

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

飛彈尾翼和側向推力複合控制系統設計

**Blended Control System Design for Missile with Tail  
and Lateral Thrust**

研究生：汪言璋

指導教授：林清安 教授

中華民國一百零三年十月

飛彈尾翼和側向推力複合控制系統設計

**Blended Control System Design for Missile with Tail and  
Lateral Thrust**

研究生：汪言璋

Student : Yen- Chang Wang

指導教授：林清安 教授

Advisor : Prof. Ching-An Lin

國立交通大學電控工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electrical Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Electrical and Control Engineering

October 2014

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零三年十月

# 飛彈尾翼和側向推力複合控制系統設計

## Blended Control System Design for Missile with Tail and Lateral Thrust

研究生：汪言璋

指導教授：林清安 教授

國立交通大學電控工程研究所

### 摘要

本論文的主要目的在探討攔截飛彈以尾翼及側向推力為致動器的複合控制設計。尾翼控制利用氣動力造成攻角改變而產生橫向加速度。利用比例積分器配合角速度回授設計尾翼控制器，達到穩態及暫態性能要求。由於尾翼角度以及非最小相位動態的限制，尾翼控制的暫態響應可能無法滿足攔截的需求。因此防禦飛彈，如愛國者三型，常增加側向推力的致動器，在終端導引的最後階段啟動，以改善控制系統的反應速度，提升攔截能力。複合控制器設計概念為以尾翼控制為主要控制，側向推力為快速提升系統攻角的輔助控制。本論文提出兩種複合控制設計：一是將線性的純尾翼控制輸入視為一個匹配式干擾，利用順滑模控制對雜訊的穩健性直接設計側向推力控制。二是將側向推力視為一個單輸入控制，利用順滑模控制來設計包含純尾翼控制的飛彈模型。在導引的模擬之下顯示了複合控制的攔截能力，增加側向推力致動器確實能提升系統響應速度。

# Blended Control System Design for Missile with Tail and Lateral Thrust

Student: Yen-Chang Wang

Advisor: Prof. Ching-An Lin

Institute of Electrical Control Engineering

National Chiao Tung University

## ABSTRACT

This thesis investigates the control about blended control for missile actuator with tail and lateral thrust. Tail controller changes angle of attack to generate lateral force by aerodynamic. To achieve requirements of steady-state and transient performance, tail controller is designed with proportional-integral controller with angular velocity feedback. Because of limits for degree of the tail as well as non-minimum phase dynamics, transient response of tail control may not meet the needs of interception. So anti-tactical missile, such as the Patriot III, often combining the lateral thrust actuators in the final stages of terminal guidance to improve the ability to intercept. Concept of blended control design is considering tail control as the main controller, and lateral thrust as auxiliary controller to increase angle of attack rapidly. In this thesis, we propose two blended control designs. First is considering the input of linear tail control as match disturbance, and be designed with sliding mode control for lateral thrust controller. Second is considering the lateral thrust as a single-input control, and be designed with sliding mode control for missile model that contains tail-only controller. Simulations of guidance show the capabilities of interception for blended control. Obviously, combining lateral thrust actuators can improve system response.

## 誌謝

首先感謝指導教授 林清安博士兩年來的教導，在我的學習過程中給予協助與鼓勵。除了學業上的知識，也讓我習得做研究及做事該有的態度與方法，使我受益良多。這兩年來的教誨讓我在未來的生涯中得以運用。

再來感謝實驗室同窗的同學以及學弟的陪伴與鼓勵，在互相的討論中彼此的成長。也在論文研究上提供意見，讓我的研究可以順利進行。感謝實驗室已畢業的學長們，提供經驗及意見。感謝碩一時室友們的陪伴及鼓勵，也提供了學術上的意見。感謝女友亮均的陪伴，在我遇到困難時給予鼓勵。

最後感謝家人的支持與關懷，尤其是父母在我的求學階段上毫無保留的付出，給予我精神上的鼓勵。

汪言璋 于新竹交大

103 年 10 月

## 目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	ivx
<b>第一章、緒論</b> .....	<b>1</b>
<b>第二章、基礎理論與數學模型之建立</b> .....	<b>3</b>
2.1 順滑模控制.....	3
2.1.1 順滑模態的原理.....	3
2.1.2 順滑模態的設計.....	5
2.2 飛彈模型建立.....	8
2.2.1 座標系統定義.....	8
2.2.2 飛彈簡易模型.....	10
2.2.3 運動方程式.....	11
2.2.4 飛彈模型方塊圖.....	13
2.2.5 氣動力係數、氣動力矩係數.....	14
<b>第三章、攔截飛彈的純尾翼控制設計</b> .....	<b>16</b>
3.1 攔截飛彈的動態方程式.....	16
3.2 角速度回授及比例積分控制器的設計.....	18
<b>第四章、攔截飛彈的複合控制設計</b> .....	<b>29</b>
4.1 設計一複合控制.....	29
4.1.1 推導攔截飛彈動態方程式.....	29
4.1.2 線性化動態方程式的修正.....	32
4.1.3 設計順滑模控制器.....	34

4.1.4 修正型的切跳函數.....	36
4.1.5 設計一複合控制設計.....	37
4.1.6 側向推力穩態過大的改善.....	41
4.2 設計二複合控制.....	44
4.2.1 推導攔截飛彈動態方程式.....	45
4.2.2 順滑模控制器的設計.....	46
4.2.3 側向推力穩態過大的改善.....	51
4.3 降低側向推力的響應分析.....	53
<b>第五章、追蹤導引模擬與討論.....</b>	<b>56</b>
5.1 追蹤導引法則.....	56
5.1.1 PN 導引法則.....	56
5.1.2 APN 導引法則.....	57
5.1.3 停止的根據和誤差距離.....	58
5.1.4 模擬條件.....	58
5.1.5 攔截模擬的數值結果.....	59
5.2 導入導引法則的模擬結果與討論.....	60
5.2.1 目標飛彈狀態的不同對純尾翼控制的影響.....	61
5.2.2 純尾翼控制 APN 與 PN 的成效比較.....	64
5.2.3 純尾翼控制與複合控制的比較.....	65
5.2.4 降低側向推力的導引分析.....	72
5.2.5 氣動力係數誤差所造成的影響.....	73
5.2.6 裝載燃料的重量計算.....	74
5.3 側向推力打開的時機.....	75
<b>第六章、結論.....</b>	<b>77</b>
參考文獻.....	78

## 圖目錄

圖 1-1 複合控制設計.....	2
圖 2-1 二次系統的順滑模態行為.....	4
圖 2-2 地面座標與體座標示意圖.....	9
圖 2-3 攔截飛彈與目標相對位置及速度示意圖.....	10
圖 2-4 飛彈二維平面示意圖.....	11
圖 2-5 飛彈動態模式及導引控制系統方塊圖.....	14
圖 3-1 尾翼輸入2度步階命令所得到的加速度 $a_y(t)$ 比較圖，藍線為模擬輸出結果，紅線為(3.1)式的圖形.....	17
圖 3-2 尾翼輸入2度步階命令所得到的角速度 $q(t)$ 比較圖，藍線為模擬輸出結果，紅線為(3.2)式的圖形.....	17
圖 3-3 (3.6)式及(3.7)式的方塊圖.....	18
圖 3-4 加入 $q$ 回授的狀態方程式.....	19
圖 3-5 利用比例積分控制器設計(3.10)式系統，其中 $K_q = 1$ .....	19
圖 3-6 零點在-1的根軌跡圖( $K_a < 0$ ).....	21
圖 3-7 線性模型零點在-1時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	22
圖 3-8 線性模型零點在-1時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	22
圖 3-9 零點在-2的根軌跡圖( $K_a < 0$ ).....	23
圖 3-10 線性模型零點在-2時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	23
圖 3-11 線性模型零點在-2時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	24
圖 3-12 線性模型零點在-3時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	24
圖 3-13 線性模型零點在-3時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	25
圖 3-14 非線性模型零點在-1時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	26
圖 3-15 非線性模型零點在-1時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	26
圖 3-16 非線性模型零點在-2時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	27

圖 3-17 非線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	27
圖 3-18 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較.....	28
圖 3-19 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較.....	28
圖 4-1 輸入 40 度步階函數尾翼角加速度以及攻角響應圖.....	32
圖 4-2 輸入 8000N 步階函數的側向推力加速度以及攻角響應圖.....	32
圖 4-3 修正型的切跳函數不同 $\rho$ 值得比較.....	36
圖 4-4 修正型與一般切跳函數比較.....	37
圖 4-5 不同比例尾翼及側向推力的響應圖.....	39
圖 4-6 輸入加速度命令 2g 的複合控制線性模型步階響應.....	39
圖 4-7 輸入加速度命令 2g 的複合控制非線性步階響應(1).....	40
圖 4-8 輸入加速度命令 2g 的複合控制非線性步階響應(2).....	40
圖 4-9 改善後的複合控制 2g 步階響應比較(1).....	42
圖 4-10 改善後的複合控制 2g 步階響應比較(2).....	42
圖 4-11 加速度命令不同的步階函數複合控制改善前後的比較(1).....	43
圖 4-12 加速度命令不同的步階函數複合控制改善前後的比較(2).....	43
圖 4-13 設計一複合控制的修正設計.....	44
圖 4-14 尾翼命令及尾翼輸入開迴路系統比較.....	48
圖 4-15 側向推力命令及側向推力輸入開迴路系統比較.....	48
圖 4-16 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制線性模型步階響應.....	50
圖 4-17 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制非線性模型步階響應(1).....	50
圖 4-18 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制非線性模型步階響應(2).....	50
圖 4-19 不同步階函數的加速度命令設計二複合控制改善前後的比較(1).....	51
圖 4-20 不同步階函數的加速度命令設計二複合控制改善前後的比較(2).....	52
圖 4-21 設計二複合控制的修正設計.....	52
圖 4-22 設計一調慢加速度響應的模擬結果.....	53

圖 4-23 設計二調慢加速度響應的模擬結果.....	54
圖 4-24 設計一使用(4.60)式參數的模擬結果.....	55
圖 4-25 設計二使用(4.61)式參數的模擬結果.....	55
圖 5-1 目標未加速時的尾翼追蹤響應(1).....	59
圖 5-2 目標未加速時的尾翼追蹤響應(2).....	60
圖 5-3 目標未加速時的尾翼追蹤響應(3).....	60
圖 5-4 不同振幅以及頻率對於尾翼追蹤的成效比較圖.....	61
圖 5-5 為不同目標飛彈加速度頻率對攔截飛彈追蹤的影響.....	62
圖 5-6 不同的初始航向誤差對於尾翼追蹤的成效比較圖.....	63
圖 5-7 較大的初始航向誤差對於尾翼追蹤的成效比較圖.....	63
圖 5-8 不同的頻率在 13 度的初始航向誤差對尾翼追蹤的成效比較圖.....	64
圖 5-9 不同振幅的加速度對追蹤難易度的影響.....	64
圖 5-10 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(1).....	66
圖 5-11 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(2).....	66
圖 5-12 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(3).....	67
圖 5-13 設計一複合控制改善前後的比較(1).....	68
圖 5-14 設計一複合控制改善前後的比較(2).....	68
圖 5-15 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(1).....	69
圖 5-16 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(2).....	70
圖 5-17 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(3).....	70
圖 5-18 設計二複合控制改善前後的比較(1).....	71
圖 5-19 設計二複合控制改善前後的比較(2).....	71
圖 5-20 設計一降低側向推力的導引.....	72
圖 5-21 設計二降低側向推力的導引.....	73
圖 5-22 複合控制穩態改善設計氣動力誤差對追蹤難度的影響.....	74

## 表目錄

表 2-1 攔截飛彈之參數設定.....	15
表 3-1 線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較.....	21
表 3-2 線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較.....	23
表 3-4 非線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較.....	25
表 3-5 非線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較.....	26
表 3-6 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較.....	27
表 4-1 不同比例尾翼及側向推力的上升時間比較.....	38
表 4-2 補足尾翼角與加速度命令關係.....	41
表 4-3 設計二複合控制需補足尾翼角與加速度命令關係.....	51
表 5-1 追蹤過程消耗能量以及燃料.....	74
表 5-2 設計一複合控制改善設計側向推力在不同時間打開的情形.....	75
表 5-3 設計二複合控制改善設計側向推力在不同時間打開的情形.....	76

# 第一章

## 緒論

作戰用的彈道導彈(tactical ballistic missile, TBM)在返回大氣層時會有很劇烈螺旋飛行的狀態。在高度下降 10 萬英尺和 6 萬英尺間，會有 1~10g 的加速度大小。螺旋飛行的頻率大約是 0.5hz，難以去追蹤掌握。防禦攔截飛彈(anti-tactical ballistic missile, ATBM)想要打到目標導彈，必須擁有快速的響應特性。傳統的攔截飛彈是控制尾翼(tail fin)的角度變化來產生空氣動力以及空氣動力對質心的動量。在比較高的高度時，動態壓力(dynamic pressures)會比較小，導致空氣動力以及動量都會比較小。如此一來想要快速的改變追蹤命令，如改變加速度，響應的結果就會比較差。而最常用的解決方法就是在飛彈質心前方加入側向的推力(side jet)，讓噴嘴產生一個側邊的推力(lateral-thrust)，能快速的改變飛彈的攻角(attack angle)或飛彈的姿態(attitude)，進而能改善其響應。

防禦攔截飛彈(ATBM)融合尾翼控制(tail control)和側向推力(lateral-thrust)，這個複合控制可以提升響應，增加負載性，因此攔截飛彈擁有較高的加速度以及可操作性。這些特性能使攔截飛彈打到目標物的機率提高，因此複合控制也成為熱門研究的主题。一般來說攔截飛彈在打到目標物之前是控制尾翼角來達到控制加速度或是其他的控制目的，等到接近目標物時便開啟側向推力，使響應加速進而容易打中目標物。文獻[1]中說明了增加側向推力的好處，也比較了有無增加側向推力的響應。此外文中也說明了側向推力放在何處的位置最理想。

現階段設計複合控制器的方法有許多：[2]提出一個適應性控制系統的技術來設計；[3]提出一個  $\mu$ -Synthesis 控制器的方法；[4]利用順滑模控制器來設計；[5] 提出預測性的技術和解決干擾、不定量的方法。然而以上的控制器皆是利用相同的控制方法同時設計純尾翼控制以及側向推力控制。本論文嘗試利用線性結合非線性的複合控制方法來作設計。如圖 1-1 所示，利用線性方法設計尾翼作為主要控制，利用非線性的順滑模控制設計側向推力作為輔助控制，並用一個開關

來決定是否開啟。我們將純尾翼控制視為獨立的主體控制，開關打開時純尾翼控制仍對系統保有絕大部分的貢獻度，側向推力只是讓攻角提升的速度加快。

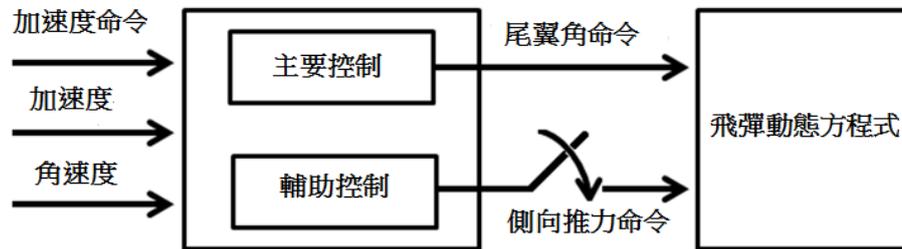


圖 1-1 複合控制設計

本論文的研究方向為設計純尾翼控制器以及加入側向推力的複合控制器。在純尾翼控制時能使系統穩定，且在限制尾翼角(tail angle)的大小之下，能夠達到所需加速度，保有一定的追蹤成效利用。加入側向推力後使得攻角能夠快速提升，系統的響應加速，能使系統更快達到所需加速度。本論文選取順滑模控制器來設計側向推力控制器，原因是順滑模控制器的響應很快，能夠幫助系統更容易打到目標物。此外順滑模控制的穩健性非常好，側向推力打開時會產生不定量(uncertainty)的干擾，系統參數會有誤差，順滑模控制能忍受較大的誤差。

本論文是針對文獻[1]所給予的飛彈模型以及參數來做設計。文獻[1]中的模型為簡化系統，將攻角視為姿態角，為一個線性的系統。本論文則將之擴展，導入飛彈的非線性模型，使用文獻[1]的氣動力係數以及飛彈的物理參數。文獻[6]提出了利用順滑模控制同時控制尾翼角和側向推力，但此方法在本論文的飛彈模型中不適用。此模型利用順滑模控制尾翼角的力道非常大，在尾翼角有限制下造成系統的不穩定。因此我們所設計的複合控制可以解決此問題。

本論文章節配置如下：第一章為緒論；第二章介紹順滑模控制的理論和設計方法，以及飛彈的座標定義和模型建立；第三章介紹純尾翼控制的線性設計；第四章介紹兩種複合控制設計，利用順滑模控制設計側向推力控制並結合純尾翼控制，且針對側向推力過大的問題進行修正；第五章為模擬與討論，導入導引法則的追蹤，比較加入側向推力的好處；第六章則是結論。

## 第二章

### 基礎理論與數學模型之建立

本章介紹順滑模控制的設計方法和攔截飛彈及目標二維運動的方程式。順滑模的介紹主要參考[7]，飛彈動態模式中的氣動力資料則採文獻[1]的數據。2.1 節介紹順滑模的理論和設計的方法，2.2 節介紹攔截飛彈的模型建立即攔截模擬的整體方塊圖。

#### 2.1 順滑模控制

順滑模控制是一種特殊的非線性控制，利用設計出的順滑函數(sliding function) $s(x)$ 來決定不連續控制的輸入，使受控系統在兩個不同子結構中不停切換，迫使其進入順滑模態(sliding mode)，此時系統只能沿著順滑面(sliding surface)運動，並往控制目標位置移動。

##### 2.1.1 順滑模態的原理[7]

順滑模態(sliding mode)是一種產生在超空間(hyperspace)的一種系統行為，且超空間會比原系統減少一個自由度(degree-of-freedom)。一個系統要擁有順滑模態必須具備兩個條件：

- A. 必須存在一個超空間且所有軌跡在有限的時間內都會接觸到此超空間，稱為迫近條件(approaching condition)或接近條件(reaching condition)。
- B. 系統軌跡進入超空間後必須順著此超空間滑向原點，稱為順滑條件(sliding condition)。

以二次系統為例，順滑模態將發生在一維的空間中。圖 2-1 所示系統軌跡在有限時間接觸到超空間( $s=0$ )，且進入超空間後順著滑向原點。

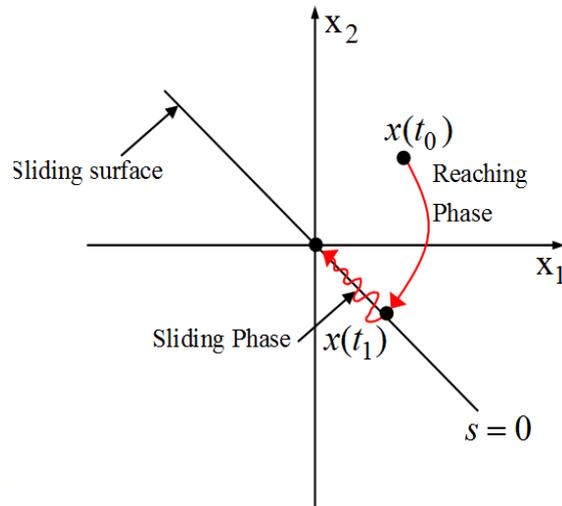


圖 2-1 二次系統的順滑模態行為

設計順滑模系統時，所處理的數學模式是以狀態變數方程式為對象，考慮如下系統：

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \quad (2.1)$$

其中  $x \in R^n$ ， $u(x)$  為控制輸入(加入的切換條件)。切換時機由狀態變數  $x$  決定，切換條件：

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & s(x) > 0 \\ u^-(x) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$s(x)$  為一個切換函數 (switching function)，又稱為順滑函數 (sliding function)。 $s(x)$  必須對時間為一次可微且  $u^+(x) \neq u^-(x)$ 。利用此切換函數可以將整個狀態空間分成  $s(x) > 0$ 、 $s(x) < 0$ 、 $s(x) = 0$  三個區間，超空間  $s(x) = 0$  又被稱為順滑面 (sliding surface) 必須包含平衡點  $x = 0$ ，系統設計目標為在  $s(x) = 0$  的順滑面上產生順滑模態。由圖 2-1 所示， $x(t_0)$  在有限的時間  $t_1$  內到達  $s(x) = 0$ ，此階段為迫近模態。然後在往後的  $t > t_1$  時段，系統在順滑面附近限制的範圍內切跳，而且朝平衡點移動，最後達到  $x(\infty) \rightarrow 0$ 。此階段為順滑模態。

為了產生順滑模態和迫近模態，必須滿足順滑條件和迫近條件。順滑模態使系統不脫離順滑面，軌跡必須有以下之行為：當  $s(x) > 0$  時， $s(x)$  的值必須隨時間遞減，即  $\dot{s}(x) < 0$ ；當  $s(x) < 0$  時， $s(x)$  的值必須隨時間遞增，即  $\dot{s}(x) > 0$ 。以順

滑條件以數學式來表示則為

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\dot{s} < 0 \quad (2.3)$$

再來討論迫近條件，使系統在有限時間接觸到順滑面，其數學式如下：

$$s\dot{s} < -\sigma|s| \quad \text{且} \quad \sigma > 0 \quad (2.4)$$

這裡利用里亞普諾夫(Lyapunov)原理來證明：

首先選取里亞普諾夫函數

$$L = s^2 \quad (2.5)$$

由於順滑函數s對時間t是一次可微，因此

$$\dot{L} = 2s\dot{s} \quad (2.6)$$

代入迫近條件(2.4)式

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt} < -2\sigma|s| = -2\sigma\sqrt{L} < 0 \quad (2.7)$$

$\dot{L} < 0$ 顯示L為遞減函數。由於 $\sqrt{L} > 0$ 和 $dt > 0$ ，整理(2.7)式可得：

$$\frac{dL}{\sqrt{L}} < -2\sigma dt \quad (2.8)$$

亦可得

$$\int_{L(0)}^{L(t)} \frac{dL}{\sqrt{L}} = 2\sqrt{L} \Big|_{L(0)}^{L(t)} = 2\sqrt{L(t)} - 2\sqrt{L(0)} < -2\sigma t \quad (2.9)$$

故

$$0 \leq \sqrt{L(t)} < \sqrt{L(0)} - \sigma t \quad (2.10)$$

也就是說當 $t = \frac{\sqrt{L(0)}}{\sigma}$ 時

$$0 \leq \sqrt{L(t)} < 0 \quad (2.11)$$

亦即L(t)在有限時間 $t = \frac{\sqrt{L(0)}}{\sigma}$ 之內收斂至0，接觸到順滑面 $s(x) = 0$ 。且迫近條件

(2.4)式也符合順滑條件(2.3)式，因此(2.4)式也稱為順滑迫近條件。

### 2.1.2 順滑模態的設計[7]

順滑模態的設計分成兩個步驟：(1)選定順滑函數 $s(x)$ ，使得系統軌跡在順滑

模態時能滑向控制目標點。(2)決定控制法則 $u$ ，使得系統軌跡在有限的時間內接觸到順滑面，產生順滑模態。以單輸入系統為範例，如果數學模式為

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + u + d(x, t) \quad (2.12)$$

其中 $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 是系統狀態， $u$ 為控制輸入， $d(x, t)$ 為系統所遭受干擾，且干擾大小都有上限，表為

$$|d(x, t)| \leq \delta(x, t) \quad (2.13)$$

其中 $\delta(x, t)$ 為一已知的上限函數。以下說明設計順滑模態的兩個步驟：

(1)步驟一：選擇順滑函數

一般情形下順滑函數設定為

$$s(x) = cx = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} + x_n \quad (2.14)$$

其中 $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1} \ 1]$ 為一個常數向量。在順滑模態 $s(x) = 0$ 的假設下，系統軌跡必須符合

$$\dot{s}(x) = c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + \dots + c_{n-1}\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_n = 0 \quad (2.15)$$

利用(2.12)式可得

$$\dot{s}(x) = a_1x_1 + (a_2 + c_1)x_2 + \dots + (a_n + c_{n-1})x_n + u + d(x, t) = 0 \quad (2.16)$$

由(2.16)式可以解得

$$u = -a_1x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \dots - (a_n + c_{n-1})x_n - d(x, t) \quad (2.17)$$

將 $u$ 代回(2.12)式可得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n \quad (2.18)$$

利用(2.14)式 $s(x) = 0$ 的關係式可將(2.18)式改為

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_{n-1}x_{n-1}\end{aligned}\quad (2.19)$$

(2.19)式的次數降為 $n - 1$ 次，可得知順滑模態比原系統少一級次，雜訊 $d(x, t)$ 也未出現在(2.19)式中，顯示系統軌跡在順滑模態不受雜訊影響。

為達控制目標必須選取適當的係數 $c_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ 。先令 $x_1 = z$ ，則可得 $x_k = z^{(k-1)}, k = 2, \dots, n - 1$ ，為 $z$ 對 $t$ 的 $k - 1$ 次的微分。(2.19)式的最後一個等式可表示為

$$z^{(n-1)} + c_{n-1}z^{(n-2)} + \cdots + c_2\dot{z} + c_1z = 0 \quad (2.20)$$

其特徵方程式為

$$\lambda^{n-1} + c_{n-1}\lambda^{(n-2)} + \cdots + c_2\dot{\lambda} + c_1\lambda = 0 \quad (2.21)$$

所以選取之係數必須使特徵方程式的根皆有負的實部，保證系統的穩定性。且當 $t \rightarrow \infty, x_k(t) \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots, n - 1$ 。由(2.19)可得 $x_n(t) \rightarrow 0$ 。因此系統在順滑模態時為漸近穩定。

(2)步驟二：選取控制定律

控制定律的設計必須符合迫近順滑條件(2.4)式，來保證系統在有限時間內進入順滑模態，並且滑向控制目標。由(2.16)式順滑函數的一次微分式可得

$$\dot{s}(x) = a_1x_1 + (a_2 + c_1)x_2 + \cdots + (a_n + c_{n-1})x_n + u + d(x, t) \quad (2.22)$$

為了符合順滑迫近條件  $s\dot{s} < -\sigma|s|$  可令控制定律如下：

$$u = -a_1x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \cdots - (a_n + c_{n-1})x_n - (\delta(x, t) + \sigma)\text{sign}(s) \quad (2.23)$$

其中 $\delta(x, t)$ 符合(2.13)式且 $\text{sign}(s)$ 定義為

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

將(2.23)式代入(2.22)式為

$$\dot{s} = -(\delta(x, t) + \sigma)\text{sign}(s) + d(x, t) \quad (2.25)$$

兩邊同乘 $s$ 整理為

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= -\sigma|s| - \delta(x, t)|s| + d(x, t)s \\ &= -\sigma|s| - \delta(x, t)|s| \left(1 - \frac{d(x, t)s}{\delta(x, t)|s|}\right) \leq -\sigma|s| \end{aligned} \quad (2.26)$$

顯然控制法則(2.23)式可以保證逼近順滑條件的成立。

但是使用切換函數 $\text{sign}(s)$ 系統軌跡會在順滑面 $s = 0$ 的兩邊不斷跳動，造成許多不當的高頻雜訊。因此將切跳函數修正為

$$\text{sat}(s, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & s > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon} & |s| \leq \varepsilon \\ -1 & s < -\varepsilon \end{cases} \quad (2.27)$$

