

## 第二章 二維電子氣系統&理論介紹

本章會先介紹二維電子氣系統是如何形成的，二維電子氣系統的一些物理特徵值，並簡單描述量子化電導的成因。之後探討串聯形式的量子尖端接觸（QPC in series）跟抽運電流（pumping current）的形成理論。

### 2-1 二維電子氣系統介紹

我們所用的二維電子氣樣品是由 GaAs/AlGaAs 的異質接面結構所形成，AlGaAs 的能隙(energy gap)比 GaAs 的能隙還要大，當兩者接合時，會造成能帶的彎曲形成一個三角形位能井，如圖 2-1，在三角形位能井中，能階是量子化的，一般的費米能量(Fermi energy) $E_F \sim 10\text{meV}$ ，而在  $E_F$  以下只存在一個次能帶（subband），第二個次能帶比第一個次能帶能量高約  $150\text{meV}$ ，所以第二個次能帶沒有電子佔據，也等於說電子只活動於第一個次能帶，Z 方向的運動被侷限，即形成所謂的二維電子氣系統【13】。



圖 2-1 GaAs/AlGaAs 的異質接面結構。

由於 GaAs 和 AlGaAs 晶格常數很相近，所以其異質結構的介面(interface)有較好的晶格匹配度(lattice match)，較不會產生缺陷(defect)，而有良好的電子傳輸特性，即有較高的載子密度  $n_s$  (carrier density) 與遷移率  $\mu_s$  (mobility)。隨著分子束磊晶技術 (MBE) 的進步，更使得 GaAs/AlGaAs 的異質接面結構可以有更高的遷移率，電子的傳輸平均自由路徑 (mean free path)  $l_e$  也更長。

一般在二維電子氣的樣品時，為了要使樣品有更高的遷移率  $\mu_s$  及載子密度  $n_s$ ，會有

一些磊晶程序來提升這些樣品的特徵值，如圖 2-2，每一層皆有其作用。間格層（spacer layer），是為了減少因摻雜層（doping layer）產生的缺陷（defect）而易造成電子散射的機率；摻雜層是為了增加二維電子氣的電子；最上面的一層為覆蓋層（cap layer），目的是防止 AlGaAs 氧化。

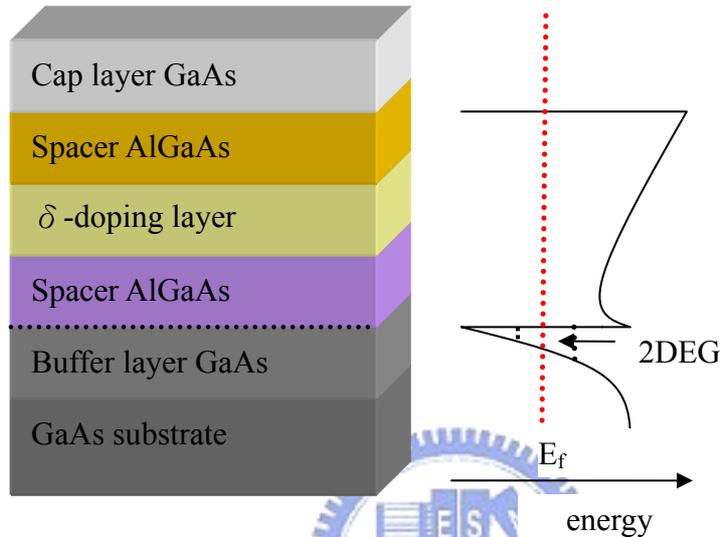


圖 2-2 GaAs/AlGaAs 的異質界面剖面圖，右圖是相對應的能帶圖，左邊是各個磊晶層的分佈位置。

## 2-2 實驗樣品的特徵值 ( $\mu$ 、 $n_s$ )

二維電子氣的遷移率  $\mu$  (mobility) 和載子濃度  $n_s$  (carrier density)，可藉由外加磁場下，縱向電阻率  $\rho_{xx}$  (longitudinal resistivity) 和霍爾電阻率  $\rho_{xy}$  (transverse or Hall resistivity) 的行為分析而得知，製作在含二維電子氣的 GaAs/AlGaAs 樣品上的 Hall bar 結構，如圖 2-3 所示，在 x 方向加一電流  $I$ ，可以量到縱向 (longitudinal) 的電位壓降

$V_x = V_1 - V_2$  與橫向 (transverse) 的電位壓降  $V_H = V_2 - V_3$ ，即可得縱向電阻率

$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_x} = \frac{V_x W}{I L}$ ，橫向電阻率  $\rho_{yx} = \frac{V_H}{I}$ 。在低磁場時， $\rho_{xx}$  是與磁場無關的， $\rho_{xy}$  隨磁場

增加而線性增加，這結果跟杜爾模型 (Drude model) 【13】對一般金屬的預期一致，但在高磁場時，因磁場增加，造成能階分裂，此能階即為 **Landau levels**，因此會  $\rho_{xx}$  出現震盪的行為，而  $\rho_{xy}$  表現出階梯狀的曲線， $\rho_{xx}$  的最小值恰對應在  $\rho_{xy}$  的平台位置，

如圖 2-4 所示，這些特性只在低溫下（4K）較明顯，此時杜爾模型在高磁場下已經不適用， $\rho_{xx}$  在高磁場所表現的震盪行為，稱為 Shubnikov-de Haas (SdH) oscillations【13】。如圖 2-4 所示。

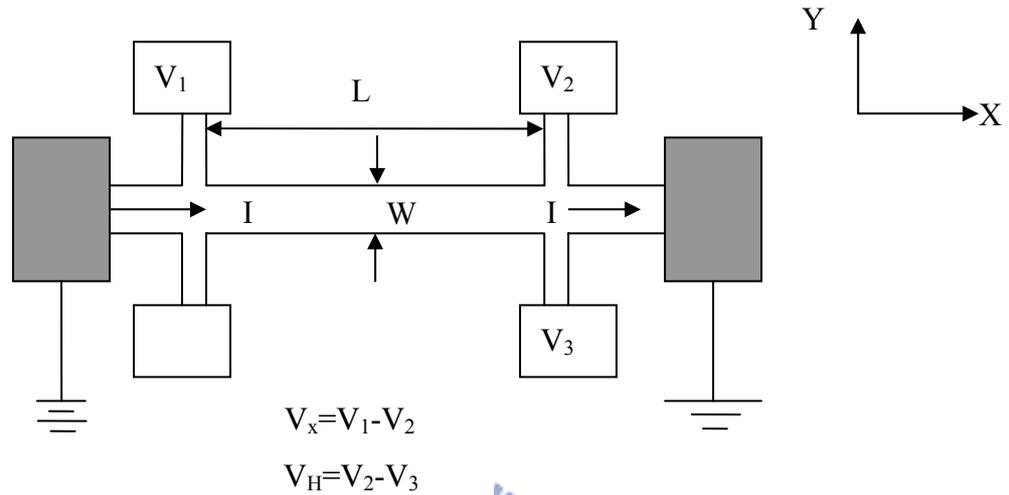


圖 2-3 Hall bar 結構圖。量測中，磁場加的方向為垂直紙面之 Z 軸方向。

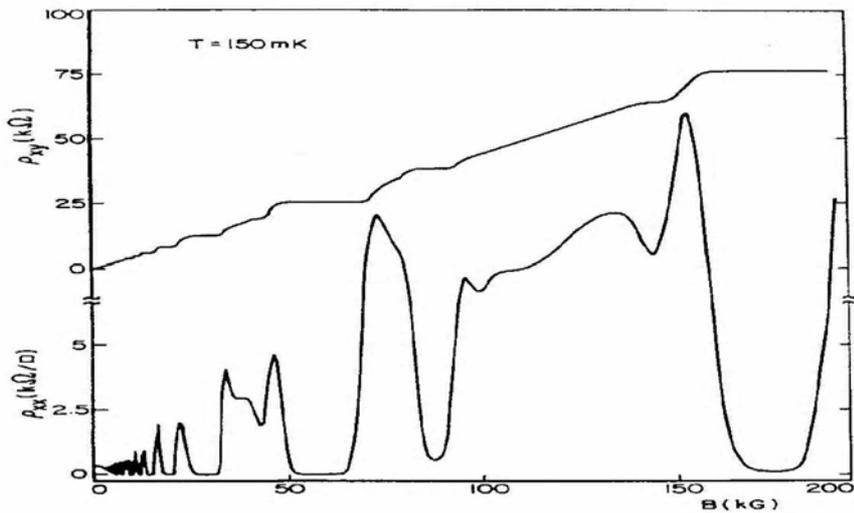


圖 2-4 縱向( $\rho_{xx}$ )與橫向( $\rho_{yx}$ )電阻率對磁場變化的關係圖，量測溫度在 150mK【14】。

在低磁場時，我們可以從量測到的結果代入以杜爾模型 (Drude model) 所推得的公式：

$$n_s = \left[ |e| \frac{d\rho_{yx}}{dB} \right]^{-1} = \frac{I}{|e| \frac{dV_H}{dB}} \quad (2.1)$$

$$\mu = \frac{1}{|e| n_s \rho_{xx}} = \frac{I}{|e| n_s V_x W L}$$

來得到  $n_s$  及  $\mu$ 。

我們所使用的 GaAs/AlGaAs 二維電子氣結構(樣品編號 5-70、5-98)是由以色列 Umansky 團隊所提供的，其樣品的一些物理特徵值列於表 2-1 中。

