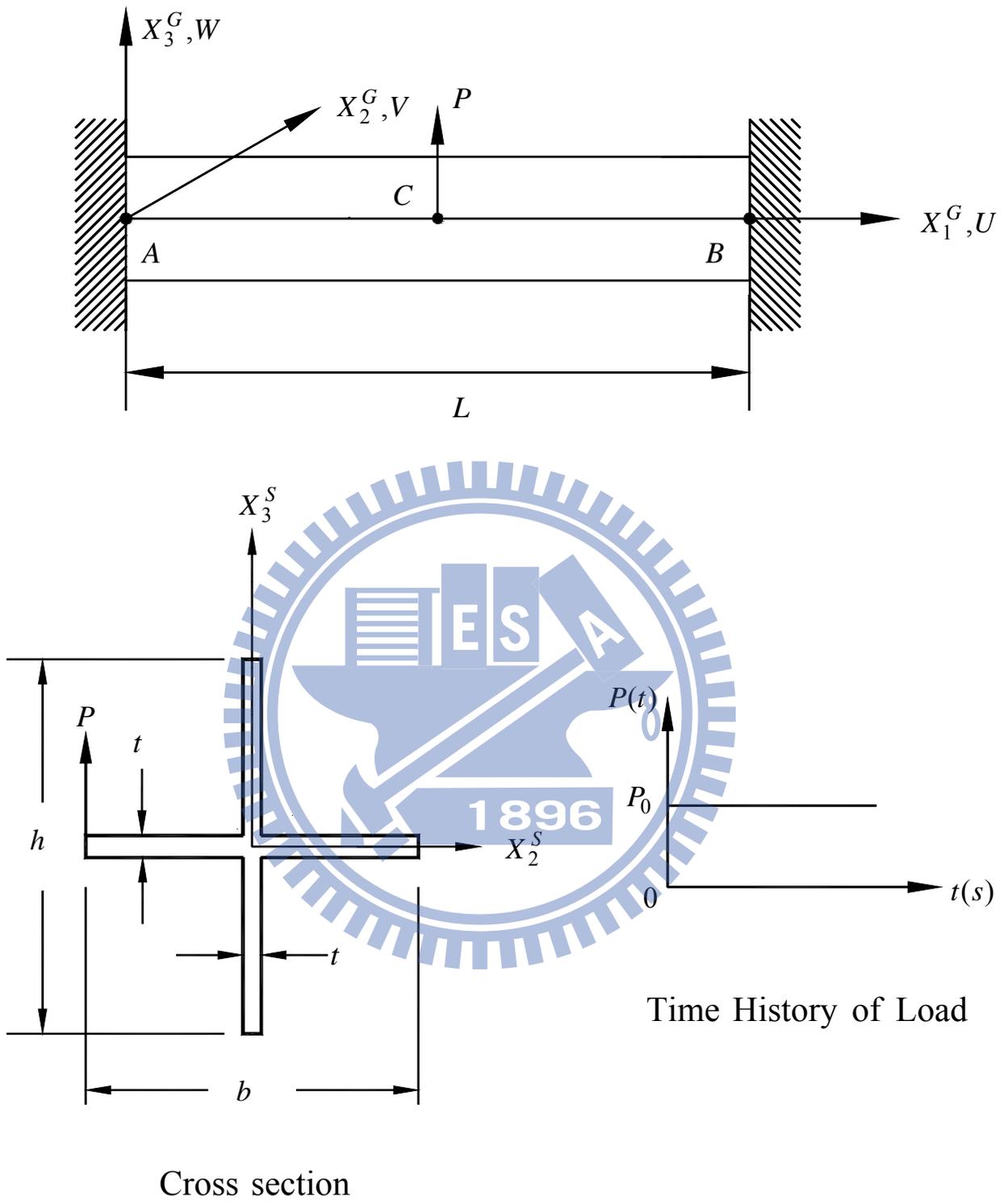


圖 4.44 例題八十字斷面梁之幾何及受力圖

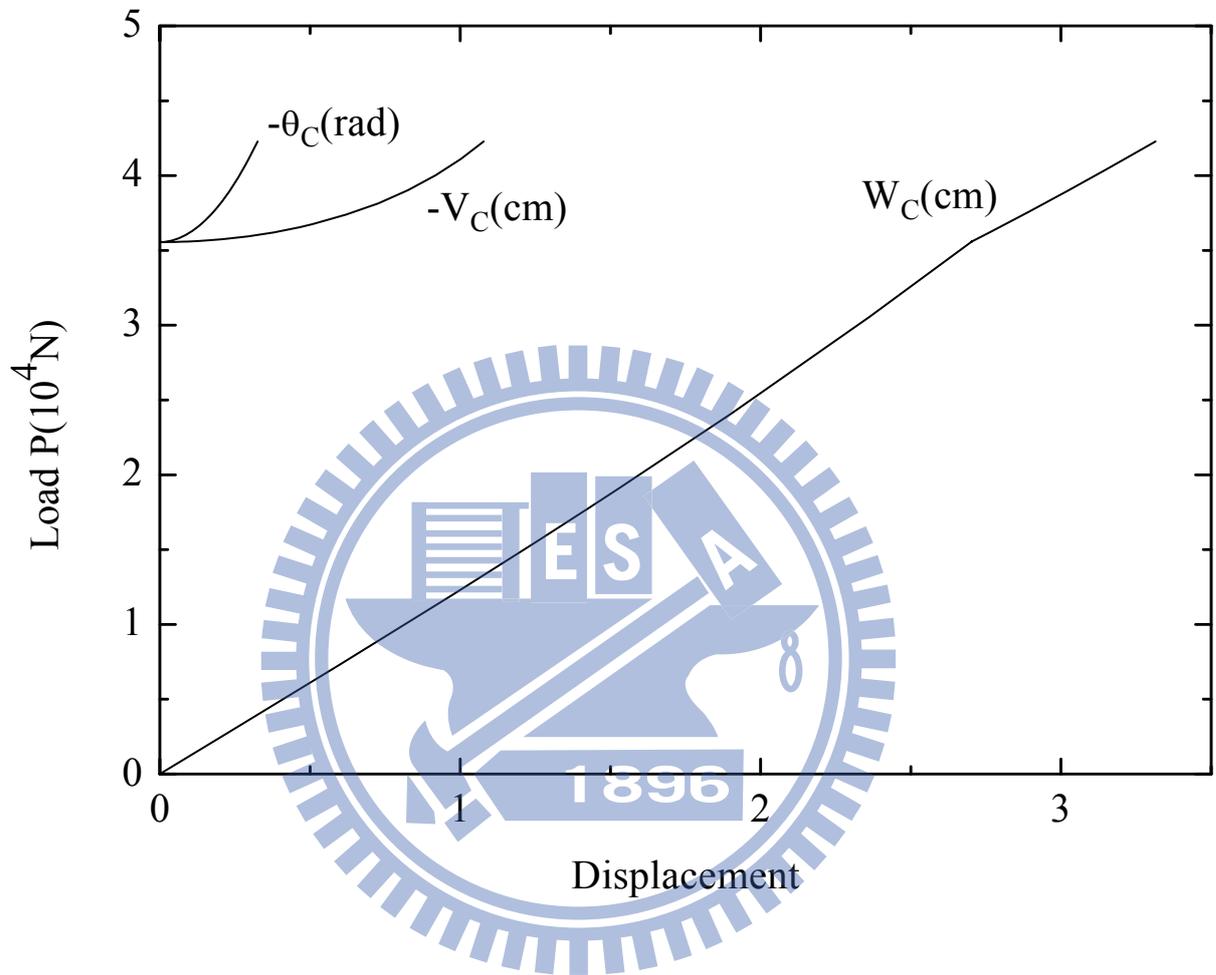


圖 4.45 例題八十字斷面梁中點之負荷—位移曲線圖

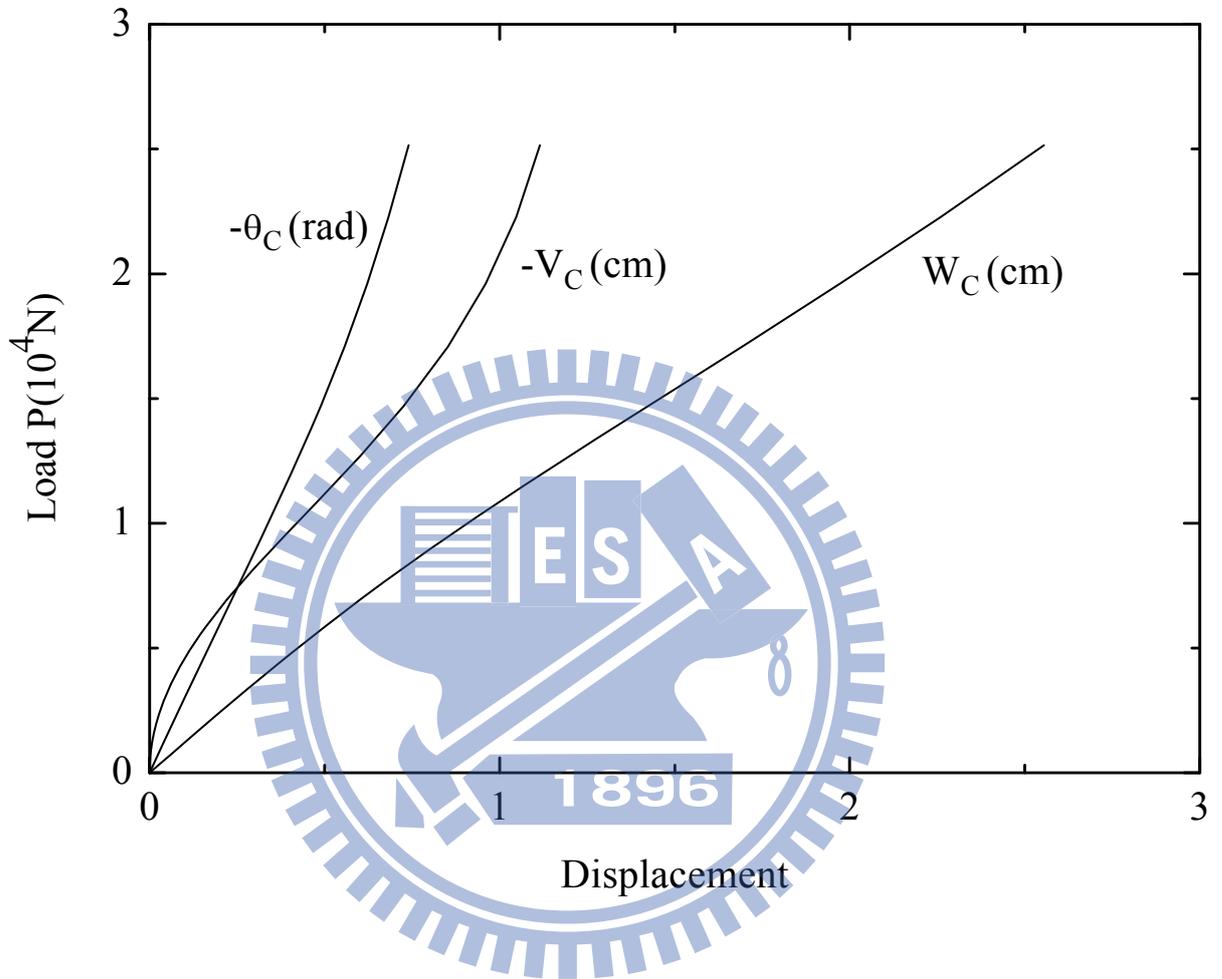


圖 4.46 例題八十字斷面梁中點承受一偏心力之負荷一位移曲線圖

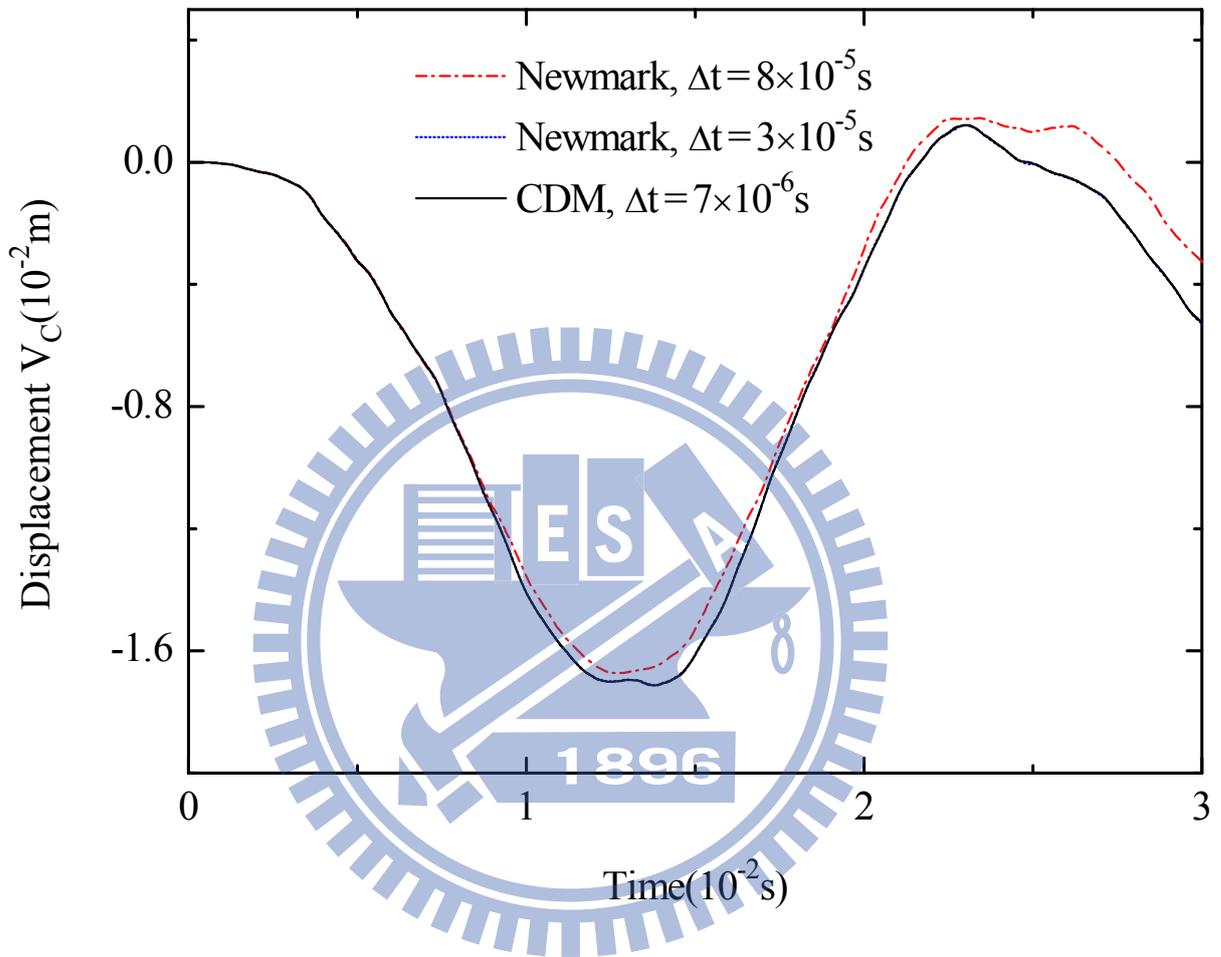


圖 4.47 例題八中點 C 在 X_2^G 方向的位移—時間曲線圖

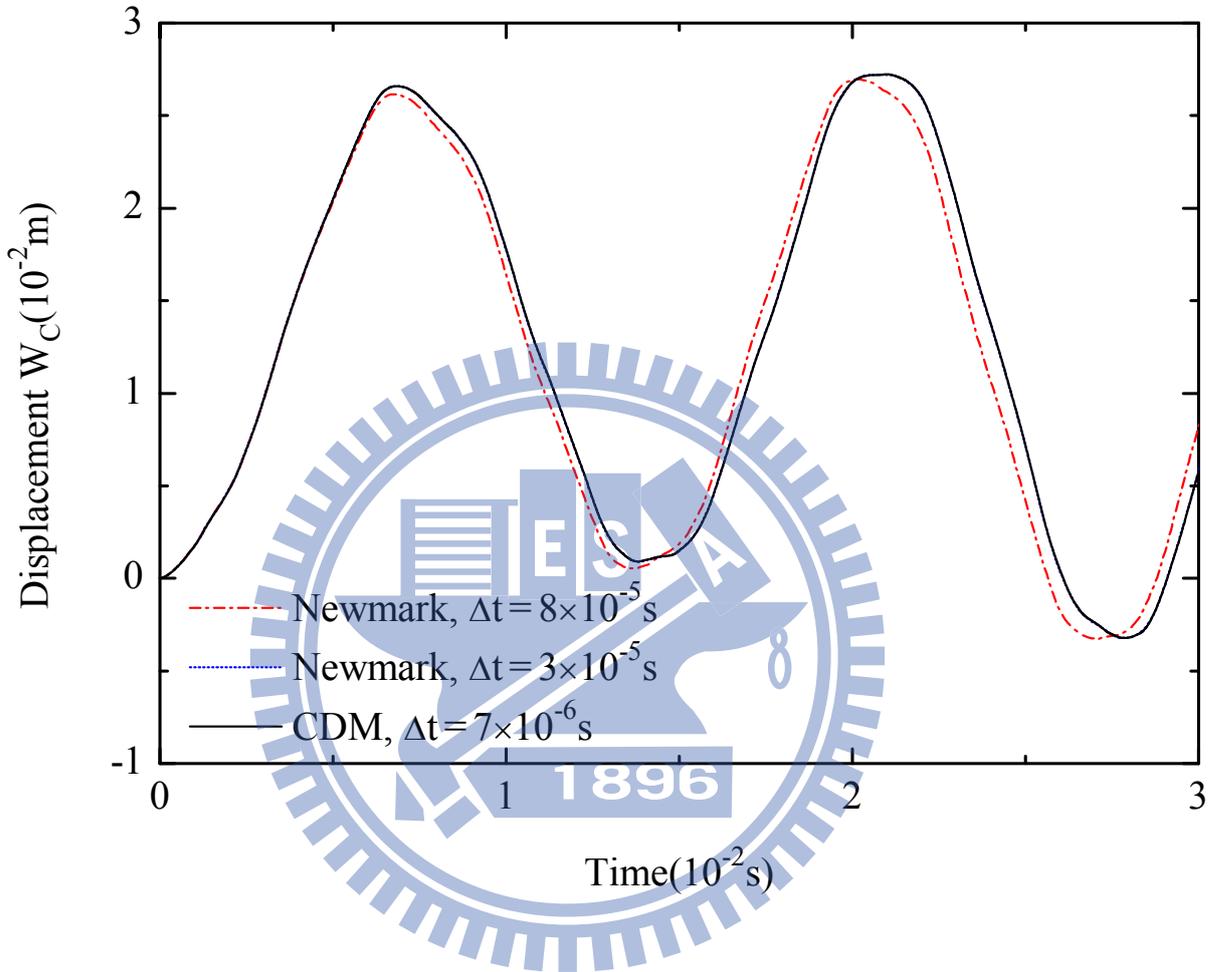


圖 4.48 例題八中點 C 在 X_3^G 方向的位移—時間曲線圖

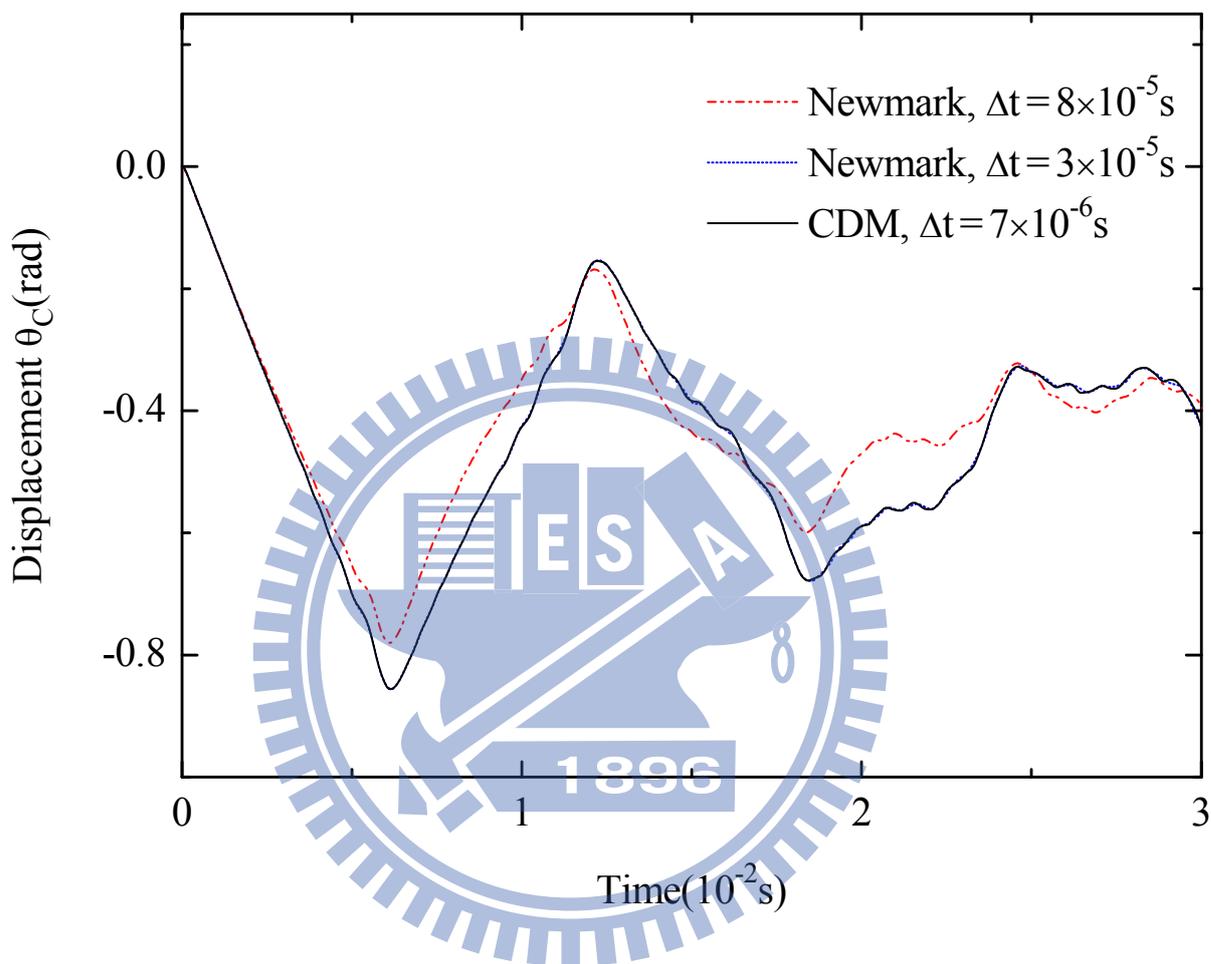


圖 4.49 例題八中點 C 的轉角—時間曲線圖

附錄 A 擾動後的移動元素座標及節點旋轉參數

令 t 表示當前的時間，在當前的變形位置之固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$)、元素節點 j 之斷面座標 \bar{x}_{ij}^S ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$)、元素節點的旋轉參數 $\theta_{ij} = \theta_{ij}(t)$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 及元素當前的弦長 $\ell = \ell(t)$ 已經在 2.6 節中決定。本附錄的推導是在元素當前的變形位置之固定元素座標上進行，所有向量的分量都是指在該座標上的分量。令 $\bar{\mathbf{e}}_i$ 表示在 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向的單位向量、 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S$ ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 為元素節點 j 之當前元素斷面座標軸 \bar{x}_{ij}^S 的單位向量、 $\bar{\mathbf{u}}_j = \bar{\mathbf{u}}_j(t) = \{\bar{u}_{1j}, \bar{u}_{2j}, \bar{u}_{3j}\} = \{\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j\}$ 及 $\boldsymbol{\phi}_j = \boldsymbol{\phi}_j(t) = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}\}$ ($j=1, 2$) 分別表示元素節點 j 當前的絕對位移向量、旋轉向量。本文中旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j$ 的值在當前變形位置重新設定為零， $\bar{\mathbf{u}}_j$ 的分量除了 $\bar{u}_{12} = \bar{u}_2$ 外其餘的值皆為零，但因推導移動元素座標的速度、角速度、加速度及角加速度的需要，推導過程中仍保留全部的 $\boldsymbol{\phi}_j$ 及 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 。 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S$ ($i=1, 2, 3$) 可視為是由 (2.2)、(2.25) 式之旋轉矩陣依序作用在 $\bar{\mathbf{e}}_i$ 而得到，故可表示成

$$\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S = \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \bar{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.1})$$

因當前 $\boldsymbol{\phi}_j(t) = \mathbf{0}$ ，所以 (A.1) 式之 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S(t)$ 與 (2.24) 式之 \mathbf{e}_{ij}^S 是重合的。

令 x_i ($i=1, 2, 3$) 為在當前變形位置的移動元素座標， \mathbf{e}_i 表示在 x_i 軸方向的單位向量。由 2.6 節的方法，可將 \mathbf{e}_i 表示成 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 及 $\boldsymbol{\phi}_j$ 的函數，因當前的 $\boldsymbol{\phi}_j(t) = \mathbf{0}$ ， $\bar{\mathbf{u}}_j$ 的分量除了 $\bar{u}_{12} = \bar{u}_2$ 外其餘的值皆為零，所以 \mathbf{e}_i 與 $\bar{\mathbf{e}}_i$ 重合。

令 $\delta \bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta \boldsymbol{\phi}_j$ ($j=1, 2$) 分別代表元素節點 j 的位移向量 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 與旋轉向量 $\boldsymbol{\phi}_j$ 的擾動量， δt 代表元素節點 j 受擾動的時間。當元素節點 j 受到 $\delta \bar{\mathbf{u}}_j$ 與 $\delta \boldsymbol{\phi}_j$ ($j=1, 2$) 作用後，可由 2.6 節的方法及一致性一階線性化 (consistent first

order linearization)，即保留 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 、 ϕ_j 、 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 、 $\delta\phi_j$ 及 θ_{ij} 的一次項，決定受擾動後的移動元素座標、元素節點旋轉參數 $\theta_{ij}(t + \delta t)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$)、元素弦長 $l(t + \delta t)$ ，其推導的過程如下所述：

元素節點 $j(j = 1, 2)$ 當前的位置向量可表示成

$$\bar{\mathbf{r}}_1(t) = \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2(t) = \{L, 0, 0\} + \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = l - L + \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.4})$$

其中 L 為梁之剪心軸變形前的長度。