在順滑層 $|s| \leq \varepsilon$ 中， $\varepsilon$ 為一個極小之值， $s$ 可以視為一個有限量的值，因此不影響前面控制定律和順滑函數的設計。但系統軌跡無法逼近原點，只是在附近遊動，降低了控制的精準度。不過這個代價是值得的，適當的設計順滑層就不會激發出高頻的雜訊或產生不當的切跳現象。

## 2.2 飛彈模型建立

飛彈在空間中的運動可分為平移運動(translational motion)與轉動運(rotational motion)，各為三個自由度的運動，因此整個三維空間中飛彈為六個自由度的運動[8]。本論文只考慮二維空間三個自由度的運動，以下介紹二維座標系以及運動方程式。

### 2.2.1 座標系統定義

#### 地面座標 $S_N$

地面座標 $S_N$ 原點為攔截飛彈的發射點。由圖 2-2 所示， $X_N$ 軸表示飛彈在地面的距離， $Y_N$ 表示飛彈的高度。使用 $S_N$ 座標系作為慣性座標，方便描述攔截飛

彈與目標在空間中的飛行軌跡。

### 體座標 $S_B$ (Body Coordinate)

體座標隨著飛彈的姿態角變化，可由地面座標轉換而得。原點為飛彈質心， $X_B$ 為飛彈長軸方向， $Y_B$ 為 $X_B$ 方向逆時針 90 度的方向。圖 2-2 為地面座標與體座標示意圖。

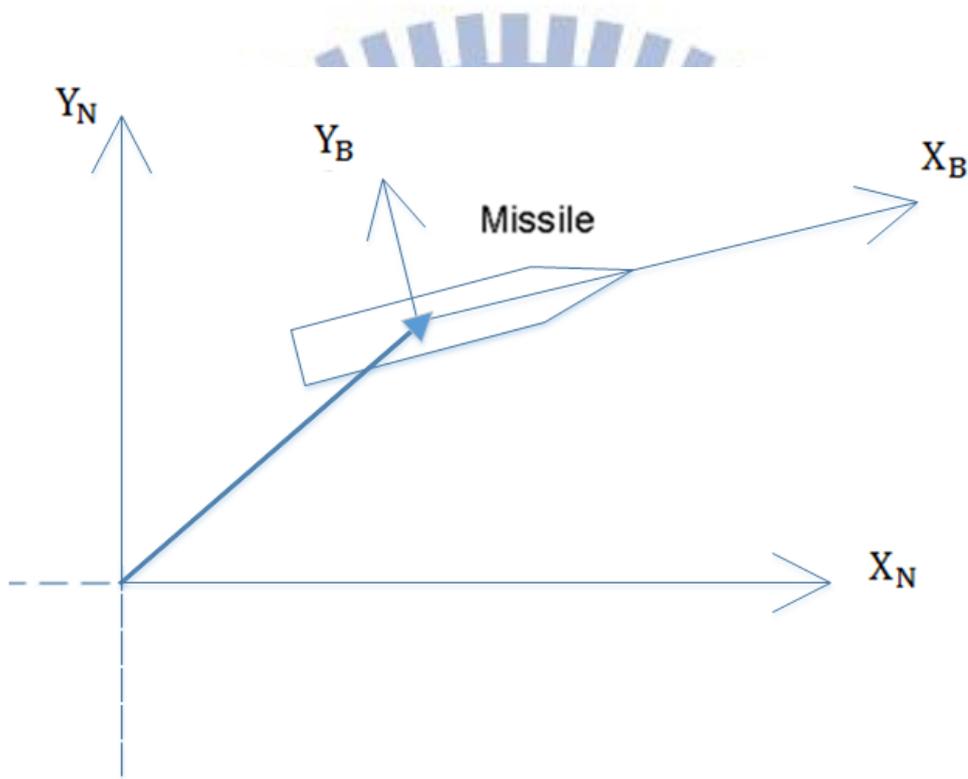


圖 2-2 地面座標與體座標示意圖

圖 2-3 為攔截飛彈與目標相對位置及速度示意圖。 $v$ 為攔截飛彈的速度向量， $v_t$ 為目標飛彈的速度向量。 $\lambda$ 為瞄準線與地面座標 $X_N$ 軸的夾角，稱為視線角， $\eta$ 為攔截飛彈速度與瞄準線的夾角， $\eta_t$ 為目標飛彈速度與瞄準線的夾角。假設攔截飛彈與目標飛彈都以固定速度飛行，皆沒有任何方向的加速度，攔截飛彈速度與瞄準線的夾角維持 $\eta_0$ 來飛行，則攔截飛彈不需任何加速度即可攔截目標。因此定義初始航向誤差(heading error)為

$$he = \eta - \eta_0 \quad (2.28)$$

其中 $\eta$ 為攔截飛彈進入歸向(homing)的初始角度。假設攔截飛彈速度為 $v_0$ ，目標飛彈速度為 $v_{t0}$ ，目標飛彈速度與瞄準線的夾角為 $\eta_{t0}$ ， $\eta_0$ 可以表示為

$$\eta_0 = \sin^{-1} \left( \frac{v_{t0} \sin \eta_{t0}}{v_0} \right) \quad (2.29)$$

初始航向誤差及 $\eta_0$ 方便攔截模擬時設定攔截飛彈和目標的相對位置、相對速度以及導引的需求。

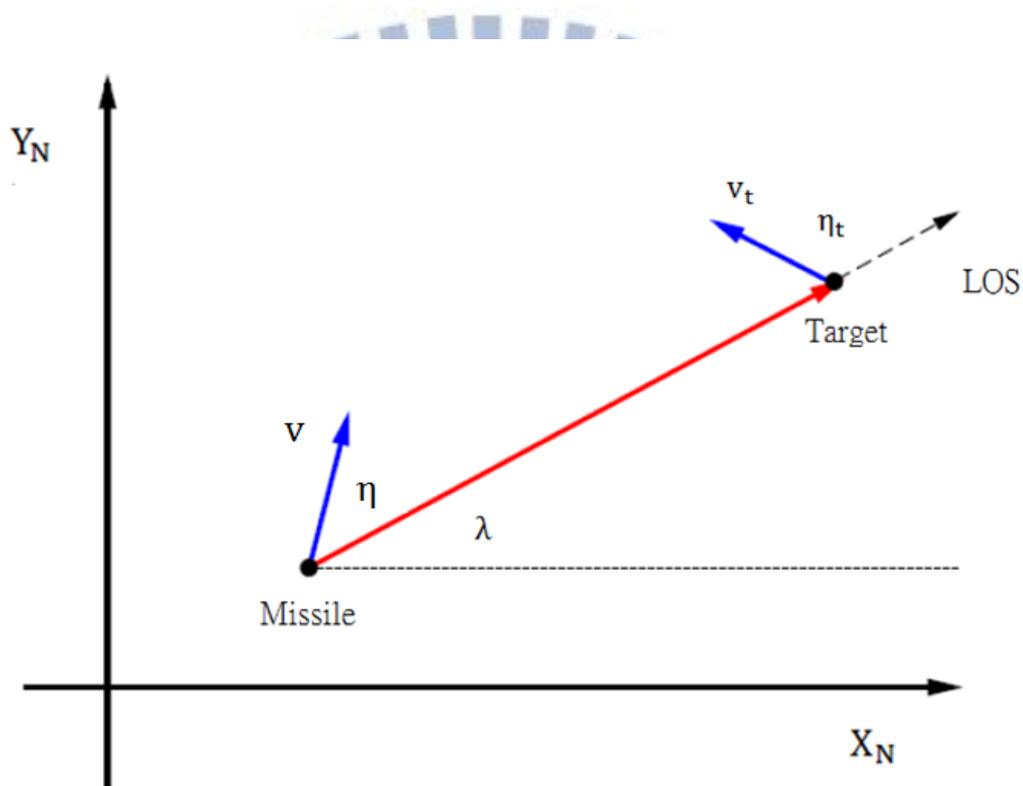


圖 2-3 攔截飛彈與目標相對位置及速度示意圖

### 2.2.2 飛彈簡易模型

在本論文中只考慮飛彈平面二維的運動，探討飛彈在地面座標系 $X_N$ 軸以及 $Y_N$ 軸平面的運動情形。圖 2-4 中 $\delta$ 為飛彈尾翼角(tail angle)，逆時針為正。 $T$ 為距離質心(CG) $b$ 公尺的側向推力， $\theta$ 為飛彈姿態角(attitude angle)， $\alpha$ 為攻角 (angle of attack)， $\gamma$ 為飛行路徑角， $v$ 為飛彈速度。定義姿態角 $\theta$ 為從 $X_N$ 到 $X_B$ 的夾角，逆時針為正。定義飛行路徑角 $\gamma$ 為從 $X_N$ 軸至飛彈速度 $v$ 的夾角，逆時針為正，可表示

為

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{v_{Ny}}{v_{Nx}} \right) \quad (2.30)$$

其中 $v_{Ny}$ 為飛彈速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $v_{Nx}$ 為飛彈速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。定義攻角 $\alpha$ 為飛彈速度 $v$ 到 $X_B$ 軸的夾角，逆時針為正，可表示為

$$\alpha = \theta - \gamma \quad (2.31)$$

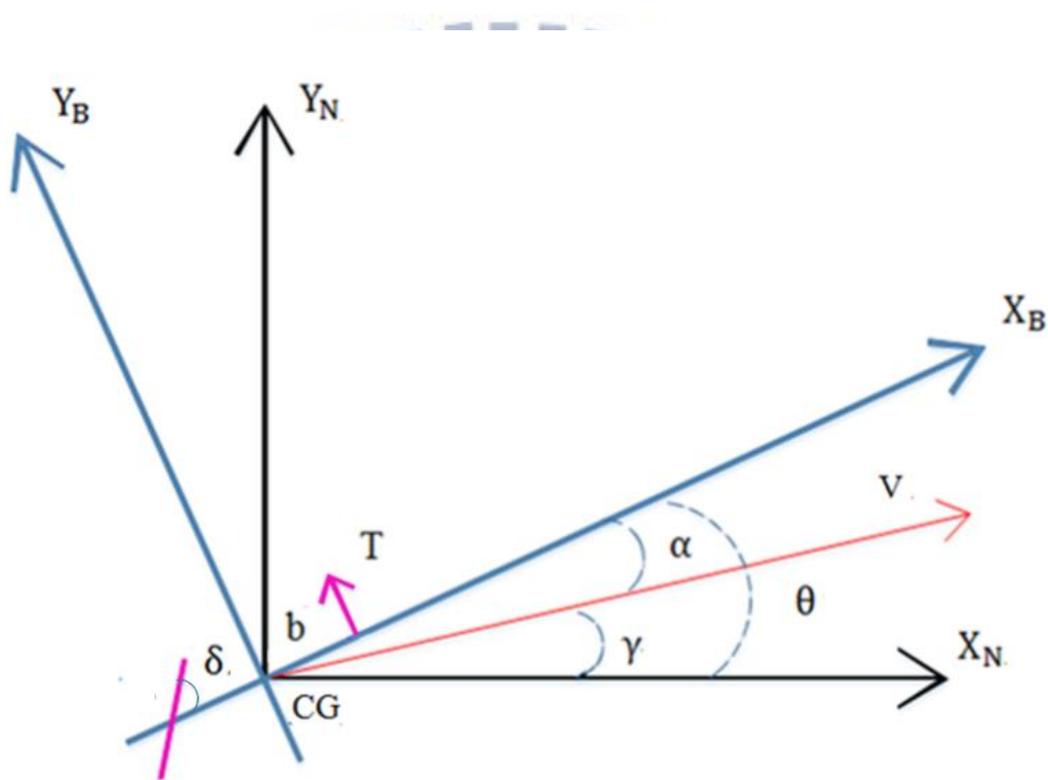


圖 2-4 飛彈二維平面示意圖

### 2.2.3 運動方程式

#### 平移運動方程式

現在考慮平面二維座標如圖 2-4 所示，平移運動為飛彈質心在地面座標( $S_N$ )的位置變化、速度變化、加速度變化。速度與加速度關係如下：

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Nx} &= a_{Nx} \\ \dot{v}_{Ny} &= a_{Ny} \end{aligned} \quad (2.32)$$

其中 $v_{Ny}$ 為飛彈速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $v_{Nx}$ 為飛彈速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。 $a_{Ny}$ 為飛彈加速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $a_{Nx}$ 為飛彈加速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。位置與速度的關係如下：

$$\begin{aligned}\dot{x}_N &= v_{Nx} \\ \dot{y}_N &= v_{Ny}\end{aligned}\quad (2.33)$$

其中 $x_N$ 為飛彈在地面座標 $X_N$ 方向的位置， $y_N$ 為飛彈在地面座標 $Y_N$ 方向的位置。

此外飛彈在體座標 $Y_B$ 方向所受的力 $F$ 可以表示為

$$F = Y_\alpha \alpha + Y_\delta \delta + T \quad (2.34)$$

其中 $Y_\alpha$ 為攻角的氣動力係數， $Y_\delta$ 為尾翼角的氣動力係數， $T$ 為側向推力， $\alpha$ 為攻角， $\delta$ 為尾翼角。因此飛彈在體座標 $Y_B$ 方向的加速度 $a_y$ 可以表示為

$$a_y = \frac{Y_\alpha \alpha + Y_\delta \delta + T}{m} \quad (2.35)$$

其中 $m$ 為飛彈質量。加速度在體座標 $S_B$ 的分量及地面座標 $S_N$ 的分量可以表示為

$$\begin{bmatrix} a_{Nx} \\ a_{Ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

其中 $a_x$ 為加速度在體座標 $X_B$ 方向的加速度分量，為簡化分析設 $a_x = 0$ 。由(2.32)及(2.33)將 $a_{Nx}$ 及 $a_{Ny}$ 積分可以得到飛彈在地面座標的速度及位置。

### 旋轉運動方程式

考慮飛彈在二維平面上的旋轉，由圖 2-4 所示，體座標為地面座標逆時針旋轉 $\theta$ 度。飛彈所受的力矩 $M$ 可以表示為

$$M = M_\alpha \alpha + M_\delta \delta + bT \quad (2.37)$$

其中 $M_\alpha$ 為攻角的氣動力矩係數， $M_\delta$ 為尾翼角的氣動力矩係數， $b$ 為質心與側向推力噴嘴的距離。力矩所造成的角加速度 $a_\theta$ 為

$$a_\theta = \frac{M_\alpha \alpha + M_\delta \delta + bT}{I} \quad (2.38)$$

其中 $I$ 為轉動慣量。角加速度 $a_\theta$ 積分可得角速度 $q$ ，角速度積分可得姿態角 $\theta$ ，因

此轉動方程式可以表示為

$$\dot{q} = \frac{M_\alpha \alpha + M_\delta \delta + bT}{I}, \dot{\theta} = q \quad (2.39)$$

### 目標運動方程式

假設目標為點質量，不考慮姿態，只考慮目標在二維空間的平移運動，其加速度與速度關係為

$$\begin{aligned} \dot{v}_{tx} &= a_{tx} \\ \dot{v}_{ty} &= a_{ty} \end{aligned} \quad (2.39)$$

其中 $v_{ty}$ 為目標飛彈速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $v_{tx}$ 為目標飛彈速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。 $a_{ty}$ 為飛彈加速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $a_{tx}$ 為飛彈加速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。位置與速度的關係為

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= v_{tx} \\ \dot{y}_t &= v_{ty} \end{aligned} \quad (2.40)$$

其中 $x_t$ 為目標飛彈在地面座標 $X_N$ 方向的位置， $y_t$ 為目標飛彈在地面座標 $Y_N$ 方向的位置。

### 2.2.4 飛彈模型方塊圖

圖 2-5 為我們進行模擬的飛彈動態模式及導引控制系統方塊圖。體座標 $Y_B$ 方向加速度 $a_y$ 和角速度 $q$ 回授進入控制器，產生尾翼角命令 $\delta_c$ 以及側向推力命令 $T_c$ ，再經過致動器產生尾翼角 $\delta$ 和側向推力 $T$ 進入飛彈的氣動力方程式。致動器為一階的動態方程式，其中 $\tau_\delta$ 、 $\tau_T$ 分別為尾翼角和側向推力的時間常數。氣動力方程式產生體座標 $Y_B$ 方向加速度與角加速度，角加速度經過積分後形成角速度，角速度積分後成為姿態角。 $Y_B$ 方向加速度及角速度回授給控制器，姿態角供 $Y_B$ 方向加速度進行座標轉換，經由計算可以得到飛彈在地面座標的位置、速度、加速度。最後經由追蹤導引法則可以得到體座標 $Y_B$ 方向加速度的命令，最後與回授的加速度和角速度進入控制器進行運算。此外利用(2.30)式、(2.31)式計算攻角，必須有

地面座標的資訊以及姿態角，得到的攻角提供給氣動力方程式作運算。

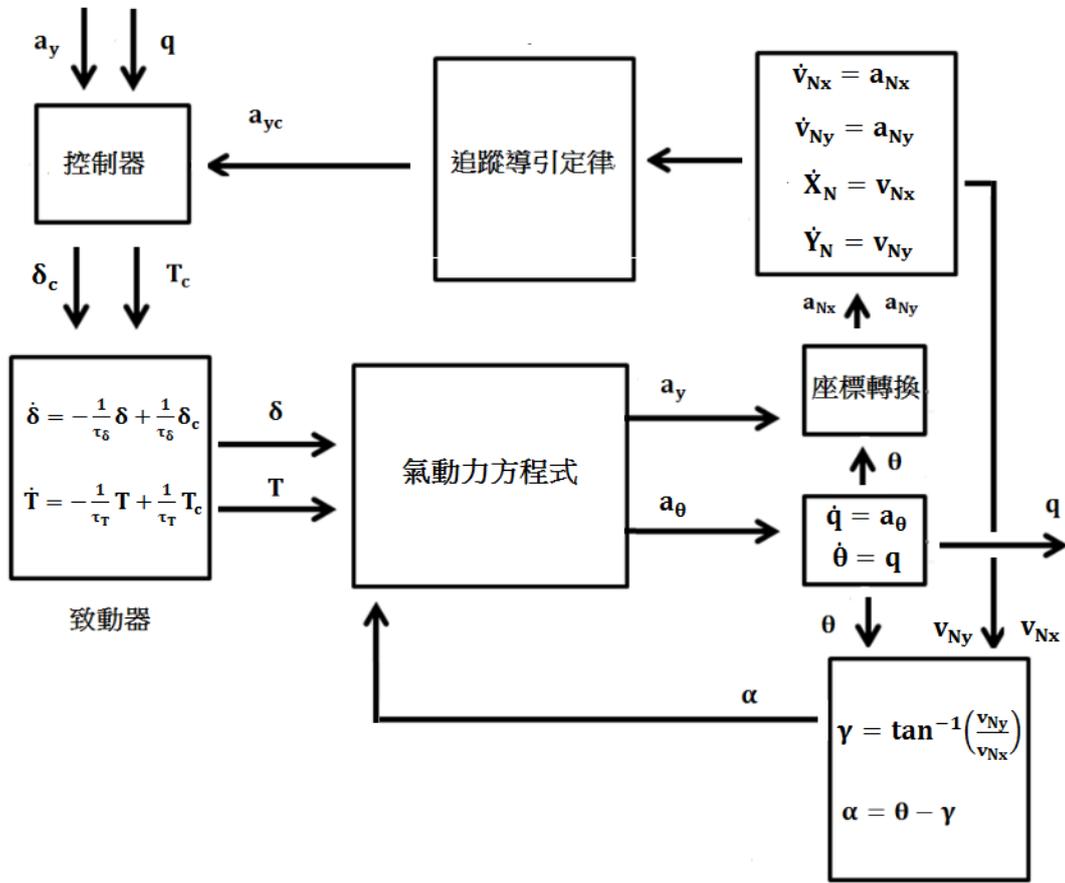


圖 2-5 飛彈動態模式及導引控制系統方塊圖

### 2.2.5 氣動力係數、氣動力矩係數

飛行載具的機身與尾翼在飛行時會產生氣動力、氣動力矩。而這些氣動力係數、氣動力矩係數根據飛行高度、馬赫數、攻角、風向角等因素而不同，必須由飛行測試推估而得。本論文使用文獻[1]的資料，其相關係數如表 2-1。

表 2-1 攔截飛彈之參數設定

<b>物理性質</b>	
飛彈質量	$m=365\text{kg}$
角動慣量	$I=746\text{kg}\cdot\text{m}^2$
參考長度	$d=0.33\text{m}$
參考面積	$s=\frac{\pi}{4}d^2=0.0855\text{m}^2$
<b>飛彈飛行狀態</b>	
速度	$v=4000\text{ft/s}=1219\text{m/s}$
高度	$H=80000\text{ft}=24384\text{m}$
動態壓力	$q=\frac{1}{2}\rho v^2=0.5(0.0448)(1219.2)^2=33296\text{N/m}^2$
<b>空氣動力性質</b>	
尾翼力矩參數	$C_{M\delta}=-8$
攻角力矩參數	$C_{M\alpha}=-12.5$
尾翼動力參數	$C_{Y\delta}=1.5$
攻角動力參數	$C_{Y\alpha}=25$
<b>氣動力係數(Y 方向)</b>	
尾翼氣動力係數	$Y_{\delta}=C_{Y\delta}qs=4270\text{N/rad}$
攻角氣動力係數	$Y_{\alpha}=C_{Y\alpha}qs=71170\text{N/rad}$
<b>氣動力矩係數(逆時針)</b>	
尾翼角氣動力矩係數	$M_{\delta}=C_{\delta}qsd=-7515\text{N}\cdot\text{m/rad}$
攻角氣動力矩係數	$M_{\alpha}=C_{\alpha}qsd=-11743\text{N}\cdot\text{m/rad}$

## 第三章

### 攔截飛彈的純尾翼控制設計

本章討論以飛彈尾翼為致動器的線性控制系統設計。尾翼控制利用氣動力造成攻角改變而產生橫向加速度。控制系統根據線性化的模式設計來達到穩態及暫態的性能要求。由於尾翼角度以及非最小相位動態的限制，尾翼控制的暫態響應可能無法滿足攔截的需求。因此防禦飛彈，如愛國者三型，常增加側向推力的致動器，在終端導引的最後階段啟動，以改善控制系統的反應速度，提升攔截能力。尾翼及側向推力為致動器的非線性混合控制系統設計將於第四章討論。由於燃料重量及體積的限制，側向推力只有短暫的作用時間，攔截飛彈在大部分的飛行時間仍仰賴尾翼來達到控制的目的。本章介紹簡單的尾翼控制系統設計，3.1 節討論利用簡單的模擬來建立飛彈簡化的線性動態模式，3.2 節討論比例積分器配合角速度回授的線性控制系統設計。

#### 3.1 攔截飛彈的動態方程式

第二章介紹二維的非線性飛彈動態，其中非線性來自座標轉換及攻角與速度的非線性關係。考慮側向推力不作用，因此尾翼角的命令 $\delta_c$ 為動態系統的輸入。為了控制設計的目的，考慮可量測的角速度 $q$ 和橫向(體座標 $Y_B$ 方向)加速度 $a_y$ 為輸出。為了得到 $\delta_c$ 至 $a_y$ 及 $q$ 之間的轉移函數，利用 $\delta_c$ 為一步階函數作為輸入，取得輸出 $a_y$ 及 $q$ 的訊號。由於 $a_y$ 及 $q$ 均可近似為弦波加常數的波型，利用拉普拉斯轉換可以得到簡化的轉移函數，進而得到系統狀態方程式。

以尾翼角命令 $\delta_c = \pi/90\text{rad}$  (2 度)步階函數輸入開迴路系統，我們得到類弦波的圖形 $a_y(t)$ 及 $q(t)$ ，方程式近似為

$$a_y(t) = -4 + 4\cos 3.9t \quad (\text{m/s}^2) \quad (3.1)$$

$$q(t) = -0.005 - 0.073\sin 3.9t \quad (\text{rad/s}) \quad (3.2)$$

圖 3-1 和圖 3-2 分別為加速度以及角速度實際模擬以及近似方程式的比較圖，藍

色線為實際模擬結果，紅色線為近似方程式的結果。從這兩張比較圖中可以看出實際的曲線與近似方程式的相似性。

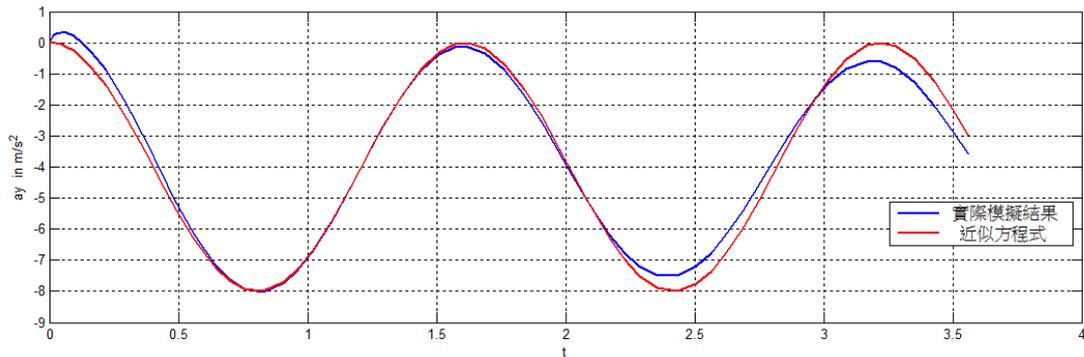


圖 3-1 尾翼輸入 2 度步階命令所得到的加速度 $a_y(t)$ 比較圖，藍線為模擬輸出結果，紅線為(3.1)式的圖形。

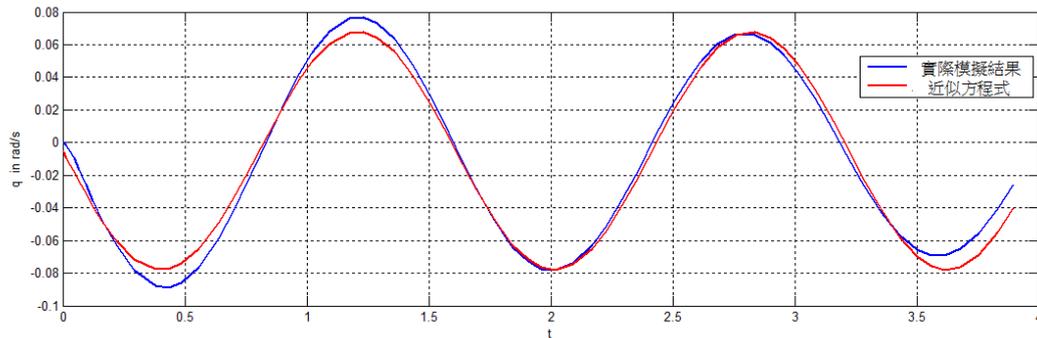


圖 3-2 尾翼輸入 2 度步階命令所得到的角速度 $q(t)$ 比較圖，藍線為模擬輸出結果，紅線為(3.2)式的圖形。

統整以上方程式，以時域系統表示：

$$\delta_c(t) = 2\left(\frac{\pi}{180}\right) \quad (\text{rad})$$

$$a_y(t) = -4 + 4\cos 3.9t \quad (\text{m/s}^2)$$

$$q(t) = -0.005 - 0.073\sin 3.9t \quad (\text{rad/s})$$

經由拉普拉斯轉換，以頻域表示：

$$\delta_c(s) = 2\left(\frac{\pi}{180s}\right) \quad (\text{rad})$$

$$a_y(s) = -4\frac{1}{s} + 4\frac{s}{s^2+15.2} \quad (\text{m/s}^2)$$

$$q(s) = -0.005\frac{1}{s} - 0.073\frac{3.9}{s^2+15.2} \quad (\text{rad/s})$$

可以得到轉移函數

$$\frac{a_y(s)}{\delta_c(s)} = -\frac{1743}{s^2+15.2} \quad (3.3)$$

$$\frac{q(s)}{\delta_c(s)} = -0.14 - \frac{8.1s}{s^2+15.2} \quad (3.4)$$

為了計算方便將(3.4)式中常數項-0.14 忽略，則兩個簡化的轉移函數為

$$\frac{a_y(s)}{\delta_c(s)} = -\frac{1743}{s^2+15.2} \quad , \quad \frac{q(s)}{\delta_c(s)} = -\frac{8.1s}{s^2+15.2} \quad (3.5)$$