樣品 特性參數	5-70	5-98
電子密度 $n_s$	$1.88 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$	$2.151 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$
電子遷移率 $\mu$	$0.475 \times 10^6 \text{ cm}^2 / \text{Vs}$	$0.726 \times 10^6 \text{ cm}^2 / \text{Vs}$
費米波向量 $k_f = \sqrt{2\pi n_s}$	$1.087 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$	$1.16 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$
費米波長 $\lambda_f = \frac{2\pi}{k_f}$	57.8 nm	54.1 nm
電子平均自由路徑 $l_e = v_f \tau_e$	3.403 $\mu\text{m}$	5.527 $\mu\text{m}$

表 2-1 Umansky 團隊所提供的樣品，在我們實驗室所量得的樣品特徵值。

### 2-3 量子化電導

量子化電導的產生在介觀系統，在這系統內粒子的相位同調可以被保留。介觀 (Mesoscopic) 系統是介於宏觀與微觀之間，尺度約在微米 ( $10^{-6}$  米,  $\mu\text{m}$ ) 附近，在低溫下，電子的相位同調長度可以大於系統的尺寸大小，此時是屬於介觀範疇 (Mesoscopic regime)，依其物理特性又可以再分為擴散範疇 (diffusive regime)、彈道範疇 (ballistic regime) 及量子範疇 (quantum regime)。擴散範疇為  $W$  與  $L$  比電子的平均自由路徑 (mean free path) 大， $W$  與  $L$  為系統中的寬度跟長度，彈道範疇為  $W$  與  $L$  比電子的平均自由路徑小，量子範疇為  $\lambda_F$  與  $W$  相近時所表現出來的物理特徵。

窄通道 (NC) 或量子點接觸 (QPC) 是用來驗證電導量子化最清楚的方式，所謂的窄通道或量子點接觸，簡單的定義就是一個寬度跟長度比電子自由路徑還短的通道，且通道的兩端，各連接著熱庫 (reservoir)。在介觀系統中，若窄通道的長度跟寬度小於平均自由路徑，這是屬於彈道範疇，此時便會有量子化電導的現象出現，這結果被視為 Landauer-Buttiker 方程式  $G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n,m} T_{nm}$  的一個特例，在彈道傳輸中， $T_{nm} = |t_{nm}|^2 = \delta_{nm}$ 。在這表示式， $T=1$ ，即沒有散射，以古典物理的觀點來看， $T=1$ ，表示此為完美導體，電阻應為 0，而電導便是無窮大，但實際上卻非如此，即使  $T=1$ ，仍會有電阻存在，其原因在於電子在 QPC 中是彈道式傳輸，但量測時包含了相位同調長度以外的區域，所以會產生接觸電阻  $G_c^{-1}$  (contact resistance) 【13】，接觸電阻可由計算電流來求得，窄通道中，能階是量子化的，產生所謂的次能帶 (subband)，而電流在流過窄通道時是被均分於被佔據的次能帶中，

$$I = \frac{2e^2}{h} M \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{e} \Rightarrow G_c = \frac{2e^2}{h} M \quad (2.2)$$

$\mu_1$ 、 $\mu_2$  為窄通道左右兩邊的化學位能 (electrochemical potential)，所以可以求得接觸電阻

$$G_c^{-1} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)/e}{I} = \frac{h}{2e^2 M} \approx \frac{12.9k\Omega}{M} \quad (2.3)$$

式子中的  $M$  指的是窄通道中的次能帶數 (subband or transverse mode)，能帶數的多寡取決於控制窄通道寬度的侷限位能 (confining potential)  $U(y)$ ，其數目可由

$$M = \text{Int} \left[ \frac{k_f W}{\pi} \right] = \text{Int} \left[ \frac{W}{\lambda_f / 2} \right] \quad (2.4)$$

來求得， $\text{Int}(x)$  表示不大於  $x$  的最大整數， $W$  為窄通道的寬度。由這式子也可以了解，一般金屬的費米波長 (Fermi wavelength) 大約只有原子之間距離的等級，因此其次能帶數存在相當多，使得接觸電阻相對很小而不明顯；而半導體的費米波長約在幾十個奈米等級，利用電子束微影閘極作空間侷域可達到此範圍，因此我們可以很清楚的看到量子化電導。

最先在實驗上量測到量子化電導的是 Van Wees 與 Wharam 等人，他們於 1988 年利用分離閘極的技術，在低溫中量測 QPC 的電導，他們藉由在閘極上加負偏壓去控制窄通道的寬度，通道中被佔據的次能帶數也隨著改變，量得到的電導跟負偏壓的曲線呈現階梯狀，每個台階對應的值是  $2e^2/h$  的整數倍。圖 2-5 為 Van Wees 等人所量得的結果【1】。

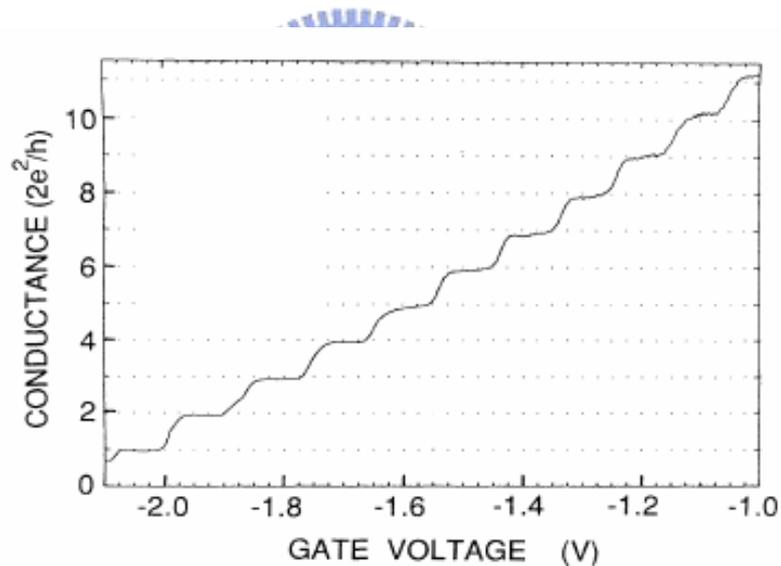


圖 2-5 1988 年，van Wees 所量測得的電導量子化圖形，隨著閘極的負偏壓改變，窄通道的寬度也隨之改變，其所佔據的次能帶數也跟著改，由圖可以很清楚的看到， $G$  是以  $2e^2/h$  的整數倍在變化【1】。

## 2-4 串聯形式的量子尖端接觸 (QPCs in series)

彈道傳輸的研究除了針對單一的窄通道外，更可以延伸出更複雜的結構來探討，串聯形式的量子尖端接觸便是一個令人感興趣的結構。串聯形式的 QPC 結構研究始於 1988 年，D.A.Wharam 及 M.Pepper 等人由實驗去探討在彈道範疇裡的雙重 QPC 電阻值跟個別 QPC 的電阻值的差異，若以古典的理論來看的話，兩個串聯的電阻值即等於個別電阻的和，此為歐姆範疇 (Ohmic regime)，而在彈道範疇的量子傳輸中，並不是簡單的可以用古典理論去解釋。

在 1989 年，L.P. Kouwenhoven 和 B.J.van Wees 等人的研究中，便以實驗來提出在彈道範疇中，串聯 QPC 跟個別 QPC 的電阻值可以區分為兩個不同的範疇來解釋【2】。一為絕熱傳輸範疇 (adiabatic transport regime)，另一為歐姆傳輸範疇 (ohmic transport regime)，在實驗上，他們發現隨著樣品加上磁場後，隨著磁場變大，其電子的傳輸形式便從 Ohmic addition 漸漸變成 adiabatic addition。圖 2-6 為 L.P. Kouwenhoven 和 B.J.van Wees 等人實驗的元件示意圖。

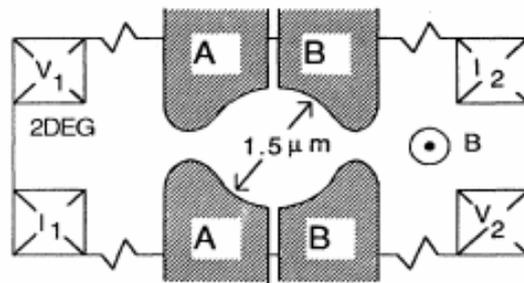


圖 2-6 L.P. Kouwenhoven, B.J.van Wees 等人實驗的元件概要圖，閘極對 A 和 B 各代表一對量子尖端接觸，兩者間隔著一直徑約 1.5 $\mu\text{m}$  的腔體 (cavity)【2】。

以量子力學的觀點描述，絕熱傳輸指的是電子在通過第一個 QPC 裡的特定次能帶時，通過第二個 QPC 時亦會維持在原本的能帶數，電子會依據第二個 QPC 中被佔據的能帶數做完全通過或完全反射，這可以說在絕熱範疇中，電導值是由兩個 QPC 中，次能帶數最少的窄通道來決定，歐姆傳輸的串聯 QPC 的電阻值會等於個別 QPC 電阻值的和，因為電子在通過第一個 QPC 後，會在第一跟第二個 QPC 中間做隨機的散射，能帶

不是維持在第一個 QPC 的次能帶上。因此在第一個 QPC 跟第二的 QPC 中間可視為一熱庫 (reservoir)，所以串聯形式 QPC 形同兩個獨立不互相影響的 QPC，使得其串聯的電阻值便是兩者相加。圖 2-7 (a)、(b) 分別表示絕熱傳輸跟歐姆傳輸的示意圖。

