

國立交通大學

電信工程研究所

碩士論文



**Compressive Domain Interference Cancellation:
Projection Based Approaches**

研究生：陳景文

指導教授：吳卓諭

中華民國一百零三年九月三日

消除干擾在壓縮場域上:基於投影的方法

Compressive Domain Interference Cancellation:
Projection Based Approaches

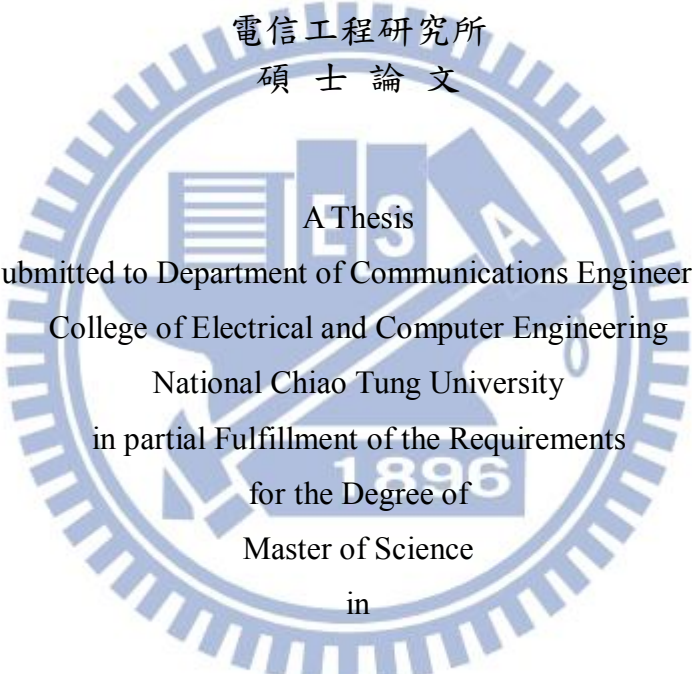
研究生：陳景文

Student : Jing-Wen Chen

指導教授：吳卓諭

Advisor : Jwo-Yuh Wu

國立交通大學
電信工程研究所
碩士論文

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there are stylized representations of a book, a computer monitor, and a gear. The year '1896' is inscribed at the bottom of the inner circle. The text 'A Thesis' is centered over the logo.

A Thesis
Submitted to Department of Communications Engineering
College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Communications Engineering

August 2014

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零三年九月

消除干擾在壓縮場域上:基於投影的方法

學生:陳景文

指導教授:吳卓諭博士

國立國立交通大學

電信工程研究所

摘要

由於壓縮式感測技術需要在整個訊號空間中量測訊號，因此往往包含了不需要的訊號成分，但對基於壓縮式感測的系統卻很容易受到雜訊以及干擾的影響，因此之前有研究提出在壓縮域上以正交投影消除干擾的方法[1]，但是這方法會造成受限保距常數增加而使得訊號重建效能衰減。因此本篇論文提出了兩種以投影矩陣去消除干擾的架構，保證能在維持受限保距常數下去消除干擾訊號。

首先本篇論文對於[1]的消除干擾方法提出了另一種觀點並且由此改寫架構，從數學分析以及模擬結果可以證實在低訊雜比環境下我們提出的方法其重建效能會略有改善。另外我們提出斜投影消除干擾方法，並當目標訊號與干擾成分所對應的子空間的最小主要角夠大時，在模擬結果中可以知道此方法的重建效能與[1]相比會有明顯的改善。

關鍵字: 壓縮式感測、干擾消除、受限保距常數、最小主要角

Compressive Domain Interference Cancellation:

Projection Based Approaches

Students: Jing-Wen Chen

Advisor: Jwo-Yuh Wu

Department of Electrical and Computer Engineering,

National Chiao Tung University

Hsinchu, Taiwan

Abstract

Compressive sensing (CS) based signal acquired by systems capture the entire signal space; however, it often includes undesired signal. Since CS-based systems are very sensitive to interference and noise, a scheme had been proposed to cancel the interference by using the orthogonal projection in compressive domain. Still, this scheme leads to an increase of the restricted isometry constant (RIC) for the set of the signals of interest, and causes the decay of the reconstruction performance. Hence, in this thesis, we study two schemes of interference cancellation by using projection, which will maintain the RIC on the set of potential signals of interest.

First, based on the method in [1], we rewrite the scheme to cancel the interference. The mathematical analysis and simulation results manifest that the proposed method slightly improves the performance of reconstruction in [1]. Moreover, we proposed another interference cancellation method based on oblique projection. The simulation results show that the performance will be obviously improved when the minimum principal angle is bigger than the subspaces between the desired and interference signals.

Keywords: Compressive sensing; Interference cancellation; Restricted isometry constant; Minimum principal angle.

誌謝

能夠順利完成研究所學業論文，我最要感謝的莫過於我的指導教授吳卓諭博士，在這兩年教會我要用嚴謹的態度與心態來做任何事，適時的關心我生活，這樣亦師亦友的關係，都讓我感受到能夠成為老師的學生，是一件很榮幸的事情。對此，我要對老師表示最真誠的感謝。

在這兩年期間，還要感謝實驗室的學姐張玲華和學長李文玄、楊明勳以及其他同學，還有在交大認識的所有朋友們，一起研究、討論、勉勵，有了各位幫忙，讓我這兩年過得更美好。

僅以這本論文，獻給我最親愛的爸爸媽媽，長久以來，感謝你們不辭辛勞辛苦地供我念書，讓我無後顧之憂，能夠專心念書以及做研究，真的非常感謝你們。



陳景文 謹誌

104年8月

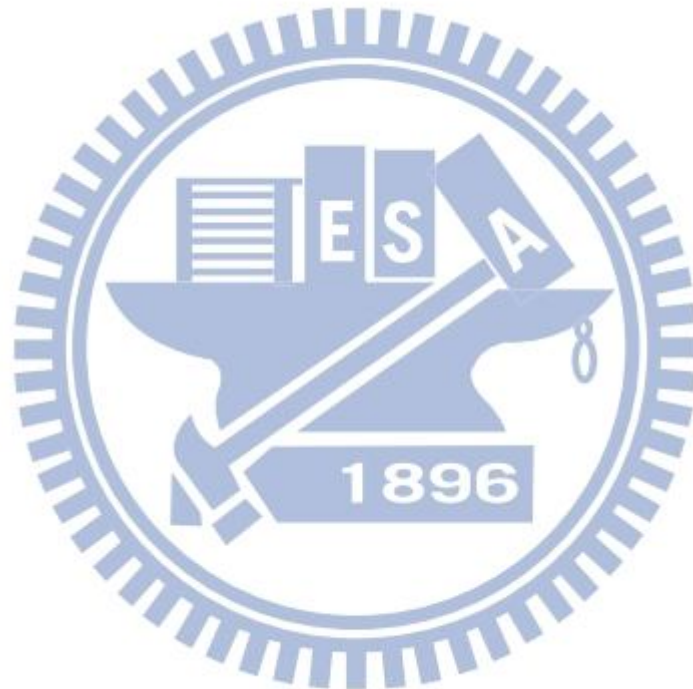
目錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 相關文獻探討.....	3
1.3 論文架構.....	4
第二章 壓縮式感測系統模型與文獻回顧.....	5
2.1 系統架構.....	5
2.2 稀疏訊號.....	5
2.3 感測矩陣.....	6
2.4 重建訊號.....	7
2.5 基本假設.....	10
第三章 干擾消除在壓縮域上.....	11
3.1 正交投影消除干擾訊號在壓縮場域上.....	12
3.1.1 訊號重建.....	14
3.1.2 分析重建效能.....	15
3.2 改善正交投影消除干擾訊號在壓縮域上.....	16
3.2.1 利用正交投影消除干擾訊號並保留 δ_K	16

3.2.2 分析低訊雜比環境下的干擾消除在壓縮域上	17
3.2.3 重建訊號.....	17
3.3 模擬結果.....	19
第四章 斜投影消除干擾訊號在壓縮域上	22
4.1 設計干擾消除投影矩陣	23
4.1.2 建立斜投影矩陣	24
4.2 在含雜訊環境下使用斜投影矩陣造成的影響	25
4.2.1 雜訊經過斜投影的能量上限分析	25
4.3 重建訊號.....	28
4.4 干擾成分與雜訊能量放大關係分析	29
4.4.1 模擬結果.....	32
4.5 受限保距常數與雜訊能量放大關係分析.....	35
4.5.1 模擬結果.....	36
第五章 結論	39
參考文獻.....	41
附錄一 (3.16)的證明.....	43

表目錄

表 1 模擬參數設定.....	19
表 2 模擬參數設定.....	32
表 3 模擬參數設定.....	36



圖目錄

圖 1 傳統壓縮與解壓縮流程圖	1
圖 2 CS-based 可能應用：寬頻信號監控站	2
圖 3 壓縮式感測基本系統架構	5
圖 4 從左至右為 (a) l_2 -球體 (b) l_1 -球體	8
圖 5 將 $\Phi\mathbf{x}$ 分解為 $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\Phi\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S$	13
圖 6 在高訊雜比下正交投影消除干擾以及改寫的架構對應於受限保距常數 δ_K 的 Recovery SNR	20
圖 7 在低訊雜比下，正交投影消除干擾以及改寫的架構對應於受限保距常數 δ_K 的 Recovery SNR	21
圖 8 將 $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_I)$ 沿著 W 投影到 U 上	24
圖 9 當 U 與 W 夾角很小，則雜訊能量將被放大	26
圖 10 當 U 與 W 夾角很大時，則雜訊能量將會衰減	27
圖 11 W 與 U 的最小主要角對應於 K_I	33
圖 12 雜訊經過斜投影後對應於 K_I 的範數變化	34
圖 14 U 與 W 最小主要角的角度對應於 δ_K	37
圖 15 雜訊經過斜投影後對應於 δ_K 的能量大小	38
圖 16 斜投影消除干擾與正交投影消除干擾對應於 δ_K 的 Recovery SNR 比較	38

第一章 緒論

1.1 研究背景

近年來人們對於資料的需求量增加，使得傳輸訊號的頻寬越來越寬，由於尼奎斯特取樣定理(Nyquist Sampling Theorem)指出取樣速率必須要大於或等於訊號的兩倍頻寬，則取樣訊號才能完全的重建，這使得訊號處理的領域出現了瓶頸。例如在無線通訊中，對於傳統接收電路需要很高的取樣速率，所以取樣一個頻寬越高的訊號時則需要更多的成本，也使得類比/數位轉換器效能受限於高取樣率，並且取樣後的大量資料量也造成了數位訊號處理器的負擔。另一方面為了降低訊號處理的成本，通常是將訊號取樣後再進行壓縮，過程如圖 1 所示。其中，傳統壓縮技術是從訊號本身的結構中透過搜尋去找尋冗員並進行剔除以達壓縮的目的，但由於在壓縮之前的訊號是經過完整的取樣，因此先取樣再壓縮是造成浪費的根本所在；除此之外，搜尋訊號結構中的冗員通常需要複雜的演算法，相比之下，解壓縮訊號的計算複雜度會比較簡單。

而生活中做訊號取樣再壓縮這類需要計算量高且耗電的動作，往往是運算能力低、電力供應不長的可攜帶式產品，例如數位相機、MP3 等等，而計算量低的解壓縮則是由電腦這種運算能力強且電量供應穩定的設備去執行，這樣子的反差造成了矛盾，所以自然地引起兩個問題，

- (1) 是否能夠以遠低於兩倍訊號頻寬的去取樣，並且保證在取樣過程中不會造成訊號損失而能夠完全重建？
- (2) 是否能在取樣訊號後得到的資料是經過壓縮過的，即直接取樣被壓縮過後的訊號？