從(3.5)式的轉移函數可以得到一個以  $\delta_c$  為輸入， $[a_y \ q]^T$  為輸出的狀態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_c \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1743 & 0 \\ 0 & -8.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中狀態變數為  $[\eta \ \dot{\eta}]^T$ 。狀態方程式(3.6)式及(3.7)式可以圖 3-3 的方塊圖表示。

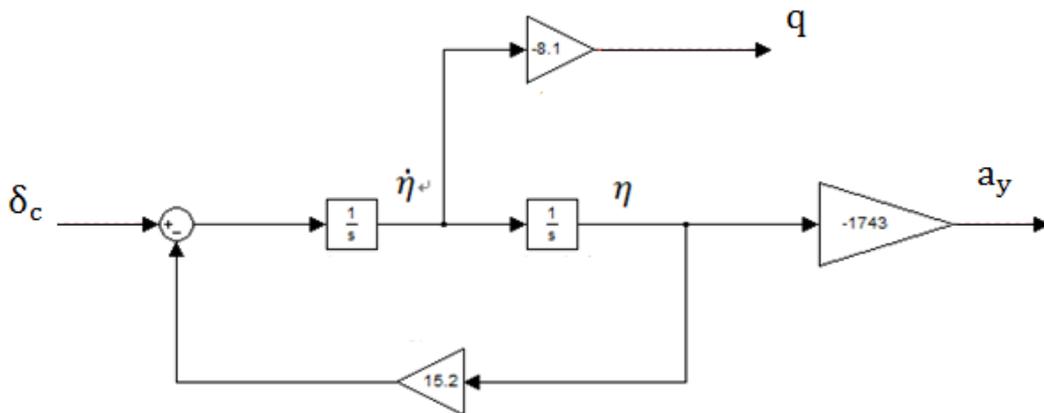


圖 3-3 (3.6)式及(3.7)式的方塊圖

### 3.2 角速度回授及比例積分控制器的設計

由(3.5)式轉移函數可知系統有一對虛軸上的極點 $\pm 3.9j$ ，因此步階響應為持續的震盪。為了簡化設計考慮角速度回授來將極點移入左半平面，以增加系統的阻尼比。角速度回授的方塊圖如圖 3-4 所示。經過角速度回授，尾翼指令 $\delta_c$ 可以表示為

$$\delta_c = u + (-8.1K_q)\dot{\eta} \quad (3.8)$$

其中 $u$ 為新的控制輸入。將(3.8)式代入(3.6)式可得新的狀態方程式為

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.2 & -8.1K_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ [a_y] &= [-1743 \quad 0] \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

經過計算得到 $u$ 到 $a_y$ 的轉移函數為

$$\frac{a_y(s)}{u(s)} = \frac{-1743}{s^2 + 8.1K_q s + 15.2} \quad (3.10)$$

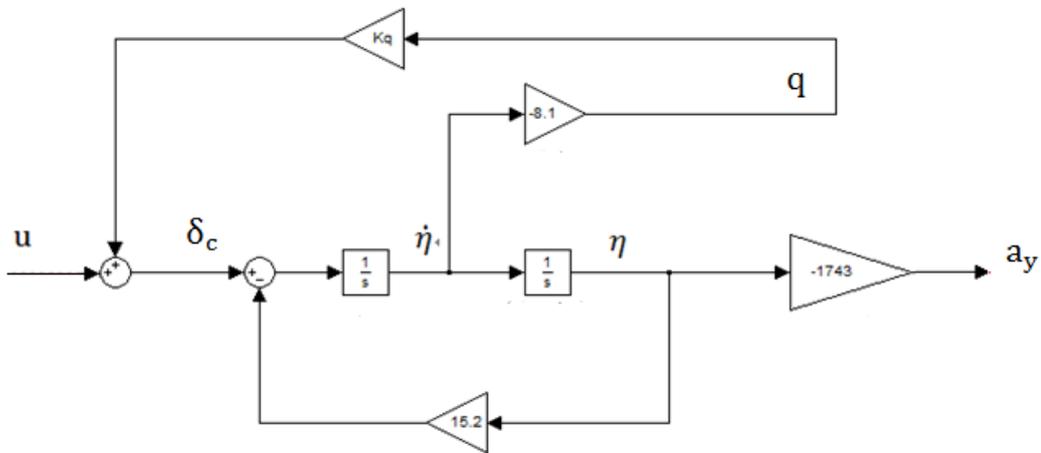


圖 3-4 加入  $q$  回授的狀態方程式

由(3.10)式可知自然頻率 $\omega_n = \sqrt{15.2} = 3.9$ ，如果要達到阻尼比為1，則回授增益 $K_q$ 必須滿足

$$8.1K_q = 7.8 \quad (3.11)$$

因此 $K_q = 7.8/8.1 \approx 1$ 。我們選擇 $K_q = 1$ ，針對(3.10)式設計比例積分控制器，如圖 3-5 所示。

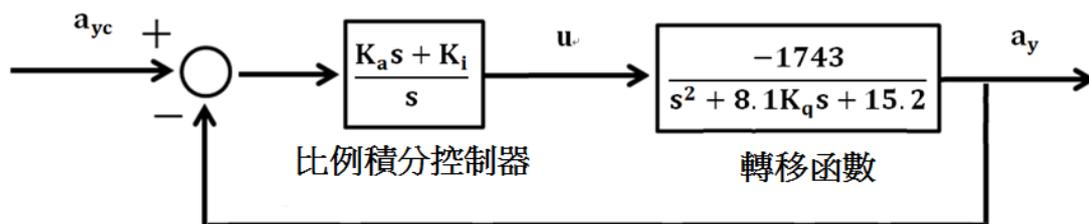


圖 3-5 利用比例積分控制器設計(3.10)式系統，其中 $K_q = 1$

圖 3-5 可以計算 $a_{yc}$ 到 $a_y$ 的閉迴路轉移函數為

$$\frac{a_y(s)}{a_{yc}(s)} = \frac{-1743K_a s - 1743K_i}{s^3 + 8.1s^2 + (15.2 - 1743K_a)s - 1743K_i} \quad (3.12)$$

由(3.12)式利用羅斯-赫維茲穩定法則(Routh-Hurwitz Stability Criterion)[9]可建

立羅斯表：

$s^3$	1	$(15.2 - 1743K_a)$
$s^2$	8.1	$-1743K_i$
$s$	$c_1$	
1	$-1743K_i$	

其中 $c_1 = (8.1(15.2 - 1743K_a) + 1743K_i)/8.1$ 。依據羅斯-赫維茲穩定法則，閉迴路轉移函數的分母每項係數正負必須為同號。因此

$$K_a < 15.2/1743 = 0.0087 \quad (3.13)$$

$$K_i < 0 \quad (3.14)$$

且羅斯表第一列正負必須為同號，因此

$$123.12 - 14118.3K_a + 1743K_i > 0 \quad (3.15)$$

$K_a$ 、 $K_i$ 必須符合(3.13)式~(3.15)式。

加入比例積分控制器相當於在開迴路系轉移函數中加入一個極點( $s = 0$ )以及一個零點( $s = -\frac{K_i}{K_a}$ )。由於加入的極點比加入的零點靠近虛軸，所以比例積分控制器為相位落後(phase lag)的補償，主要是用來達到步階響應的穩態追蹤。

$K_a$ 、 $K_i$ 值要選擇適當，才能達到好的暫態響應。

接下來進行 $K_a$ 、 $K_i$ 值選擇的討論，先利用線性模型作討論，再將選取 $K_a$ 、 $K_i$ 值放入非線性飛彈模型中，並比較線性模式與非線性模式的差異。已知 $K_q = 1$ ，則圖 3-5 中 $a_{yc}$ 到 $a_y$ 的開迴路轉移函數為

$$G(s) = \frac{-1743K_a(s + K_i/K_a)}{s(s^2 + 8.1s + 15.2)} \quad (3.16)$$

若選擇開迴路零點位置為-1，即 $\frac{K_i}{K_a} = 1$ ，則(3.16)式的根軌跡為圖 3-6 所示。利

用圖 3-6 根軌跡圖找尋適當閉迴路極點位置的 $K_a$ ，且已知 $\frac{K_i}{K_a} = 1$ ，由 $K_a$ 來決定 $K_i$ 的值。 $K_a$ 選擇越小的閉迴路實根極點越遠離虛軸，而閉迴路複數根極點越遠離實軸。因此 $K_a$ 越小系統響應速度會增加，但超越量也會增加。

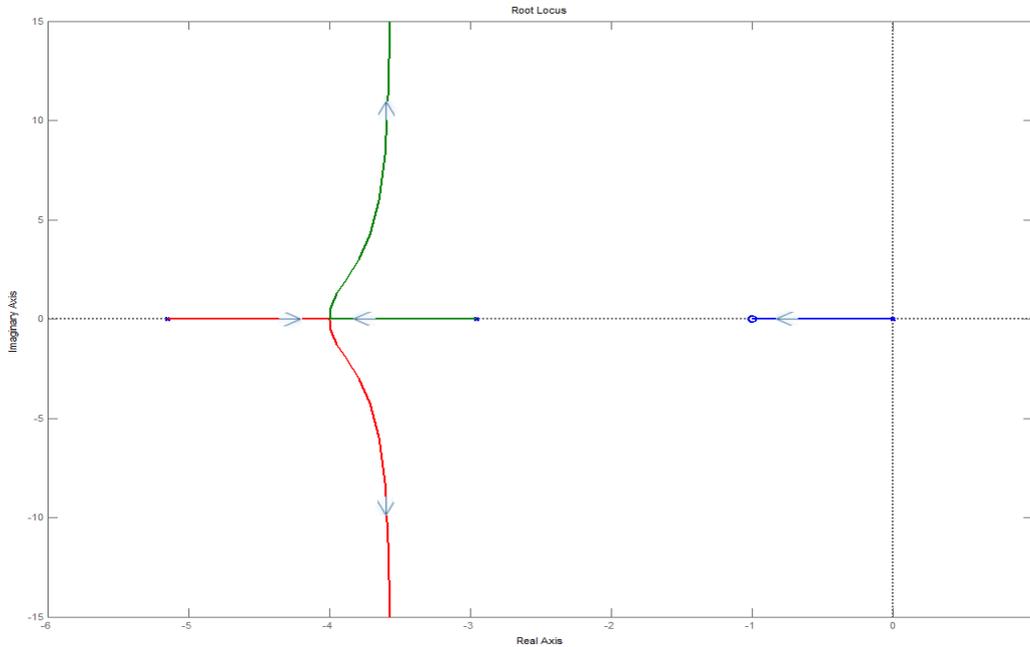


圖 3-6 零點在-1 的根軌跡圖( $K_a < 0$ )

表 3-1 為線性模型開迴路零點在-1 時，選擇不同 $K_a$ 及  $K_i$ 加速度命令為 2g 的步階函數暫態響應比較。線性模型中加速度系統響應不會有低射現象，上升時間為系統從終值的 10% 到 90% 的時間，安定時間為系統進入終值 $\pm 2\%$  的時間。由表 3-1 可知選擇 $K_a$ 、 $K_i$ 值越小，系統響應速度越快但超越量越大。圖 3-7 及圖 3-8 分別為加速度命令為 2g 的步階函數時，加速度和尾翼角響應圖比較。

表 3-1 線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a = K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點位置
-0.01	0%	0g	2.298s	4.961s	-0.6, -3.74 $\pm$ 3.74j
-0.02	0%	0g	0.4125s	3.178s	-0.78, -3.6 $\pm$ 5.5j
-0.03	5%	0g	0.263s	2.449s	-0.86, -3.6 $\pm$ 6.9j
-0.04	12%	0g	0.201s	1.997s	-0.88, -3.6 $\pm$ 8.1j

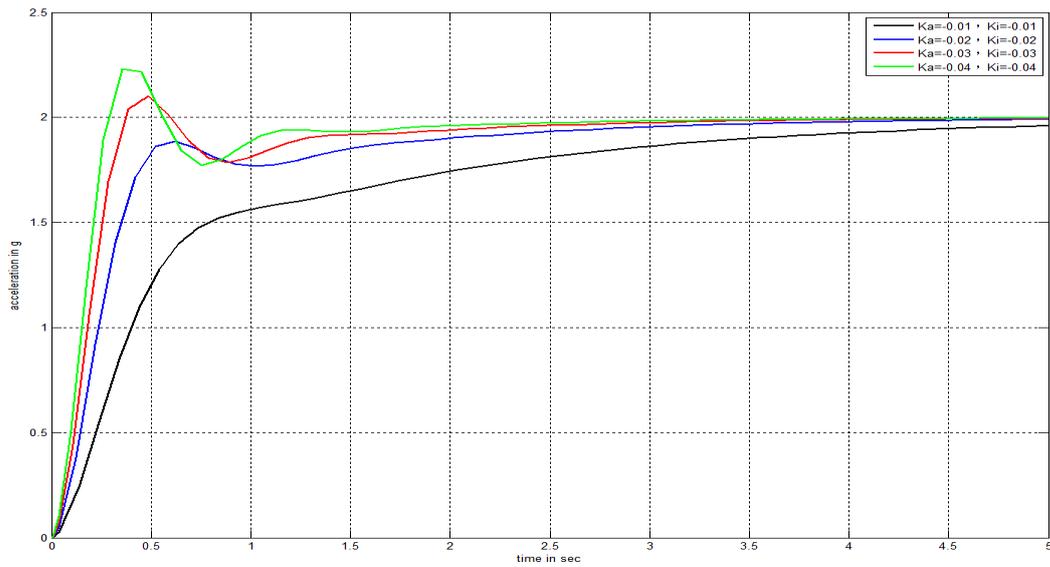


圖 3-7 線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

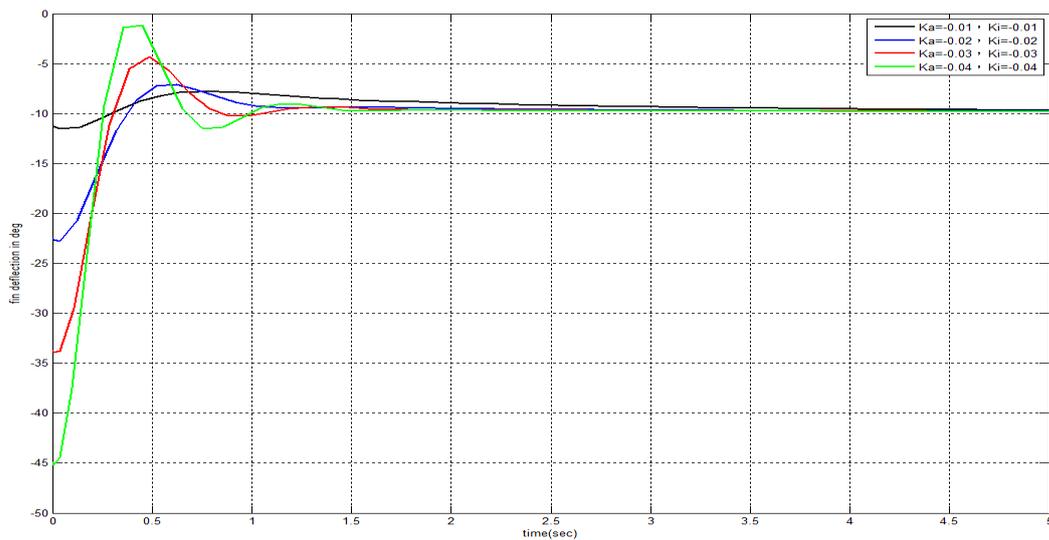


圖 3-8 線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

再來比較選擇開迴路零點位置在-2 時，即 $\frac{K_i}{K_a} = 2$ ，不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的情形，圖 3-9 為開迴路零點位置在-2 的根軌跡圖。零點位置在-2 的系統閉迴路實根極點比零點在-1 時的系統遠離虛軸，閉迴路極點複數根稍微靠近實軸與虛軸。系統比較受實根遠離的影響，使得系統響應越快，但超越量越大。輸入加速度命令為 2g 的步階函數，表 3-2 顯示 $K_a$ 、 $K_i$ 越小系統響應越快，但超越量越大。與表 3-1 比較之，在相同的 $K_a$ 情況之下，開迴路零點位置越遠離虛軸，系統響應越快，但

超越量越大。圖 3-10 及圖 3-11 分別為加速度和尾翼角響應圖比較。

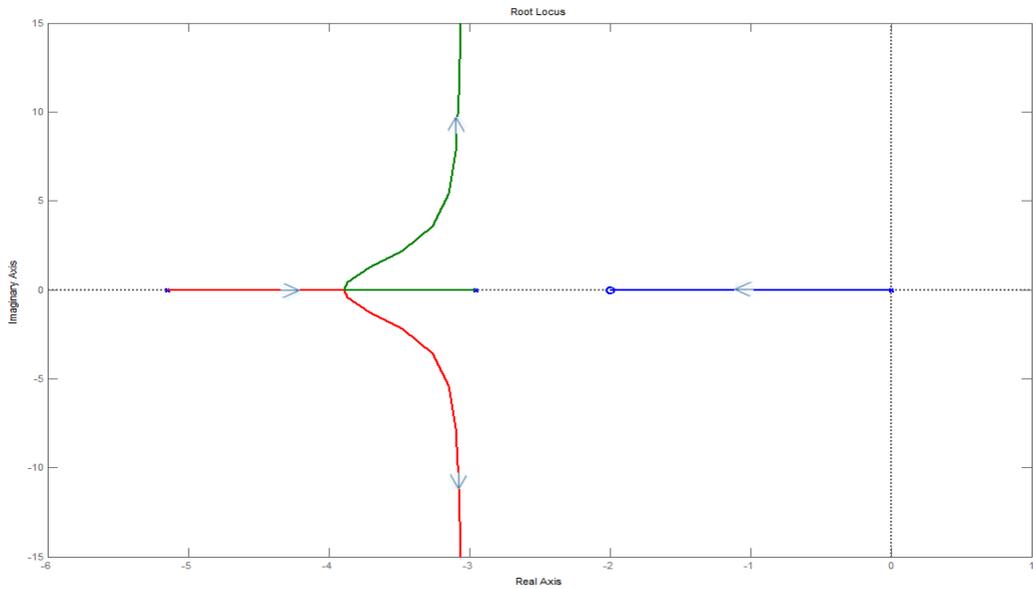


圖 3-9 零點在-2 的根軌跡圖( $K_a < 0$ )

表 3-2 線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a$	$K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點
-0.01	-0.02	0%	0g	0.627s	1.883s	-1.6, -3.3±3.4j
-0.02	-0.04	9.4%	0g	0.308s	1.401s	-1.8, -3.1±5.4j
-0.03	-0.06	18.4%	0g	0.219s	1.162s	-1.9, -3.1±6.7j

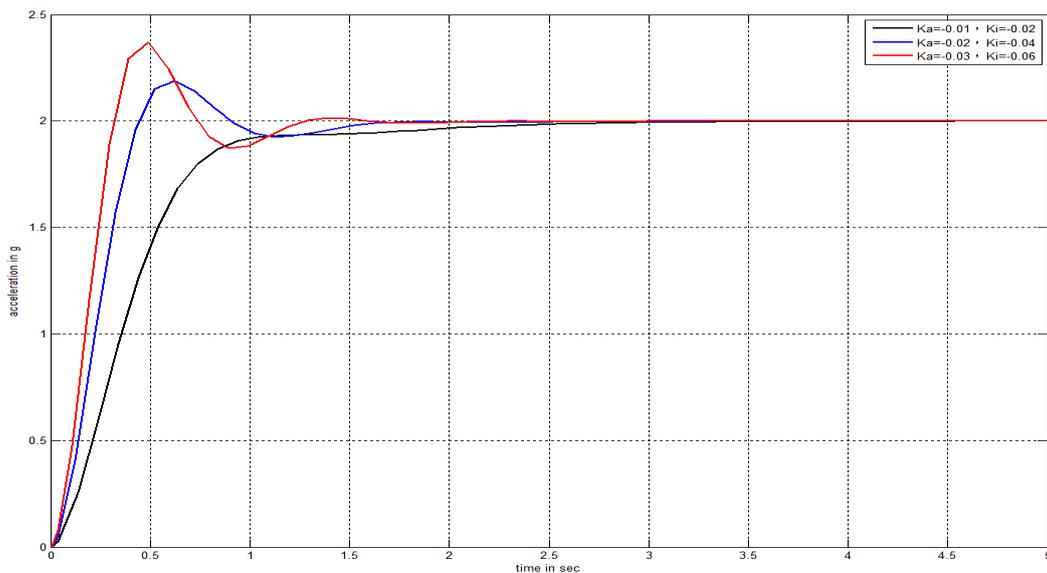


圖 3-10 線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

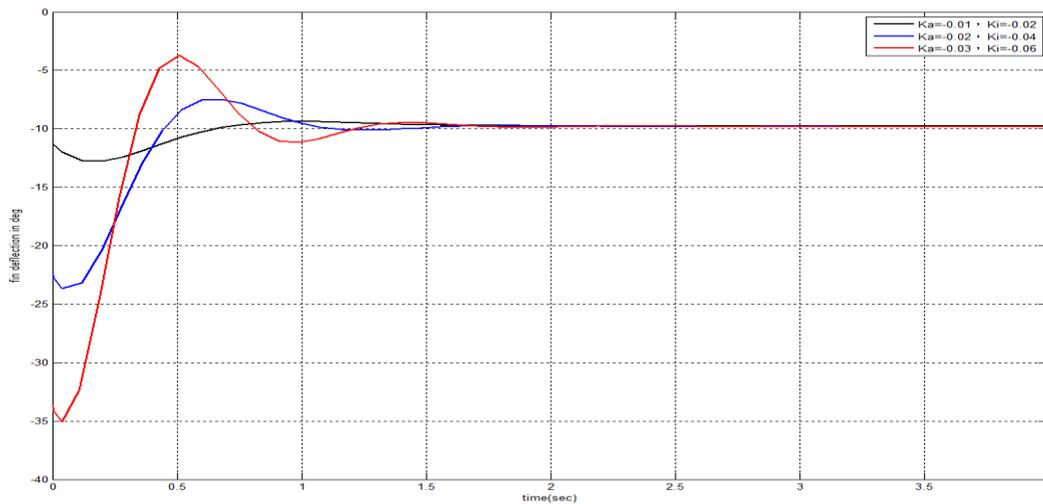


圖 3-11 線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

選擇開迴路零點位置在-3 時，輸入加速度命令為 2g 的步階函數，表 3-3 為加速度暫態響應比較，圖 3-12、圖 3-13 分別為加速度和尾翼角響應圖比較。表 3-3 顯示暫態響應很快但超越量變得很大，也造成安定時間很長，不符合我們的要求。因此不再討論零點小於-3 的情況。

表 3-3 線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a$	$K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點
-0.01	-0.03	9%	0g	0.452s	1.441s	-3.02,-2.5±3.2j
-0.02	-0.06	22.3%	0g	0.315s	1.422s	-3.01,-2.5±5.3j

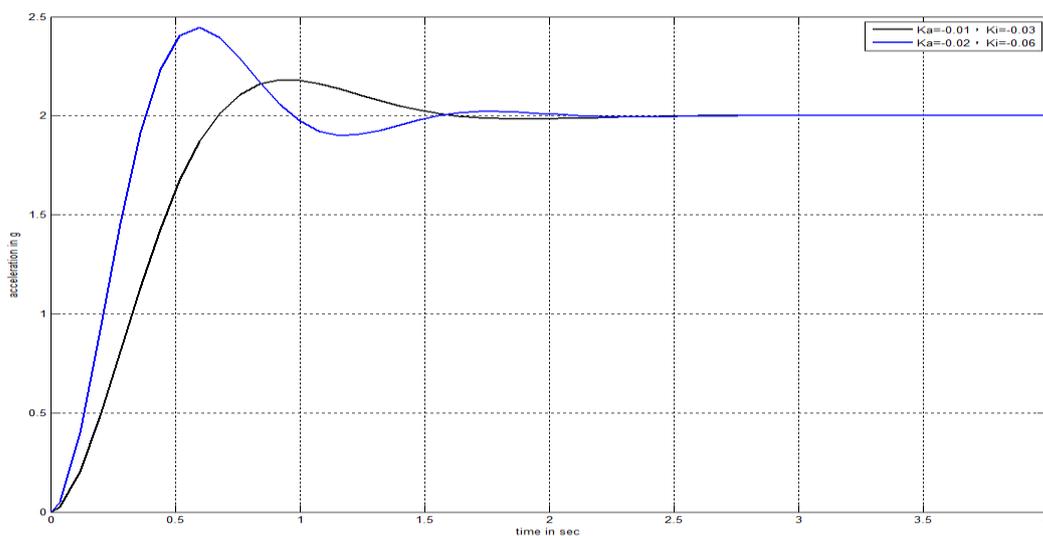


圖 3-12 線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

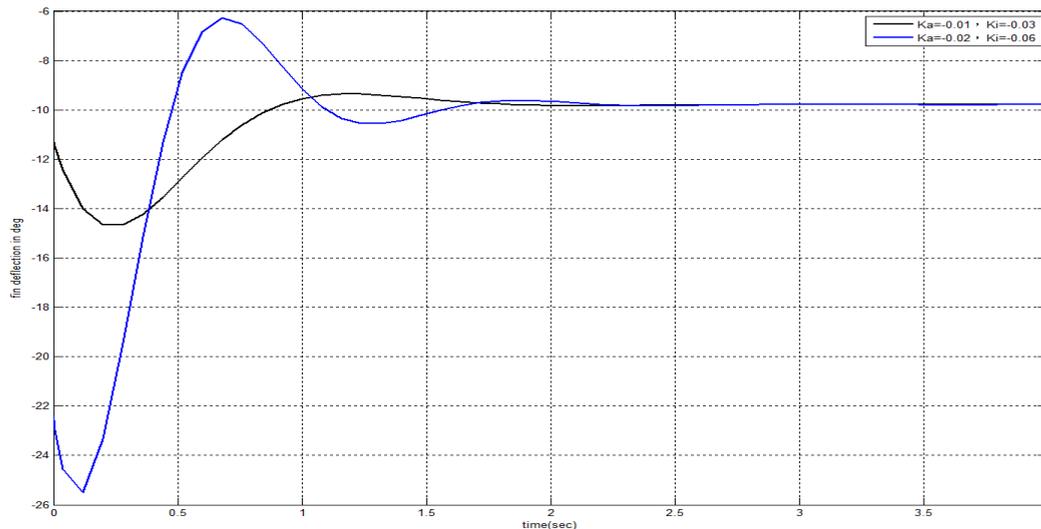


圖 3-13 線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

在線性模型中相同 $K_a$ 的情況下，開迴路零點位置越遠離虛軸，系統響應越快，但超越量越大。相同開迴路零點位置的情況下， $K_a$ 越小系統響應速度會增加，但超越量也會增加。尾翼角響應與超越量的大小有關，超越量越大則尾翼角需要的角度也越大。從以上討論中選擇一組數據使系統最大超越量不大且響應速度快。選擇開迴路零點位置在-2 時， $K_a = -0.02$ 、 $K_i = -0.04$ ，為線性模式系統較佳的響應設計。