當元素節點 $j(j = 1, 2)$ 受到擾動位移 $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 作用，擾動後的元素節點位置向量可表示成

$$\hat{\mathbf{r}}_j = \bar{\mathbf{r}}_j(t + \delta t) = \bar{\mathbf{r}}_j(t) + \delta\bar{\mathbf{u}}_j \quad (\text{A.5})$$

擾動後之元素的弦長 \hat{l} 可表示成

$$\hat{l} = l(t + \delta t) = \|\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1\| \quad (\text{A.6})$$

將(A.6)式做一致性一階線性化，則 \hat{l} 可表示成

$$\hat{l} = l + \delta\Delta\bar{\mathbf{u}} + \frac{\delta\Delta\bar{\mathbf{v}}}{l} \Delta\bar{\mathbf{v}} + \frac{\delta\Delta\bar{\mathbf{w}}}{l} \Delta\bar{\mathbf{w}} \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{u}}_1, \quad \Delta\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_1, \quad \Delta\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}}_2 - \bar{\mathbf{w}}_1 \quad (\text{A.8})$$

$$\delta\Delta\bar{\mathbf{u}} = \delta\bar{\mathbf{u}}_2 - \delta\bar{\mathbf{u}}_1, \quad \delta\Delta\bar{\mathbf{v}} = \delta\bar{\mathbf{v}}_2 - \delta\bar{\mathbf{v}}_1, \quad \delta\Delta\bar{\mathbf{w}} = \delta\bar{\mathbf{w}}_2 - \delta\bar{\mathbf{w}}_1 \quad (\text{A.9})$$

本文中元素弦長的擾動量 δl 為擾動後與擾動前元素的弦長的差，由(A.7)式可得

$$\delta l = \hat{l} - l = \delta\Delta\bar{\mathbf{u}} + \frac{\delta\Delta\bar{\mathbf{v}}}{l} \Delta\bar{\mathbf{v}} + \frac{\delta\Delta\bar{\mathbf{w}}}{l} \Delta\bar{\mathbf{w}} \quad (\text{A.10})$$

擾動後之移動元素座標 x_1 軸的單位向量可表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1(t + \delta t) = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1}{\hat{l}} \quad (\text{A.11})$$

將(A.11)式一致性一階線性化，則 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 可以表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \left\{ 1 - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{w}}{\ell^2}, \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2}, \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} \right\} \quad (\text{A.12})$$

當元素節點 $j(j=1,2)$ 受到擾動旋轉向量 $\delta\phi_j$ 作用，(A.1)式之 $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^S (i=1,2,3)$ 會轉到 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^S = \mathbf{R}_\phi(\phi_j + \delta\phi_j)\mathbf{R}_\theta\bar{\mathbf{e}}_i$ ，由(2.3)式、(2.25)式、(A.1)式及一致性一階線性化，則 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^S$ 及 $\hat{\mathbf{e}}_{2j}^S$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{1j}^S = & \{1 - \theta_{2j}\delta\phi_{2j} - \theta_{3j}\delta\phi_{3j} - \phi_{2j}\delta\phi_{2j} - \phi_{3j}\delta\phi_{3j}, \theta_{3j} + \phi_{3j} + \delta\phi_{3j} + \theta_{2j}\delta\phi_{1j} \\ & + \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{2j} + \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{1j}, -\theta_{2j} - \phi_{2j} - \delta\phi_{2j} + \theta_{3j}\delta\phi_{1j} + \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{3j} + \frac{1}{2}\phi_{3j}\delta\phi_{1j}\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{2j}^S = & \{-\delta\phi_{3j} - \phi_{3j} - \theta_{3j} + \theta_{1j}\delta\phi_{2j} + \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{2j} + \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{1j}, 1 - \theta_{1j}\delta\phi_{1j} - \theta_{3j}\delta\phi_{3j} \\ & - \phi_{1j}\delta\phi_{1j} - \phi_{3j}\delta\phi_{3j}, \delta\phi_{1j} + \phi_{1j} + \theta_{1j} + \theta_{3j}\delta\phi_{2j} + \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{3j} + \frac{1}{2}\phi_{3j}\delta\phi_{2j}\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