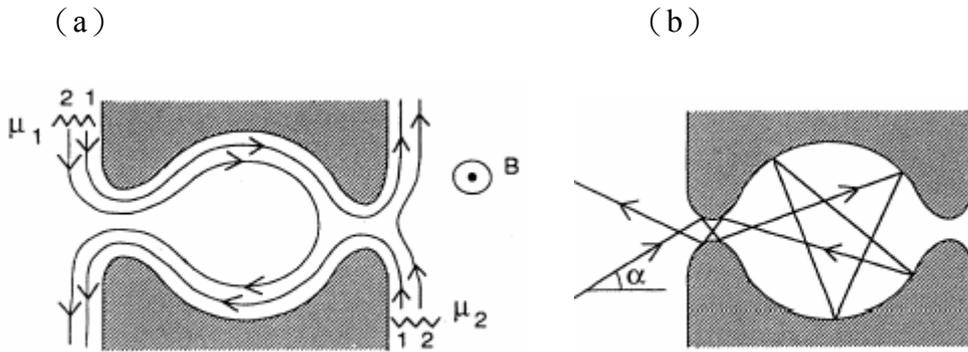


圖 2-7 (a) 樣品在加了高磁場後，電子沿著 edge state 傳輸，在腔體裡較少散射發生，此為絕熱傳輸；(b) 在不加磁場的情況下，電子通過第一個 QPC 後，在腔體中成隨機散射，此為歐姆傳輸【2】。

另外，在 1989 年，C. W. J. Beenakker 與 H. van Houten 也提出了理論解釋【5】，圖 2-8 為其理論模型的結構圖。

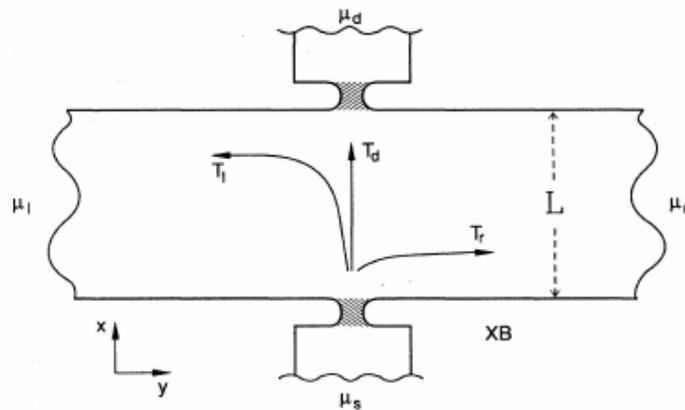


圖 2-8 串聯 QPC 的幾何結構圖，陰影部分為 QPC，兩對 QPC 間距  $L$ ，電子由 QPC1 流向 QPC2，方向為  $X$  方向， $\mu_s$ 、 $\mu_d$  為源極-汲極 (source-drain) 的化學位能， $\mu_l$ 、 $\mu_r$  為遠離 QPC 兩端的化學位能，可視為開放端。

電子從源極發射後，直接向第二對 QPC 前進的傳輸機率為  $T_d$ ，向  $\mu_l$ 、 $\mu_r$  的機率分別為  $T_l$ 、 $T_r$ ，歸一化後的傳輸機率為  $T_d + T_l + T_r = N_s - R_s$ ， $N_s$  為 lead 到量子尖端接觸中的

通道數目 (channel number),  $R_s$  為電子反射回源極的機率, 因此,  $N_s - R_s$  大約等於某一量子尖端接觸中的一維通道數目  $N$ , 因此:

$$G = (2e^2/h)(N_s - R_s) \approx (2e^2/h)N \quad (2.5)$$

由 Büttiker formula:

$$(h/2e)I_\alpha = (N_\alpha - R_\alpha)\mu_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} T_{\beta \rightarrow \alpha} \mu_\beta \quad (2.6)$$

此代表電流  $I_\alpha$  在 lead  $\alpha$  到各個化學能  $\mu_\beta$  的熱庫, 經由傳輸機率  $T_{\beta \rightarrow \alpha}$  (從熱庫  $\beta$  到  $\alpha$ ) 跟反射機率  $R_\alpha$  的關係式, 從他們的例子來看  $\alpha, \beta = s, d, r, l$ , 因為總電流必會流過這兩對 QPC, 所以我們可以設  $I_r = I_l = 0$ , 而  $I_s = -I_d = I$ , 由以上的假設, 可以推得:

$$G_{series} = \frac{1}{2} \left[ G + \frac{2e^2}{h} \left( T_d + \frac{(T_r - T_l)^2}{2(N_r - R_r) - T_r - T_l} \right) \right] \quad (2.7)$$

若假設在不加磁場的情況下 ( $B=0$ ), 我們知道電子往  $\mu_l, \mu_r$  傳輸的機率  $T_r = T_l = 0$ , 因此可以得到:

$$G_{series}(B=0) = \frac{1}{2} [G + (2e^2/h)T_d] \quad (2.8)$$

假如電子在通過每個量子尖端接觸時是無任何交互作用 (無相干性),  $T_d=0$ , 我們可以得到:

$$G_{series}(B=0) = \frac{1}{2} G \Rightarrow G_{series}^{-1} = G_1^{-1} + G_2^{-1} \quad (2.9)$$

此即為歐姆現象 (Ohmic addition)。

如果電子的傳輸都是筆直的 (direct), 則  $T_d = N_s - R_s = (h/2e^2)G$ , 代入上式之後, 可以得到:

$$G_{series} = G \quad (2.10)$$

此結果表示串聯 QPC 的電導值跟單一 QPC 的電導值是一樣的, 即為絕熱現象 (adiabatic

addition)。同樣的理論推導，1992 年，Y.Takagaki、D.K.Ferry 也有類似的結果【15】。

迄今，串聯 QPC 的研究大致已經有了一些結論，當電子在傳輸時，若彼此之間的相位同調性破壞，其傳輸的特性是歐姆範疇，即串聯的電阻等於兩個單獨 QPC 的電阻值相加；而電子在傳輸時，相位同調沒有破壞，其電子的傳輸特性是絕熱範疇，串聯 QPC 的電阻值是由兩個窄通道中次能帶數較少的窄通道來決定。對於我們所做的串聯 QPC 量測，是以改變兩對 QPC 之間的距離研究電子傳輸特性的變化，實驗方式跟結果類似 D. A. Wharam 等人在 1988 所發表的成果【3】，其實驗結構跟結果如圖 2-9 (a)(b) 所示。他們認為當兩對 QPC 距離很接近時，電子傳輸形式是絕熱傳輸，若在兩對 QPC 之間沒有散射產生，電子通過第一個 QPC 裡的特定次能帶時，通過第二個 QPC 時亦會維持在原本的能帶數，串聯的總電導值取決於通道中次能帶數較少的 QPC，即  $G = \min[G_1, G_2]$ 。除此之外，但我們亦發現了其他尚未被提起的現象，在第四章會做一詳細的介紹。

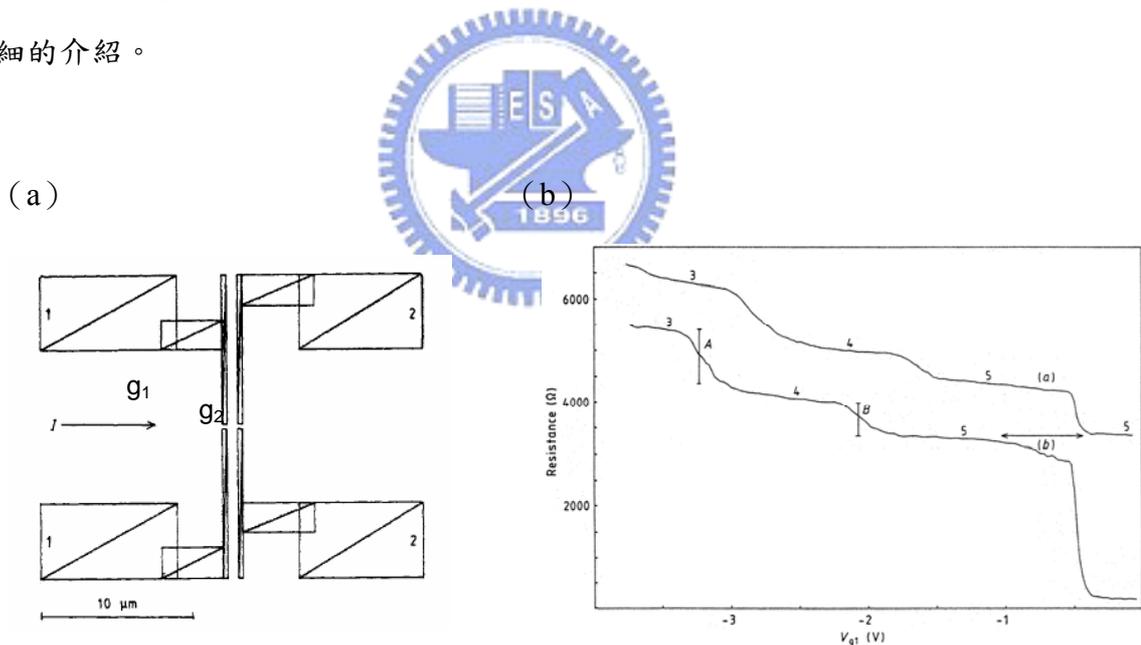


圖 2-9 D. A. Wharam 等人的實驗結構圖及量測結果。(a) 實驗結構圖，兩對閘極相距  $1\mu\text{m}$ ，閘極的線寬為  $0.3\mu\text{m}$ 。(b) 量測結果，其中曲線 a 為閘極  $g_2$  固定負偏壓在  $-1V$ ，曲線 b 為閘極  $g_2$  不加任何負偏壓【3】。