再來討論比例積分控制器在實際非線性飛彈模型中進行步階響應的模擬。輸入加速度命令 2g 的步階函數，討論閉迴路零點位置在-1、-2 及-3 時，不同 $K_a$ 及 $K_i$ 值非線性系統的暫態響應比較。表 3-4 為選擇開迴路零點位置為-1 系統輸入加速度命令 2g 步階響應的比較，圖 3-14、圖 3-15 分別為加速度和尾翼角響應。

表 3-4 非線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a = K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點
-0.01	0%	-0.172g	2.388s	5.372s	-0.6,-3.74±3.74j
-0.02	0%	-0.392g	1.072s	3.183s	-0.78,-3.6±5.5j
-0.03	0%	-0.648g	0.122s	2.453s	-0.86,-3.6±6.9j
-0.04	29%	-0.904g	0.062s	1.982s	-0.88,-3.6±8.1j

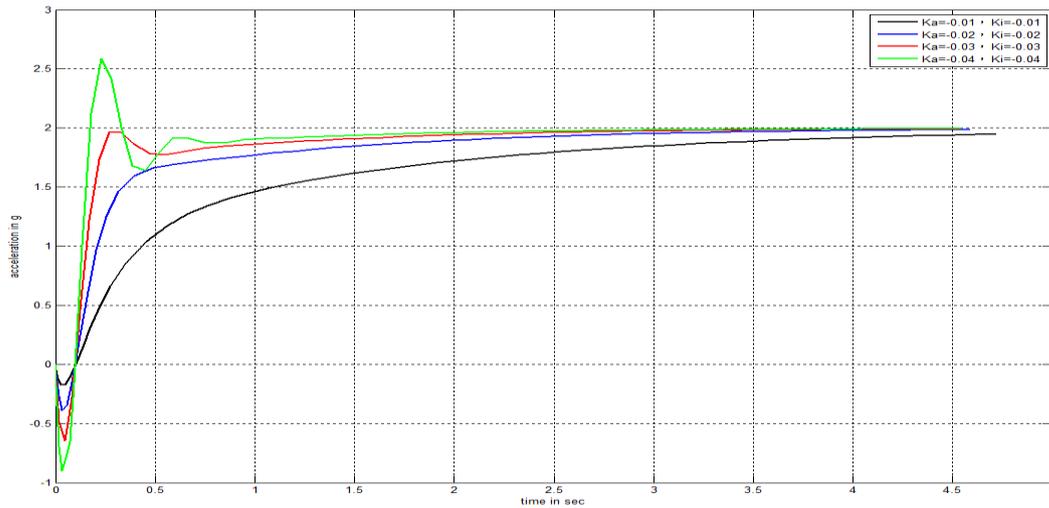


圖 3-14 非線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

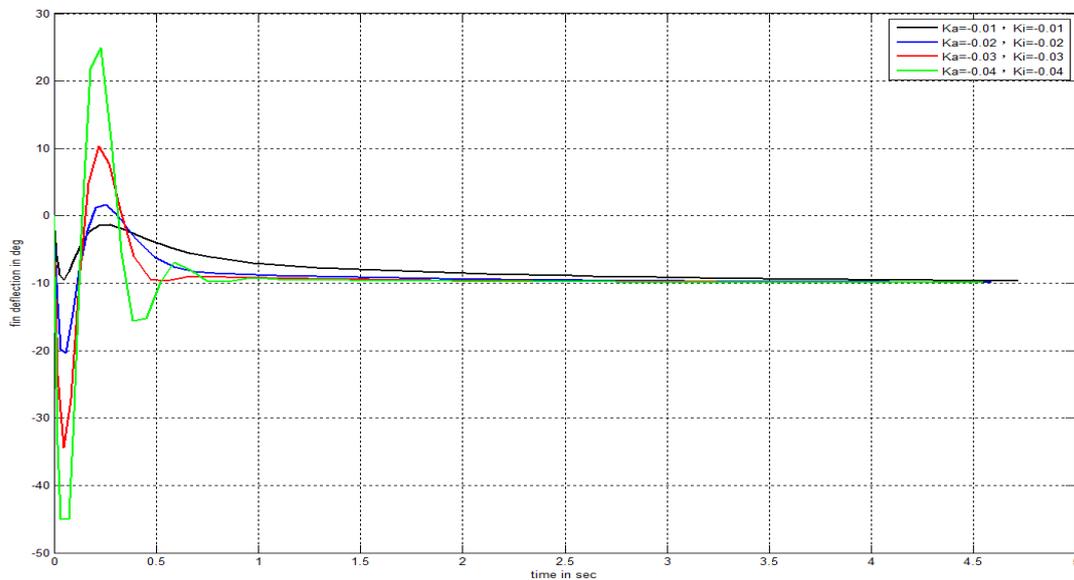


圖 3-15 非線性模型零點在-1 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

若選擇開迴路零點位置為-2, 表 3-5 為加速度命令為 2g 的步階函數時不同 $K_a$ 、 $K_i$  值的加速度暫態比較, 圖 3-16、圖 3-17 分別為加速度、尾翼角響應圖。

表 3-5 非線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a$	$K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點
-0.01	-0.02	0%	-0.181g	0.799s	1.529s	-1.6,-3.3±3.4j
-0.02	-0.04	1.5%	-0.401g	0.257s	1.503s	-1.8,-3.1±5.4j
-0.03	-0.06	13.1%	-0.675g	0.101s	1.475s	-1.9,-3.1±6.7j

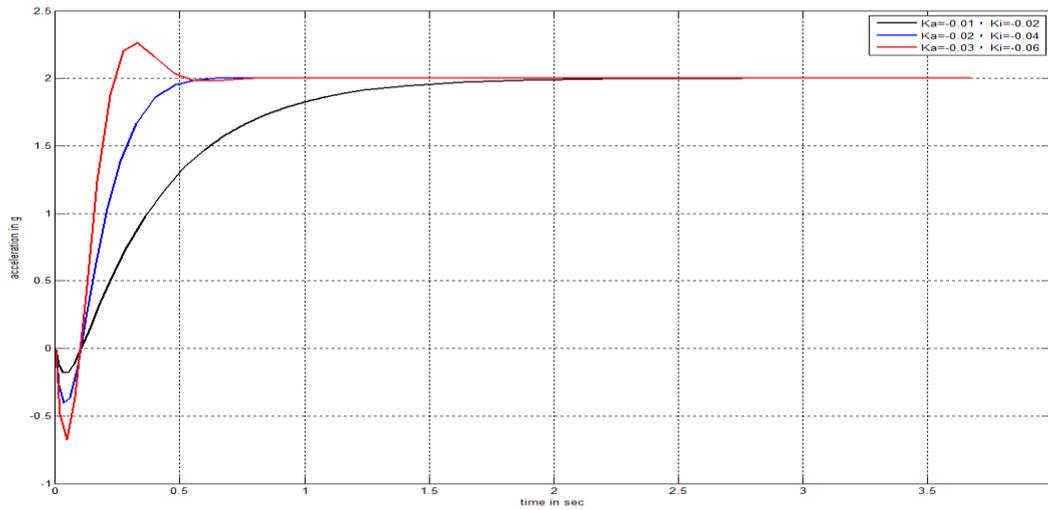


圖 3-16 非線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

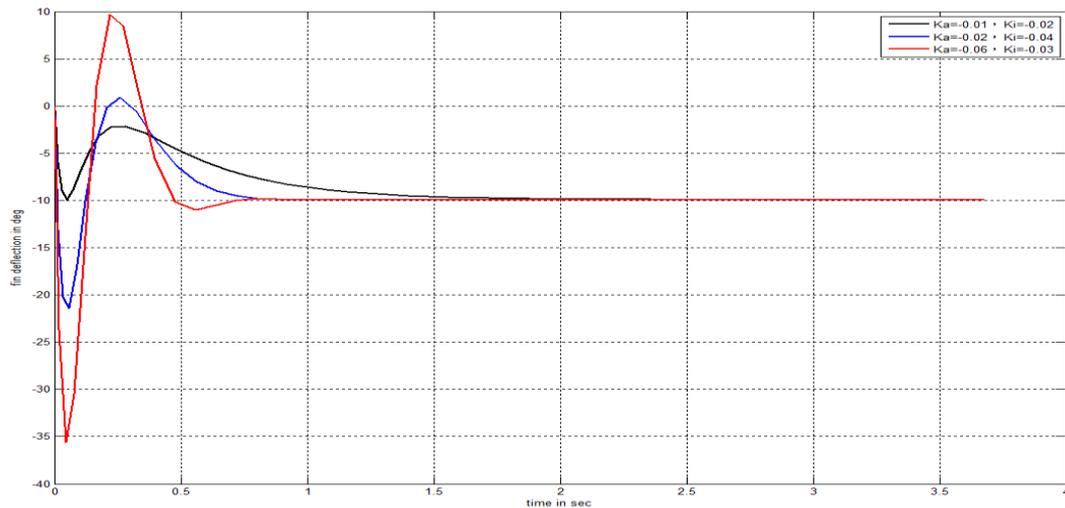


圖 3-17 非線性模型零點在-2 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

若選擇開迴路零點位置為-3，輸入加速度命令為 2g 的步階函數，表 3-6 為不同  $K_a$ 、 $K_i$  值的加速度暫態比較，圖 3-18、圖 3-19 分別為加速度、尾翼角響應圖。

表 3-6 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度暫態響應比較

$K_a$	$K_i$	最大超越量	最小低射	上升時間	安定時間	閉迴路極點
-0.01	-0.03	6.6%	-0.188g	0.497s	1.906s	-3.02,-2.5±3.2j
-0.02	-0.06	12.9%	-0.411g	0.189s	1.112s	-3.01,-2.5±5.3j

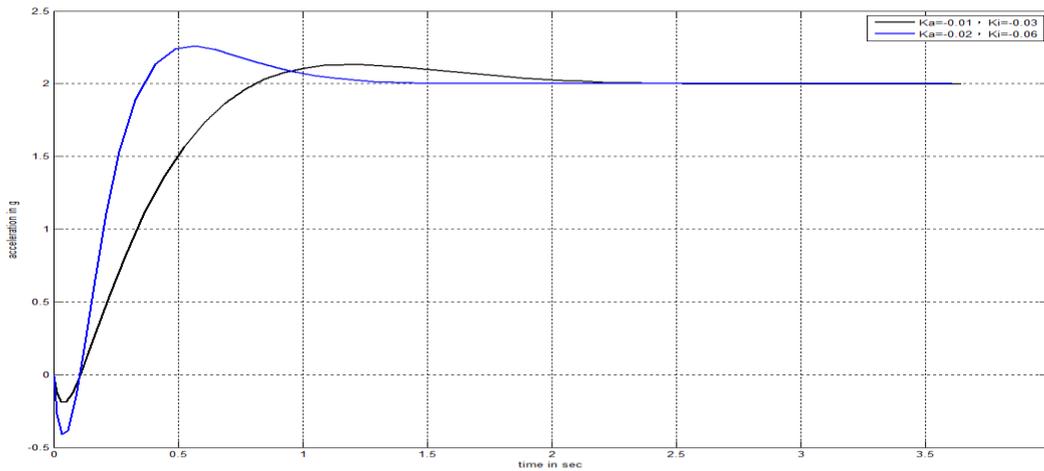


圖 3-18 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的加速度響應比較

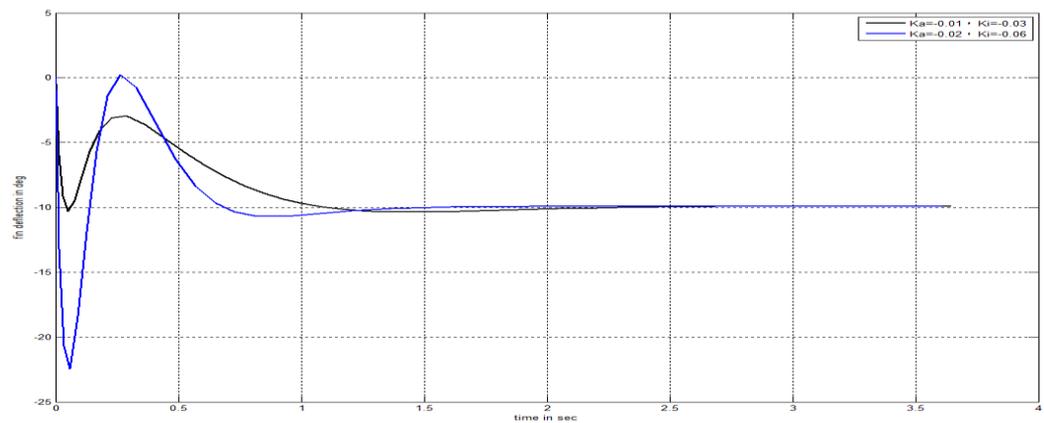


圖 3-19 非線性模型零點在-3 時不同 $K_a$ 、 $K_i$ 的尾翼角響應圖比較

比例積分控制器放入非線性模型與線性模型的響應非常相近，非線性模型擁有與線性模型相同的特性：開迴路零點位置選擇越遠離虛軸，系統的響應主要受系統實根遠離所影響，因此響應速度越快，但超越量會越大。 $K_a$ 值選取的越小，代表系統實根越遠離虛軸，複數根越遠離實軸，因此響應速度越快，超越量會越大。最大的不同是非線性模型的加速度響應有低射現象，實際上的非線性飛彈模型具有右半面零點，而線性模型忽略了零點的影響，因此線性模型沒有低射的現象。且相同的 $K_a$ 、 $K_i$ 數值下，非線性模型的響應速度較慢，超越量較大。由以上數據分析，我們選擇一組數據使得系統最大超越量不大且響應速度快，與線性模型相同仍然選擇零點在-2時， $K_a = -0.02$ 、 $K_i = -0.04$ ，為較佳的響應設計。

## 第四章

### 攔截飛彈的複合控制設計

本章介紹兩種設計複合控制的方法。設計一是將線性的純尾翼控制輸入視為一個匹配式干擾(matched disturbance)，利用順滑模控制對雜訊的穩健性直接設計側向推力控制。設計二是將側向推力視為一個單輸入控制，利用順滑模控制來設計包含純尾翼控制的飛彈模型。4.1 節介紹設計一複合控制的設計，4.2 節介紹設計二複合控制的設計，4.3 節討論降低側向推力時系統響應的影響。

#### 4.1 設計一複合控制

4.1.1 節利用飛彈的相關方程式我們可以計算出狀態為攻角以及角速度的非線性動態方程式，將其線性化後 4.1.2 節再將方程式修正為我們可以得到的回授狀態資訊。4.1.3 節利用修正後的動態方程式作側向推力的順滑模設計，4.1.4 節提供了切跳較理想的切跳函數，4.1.5 說明尾翼控制融合側向推力的複合控制設計，4.1.6 節則是修正側向推力過大的現象。

##### 4.1.1 推導攔截飛彈動態方程式

在第三章尾翼控制系統設計中我們利用模擬的方法建立飛彈從尾翼至加速度及角速度的線性簡化模式。複合控制系統必須同時使用尾翼及側向推力兩個致動器，因此必須根據以這兩個致動器為輸入的飛彈動態模式來設計。我們首先根據第二章所描述的飛彈動態方程式來得到線性化的模式。從圖 2-4 二為飛彈示意圖可以知道

$$\theta - \alpha = \gamma = \tan^{-1} \left( \frac{v_{Ny}}{v_{Nx}} \right) \quad (4.1)$$

其中  $v_{Ny}$  為飛彈速度在地面座標  $Y_N$  方向的分量， $v_{Nx}$  為飛彈速度在地面座標  $X_N$  方向的分量， $\theta$  為姿態角， $\alpha$  為攻角， $\gamma$  為飛行路徑角。將(4.1)式微分可得

$$\dot{\gamma} = \frac{a_{Ny}v_{Nx} - v_{Ny}a_{Nx}}{v_{Nx}^2 + v_{Ny}^2} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} \quad (4.2)$$

其中 $a_{Ny}$ 為飛彈加速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $a_{Nx}$ 為飛彈加速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量， $v_{Ny}$ 為飛彈速度在地面座標 $Y_N$ 方向的分量， $v_{Nx}$ 為飛彈速度在地面座標 $X_N$ 方向的分量。速度分量可以表示成

$$\begin{cases} v_{Nx} = v \cos \gamma = v \cos(\theta - \alpha) = v(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \\ v_{Ny} = v \sin \gamma = v \sin(\theta - \alpha) = v(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 $v$ 為飛彈速度。加速度分量可以表示成

$$\begin{cases} a_{Nx} = -a_y \sin \theta + a_x \cos \theta \\ a_{Ny} = a_y \cos \theta + a_x \sin \theta \end{cases} \quad (4.4)$$

其中 $a_y$ 為飛彈加速度在體座標 $Y_B$ 方向的分量， $a_x$ 為飛彈加速度在體座標 $X_B$ 方向的分量。因加速度在體座標 $X_B$ 方向的分量 $a_x$ 不大，忽略其影響，則

$$a_{Ny}v_{Nx} = a_y v \cos \theta \cos \theta \cos \alpha + a_y v \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \quad (4.5)$$

$$v_{Ny}a_{Nx} = a_y v \sin \theta \cos \theta \sin \alpha - a_y v \sin \theta \sin \theta \cos \alpha \quad (4.6)$$

且已知

$$v^2 = v_{Nx}^2 + v_{Ny}^2 \quad (4.7)$$

將(4.5)式~(4.7)式代入(4.2)式

$$\dot{\theta} - \dot{\alpha} = \frac{a_y v [\cos \alpha (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)]}{v^2} = \frac{a_y \cos \alpha}{v} \quad (4.8)$$

利用 $\dot{\theta} = q$ 及加速度 $a_y$ 方程式(2.35)式，可以得到

$$\dot{\alpha} = q - \frac{Y_\alpha \alpha + Y_\delta \delta + T}{mv} \cos \alpha \quad (4.9)$$

其中 $Y_\alpha$ 為攻角的氣動力係數， $Y_\delta$ 為尾翼角的氣動力係數， $m$ 為飛彈質量， $T$ 為距離質心 $b$ 公尺的側向推力， $\delta$ 為尾翼角。又由轉動方程式(2.38)式可得

$$\dot{q} = \frac{M_\alpha \alpha + M_\delta \delta + bT}{I} \quad (4.10)$$

其中 $I$ 為轉動慣量， $M_\alpha$ 為攻角的氣動力矩係數， $M_\delta$ 為尾翼角的氣動力矩係數。由(4.9)式、(4.10)式和加速度方程式(2.35)，假設攻角 $\alpha$ 很小，即 $\cos \alpha \approx 1$ ，可以得到一線性化動態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Y_{\alpha}}{mv} & 1 \\ \frac{M_{\alpha}}{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{Y_{\delta}}{mv} & -\frac{1}{mv} \\ \frac{M_{\delta}}{I} & \frac{b}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ T \end{bmatrix}$$

$$a_y = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\alpha}}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta}}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ T \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

如果將表 2-1 的飛彈參數代入(4.11)式，則可以得到狀態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16 & 1 \\ -15.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.6 \times 10^{-3} & -2.25 \times 10^{-6} \\ -10.1 & 8.8 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ T \end{bmatrix}$$

$$a_y = \begin{bmatrix} 195 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.7 & 2.7 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ T \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

以上所考慮的情況皆為攻角很小，若攻角大的話有可能會與線性化後的結果有所差距。因此接下來我們做個簡單的驗證，單獨輸入尾翼角以及側向推力進入圖 3-1 開迴路系統，比較非線性系統與線性系統(4.11)式的響應，在較大的攻角之下，線性化後的結果是否與實際的結果相符合。

圖 4-1 中我們輸入 40 度步階函數的尾翼角，使得攻角能到達 50 度左右。圖 4-1 上圖為加速度響應，紅色線為線性系統(4.11)式的響應，藍色線為非線性系統的響應。下圖為非線性系統的攻角響應，攻角最大會達到 50 度左右。從圖 4-1 可知兩個加速度響應結果差不多，顯示尾翼到加速度間的線性化轉移函數不會因為攻角變大而有太大的改變。而圖 4-2 為輸入 8000N 步階函數側向推力的響應，攻角可以達到 50 度左右。紅色線為線性系統的響應，藍色線為非線性系統的響應。從圖中可以得知線性化後的響應與非線性系統的響應相差不大。

圖 4-1 及圖 4-2 顯示線性化後系統的正确性，在角度 50 度左右時響應誤差並不大，而飛彈在一般情形下攻角大致不會超過 50 度。因此我們便能使用此線性化後的狀態方程式來設計順滑模控制。

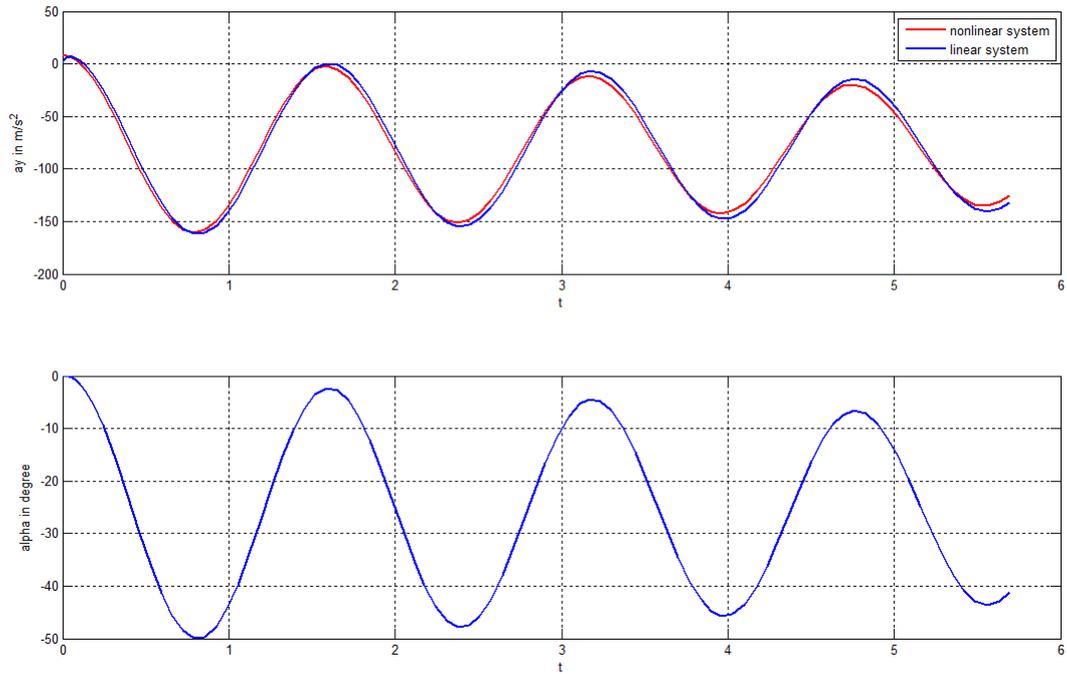


圖 4-1 輸入 40 度步階函數尾翼角加速度以及攻角響應圖

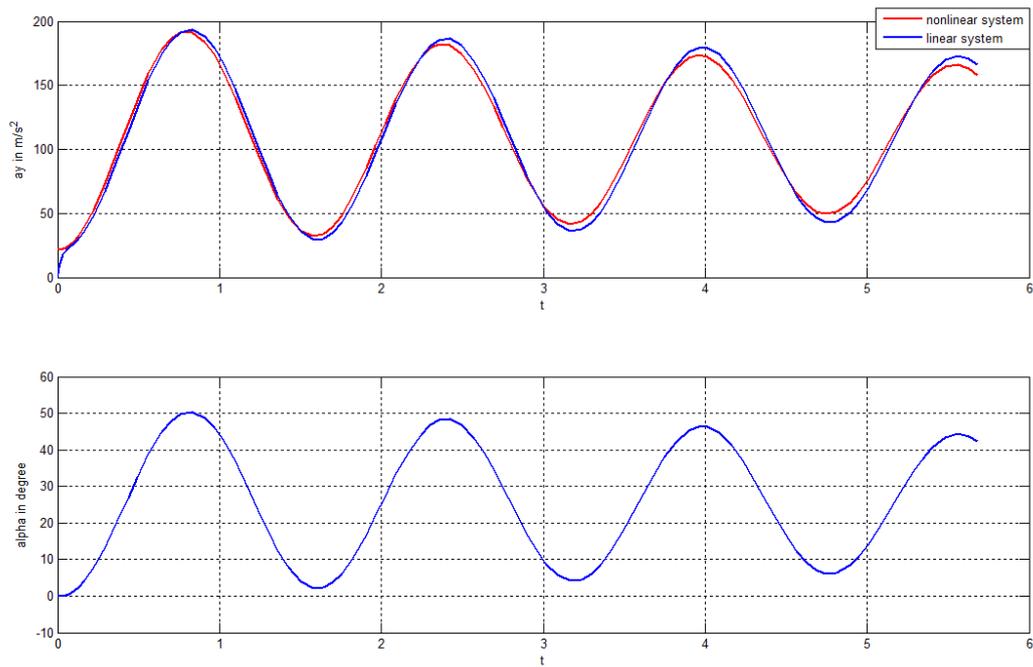


圖 4-2 輸入 8000N 步階函數的側向推力加速度以及攻角響應圖

#### 4.1.2 線性化動態方程式的修正

實際上攻角不易量測，飛彈控制系統只能利用體座標方 $Y_B$ 向的加速度 $a_y$ 以及

角速度 $q$ 來作回授之用，因此要嘗試將攻角的角色用加速度 $a_y$ 來取代。現在將(4.11)式中 $a_y$ 微分可得

$$\dot{a}_y = \frac{Y_\alpha}{m} \dot{\alpha} + \frac{Y_\delta}{m} \dot{\delta} + \frac{1}{m} \dot{T} \quad (4.13)$$

(4.11)式中可得

$$\dot{\alpha} = -\frac{Y_\alpha}{mv} \alpha + q - \frac{Y_\delta}{mv} \delta - \frac{1}{mv} T \quad (4.14)$$

$$\dot{q} = \frac{M_\alpha}{I} \alpha + \frac{M_\delta}{I} \delta + \frac{b}{I} T \quad (4.15)$$