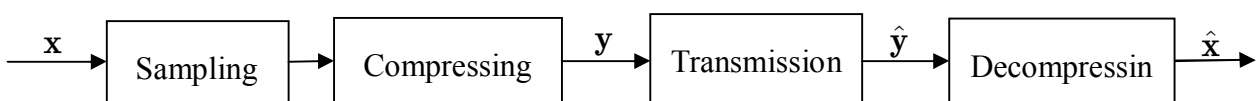


圖 1 傳統壓縮與解壓縮流程圖

壓縮式感測(Compressive Sensing)是近年來針對這些問題的熱門研究課題，此技術與尼奎斯取樣不同的是，訊號的取樣頻率不再取決於訊號的頻寬[2-3]，而是對於訊號的內容和架構有關，這超越了尼奎斯取樣的範疇。此理論主要由兩個部分所組成，其一是隨機矩陣的設計，然後是重建演算法的設計。這理論指出只要訊號具有稀疏特性或者在某個轉換基底下是稀疏的，就能被一個隨機矩陣所量測，將在高維度的訊號壓縮到低維度的訊號空間上，即原訊號的資料量被壓縮成較少的資料量，並利用最佳化的方式去求解就能將被壓縮的訊號無失真的重建。因此這理論一旦被實踐，就代表著訊號的取樣與處理都能在很低的速率之下完成，所以對於資料儲存以及設備成本考量上都有一定的優勢。

並且在許多的應用上，希望能夠從大的訊號空間中去獲得或監控其中某一部份的訊號，如果這類群的訊號具有稀疏性或者能轉到具有稀疏性的基底下，就能夠以壓縮式感測技術去獲取訊號。舉例來說，如圖 2，在寬頻中考慮一個訊號接收站，從眾多的資訊來源中去獲取目標訊號，其中訊號來源包含了電視、廣播或者雷達訊號等等，通常來說一個接收站通常只處理單一來源的訊號，因此在量測訊號時，其他類型的資料就會造成處理時的困擾。所以即使目標訊號為稀疏訊號能以壓縮式感測去獲得，但相較於傳統的取樣架構，壓縮式感測在量測訊號以及訊號的處理上更易於遭受雜訊以及干擾的影響[2]。因此，如何將干擾訊號消除並且盡可能降低對於目標訊號重建的干擾是本篇論文主要的貢獻。

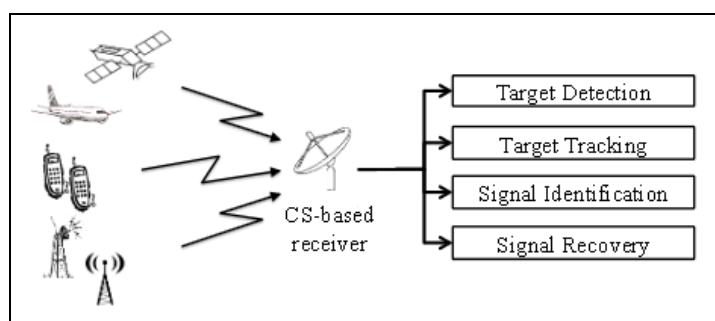


圖 2 CS-based 可能應用：寬頻信號監控站

資料來源[1]

1.2 相關文獻探討

壓縮式感測系統主要可以分成稀疏訊號的表示、感測矩陣(Measurement matrix)與重建訊號這三個部分。由於稀疏訊號的表示是壓縮式感測的基礎與前提，所以如何將訊號變換基底使得在某一合適基底訊號具有稀疏性[2]，或者怎樣的訊號其本身就具有稀疏性[3]是一項熱門的研究課題；此外壓縮式感測理論的核心在於能夠由少量的感測數目在盡量不失真的前提下量測到維度高的稀疏訊號，並且做到完美的訊號重建[5-7]，而為了保證訊號的重建效能，[3-5]和[8]提出的充分條件都要求感測矩陣需滿足受限保距特性(Restricted Isometry Property, RIP)與夠小的受限保距常數(Restricted Isometry Constant, RIC)。

由於壓縮式感測在量測訊號以及訊號的處理上更易於遭受雜訊以及干擾的影響，因此在不同的假設下有許多對於此技術上做消除干擾的研究[1][9-10]。一般來說，要消除干擾訊號最簡單的想法就是先將所有的訊號全部量測後再進行還原，並把還原後的訊號分為目標訊號以及干擾訊號，最後由已知的資訊例如干擾訊號的空間分布設計濾波器將干擾濾除，以獲得目標訊號，但是這樣的做法會造成量測資源的浪費。從這問題出發，本篇論文提出了兩種消除干擾的方法，首先是針對[1]所提出的方法改善在低訊雜比的環境下其重建訊號的效能，第二種則是從訊號本身的架構上去設計消除干擾的方法，並且所提出的兩種方法在濾除干擾的同時也能維持目標訊號在空間上的幾何關係，以保證能夠完美的重建訊號。

1.3 論文架構

本篇論文的組織如下，第二章是壓縮式感測系統的回顧與系統模型。第三章會介紹了與本篇論文做比較的方法，稱為正交投影消除干擾訊號在壓縮場域上 [1]，並且根據這方法去改善在低訊雜比時的重建效能，接著從數學分析以及重建演算法的還原誤差上限去證實這方法的可行性，最後由模擬結果能夠證實此方法的確能改善低訊雜比下的重建效能。在第四章則會根據訊號與感測矩陣之間的空間架構去設計以斜投影矩陣消除干擾的方法，並且從訊號對應的子空間夾角以及受限保距常數去討論此方法對於雜訊造成的影響，並附上模擬結果。第五章會總結整篇論文。



第二章 壓縮式感測系統模型與文獻回顧

壓縮式感測系統架構主要可以分成稀疏訊號的表示、量測矩陣與重建訊號三個部分。所以本章節首先在第二節的部分，先定義稀疏訊號接著介紹量測矩陣的設計和兩種重建訊號的演算法，最後是本篇論文的基本假設。

2.1 系統架構

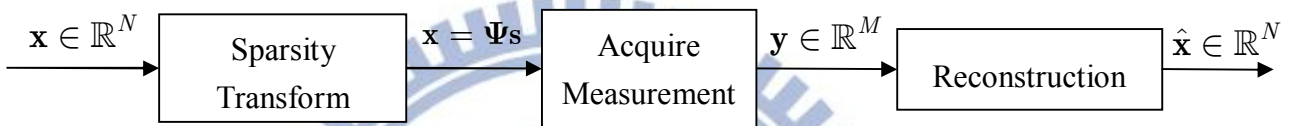


圖 3 壓縮式感測基本系統架構

2.2 稀疏訊號

首先，我們要先定義稀疏訊號(sparse signal)。考慮一個實數、有限長度的離散時間訊號 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ，任何在 \mathbb{R}^N 上的訊號皆可以用 N 個正交的基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 去表示。讓基底矩陣 $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 以 $\{\psi_i\}$ 為行向量，則訊號 \mathbf{x} 可以被表示成以下數學式，

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i = \Psi \mathbf{s} \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{s} 是一個 $N \times 1$ 的向量，其第 j 個位置的元素是對應於訊號 \mathbf{x} 在 ψ_j 上的成分，即 $s_j = \psi_j^T \mathbf{x}$ 。我們說一個稀疏度為 K 的訊號 \mathbf{x} 是指它可以只由 K 個基底去做線性組合；意指在 \mathbf{s} 中，只有 K 個元素不為零而剩下的 $(N - K)$ 皆為零，並且 $K \ll N$ 。

由於大部份訊號具有稀疏性或者可轉換到具有稀疏性下的基底，因此壓縮式感測以此為基礎與前提，所以如何找出一個合適或者建構出一個基底 Ψ 也是一項熱門的研究主題[3]。

2.3 感測矩陣

在標準的壓縮式感測中，透過線性量測可獲得稀疏訊號 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \Phi \mathbf{x} \\ &= \Phi \Psi \mathbf{s} \\ &= \Theta \mathbf{s}\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 為感測矩陣，是取樣系統模型；而 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ 則是被量測後的向量。所以可以知道，一組合適的感測矩陣可以將高維度訊號 \mathbf{x} 投影到低維空間上，以獲得 M 個低維的取樣值即 $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_M]^T$ ，同時原訊號 \mathbf{x} 資訊要能完全或者大部分的被包含在量測訊號中。

由於 $M \ll N$ ，則 $\mathbf{y} = \Theta \mathbf{s}$ 可視為一組欠定(Undetermined)方程式，若直接以線性的方式去還原訊號 \mathbf{s} ，一般來說是無限多解，但如果 \mathbf{s} 稀疏度為 K ($K \ll M$)，則有可能會有唯一解。由於將對應非零係數的 s_i 的 Θ 的行向量 $\{\theta_i\}$ 組合起來可以得到一個 $M \times K$ 的矩陣，這時就可以獲得非零係數 s_i 的唯一解，就能得到 \mathbf{s} 的唯一解。而要保證能夠還原訊號 \mathbf{x} 的充分且必要條件是 Θ 必須要滿足受限保具特性，由定理(2.1)所示，

定理 2.1： Θ 若滿足 K 階的受限保具特性且存在常數 δ_K ，則會遵守

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq \|\Theta \mathbf{s}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{s}\|_2^2, \text{ 其中 } \|\mathbf{s}\|_0 = K\tag{2.3}$$

其中 δ_K 稱為受限保具常數(Restricted Isometry Constant, RIC)，其值落在 0 與 1 之間。

而想要從量測向量 \mathbf{y} 準確的還原訊號 \mathbf{x} ，其必要條件是 Θ 對於任兩個稀疏度為 K 的向量 \mathbf{x}_1 與 \mathbf{x}_2 皆必須滿足當 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ 時，則 $\Theta \mathbf{x}_1 \neq \Theta \mathbf{x}_2$ ，等價來說，感測矩

陣必須保證不會對兩個稀疏度為 K 的不同向量投影到同一個取樣的集合中，因此

Θ 必須滿足 $2K$ 階的受限保具特性且存在受限保具常數 $\delta_{2K} < 1$ 。

一般來說，當感測矩陣 Φ 與基底 Ψ 如果相關性(correlation)越低，表示 $\{\phi_i\}$ 和 $\{\psi_i\}$ 互相表示時所需的係數越多，則 Θ 滿足受限保距特性的機率就越高。在目前能夠確保量測資料量最少但 Θ 仍然有很高機率能滿足 K 階的受限保具特性是讓 $M \times N$ 的感測矩陣 Φ 中的每一個元素 ϕ_{ij} 皆是獨立且同分佈(Independent Identical Distributed, i.i.d.)的高斯分佈(Gaussian Distribution)，表示如下，

$$\phi_{ij} \sim \text{Gauss}\left(1, 1/M\right) \quad (2.4)$$

在這情況下， Φ 與 Ψ 的相關性有很大的機會會很低，並且同時遵守

$$M = O\left(K \cdot \log\left(N/K\right)\right) \quad (2.5)$$

，則 Θ 就會有很高的機率能滿足 K 階的受限保具特性。

2.4 重建訊號

由於 $M \ll N$ ，因此 $\mathbf{y} = \Theta \mathbf{s}$ 可視為一組欠定方程式，若直接以線性的方式去還原訊號 \mathbf{s} ，則會得到無限多組解 $\hat{\mathbf{s}}$ ，其數學式如下，

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{r}, \text{ 其中 } \mathbf{r} \in N(\Theta) \quad (2.6)$$

因此對於壓縮式感測來說，當 Θ 滿足受限保距特性時，重建稀疏訊號最直接的作法是透過 l_0 -最小化去求解，

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{v}\|_0 \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Theta \mathbf{v} \quad (2.7)$$