## 2-5 抽運電流 (pumping current)

對於抽運電流，我們可以做一簡單的定義：在一系統中，因局部性的擾動 (local perturbation) 產生自主性的直流電流，而不需外加偏壓 (bias)。最早提出抽運電流的理論是 Thouless，他認為在一維系統上控制一隨時緩變的電位，可產生電子傳輸的抽運機制【6】。產生抽運電流的機制有很多，但基本原理主要有兩個，分別為古典抽運 (classical pumping) 以及量子抽運 (quantum pumping)。

### 2-5-1 古典抽運

古典抽運可以如此描述：侷域電子在某些區域，並促使他們往既定的方向行進，形成電流。其產生的流程可用圖 2-10 (a) - (f) 來表示，圖中共有三支閘極來產生位障 (potential barrier)， $U_L$ 、 $U_R$  控制左右兩邊電極間的位障的大小以控制電子進出， $U_W$  控制系統的能階，操作這三支閘極便可能推動一電量  $\delta Q$  的電荷由左往右邊移動。以古典的觀點來看，當位障遠大於左右熱庫的化學位能時 ( $\mu \ll U$ )，電子便無法通過，圖 2-10 (c) 來看， $U_L$ 、 $U_W$  低， $U_R$  高時，由於左邊  $\mu$  大於系統的  $E_F$ ，電子可以從左邊進入，填系統內小於  $\mu$  且未佔據的態上。況且， $U_L$  低， $U_R$  高，電子只允許左邊進入，但無法穿遂出右邊位障，因此未能向右移出。圖 2-10 (d) 為  $U_L U_R$  同時在高位障時，此時前一刻從左邊進入的電量恰被侷限於中間的系統，便能侷限  $\delta Q$  的電量，下一刻若調高  $U_W$  降低  $U_R$ ，電子便可以流向右邊，因此  $U_L$ 、 $U_W$ 、 $U_R$  時變搭配得宜即可反覆循環，產生抽運電流，此為古典抽運原理。古典抽運有一重要特性是在整個系統來看，電子的同調性是被破壞的，如圖 2-10 (d) 便是很明顯的呈現電子跟外界阻隔。

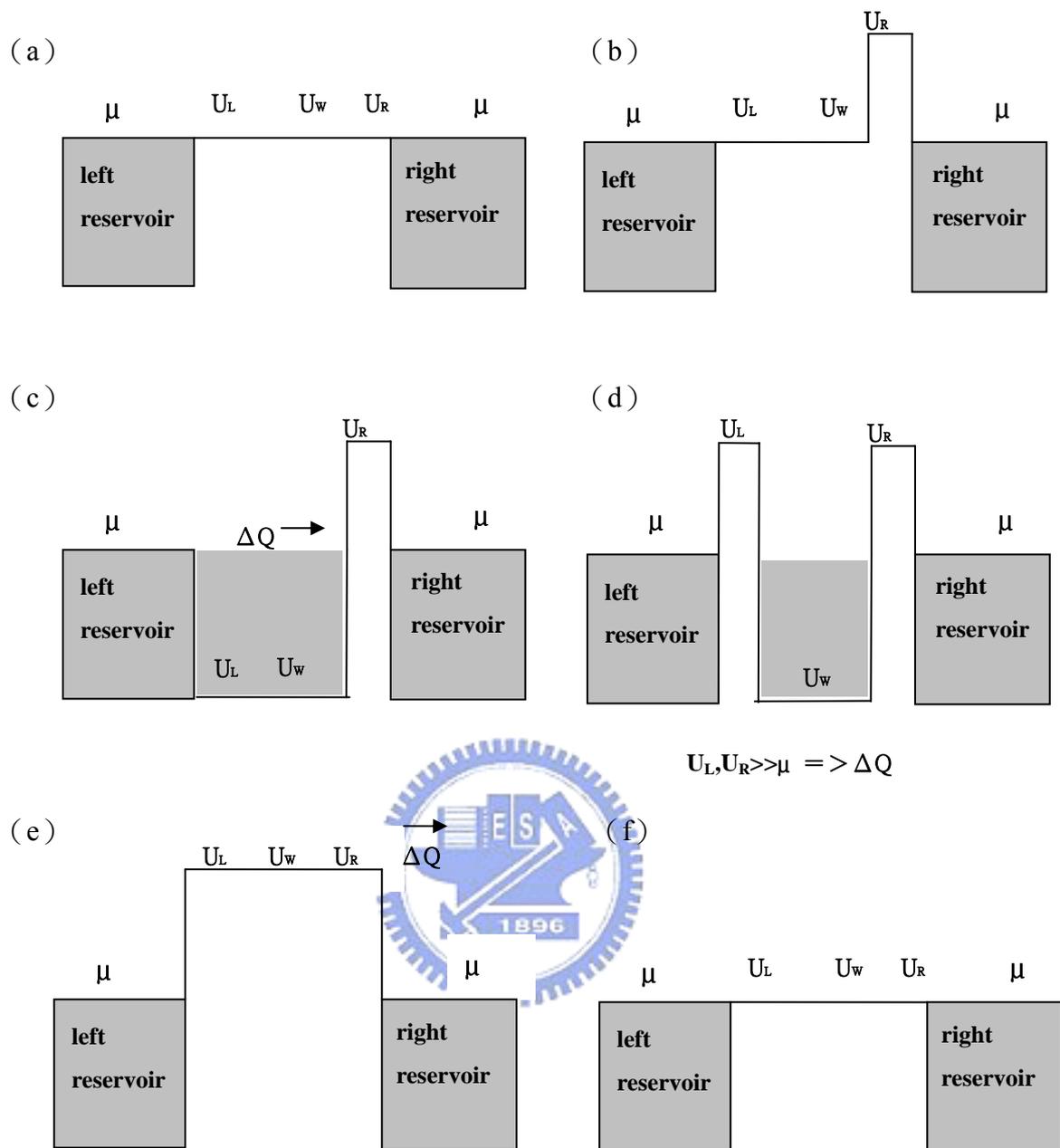


圖 2-10 (a) - (f) 古典抽運流程的示意圖。(a) - (f) 為控制三個位能障來促使電子由左往右移動的順序，形成一週期性循環【16】。

## 2-5-2 量子抽運

相較於古典抽運下，量子抽運的電子相位同調性並未被破壞，產生抽運電流需要破壞系統中左右對稱性，即粒子往左跟往右移動的對稱性，其一可藉震盪位障形成不穩定散射來破壞左右對稱性。不同於穩定位障（不隨時變位障）情況下，電子在經由不穩定位障（隨時震盪）散射下，能量  $E$  的電子在經由散射後，可以得到或失去一調變能量  $n\hbar\omega$ ，圖 2-11 即是電子在穩定及不穩定位障下散射的示意圖。量子系統可分為開放系統（open system）以及封閉系統（closed system），兩者的區別可用跟熱庫是屬於強耦合或是弱耦合來界定，開放系統屬於強耦合，電子在系統之間是屬於絕熱傳輸（adiabatic transport），封閉系統則屬於弱耦合，電子是以穿隧的方式進出系統。兩者產生的抽運電流的主要成因都是跟不穩定的散射來破壞左右對稱性有關，只是有些微的差別，以下便分開介紹開放系統跟封閉系統的抽運機制。

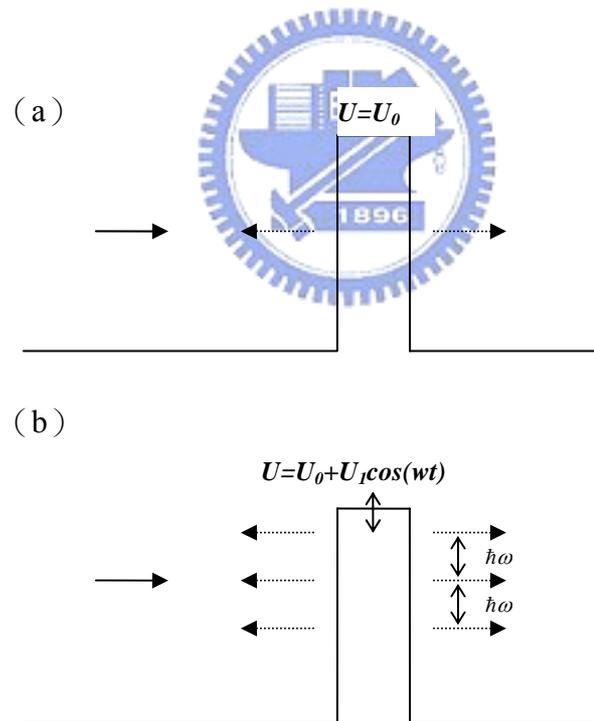


圖 2-11 電子在 (a) 穩定及 (b) 不穩定位障下的散射示意圖【16】。

## I、開放系統 (open system)

開放系統是屬於連續能階，系統的示意圖如圖 2-12 所示，當電子吸收能量  $\hbar\omega$  時，會產生能階之間的電子躍遷。根據泡利原理 (Pauli principle)，當能階  $E + \hbar\omega$  的能階無電子填滿時，一能量為  $E$  的電子便能吸收  $\hbar\omega$  的能量躍遷至而留下空能階  $E$ ，此現象可以視為一不平衡狀態的準電子-電洞對 (quasi-electron hole pair)。