同時引進尾翼及側向推力致動器的一階動態方程式：

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -\frac{1}{\tau_\delta} \delta + \frac{1}{\tau_\delta} \delta_c \\ \dot{T} &= -\frac{1}{\tau_T} T + \frac{1}{\tau_T} T_c \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中 $\tau_\delta$ 及 $\tau_T$ 分別為尾翼以及側向推力致動器的時間常數， $\delta_c$ 及 $T_c$ 分別為尾翼以及側向推力致動器的命令。時間常數 $\tau_\delta$ 及 $\tau_T$ 我們取 0.02。將(4.14)、(4.16)式代回(4.13)式可得

$$\begin{aligned} \dot{a}_y &= \frac{Y_\alpha}{m} \left( -\frac{Y_\alpha}{mv} \alpha + q - \frac{Y_\delta}{mv} \delta - \frac{1}{mv} T \right) + \frac{Y_\delta}{m} \left( -\frac{1}{\tau_\delta} \delta + \frac{1}{\tau_\delta} \delta_c \right) \\ &\quad + \frac{1}{m} \left( -\frac{1}{\tau_T} T + \frac{1}{\tau_T} T_c \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.11)式中 $\alpha$ 可以表示為

$$\alpha = \frac{m}{Y_\alpha} \left( a_y - \frac{Y_\delta}{m} \delta - \frac{1}{m} T \right) \quad (4.18)$$

將(4.18)式代入(4.17)式可得

$$\dot{a}_y = -\frac{Y_\alpha}{mv} a_y + \frac{Y_\alpha}{m} q - \frac{Y_\delta}{\tau_\delta m} \delta - \frac{1}{\tau_T m} T + \frac{Y_\delta}{m} \frac{1}{\tau_\delta} \delta_c + \frac{1}{m \tau_T} T_c \quad (4.19)$$

將(4.18)式代入(4.15)式可得

$$\dot{q} = \frac{M_\alpha m}{Y_\alpha I} a_y + \frac{(M_\delta - M_\alpha \frac{Y_\delta}{Y_\alpha})}{I} \delta + \frac{(b - \frac{M_\alpha}{Y_\alpha})}{I} T \quad (4.20)$$

(4.16)式、(4.19)式、(4.20)式以矩陣形式表示

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_y \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Y_\alpha}{mv} & \frac{Y_\alpha}{m} & -\frac{Y_\delta}{\tau_\delta m} & -\frac{1}{\tau_T m} \\ \frac{M_\alpha m}{Y_\alpha I} & 0 & \frac{(M_\delta - M_\alpha \frac{Y_\delta}{Y_\alpha})}{I} & \frac{(b - \frac{M_\alpha}{Y_\alpha})}{I} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_y \\ q \\ \delta \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} & \frac{1}{m\tau_T} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ T_c \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

我們便利用(4.20)式來設計順滑模控制器。如果將表 2-1 的飛彈參數代入(4.21)式，則可以得到狀態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_y \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16 & 195.1 & -585.2 & -0.14 \\ -0.08 & 0 & -9.1 & 0.001 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_y \\ q \\ \delta \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 585.2 & 0.14 \\ 0 & 0 \\ 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ T_c \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

### 4.1.3 設計順滑模控制器

順滑模設計有兩個步驟，一是設計順滑函數，二是設計控制定律。我們要控制的變數為加速度，令加速度誤差為

$$e = a_y - a_{yc} \quad (4.23)$$

則順滑函數設計為

$$s(x) = e \quad (4.24)$$

再來設計控制定律，必須符合順滑迫近條件：

$$s\dot{s} < 0 \quad (4.25)$$

我們只利用順滑模控制來設計側向推力，將尾翼的影響視為干擾，可令

$$\dot{a}_y = fx + gu + \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c \quad (4.26)$$

其中  $f = \begin{bmatrix} -\frac{Y_\alpha}{mv} & \frac{Y_\alpha}{m} & -\frac{Y_\delta}{\tau_\delta m} & -\frac{1}{\tau_T m} \end{bmatrix}$ ， $x = \begin{bmatrix} a_y \\ q \\ \delta \\ T \end{bmatrix}$ ， $g = \frac{1}{m\tau_T}$ ， $u = T_c$ 。

將順滑函數代入順滑迫近條件，則

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s\dot{e} \\ &= s(\dot{a}_y - \dot{a}_{yc}) \end{aligned}$$

$$= s \left( fx + gu + \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c - \dot{a}_{yc} \right) < 0 \quad (4.27)$$

為了符合順滑迫近條件(4.25)式，我們必須設計一個控制定律當 $s > 0$ 時，

$\left( fx + gu + \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c - \dot{a}_{yc} \right)$ 會小於0，反之 $s < 0$ 時， $\left( fx + gu + \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c - \dot{a}_{yc} \right)$ 會大於0，保證 $s\dot{s} < 0$ 。一般來說控制定律設計分別為兩部分：消除已知項以及上順滑面的切跳項。消除已知項的部分為：

$$u_1 = \frac{1}{g} (-fx + \dot{a}_{yc}) \quad (4.28)$$

上順滑面的切跳項部分為：

$$u_2 = \frac{1}{g} (-\sigma \text{sign}(s)) \quad (4.29)$$

其中 $\sigma > 0$ 為速度參數， $\sigma$ 值越大上去順滑模平面速度越快。我們將 $u = u_1 + u_2$ 代回(4.27)式

$$s\dot{s} = s \left( \frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c - \sigma \text{sign}(s) \right) < 0 \quad (4.30)$$

尾翼角限制在 $\pm 45$ 度， $\frac{Y_\delta}{m\tau_\delta} \delta_c$ 最大可以達到將近 $\pm 460$ 。從(4.30)式可以知道 $\sigma$ 值選為大於460可以確保符合 $s\dot{s} < 0$ 。若 $\sigma$ 值選擇小於460，尾翼角若太大則可能會使響應無法穩定， $\sigma$ 值的選取由模擬的結果來調整。

此外使用切換函數 $\text{sign}(s)$ 系統軌跡會在順滑平面 $s = 0$ 的兩邊不斷跳動，造成許多不當的高頻雜訊。為了防止切跳過大，設定一個邊界層(boundary layer)，將切跳函數修正為(2.27)式。最後修正控制定律設計如下：

$$u_{Tc} = u_1 - \frac{1}{g} \sigma \text{sat}(s, \varepsilon) \quad (4.31)$$

$$\varepsilon = 0.1, \sigma = 1200$$

$\sigma$ 值不能太小，否則系統切跳速度不夠快，無法上到順滑面，須選取一個較大的數值，然而 $\sigma$ 太大雖然可以讓系統響應變快，亦會造成切跳太大，所需的側向推力也越大。 $\varepsilon$ 的數值調大系統在邊界層內比較順滑，可以降低切跳大小，但會使穩態誤差變大，造成系統追加速度命令精準度的下降。這裡選取一組數值讓

系統加速度追上命令快速，且側向推力適中。因為切跳幅度不大，選取 $\varepsilon$ 值可以較小，使的整個響應更為精確。

#### 4.1.4 修正型的切跳函數

一般來說順滑模控制雖然響應速度快，但卻有響應切跳的情形產生。可以利用設立邊界層來解決問題，使的在邊界層內的切跳不要這麼大。文獻[10]提出了一個修正型的切跳函數：

$$v_{\rho}(s) = \frac{s}{(|s|+\rho)} \quad (4.32)$$

$\rho$ 設為一個小的正數。當 $\rho \rightarrow 0$ ， $v_{\rho}(s)$ 則為 $\text{sign}(s)$ 的函數。 $\rho$ 的設定可以使切跳的函數更順滑， $\rho$ 越大則系統響應切跳越小但穩態誤差越不精確，越小則反之。圖 4-3 為不同 $\rho$ 所形成的切跳函數比較。圖 4-4 為一般切跳函數 $\text{sat}(s, \varepsilon)$ ， $\varepsilon = 0.1$ 和修正後切跳函數 $v_{\rho}(s)$ ， $\rho = 0.005$ 的比較。黑色線為 $\text{sat}(s, \varepsilon)$ 函數，紅色線為 $v_{\rho}(s)$ 函數，修正後切跳函數 $v_{\rho}(s)$ 響應較 $\text{sat}(s, \varepsilon)$ 函數順滑，能降低切跳，因此我們利用 $v_{\rho}(s)$ 函數取代 $\text{sat}(s, \varepsilon)$ 切跳函數。

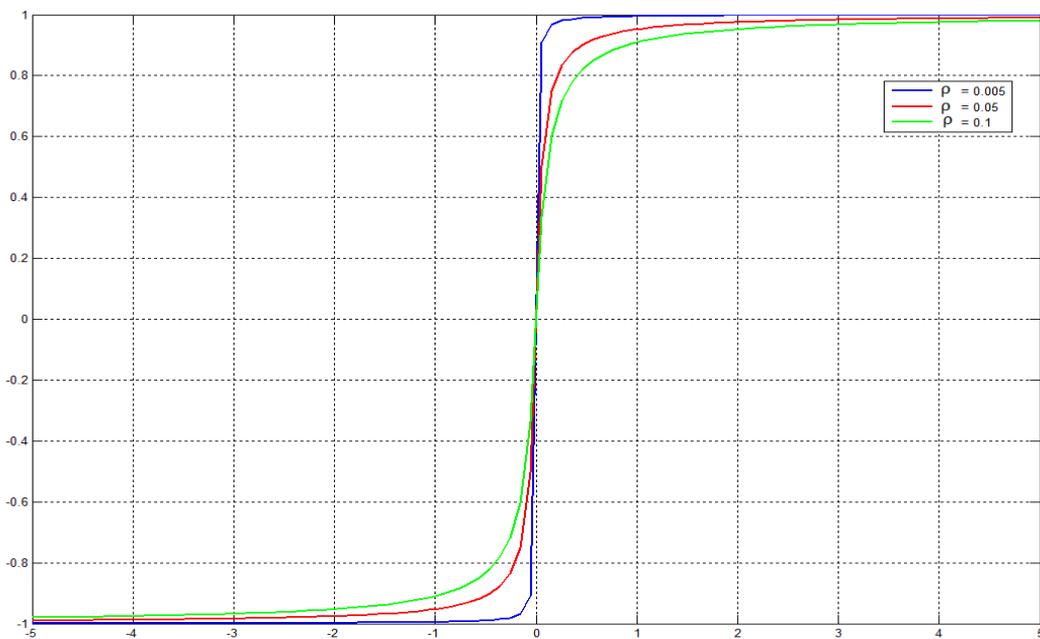


圖 4-3 修正型的切跳函數不同 $\rho$ 值得比較

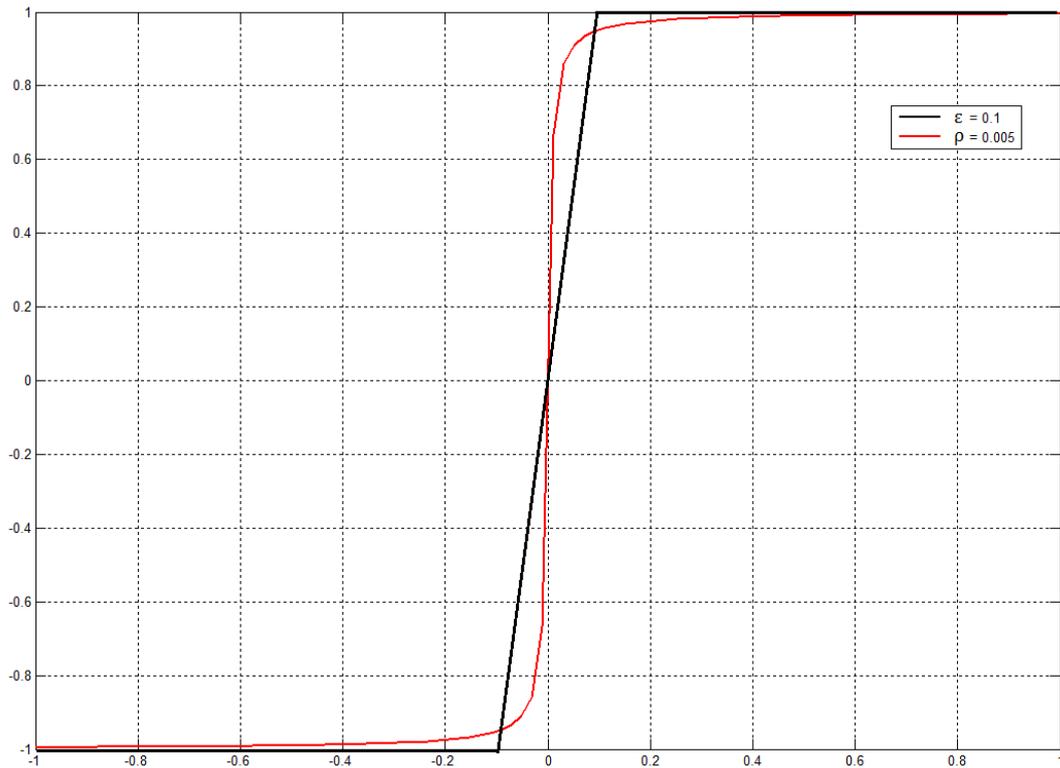


圖 4-4 修正型與一般切跳函數比較

#### 4.1.5 設計一複合控制設計

在這裡我們將線性的尾翼控制命令視為干擾，利用順滑模控制對雜訊的穩健性，直接設計側向推力控制器。我們設計複合控制的概念是尾翼為主要控制，系統在追蹤時主要由尾翼來達到加速度控制要求，在需要使用側向推力時才將側向推力打開。因此尾翼控制必須是個獨立的系統，在側向推力加進來時仍保有一部分自己的響應。側向推力只是輔助的作用，藉由推力快速的改變攻角，使系統響應速度加快。我們可以利用上述的順滑模控制來控制側向推力，作為輔助的配合。

設計的方法為尾翼角負責 80% 的加速度命令，讓尾翼控制做為主要的控制，然而側向推力負責 20% 的加速度命令，作為輔助的控制。我們在回授回來的資訊後面加個切換開關，當開關打開時加速度命令和回授的加速度乘以 0.8 傳給線性的尾翼控制，乘以 0.2 傳給順滑模側向推力控制。複合控制以及尾翼控制經由開

關來作切換，以便能隨時快速的轉換。整體控制設計如下，線性尾翼控制設計：

$$K_a = -0.02、K_i = -0.04、K_q = 1 \quad (4.33)$$

最後修正順滑模控制定律為

$$u_{Tc} = u_1 - \frac{1}{g} \sigma \frac{s}{(|s| + \rho)}$$

$$\rho = 0.005, \sigma = 1200 \quad (4.34)$$

接下來比較不同比例尾翼及側向推力所造成的結果，以(4.33)式的線性參數以及(4.34)式的控制來做模擬。輸入加速度命令 2g 步階函數，比較其差異。表 4-1 中上升時間為系統從終值 10% 到達 90% 的時間，加入側向推力上升時間比尾翼控制還要快。整體而言尾翼與側向推力比例為 9:1，8.5:1.5，8:2，7:3 這幾組的響應的結果差不多，上升時間非常相近。從圖 4-5 可以看出 8:2 這組追加速度 2g 的步階函數追得較精確，因此選擇尾翼 80% 以及側向推力 20% 的組合。

表 4-1 不同比例尾翼及側向推力的上升時間比較

尾翼比例	側向推力比例	上升時間
100%	0%	0.270
90%	10%	0.0148
85%	15%	0.0147
80%	20%	0.0146
70%	30%	0.0145

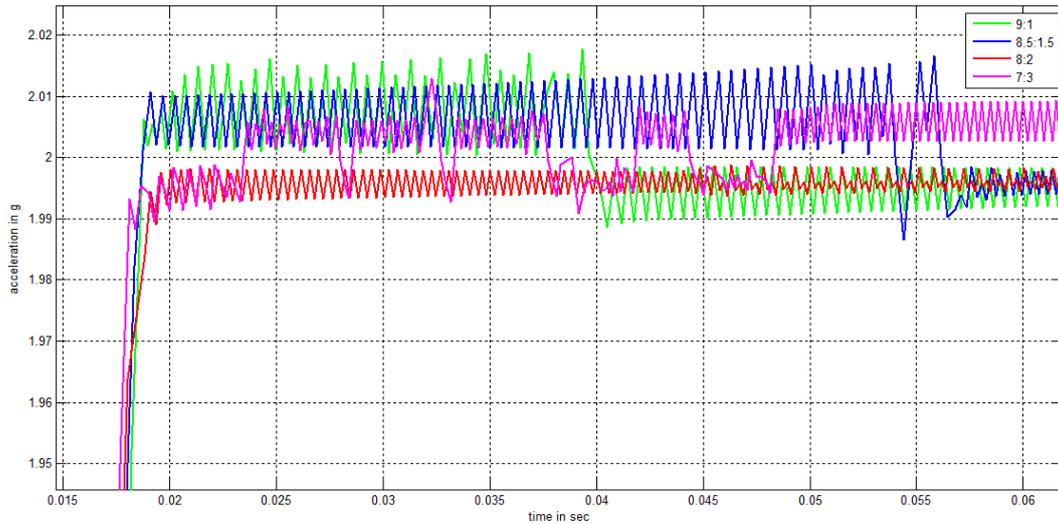


圖 4-5 不同比例尾翼及側向推力的響應圖

將設計一複合控制先利用線性模型來作模擬，其線性模型為(4.22)式。輸入加速度命令  $2g$  的步階函數來比較尾翼控制以及複合控制的響應。圖 4-6 為線性模型的步階響應，藍色線為尾翼控制，紅色線為複合控制。acceleration 代表加速度響應如左上圖，angular rate 代表角速度響應如右上圖，fin deflection 代表尾翼角響應如左下圖，thrust 代表側向推力響應如右下圖。值得注意的是(4.22)式為擁有右半面零點的線性模型，因此尾翼控制的加速度響應有低射現象。

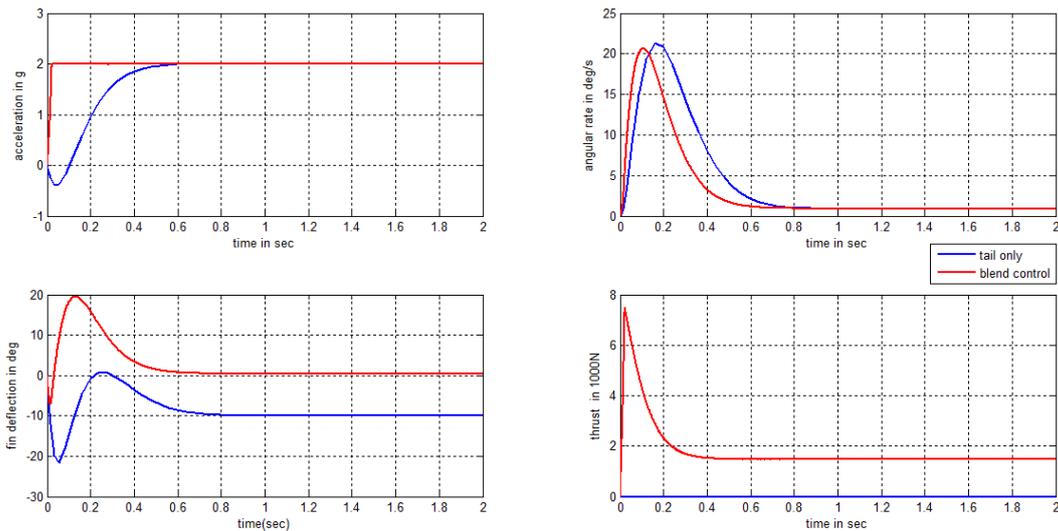


圖 4-6 輸入加速度命令  $2g$  的複合控制線性模型步階響應

將設計一複合控制放入飛彈非線性的動態模型，輸入加速度命令  $2g$  的步階函數

來比較尾翼控制以及複合控制的響應。圖 4-7 中顯示複合控制的加速度響應比尾翼控制還要快且沒有低射現象，加入側向推力對系統響應幫助非常大。圖 4-8 上圖為尾翼角響應，下圖為攻角響應。複合控制的攻角響應雖然比較快達到穩定，但卻比尾翼控制時下降許多，造成系統需要額外的側向推力來達到平衡。此外非性線模型的步階響應與線性模型的步階響應非常相近，也顯示線性化模型與非線性模型的差異並不大。

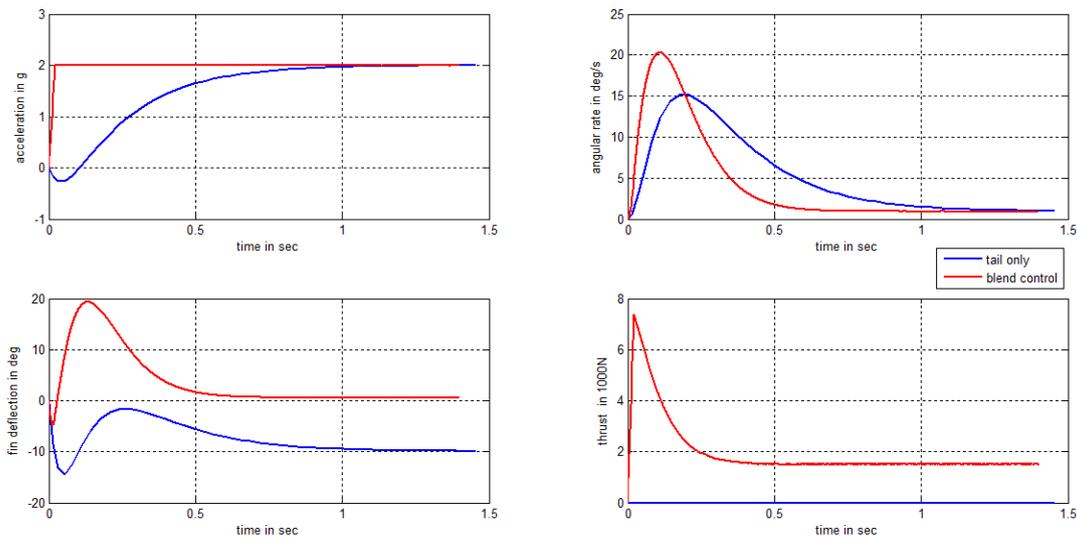


圖 4-7 輸入加速度命令 2g 的複合控制非線性步階響應(1)

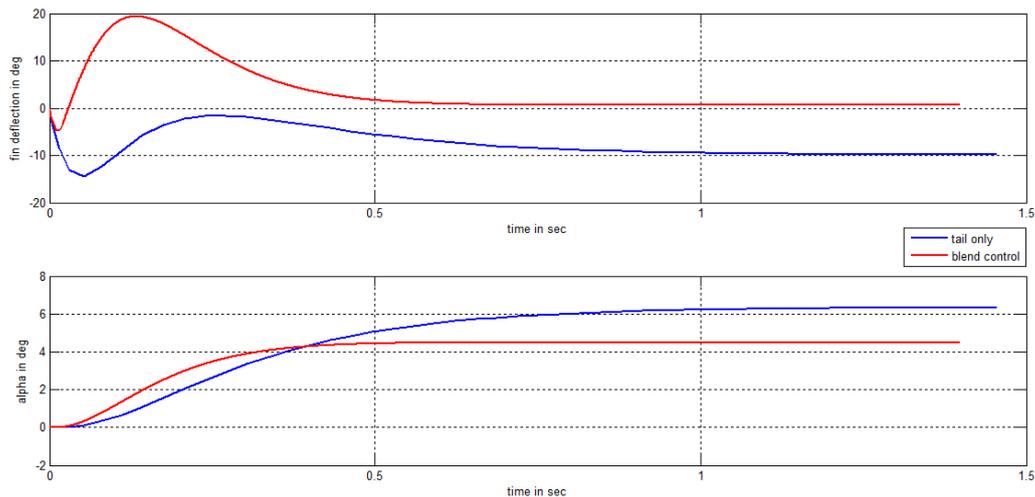


圖 4-8 輸入加速度命令 2g 的複合控制非線性步階響應(2)

#### 4.1.6 側向推力穩態過大的改善

圖 4-8 下圖顯示複合控制穩態時的攻角比尾翼控制穩態時的攻角下降許多，這些下降的氣動力必須由尾翼角以及側向推力來補足，造成尾翼角在加入側向推力時尾翼角會往正方向提升，側向推力也需要提供更多的力。因此必須調整尾翼角以及側向推力的使用，讓攻角提升。

當加速度命令正在增加時，側向推力會正向提升，使尾翼角往正的方向擺動，造成攻角下降。因此將順滑模控制所給予的側向推力命令減掉一部份的力，然後額外給予負向的尾翼角命令，此時攻角會上升來補足側向推力及尾翼角下降的氣動力。當加速度命令正在減少時，側向推力會下降且尾翼角會往負向擺動，攻角會上升。因此必須將側向推力命令加上一部份的力，然後額外給予正向的尾翼角命令，使攻角下降。

加速度命令 9g 步階函數時因為尾翼角最大只能到 45 度，尾翼角無法補足太多，側向推力下降的力也有限度。因此加速度命令 9g 時，尾翼增加至將近 45 度，側向推力命令減掉 900N 穩態就會下降至 0N。我們將側向推力需要增加或減少的力固定為 900N，藉由調整補足的尾翼角大小使得攻角能夠達到純尾翼控制時的大小。表 4-2 為輸入 1~10g 的步階函數時，側向推力命令減少 900N，穩態時攻角能夠達到尾翼控制時的大小，且穩態的側向推力能下降至 0N，所要補足的尾翼角命令  $\delta'$  大小。

表 4-2 補足尾翼角與加速度命令關係

加速度命令(g)	10g	9g	8g	7g	6g
補足尾翼角(rad)	-0.2	-0.38	-0.44	-0.47	-0.45
加速度命令(g)	5g	4g	3g	2g	1g
補足尾翼角(rad)	-0.42	-0.38	-0.26	-0.19	-0.1

圖 4-9 及圖 4-10 為 2g 步階響應改善前後的比較。藍色線為尾翼控制(tail only)，紅色線為原本的複合控制(original)，綠色線為側向推力命令減少 900N，

尾翼角命令減少 $-0.19\text{ rad}$ 的複合控制改善設計(improvement)。圖 4-10 中複合控制改善設計的尾翼角以及攻角穩態時皆有提升到尾翼控制的大小，圖 4-9 中複合控制改善設計的側向推力在穩態時可以下降至 0N 且加速度響應與原本的複合控制一樣。

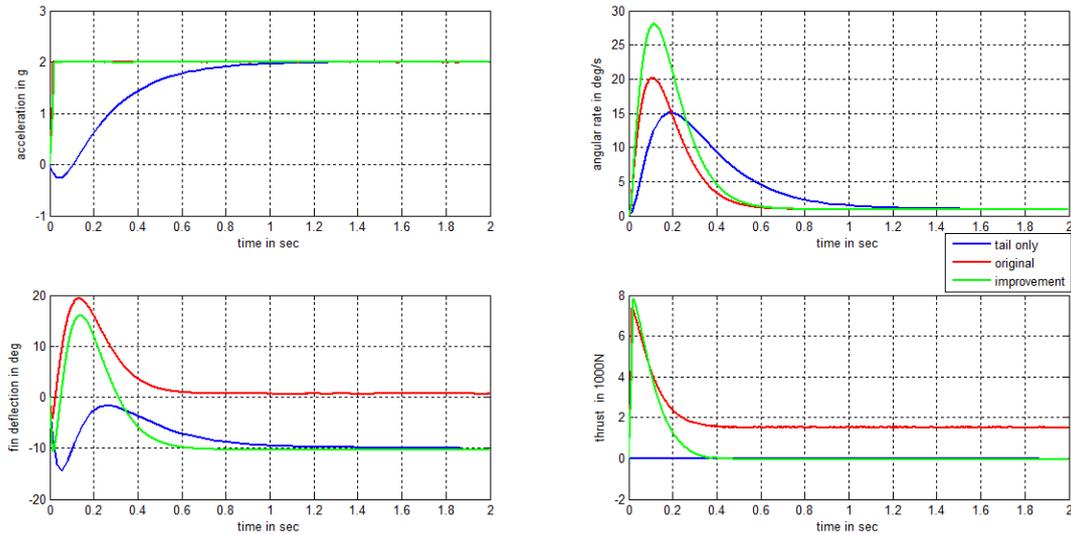


圖 4-9 改善後的複合控制 2g 步階響應比較(1)