但是必須求解過程中，必須去搜尋 C_K^N 次非零係數可能的排列，才能得到最佳的解，但這樣的運算量非常大，所以在目前來說會使用更簡單的 l_1 -最小化去做重建

並且會得到相同的解，除此之外使用貪婪搜尋法也是求解的方法之一，因此在下面會介紹這兩種重建演算法。

1. 有限制條件的 l_1 -最小化：

在量測的訊號沒有雜訊的情況下，可由有限制條件的 l_1 -最小化去求解，

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{v}\|_1 \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Theta \mathbf{v} \quad (2.8)$$

只要 Θ 能滿足 $2K$ 階的受限保真特性且受限保真常數為 δ_{2K} ，就能藉由上述公式保證還原稀疏訊號 \mathbf{s} 。會採用 l_1 -最小化的原因可由以下兩點窺得一二：

- (1) 由 l_1 -最小化的解通常會位於某些座標軸上，是為稀疏解。
- (2) 定義 l_1 -球體為 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{x}\|_1 \leq r\}$ ，如圖 4(b) 所示，其頂點會落在座標軸上，所以 l_1 -球體擴增時具有指向座標軸的特性，因此隨著球體延伸時與 $\hat{\mathbf{s}}$ 所形成的集合的交集有很高的機會是稀疏解。而像是 l_2 -球體其擴增方向為全向性，如圖 4(a)，球體延伸時則通常與 $\hat{\mathbf{s}}$ 所形成的集合的交集不會是稀疏解，因此相較於 l_1 -球體，其近似解與真正的稀疏訊號相差更遠。

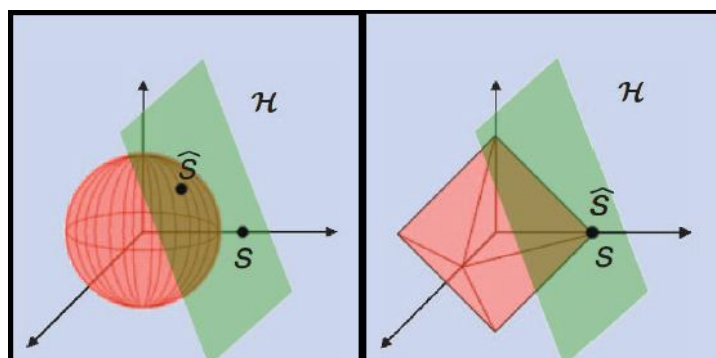


圖 4 從左至右為 (a) l_2 -球體 (b) l_1 -球體

資料來源[5]

當量測到的訊號包含雜訊時，則量測模型為

$$\mathbf{y} = \Theta \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.9)$$

其中 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N$ 是雜訊，並且其能量上限為常數 ε ，即 $\|\mathbf{n}\|_2 \leq \varepsilon$ 。而 l_1 -最小化只要改變條件的限制，依然能夠對抗雜訊去還原訊號，

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{v}\|_0 \quad s.t. \quad \|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{v}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.10)$$

當 Θ 能滿足 $2K$ 階的受限保具特性且受限保具常數為 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ ，則其還原的誤差上限將會遵守，

$$\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|_2 \leq C_0 \varepsilon, \quad \text{其中 } C_0 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2K}}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2K}} \quad (2.11)$$

2. CoSaMP 貪婪搜尋演算法：

在重建稀疏訊號中，大部分最困難的是如何確認目標訊號中非零係數的位置，而 CoSaMP 演算法則是根據感測矩陣 Φ 滿足 $2K$ 階的受限保距特性去近似目標訊號。對於一個稀疏度為 K 的稀疏向量 \mathbf{x} ，若 Φ 的受限保距常數 $\delta_{2K} \ll 1$ ，所以從 Φ 中取出的任意 $2K$ 個行向量幾乎是歸一化且彼此正交，則對於 $\mathbf{w} = \Phi^T \Phi \mathbf{x}$ 來說， \mathbf{w} 非零係數的 K 個位置就會對應到 \mathbf{x} 含成分的 K 個位置。而對於含雜訊的量測訊號，CoSaMP 演算法利用此想法從數次疊代中去得到 K 個擁有最多成分的位置並獲得近似目標訊號的解，並且若給定一精準的參數 η ，使用 CoSaMP 演算法所還原的訊號其還原的誤差上限將會遵守以下數學式，

$$\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|_2 \leq C \cdot \max \left\{ \eta, \|\mathbf{n}\|_2 \right\} \quad (2.12)$$

2.5 基本假設

在本節會給定本篇論文所做的基本假設如下

- (1) 在不失一般性下，讓基底矩陣 Ψ 為單位矩陣 \mathbf{I} 。
- (2) 所有的量測數目 M 皆會小於 N ，並且量測到的訊號其稀疏度 K 會小於 M ，所以關係式為 $K \ll M \ll N$ 。
- (3) 感測矩陣 Φ 的每一個元素是獨立且同分佈，滿足(2.4)，並且會滿足 K 階的受限保距特性，即滿足(2.5)。

而在本篇模擬中所做的基本假設如下

- (1) 在本篇論文中所有重建訊號的方式皆是用 CoSaMP 貪婪搜尋法。
- (2) 在有雜訊 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N$ 的環境下， $\{n_i\}_{i=1}^N$ 皆為均勻分布，其中 ϵ 值由當時環境下訊雜比去定義。
- (3) 並且量測到的訊號無論是目標訊號 $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^N$ 或者干擾訊號 $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^N$ 其非零值皆為 $x_i \sim \text{Gauss}(0,1)$ ，且範數為 1。

第三章 干擾消除在壓縮域上

一般來說，要消除干擾訊號最簡單的想法就是先將所有的訊號全部量測後再進行還原，並把還原後的訊號分為目標訊號以及干擾訊號，最後由已知的資訊例如干擾訊號的空間分布去設計濾波器將干擾濾除，以獲得目標訊號。當在 \mathbb{R}^N 空間中量測的訊號包含了目標與干擾訊號，其非零個數共為 K ，則為了能夠同時還原所有的訊號，則感測矩陣 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 必須滿足(2.5)式的量測資料量，這使得測量資料量將會遠大於只對單一目標訊號還原所需的個數，除此之外，由於我們實際上並不需要干擾訊號，所以將所有訊號先做還原的想法也沒有考量到運算上的效率。為了強健整體的系統，則應該要先去考慮先對干擾訊號進行處理，再進行重建訊號。因此在此章節我們要討論如何將干擾的部分先從量測訊號中分離，並且經過處理後的量測訊號其在空間中的幾何架構仍然會保留原目標訊號其在空間中的幾何架構。

本章節將介紹兩種不同消除干擾訊號的方式，首先會在 3.1 節介紹由[1]所提出的消除干擾訊號再重建訊號的方法，並且討論其中的利弊，接著在 3.2 節針對其缺點提出改善的方法，並從數學去分析我們的方法的確實能改善，最後由模擬結果去證實。

3.1 正交投影消除干擾訊號在壓縮場域上

這一節要介紹的干擾消除方法是用來比較與 3.2 節本篇論文所提出的方法，稱為"正交投影消除干擾訊號在壓縮場域上"[8]。這方法是透過已知的干擾訊號在 \mathbb{R}^N 空間位置以及目標訊號和干擾訊號互為正交的條件下，將所量測到的訊號利用正交投影矩陣將干擾空間投影到零空間上，並且在一定的條件下能保證即使經過投影，目標訊號依然能夠保留其資訊而能夠被重建。

考慮訊號 \mathbf{x} 包含兩個稀疏訊號 $\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^N$ ，經過量測後表示如下，

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi (\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_I) \quad (3.1)$$

\mathbf{x}_S 是欲接收的訊號其稀疏度為 K_S ， \mathbf{x}_I 是干擾訊號其稀疏度為 K_I 。

在這裡，我們要假設以下三點：

- (1) 這 \mathbf{x}_S 與 \mathbf{x}_I 彼此互相正交，且 \mathbf{x}_{S_i} 為非零值則 \mathbf{x}_{I_i} 則必須為零，反之亦然。
- (2) 讓 $\Phi_I \in \mathbb{R}^{M \times K_I}$ 為集合 \mathbf{x}_I 所有非零位置對應於 Φ 的行向量所組成的矩陣，且 I 為 \mathbf{x}_I 非零位置的已知集合。
- (3) 為了能夠正確的還原 \mathbf{x} ，感測矩陣 Φ 必須要滿足 $2(K_S + K_I)$ 的受限保具特性。

從 $\Phi \mathbf{x}_I$ 屬於 Φ_I 的行空間的想法出發，可以造出一個正交投影矩陣 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 使得 Φ_I 的行空間被投影到零空間(Null space)上，即 \mathbf{P} 的零空間等同於 $R(\Phi_I)$ 。其數學式表示如下，

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \Phi_I \Phi_I^\dagger \quad (3.2)$$

所以任意的 \mathbf{x}_I 只要其非零位置都在 I 的集合內，經過投影矩陣 \mathbf{P} 會被投影到零向

量。從另一方面觀察，由於 $R(\Phi_I)$ 與 $N(\Phi_I^T)$ 互斥且正交，因此對於任意在 \mathbb{R}^N 空間上的向量 \mathbf{v} 經過投影矩陣 \mathbf{P} 後都會被投影到 $N(\Phi_I^T)$ 上。所以將量測資料 \mathbf{y} 投影到 $N(\Phi_I^T)$ 上，其數學表示如下，

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S \quad (3.3)$$

由於干擾成分 $\Phi\mathbf{x}_I$ 落在 \mathbf{P} 的零空間上，所以最後只剩下被投影到 $N(\Phi_I^T)$ 上的 $\Phi\mathbf{x}_S$ ，如圖 5 所示。可以知道對於 Φ 來說只要滿足 $K = 2K_S + K_I$ 階的受限保距特性就夠了，而不必滿足 $2(K_S + K_I)$ 階的受限保距特性，減少了量測的資料量。此外，從[11]可以知道，當 Φ 的受限保距常數為 δ_K ，對於所有稀疏度為 $(K - |I|)$ 的 \mathbf{x}_S 將會滿足以下不等式，

$$(1 - \hat{\delta}) \|\mathbf{x}_S\|_2^2 \leq \|\mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}_S\|_2^2 \quad (3.4)$$

其中

$$\hat{\delta} \triangleq \min \left\{ 1, \delta_K + \frac{\delta_K^2}{1 + \delta_K} \right\} \quad (3.5)$$

所以只要保證 $0 < \hat{\delta} < 1$ ，則 $\mathbf{P}\mathbf{y}$ 可以由新的感測矩陣 $\mathbf{P}\Phi$ 去重建訊號 \mathbf{x}_S 。

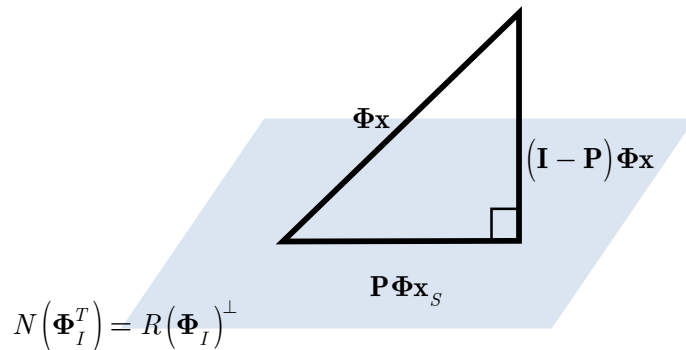


圖 5 將 $\Phi\mathbf{x}$ 分解為 $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\Phi\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S$