當經由散射產生準電子-電洞之後，這些準粒子便可經由不同的通道 (leads) 離開散射區，若要計算經由通道  $\alpha$  所流過的 DC 電流  $I_\alpha$ ，則需先知道流向通道  $\alpha$  離開散射區域的準電子分佈函數  $N_\alpha^{(e)}$  以及準電洞分佈函數  $N_\alpha^{(h)}$ ，其中：

$$\begin{aligned} N_\alpha^{(e)} &= \hbar\omega \sum_\beta \sum_{n>0} n |S_{\alpha\beta,n}|^2 \\ N_\alpha^{(h)} &= \hbar\omega \sum_\beta \sum_{n>0} n |S_{\alpha\beta,-n}|^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$S_{\alpha\beta}$  為散射矩陣，由於時間反轉不變性 (time reversal invariance) 被震盪散射點  $U(t)$  破壞，因此：

$$\hat{S}(t) \neq \hat{S}(-t) \Rightarrow S_{\alpha\beta,n} \neq S_{\alpha\beta,-n} \quad (2.12)$$

因此準電子離開散射區通過通道  $\alpha$  的機率不等於準電洞離開散射區通過通道  $\alpha$  的機率，所以  $I_\alpha = eN_\alpha^{(e)} + (-e)N_\alpha^{(h)} \neq 0$  其中  $e$  ( $-e$ ) 分別表示電子跟電洞所帶的電荷，即產生一 DC 電流，此為開放系統產生抽運電流的基本原理【16】。

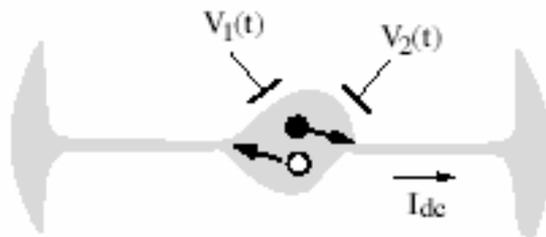


圖 2-12 開放系統示意圖。圖中的黑跟白點表示準電子-電洞對【16】。

## II、封閉系統 (close system)

封閉系統的示意圖如圖 2-13，系統屬於不連續能階，且  $\hbar\omega \ll \Delta E$ ， $\Delta E$  為能階大小 (level spacing)，在這情況下，位能震盪造成能量的交換不能產生電子在能階之間的躍遷。然而這些震盪能使每個能階  $E$  又分裂出其他能階，形成一能階階梯 (energy ladder)  $E_n = E + n\hbar\omega$ ，其中  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。假如抽運的參數 (pump parameters, ex: 位障) 以一小的振幅  $P_i(t) = P_{i,0} + P_{i,1} \cos(\omega t + \varphi_i)$  震盪， $P_{i,1} \ll P_{i,0}$ ，此時能階  $E_0$  跟穩定態時是一樣的，當  $n = 0$ ， $E$  為封閉系統中本徵波函數 (eigen wave function) 的建設性干涉之解；相較下，當  $n \neq 0$ ，邊帶 (side band) 為破壞性干涉之解。 $n > 0$ ，代表電子從震盪散射點吸收  $n$  個  $\hbar\omega$  能量；反之， $n < 0$  代表電子放出  $n$  個  $\hbar\omega$  能量至震盪散射點。若抽運的參數是以一較強的振幅震盪，則  $E = E(t)$ ，能階  $E$  不是常數，而變成一跟時間有關的函數。弱抽運 (weak pumping) 跟強抽運 (strong pumping) 都會產生抽運電流，若散射破壞了時間反轉不變性 (TRI)，則每個能階便會貢獻一些電流，換句話說：如果在穩定狀態或是說 TRI 未被破壞時，此時系統中的波函數屬於“駐波 (standing waves)”；若經過散射後，TRI 被破壞，此時波函數變成跑動 (running) 形式。圖 2-14 (a) (b) 為在弱抽運跟強抽運的能階示意圖，在 TRI 被破壞後，產生跑動形式的波，皆會造成電流。

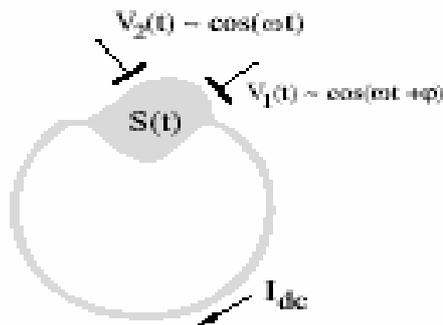


圖 2-13 封閉系統示意圖【16】。

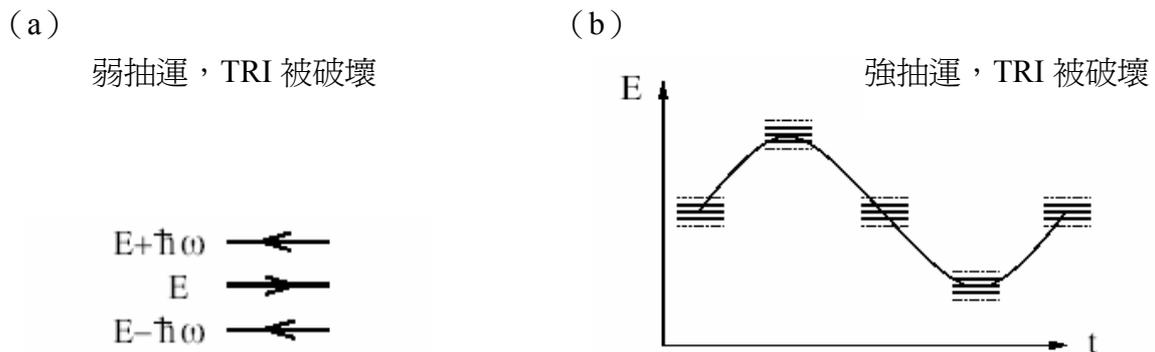


圖 2-14 (a) (b) 弱抽運跟強抽運的能階示意圖【16】。

介紹了抽運電流的產生原理之後，以下再分別介紹量子抽運中，封閉系統跟開放系統的實驗例子：

(a) 封閉系統：

1991 年，L.P. Kouwenhoven、A.T.Johnson 等人利用改變量子點左右位障，使之產生週期性震盪的方法來產生抽運電流【17】，其電子傳輸是屬於庫侖阻絕範疇 (Coulomb Blockade regime)，因此在介紹抽運電流的產生機制前，先大致介紹庫侖阻絕效應 (Coulomb Blockade)【18】。電子在封閉式量子點內傳輸，是以量子躍遷佔據分離能階，所以電子是以 one by one 的方式進出量子點，量子點中的電子數目是固定的，若量子點中要增加一個電子，所需的能量為  $U = e^2 / C$ ，此為量子點電位能 (charging energy)， $C = \sum_i C_i$ ，為量子點跟熱庫之間以及量子點跟閘極之間的總電容。而每個能階之間的電位能差為  $\mu_d(N+1) - \mu_d(N)$ ， $\mu_d(N)$  指第 N 個電子在量子點中的能量，電子可以穿遂的條件是當有一個空的能階  $\mu_d(N+1)$  為在兩邊熱庫之間的電位能時  $\mu_r < \mu_d(N+1) < \mu_l$ ， $\mu_r$ 、 $\mu_l$  分別代表量子點左邊跟右邊的熱庫電位能。電子穿遂至量子點時，量子點的電位能改變即為  $\mu_d(N+1) - \mu_d(N) = e^2 / C$ ，而當電子又穿遂出量子點之後，電位能又會降下來，如此重複這些過程，就稱為庫侖阻絕。Coulomb Blockade peak

現象發生的過程，可用圖 2-15(a)、(b)來作說明。

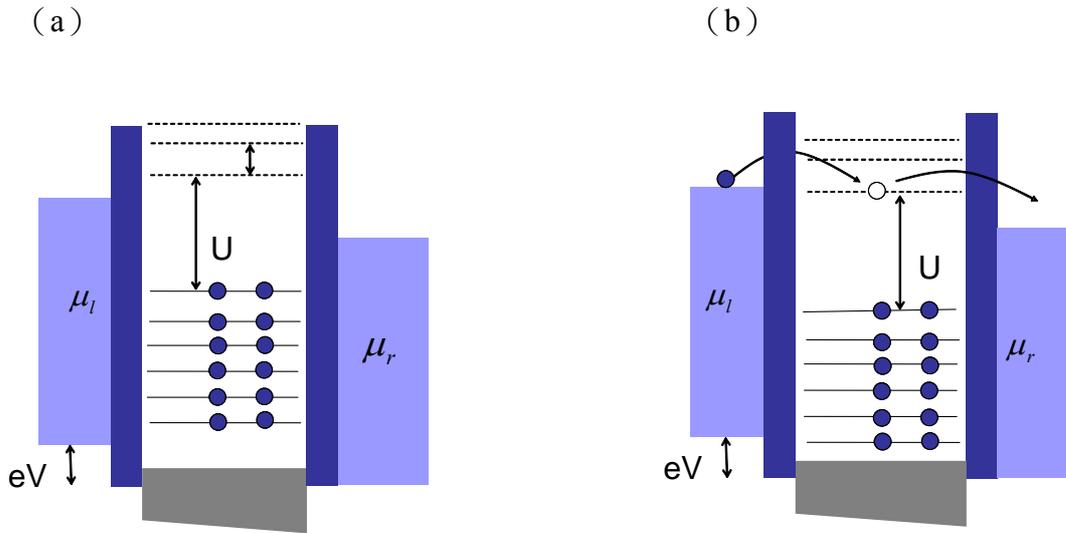


圖 2-15 量子點的位能概圖，電子分佈在一量子點內， $\mu_r$ 、 $\mu_l$ 為右邊跟左邊熱庫的化學位能， $V = \mu_l - \mu_r$ 。量子點內有分離的能階間距(level spacing) $\Delta$ ，charging energy， $U$ 。圖 (a) 中， $\mu_r$ 、 $\mu_l$ 之間沒有空的能階，所以電子無法穿遂過去。圖 (b) ， $\mu_r$ 、 $\mu_l$ 間存在一空能階，使得電子可以躍遷進入量子點內。