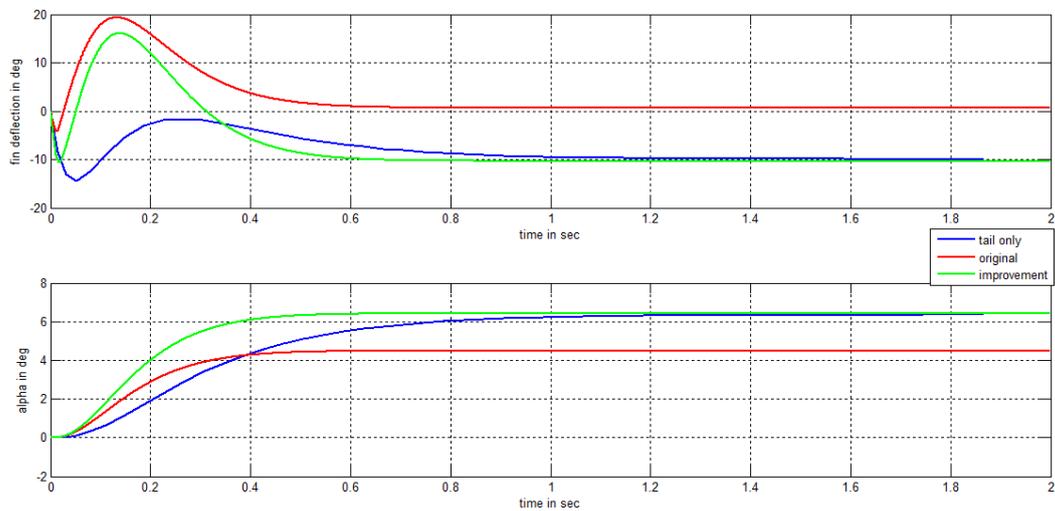


圖 4-10 改善後的複合控制 2g 步階響應比較(2)

然而一般追蹤導引並不會立刻就改變這麼大的 g 力，且表 4-2 中加速度 4g 以上所需補足的尾翼角變得比較大，容易造成攻角過度提升，側向推力反而需要負向的力來抵銷。因此我們只考慮加速度 1~3g 所補足的尾翼角，取中間值 $-0.18\text{rad}$ 。

假設加速度命令 0~2 秒為 2g 的步階函數，2~4 秒為 -1g 的步階函數，4~6 秒為 1g 的步階函數，當加速度增加時側向推力命令減掉 900N，補足尾翼角  $\delta' = -0.18 \text{ rad}$ ；當加速度減少時側向推力命令加上 900N，補足尾翼角  $\delta' = 0.18 \text{ rad}$ 。其改善的複合控制響應為圖 4-11、圖 4-12，藍色線為改善前的複合控制(original)，紅色線為改善後的複合控制(improvement)。

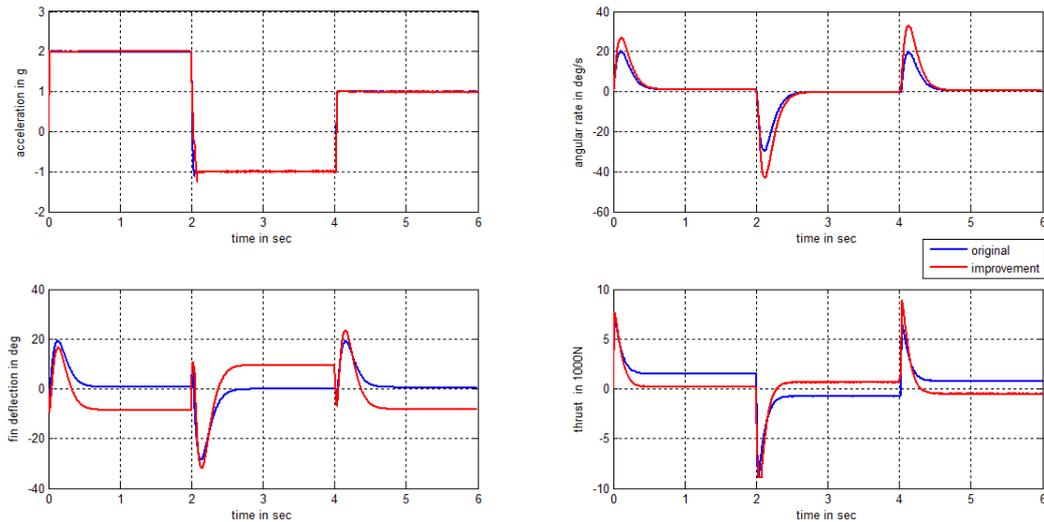


圖 4-11 加速度命令不同的步階函數複合控制改善前後的比較(1)

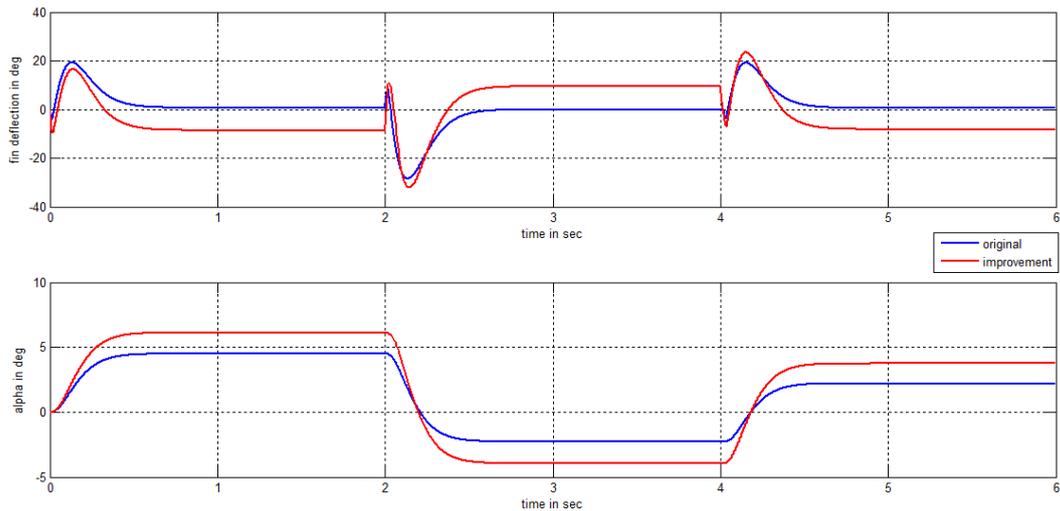


圖 4-12 加速度命令不同的步階函數複合控制改善前後的比較(2)

圖 4-12 下圖顯示攻角響應改善後較改善前提升許多，但圖 4-11 側向推力響應圖中加速度 -1g 與 1g 的穩態側向推力皆越過了 0N。顯示補足的尾翼角太大，使攻

角過度提升。因此補足的尾翼角大小不能太大，寧願側向推力下降的少，也不要讓側向推力下降至反方向，反而比原本的力道還大。圖 4-11 側向推力響應圖中加速度  $-1g$  與  $1g$  的穩態側向推力雖然到達了反方向，但比原本的力道小，仍有改善的成效。因此我們利用補足尾翼角  $\delta'$  大小為  $0.18 \text{ rad}$  來作改善設計。其統整如下：

$$\begin{aligned}
 u_{Tc} &= u_1 - \frac{1}{g} \sigma \frac{s}{(|s| + \rho)} - 900 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \delta' &= -0.18 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \rho &= 0.005, \sigma = 1200
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

若加速度命令為步階函數，加速度命令步階函數大小增加則視  $\dot{a}_{yc} > 0$ ，加速度命令步階函數大小減少則視  $\dot{a}_{yc} < 0$ 。圖 4-13 為複合控制修正的設計架構。

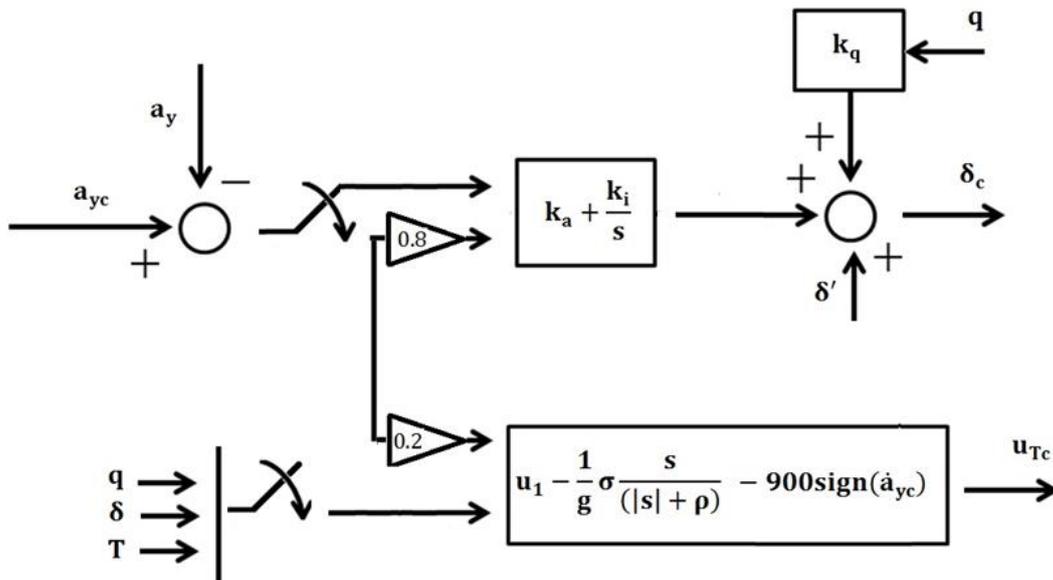


圖 4-13 設計一複合控制的修正設計

## 4.2 設計二複合控制

利用第三章的系統驗證的方法我們可以得到尾翼角到加速度及角速度的轉移函數，以及側向推力到加速度及角速度的轉移函數。4.2.1 節我們用近似的方式將這兩組轉移函數轉換成一個動態方程式，在 4.2.2 節我們便利用此動態方程式設計順滑模控制。此設計方法仍然有側向推力過大的情形，4.2.3 節也提出修

正的設計。

#### 4.2.1 推導攔截飛彈動態方程式

由第三章所分析，我們利用系統驗證可以得到轉移函數  $\frac{a_y(s)}{\delta_c(s)}$  及  $\frac{q(s)}{\delta_c(s)}$ ， $a_y$  的單位為  $m/s^2$ ， $q$  的單位為  $rad/s$ ， $\delta_c$  的單位為  $rad$ 。

$$\begin{cases} \frac{a_y(s)}{\delta_c(s)} = -\frac{1743}{s^2+15.2} \\ \frac{q(s)}{\delta_c(s)} = -\frac{8.1s}{s^2+15.2} \end{cases} \quad (4.36)$$

從(4.36)式的轉移函數可以得到一個以  $\delta_c$  為輸入， $[a_y \ q]^T$  為輸出的狀態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_c \\ \begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1743 & 0 \\ 0 & -8.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中狀態變數為  $[\eta \ \dot{\eta}]^T$ 。利用驗證方式得到轉移函數  $\frac{q(s)}{T_c(s)}$  及  $\frac{a_y(s)}{T_c(s)}$ ， $T_c$  的單位為  $N$ 。

$$\begin{aligned} \frac{q(s)}{T_c(s)} &= \frac{0.00078s}{s^2+15.2} \\ \frac{a_y(s)}{T_c(s)} &= 0.004 + \frac{0.152}{s^2+15.2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

這兩個轉移函數的狀態空間合成，考慮下列的狀態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} T_c \\ \begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1743 & 0 \\ 0 & -8.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix} T_c \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中  $b_1$  及  $b_2$  為待決定的常數。由(4.39)式可得由  $T_c$  至  $a_y$  和  $q$  的轉移矩陣為

$$\begin{bmatrix} \frac{a_y(s)}{T_c(s)} \\ \frac{q(s)}{T_c(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1743 & 0 \\ 0 & -8.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 15.2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

由(4.38)式及(4.40)式可以得到下列方程式

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ -1743b_2 &= 0.152 \end{aligned}$$

$$-8.1b_2 = 0.00078$$

最小平方解為 $b_2 = -0.00009$ 。將(4.37)式及(4.39)式合併可得兩個輸入同時作用的狀態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.00009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ T_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1743 & 0 \\ 0 & -8.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.004 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ T_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 為狀態向量， $a_y$ 的單位為 $m/s^2$ ， $q$ 的單位為 $rad/s$ ， $\delta_c$ 的單位為 $rad$ ， $T_c$ 的單位為 $N$ 。如果將加速度誤差積分當成一個新的狀態，則

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= a_{yc} - a_y \\ &= a_{yc} + 1743x_1 - 0.004T_c \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\delta_c$ 可以表示為

$$\delta_c = k_a(a_{yc} - a_y) + k_i x_3 + k_q q \quad (4.43)$$

由(4.41)式、(4.42)式、(4.43)式，最後可以形成新的動態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -15.2 + 1743k_a & -8.1k_q & k_i \\ 1743 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00009 - 0.004k_a \\ -0.004 \end{bmatrix} T_c \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ k_a \\ 1 \end{bmatrix} a_{yc} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1743 & 0 & 0 \\ 0 & -8.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix} T_c \quad (4.44)$$

由(4.44)式中可得 $q = -8.1x_2$ ，因此 $x_2 = -q/8.1$ ， $x_1$ 為 $x_2$ 的積分。

## 4.2.2 順滑模控制器的設計

依造順滑模設計的兩個步驟，我們先設計順滑模平面，再設計控制定律。

我們令誤差為

$$e = a_y - a_{yc} \quad (4.45)$$

則順滑模平面設計為

$$s(x) = e \quad (4.46)$$

再來設計控制定律，必須符合順滑逼近條件：

$$s\dot{s} < 0 \quad (4.47)$$

將順滑模平面代入順滑逼近條件

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s\dot{e} \\ &= s(\dot{a}_y - \dot{a}_{yc}) \\ &= s(-1743x_2 + 0.004\dot{T}_c - \dot{a}_{yc}) < 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

(4.48)式中 $\dot{T}_c$ 若能視為 $\dot{T}$ ，就可以引進側向推力制動器一階動態方程式

$$\dot{T} = -\frac{1}{\tau_T}T + \frac{1}{\tau_T}T_c \quad (4.49)$$

將(4.49)式代入(4.48)式，就可以設計 $T_c$ 的順滑模控制定律。

我們用模擬的方式來檢驗 $\dot{T}_c$ 是否能視為 $\dot{T}$ 。將2度步階函數不經過致動器直接輸入尾翼 $\delta$ ，可以得到加速度及角速度的波形如圖4-14所示。藍色線為從尾翼命令輸入的2度步階函數，綠色線為從尾翼輸入的2度步階函數，紅色線為近似的方程式。可以看出從尾翼輸入步階函數的響應波型與我們所近似的波型方程式相似，因此也可以說(4.36)式為尾翼 $\delta$ 到 $a_y$ 及 $q$ 的轉移函數。圖4-15中從側向推力 $T$ 輸入步階函數的響應波型與我們所近似的波型方程式相似，因此將(4.38)式視為側向推力 $T$ 到 $a_y$ 及 $q$ 的轉移函數。(4.44)式可以重新變成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -15.2 + 1743k_a & -8.1k_q & k_i \\ 1743 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00009 - 0.004k_a \\ -0.004 \end{bmatrix} T \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ k_a \\ 1 \end{bmatrix} a_{yc} \\ \begin{bmatrix} a_y \\ q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1743 & 0 & 0 \\ 0 & -8.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix} T \end{aligned} \quad (4.50)$$

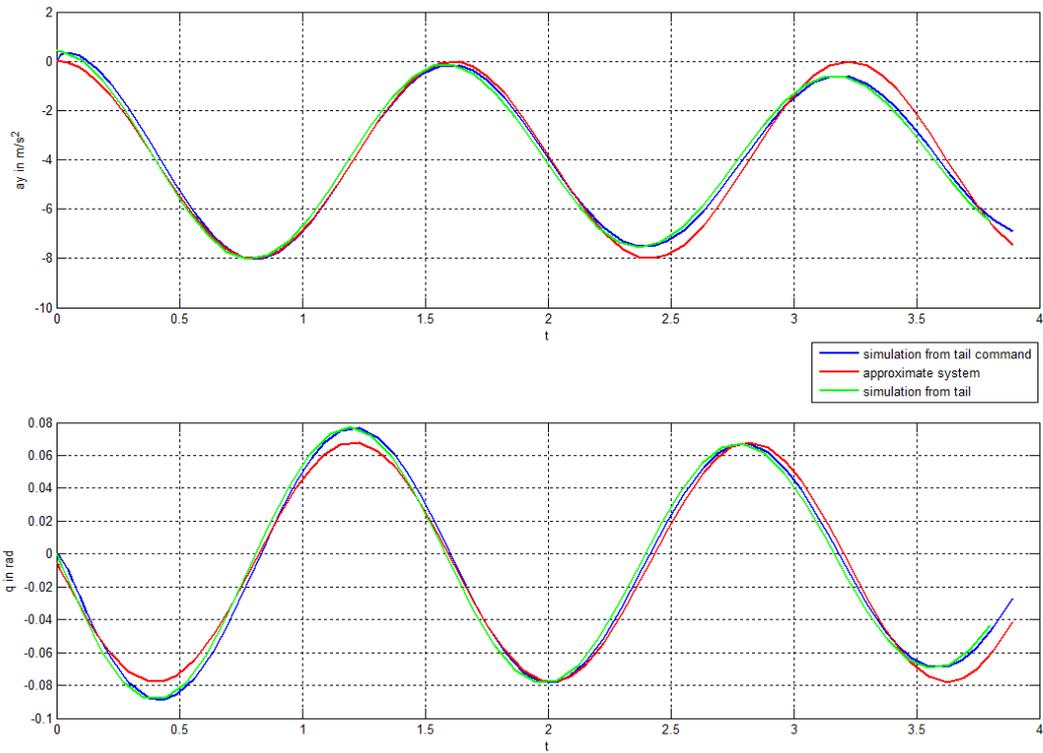


圖 4-14 尾翼命令及尾翼輸入開迴路系統比較

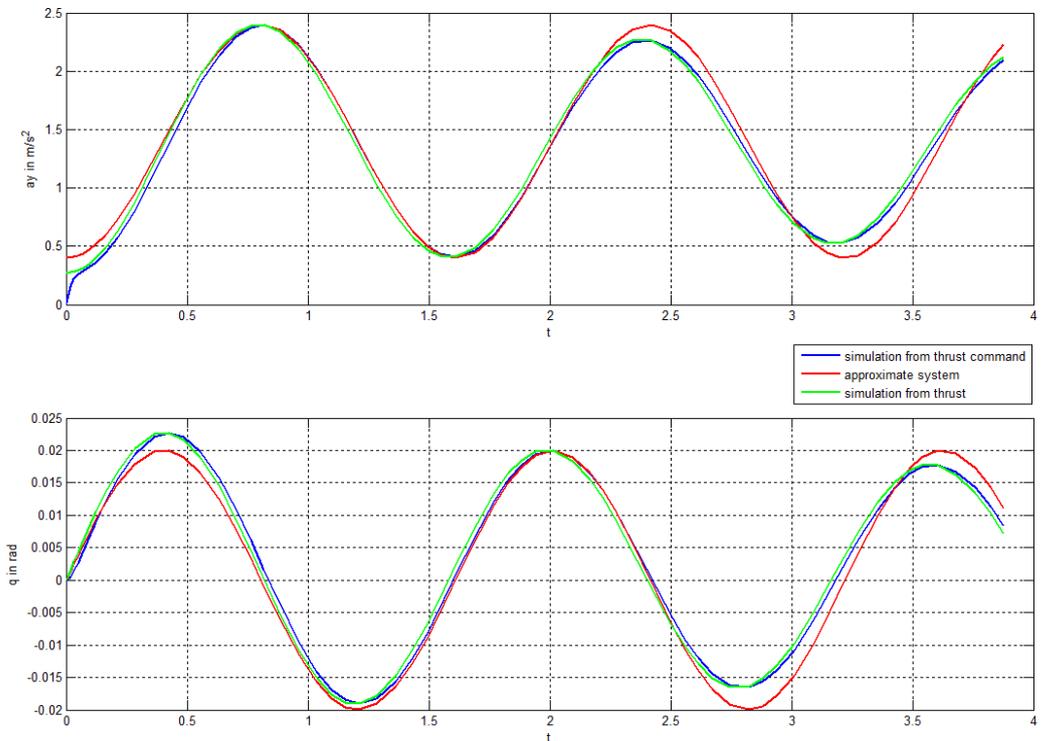


圖 4-15 側向推力命令及側向推力輸入開迴路系統比較

將(4.50)式中 $a_y$ 重新代入順滑逼近條件

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s\dot{e} \\ &= s(\dot{a}_y - \dot{a}_{yc}) \\ &= s(-1743x_2 + 0.004\dot{T} - \dot{a}_{yc}) < 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

引進制動器一階動態方程式(4.49)式，(4.51)式變成

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s\left(-1743x_2 + 0.004\left(-\frac{1}{\tau_T}T + \frac{1}{\tau_T}T_c\right) - \dot{a}_{yc}\right) \\ &= s\left(-1743x_2 - \frac{0.004}{\tau_T}T + \frac{0.004}{\tau_T}T_c - \dot{a}_{yc}\right) < 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

為了符合順滑逼近條件，我們設計控制定律 $u_{T_c}$ 消除已知項部分再加上切跳部分，當 $s > 0$ 時， $\dot{s}$ 會小於0，反之 $s < 0$ 時， $\dot{s}$ 會大於0，保證 $s\dot{s} < 0$ 。消除已知項部分為

$$u_1 = \frac{\tau_T}{0.004}\left(1743x_2 + \frac{0.004}{\tau_T}T + \dot{a}_{yc}\right) \quad (4.53)$$

上順滑平面的切跳部分為：

$$u_2 = \frac{\tau_T}{0.004}\left(-\sigma\frac{s}{(|s|+\rho)}\right) \quad (4.54)$$

整體控制定律為

$$u_{T_c} = u_1 + u_2$$

$$\sigma = 1000, \rho = 0.005 \quad (4.55)$$

將設計二複合控制利用(4.41)式線性模型來模擬，輸入加速度命令 $2g$ 的步階函數，比較尾翼控制與複合控制的響應，如圖4-16所示。圖4-17及圖4-18為將設計二複合控制放入飛彈非線性模型，輸入加速度命令 $2g$ 步階函數的響應圖。可以看出線性模型複合控制的尾翼角比非線性模型複合控制尾翼角還要大，側向推力響應也是非線性模型較大。(4.41)式的線性模型忽略了右半面零點的作用，因此線性模型的純尾翼控制沒有低射現象。然而圖4-18攻角響應圖中複合控制的攻角在穩態時並沒有提升至純尾翼控制的大小，造成側向推力多餘的使用。與設計一的複合控制響應圖4-7及圖4-8比較，兩種方法的步階響應非常相近。

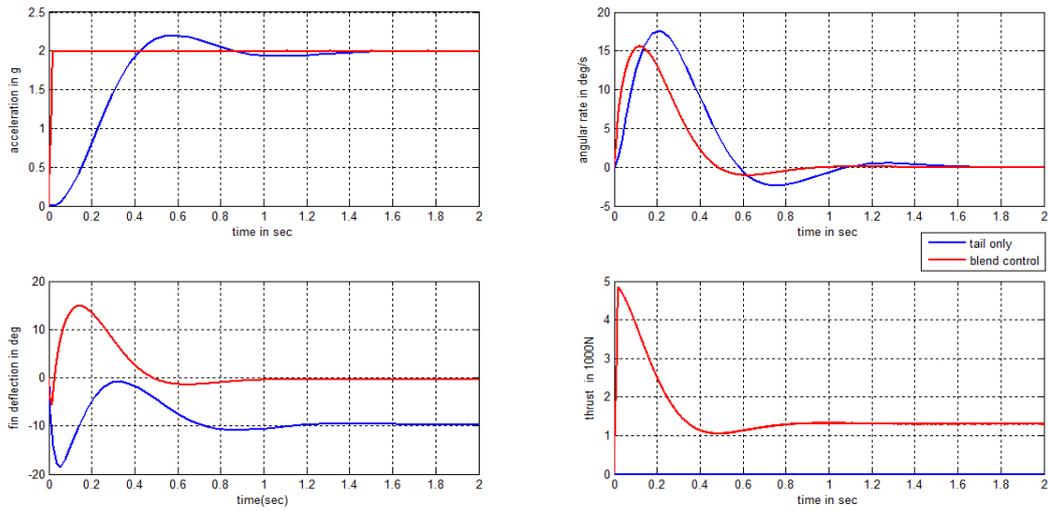


圖 4-16 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制線性模型步階響應

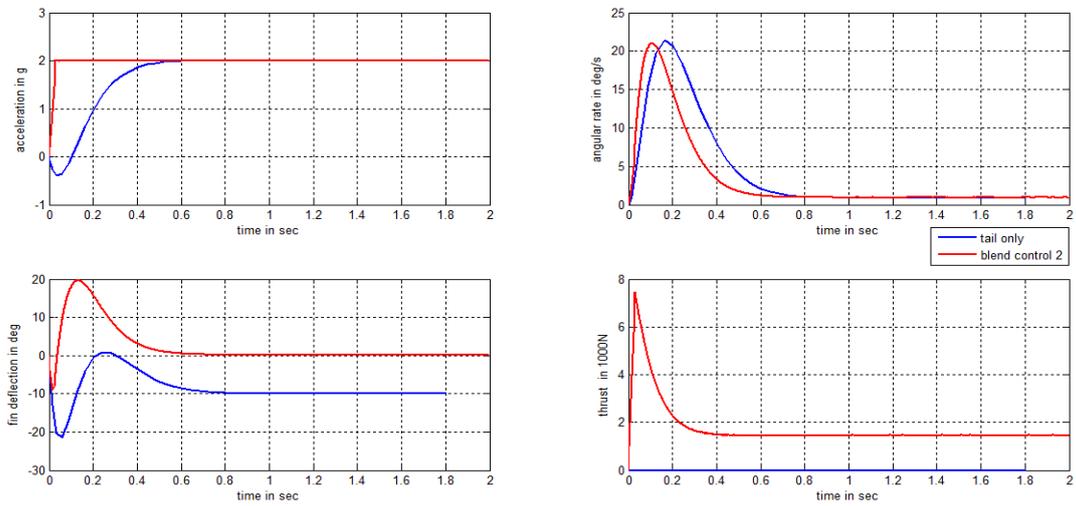


圖 4-17 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制非線性模型步階響應(1)