3.1.1 訊號重建

當量測到的訊號包含雜訊 \mathbf{n} 且其能量上限為 ε ，則經過正交投影後的量測訊號表示如下，

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n} \quad (3.6)$$

對於新的量測訊號來說， $\mathbf{P}\Phi$ 是量測 \mathbf{x}_S 的感測矩陣，則需要保證 $\mathbf{P}\Phi$ 的受限保具常數 $\hat{\delta} \leq \sqrt{2} - 1$ 才能由 l_1 -最小化重建訊號。已知 $\mathbf{P}\Phi$ 的受限保距常數為 $\hat{\delta}$ ，所以當 $\delta_K \leq 0.269$ 則 $\hat{\delta} \leq \sqrt{2} - 1$ ，才可以保證 $\Phi\mathbf{x}_S$ 並不會因為被投影到 $N(\Phi_I^T)$ 而遺失了保留在 $\Phi\mathbf{x}_S$ 上的 \mathbf{x}_S 資訊，並能夠重建近似的目標訊號 \mathbf{x}_S 而不必同時還原干擾訊號 \mathbf{x}_I 。這種以 $\mathbf{P}\Phi$ 為感測矩陣重建訊號的方式有幾個優點，像是相較於需要還原所有訊號的感測矩陣 Φ 必須滿足 $2(K_S + K_I)$ 階的受限保具特性，若使用正交投影將干擾消除再還原的方式，其感測矩陣 Φ 只須滿足 $2K_S + K_I$ 階的受限保具特性，減少了量測的數量。並且對於大部分的重建演算法其運算的複雜度對於量測數量至少成正比的關係，因此也同時降低了計算量。

以 $\mathbf{P}\Phi$ 為感測矩陣，由 l_1 -最小化重建訊號 $\hat{\mathbf{x}}$ ，

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \|\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{P}\Phi\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.7)$$

可以得到還原誤差的上限，

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq \hat{C}_0 \varepsilon, \quad \text{其中 } \hat{C}_0 = \frac{4\sqrt{1+\hat{\delta}}}{1 - (\sqrt{2}+1)\hat{\delta}} = \frac{4\sqrt{(2\delta_K^2 + 2\delta_K + 1)(1 + \delta_K)}}{1 - \sqrt{2}\delta_K - 2(\sqrt{2}+1)\delta_K^2} \quad (3.8)$$

3.1.2 分析重建效能

已知使用正交投影消除干擾能降低量測資料量，但是感測矩陣 Φ 經過正交投影後會導致新的感測矩陣 $\mathbf{P}\Phi$ 的受限保具常數提高，這是因為投影矩陣 \mathbf{P} 將 Φ 的行空間全部投影在 $N(\Phi_I^T)$ 上，使得行向量彼此的相關性提高，減少了從 Φ 中任取 K 個行向量其互相近似正交且單範的特性，因此新的感測矩陣 $\mathbf{P}\Phi$ 受限保距常數將會提高，導致在量測訊號含雜訊的情況下，造成訊號還原的效能衰減。

從(3.8)可以知道受限保距常數的提確使得重建效能因此受到了影響。對於受限保具常數越小，越能使量測訊號在含雜訊的情況下仍然可以滿足受限保距特性，降低重建誤差，因此在3.2節我們將提出在保留受限保距常數的前提下消除干擾訊號的方法。



3.2 改善正交投影消除干擾訊號在壓縮域上

在量測訊號含雜訊的環境下，大部分還原稀疏訊號的演算法其還原誤差的上限都有相似的形式，同時會受到感測矩陣的受限保具常數大小以及雜訊能量的上限所影響。當受限保具常數越大或者雜訊能量上限越高時，還原訊號的效果將會越差。

在這一節將對 3.1 節所提出干擾消除方法改善其重建訊號的效能，並且在 3.2.2 節中從 l_1 -最小化的還原誤差上限去分析為何低訊雜比的環境下我們提出的方法相較於 3.1 節更能使得還原誤差降更低。

3.2.1 利用正交投影消除干擾訊號並保留 δ_K

從 3.1 節能夠知道，使用正交投影去消除干擾訊號的方式能使得量測資料只剩下目標訊號的成分，

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S \quad (3.9)$$

並且新的感測矩陣 $\mathbf{P}\Phi$ 的受限保具常數會因此提高，所以為了使重建效能不受限保具常數提高而衰減，因此我們仍然以 Φ 為感測矩陣去還原 \mathbf{x}_S ，則數學式表示如下，

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}_S + (\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S \quad (3.10)$$

但若以 Φ 為感測矩陣去重建訊號，則會導致量測訊號帶有一固定的雜訊項 $(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S$ ，嚴重的影響重建訊號 \mathbf{x}_S 的效能。所以在下一節中會討論為何在低訊雜比環境底下，即使夾帶既有的雜訊成分 $(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S$ ，但以 Φ 為感測矩陣的還原效能將會比 3.1 所提出的方法還要好。

3.2.2 分析低訊雜比環境下的干擾消除在壓縮域上

對於量測訊號中包含干擾訊號與雜訊 \mathbf{n} 的模型如下：

$$\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_I) + \mathbf{n} \quad (3.11)$$

將量測訊號投影到 $N(\Phi_I^T)$ 上，可以寫成以 Φ 與以 $\mathbf{P}\Phi$ 為感測矩陣的兩種等價模型，數學式如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{y} &= \mathbf{P}\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n} \\ &= \Phi\mathbf{x}_S + (\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.12)$$

在低訊雜比的環境下，若

(1) 訊號 \mathbf{x}_S 的能量遠遠低於雜訊的能量 ($\|\mathbf{x}_S\|_2 \ll \|\mathbf{n}\|_2$)，使得

$$\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S\|_2 \ll \|\mathbf{P}\mathbf{n}\|_2。$$

(2) Φ 滿足 $K = 2K_S + K_I$ 階的受限保具特性且其受限保具常數為 δ_K

上面兩個條件成立時，則(3.12)能近似成以下數學模型，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{y} &= \Phi\mathbf{x}_S + (\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n} \\ &\approx \Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

由於重建演算法的還原誤差上限會受到感測矩陣的受限保具常數大小以及雜訊能量的上限所影響，並且 $\mathbf{P}\Phi$ 的受限保具常數 $\hat{\delta}$ 會大於 δ_K ，所以很明顯地由上述數學式可以知道，在低訊雜比的環境底下，當量測訊號經過正交投影後以 Φ 為感測矩陣去做訊號重建會比以 $\mathbf{P}\Phi$ 為感測矩陣有更好的還原誤差上限。

3.2.3 重建訊號

若以 Φ 為感測矩陣並使用 l_1 -最小化去重建訊號(3.12)的 \mathbf{x}_S ，演算法如下，

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \|\mathbf{P}\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon_1 \quad (3.14)$$

其中 ε_1 為 $\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n}\|_2$ 的能量上限，如下所示，

$$\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n}\|_2 \leq \sqrt{\frac{\delta_K^2}{1 - \delta_K} \cdot \|\mathbf{x}_S\|_2^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon_1 \quad (3.15)$$

[證明]: 見附錄一

而還原誤差上限，

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_S\|_2 \leq C_0 \varepsilon_1, \quad \text{其中 } C_0 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_K} \quad (3.16)$$

所以整體的還原錯誤上限是，

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_S\|_2 \leq \frac{4\sqrt{1 + \delta_K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_K} \cdot \sqrt{\frac{\delta_K^2}{1 - \delta_K} \cdot \|\mathbf{x}_S\|_2^2 + \varepsilon^2} \quad (3.17)$$

並且低訊雜比時的假設下，由於 $\varepsilon \gg \sqrt{\frac{\delta_K^2}{1 - \delta_K} \cdot \|\mathbf{x}_S\|_2^2}$ ，則(3.15)可以得到近似值，

$$\frac{\delta_K^2}{1 - \delta_K} \cdot \|\mathbf{x}_S\|_2^2 + \varepsilon^2 \approx \varepsilon_1^2 \quad (3.18)$$

所以(3.17)可以近似成，

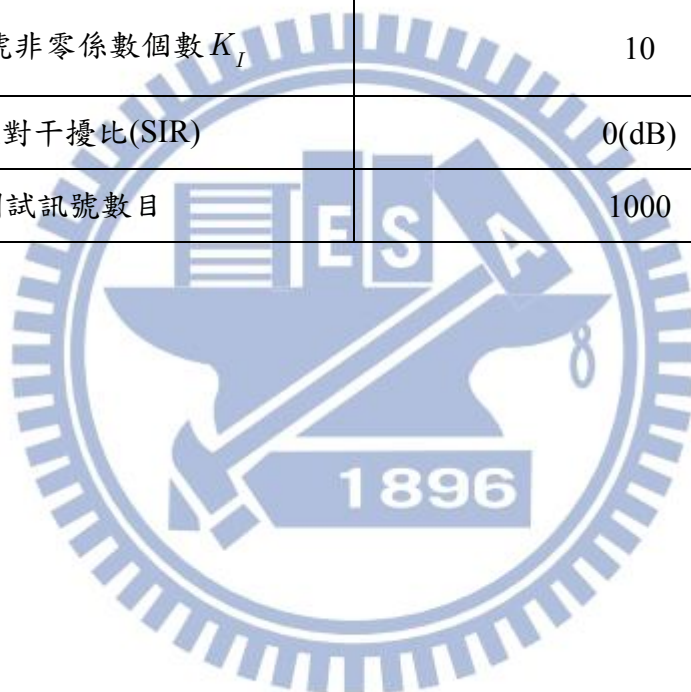
$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_S\|_2 \leq \frac{4\sqrt{1 + \delta_K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_K} \cdot \varepsilon \quad (3.19)$$

雖然無法以還原錯誤上限去做實際效能比較，但是從 l_1 -最小化的還原錯誤上限可以知道，在低訊雜比環境下我們所提出的方法其還原誤差上限(3.19)與 3.1 節提出的方法其還原誤差上限(3.8)去做比較，我們的確有更好的效果，並且在 3.3 節的模擬結果中可以得到證實。

3.3 模擬結果

表 1 模擬參數設定

模擬參數	設定值
訊號長度 N	1000
量測數目 M	$K_S \cdot \log(N/K_S) / \delta_K^2$
目標訊號非零係數個數 K_S	10
干擾訊號非零係數個數 K_I	10
訊號對干擾比(SIR)	0(dB)
測試訊號數目	1000



由於我們所提出的方法含有有既有的雜訊項 $(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S$ ，因此其雜訊能量大於 3.1 節的方法，所以在高訊雜比時($\text{SNR} = 15\text{dB}$)，環境中雜訊能量可以忽略不計，因此既有的 $\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S\|_2$ 會嚴重的導致我們的還原效能衰減，從圖 6 可以知道還原效能比 3.1 節的方法差。並且隨著 δ_K 上升這兩種方法其還原效果隨之變差。

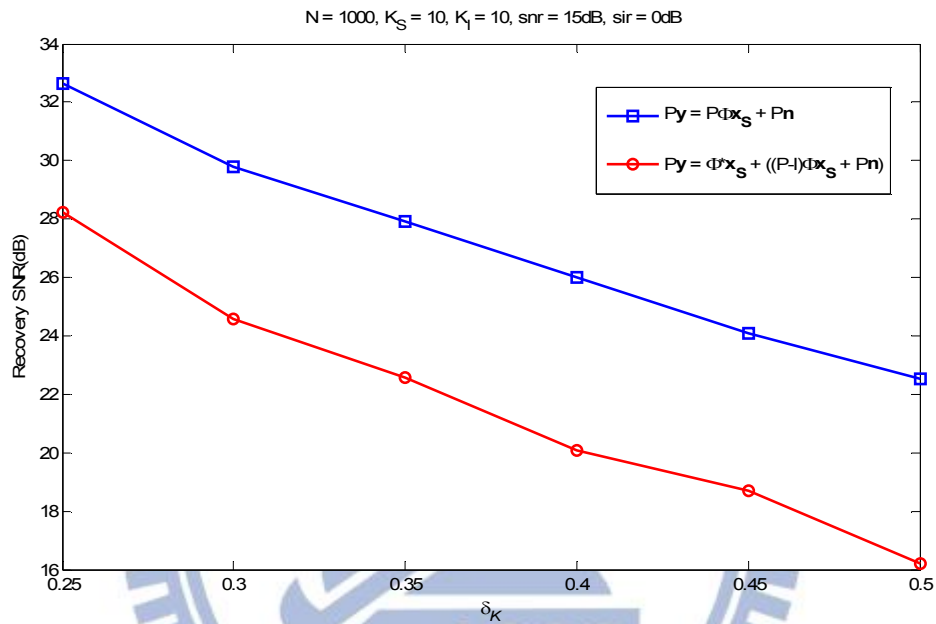


圖 6 在高訊雜比下正交投影消除干擾以及改寫的架構對應於受限保距常數 δ_K 的

Recovery SNR

在低訊雜比時($\text{SNR} = -5\text{dB}$)，由於雜訊的能量遠遠大於 $\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S\|_2^2$ ，所以這兩個重建方法此時還原效能是取決於感測矩陣的受限保距常數的大小，由於我們所提出的方法能保留原本的受限保距常數，因此從圖 7 可以證實我們所提出的方法的確優於 3.1 節的方法。