當量子點兩邊的位障 (barrier) 大小會改變，電子穿遂過位障的機率也隨之改變，位障變高，機率便變小；反之位障變小，其穿遂機率便變大。抽運電流即是因為量子點兩邊的位障做週期性的震盪而產生，其產生的過程可以以圖 2-16 (a) - (d) 來做說明。圖 2-16 表示的兩邊位障是以一相位差  $\pi$  做震盪，我們將一週期分為四部分來描述，(a)  $\mu_d(N+1)$  為空能階，電子可以穿遂進入此能階再出來，但以一形成抽運電流來說，電子以此形式的穿遂，其穿遂機率相較來看是比較小的，而以此產生的電流稱為多餘的漏電流 (unwanted leakage current)。(b) 當左邊位障降低時，電子從左邊穿遂進入量子點的機率便相對增加，同時的右邊位障升高，使電子更難以從量子點穿遂出右邊，(c) 當過了半個循環後，左右位障又回到原來平衡的狀態，不同的是，現在有  $N+1$  的電子侷限在量子點內。(d) 右邊位障降低，左邊位障升高，使的量子點內的電子可以穿遂到右邊，而左邊無電子進入。以上即為簡單的抽運電流形成過程，當這些過程是以頻率  $f$  來做循環，可以推得  $I = ef$ ，若在  $\mu_r$ 、 $\mu_l$  之間存在  $n$  個空能階，則可以知道一次循環有  $n$  個電子通過，所以  $I = nef$ 。

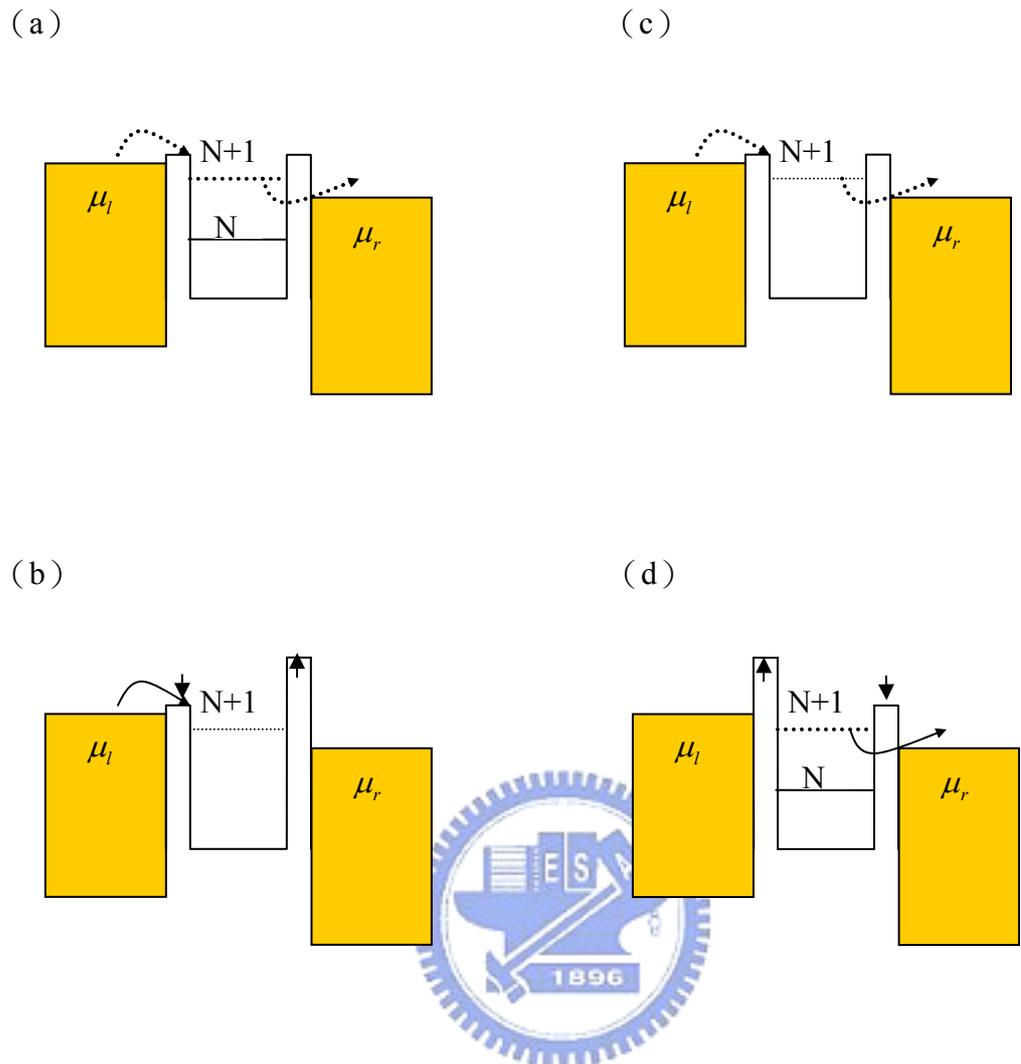


圖 2-16 (a) - (d) 抽運電流的產生流程簡圖， $\mu_r$ 、 $\mu_l$  為右邊跟左邊熱庫的化學位能，能階  $N$  表示  $\mu_d(N)$ ，有  $N$  個電子被局域在量子點內，能階  $N+1$  表示  $\mu_d(N+1)$ 。a-d 為 rf 循環的四個步驟，當位障降低時，電子穿隧的機率變大（實線的箭頭），當位障升高時，電子穿隧的機率變小（虛線的箭頭）【17】。

L.P. Kouwenhoven 研究團隊即利用二維電子氣的樣品以微影技術在樣品上製作金屬閘極，以金屬閘極外加負偏壓去驅趕電子形成量子點，並在閘極上外加兩個有相位差的 rf 訊號調變量子點左右的位障，成功的量到了量子化的電流，其大小跟位障所加的 AC 訊號頻率成正比關係。圖 2-17 為他們當時實驗的元件結構圖，在 F、1、2、C 等閘極外加負偏壓來形成一量子點，F-1 及 F-2 形成兩對 QPC，電流  $I$  流動方向如箭頭所示，rf 訊號外加至閘極 1、2，閘極 C 可以調變量子點內的量子點電位能。

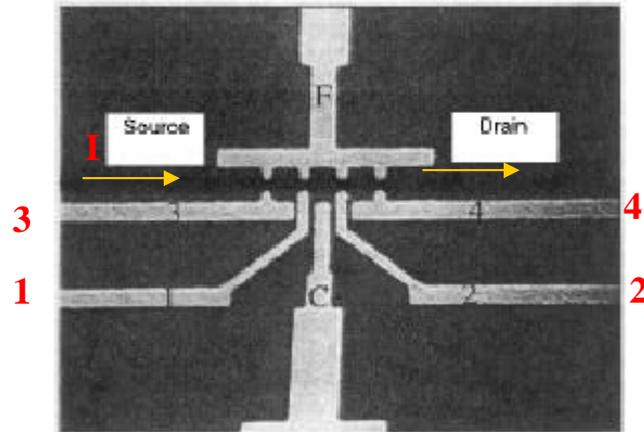


圖 2-17 L.P. Kouwenhoven、A.T.Johnson 等人的實驗元件結構圖，在 F、1、2、C 等閘極外加負偏壓來形成一量子點，F-1 及 F-2 形成兩對 QPC，電流 I 流動方向如箭頭所示，rf 訊號外加至閘極 1、2，閘極 C 可以調變量子點內的量子點電位能【17】。

當量子點左右的位障產生週期性震盪，便有量化的電流產生且電流大小會隨著源極跟汲極間的偏壓 (bias voltage) 大小而改變， $\mu_r$ 、 $\mu_l$  之間涵蓋的空能階越多，表示有更多的電子可穿遂至量子點內，產生的電流越大，如圖 2-18 (a) 所示，量測到的電流跟 V-bias 的曲線為階梯狀，且平台對應在  $ef$  ( $e \cdot 10\text{MHz} = 1.6\text{pA}$ ) 的整數倍上，顯示量化電流的關係，其位障震盪的頻率為 10MHz，當不加震盪頻率時，V-bias 在 -2 跟 3mV 之間所量得的電流小於 0.1pA，因此也驗證說的確有產生抽運電流。圖 2-18 (a) 的五條曲線是表示以固定不同的閘極 C 偏壓 ( $V_c$ ) 所量測的結果，調變  $V_c$  改變量子點內的量子點電位能，以 X 軸  $V=0$  位置來看，最上方的跟最下方的曲線都是對應在平台的位置，表示兩者的調變的  $V_c$  差正好等於量子點內的量子點電位能，所以我們可由  $e\Delta V = e^2/C$  估算出總電容 C。由此量測結果，我們可以驗證理論所提的一震盪循環所產生的  $I = ef$ ，且調變源極跟汲極間的偏壓，改變了  $\mu_r$ 、 $\mu_l$  之間存在的空能階，若有 n 個能階，其電流  $I = nef$ ，若頻率在 MHz 等級，產生的電流約幾個 pA 且會對應在  $ef$  的整數倍上。