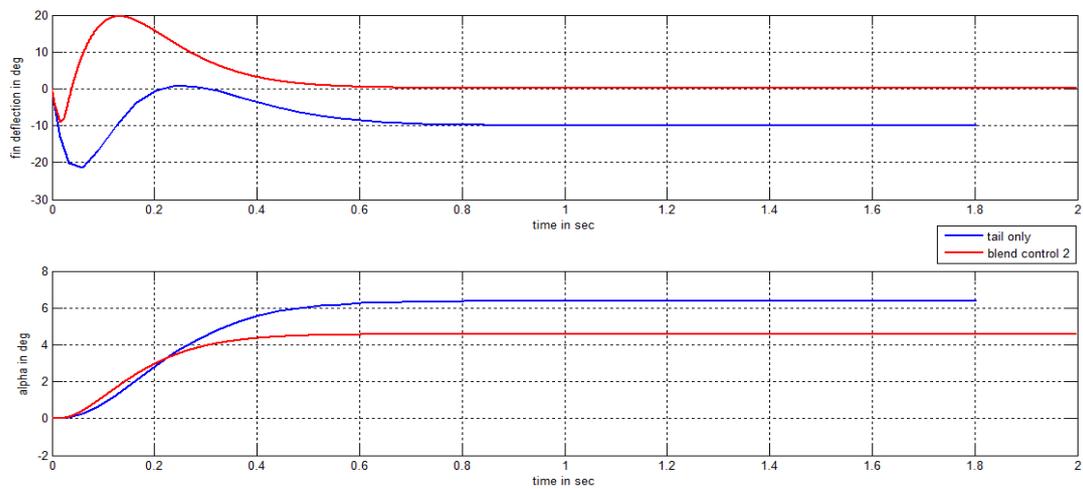


圖 4-18 輸入加速度命令 2g 的設計二複合控制非線性模型步階響應(2)

### 4.2.3 側向推力穩態過大的改善

如同 4.1.5 節所分析，改善的辦法同樣為補足尾翼角然後再扣掉或增加側向推力的命令。加速度命令為 9g 步階函數時，尾翼增加至將近 45 度，側向推力可以下降 800N 到達 0N。將側向推力下降 800N，輸入加速度 1~10g 的步階函數，表 4-3 為需補足的尾翼角。

表 4-3 設計二複合控制需補足尾翼角與加速度命令關係

加速度(g)	10g	9g	8g	7g	6g
補足尾翼角(rad)	-0.11	-0.26	-0.38	-0.43	-0.41
加速度(g)	5g	4g	3g	2g	1g
補足尾翼角(rad)	-0.36	-0.31	-0.23	-0.18	-0.09

考慮 1~3g 所補足的尾翼角，取中間值  $\delta' = -0.16\text{rad}$ 。假設加速度命令 0~2 秒為 2g 的步階函數，2~4 秒為 -1g 的步階函數，4~6 秒為 1g 的步階函數，當加速度增加時側向推力命令減掉 800N，補足尾翼角  $\delta' = -0.16\text{rad}$ ；當加速度減少時側向推力命令加上 900N，補足尾翼角  $\delta' = 0.18\text{rad}$ 。其改善的複合控制響應為圖 4-19、圖 4-20，藍色線為改善前的複合控制(original)，紅色線為改善後的複合控制(improvement)。

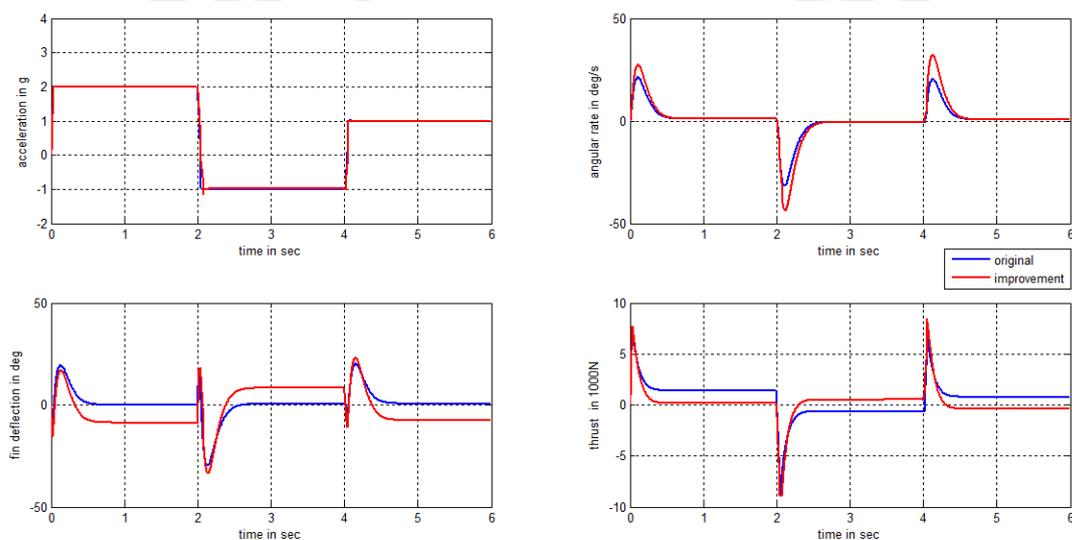


圖 4-19 不同步階函數的加速度命令設計二複合控制改善前後的比較(1)

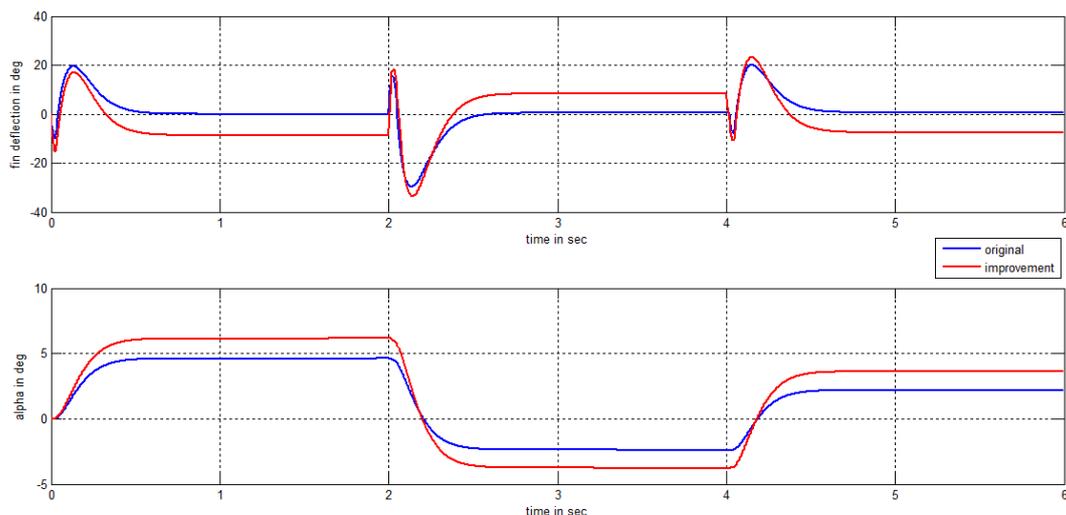


圖 4-20 不同步階函數的加速度命令設計二複合控制改善前後的比較(2)

圖 4-20 顯示攻角皆有提升，圖 4-19 顯示側向推力在加速度命令  $-1g$  和  $1g$  的穩態時提升到反方向，但仍然比改善前還要小。因此所選取的補足尾翼角  $\delta'$  的大小為  $0.16\text{rad}$  符合我們的要求。改善後的控制定律統整如下：

$$\begin{aligned}
 u_{Tc} &= u_1 + u_2 - 800\text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \delta' &= -0.16\text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \rho &= 0.005, \sigma = 1000
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

若加速度命令為步階函數，加速度命令步階函數大小增加則視  $\dot{a}_{yc} > 0$ ，加速度命令步階函數大小減少則視  $\dot{a}_{yc} < 0$ 。圖 4-21 為設計二複合控制修正的設計架構。

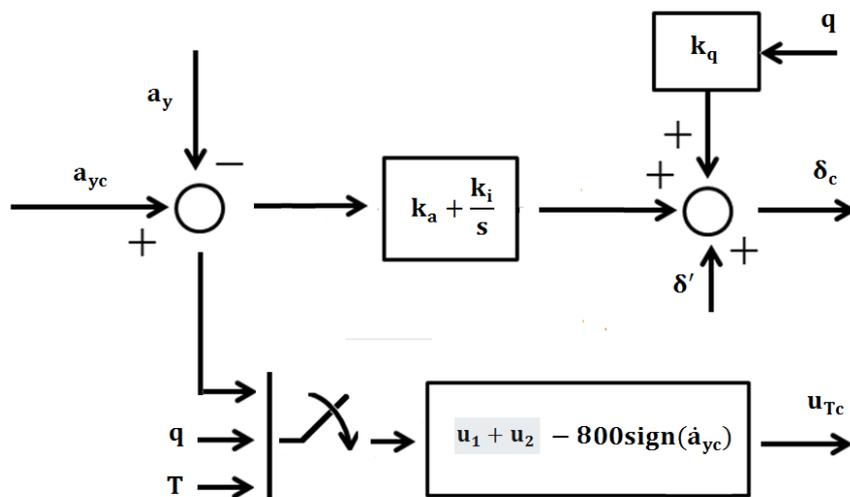


圖 4-21 設計二複合控制的修正設計

### 4.3 降低側向推力的響應分析

圖 4-17 顯示加速度 2g 的步階響應側向推力最大會達到 7000N。雖然響應速度非常快，但需要很大的側向推力。若欲側向推力不要太大，加速度響應速度必須下降。重新調整參數設計，將響應調慢，觀察其結果。則設計一參數修正為

$$\begin{aligned}
 u_{Tc} &= u_1 - \frac{1}{g} \sigma \frac{s}{(|s| + \rho)} - 44 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \delta' &= -0.06 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \rho &= 0.005, \sigma = 150
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

圖 4-22 為設計一參數選擇(4.57)式的響應圖。其加速度響應上升時間為 0.126 秒，側向推力最大只達 2200N。響應一開始側向推力不大，因此無法使尾翼角提升且側向推力無法抵銷負向尾翼角產生的氣動力，加速度響應有低射現象。

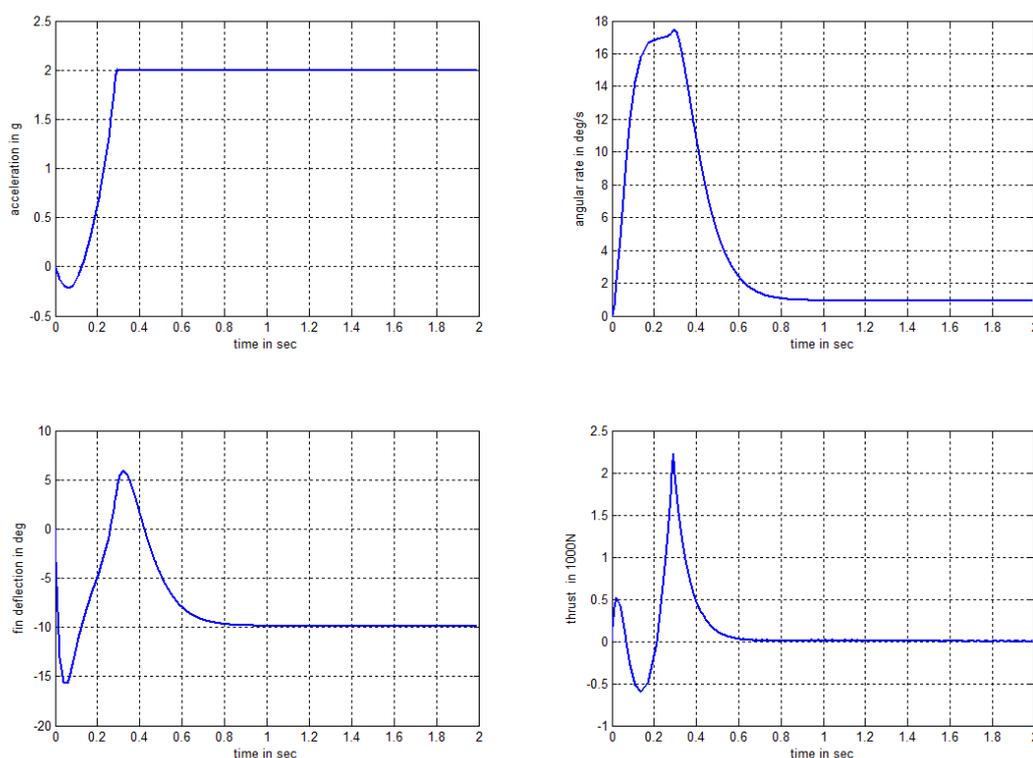


圖 4-22 設計一調慢加速度響應的模擬結果

設計二參數修正為

$$\begin{aligned}
 u_{Tc} &= u_1 + u_2 - 30 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \delta' &= -0.05 \text{sign}(\dot{a}_{yc}) \\
 \rho &= 0.005, \sigma = 100
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

圖 4-23 為設計二參數選擇(4.58)式的模擬結果。響應與設計一參數選擇(4.57)式的響應相近。

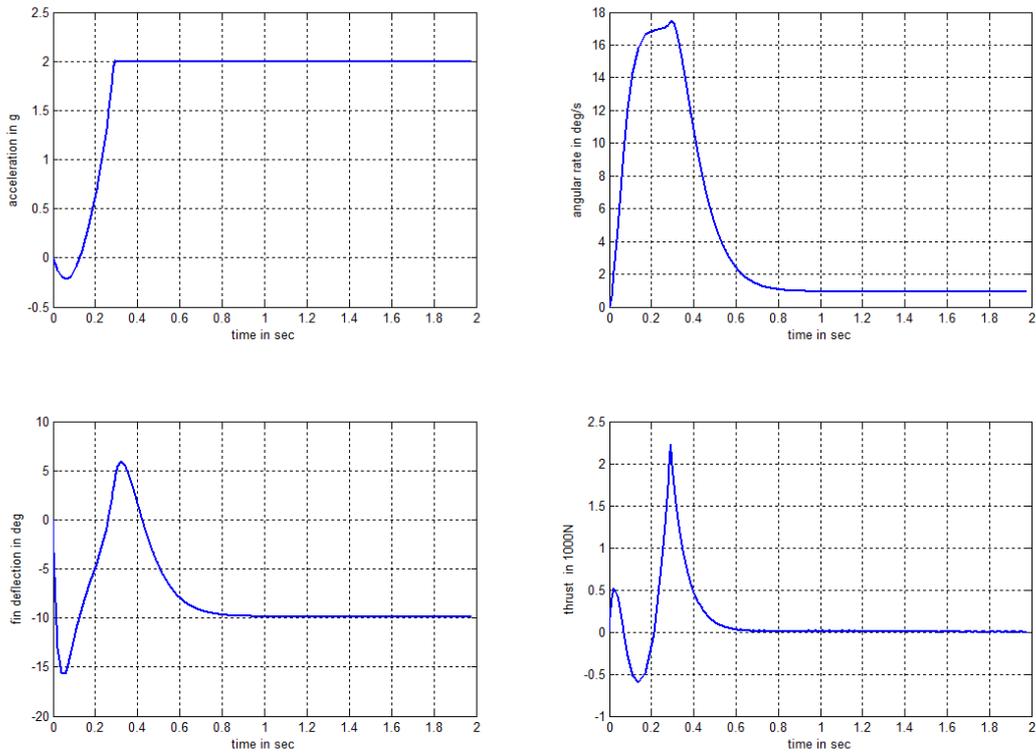


圖 4-23 設計二調慢加速度響應的模擬結果

若想要消除低射現象，必須把 $\sigma$ 調大。則設計一參數修正為

$$u_{Tc} = u_1 - \frac{1}{g} \sigma \frac{s}{(|s| + \rho)} - 140 \text{sign}(\dot{a}_{yc})$$

$$\delta' = -0.14 \text{sign}(\dot{a}_{yc})$$

$$\rho = 0.005, \sigma = 280 \quad (4.60)$$

設計二參數修正為

$$u_{Tc} = u_1 + u_2 - 200 \text{sign}(\dot{a}_{yc})$$

$$\delta' = -0.14 \text{sign}(\dot{a}_{yc})$$

$$\rho = 0.005, \sigma = 300 \quad (4.61)$$

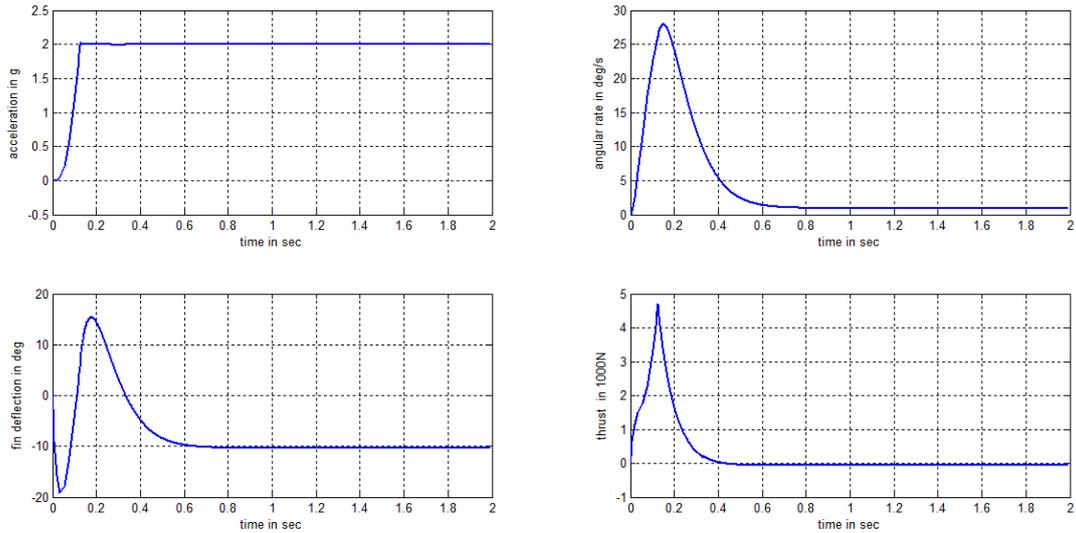


圖 4-24 設計一使用(4.60)式參數的模擬結果

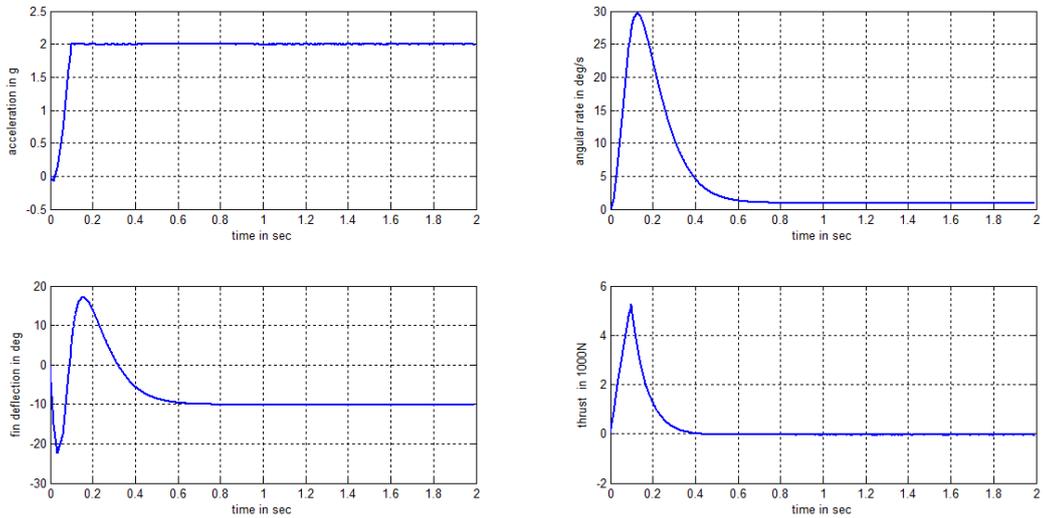


圖 4-25 設計二使用(4.61)式參數的模擬結果

從圖 4-24 及圖 4-25 可以看出系統消除低射現象，側向推力必須提供較大的力道。設計二側向推力一開始上升的幅度較慢，較難抵銷尾翼角。因此設計二比設計一較難消除低射現象，設計二需要較大的側向推力。

系統加速度響應若要快速且消除低射現象，側向推力的力道使用必須比較大，若側向推力要小系統的加速度響應就會比較差，兩者無法兼備。因此必須考慮模擬的條件與限制，選取一個適合的參數，才能有好的響應結果。

## 第五章

### 追蹤導引模擬與討論

本章為純尾翼控制與複合控制導入追蹤導引的模擬結果比較及討論。5.1 節介紹導引法則，5.2 節討論控制器在追蹤導引過程的模擬結果與比較，5.3 節討論側向推力何時打開較佳。

#### 5.1 追蹤導引法則

這裡介紹兩個導引法則，一個是比例導引法則 proportional navigation (PN) guidance，另一是 APN 強化型比例導引法則 augmented proportional navigation (APN) guidance。

##### 5.1.1 PN 導引法則

在比例導引法則中，產生的加速度命令來自於垂直視線座標的加速度，即攔截飛彈與目標飛彈的瞄準線(line-of-sight)逆時針 90 度的加速度。定義此加速度為

$$a_c = N v_c \dot{\lambda} \quad (5.1)$$

其中  $N$  為導航比(navigation ratio)， $v_c$  為攔截飛彈與目標飛彈的相對速度， $\dot{\lambda}$  為視線角速度。瞄準線的垂直加速度在地面作標的分量為

$$\begin{aligned} a_{Ny} &= a_c \cos \lambda \\ a_{Nx} &= -a_c \sin \lambda \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中  $a_{Ny}$  為飛彈加速度在地面座標  $Y_N$  方向的分量， $a_{Nx}$  為飛彈加速度在地面座標  $X_N$  方向的分量。最後加速度命令在體座標  $Y_B$  方向為

$$a_{yc} = a_{Ny} \cos \theta - a_{Nx} \sin \theta \quad (5.3)$$

我們用實際模擬可以得到的資訊來表示  $v_c$  以及  $\dot{\lambda}$ 。定義  $r_x$  為攔截飛彈與目標在地面作標  $X_N$  方向的相對距離， $r_y$  為  $Y_N$  方向的相對距離

$$r_x = x_t - x_N$$

$$r_y = y_t - y_N \quad (5.4)$$

其中 $x_N$ 為飛彈在地面座標 $X_N$ 方向的位置變化， $y_N$ 為飛彈在地面座標 $Y_N$ 方向的位置變化。 $x_t$ 為目標飛彈在地面座標 $X_N$ 方向的位置變化， $y_t$ 為目標飛彈在地面座標 $Y_N$ 方向的位置變化。定義 $v_x$ 為攔截飛彈與目標在地面作標 $X_N$ 方向的相對速度， $v_y$ 為 $Y_N$ 方向的相對速度

$$\begin{aligned} v_x &= v_{tx} - v_{Nx} \\ v_y &= v_{ty} - v_{Ny} \end{aligned} \quad (5.5)$$

相對距離為

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (5.6)$$

則相對速度定義為 $v_c = -\dot{r}$

$$v_c = -\frac{r_x v_x + r_y v_y}{r} \quad (5.7)$$

視線角可以定義為

$$\lambda = \sin^{-1} \left( \frac{r_y}{r} \right) \quad (5.8)$$

將 $\sin \lambda = \left( \frac{r_y}{r} \right)$ 微分可得

$$\dot{\lambda} \cos \lambda = \frac{v_y}{r} - r_y v_c / r^2 \quad (5.9)$$

因此

$$\dot{\lambda} = \frac{v_y r - r_y v_c}{r^2 \cos \lambda} \quad (5.10)$$

由(5.4)~(5.10)式我們可以表示體座標 $Y_B$ 方向的加速度命令。

### 5.1.2 APN 導引法則[11]

現在我們假設可以知道目標飛彈的加速度，APN 導引法則在垂直瞄準線的加速度上加上了目標飛彈的加速度。定義此參考加速度為

$$a'_c = N v_c \dot{\lambda} + 0.5 N a_t \quad (5.11)$$

其中 $a_t$ 為目標飛彈加速度。 $a'_c$ 在地面座標的分量為

$$\begin{aligned} a_{Ny} &= Nv_c \dot{\lambda} \cos \lambda + 0.5Na_{ty} \\ a_{Nx} &= -Nv_c \dot{\lambda} \sin \lambda + 0.5Na_{tx} \end{aligned} \quad (5.12)$$

最後加速度命令在體座標 $Y_B$ 方向為

$$a_{yc} = a_{Ny} \cos \theta - a_{Nx} \sin \theta \quad (5.13)$$

### 5.1.3 停止的根據和誤差距離

在追蹤導引過程相對距離 $r$ 會持續的減少，也就是說 $\dot{r} < 0$ ，直到打到目標飛彈或超過目標飛彈。若最終有打到目標飛彈，相對距離 $r$ 會達到最小即 $\dot{r} = 0$ 。因此模擬過程停止的依據為

$$\dot{r} \geq 0 \quad (5.14)$$

追蹤導引停止時的距離稱為誤差距離(miss distance)，理想為零否則此為攔截飛彈與目標飛彈的最小相對距離。假設即將導引結束的瞬間為 $t_f$ ，則 $r_x(t_f)$ 、 $r_y(t_f)$ 、 $v_x(t_f)$ 、 $v_y(t_f)$ 分別為相對位置與相對速度的瞬間值。現在考慮以下方程式

$$\begin{aligned} r_x(t_f) + v_x(t_f)\Delta t &= 0 \\ r_y(t_f) + v_y(t_f)\Delta t &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

假設 $\Delta t$ 為(5.15)式中的解，代表攔截飛彈打到目標飛彈，誤差距離在 $t_f + \Delta t$ 時為0。一般來說(5.15)式沒有解，假如 $\Delta t$ 為(5.15)式的最小平方解，誤差距離在 $t_f + \Delta t$ 時為最小。最小平方解為

$$\Delta t = -\frac{v_x(t_f)r_x(t_f) + v_y(t_f)r_y(t_f)}{v_x(t_f)^2 + v_y(t_f)^2} \quad (5.16)$$

則誤差距離為

$$\sqrt{(r_x(t_f) + v_x(t_f)\Delta t)^2 + (r_y(t_f) + v_y(t_f)\Delta t)^2} \quad (5.17)$$

### 5.1.4 模擬條件

我們用以下的初始狀況來進行追蹤導引模擬。攔截飛彈對於目標飛彈 $X_N$ 軸

的相對距離為 15000 公尺，且攔截飛彈高度距離地表為 15000 公尺，目標飛彈高度距離地表為 20000 公尺。目標飛彈飛行速度為 1400m/s，方向為對於負 $X_N$ 軸逆時針 5 度。且目標飛彈加速度為振幅 1~4g 的正弦波， $-\pi \sim +\pi$  的隨機相位，頻率為 0.5 赫茲。攔截飛彈的速度為 1200m/s，初始航向誤差為 5 度。導航比 $N=4$ 。利用線性方法控制尾翼，再加上非線性方法控制側噴來追蹤目標。所有模擬皆忽略重力加速度。

### 5.1.5 攔截模擬的數值結果

利用 5.1.4 節的模擬條件，目標飛彈尚未有加速度時，只依靠尾翼追蹤能夠打到目標飛彈，其誤差距離為 0.0225m。圖 5-1 上圖為加速度追蹤響應圖，紅色線為加速度命令，藍色線為加速度；下圖為攔截飛彈與目標飛彈的二維軌跡圖，藍色線為攔截飛彈軌跡，綠色線為目標飛彈軌跡。圖 5-1 顯示尾翼控制有不錯的追蹤能力。圖 5-2 中 angle of attack 為攻角響應，angular rate 為角速度響應，fin deflection 為尾翼角響應，thrust 為側向推力響應。圖 5-3 中 $\lambda$ 為視線角響應， $d\lambda/dt$ 為視線角微分， $a_c$ 為攔截飛彈與目標飛彈瞄準線逆時針 90 度的加速度，closing speed 為攔截飛彈與目標飛彈的相對速度。