令旋轉向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} = \boldsymbol{\theta}_{nj}(t + \delta t) (j=1,2)$ 為擾動後元素節點 j 之旋轉參數，其定義方式與(2.31)式之 $\boldsymbol{\theta}_{nj}$ 相同，由(2.31)、(A.12)與(A.13)式可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} = \hat{\theta}_{nj}\hat{\mathbf{n}}_j \quad (\text{A.15})$$

$$\sin \hat{\theta}_{nj}\hat{\mathbf{n}}_j = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_{1j}^S \quad (\text{A.16})$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 與 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^S (j=1,2)$ 分別定義於(A.12)式與(A.13)式。

將(A.12)式、(A.13)式代入(A.15)式，再將(A.15)式之 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj}$ 一致性一階線性化可得

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj} = & \left\{ -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell}(\theta_{2j} + \phi_{2j}) - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}(\theta_{3j} + \phi_{3j}) - \frac{\Delta\bar{v}}{\ell}\delta\phi_{2j} - \frac{\Delta\bar{w}}{\ell}\delta\phi_{3j}, \theta_{2j} + \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j} \right. \\
& + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} - \theta_{3j}\delta\phi_{1j} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2}\phi_{3j}\delta\phi_{1j} - \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{3j}, \theta_{3j} - \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{3j} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \\
& \left. + \delta\phi_{3j} + \theta_{2j}\delta\phi_{1j} + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2}\phi_{2j}\delta\phi_{1j} + \frac{1}{2}\phi_{1j}\delta\phi_{2j} \right\}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

擾動後之移動元素座標軸 x_2 、 x_3 的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_3$ 可由以下步驟決定：

將旋轉向量 $-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{nj}$ 作用在 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^S$ 上，使其旋轉到 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^{S'}$ ，此時 $\hat{\mathbf{e}}_{1j}^{S'}$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 重合。由(2.3)

式及一致性一階線性化可得

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{2j}^{S'} = & \left\{ -\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}\theta_{1j} + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\phi_{1j} + \phi_{1j}\delta\Delta\bar{w}}{\ell}, 1 - \theta_{1j}\delta\phi_{1j} - \phi_{1j}\delta\phi_{1j} \right. \\
& - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2}, \theta_{1j} + \phi_{1j} + \delta\phi_{1j} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} - \theta_{2j}\right)\delta\phi_{3j} \\
& \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \theta_{3j}\right)\delta\phi_{2j} + \frac{\theta_{2j} + \phi_{2j}}{2\ell}\delta\Delta\bar{v} + \frac{\theta_{3j} + \phi_{3j}}{2\ell}\delta\Delta\bar{w} \right\}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

擾動後之移動元素座標軸 x_2 的單位向量可以表示成

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{22}^{S'} + \hat{\mathbf{e}}_{21}^{S'}}{\|\hat{\mathbf{e}}_{22}^{S'} + \hat{\mathbf{e}}_{21}^{S'}\|} \tag{A.19}$$

將(A.19)式一致性一階線性化，則 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 可以表示成

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_2 = & \left\{ -\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}\frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{\Delta\bar{w}}{\ell}\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2}, 1 \right. \\
& - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{v}}{\ell^2} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{4}(\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{4}(\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}), \\
& \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} + \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} - \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} + \frac{1}{4}\frac{\Delta\bar{v}}{\ell}(\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) \\
& + \frac{1}{4}\frac{\Delta\bar{w}}{\ell}(\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4}\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell}(\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4}\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell}(\phi_{31} + \phi_{32}) + \frac{1}{4}\theta_{31}\left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{21}\right) \\
& \left. + \frac{1}{4}\theta_{32}\left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{22}\right) + \frac{1}{4}\theta_{21}\left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{31}\right) + \frac{1}{4}\theta_{22}\left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{32}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

擾動後之移動元素座標軸 x_3 的單位向量可以由 $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ 決定，由一致性一階線性化， $\hat{\mathbf{e}}_3$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_3 = & \left\{ -\frac{\Delta\bar{w}}{l} - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} + \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{\Delta\bar{v}}{l} \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \right. \\ & , -\frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} - \frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{w} + \Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{v}}{2\ell^2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{l} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{l} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} (\phi_{31} + \phi_{32}) - \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{21} \right) \\ & - \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(-\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} + \delta\phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(-\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} + \delta\phi_{32} \right) \\ & \left. , 1 - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{4} (\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{4} (\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}) - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{w}}{\ell^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

其中 $\theta_{11} = -\theta_{12}$ ，所以 $\theta_{11} + \theta_{12} = 0$ 。

若將(A.12)、(A.20)、(A.21)式中節點參數之擾動量除去，可得當前之移動元素座標軸的單位向量在一致性一階線性化後的表示式如下

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t) = \left\{ 1, \frac{\Delta\bar{v}}{l}, \frac{\Delta\bar{w}}{l} \right\} \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t) = \left\{ -\frac{\Delta\bar{v}}{l}, 1, \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(t) = \left\{ -\frac{\Delta\bar{w}}{l}, -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2}, 1 \right\} \quad (\text{A.24})$$

令 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 、 $\mathbf{r}(t)$ 是為梁元素變形後，梁元素中任意點在當前的固定及移動元素座標上的位置向量。梁元素受擾動後， $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 與 $\mathbf{r}(t + \delta t)$ 為該點在當前的固定元素座標及擾動後之移動元素座標的移動元素上的位置向量。由(A.12)、(A.20)、(A.21)式可將位置向量 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 與 $\mathbf{r}(t)$ 及 $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 與 $\mathbf{r}(t + \delta t)$ 的關係表示如下

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t) \mathbf{r}(t) + \bar{\mathbf{u}}_1(t) \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) = {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t) {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t) \mathbf{r}(t + \delta t) + \bar{\mathbf{u}}_1(t + \delta t) \quad (\text{A.26})$$

$${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} + {}^{11}\mathbf{A}_{\bar{x}x} \quad (\text{A.27})$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{l} \\ \frac{\Delta\bar{v}}{l} & 1 & -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \\ \frac{\Delta\bar{w}}{l} & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$${}^{10}\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$${}^{11}\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{w}}{l}\delta\phi_{1m} & \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{v}}{l}\delta\phi_{1m} \\ -\frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} + \frac{\Delta\bar{w}}{l}\delta\phi_{1m} & 0 & -A_1 \\ -\frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{u}}{l^2} - \frac{\Delta\bar{v}}{l}\delta\phi_{1m} & A_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

其中 ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t)$ ， ${}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x} = {}^1\mathbf{A}_{\bar{x}x}(t + \delta t)$ 分別為擾動前的移動元素座標相對於固定元素座標的方向餘弦矩陣及擾動後的移動元素座標相對於擾動前的元素座標的方向餘弦矩陣，

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{l} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{l} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} (\phi_{21} + \phi_{22}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} (\phi_{31} + \phi_{32}) \\ & + \frac{1}{4} \theta_{31} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{21} \right) + \frac{1}{4} \theta_{32} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{l} + \delta\phi_{22} \right) + \frac{1}{4} \theta_{21} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} - \delta\phi_{31} \right) + \frac{1}{4} \theta_{22} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{l} - \delta\phi_{32} \right) \\ & + \frac{\Delta\bar{v}\delta\Delta\bar{w}}{2l^2} - \frac{\Delta\bar{w}\delta\Delta\bar{v}}{2l^2}, \quad \phi_{1m} = \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2}, \quad \delta\phi_{1m} = \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2}. \end{aligned}$$

由(2.33)式，擾動後節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{1j} = \theta_{1j}(t + \delta t)$ ($j=1,2$) 可表示如下

$$\sin \hat{\theta}_{1j} = \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_{2j}^{\prime} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (\text{A.31})$$

將(A.3)、(A.18)及(A.20)代入(A.31)式並將其一致性一階線性化， $\hat{\theta}_{1j}$ 可表示如下

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1j} = & \underbrace{\phi_{1j} - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} - \frac{\theta_{11}}{2} - \frac{\theta_{12}}{2} + \theta_{1j}}_{\text{}} - \frac{\delta\phi_{11}}{2} - \frac{\delta\phi_{12}}{2} + \delta\phi_{1j} \\ & - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} + \theta_{21}) - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\theta_{32} + \theta_{31}) + \frac{1}{2} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \theta_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \theta_{3j} - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta\phi_{21} \\ & - \frac{1}{4} \theta_{32} \delta\phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta\phi_{31} + \frac{1}{4} \theta_{22} \delta\phi_{32} + \frac{1}{2} \theta_{3j} \delta\phi_{2j} - \frac{1}{2} \theta_{2j} \delta\phi_{3j} \\ & - \frac{\Delta\bar{v}}{4\ell} (\delta\phi_{21} + \delta\phi_{22}) - \frac{\Delta\bar{w}}{4\ell} (\delta\phi_{31} + \delta\phi_{32}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} \delta\phi_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} \delta\phi_{3j} \\ & - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{4\ell} (\phi_{21} + \phi_{22}) - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{4\ell} (\phi_{31} + \phi_{32}) + \frac{1}{2} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} \phi_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \phi_{3j} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

由(A.32)式可得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{12} = & -\hat{\theta}_{11} \\ \hat{\theta}_{12} = & \underbrace{\frac{\phi_{12} - \phi_{11}}{2} - \frac{\theta_{11}}{2} + \frac{\theta_{12}}{2} - \frac{\delta\phi_{11}}{2} + \frac{\delta\phi_{12}}{2}}_{\text{}} + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) \\ & - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta\phi_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \delta\phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta\phi_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \delta\phi_{32} + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} (\delta\phi_{22} - \delta\phi_{21}) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} (\delta\phi_{32} - \delta\phi_{31}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

由(2.34)式，擾動後節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t + \delta t)$ ($i = 2, 3$; $j = 1, 2$)可表示如下

$$\hat{\theta}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_{1j}^S \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.34})$$

將(A.11)、(A.13)、(A.20)、(A.21)式代入(A.29)，將其一致性一階線性化， $\hat{\theta}_{2j}$

和 $\hat{\theta}_{3j}$ 可表示如下

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{2j} = & \underline{\phi_{2j} + \frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \theta_{2j}} + \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j} + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{3j} - \theta_{3j} \delta\phi_{1j} \\ & + \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \phi_{3j}\right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} - \delta\phi_{3j}\right) \\ & - \frac{\Delta\bar{w} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{3j} \delta\phi_{1j} - \frac{1}{2} \phi_{1j} \delta\phi_{3j}\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{3j} = & \underline{\phi_{3j} - \frac{\Delta\bar{v}}{\ell} + \theta_{3j}} - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} + \delta\phi_{3j} - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \theta_{2j} + \theta_{2j} \delta\phi_{1j} \\ & - \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta\bar{w}}{\ell} + \phi_{2j}\right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} + \delta\phi_{2j}\right) \\ & + \frac{\Delta\bar{v} \delta\Delta\bar{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{2j} \delta\phi_{1j} + \frac{1}{2} \phi_{1j} \delta\phi_{2j}\end{aligned}\quad (\text{A.36})$$

(A.27)、(A.30)、(A.30) 式中加底線的項為擾動前的元素節點旋轉參數在當前的變形位置之固定元素座標 \bar{x}_i 的表示式 $\hat{\theta}_{ij}(t)$ 。本文中元素節點旋轉參數的擾動量 $\delta\theta_{ij}$ ($i=1, 2, 3$) ($j=1, 2$) 為擾動後元素節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t + \delta t)$ 與擾動前元素節點旋轉參數 $\hat{\theta}_{ij}(t)$ 的差，即

$$\delta\theta_{ij} = \hat{\theta}_{ij}(t + \delta t) - \hat{\theta}_{ij}(t) \quad (\text{A.37})$$

可表示如下

$$\begin{aligned}\delta\theta_{11} = & \frac{\delta\phi_{11}}{2} - \frac{\delta\phi_{12}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21}) \\ & - \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) + \frac{1}{4} \theta_{31} \delta\phi_{21} - \frac{1}{4} \theta_{32} \delta\phi_{22} - \frac{1}{4} \theta_{21} \delta\phi_{31} + \frac{1}{4} \theta_{22} \delta\phi_{32} \\ & - \frac{\Delta\bar{v}}{4\ell} (\delta\phi_{22} - \delta\phi_{21}) - \frac{\Delta\bar{w}}{4\ell} (\delta\phi_{32} - \delta\phi_{31}) - \frac{\delta\Delta\bar{v}}{4\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) - \frac{\delta\Delta\bar{w}}{4\ell} (\phi_{32} - \phi_{31})\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

$$\delta\theta_{12} = -\frac{\delta\phi_{11}}{2} + \frac{\delta\phi_{12}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} (\theta_{22} - \theta_{21})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\theta_{32} - \theta_{31}) - \frac{1}{4} \theta_{31} \delta \phi_{21} + \frac{1}{4} \theta_{32} \delta \phi_{22} + \frac{1}{4} \theta_{21} \delta \phi_{31} - \frac{1}{4} \theta_{22} \delta \phi_{32} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{v}}{\ell} (\delta \phi_{22} - \delta \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \bar{w}}{\ell} (\delta \phi_{32} - \delta \phi_{31}) + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} (\phi_{22} - \phi_{21}) + \frac{1}{4} \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} (\phi_{32} - \phi_{31})
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
\delta \theta_{21} &= \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{21} + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{31} - \theta_{31} \delta \phi_{11} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{31} \right) \\
& + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{31} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{31} \right) - \frac{\Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{31} \delta \phi_{11} - \frac{1}{2} \phi_{11} \delta \phi_{31}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
\delta \theta_{22} &= \frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{22} + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{32} - \theta_{32} \delta \phi_{12} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{32} \right) \\
& + \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \left(-\frac{\Delta \bar{v}}{\ell} + \phi_{32} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} - \delta \phi_{32} \right) - \frac{\Delta \bar{w} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} - \frac{1}{2} \phi_{32} \delta \phi_{12} - \frac{1}{2} \phi_{12} \delta \phi_{32}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
\delta \theta_{31} &= -\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} + \delta \phi_{31} - \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{21} + \theta_{21} \delta \phi_{11} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{21} \right) \\
& - \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta \bar{w}}{\ell} + \phi_{21} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{21} \right) + \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{21} \delta \phi_{11} + \frac{1}{2} \phi_{11} \delta \phi_{21}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

$$\begin{aligned}
\delta \theta_{32} &= -\frac{\delta \Delta \bar{v}}{\ell} + \delta \phi_{32} - \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \theta_{22} + \theta_{22} \delta \phi_{12} - \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{22} \right) \\
& - \frac{\delta \phi_{11} + \delta \phi_{12}}{2} \left(\frac{\Delta \bar{w}}{\ell} + \phi_{22} \right) - \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} \left(\frac{\delta \Delta \bar{w}}{\ell} + \delta \phi_{22} \right) + \frac{\Delta \bar{v} \delta \Delta \bar{u}}{\ell^2} + \frac{1}{2} \phi_{22} \delta \phi_{12} + \frac{1}{2} \phi_{12} \delta \phi_{22}
\end{aligned} \tag{A.43}$$