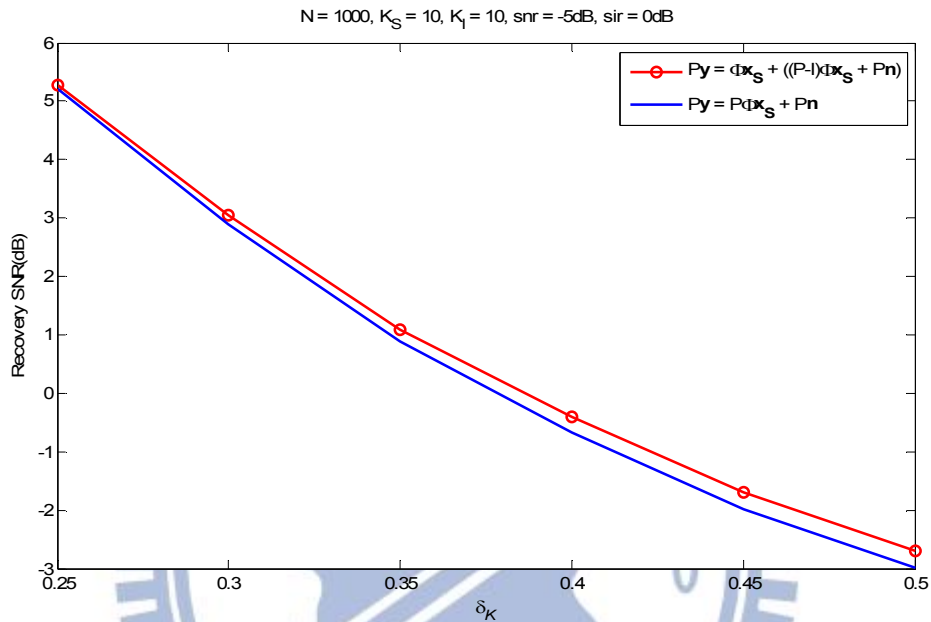


圖 7 在低訊雜比下，正交投影消除干擾以及改寫的架構對應於受限保距常數 δ_K 的

Recovery SNR

第四章 斜投影消除干擾訊號在壓縮域上

在數位傳輸中，系統可以經由訓練從過去的量測中得到目標訊號可能在整個訊號空間中的子空間。因此在本章節我們要討論的是若能同時掌握干擾與目標訊號的空間分布，那麼經過量測後，有什麼方法能夠同時將干擾訊號消除並且完整保留目標訊號呢？

對於第三章提出的正交投影消除干擾訊號的方法，會讓經過量測後的目標訊號會落在 $N(\Phi_I^T)$ 上，所以在重建訊號時，就必須去搜尋整個 $N(\Phi_I^T)$ 空間去找尋最近似的稀疏解，但是若能找出另一種投影矩陣使得量測後的目標訊號落在原本的子空間上，那麼就可以在原本的子空間中去做目標訊號的搜尋，並且有更為近似的稀疏解。在接下來的討論中，假設已知干擾訊號所在的空間並且同時能掌握目標訊號的可能的空間分布。

在 4.1 節將介紹我們對於消除干擾訊號的另一種想法，利用已知的資訊去設計新的投影矩陣，並且在 4.2 節討論在含雜訊的環境下造成的影響，接著在 4.3 節分析斜投影矩陣其奇異值與雜訊放大關係，最後是重建訊號。

4.1 設計干擾消除投影矩陣

已知 \mathbf{x}_I 非零位置的集合為 I ，讓目標訊號可能的已知分布位置的集合為 \tilde{S} ，並且假設集合 \tilde{S} 與集合 I 互斥。一般來說，真正接收到的 \mathbf{x}_S 其非零位置並不會是整個 \tilde{S} ，而是一個較小的未知集合 S ，且 $S \subseteq \tilde{S}$ 。當 Φ 滿足 $2K_S + K_I$ 階的受限保距特性滿足時，表示 Φ_S 的行空間 U 與 Φ_I 的行空間 W 彼此互斥，其中 $\Phi_S \in \mathbb{R}^{M \times |\tilde{S}|}$ 為所有可能目標訊號其非零位置所相對應 Φ 的行向量所集合的矩陣，而 Φ_I 定義同 3.1 節。

由於 $\Phi \mathbf{x}_S = \Phi_S \tilde{\mathbf{x}}_S \in U$ 且 $\Phi \mathbf{x}_I = \Phi_I \tilde{\mathbf{x}}_I \in W$ ，所以希望能找出一個投影矩陣 \mathbf{E} ，使得量測向量 \mathbf{y} 經過投影後，使得 \mathbf{y} 在 W 上的成分映射到零空間並且對於在 U 上的成分能夠保留其原本方向以及大小，等價來說，投影矩陣 \mathbf{E} 必須要同時消除干擾成分並且完整保留目標所對應的空間，因此這種投影矩陣必須讓 \mathbb{R}^N 空間中的任意向量皆會沿著 W 投影到 U 上，最後只會剩下在 U 上的成分，而這種投影矩陣就是斜投影矩陣。對於量測訊號來說，由於 \mathbf{x}_S 與 \mathbf{x}_I 的非零位置互不重疊的條件，以及 Φ 滿足受限保距常數 $\delta_K < 1$ ，有很高的機率使得 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ ，因此對於 $\Phi \mathbf{x}_S \in U$ 來說，經過斜投影後仍然會保留原本方向及大小，如圖 8 所示。

當 \mathbf{y} 經過斜投影後，其數學模型如下，

$$\mathbf{E}\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}_S \quad (4.1)$$

我們可以發現，只要能夠利用目標訊號的可能的集合 \tilde{S} 與 \mathbf{x}_I 非零位置的集合 I ，那麼量測到的訊號經過斜投影後，不僅可以將干擾訊號完全抵銷，而且也可以保

留原本的受限保距常數 δ_K ，相較於 3.2 節的方法雖然也能保留原本的受限保距常數，但卻增加了雜訊的成分，使得整體還原效能仍會受到雜訊影響而下降。由於從重建的演算法易受限保具常數大小以及雜訊能量的上限所影響，因此可以知道使用斜投影方式去消除干擾的還原效能將會優於 3.1 節以及 3.2 節所提出的方法。

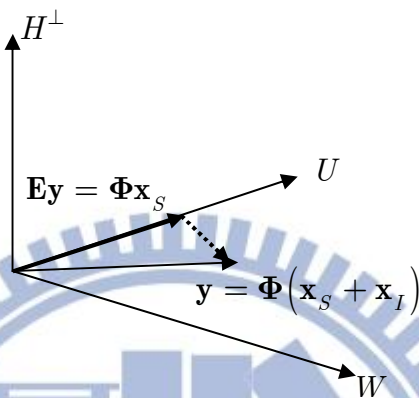


圖 8 將 $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_I)$ 沿著 W 投影到 U 上

其中 $H \triangleq W \oplus U \subset \mathbb{R}^N$

4.1.2 建立斜投影矩陣

讓 U 與 W 為 \mathbb{R}^N 的子空間，並假設 $\dim(U) = |\tilde{S}|$ 且 $\dim(W) = K_I$ ， $|\tilde{S}| + K_I \leq M$ 。對於 \mathbb{R}^M 空間中任意向量皆會沿著 W 被投影到 U 上的斜投影矩陣 \mathbf{E} 其數學定義為，

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \mathbf{U} & \mathbf{U}^T \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{U} & \mathbf{W}^T \mathbf{W} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{W}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M} \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times |\tilde{S}|}$ 是 U 的基底， $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M \times K_I}$ 是 W 的基底。

或者可以寫成，

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \quad (4.3)$$

其中， \mathbf{P}_{W^\perp} 是將 \mathbb{R}^M 空間中任意向量投影到 W^\perp 上的正交投影矩陣。

4.2 在含雜訊環境下使用斜投影矩陣造成的影響

眾所皆知，由於正交投影矩陣的轉置與原本矩陣相同，所以其特徵值只有 0 與 1；除此之外，由於矩陣的範數會等於其最大的奇異值，因此正交投影矩陣為單位範數，這使得對於任何一向量 \mathbf{x} 經過正交投影後其範數將不會被放大：

$\|\mathbf{P}\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2$ ，所以在 3.1 節中提出以正交投影消除干擾的方法，即使環境中含

有雜訊，但經過正交投影後雜訊的能量也不會被放大。但由於斜投影矩陣的奇異值不只有可能包含 0 與 1，甚至會是什麼大於 1 的值，因此任意向量 \mathbf{x} 經過斜投影後其範數將可能被放大與縮小，所以在這節要討論在什麼情況下會造成量測訊號中的雜訊被放得太大，而無法以斜投影矩陣去消除干擾訊號。

4.2.1 雜訊經過斜投影的能量上限分析

當量測到的訊號包含雜訊 \mathbf{n} ，經過斜投影後其數學表示如下，

$$\mathbf{E}\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}_s + \mathbf{E}\mathbf{n} \quad (4.4)$$

假設雜訊 \mathbf{n} 為平均值為 0 的白高斯雜訊且共變異數為 $\sigma^2\mathbf{I}_M$ ，則雜訊經過斜投影後的平均能量為，

$$\begin{aligned} E\left\{\|\mathbf{E}\mathbf{n}\|_2^2\right\} &= E\left\{(\mathbf{E}\mathbf{n})^T(\mathbf{E}\mathbf{n})\right\} \\ &= E\left\{\text{Tr}\left[(\mathbf{E}\mathbf{n})^T(\mathbf{E}\mathbf{n})\right]\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{E\left[(\mathbf{E}\mathbf{n})(\mathbf{E}\mathbf{n})^T\right]\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{E\left[\mathbf{E}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{E}^T\right]\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{\sigma^2 \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}^T\right\} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 λ_i 為 $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ 的特徵值， $i = 1, 2, \dots, M$ 。

因此，如果 $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ 特徵值很大，則對於高斯雜訊經過斜投影後，將會造成雜訊平均能量放大使得在重建訊號時其還原效能變得很差。如果從幾何上觀察，可以從 U 與 W 的主要角(Principal angle)來討論，主要角如定義(4.1)，

定義 4.1：主要角是對兩個子空間的幾何上的夾角，對於兩個子空間 U 與 W 的第 i 個主要角 θ_i 定義是，

$$\theta_i = \arccos\left(\max_{\mathbf{u} \in U} \max_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{u}^T \mathbf{w}\right) = \arccos\left(\mathbf{u}_i^T \mathbf{w}_i\right) \quad (4.6)$$

其中 $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1$ ， $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j = 0$ ， $i \neq j$