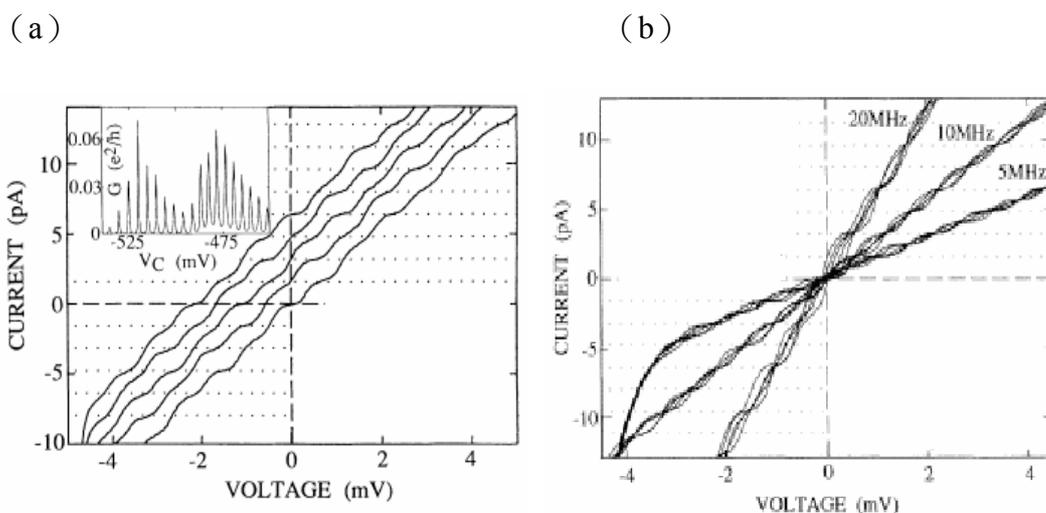


圖 2-18 (a)  $rf$  震盪頻率為 10MHz 所量得的  $I-V$  特性曲線，顯示出電流平台，其平台對應在  $ef$  的整數倍（點線所示， $f$  為 10MHz），五條曲線對應不同的  $V_c$ ，為了可以清楚分析，將其垂直位移。上方插圖為庫侖電導震盪（Coulomb conductance oscillation）vs  $V_c$ 。(b)  $rf$  震盪頻率為 5、10 及 20MHz 所量得的  $I-V$  特性曲線。點線表示  $ef$  的整數倍（ $f$  為 10MHz）【17】。

圖 2-18 (b) 為不同頻率下量得的  $I-V$  特性曲線，由圖可以看出， $I$  正比於頻率的大小，每一頻率皆量了五條曲線，每一曲線代表著不同的  $V_c$ 。由上述的結果，可以成功的驗證出電流正比於  $n$  以及  $f$ 。

### (b) 開放系統：

在開放系統中，如圖 2-19 所示，抽運電流的產生不屬於庫侖阻絕範疇，電子是絕熱傳輸，當侷限量子點的位能改變時，空間中電子的分佈也會受影響，因空間中電子分佈的密度改變，根據連續理論（continuity relation），電荷密度的改變會使系統中產生電流【19】。因此，若開放量子點的外形能由一對可以影響位能形狀做週期性變化且彼此有一固定相位差的外擾參數  $X_1$  和  $X_2$  來控制，如閘極的偏壓，或是磁場...等，便可以形成 DC 電流。產生的電流大小也是與頻率有關，類似封閉系統。

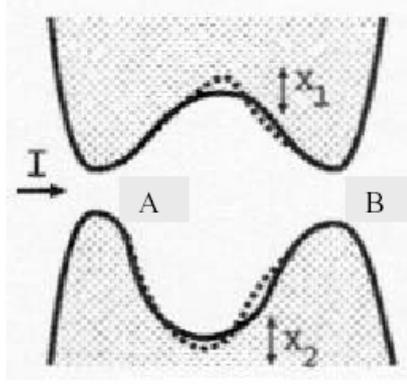


圖 2-19 開放式量子點的外形受到外擾參數  $X_1$  和  $X_2$  影響而改變，當  $X_1$  和  $X_2$  呈週期性的變化時，便會有電流  $I$  產生。A、B 為量子點跟熱庫之間的量子尖端接觸【19】。

要將此系統視作為一個電子幫浦 (electron pump)，先令  $X_1$  和  $X_2$  做一相位差  $\phi$  的週期震盪， $X_1$  和  $X_2$  的改變量可以時間  $t$  的函數來表示

$$\begin{aligned}\delta X_1(t) &= A_1 \sin(\omega t) \\ \delta X_2(t) &= A_2 \sin(\omega t - \phi)\end{aligned}\quad (2.13)$$

要求得進入 QPC 中的抽運電流大小，我們可以引用一維窄通道電導值的關係  $G = \partial I / \partial V$ ，以散射矩陣 (scattering matrix)  $S(X_1, X_2)$  來組成公式

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha \in l} \sum_{\beta \in r} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^* \quad (2.14)$$

$\alpha$ 、 $\beta$  為量子點左右兩邊 QPC 的通道數和， $S_{\alpha\beta}$  為散射矩陣，電子入射至 QPC  $m$  ( $m$  為 A 或 B) 的數目可以推得：

$$n(m) \propto \sum_{\alpha \in m} \sum_{\beta \in m} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^* \Rightarrow n = K \sum_{\alpha \in m} \sum_{\beta \in m} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^* \quad (2.15)$$

$n(m)$  的導數稱為發射率 (emissivity)，表示電子進入或離開元件中個數  $n$  對參數  $X$  的微小改變量所對應的反應。

$$\frac{dn(m)}{dX} = K \sum_{\alpha \in m} \sum_{\beta \in m} \text{Im} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial X} S_{\alpha\beta}^* \quad (2.16)$$

由於我們有兩個參數，所以入射至 QPC  $m$  的電荷可以表示為：

$$\delta Q(m, t) = e \frac{dn(m)}{dX_1} \delta X_1(t) + e \frac{dn(m)}{dX_2} \delta X_2(t) \quad (2.17)$$

因此，一週期  $T = 1/f = 2\pi/\omega$  所傳輸的總電荷為：

$$Q(m, T) = \int_{X_1(0)X_2(0)}^{X_1(T)X_2(T)} e \left[ \frac{dn(m)}{dX_1} \delta X_1(t) + \frac{dn(m)}{dX_2} \delta X_2(t) \right] \quad (2.18)$$

在一個週期內，參數  $X_1$ 、 $X_2$  在參數空間中會形成一封閉路徑，如圖 2-20 所示，上式即為  $\frac{dn(m)}{dX_1}$ 、 $\frac{dn(m)}{dX_2}$  在參數空間中，沿著其封閉曲線的線積分，利用 divergence theorem，

將上式的線積分轉換成面積分，可得到：

$$Q(m, \tau) = e \int_A A_1 A_2 \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{dn(m)}{dX_2} - \frac{\partial}{\partial X_2} \frac{dn(m)}{dX_1} \right) \quad (2.19)$$

將 (2.16) 代入上式，即可以推算出經過 QPC m，一個週期的平均 DC 抽運電流大小  $I_m$ ：

$$I_m = 2Kef \int_A dX_1 dX_2 \sum_{\alpha \in m} \sum_{\beta \in m} \text{Im} \frac{\partial S_{\alpha\beta}^*}{\partial X_1} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial X_2}$$

$$\Rightarrow I_m = 2Kef A_1 A_2 \pi \sin \phi \sum_{\alpha \in m} \sum_{\beta \in m} \text{Im} \frac{\partial S_{\alpha\beta}^*}{\partial X_1} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial X_2} \quad (2.20)$$

上式為在位能震盪不大（約在幾十 mV 等級），所產生的 DC 抽運電流，其大小約會跟頻率成正比關係且跟相位差成正弦曲線關係。

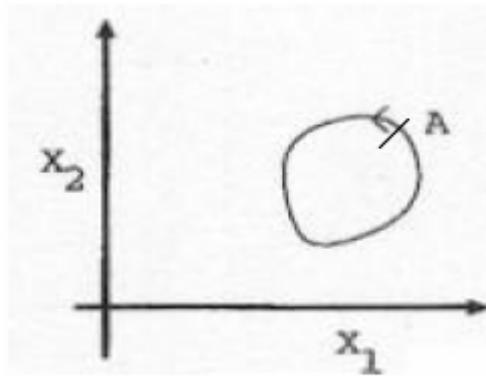


圖 2-20 在一震盪週期中，參數  $X_1$ 、 $X_2$  在參數空間中會形成一封閉路徑。抽運電流跟封閉面積 A 有關【19】。

實驗上，1999年，C. M. Marcus 的研究團隊成功量到了開放系統中的抽運電流【7】，圖 2-21 為實驗配置以及元件的結構圖。

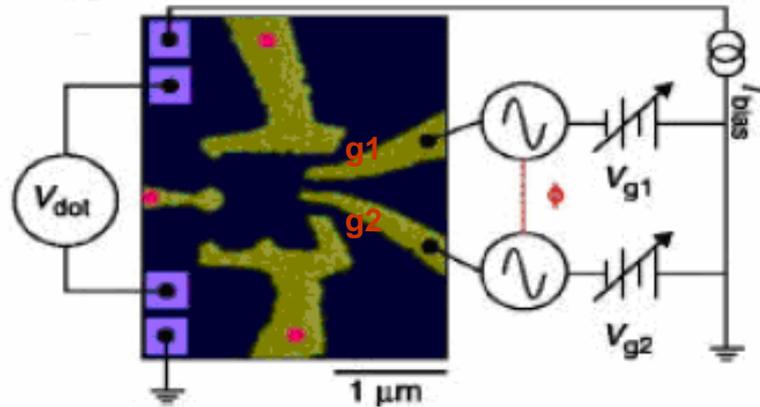


圖 2-21 元件的結構以及量測電路配置圖。紅色點標示的閘極為形成開放量子點的閘極，量子點兩邊為跟熱庫連通的一維窄通道， $g_1$ 、 $g_2$  閘極用來加一相同頻率但有一相位差的 AC 訊號並【7】。