附錄 B 不同的元素節點參數向量之擾動量的關係及其對時間微分的關係

$\delta\mathbf{q}_\phi$ 、 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 為定義於(2.91)式之元素節點參數向量之擾動量，為了方便說明，在此將其重複表示如下

$$\delta\mathbf{q}_\phi = \{\delta\bar{\mathbf{u}}_1, \delta\phi_1, \delta\bar{\mathbf{u}}_2, \delta\phi_2, \delta\beta\} \quad (\text{B.1})$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\theta_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\theta_2^*, \delta\beta\} \quad (\text{B.2})$$

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_j = \{\delta\bar{u}_j, \delta\bar{v}_j, \delta\bar{w}_j\}, \quad \delta\beta = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta\phi_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}, \quad \delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}, \quad \delta\theta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$$

其中 $j=1, 2$ ， $\delta\bar{\mathbf{u}}_j$ 為節點 j 對固定元素座標的擾動位移向量， $\delta\beta$ 為擾動扭轉率向量， $\delta\beta_j$ 為元素扭轉率在節點 j 的擾動量， $\delta\phi_j$ 為節點 j 之斷面對固定元素座標的擾動旋轉向量， $\delta\mathbf{u}_j$ 為節點 j 對移動元素座標的擾動位移向量， $\delta\theta_{1j}$ 為元素扭轉角在節點 j 的擾動量， $\delta v'_j$ 及 $\delta w'_j$ 為定義於(2.16)式之 w' 及 v' 在元素節點 j 的擾動量。

由(2.15)式、(2.16)式、(2.44)-(2.49)式、(2.79)式可得 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 與 $\delta\mathbf{q}_\phi$ 有以下的關係

$$\delta\mathbf{q}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R)\delta\mathbf{q}_\phi \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^0 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^1 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^2 \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{a1} & \mathbf{T}_{c1} & -\mathbf{T}_{a1} & \mathbf{T}_e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{a2} & \mathbf{T}_{d1} & -\mathbf{T}_{a2} & \mathbf{T}_{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{2j}}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-\theta_{3j}}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta_{21} - \theta_{22}}{4\ell} & \frac{\theta_{31} - \theta_{32}}{4\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{cj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta_{3j}}{4} & -\frac{\theta_{2j}}{4} \\ -\frac{\theta_{3j}}{2} & \varepsilon_o & 0 \\ \frac{\theta_{2j}}{2} & 0 & \varepsilon_o \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\theta_{31}}{4} & \frac{\theta_{21}}{4} \\ \frac{\theta_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\theta_{32}}{4} & \frac{\theta_{22}}{4} \\ \frac{\theta_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 的展開式

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4l} & -\frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4l} & 0 & \frac{\theta_{31}}{4} & -\frac{\theta_{21}}{4} & 0 & \frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4l} & \frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4l} & 0 & -\frac{\theta_{32}}{4} & \frac{\theta_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{21}}{L} & 0 & 0 & -\frac{\theta_{31}}{2} & \epsilon_o & 0 & \frac{\theta_{21}}{L} & 0 & 0 & \frac{\theta_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\theta_{31}} & 0 & 0 & \frac{\theta_{21}}{2} & \epsilon_o & \frac{\theta_{31}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4l} & \frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4l} & 0 & -\frac{\theta_{31}}{4} & \frac{\theta_{21}}{4} & 0 & -\frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4l} & -\frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4l} & 0 & \frac{\theta_{32}}{4} & -\frac{\theta_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{22}}{L} & 0 & 0 & \frac{\theta_{32}}{2} & 0 & 0 & \frac{\theta_{22}}{L} & 0 & 0 & -\frac{\theta_{32}}{2} & \epsilon_o & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\theta_{32}} & 0 & 0 & -\frac{\theta_{22}}{2} & 0 & 0 & \frac{\theta_{32}}{L} & 0 & 0 & \frac{\theta_{22}}{2} & 0 & \epsilon_o & 0 & 0 \\ \frac{L}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

合併 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^0$ 及 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 的展開式

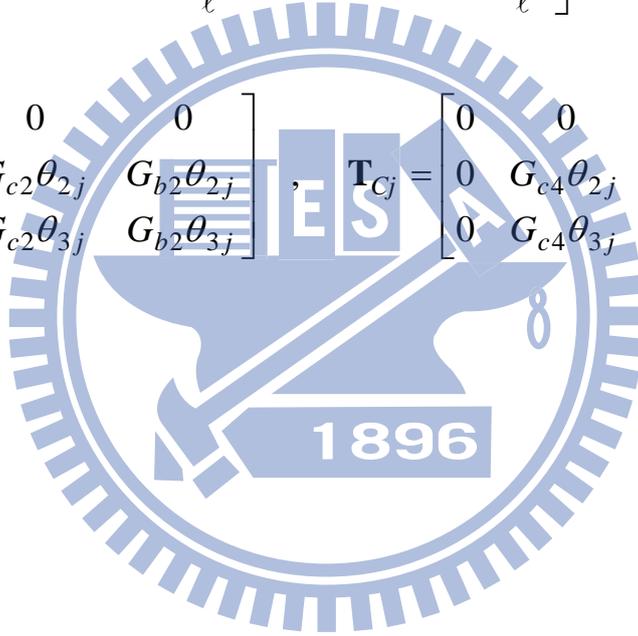
$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^0 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4\ell} & -\frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4\ell} & \frac{1}{2} & \frac{\theta_{31}}{4} & -\frac{\theta_{21}}{4} & 0 & \frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4\ell} & \frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{\theta_{32}}{4} & \frac{\theta_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{21}}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{\theta_{31}}{2} & 1+\varepsilon_o & 0 & \frac{\theta_{21}}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{\theta_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\theta_{31}} & \frac{1}{L} & 0 & \frac{\theta_{21}}{2} & 0 & 1+\varepsilon_o & \frac{\theta_{31}}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{\theta_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4\ell} & \frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{\theta_{31}}{4} & \frac{\theta_{21}}{4} & 0 & -\frac{\theta_{21}-\theta_{22}}{4\ell} & -\frac{\theta_{31}-\theta_{32}}{4\ell} & \frac{1}{2} & \frac{\theta_{32}}{4} & -\frac{\theta_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_{22}}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{\theta_{32}}{2} & 0 & 0 & \frac{\theta_{22}}{L} & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{\theta_{32}}{2} & 1+\varepsilon_o & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\theta_{32}} & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{\theta_{22}}{2} & 0 & 0 & \frac{\theta_{32}}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{\theta_{22}}{2} & 0 & 1+\varepsilon_o & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(B.9)

$$\mathbf{T}_{\theta\phi}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{A1} & \mathbf{T}_{B1} & -\mathbf{T}_{A1} & \mathbf{T}_{C1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{T}_{A2} & \mathbf{T}_{B2} & -\mathbf{T}_{A2} & \mathbf{T}_{C2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{T}_{Aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (G_{b2} + G_{b4}) \frac{\theta_{2j}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4}) \frac{\theta_{2j}}{\ell} \\ 0 & (G_{b2} + G_{b4}) \frac{\theta_{3j}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4}) \frac{\theta_{3j}}{\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{T}_{Bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{c2}\theta_{2j} & G_{b2}\theta_{2j} \\ 0 & G_{c2}\theta_{3j} & G_{b2}\theta_{3j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{Cj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{c4}\theta_{2j} & G_{b4}\theta_{2j} \\ 0 & G_{c4}\theta_{3j} & G_{b4}\theta_{3j} \end{bmatrix}$$



$\mathbf{T}_{\theta\phi}^2$ 的展開式

$\mathbf{T}_{\theta\phi}^2 =$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & (G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{21}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{21}}{\ell} & 0 & G_{c2}\theta_{21} & G_{b2}\theta_{21} & 0 & -(G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{21}}{\ell} & (G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{21}}{\ell} & 0 & G_{c4}\theta_{21} & G_{b4}\theta_{21} & 0 & 0 \\
 0 & (G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{31}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{31}}{\ell} & 0 & G_{c2}\theta_{31} & G_{b2}\theta_{31} & 0 & -(G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{31}}{\ell} & (G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{31}}{\ell} & 0 & G_{c4}\theta_{31} & G_{b4}\theta_{31} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & (G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{22}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{22}}{\ell} & 0 & G_{c2}\theta_{22} & G_{b2}\theta_{22} & 0 & -(G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{22}}{\ell} & (G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{22}}{\ell} & 0 & G_{c4}\theta_{22} & G_{b4}\theta_{22} & 0 & 0 \\
 0 & (G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{32}}{\ell} & -(G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{32}}{\ell} & 0 & G_{c2}\theta_{32} & G_{b2}\theta_{32} & 0 & -(G_{b2} + G_{b4})\frac{\theta_{32}}{\ell} & (G_{c2} + G_{c4})\frac{\theta_{32}}{\ell} & 0 & G_{c4}\theta_{32} & G_{b4}\theta_{32} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix}
 \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\
 \mathbf{T}_{R1}^a & \mathbf{T}_{R1}^b & -\mathbf{T}_{R1}^a & \mathbf{T}_R^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\
 \mathbf{T}_R^d & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{T}_R^d & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\
 \mathbf{T}_{R2}^a & \mathbf{T}_R^e & -\mathbf{T}_{R2}^a & \mathbf{T}_{R2}^b & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\
 \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2}
 \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

$$\mathbf{T}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\ell^2} & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2\ell} & 0 \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\ell^2} & 0 & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2\ell} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\phi_{21} - \phi_{22}}{4\ell} & \frac{\phi_{31} - \phi_{32}}{4\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} & \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} & 0 & \frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} - \frac{\phi_{1j}}{2} \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} & -\frac{\phi_{11} + \phi_{12}}{2} + \frac{\phi_{1j}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} & \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} + \frac{\phi_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} - \frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\ell} & -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_R^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{4\ell} & -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{4\ell} \\ -\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{2\ell} + \frac{\phi_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{2\ell} - \frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{T}_R 的展開式

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\phi_2}{4l} & \frac{\Delta\phi_3}{4l} & 0 & \frac{\Delta\bar{v}}{4l} & \frac{\Delta\bar{w}}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\phi_2}{4l} & -\frac{\Delta\phi_3}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{4l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{4l} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\bar{w}}{l^2} & \frac{\phi_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{2l} & 0 & \frac{\phi_{12}}{2} & -\frac{\Delta\bar{w}}{l^2} & \frac{\phi_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{2l} + \frac{\phi_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta\bar{v}}{l^2} & 0 & \frac{\phi_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{2l} & -\frac{\phi_{12}}{2} & 0 & \frac{\Delta\bar{v}}{l^2} & 0 & -\frac{\phi_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{2l} - \frac{\phi_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta\bar{v}}{l} & \frac{\Delta\bar{w}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta\phi_2}{4l} & -\frac{\Delta\phi_3}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{4l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{4l} & 0 & \frac{\Delta\phi_2}{4l} & \frac{\Delta\phi_3}{4l} & 0 & \frac{\Delta\bar{v}}{4l} & \frac{\Delta\bar{w}}{4l} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\bar{w}}{l^2} & \frac{\phi_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{2l} + \frac{\phi_{32}}{2} & 0 & 0 & \frac{\Delta\bar{w}}{l^2} & -\frac{\phi_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\bar{v}}{2l} & 0 & \frac{\phi_{11}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta\bar{v}}{l^2} & 0 & \frac{\phi_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{2l} - \frac{\phi_{22}}{2} & 0 & 0 & \frac{\Delta\bar{v}}{l^2} & 0 & -\frac{\phi_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\bar{w}}{2l} & -\frac{\phi_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

其中 $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$, $\Delta\bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$, $\phi_{1M} = \phi_{11} + \phi_{12}$, $\Delta\phi_2 = \phi_{22} - \phi_{21}$, $\Delta\phi_3 = \phi_{32} - \phi_{31}$

其中 ε_0 定義於(2.19)式， $\mathbf{T}_{\theta\phi}^0$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^1$ 、 $\mathbf{T}_{\theta\phi}^2$ 分別為 $\mathbf{T}_{\theta\phi}$ 之零次項、一次項及二次項， $\mathbf{0}_3$ 為 3×3 的零矩陣， $\mathbf{0}_{2 \times 3}$ 為 2×3 的零矩陣， $\mathbf{0}_{3 \times 2}$ 為 3×2 的零矩陣， \mathbf{I}_2 為 2×2 的單位矩陣。因為元素的扭轉率與元素座標系統無關，所以 $\delta\beta_j (j=1, 2)$ 在固定元素座標 \bar{x}_i 和移動元素座標 x_i 中有相同的值。(B.12)式中之 G_{b2} 、及 G_{b4} 及 G_{c2} 、 G_{c4} 分別為(2.80)式中向量 \mathbf{G}_b 和 \mathbf{G}_c 第2及第4個元素。

假設擾動時間 $\delta t \rightarrow 0$ ，將(B.4)式除以 δt ，可得

$$\dot{\mathbf{q}}_\theta = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{q}_\theta}{\delta t} = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\theta = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\theta}_1^*, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\theta}_2^*, \dot{\beta}\} \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\phi = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\phi}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\phi}_2, \dot{\beta}\}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}, \quad \dot{\theta}_j^* = \{\dot{\theta}_{1j}, -\dot{w}'_j, \dot{v}'_j\}, \quad \dot{\beta} = \{\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2\}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \{\dot{u}_j, \dot{v}_j, \dot{w}_j\}, \quad \dot{\phi}_j = \{\dot{\phi}_{1j}, \dot{\phi}_{2j}, \dot{\phi}_{3j}\}$$

其中 \mathbf{T}_R 的值為 $\mathbf{0}$ ，但其對時間的微分不為 $\mathbf{0}$ ，故仍需保留。

將(B.14)式對時間微分，可得

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \frac{d\dot{\mathbf{q}}_\theta}{dt} = (\mathbf{T}_{\theta\phi} + \mathbf{T}_R) \ddot{\mathbf{q}}_\phi + (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi} + \dot{\mathbf{T}}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{B.17})$$