引理 4.2：斜投影矩陣 \mathbf{E} 使得在 \mathbb{R}^M 空間中任意向量皆會沿著 W 投影到 U 上。令 α_i 為 \mathbf{E} 的奇異值， $i = 1, 2, \dots, M$ ，則 σ_i 與 U 和 W 的第 i 個主要角 θ_i 關係式為

$$\sigma_i = \frac{1}{\sin \theta_i} \quad (4.7)$$

從引理(4.2)可以知道，若 U 與 W 的主要角越小，則 \mathbf{E} 的奇異值會越大，使得

$\sum_{i=1}^M \lambda_i$ 值越大，造成了雜訊的平均能量放大，如圖 9 所示；

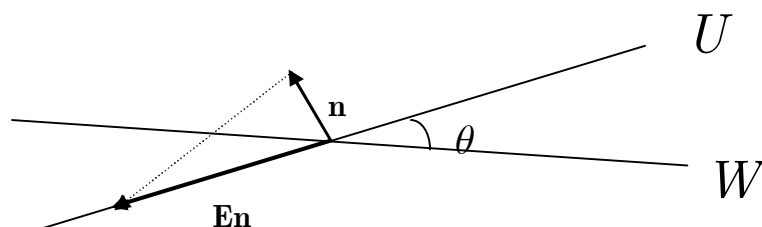


圖 9 當 U 與 W 夾角很小，則雜訊能量將被放大

但是當 U 與 W 的主要角越大時，則斜投影矩陣會使得雜訊能量經過斜投影後能量變小，如圖 10 所示。

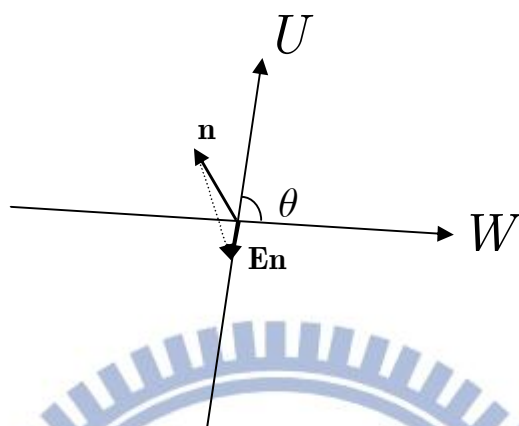


圖 10 當 U 與 W 夾角很大時，則雜訊能量將會衰減

從 U 與 W 的最小主要角可以得到經過斜投影後雜訊的能量上限，

$$\|\mathbf{E}\mathbf{n}\|_2 \leq \varepsilon_2 \quad (4.8)$$

其中 ε_2 推導如下：

(1) $\|\mathbf{E}\|_2 = \sigma_{\max}$ ， σ_{\max} 為 \mathbf{E} 最大的奇異值

(2) 由(4.7)可以知道 $\sigma_{\max} = \frac{1}{\sin \theta_{\min}}$

綜合上述，可以得到，

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\mathbf{n}\|_2 &\leq \|\mathbf{E}\|_2 \cdot \|\mathbf{n}\|_2 \\ &= \frac{1}{\sin \theta_{\min}} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3 重建訊號

以 Φ 為感測矩陣並使用 l_1 -最小化去還原訊號 $\hat{\mathbf{x}}$ ，

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ s.t. } \|\mathbf{E}\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon_2 \quad (4.10)$$

其中， $\|\mathbf{E}\mathbf{n}\|_2 \leq \varepsilon_2$ 。

可以得到還原誤差的上限，

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_S\|_2 \leq C_0 \varepsilon_2, \text{ 其中 } C_0 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_K} \quad (4.11)$$

所以整體的還原誤差上限是，

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_S\|_2 \leq \frac{4\sqrt{1 + \delta_K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_K} \cdot \frac{\varepsilon}{\sin \theta_{\min}} \quad (4.12)$$

如同在 4.2.1 節所做的討論，雜訊經過斜投影後其平均能量將會被放大，而從還原誤差上限可以知道雜訊的能量上限的確會受到 U 和 W 的最小主要角 θ_{\min} 的影響。

在接下來兩個章節要來詳細討論 U 和 W 的最小主要角與干擾成分還有與受限保距常數之間的數學關係。

4.4 干擾成分與雜訊能量放大關係分析

從前面的討論已經知道， U 與 W 的最小主要角與雜訊能量的放大有關。因此當干擾訊號越多，使得所對應的子空間與目標訊號對應的子空間的最小主要角更小，而這樣所設計出來的斜投影矩陣會造成了雜訊經過斜投影後其能量被放更大。在這一節要分析當干擾訊號增加時，造成的雜訊能量放大的數值分析。

當干擾訊號增加一個非零係數即其非零個數為 $K_I + 1$ ，則新的非零位置集合為 \bar{I} ，數學式為

$$\Phi_{\bar{I}} = [\Phi_I | \mathbf{t}] \in \mathbb{R}^{M \times (K_I + 1)} \quad (4.13)$$

其中 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ ：為新的非零係數所對應於 Φ 的行向量。

讓 \bar{W} 為 $\Phi_{\bar{I}}$ 的行空間，並且 \bar{W} 的基底為 $\bar{W} \in \mathbb{R}^{M \times (K_I + 1)}$ 。因此新的斜投影矩陣 \bar{E} 其數學式如下，

$$\bar{E} = \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{\bar{W}^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_{\bar{W}^\perp} \quad (4.14)$$

其中， $\mathbf{P}_{\bar{W}^\perp}$ 是將 \mathbb{R}^M 空間中任意向量投影到 \bar{W}^\perp 上的正交投影矩陣。

從前面的討論已經知道， U 與 \bar{W} 的主要角與斜投影矩陣 \bar{E} 的奇異值有關，所以將 \bar{E} 展開後，可以得到以下數學式，

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{\bar{W}^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_{\bar{W}^\perp} \\ &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\bar{W}}) \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\bar{W}}) \\ &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_W - \Delta \mathbf{P}) \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_W - \Delta \mathbf{P}) \\ &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T (\mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{P}) \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{P}) \\ &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{P} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中，

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{t} \left(\mathbf{t}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{t} \right)^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \quad (4.16)$$

引理 4.4： 當 $\Delta \mathbf{A}$ 夠小時，則

$$\left(\mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \right)^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \quad (4.17)$$

由引理(4.4)，可以將 $\bar{\mathbf{E}}$ 近似成以下數學式，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{P} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \left(\mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{P} \right) \\ &\approx \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{E} \\ &= \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.18)$$

其中，

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{P} + \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{P} \mathbf{U} \cdot \left(\mathbf{U}^T \mathbf{P}_{W^\perp} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \left(\mathbf{P}_{W^\perp} - \Delta \mathbf{P} \right)$$

定理 4.5： 對於一矩陣 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 的奇異值為 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ，則

$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \mathbf{E}$ 的奇異值為 $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \dots \geq \tilde{\sigma}_p \geq 0$ 。讓 \mathbf{P} 為投影到 \mathbf{X} 行空間上的正交投影矩陣。則

則

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \left(\sigma_i + \xi_i \right)^2 + \eta_i^2 \quad (4.19)$$

其中

$$|\xi_i| \leq \|\mathbf{P}\mathbf{E}\|_2 \quad (4.20)$$

$$\inf \left[(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{E} \right] \leq \eta_i \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{E}\|_2 \quad (4.21)$$

從定理(4.5)可以得到 $\bar{\mathbf{E}}$ 近似的最大奇異值 $\bar{\sigma}_{\max}$ ，數學式如下，

$$\bar{\sigma}_{\max}^2 = \left(\sigma_{\max} + \xi_{\max} \right)^2 + \eta_{\max}^2 \quad (4.22)$$

其中

$$|\xi_{\max}| \leq \|\mathbf{P}\Delta\mathbf{E}\|_2, \quad (4.23)$$

$$\inf\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)\Delta\mathbf{E}\right] \leq \eta_{\max} \leq \left\|\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)\Delta\mathbf{E}\right\|_2, \quad (4.24)$$

其中， σ_{\max} 是 \mathbf{E} 最大的奇異值；

\mathbf{P} 是一個投影到 $\bar{\mathbf{E}}$ 行空間上的正交投影矩陣，且 $R(\bar{\mathbf{E}}) = U$ 。

由於 $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ 會投影到 U^\perp ，因此

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)\Delta\mathbf{E} = \mathbf{O} \quad (4.25)$$

從(4.24)可以知道 $\eta_{\max} = 0$ ，因此(4.22)最後為，

$$\bar{\sigma}_{\max}^2 \simeq \left(\sigma_{\max} + \xi_{\max}\right)^2 \quad (4.26)$$

因為 ξ_{\max} 為未定正負的值，所以從公式上無法知道 $\bar{\sigma}_{\max}$ 與 σ_{\max} 大小關係。因此增加一個新的干擾成分所設計的斜投影矩陣對於雜訊來說，能量有可能被放大或縮小，如圖 14 的模擬結果。但隨著干擾訊號成分的增加，干擾訊號與目標訊號所對應的子空間彼此將會越靠越近，使得則 \bar{W} 與 U 的最小主要角 $\bar{\theta}_{\min}$ 與 W 與 U 的最小主要角 θ_{\min} 關係為，

$$\bar{\theta}_{\min} \leq \theta_{\min} \quad (4.27)$$

並且從引理(4.2)可以知道，

$$\bar{\sigma}_{\max} \simeq \frac{1}{\sin \bar{\theta}_{\min}}, \quad \sigma_{\max} \simeq \frac{1}{\sin \theta_{\min}} \quad (4.28)$$

所以 $\bar{\sigma}_{\max} \geq \sigma_{\max}$ ，因此可以知道 $\xi_{\max} \geq 0$ 。所以對於 $\bar{\mathbf{E}}$ 的最大奇異值可以得到，

$$\bar{\sigma}_{\max} \simeq \sigma_{\max} + \xi_{\max} \quad (4.29)$$

從這裡可以知道，如果使用斜投影消除干擾訊號，則每當增加了一個新的干擾成分則雜訊能量上限會增加 $\varepsilon \xi_{\max}$ ，

$$\begin{aligned}
 \|\bar{\mathbf{E}}\mathbf{n}\|_2 &\leq \frac{\varepsilon}{\sin \bar{\theta}_{\min}} \\
 &= \varepsilon \cdot \bar{\sigma}_{\max} \\
 &\simeq \varepsilon (\sigma_{\max} + \xi_{\max}) \\
 &\simeq \varepsilon_2 + \varepsilon \xi_{\max}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.4.1 模擬結果