紅色標示的閘極是為形成開放量子點的閘極，且控制量子點兩端連通熱庫的通道大小，元件的電導值  $G \sim 2e^2/h$  ( $R \sim 13k\Omega$ )，即量子點左右兩邊窄通道的次能帶數只有一個，因為要量測抽運電流，所以  $I_{\text{bias}}$  設定為 0， $g_1$ 、 $g_2$  閘極除原為侷域量子點所加的負偏壓  $V_{g1}$  和  $V_{g2}$  外，另外加一同頻率但有一相位差的 AC 訊號。圖 2-22 (a) 改變磁場  $B$  所量到的  $V_{\text{dot}} - \phi$  的曲線，由其量測結果可以顯示當兩支閘極  $g_1$ 、 $g_2$  有  $\pm \pi/2$  角度相位差，即有一最大的 DC 抽運電流，而且抽運電流跟相位差  $\phi$  有一正弦曲線的關係，可將  $V_{\text{dot}}$  以  $V_{\text{dot}} = A \sin \phi$  表示，符合理論上的推論 Eq(2.20)。

抽運電流的振幅  $\sigma(A)$  (即  $V_{\text{dot}}$  的強度標準差) 跟頻率  $f$  的關係，可由圖 2-22 (b) 看出，抽運電流的振幅  $\sigma(A)$  跟抽運的頻率呈現線性關係 (linear)，也應證了理論結果 Eq(2.20)，其斜率約  $40\text{nV/MHz}$ ，由量子點的電導值約為  $2e^2/h$ ，可以算得約每增加  $1\text{MHz}$ ，電流增加  $3\text{pA}$ ，即每一次抽運的循環，約有 20 顆電子傳輸過量子點。

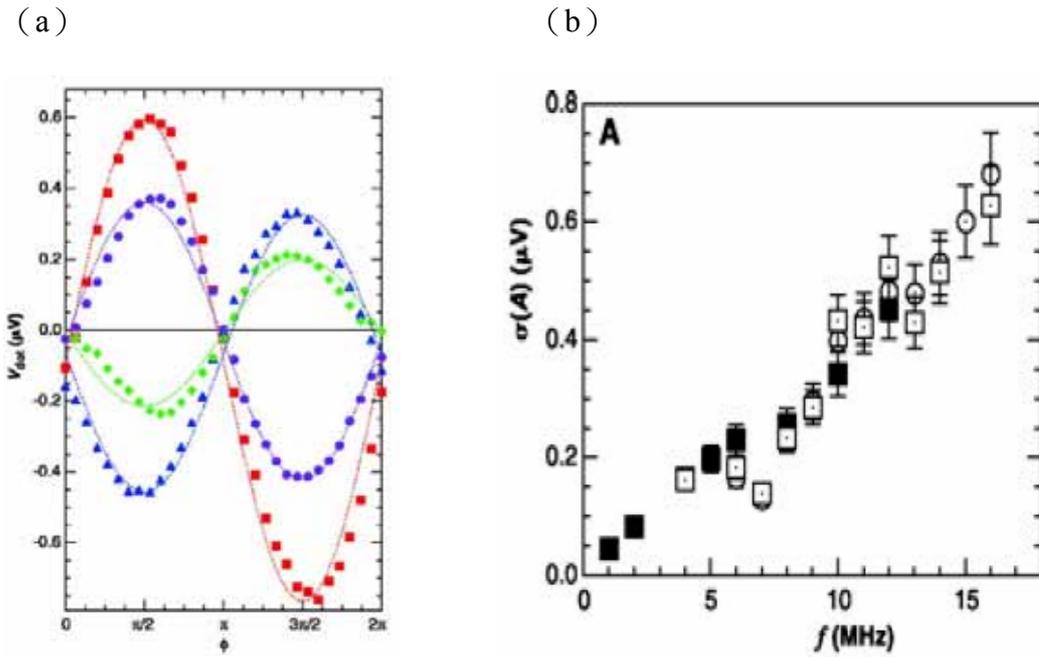


圖2-22 (a) 在不同磁場下， $V_{dot}$  隨著相位變化量得的曲線。點為實驗上量測的結果，虛線為  $V_{dot} = A \sin \phi + A_0$  擬和的結果。(b) 抽運電流的振幅 (amplitude) 跟頻率的關係圖，抽運電流的振幅  $\sigma(A)$  跟抽運的頻率呈現線性關係 (linear)，其斜率約  $40nV/MHz$  【7】。

抽運電流除了上述的關係外，C. M. Marcus的研究團隊亦發現，當AC訊號的振幅  $A_{ac}$  小於80mV時，抽運電流的振幅  $\sigma(A) \propto A_{ac}^2$ ，亦符合Eq2.20的理論預測，但當  $A_{ac}$  漸漸變大時， $\sigma(A)$  便不再正比於  $A_{ac}^2$ ，而是正比於  $A_{ac}$ ，而當  $A_{ac}$  變得更大時， $\sigma(A)$  幾乎是正比於  $A_{ac}^{1/2}$ 。如圖2-23 (a) 所示，且由圖2-21可以發現，當  $A_{ac} = 260mV$  時， $V_{dot} - \phi$  的曲線已不是正弦曲線的關係，對於此現象，他們猜測可能是在強抽運的情況下，電子的相位被破壞，或有顯著的熱能產生所影響。

$\sigma(A)$  跟溫度的關係，如圖2-23 (b) 所示， $\sigma(A)$  會隨著溫度的升高而降低，因為溫度升高，更多的電子-聲子散射 (electron-phonon scattering)，電子間的相位被破壞，且電子的同調長度變短所造成。在高溫時 (1K-5.5K)， $\sigma(A)$  可以以power law表示， $\sigma(A) = 0.2T^{-0.9}$  ( $\sigma(A)$  的單位為  $\mu V$ ，T的單位為kelvin)，小於1K時， $\sigma(A)$  漸漸不符合power law，而慢慢趨於飽和狀態。

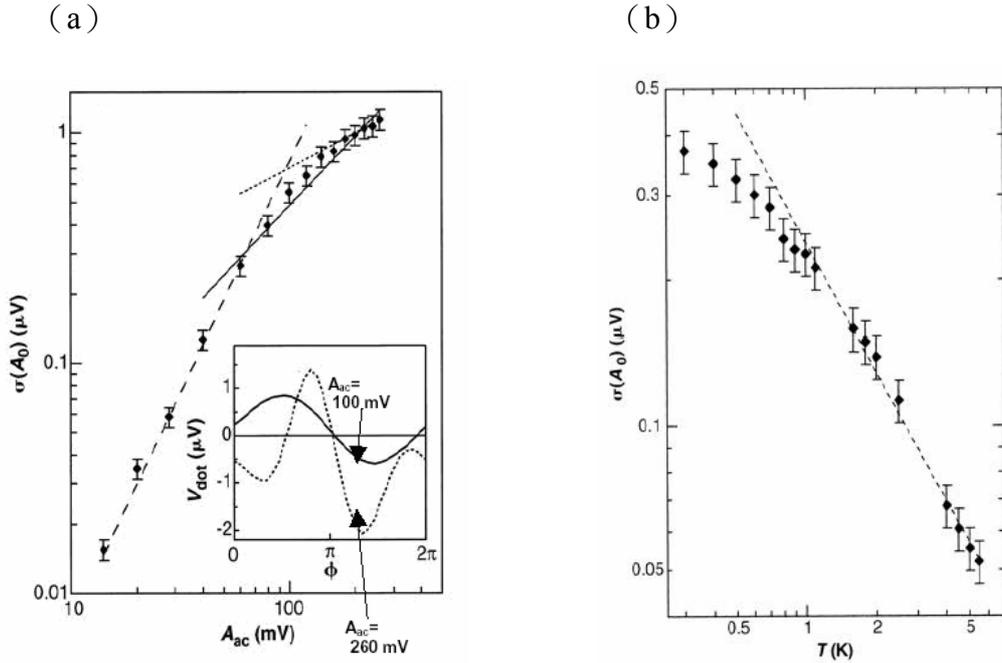


圖2-23 (a)  $\sigma(A_0)$ 、 $A_{ac}$ 的關係圖，點為量測數據，當  $A_{ac}$  小於80mV， $\sigma(A_0)$ 、 $A_{ac}$  的關係符合  $\sigma(A_0) \propto A_{ac}^2$ ，虛線為擬和曲線；當  $A_{ac}$  漸大，大於80mV時， $\sigma(A_0)$ 、 $A_{ac}$  的關係漸漸傾向  $\sigma(A_0) \propto A_{ac}^{1/2}$ ， $\sigma(A_0) \propto A_{ac}$  的擬和曲線為實線；點線為  $\sigma(A_0) \propto A_{ac}^{1/2}$  的擬和曲線。右下插圖顯示當  $A_{ac}$  變大時 (260mV)， $V_{dot}$  跟  $\phi$  便不是正弦曲線的關係，但在  $\phi = \pi$  時， $V_{dot}$  依然 = 0。(b)  $\sigma(A_0)$  跟溫度 T 的關係，虛線為 power law  $\sigma(A_0) = 0.2T^{-0.9}$  所擬和，在高溫時 (1K-5.5K)， $\sigma(A_0)$  可以符合 power law，但小於 1K 時， $\sigma(A_0)$  漸漸不符合 power law，而慢慢趨於飽和狀態【7】。

量子抽運電流的產生，可分為封閉系統跟開放系統來個別討論，兩者產生的抽運電流的主要成因都是跟不穩定的散射來破壞左右對稱性有關。抽運電流的形成是屬於量子力學現象，研究抽運電流可以讓我們更深入的瞭解電子之間的干涉關係。