因 $\mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ ，若僅保留到變形參數的一次項，則

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^0 + \mathbf{T}_{\theta\phi}^1) \ddot{\mathbf{q}}_\phi + (\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^0 + \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1 + \dot{\mathbf{T}}_R) \dot{\mathbf{q}}_\phi \quad (\text{B.18})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\theta}_1^*, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\theta}_2^*, \ddot{\beta}\} \quad (\text{B.19})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_\phi = \{\ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \ddot{\phi}_2, \ddot{\beta}\}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}, \quad \ddot{\theta}_j^* = \{\ddot{\theta}_{1j}, -\ddot{w}'_j, \ddot{v}'_j\}, \quad \ddot{\beta} = \{\ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2\}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_j = \{\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, \ddot{w}_j\}, \quad \ddot{\phi}_j = \{\ddot{\phi}_{1j}, \ddot{\phi}_{2j}, \ddot{\phi}_{3j}\}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^0 + \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{a1} & \dot{\mathbf{T}}_{c1} & -\dot{\mathbf{T}}_{a1} & \dot{\mathbf{T}}_e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{a2} & \dot{\mathbf{T}}_{d1} & -\dot{\mathbf{T}}_{a2} & \dot{\mathbf{T}}_{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{2j}}{L} & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2l} & \frac{\dot{l} - l\dot{\epsilon}_o}{l^2} \\ -\frac{\dot{\theta}_{3j}}{L} & -\frac{\dot{l} - l\dot{\epsilon}_o}{l^2} & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2l} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & \frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{cj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_{3j}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{2j}}{4} \\ -\frac{\dot{\theta}_{3j}}{2} & \dot{\epsilon}_o & \frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} \\ \frac{\dot{\theta}_{2j}}{2} & -\frac{\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{12}}{2} & \dot{\epsilon}_o \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\theta}_{31}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{21}}{4} \\ \frac{\dot{\theta}_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\theta}_{32}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{22}}{4} \\ \frac{\dot{\theta}_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^0 + \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1$ 的展開式

$$\dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^0 + \dot{\mathbf{T}}_{\theta\phi}^1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & -\frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} & 0 & \frac{\dot{\theta}_{31}}{4} & -\frac{\dot{\theta}_{21}}{4} & 0 & \frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & \frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{32}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{21}}{L} & 0 & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{31}}{2} & \dot{\varepsilon}_o & 0 & \frac{\dot{\theta}_{21}}{L} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\dot{\theta}_{31}} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{21}}{2} & 0 & \dot{\varepsilon}_o & \frac{\dot{\theta}_{31}}{L} & 0 & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & \frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{31}}{4} & \frac{\dot{\theta}_{21}}{4} & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{22}}{4l} & -\frac{\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{32}}{4l} & 0 & \frac{\dot{\theta}_{32}}{4} & -\frac{\dot{\theta}_{22}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_{22}}{L} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{32}}{2} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{22}}{L} & 0 & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{32}}{2} & \dot{\varepsilon}_o & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{-\dot{\theta}_{32}} & 0 & 0 & -\frac{\dot{\theta}_{22}}{2} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{32}}{L} & 0 & 0 & \frac{\dot{\theta}_{22}}{2} & 0 & \dot{\varepsilon}_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(B.21)

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{R1}^a & \dot{\mathbf{T}}_{R2}^b & -\dot{\mathbf{T}}_{R1}^a & \dot{\mathbf{T}}_R^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_R^d & \mathbf{0}_3 & -\dot{\mathbf{T}}_R^d & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \dot{\mathbf{T}}_{R2}^a & \dot{\mathbf{T}}_R^e & -\dot{\mathbf{T}}_{R2}^a & \dot{\mathbf{T}}_{R1}^b & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{\ell^2} & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2\ell} & 0 \\ -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{\ell^2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2\ell} \end{bmatrix} + (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\phi}_{21} - \dot{\phi}_{22}}{4\ell} & \frac{\dot{\phi}_{31} - \dot{\phi}_{32}}{4\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{4\ell} & \frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{4\ell} \\ -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{2\ell} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12} + \dot{\phi}_{1j}}{2} \\ -\frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{2\ell} & -\frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12} + \dot{\phi}_{1j}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{4\ell} & \frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{4\ell} \\ -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{2\ell} + \frac{\dot{\phi}_{31}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{2\ell} - \frac{\dot{\phi}_{21}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{\ell} & -\frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_R^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{4\ell} & -\frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{4\ell} \\ -\frac{\dot{\bar{v}}_2 - \dot{\bar{v}}_1}{2\ell} + \frac{\dot{\phi}_{32}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\bar{w}}_2 - \dot{\bar{w}}_1}{2\ell} - \frac{\dot{\phi}_{22}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

\mathbf{T}_R 的展開式

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\dot{\phi}_2}{4l} & \frac{\Delta\dot{\phi}_3}{4l} & 0 & \frac{\Delta\dot{v}}{4l} & \frac{\Delta\dot{w}}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{\phi}_2}{4l} & -\frac{\Delta\dot{\phi}_3}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{4l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{4l} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\dot{w}}{l^2} & \frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{2l} & 0 & \frac{\phi_{12}}{2} & -\frac{\Delta\dot{w}}{l^2} & -\frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{2l} + \frac{\dot{\phi}_{31}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta\dot{v}}{l^2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{2l} & -\frac{\dot{\phi}_{12}}{2} & 0 & \frac{\Delta\dot{v}}{l^2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{2l} - \frac{\dot{\phi}_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta\dot{v}}{l} & \frac{\Delta\dot{w}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta\dot{\phi}_2}{4l} & -\frac{\Delta\dot{\phi}_3}{4l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{4l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{4l} & 0 & \frac{\Delta\dot{\phi}_2}{4l} & \frac{\Delta\dot{\phi}_3}{4l} & 0 & \frac{\Delta\dot{v}}{4l} & \frac{\Delta\dot{w}}{4l} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\dot{w}}{l^2} & \frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{2l} + \frac{\dot{\phi}_{32}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\Delta\dot{w}}{l^2} & -\frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & 0 & -\frac{\Delta\dot{v}}{2l} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{11}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta\dot{v}}{l^2} & 0 & \frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{2l} - \frac{\dot{\phi}_{22}}{2} & 0 & 0 & \frac{\Delta\dot{v}}{l^2} & 0 & -\frac{\dot{\phi}_{1M}}{2l} & -\frac{\Delta\dot{w}}{2l} & -\frac{\dot{\phi}_{11}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(B.23)

其中 $\Delta\dot{v} = \dot{v}_2 - \dot{v}_1$, $\Delta\dot{w} = \dot{w}_2 - \dot{w}_1$, $\dot{\phi}_{1M} = \dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}$, $\Delta\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{21}$, $\Delta\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31}$

附錄 C 元素節點力向量 \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 的關係

為了方便說明，在此將(2.92)式中節點變形力向量 \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係重複

如下

$$\mathbf{f}_\phi^D = (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t + \mathbf{T}_R^t) \mathbf{f}_\theta^D \quad (\text{C.1})$$

其中

$$\mathbf{f}_\phi^D = \{\mathbf{f}_1^{\phi D}, \mathbf{m}_1^{\phi D}, \mathbf{f}_2^{\phi D}, \mathbf{m}_2^{\phi D}, \mathbf{B}^D\} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{f}_\theta^D = \{\mathbf{f}_1^{\theta D}, \mathbf{m}_1^{\theta D}, \mathbf{f}_2^{\theta D}, \mathbf{m}_2^{\theta D}, \mathbf{B}^D\} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{f}_j^{\phi D} = \{f_{1j}^{\phi D}, f_{2j}^{\phi D}, f_{3j}^{\phi D}\}, \quad \mathbf{f}_j^{\theta D} = \{f_{1j}^{\theta D}, f_{2j}^{\theta D}, f_{3j}^{\theta D}\} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{m}_j^{\phi D} = \{m_{1j}^{\phi D}, m_{2j}^{\phi D}, m_{3j}^{\phi D}\}, \quad \mathbf{m}_j^{\theta D} = \{m_{1j}^{\theta D}, m_{2j}^{\theta D}, m_{3j}^{\theta D}\} \quad (j=1, 2),$$

$$\mathbf{B}^D = \{B_1, B_2\}$$

將式(B.5)及(B.13)代入式(C.1)， \mathbf{f}_ϕ^D 與 \mathbf{f}_θ^D 之關係的顯式可表示如下

$$f_{12}^{\phi D} = -f_{11}^{\phi D} = f_{12}^{\theta D} + f_{12}^{\theta\phi} \quad (\text{C.5})$$

$$f_{12}^{\theta\phi} = \frac{\theta_{21}}{L} m_{21}^{\theta D} + \frac{\theta_{22}}{L} m_{22}^{\theta D} + \frac{\theta_{31}}{L} m_{31}^{\theta D} + \frac{\theta_{32}}{L} m_{32}^{\theta D} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} f_{21}^{\phi D} = -f_{22}^{\phi D} &= \frac{1}{4\ell} (\theta_{22} - \theta_{21})(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + \frac{1}{\ell} (1 + \varepsilon_o) m_{31}^{\theta D} + \frac{1}{\ell} (1 + \varepsilon_o) m_{32}^{\theta D} \\ &+ \frac{f_{12}^{\theta\phi} L}{\ell} (G_{b2} + G_{b4}) = \frac{1}{\ell} (m_{31}^{\phi D} + m_{32}^{\phi D}) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} f_{31}^{\phi D} = -f_{32}^{\phi D} &= \frac{1}{4\ell} (\theta_{32} - \theta_{31})(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) - \frac{1}{\ell} (1 + \varepsilon_o) m_{21}^{\theta D} - \frac{1}{\ell} (1 + \varepsilon_o) m_{22}^{\theta D} \\ &- \frac{f_{12}^{\theta\phi} L}{\ell} (G_{c2} + G_{c4}) = -\frac{1}{\ell} (m_{21}^{\phi D} + m_{22}^{\phi D}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$m_{11}^{\phi D} = -m_{12}^{\phi D} = \frac{1}{2}(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + \frac{1}{2}\theta_{32}m_{22}^{\theta D} - \frac{1}{2}\theta_{31}m_{21}^{\theta D} - \frac{1}{2}\theta_{22}m_{32}^{\theta D} + \frac{1}{2}\theta_{21}m_{31}^{\theta D} \quad (\text{C.9})$$

$$m_{21}^{\phi D} = (1 + \varepsilon_o)m_{21}^{\theta D} + \frac{\theta_{31}}{4}(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{c2}L \quad (\text{C.10})$$

$$m_{31}^{\phi D} = (1 + \varepsilon_o)m_{31}^{\theta D} - \frac{\theta_{21}}{4}(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{b2}L \quad (\text{C.11})$$

$$m_{22}^{\phi D} = (1 + \varepsilon_o)m_{22}^{\theta D} - \frac{\theta_{32}}{4}(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{c4}L \quad (\text{C.12})$$

$$m_{32}^{\phi D} = (1 + \varepsilon_o)m_{32}^{\theta D} + \frac{\theta_{22}}{4}(m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}) + f_{12}^{\theta\phi}G_{b4}L \quad (\text{C.13})$$

由(C.5)–(C.13)式可以發現節點變形力 \mathbf{f}_ϕ^D 能滿足平衡方程式且側向力 $f_{2j}^{\phi D}, f_{3j}^{\phi D} (j=1, 2)$ 可視為是彎矩 $m_{2j}^{\phi D}, m_{3j}^{\phi D}$ 的反作用力與 $f_{2j}^{\theta D}, f_{3j}^{\theta D} (j=1, 2)$ 無關，但為了方便表示，本文中推導節點變形力 \mathbf{f}_ϕ^D 時仍保留 $f_{2j}^{\theta D}, f_{3j}^{\theta D} (j=1, 2)$ 。

附錄 D 位置向量的擾動量及對時間的微分

本附錄先採用文獻[5]的推導方式，推導在固定元素座標之位置向量 $\bar{\mathbf{r}}$ 的擾動量 $\delta\bar{\mathbf{r}}$ 及其對時間的微分 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 、 $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ ，然後再將 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 及 $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ 表示成定義在固定座標之節點參數對時間微分的函數

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則則由(2.35)、(2.36)式，元素內任意點Q之位置向量 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 在固定元素座標的擾動量 $\delta\bar{\mathbf{r}}$ 可表示成

$$\delta\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{r}}(t) = ({}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} - \mathbf{I})\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} + \delta\bar{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{D.1})$$

$${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & -\frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} \\ \frac{\delta\Delta\bar{v}}{\ell} & 1 & -\frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} \\ \frac{\delta\Delta\bar{w}}{\ell} & \frac{\delta\phi_{11} + \delta\phi_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

其中 $\bar{\mathbf{r}}(t + \delta t)$ 為Q點受擾動後在固定元素座標 \bar{x}_i 上的位置向量， $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 已在(2.36)式定義， ${}^0\mathbf{A}_{\bar{x}x}$ 在(2.39)式已經定義， $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ ， $\Delta\bar{w} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$ ， $\delta\bar{\mathbf{u}}_1 = \{\delta\bar{u}_1, \delta\bar{v}_1, \delta\bar{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的擾動位移向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量， $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 已在(2.68)式定義， $\delta\mathbf{r}$ 為位置向量 \mathbf{r} 的變分。

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則由(2.68)式中 \mathbf{r} 的二次展開式再配合(2.14)–(2.16)式， \mathbf{r} 及 $\delta\mathbf{r}$ 在 $x_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 r_i 及 δr_i 可表示成

$$r_1 = (1 + \varepsilon_o)x + \omega\theta_{1,x} \quad (\text{D.3})$$

$$r_2 = y$$

$$r_3 = z$$

$$\varepsilon_o = \frac{\ell - L}{L} \quad (\text{D.4})$$

$$\delta r_1 = \delta x_p - y\delta\theta_3 + z\delta\theta_2 + \delta\theta_{1,x}\omega \quad (\text{D.5})$$

$$\delta r_2 = \delta v - z\delta\theta_1 + \omega\theta_{1,x}\delta\theta_3$$

$$\delta r_3 = \delta w + y\delta\theta_1 - \omega\theta_{1,x}\delta\theta_2$$

$$\delta x_p = x\delta\varepsilon_o \quad (D.6)$$

$$\delta\varepsilon_o = \frac{\delta\Delta\bar{u}}{L} \quad (D.7)$$

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \circ$$

$$\delta\theta_2 = \delta\varepsilon_o w_{,x} - (1 - \varepsilon_o)\delta w_{,x} \quad (D.8)$$

$$\delta\theta_3 = -\delta\varepsilon_o v_{,x} + (1 - \varepsilon_o)\delta v_{,x} \quad (D.9)$$