表 2 模擬參數設定

模擬參數	設定值
訊號長度 N	1000
量測數目 M	200
目標訊號非零係數個數 K_s	10
訊號對雜訊比(SNR)	15(dB)
測試訊號數目	1000

從圖 11 可以隨著干擾成分逐漸增加，則 W 與 U 越來越近，平均來說這兩個子空間的最小主要角會越來越小。

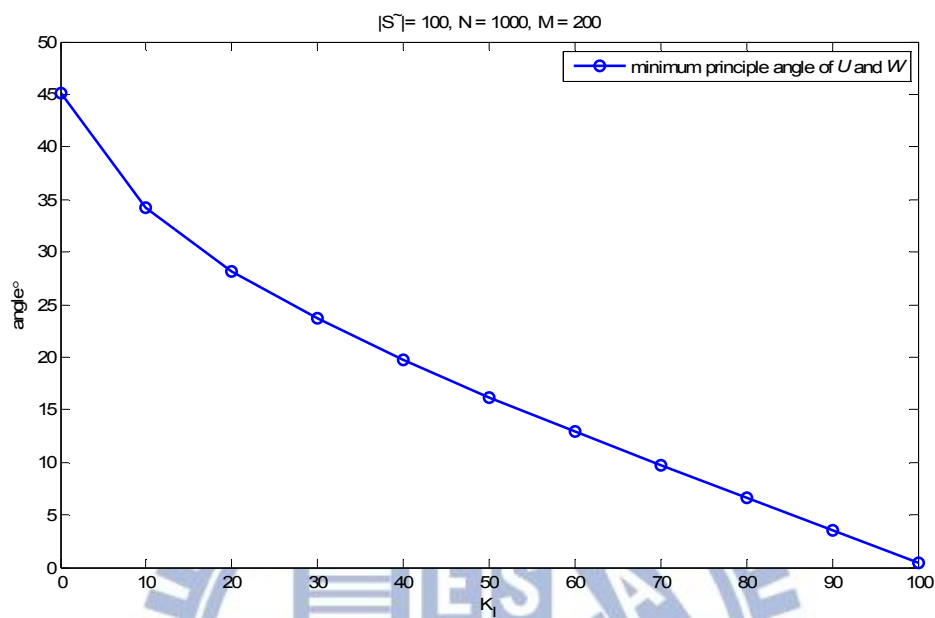


圖 11 W 與 U 的最小主要角對應於 K_I

由圖 12 可以知道，當干擾成分不多時，雜訊經過斜投影後能量會被衰減，這是因為斜投影矩陣 \mathbf{E} 其最大奇異值仍介於 0 到 1 之間，因此 $\|\mathbf{E}\mathbf{n}\|_2 \leq \|\mathbf{n}\|_2$ 。但隨著干擾成分逐漸增加，很明顯的雜訊能量開始被放大，因此以斜投影消除干擾的方法隨著干擾成分增加將無法再佔有優勢。

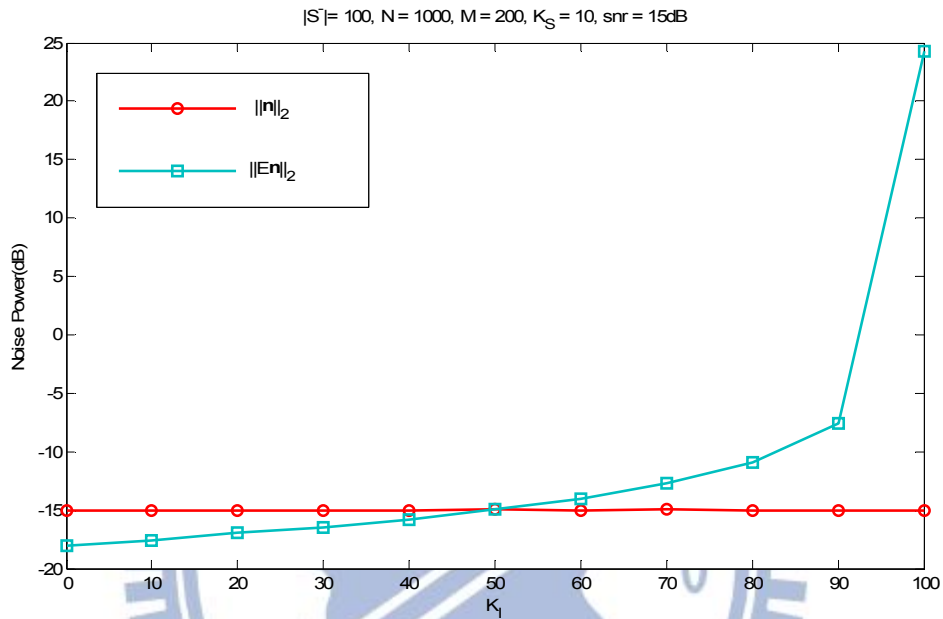


圖 12 雜訊經過斜投影後對應於 K_I 的範數變化

4.5 受限保距常數與雜訊能量放大關係分析

由 4.2 節可以知道雜訊能量上限經過斜投影後其放大的比例與 U 與 W 的最小主要角 θ_{\min} 相關，在這一節則是要討論 θ_{\min} 與 δ_K 之間的關係式。由[10]可以知道定理(4.3)，

定理 4.3：對於在 \mathbb{R}^N 空間中兩個互相正交的向量 \mathbf{x}_S 與 \mathbf{x}_I ，經過量測後其餘弦夾角會小於 Φ 的受限保距常數 δ_K ，數學式如下，

$$\frac{|\langle \Phi \mathbf{x}_S, \Phi \mathbf{x}_I \rangle|}{\|\Phi \mathbf{x}_S\|_2 \|\Phi \mathbf{x}_I\|_2} = \cos \theta \leq \delta_K \quad (4.31)$$

其中 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $0 < \delta_K < 1$ 。

從定理(4.3)可以知道以下兩個關係式，

$$0 \leq \theta_{\min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.32)$$

$$\cos \theta \leq \delta_K \Leftrightarrow \cos^{-1} \delta_K \leq \theta, \quad (4.33)$$

從(4.32)與(4.33)可以得到兩個可能的 θ_{\min} 與 δ_K 的關係式，並且能推導出兩個可能的

的 $\frac{1}{\sin \theta_{\min}}$ 上限，推導如下，

(1) 當 $0 \leq \theta_{\min} \leq \cos^{-1} \delta_K \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，可以得到，

$$0 \leq \sin \theta_{\min} \leq \sqrt{1 - \delta_K^2} \leq \sin \theta \leq 1 \quad (4.34)$$

因此可以得到，

$$1 < \frac{1}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_K^2}} \leq \frac{1}{\sin \theta_{\min}} \leq \infty \quad (4.35)$$

(2) 當 $0 \leq \cos^{-1} \delta_K \leq \theta_{\min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，可以得到，

$$0 \leq \sqrt{1 - \delta_K^2} \leq \sin \theta_{\min} \leq \sin \theta \leq 1 \quad (4.36)$$

因此可以得到，

$$1 \leq \frac{1}{\sin \theta_{\min}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_K^2}} \leq \frac{1}{\sin \theta} \leq \infty \quad (4.37)$$

從以上推導可以知道， θ_{\min} 與 δ_K 的大小有關，換句話說，使用斜投影矩陣去做干擾消除則其雜訊能量上限放大比例與 δ_K 大小有關，如果 δ_K 越小則真正的雜訊能量被放大的比例也會比較小，反之亦然。

4.5.1 模擬結果

在這一節模擬中，主要先證實 δ_K 的大小會影響 θ_{\min} ，接著是隨著干擾成分增加會使得 θ_{\min} 變小，導致雜訊經過斜投影後能量上升。

表 3 模擬參數設定

模擬參數	設定值
訊號長度 N	1000
量測數目 M	$K_S \cdot \log(N/K_S) / \delta_K^2$
目標訊號所有可能非零係數個數 $ \tilde{S} $	100
測試訊號數目	1000

首先從圖 14 可以知道， δ_K 大小的確會影響 θ_{\min} ，這是因為當 δ_K 很小時， $\Phi_{\bar{S}}$ 與 Φ_I 相關性低，這表示他們各自所對應的行空間 U 與 W 的最小主要角大。隨著 δ_K 逐漸提高，也同時導致 U 與 W 兩個子空間越來越接近，則 θ_{\min} 越小；當 δ_K 很大時可以由模擬圖知道 U 與 W 兩個子空間彼此非常靠近。

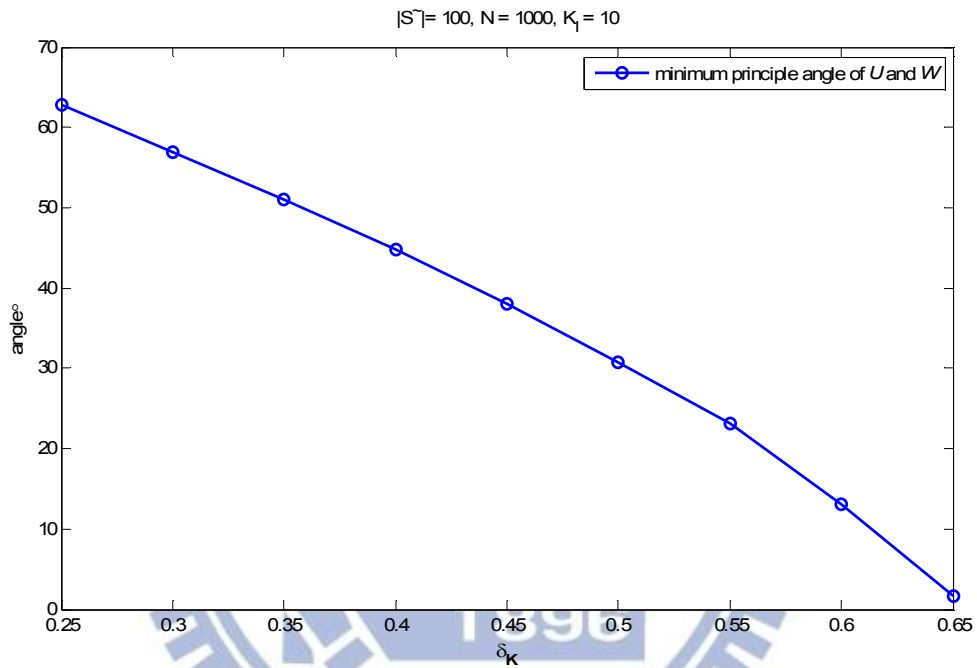


圖 13 U 與 W 最小主要角的角度對應於 δ_K

從圖 15 可以知道，當 δ_K 小的時候，雜訊經過斜投影時其能量會變小，這是由於由於相對應的 θ_{\min} 大，使得雜訊斜投影後能量減少。但隨著 δ_K 逐漸上升， U 與 W 兩個子空間越來越接近，使得雜訊能量逐漸被放大，並且當 δ_K 大於一定值後，雜訊能量將會開始大於原本能量，此時從圖 16 可以知道其還原效能開始嚴重衰減。