由(B.6)、(2.26)–(2.28)式、(D.8)式、(D.9)式，保留至變形參數的零次項、及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $l \approx L$ 可得

$$\delta v = \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b = \mathbf{N}_b^t \mathbf{T}_b^0 \delta \mathbf{u}_b^\phi \quad (D.10)$$

$$\delta w = \mathbf{N}_c^t \delta \mathbf{u}_c = \mathbf{N}_c^t \mathbf{T}_c^0 \delta \mathbf{u}_c^\phi$$

$$\delta\theta_1 = \mathbf{N}_d^t \delta \mathbf{u}_d = \mathbf{N}_d^t \mathbf{T}_d^0 \delta \mathbf{u}_d^\phi$$

$$\delta\theta_{1,x} = \mathbf{N}_d^{t'} \delta \mathbf{u}_d = \mathbf{N}_d^{t'} \mathbf{T}_d^0 \delta \mathbf{u}_d^\phi = \mathbf{N}_d^{t'} \delta \mathbf{u}_d^\phi$$

$$\delta\theta_2 = -\delta w_{,x} = -\mathbf{N}_c^{t'} \delta \mathbf{u}_c = -\mathbf{N}_c^{t'} \mathbf{T}_c^0 \delta \mathbf{u}_c^\phi$$

$$\delta\theta_3 = \delta v_{,x} = \mathbf{N}_b^{t'} \delta \mathbf{u}_b = \mathbf{N}_b^{t'} \mathbf{T}_b^0 \delta \mathbf{u}_b^\phi$$

$$\mathbf{T}_b^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_c^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_d^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D.11)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v_1', \delta v_2, \delta v_2'\}$ ， $\delta \mathbf{u}_c = \{\delta w_1, -\delta w_1', \delta w_2, -\delta w_2'\}$ ，

$$\delta \mathbf{u}_d = \{\delta\theta_{11}, \delta\beta_1, \delta\theta_{12}, \delta\beta_2\}, \quad \delta \mathbf{u}_b^\phi = \{\delta \bar{v}_1, \delta\phi_{31}, \delta \bar{v}_2, \delta\phi_{32}\}$$

$\delta \mathbf{u}_c^\phi = \{\delta \bar{w}_1, \delta\phi_{21}, \delta \bar{w}_2, \delta\phi_{22}\}$ ， $\delta \mathbf{u}_d^\phi = \{\delta\phi_{11}, \delta\beta_1, \delta\phi_{12}, \delta\beta_2\}$ 已分別在(2.93)式及(2.108)式中定義， \mathbf{N}_i ($i=b, c, d$) 已在(2.26)–(2.28)式中定義。

將(D.2)-(D.10)式代入(D.1)式、保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項、使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $l \approx L$ ， $\delta \bar{\mathbf{r}}$ 在固定元素

座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 $\delta\bar{r}_i$ 可表示成

$$\begin{aligned}\delta\bar{r}_1 &= \mathbf{N}_a^t \delta\mathbf{u}_a^\phi - y\mathbf{N}_b^t \delta\mathbf{u}_b^\phi - z\mathbf{N}_c^t \delta\mathbf{u}_c^\phi + \omega\mathbf{N}_d^t \delta\mathbf{u}_d^\phi \\ \delta\bar{r}_2 &= \mathbf{N}_b^t \delta\mathbf{u}_b^\phi - z\mathbf{N}_d^t \delta\mathbf{u}_d^\phi + \omega\theta_{1,x}\mathbf{N}_b^t \delta\mathbf{u}_b^\phi \\ \delta\bar{r}_3 &= \mathbf{N}_c^t \delta\mathbf{u}_c^\phi + y\mathbf{N}_d^t \delta\mathbf{u}_d^\phi + \omega\theta_{1,x}\mathbf{N}_c^t \delta\mathbf{u}_c^\phi\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

$$\delta\mathbf{u}_a^\phi = \{\delta\bar{u}_1, \delta\bar{u}_2\}, \quad \mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (\text{D.13})$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，則(2.68)式中元素內任意點Q之位置向量對固定元素座標的絕對速度 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 可表示成

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1 \quad (\text{D.14})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$\Omega_x = \frac{\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12}}{2}, \quad \Omega_y = -\frac{\dot{w}_2 - \dot{w}_1}{l}, \quad \Omega_z = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{l} \quad (\text{D.16})$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 為移動元素座標的角速度矩陣，已在(2.52)式中定義， $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_1 = \{\dot{\bar{u}}_{11}, \dot{\bar{u}}_{21}, \dot{\bar{u}}_{31}\} = \{\dot{\bar{u}}_1, \dot{\bar{v}}_1, \dot{\bar{w}}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的絕對速度向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量， \mathbf{r} 已在(2.68)式定義， $\dot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的速度。

$\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 為(2.68)式對時間的微分，由(2.14)–(2.16)、(2.68)式， $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ 在 $x_i (i=1, 2, 3)$ 軸方向之分量 $\dot{\bar{r}}_i$ 可表示成

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}}_1 &= \dot{x}_p + y(\theta_2\dot{\theta}_1 + \theta_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + z(\theta_3\dot{\theta}_1 + \theta_1\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + \omega\dot{\theta}_{1,x} \\ &\quad - \omega\theta_{1,x}\theta_2\dot{\theta}_2 - \omega\theta_{1,x}\theta_3\dot{\theta}_3 \\ \dot{\bar{r}}_2 &= \dot{v} - y(\theta_1\dot{\theta}_1 + \theta_3\dot{\theta}_3) + z(-\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3) + \omega\dot{\theta}_3\theta_{1,x} + \omega\theta_3\dot{\theta}_{1,x}\end{aligned}\quad (\text{D.17})$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} - z(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2) + y(\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) - \omega\dot{\theta}_2\theta_{1,x} - \omega\dot{\theta}_2\dot{\theta}_{1,x}$$

$$\dot{x}_p = x\dot{\varepsilon}_o - \int_0^x (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx \quad (D.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \frac{\dot{\ell}}{L} + \frac{1}{L} \int_0^L (v_{,x}\dot{v}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x})dx \quad (D.19)$$

$$\dot{\ell} = \Delta\dot{\bar{u}} + \Omega_z\Delta\bar{v} - \Omega_y\Delta\bar{w} \quad (D.20)$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\varepsilon}_o w_{,x} - (1 - \varepsilon_o)\dot{w}_{,x} \quad (D.21)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\dot{\varepsilon}_o v_{,x} + (1 - \varepsilon_o)\dot{v}_{,x} \quad (D.22)$$

若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項，及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $\ell \approx L$ ，則 $\dot{\mathbf{r}}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \dot{r}_i 可表示成

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p - y\dot{\theta}_3 + z\dot{\theta}_2 + \omega\dot{\theta}_{1,x} \quad (D.23)$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} - z\dot{\theta}_1 + \omega\dot{\theta}_3\theta_{1,x}$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} + y\dot{\theta}_1 - \omega\dot{\theta}_2\theta_{1,x}$$

$$\dot{x}_p = x\dot{\varepsilon}_o \quad (D.24)$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \frac{\Delta\dot{\bar{u}}}{L} \quad (D.25)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{w}_{,x}, \quad \dot{\theta}_3 = \dot{v}_{,x} \quad (D.26)$$

將(D.25)式代入(D.24)式，保留至變形參數的零次項及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ ， \dot{x}_p 可表示成

$$\dot{x}_p = \frac{x\Delta\dot{\bar{u}}}{L} \quad (D.27)$$

將(D.3)、(D.15)、(D.23)式代入(D.14)式，保留至變形參數的零次項及使用近似式 $1 - \varepsilon_o \approx 1$ 、 $\ell \approx L$ ， $\dot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \dot{r}_i 可表示成

$$\dot{r}_1 = \dot{\bar{u}}_1 + \dot{x}_p - y\dot{\theta}_3 + z\dot{\theta}_2 + \omega\dot{\theta}_{1,x} - y\Omega_z + z\Omega_y \quad (D.28)$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}}_2 &= \dot{\bar{v}}_1 + \dot{v} - z\dot{\theta}_1 - z\Omega_x + x\Omega_z + \omega\theta_{1,x}(\Omega_z + \dot{\theta}_3) \\ \dot{\bar{r}}_3 &= \dot{\bar{w}}_1 + \dot{w} + y\dot{\theta}_1 + y\Omega_x - x\Omega_y - \omega\theta_{1,x}(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\end{aligned}$$

由(2.60)式可知元素內任意點Q之位置向量對固定元素座標的絕對加速度 $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ 可表示成

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega})\mathbf{r} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.30})$$

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\ddot{\phi}_{11} + \ddot{\phi}_{12}}{2} + \frac{1}{2}\Omega_z(\dot{\phi}_{21} + \dot{\phi}_{22}) - \frac{1}{2}\Omega_y(\dot{\phi}_{31} + \dot{\phi}_{32}) \\ \alpha_y &= -\frac{\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1}{l} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{l}\Omega_y + \Omega_z\Omega_x \\ \alpha_z &= \frac{\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1}{l} - 2\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{l}\Omega_z - \Omega_y\Omega_x\end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 為移動元素座標對固定元素座標的角加速度矩陣，已在(2.61)式定義， $\mathbf{\Omega}$ 為移動元素座標的角速度矩陣(見(D.15)或(2.52)式)， $\ddot{\mathbf{u}}_1 = \{\ddot{u}_{11}, \ddot{u}_{21}, \ddot{u}_{31}\} = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1\}$ 為節點1對固定元素座標的絕對加速度向量， \mathbf{r} 為Q點在移動元素座標 x_i 上的位置向量(見(D.3)或(2.68)式)， $\dot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的速度(見(D.17))， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為Q點對移動元素座標的加速度。

$\ddot{\mathbf{r}}$ 可以由(D.17)式之 $\dot{\mathbf{r}}$ 對時間微分求得，若僅保留至變形參數的零次項及不隨元素減小時會趨近於零的一次項， $\ddot{\mathbf{r}}$ 在 x_i ($i=1, 2, 3$)軸方向之分量 \ddot{r}_i 可表示成

$$\ddot{r}_1 = \ddot{x}_p + y(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3) + z(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_2) + \omega\ddot{\theta}_{1,x} - \omega\theta_{1,x}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (\text{D.32})$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{v} - y(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2) + z(-\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) + 2\omega\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_3 + \omega\ddot{\theta}_3\theta_{1,x}$$

$$\ddot{r}_3 = \ddot{w} - z(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + y(\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) - 2\omega\dot{\theta}_{1,x}\dot{\theta}_2 - \omega\ddot{\theta}_2\theta_{1,x}$$

$$\ddot{x}_p = \frac{x\ddot{l}}{L} + \frac{x}{L}\int_0^L(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)dx - \int_0^x(\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2)dx \quad (\text{D.33})$$

$$\ddot{l} = \Delta \ddot{u} + \ell(\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \quad (D.34)$$

$$\ddot{\theta}_2 = 2\dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x} - \ddot{w}_{,x}, \quad \ddot{\theta}_3 = -2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x} + \ddot{v}_{,x} \quad (D.35)$$

將(D.36)式代入(D.35)式， \ddot{x}_p 可表示成

$$\ddot{x}_p = \frac{x(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)}{L} + \frac{x}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx + \frac{\ell x}{L} (\Omega_z^2 + \Omega_y^2) \quad (D.36)$$

將(D.3)、(D.15)、(D.23)、(D.30)及(D.31)式代入(D.29)式，絕對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 在固定元素座標 x_i ($i=1, 2, 3$) 軸方向之分量 \ddot{r}_i 可表示如下

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \ddot{u}_1 + \ddot{x}_p - (1 + \varepsilon_o)x(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + 2(\Omega_y \dot{w} - \Omega_z \dot{v}) + y[\Omega_x \Omega_y - \alpha_z \\ &\quad + 2(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3] + z[\Omega_x \Omega_z + \alpha_y + 2(\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + \omega \ddot{\theta}_{1,x} \\ &\quad - \omega \theta_{1,x} [(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v}_1 + \ddot{v} + x\Omega_x \Omega_y - \Omega_x \dot{w} + x\alpha_z + 2\Omega_z \dot{x}_p - y[(\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2 + (\Omega_z + \dot{\theta}_3)^2] \\ &\quad + z[\Omega_y \Omega_z - \alpha_x + (2\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1] + 2\omega(\Omega_z + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_{1,x} \\ &\quad + \omega \theta_{1,x} (\Omega_x \Omega_y - \alpha_z + 2\Omega_x \dot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3) \\ \ddot{r}_3 &= \ddot{w}_1 + \ddot{w} + x\Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - x\alpha_y - 2\Omega_y \dot{x}_p - z[(\Omega_y + \dot{\theta}_2)^2 + (\Omega_x + \dot{\theta}_1)^2] \\ &\quad + y[\Omega_y \Omega_z + \alpha_x + (2\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1] - 2\omega(\Omega_y + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_{1,x} \\ &\quad + \omega \theta_{1,x} (\Omega_x \Omega_z - \alpha_y + 2\Omega_x \dot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (D.37)$$

將(D.16)及(D.31)式代入(2.58)、(2.64)式，可得到移動元素座標與固定元素座標節點參數之關係

$$\dot{\theta}_{11} = -\Omega_x + \dot{\phi}_{11} \quad (D.38)$$

$$\dot{\theta}_{12} = -\Omega_x + \dot{\phi}_{12} \quad (D.39)$$

$$\dot{\theta}_{21} = -\Omega_y + \dot{\phi}_{21} \quad (D.40)$$

$$\dot{\theta}_{22} = -\Omega_y + \dot{\phi}_{22} \quad (D.41)$$

$$\dot{\theta}_{31} = -\Omega_z + \dot{\phi}_{31} \quad (D.42)$$

$$\dot{\theta}_{32} = -\Omega_z + \dot{\phi}_{32} \quad (D.43)$$

$$\ddot{\theta}_{11} = -\alpha_x + \ddot{\phi}_{11} + \Omega_z \dot{\phi}_{21} - \Omega_y \dot{\phi}_{31} \quad (\text{D.44})$$

$$\ddot{\theta}_{12} = -\alpha_x + \ddot{\phi}_{12} + \Omega_z \dot{\phi}_{22} - \Omega_y \dot{\phi}_{32} \quad (\text{D.45})$$

$$\ddot{\theta}_{21} = \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} + \ddot{\phi}_{21} + \Omega_x \dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{31} \dot{\phi}_{11} + (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12})(-\Omega_z + \dot{\phi}_{31}) + 2\dot{\varepsilon}_o \Omega_y - \dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11} \quad (\text{D.46})$$

$$\ddot{\theta}_{22} = \frac{\Delta \ddot{w}}{\ell} + \ddot{\phi}_{22} + \Omega_x \dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{32} \dot{\phi}_{12} + (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12})(-\Omega_z + \dot{\phi}_{32}) + 2\dot{\varepsilon}_o \Omega_y - \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} \quad (\text{D.47})$$

$$\ddot{\theta}_{31} = -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + \ddot{\phi}_{31} - \Omega_x \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{21} \dot{\phi}_{11} - (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12})(-\Omega_y + \dot{\phi}_{21}) + 2\dot{\varepsilon}_o \Omega_z + \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11} \quad (\text{D.48})$$

$$\ddot{\theta}_{32} = -\frac{\Delta \ddot{v}}{\ell} + \ddot{\phi}_{32} - \Omega_x \dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{22} \dot{\phi}_{12} - (\dot{\phi}_{11} + \dot{\phi}_{12})(-\Omega_y + \dot{\phi}_{22}) + 2\dot{\varepsilon}_o \Omega_z + \dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{12} \quad (\text{D.49})$$