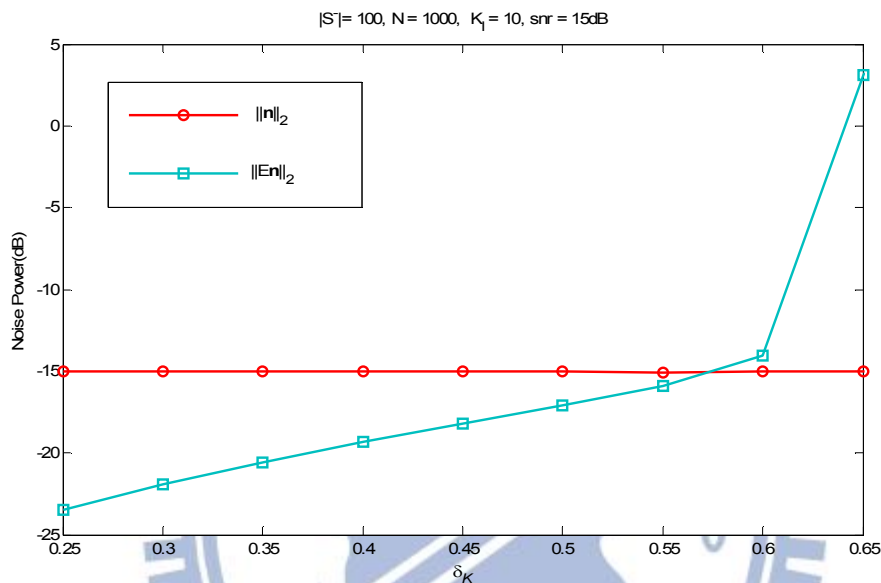


圖 14 雜訊經過斜投影後對應於 δ_K 的能量大小

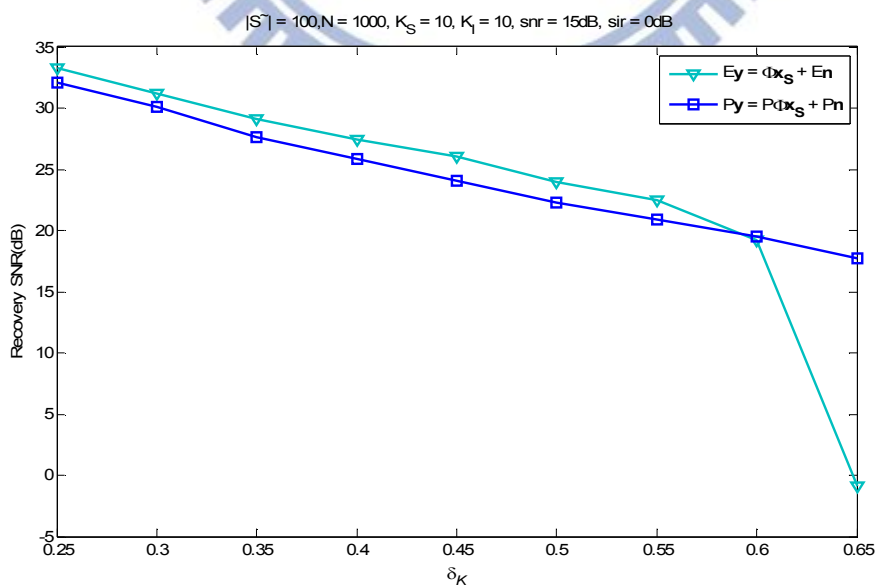


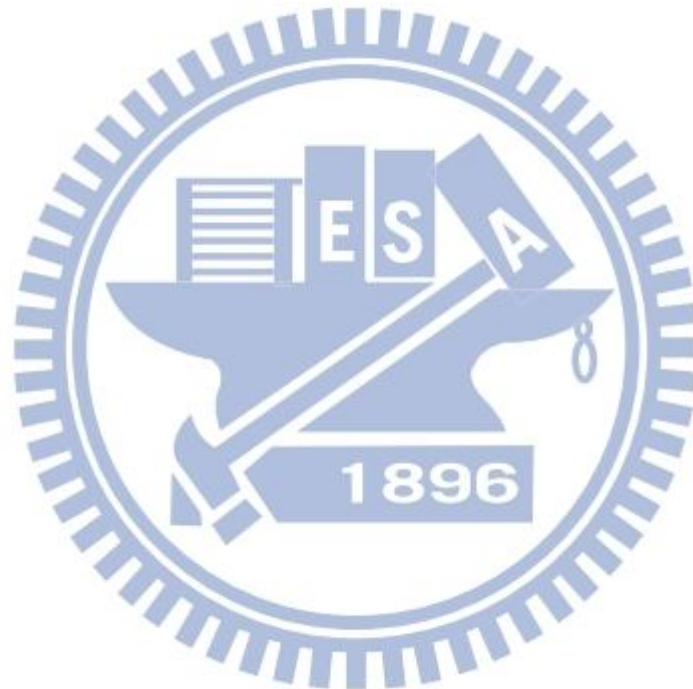
圖 15 斜投影消除干擾與正交投影消除干擾對應於 δ_K 的 Recovery SNR 比較

第五章 結論

相較於傳統的尼奎斯取樣理論，壓縮式感測技術打破了取樣速率必須高於訊號的兩倍頻寬才能完美重建的要求，因此若將此技術實際應用在無線通訊上，代表著訊號的取樣與處理都能在很低的速率之下完成，這也反映著此技術未來應用上的廣泛。但由於往往在寬頻中量測的訊號會包含干擾，但基於壓縮式感測的訊號處理卻容易受到干擾以及雜訊的影響，因此在這情況下去考慮消除干擾訊號的架構是必須的。有鑑於此，我們提出了兩種消除干擾的方法，首先是針對[1]所提出的正交投影消除干擾的方法去分析，雖然[1]提出的方法中干擾訊號的確被消除了，但卻同時使得目標訊號壓縮域上的幾何架構上被改變，因此我們提出了另一種方法去保留目標訊號原始架構，雖然造成雜訊的成分被提高了但在低訊雜比的環境下重建效能將能獲得略為的改善，從圖 7 的模擬結果可以得到證實，但在高訊雜比的環境下，由於我們提出的方法含了既有的雜訊成分，因此由圖 6 可以知道我們這方法其重建效能會差於[8]。

第二種則是假設在知道目標訊號在空間中所有可能的分佈下所提出的斜投影干擾消除，在這方法中能夠保證不影響目標訊號在壓縮域上的架構的情況下消除干擾，但由於斜投影矩陣會造成雜訊能量衰減與放大，因此使用斜投影去消除干擾的方法有其限制所在。在論文的後半部我們從兩個部分去討論雜訊所受到的影響以及其還原效能，首先從數學分析以及模擬中可以知道當干擾訊號以及目標訊號在整個訊號空間中彼此對應的子空間的最小主要角越小，則雜訊能量將被嚴重放大；此外在固定訊號長度下，當感測矩陣受限保距常數越大，表示相對應的量測數越小，這也使得訊號相對應的子空間的最小主要角變小，雜訊能量也因此隨之放大，因此從圖 16 可以知道此方法在受限保距常數小時其還原效能優於[8]，但隨著受限保距常數增加而使得效能衰減。

由於我們所提出的兩種方法中各有其缺點所在，因此接下來想討論是否存在一矩陣，能在消除干擾訊號的同時保留感測矩陣其互相關(mutual-coherence)，由於感測矩陣的互相關越小則表示其受限保距常數越小[12]，因此希望能從這一點出發去進行討論。

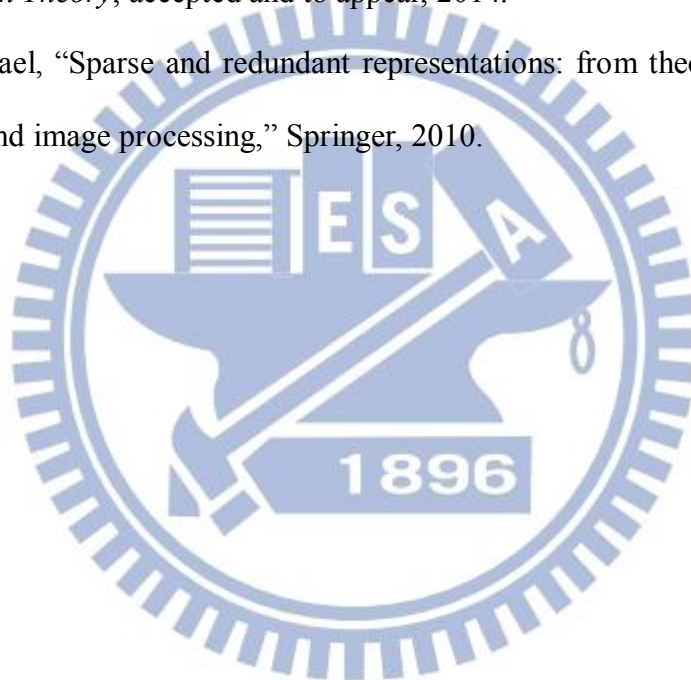


參考文獻

- [1] M. Davenport, P. Boufounos, and R. Baraniuk, “Compressive domain interference cancellation,” in *Proc. Structure et Parcimonie Pour la Représentation Adaptative de Signaux (SPARS)*, Saint-Malo, France, Apr. 2009.
- [2] M. Davenport, M. Duarte, Y. C. Eldar, and G. Kutyniok, “Introduction to compressed sensing,” chapter in *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2011.
- [3] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 8, pp. 1207-1223, Aug. 2006.
- [4] E. J. Candès, “Compressive sampling,” *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Madrid*, Aug. 22-30, 2006
- [5] E. J. Candès and T. Tao, “Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?,” *IEEE Trans. Information Theory*, pp. 5406–5425, 2006.
- [6] R. G. Baraniuk, “Compressive sensing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 4, pp. 118-124, July 2007.
- [7] E. J. Candès and M. B. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 21-30, March 2008.
- [8] E. J. Candès, “The restricted isometry property and its implications in compressive sensing,” *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 346, issue 9-10, pp. 589-592, May 2008.
- [9] S. Hwang, S. Jang, D. Kim, and J. Seo, “An MMSE-based compressive domain interference cancellator for wideband systems,” *IEEE Computer and Automation*

Engineering (ICCAE), 2010 The 2nd International Conference, vol. 2, pp. 359-362, 2010.

- [10] Vaswani, Namrata, and Wei Lu, “Modified-CS: Modifying compressive sensing for problems with partially known support, ” *IEEE Trans. Signal Processing*, pp. 4595-4607, 2010.
- [11] Ling-Hua Chang and Jwo-Yuh Wu, “An improved RIP-based performance guarantee for sparse signal recovery via orthogonal matching pursuit,” *IEEE Trans. Information Theory*, accepted and to appear, 2014.
- [12] Elad Michael, “Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing,” Springer, 2010.



附錄一 (3.16)的證明

$\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n}\|_2^2$ 上限的推導如下，

(1)

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n}\|_2^2 &= \|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi\mathbf{x}_S\|_2^2 + \|\mathbf{P}\mathbf{n}\|_2^2 \\ &= \left\| \Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} \Phi_I^T \Phi_S \tilde{\mathbf{x}}_S \right\|_2^2 + \|\mathbf{P}\mathbf{n}\|_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

其中， $\tilde{\mathbf{x}}_S$ 為集合 \mathbf{x}_S 所有非零位置值的向量， $\tilde{\mathbf{x}}_S \in \mathbb{R}^{K_S}$

Φ_S 為集合相對於 \mathbf{x}_S 非零位置所相對應 Φ 的行向量， $\Phi_S \in \mathbb{R}^{M \times K_S}$

Φ_I 為集合相對於 \mathbf{x}_I 非零位置所相對應 Φ 的行向量， $\Phi_I \in \mathbb{R}^{M \times K_I}$

並根據三角不等式，可以得到

$$\left\| \Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} \Phi_I^T \Phi_S \tilde{\mathbf{x}}_S \right\|_2^2 \leq \left\| \Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \left\| \Phi_I^T \Phi_S \right\|_2^2 \cdot \left\| \tilde{\mathbf{x}}_S \right\|_2^2 \quad (\text{A.2})$$

(2) 由於 Φ_I 的秩數為 K_I ，所以對 Φ_I 做奇異值分解(Singular value Decomposition)

可以得到，

$$\Phi_I = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (\text{A.3})$$

其中， $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ， $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{K_I \times K_I}$ ：皆為正交單範矩陣；

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{M \times K_I}$ ：在右上三角的斜邊上有奇異值 σ_i ， $i = 1, 2, \dots, K_I$ ，其餘位置皆為零，並且

$$\sqrt{1 + \delta_K} \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{K_I} \geq \sqrt{1 - \delta_K} > 0 \quad (\text{A.4})$$

，其數學式表示如下，

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{K_I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

將 $\Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1}$ 展開可以得到，

$$\begin{aligned} \Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} &= \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{D}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{V}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{V} (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中，

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{K_I}^{-2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

因此可以知道，

$$\mathbf{D} (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{K_I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{K_I}^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_{K_I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

最後可以得到，

$$\left\| \Phi_I (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} \right\|_2 \leq \frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_K}} \quad (\text{A.9})$$

(3) 根據引理(3.1)可以得到 $\|\Phi_I^T \Phi_S\|_2 \leq \delta_K$

引理 3.1 當 Φ 的受限保距特性為 δ_r ，讓 S 與 I 為對應於非零位置的兩個互斥的集

合，並且兩個集合的元素個數相加不會超過 r ，則 $\|\Phi_S^T \Phi_I\|_2 \leq \delta_r$ 。

(4) 結合上述的推導，可以得到，

$$\|(\mathbf{P} - \mathbf{I})\Phi \mathbf{x}_S + \mathbf{P}\mathbf{n}\|_2^2 \leq \frac{\delta_K^2}{1 - \delta_K} \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_S\|_2^2 + \varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 \quad (\text{A.10})$$