將(D.40)–(D.43)及(2.59)式代入(2.26)、(2.27)式，可得到以下的關係

$$-\dot{w}_{,x} + \Omega_y = -\dot{w}_{,x} \quad (\text{D.50})$$

$$\dot{v}_{,x} + \Omega_z = \dot{v}_{,x} \quad (\text{D.51})$$

(D.37)式為文獻[5]推導的結果，其中包含了定義在固定元素座標之節點參數的微分，及定義在移動元素座標之變形參數的微分，因本研究擬比較文獻[5]之一致性共旋轉法與文獻[6]之共旋轉全拉格蘭日法之節點慣性力的差異，所以將(D.38)–(D.51)式代入(D.37)式，並忽略變形參數與其對時間微分的耦合項，則可將加速度中所有的節點參數的微分表示成定義在固定元素座標的節點參數之微分，並將(D.37)式之加速度改寫成

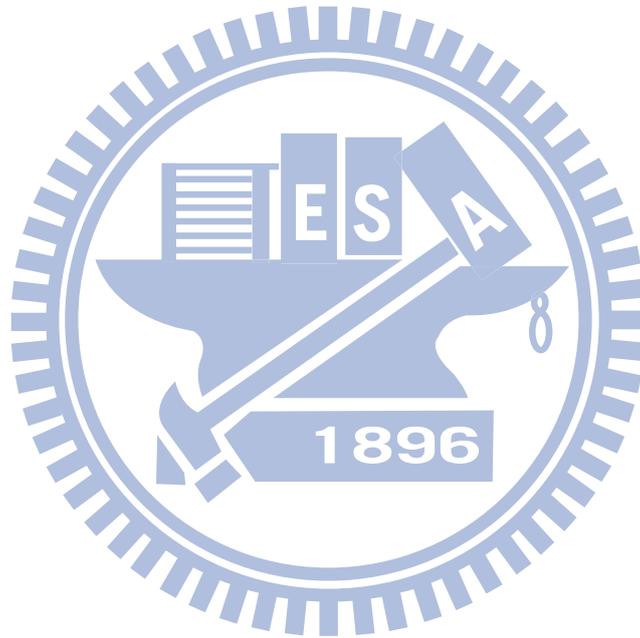
$$\ddot{r}_1 = \ddot{u} + \frac{x}{L} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \quad (\text{D.37})$$

$$\begin{aligned}
& + y[-2\dot{\bar{w}}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_1 - \ddot{v}_{,x} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{v}_{,x} - N'_2(2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{31} + \frac{3}{2}\dot{\phi}_{21}\dot{\phi}_{11} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_y - \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{21}}{2}) \\
& - N'_4(\frac{2\Delta\dot{u}}{L}\dot{\phi}_{32} + \frac{3}{2}\dot{\phi}_{22}\dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_y - \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{22}}{2}) \\
& + z[2\dot{v}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_1 - \ddot{w}_{,x} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{w}_{,x} + N'_2(2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{21} - \frac{3}{2}\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_z + \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{31}}{2}) \\
& + N'_4(2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{22} - \frac{3}{2}\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_z + \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{32}}{2}) \\
& - \omega\theta_{1,x}[\dot{w}_{,x}^2 + \dot{\bar{\theta}}_1^2] \\
\ddot{r}_2 = & \ddot{v} + N_2(\frac{3}{2}\dot{\phi}_{21}\dot{\phi}_{11} - \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{21}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_y) \\
& + N_4(\frac{3}{2}\dot{\phi}_{22}\dot{\phi}_{12} - \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{22}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_y) - y(\dot{\bar{\theta}}_1^2 + \dot{v}_{,x}^2) \\
& + z[-\dot{v}_{,x}\dot{\bar{w}}_{,x} - \ddot{\bar{\theta}}_1 - \Omega_z(\dot{\bar{w}}_{,x} + N_1\dot{\phi}_{21} + N_3\dot{\phi}_{22}) \\
& - \Omega_y(\dot{v}_{,x} - N_1\dot{\phi}_{31} - N_3\dot{\phi}_{32})] + 2\omega\dot{v}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_{1,x} \\
\ddot{r}_3 = & \ddot{w} - N_2(-\frac{3}{2}\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2}\Omega_z) \\
& - N_4(-\frac{3}{2}\dot{\phi}_{12}\dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11}\dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o\dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2}\Omega_z) - z(\dot{w}_{,x}^2 + \dot{\bar{\theta}}_1^2) \\
& + y[-\dot{w}_{,x}\dot{v}_{,x} + \ddot{\bar{\theta}}_1 + \Omega_z(\dot{\bar{w}}_{,x} + N_1\dot{\phi}_{21} + N_3\dot{\phi}_{22}) \\
& + \Omega_y(\dot{v}_{,x} - N_1\dot{\phi}_{31} - N_3\dot{\phi}_{32})] - 2\omega\dot{w}_{,x}\dot{\bar{\theta}}_{1,x} \\
\ddot{u} = & \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi \tag{D.38} \\
\dot{v}_{,x} = & \mathbf{N}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b^\phi, \quad \ddot{v} = \mathbf{N}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\phi \tag{D.39} \\
\dot{w}_{,x} = & \mathbf{N}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c^\phi, \quad \ddot{w} = \mathbf{N}_c^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\phi \tag{D.40} \\
\dot{\bar{\theta}}_1 = & \mathbf{N}_d^t \dot{\mathbf{u}}_d^\phi, \quad \ddot{\bar{\theta}}_1 = \mathbf{N}_d^t \ddot{\mathbf{u}}_d^\phi \tag{D.41} \\
\dot{\mathbf{u}}_a^\phi = & \{\dot{u}_1, \dot{u}_2\}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2\} \tag{D.42} \\
\dot{\mathbf{u}}_b^\phi = & \{\dot{v}_1, \dot{\phi}_{31}, \dot{v}_2, \dot{\phi}_{32}\}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_b^\phi = \{\ddot{v}_1, \ddot{\phi}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\phi}_{32}\} \tag{D.43}
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_c^\phi = \{\dot{\bar{w}}_1, \dot{\phi}_{21}, \dot{\bar{w}}_2, \dot{\phi}_{22}\}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_c^\phi = \{\ddot{\bar{w}}_1, \ddot{\phi}_{21}, \ddot{\bar{w}}_2, \ddot{\phi}_{22}\} \quad (\text{D.44})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_d^\phi = \{\dot{\phi}_{11}, \dot{\beta}_1, \dot{\phi}_{21}, \dot{\beta}_2\}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_d^\phi = \{\ddot{\phi}_{11}, \ddot{\beta}_1, \ddot{\phi}_{21}, \ddot{\beta}_2\} \quad (\text{D.45})$$

其中 \mathbf{N}_a 定義於(D.13)式， \mathbf{N}_i ($i = b - d$) 定義於(2.26)–(2.29)， ε_o 定義於(D.25)式， \dot{u}_j 、 \dot{v}_j 、 \dot{w}_j 、 $\dot{\phi}_{1j}$ 、 $\dot{\phi}_{2j}$ 、 $\dot{\phi}_{3j}$ 、 \ddot{u}_j 、 \ddot{v}_j 、 \ddot{w}_j 、 $\ddot{\phi}_{1j}$ 、 $\ddot{\phi}_{2j}$ 、 $\ddot{\phi}_{3j}$ ($j = 1, 2$) 定義於 2.7.2 節。



附錄 E 慣性力之比較

為了方便比較與說明，在此先將文獻[5]及文獻[6]及本文的慣性力

\mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 列於下式

文獻[5]之慣性力如下

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi - 2\rho A \int \mathbf{N}_a (\Omega_z \dot{v} - \Omega_y \dot{w}) dx \quad (\text{E.1})$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{1+\xi}{2} \int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b [\ddot{v}_1 + \ddot{v} + x\alpha_z + x\Omega_y \Omega_x - 2\Omega_x \dot{w} + 2\Omega_z \frac{x}{L} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)] dx$$

$$+ \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x} + \alpha_z + \ddot{v}_{,x} + \Omega_x \Omega_y - 2\dot{w}_{,x} \Omega_x) dx$$

$$- 2\rho I_z \int \mathbf{N}'_b (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{f}_c^I = \rho A \int \mathbf{N}_c [\ddot{w}_1 - x\alpha_y + \ddot{w} + x\Omega_x \Omega_z + 2\Omega_x \dot{v} - 2\Omega_y \frac{x}{L} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)] dx$$

$$- \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (2\dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x} + \alpha_y - \ddot{w}_{,x} - \Omega_x \Omega_z - 2\dot{v}_{,x} \Omega_x) dx$$

$$- 2\rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) (\dot{\theta}_1 + \Omega_x) dx$$

$$- 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{f}_d^I = \rho I_P \int \mathbf{N}_d (\alpha_x + \ddot{\theta}_1 + \Omega_z \dot{w}_{,x} + \Omega_y \dot{v}_{,x}) dx$$

$$- \rho (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d (-\dot{w}_{,x} + \Omega_y) (\dot{v}_{,x} + \Omega_z) dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d^t dx \ddot{\mathbf{u}}_d^\phi$$

$$- \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d [(-\dot{w}_{,x} + \Omega_y)^2 + (\dot{v}_{,x} + \Omega_z)^2] \theta_{1,x} dx$$

文獻[6]之慣性力如下

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a dx + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} (\dot{\mathbf{G}}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b + \dot{\mathbf{G}}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c) - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{w}_{,x}^2 dx \right] dx \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + (1 - \varepsilon_o) \rho I_z \int \mathbf{N}'_b [(1 - \varepsilon_o) \ddot{v}_{,x} + 2(1 - \varepsilon_o) \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x}] dx$$

$$+ 2\rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{f}_c^I = \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + (1 - \varepsilon_o) \rho I_y \int \mathbf{N}'_c [(1 - \varepsilon_o) \ddot{w}_{,x} - 2(1 - \varepsilon_o) \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_o \dot{w}_{,x}] dx$$

$$- 2\rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c (-\dot{w}_{,x}) \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$\mathbf{f}_d^I = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \ddot{\theta}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\theta}_{1,x} dx + \rho (1 - \varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \dot{w}_{,x} \dot{v}_{,x} dx$$

$$- \rho I_\omega (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_d (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2) \theta_{1,x} dx$$

由於(E.1)式中的慣性力，包含定義於固定元素座標與移動元素座標的節點參數對時間的微分，不易與文獻[6]之慣性力比較，所以本文在(2.117)式，將慣性力中所有的節點參數對時間之微分在固定元素座標表示，則慣性力可以改寫成

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi dx \quad (\text{E.3})$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\int_0^L (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + \dot{w}_{,x}^2) dx \right] dx$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (\ddot{v}_{,x} + 2\dot{w}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2\dot{\varepsilon}_o \dot{v}_{,x}) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_b \left[N_2 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11} - \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{21}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y \right) \right.$$

$$\left. + N_4 \left(\frac{3}{2} \dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{12} - \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{22}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_o \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y \right) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
& + \rho I_z \int \underline{N'_b [N'_2 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{21} - \frac{\dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{12}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_y)]} \\
& + \underline{N'_4 (\frac{3}{2} \dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{22} - \frac{\dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{11}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_y)]} dx \\
\mathbf{f}_c^I & = \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\ddot{w}_{,x} - 2\dot{v}_{,x} \dot{\theta}_1 - 2 \frac{\Delta \dot{u}}{\ell} \dot{w}_{,x}) dx \\
& + 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_{1,x} \theta_{1,x} dx \\
& + \rho A \int \underline{\mathbf{N}_c [-N_2 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{31} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z)} \\
& - \underline{N_4 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z)]} dx \\
& + \rho I_y \int \underline{\mathbf{N}'_c [-N'_2 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11} + \frac{\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{31}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21} + \frac{\dot{\phi}_{11} - \dot{\phi}_{12}}{2} \Omega_z)} \\
& - \underline{N'_4 (-\frac{3}{2} \dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + \frac{\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{32}}{2} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22} + \frac{\dot{\phi}_{12} - \dot{\phi}_{11}}{2} \Omega_z)]} dx \\
\mathbf{f}_d^I & = \rho I_P \int \mathbf{N}_d \ddot{\theta}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\theta}_{1,x} dx \\
& + \rho (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \ddot{w}_{,x} \dot{v}_{,x} dx \\
& - \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2) \theta_{1,x} dx \\
& + \rho I_P \int \underline{\mathbf{N}_d [\Omega_y (\dot{v}_{,x} - N_1 \dot{\phi}_{31} - N_3 \dot{\phi}_{32}) + \Omega_z (\dot{w}_{,x} + N_1 \dot{\phi}_{21} + N_3 \dot{\phi}_{22})]} dx
\end{aligned}$$

其中 \mathbf{N}_a 定義於(D.13)式， \mathbf{N}_i ($i = b - d$) 定義於(2.26)–(2.30)， \ddot{u}_j 、 \dot{v}_j 、 \dot{w}_j 、 $\dot{\phi}_{1j}$ 、 $\dot{\phi}_{2j}$ 、 $\dot{\phi}_{3j}$ 、 \ddot{u}_j 、 \ddot{v}_j 、 \ddot{w}_j 、 $\ddot{\phi}_{1j}$ 、 $\ddot{\phi}_{2j}$ 、 $\ddot{\phi}_{3j}$ ($j = 1, 2$) 定義於 2.7.2 節， $\dot{v}_{,x}$ 、 \ddot{v} 、 $\dot{w}_{,x}$ 、 \ddot{w} 、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\ddot{\theta}_1$ 定義於(D.38)–(D.43)。在元素數目較多時， $\dot{\phi}_{11} \approx \dot{\phi}_{12}$ 、 $\dot{\phi}_{21} \approx \dot{\phi}_{22}$ 、 $\dot{\phi}_{31} \approx \dot{\phi}_{32}$ 。

本文與文獻[6]之慣性力差異的項為底線項，在元素數目較多時，可將

(E.3)式底線項簡化，則慣性力為

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a^\phi dx \quad (\text{E.4})$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\int_0^L (\dot{\bar{v}}_{,x}^2 + \dot{\bar{w}}_{,x}^2) dx - \int_0^x (\dot{\bar{v}}_{,x}^2 + \dot{\bar{w}}_{,x}^2) dx \right] dx$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I_z \int \mathbf{N}'_b (\ddot{v}_{,x} + 2\dot{\bar{w}}_{,x} \dot{\bar{\theta}}_1 - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x}) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} \dot{\bar{\theta}}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_b [N_2 (\dot{\phi}_{21} \dot{\phi}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31}) + N_4 (\dot{\phi}_{22} \dot{\phi}_{12} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32})] dx$$

$$+ \rho I_z \int \mathbf{N}'_b [N'_2 (\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{21} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{31}) + N'_4 (\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{22} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{32})] dx$$

$$\mathbf{f}_c^I = \rho A \int \mathbf{N}_c \ddot{w} dx + \rho I_y \int \mathbf{N}'_c (\ddot{w}_{,x} - 2\dot{v}_{,x} \dot{\bar{\theta}}_1 - 2\frac{\Delta \ddot{u}}{\ell} \dot{\bar{w}}_{,x}) dx$$

$$+ 2\rho I_\omega \int \mathbf{N}'_c \dot{w}_{,x} \dot{\bar{\theta}}_{1,x} \theta_{1,x} dx$$

$$+ \rho A \int \mathbf{N}_c [-N_2 (-\dot{\phi}_{11} \dot{\phi}_{31} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21}) - N_4 (-\dot{\phi}_{12} \dot{\phi}_{32} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22})] dx$$

$$+ \rho I_y \int \mathbf{N}'_c [-N'_2 (-\dot{\phi}_{31} \dot{\phi}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{21}) - N'_4 (-\dot{\phi}_{32} \dot{\phi}_{12} + 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{\phi}_{22})] dx$$

$$\mathbf{f}_d^I = \rho I_P \int \mathbf{N}_d \ddot{\bar{\theta}}_1 dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \ddot{\bar{\theta}}_{1,x} dx + \rho (I_y - I_z) \int \mathbf{N}_d \dot{\bar{w}}_{,x} \dot{v}_{,x} dx$$

$$- \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d (\dot{\bar{w}}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2) \theta_{1,x} dx$$

本文與文獻[6]的節點參數定義方式不同，為了方便比較，以下重複(D.39)

—(D.45)式

$$\ddot{v} = \mathbf{N}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b^\phi ; \ddot{w} = \mathbf{N}_c^t \ddot{\mathbf{u}}_c^\phi$$

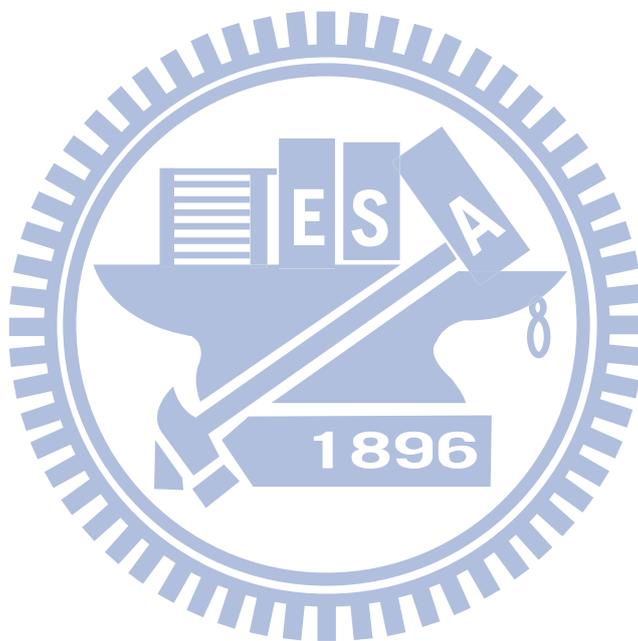
$$\ddot{\mathbf{u}}_b^\phi = \{\ddot{v}_1, \ddot{\phi}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\phi}_{32}\} ; \ddot{\mathbf{u}}_c^\phi = \{\ddot{w}_1, \ddot{\phi}_{21}, \ddot{w}_2, \ddot{\phi}_{22}\} \quad (\text{E.5})$$

文獻[6]的節點參數定義方式如下

$$\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{N}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b ; \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{N}_c^t \ddot{\mathbf{u}}_c$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_b = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_{31}, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_{32}\} ; \ddot{\mathbf{u}}_c = \{\ddot{w}_1, \ddot{\theta}_{21}, \ddot{w}_2, \ddot{\theta}_{22}\} \quad (\text{E.6})$$

在(E.5)、(E.6)式中， $\ddot{v}_j = \ddot{\bar{v}}_j$ 、 $\ddot{w}_j = \ddot{\bar{w}}_j$ ($j=1, 2$)， $\ddot{\theta}_{3j} = \ddot{\phi}_{3j} + \dot{\phi}_{2j}\dot{\phi}_{1j} + 2\dot{\varepsilon}_0\dot{\phi}_{3j}$ 、 $\ddot{\theta}_{2j} = \ddot{\phi}_{2j} - \dot{\phi}_{3j}\dot{\phi}_{1j} + 2\dot{\varepsilon}_0\dot{\phi}_{2j}$ ($j=1, 2$)由此關係代入(E.2)式中，可得到與(E.4)式完全相同的慣性力。因此本文推導之慣性力在元素數目較多時與文獻[6]之慣性力相同。



附錄 F \mathbf{H}_ϕ 、 \mathbf{H}_R 、 \mathbf{H}_θ 之顯式

定義於(2.120)式之 \mathbf{H}_ϕ 的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\phi 1}^a & \mathbf{h}_{\phi 1}^{c1} & -\mathbf{h}_{\phi 1}^a & \mathbf{h}_{\phi 1}^{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{\phi 1}^b & \mathbf{h}_{\phi 1}^e & -\mathbf{h}_{R1}^b & \mathbf{h}_{\phi 1}^{d1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{\phi 2}^a & \mathbf{h}_{\phi 2}^{c1} & -\mathbf{h}_{R2}^a & \mathbf{h}_{\phi 2}^{c2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{\phi 2}^b & \mathbf{h}_{\phi 2}^{d2} & -\mathbf{h}_{R2}^b & \mathbf{h}_{\phi 2}^e & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

$$\mathbf{h}_{\phi j}^a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{2j}^1}{\ell} & \frac{f_{3j}^1}{\ell} \\ 0 & -\frac{f_{1j}^1}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{1j}^1}{\ell} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{\phi j}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & \frac{f_{21}^1}{2} \\ 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{\phi j}^{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{3j}^1}{2} & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ \frac{f_{2j}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{\phi j}^{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{3j}^1}{2} & \frac{m_{1j}^1}{2\ell} & 0 \\ \frac{f_{2j}^1}{2} & 0 & \frac{m_{1j}^1}{2\ell} \end{bmatrix}$$

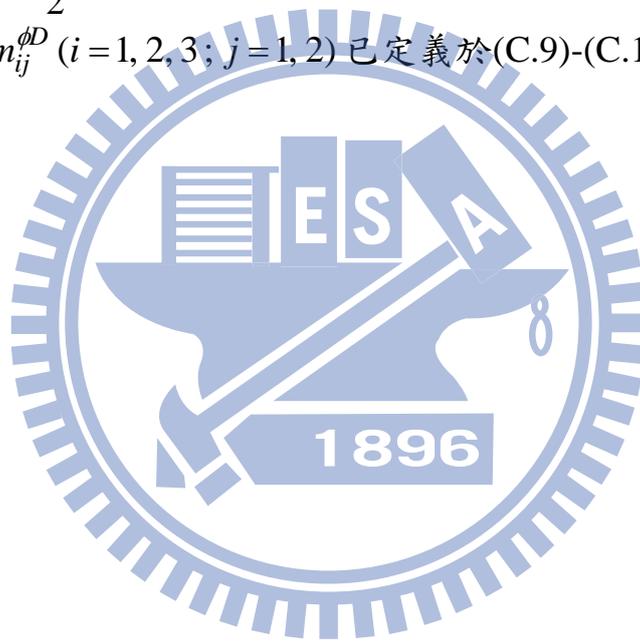
$$\mathbf{h}_{\phi}^{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} \\ -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{\phi}^{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} \\ -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{\phi j}^e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{3j}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{2j}^{\theta D}}{2} \\ -\frac{m_{3j}^{\theta D}}{2} & 0 & \frac{m_{1j}^1}{2} \\ \frac{m_{2j}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{1j}^1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

其中 $f_{21}^1 = -f_{22}^1 = \frac{m_{31}^{\theta D} + m_{32}^{\theta D}}{\ell}$, $f_{31}^1 = -f_{32}^1 = -\frac{m_{21}^{\theta D} + m_{22}^{\theta D}}{\ell}$,

$m_{11}^1 = -m_{12}^1 = \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{2}$, 廣義力矩 $m_{ij}^{\theta D}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已定義於(2.94)

式, 傳統力矩 $m_{ij}^{\phi D}$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) 已定義於(C.9)-(C.13)式



\mathbf{H}_ϕ 展開的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_\phi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{21}^1}{l} & \frac{f_{31}^1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{21}^1}{l} & -\frac{f_{31}^1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{11}^1}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & -\frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & 0 & \frac{f_{11}^1}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & \frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{11}^1}{l} & \frac{f_{21}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & 0 & \frac{f_{11}^1}{l} & \frac{f_{21}^1}{2} & 0 & \frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & \frac{f_{21}^1}{2} & 0 & \frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & \frac{f_{31}^1}{2} & -\frac{f_{21}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & 0 & \frac{m_{11}^1}{2} & 0 & \frac{m_{11}^1}{2l} & 0 & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{11}^1}{2l} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{11}^1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^1}{2l} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{22}^1}{l} & \frac{f_{32}^1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{22}^1}{l} & -\frac{f_{32}^1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{12}^1}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^1}{2} & -\frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & 0 & \frac{f_{12}^1}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^1}{2} & \frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{12}^1}{l} & \frac{f_{22}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & 0 & \frac{f_{12}^1}{l} & \frac{f_{22}^1}{2} & 0 & \frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{31}^1}{2} & \frac{f_{21}^1}{2} & 0 & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & \frac{f_{31}^1}{2} & -\frac{f_{21}^1}{2} & 0 & \frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & 0 & \frac{m_{12}^1}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{12}^1}{2l} & \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^1}{2l} & \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{12}^1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(F.3)

定義於(2.118)式之 \mathbf{H}_R 可以由 $\mathbf{H}_R d\mathbf{q}_\phi = (\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}} - \mathbf{I}_{14})\mathbf{f}_\phi^D$ 求得，其顯示可表示成

$$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{R1}^a & \mathbf{h}_{R1}^c & -\mathbf{h}_{R1}^a & \mathbf{h}_{R1}^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R1}^b & \mathbf{h}_{R1}^d & -\mathbf{h}_{R1}^b & \mathbf{h}_{R1}^d & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R2}^a & \mathbf{h}_{R2}^c & -\mathbf{h}_{R2}^a & \mathbf{h}_{R2}^c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{R2}^b & \mathbf{h}_{R2}^d & -\mathbf{h}_{R2}^b & \mathbf{h}_{R2}^d & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{h}_{Rj}^a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{2j}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{3j}^{\phi D}}{l} \\ 0 & -\frac{f_{1j}^{\phi D}}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{1j}^{\phi D}}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{Rj}^b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{2j}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{3j}^{\phi D}}{l} \\ 0 & -\frac{m_{1j}^1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{1j}^1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{Rj}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{3j}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{f_{2j}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{Rj}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{3j}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{m_{2j}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

\mathbf{H}_R 展開的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{21}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{31}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{21}^{\phi D}}{l} & -\frac{f_{31}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{11}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{11}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{f_{31}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{11}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{21}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{11}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{21}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{21}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{31}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}^{\phi D}}{l} & -\frac{m_{31}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{11}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{m_{31}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{m_{31}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{21}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{21}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{22}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{32}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{f_{22}^{\phi D}}{l} & -\frac{f_{32}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{12}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{12}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{f_{32}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{12}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{22}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_{12}^{\phi D}}{l} & \frac{f_{22}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{22}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{32}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}^{\phi D}}{l} & -\frac{m_{32}^{\phi D}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{12}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{m_{32}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^{\phi D}}{l} & 0 & -\frac{m_{32}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{12}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{22}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^{\phi D}}{l} & \frac{m_{22}^{\phi D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

定義於(2.122)式之 \mathbf{H}_θ 的顯示可表示成

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{h}_{a1} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{h}_{a2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{d1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{e2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{h}_{a1} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{h}_{a2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{e1} & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{d2} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.7})$$

$$\mathbf{h}_{aj} = (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{2j}^{\theta D}}{L} & -\frac{m_{3j}^{\theta D}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{2j}^{\theta D}}{L} & -\frac{m_{3j}^{\theta D}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{dj} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{3j}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{2j}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +(-1)^j & 0 & \frac{m_{12}^{\theta D} - m_{11}^{\theta D}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{ej} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_{3j}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{2j}^{\theta D}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $m_{ij}^{\theta D}$ ($j=1, 2$) 保留至節點參數的一次項。

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{21}^{\theta D}}{L} & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{22}^{\theta D}}{L} & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\
-\frac{m_{21}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{12}^{\theta D} - m_{11}^{\theta D}}{4} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{m_{31}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4} & 0 & \frac{m_{31}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{21}^{\theta D}}{L} & \frac{m_{31}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}^{\theta D}}{L} & \frac{m_{32}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4\ell} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{31}^{\theta D}}{2} & \frac{m_{21}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}^{\theta D}}{2} & -\frac{m_{22}^{\theta D}}{2} & 0 & 0 \\
-\frac{m_{22}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{22}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{12}^{\theta D} - m_{11}^{\theta D}}{4} & 0 \\
-\frac{m_{32}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{32}^{\theta D}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{11}^{\theta D} - m_{12}^{\theta D}}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

(F.9)

附錄 G

為了方便比較與說明，在此將文獻[6]之質量矩陣 \mathbf{m} 及陀螺矩陣 \mathbf{c} 列於下式

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{c}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} \quad (\text{G.1})$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}_{\theta\varphi}^t \mathbf{m}_\theta \mathbf{T}_{\theta\varphi} \quad (\text{G.2})$$

\mathbf{m} 為質量矩陣(mass matrix)， \mathbf{c} 為陀螺矩陣(gyroscopic matrix)， $\mathbf{T}_{\theta\varphi}$ 為轉換矩陣，假如不考慮變形與慣性力間的耦合， $\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta$ 、 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\theta$ 。

元素質量矩陣 \mathbf{m}_θ 可以由子矩陣 $\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成，

\mathbf{m}_{ij} 的顯式可表示如下

$$\mathbf{m}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (\text{G.3})$$

$$\mathbf{m}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}^t$$

元素陀螺矩陣 \mathbf{c}_θ 可以由子矩陣 $\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{c}_{ij}

的顯式可表示如下

$$\mathbf{c}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_b^t - \int_0^x \mathbf{N}'_b{}^t \dot{v}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} \dot{\mathbf{G}}_c^t - \int_0^x \mathbf{N}'_c{}^t \dot{w}_{,x} dx \right]$$

$$\mathbf{c}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ba} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \frac{-2}{L} \rho (1 - \varepsilon_o) I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{G}_a^t \dot{v}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho (1 - \varepsilon_o) I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_c} = 2\rho (1 - \varepsilon_o)^2 I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_c{}^t \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = 2\rho (1 - \varepsilon_o)^2 I_z \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_d{}^t \dot{w}_{,x} dx$$

(G.4)

$$\mathbf{c}_{ca} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \frac{-2}{L} \rho(1 - \varepsilon_o) I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{G}_a^t \dot{w}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{cb} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2\rho(1 - \varepsilon_o)^2 I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_b{}^t \dot{\theta}_1 dx$$

$$\mathbf{c}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = -2\rho(1 - \varepsilon_o) I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t \dot{\varepsilon}_0 dx$$

$$\mathbf{c}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2\rho(1 - \varepsilon_o)^2 I_y \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_d{}^t \dot{v}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{da} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{db} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \rho(1 - \varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_b{}^t \dot{w}_{,x} dx$$

$$- 2\rho(1 - \varepsilon_o)^2 I_w \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_b{}^t \theta_{1,x} \dot{v}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{dc} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \rho(1 - \varepsilon_o)^2 (I_y - I_z) \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_c{}^t \dot{v}_{,x} dx$$

$$- 2\rho(1 - \varepsilon_o)^2 I_w \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_c{}^t \theta_{1,x} \dot{w}_{,x} dx$$

$$\mathbf{c}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$