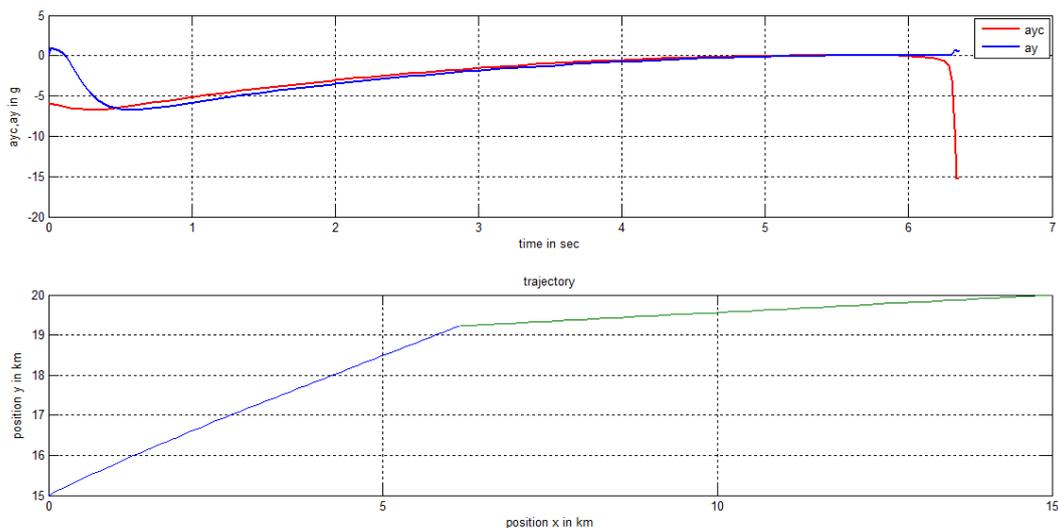


圖 5-1 目標未加速時的尾翼追蹤響應(1)

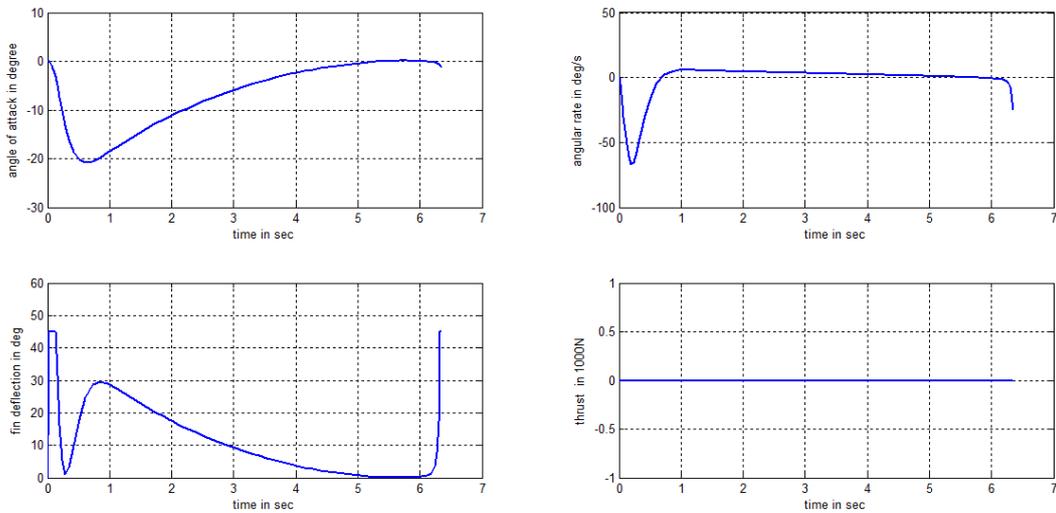


圖 5-2 目標未加速時的尾翼追蹤響應(2)

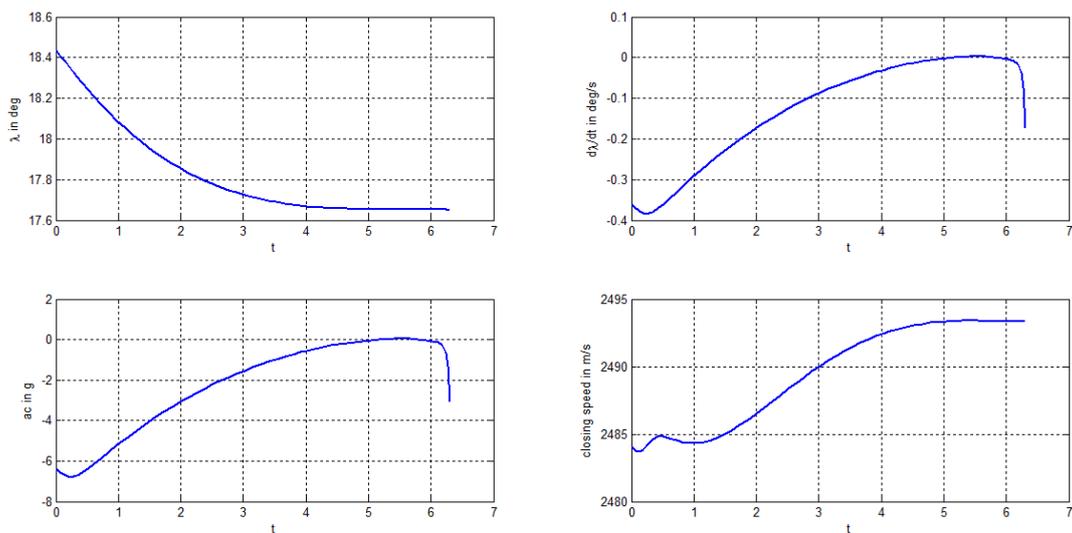


圖 5-3 目標未加速時的尾翼追蹤響應(3)

## 5.2 導入導引法則的模擬結果與討論

這節顯示控制器在導引追蹤之下的模擬響應，我們選擇為導航比 $N=4$ 。5.2.1 節先討論純尾翼控制之下，目標飛彈狀況的不同對於飛彈追蹤的影響。5.2.2 節比較 PN 導引法則與 APN 導引法則的追蹤強度，5.2.3 節討論純尾翼與複合控制的比較，5.2.4 探討下降側向推力的參數設定在導引中的模擬結果，5.2.5 討論複合控制對氣動力系數誤差的容忍度，5.2.6 比較燃料裝載重量。

### 5.2.1 目標飛彈狀態的不同對純尾翼控制的影響

探討目標飛彈在不同的飛行狀況下對於尾翼追蹤的難度有無影響。目標飛彈擁有正弦輸入的加速度，其相位為 $-\pi \sim +\pi$ 的隨機相位。以下探討目標飛彈在不同的加速度振幅、加速度頻率、初始航向誤差的攔截飛彈追蹤的成效。圖 5-4 為目標飛彈在不同加速度振幅以及頻率對於尾翼追蹤的成效比較圖。橫軸座標為目標的加速度振幅大小，縱軸為 20 組的隨機相位在不同頻率以及加速度振幅的平均誤差距離。此外初始航向誤差皆為 5 度。

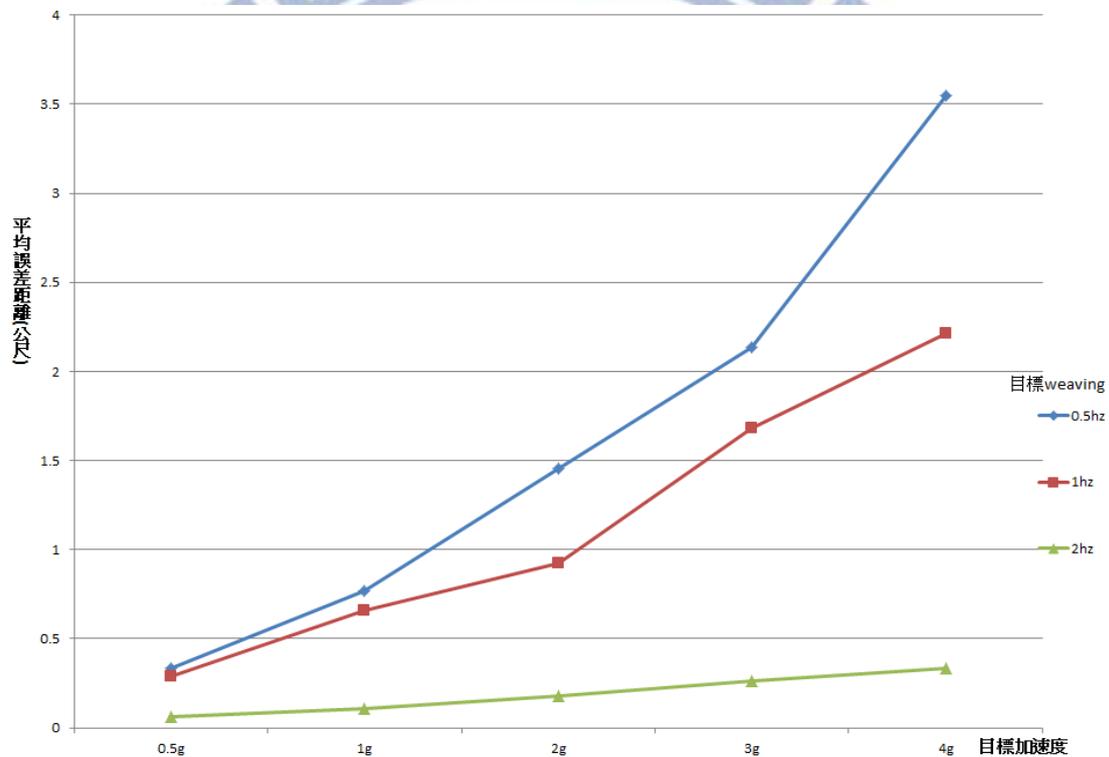


圖 5-4 不同振幅以及頻率對於尾翼追蹤的成效比較圖

從圖 5-4 所示很明顯地加速度振幅越大追蹤難度越困難。藍色線頻率 0.5 赫茲的曲線比其他頻率的曲線來的大，1 赫茲的曲線也比 2 赫茲的曲線大，可以得知目標飛彈加速度頻率愈小攔截飛彈愈難追蹤，平均誤差距離愈大。接下來討論加速度頻率小於 0.5 赫茲的情形。圖 5-5 為不同目標飛彈加速度的頻率對攔截飛彈追蹤的影響，其目標飛彈加速度振幅為 4g，初始航向誤差為 5 度。圖 5-5 可

以看出在 0.5 赫茲的時候追蹤難度最高，在高頻以及低頻時的難易度較低，可以知道加速度變化極快或是極慢較好追蹤。

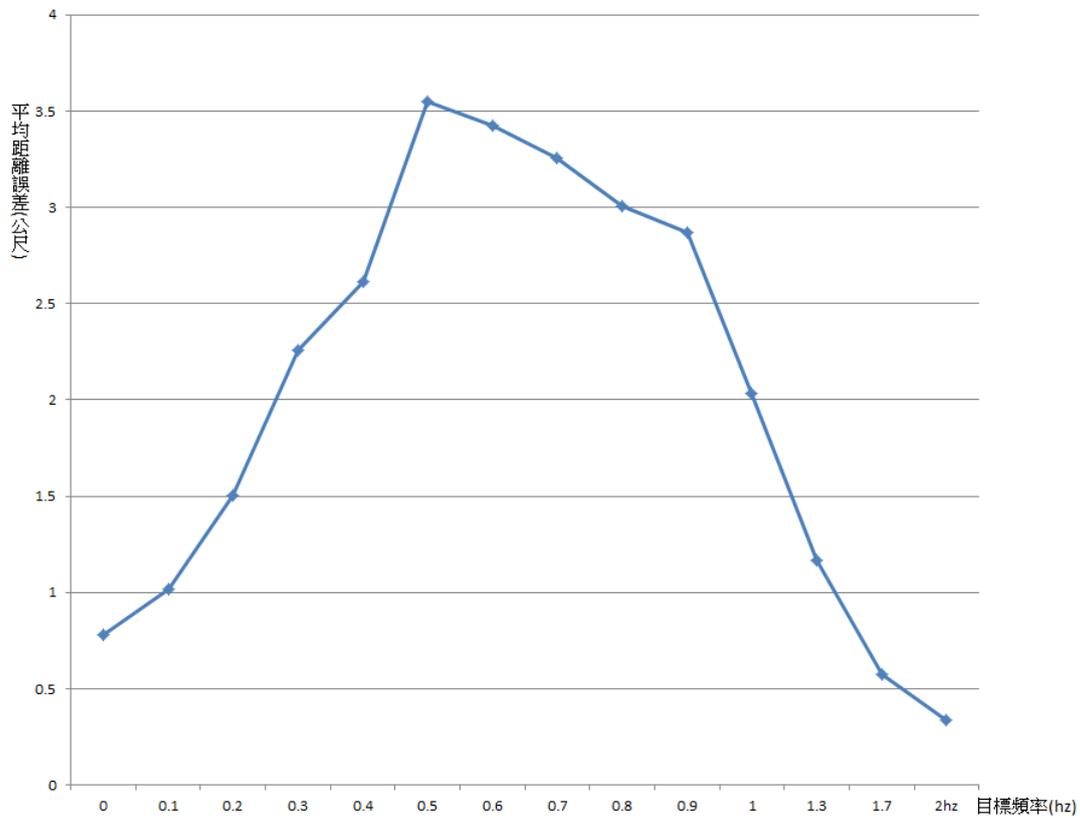


圖 5-5 為不同目標飛彈加速度頻率對攔截飛彈追蹤的影響

圖 5-6 為攔截飛彈與目標飛彈間不同的初始航向誤差對於尾翼追蹤的成效比較圖。加速度頻率皆為 0.5 赫茲。從圖中看來 5~12 度的初始航向誤差  $r$  所造成的誤差距離差不多，攔截飛彈追蹤的難度差距不大。圖 5-7 加入兩組初始航向誤差的數據，顯示目標飛彈在 13 度之後初始航向誤差的影響變得非常劇烈，15 度時追蹤成效極為不好。從 13 度之後初始航向誤差的影響非常顯著。

此外因為初始航向誤差的影響顯著，在 13 度之後目標飛彈的加速度頻率所造成的影響就沒那麼明顯。圖 5-8 中所示誤差距離都非常大，不同加速度頻率的曲線相當接近，頻率較大的曲線平均距離誤差也不一定比較小。

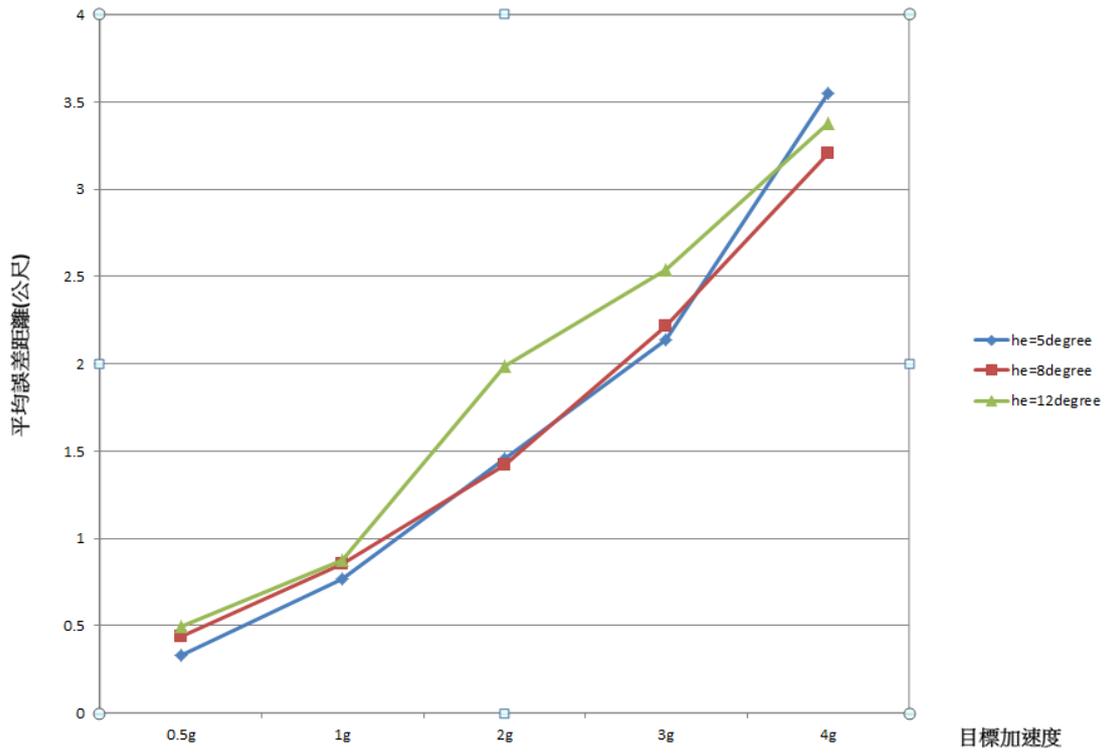


圖 5-6 不同的初始航向誤差對於尾翼追蹤的成效比較圖

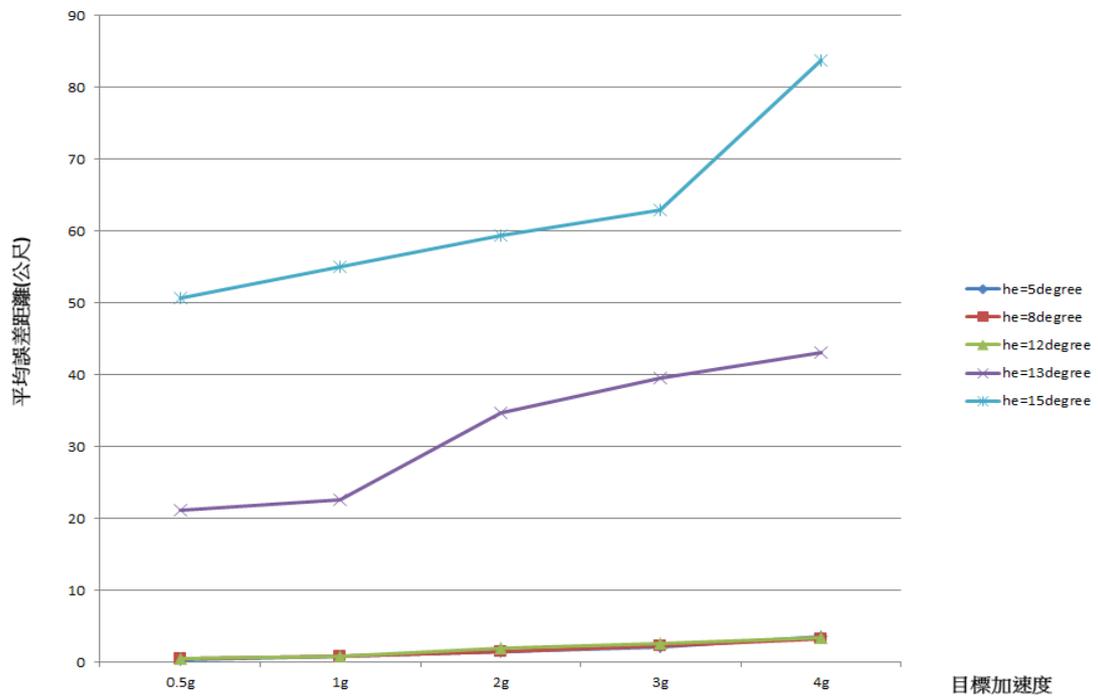


圖 5-7 較大的初始航向誤差對於尾翼追蹤的成效比較圖

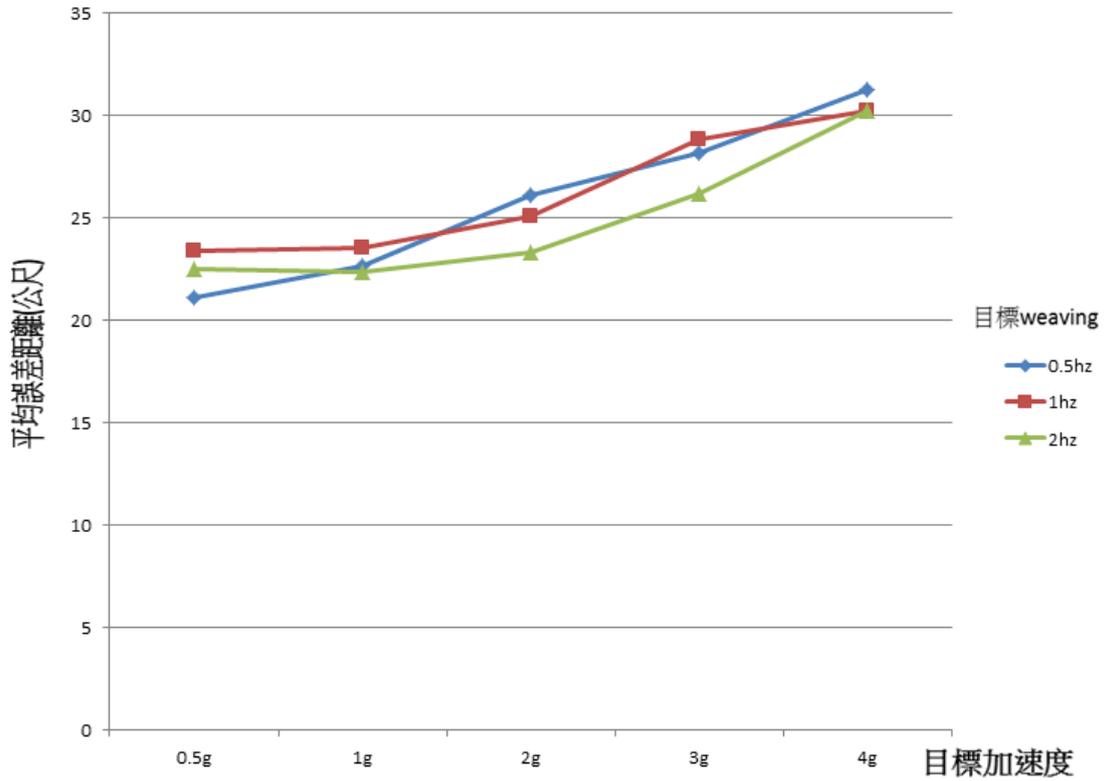


圖 5-8 不同的頻率在 13 度的初始航向誤差對尾翼追蹤的成效比較圖

### 5.2.2 純尾翼控制 APN 與 PN 的成效比較

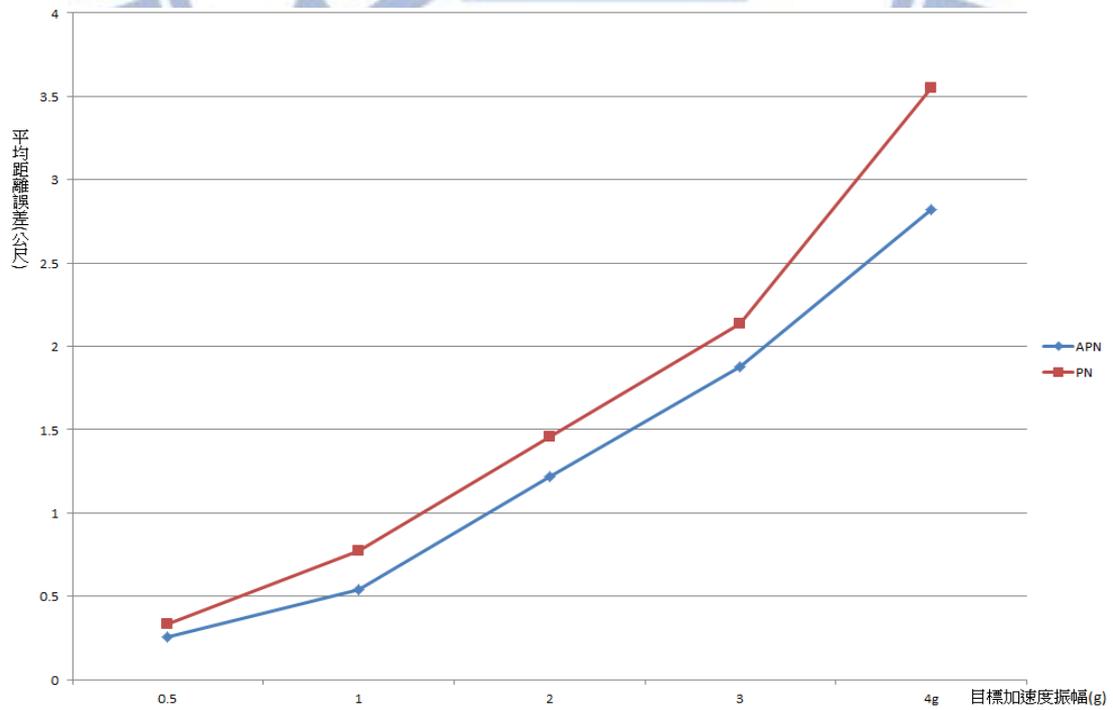


圖 5-9 不同振幅的加速度對追蹤難易度的影響

圖 5-9 為 PN 與 APN 這兩個不同導引法則在 0.5hz, 初始航向誤差為 5 度時, 不同振幅的加速度對純尾翼控制追蹤的難易度。可以看出來 APN 導引法則追蹤效果較 PN 導引法則佳, 但誤差距離仍然不理想, 必須使用側向推力的輔助。APN 導引法則並沒有顯著的效果, 因此複合控制的導引仍然使用 PN 導引法則。

### 5.2.3 純尾翼控制與複合控制的比較

本小節比較攔截飛彈在目標飛彈加速度振幅 3g, 初始航向誤差為 5 度, 加速度頻率 0.5 赫茲的情形下, 純尾翼控制與複合控制追蹤的情況。以下的模擬結果隨機相位皆為相同, 可以從模擬圖中明確的比較純尾翼控制與設計一、設計二的追蹤效果。我們選擇使用 PN 導引法則來作接下來所有的模擬, 純尾翼控制參數選擇為  $K_a = -0.02$ 、 $K_i = -0.04$ 、 $K_q = 1$ , 其最小誤差距離為 0.332 公尺, 無法達到我們理想的追蹤效果。我們加入側向推力作比較, (4.34) 式為設計一的控制定律, 在導引結束前 2 秒時打開至結束, 其最小誤差距離幾乎為 0。

圖 5-10 為純尾翼控制與設計一的複合控制比較, 上圖 tail fin 代表純尾翼控制追蹤的情形, 下圖 blended 代表複合控制的追蹤情形。藍色線為加速度, 紅色線為加速度命令。可以看出複合控制在側向推力在打到目標前 2 秒打開後能很快的追上加速度命令。從圖 5-11 藍色線為尾翼控制, 紅色線為複合控制。acceleration 代表加速度響應如左上圖, angular rate 代表角速度響應如右上圖, fin deflection 代表尾翼角響應如左下圖, thrust 代表側向推力響應如右下圖。圖 5-12 上圖為尾翼角響應, 下圖 alpha 代表攻角響應。從圖 5-12 中可以看出側向推力打開後加速度減少時尾翼角往負方向增加, 加速度增加時卻往正方向增加, 攻角大小反而變小, 也造成側向推力多餘的使用。因此我們必須想辦法讓尾翼角在加速度增加時能往負向增加, 加速度減少的時候往正向增加, 進而提升攻角, 讓側向推力的使用力道下降。

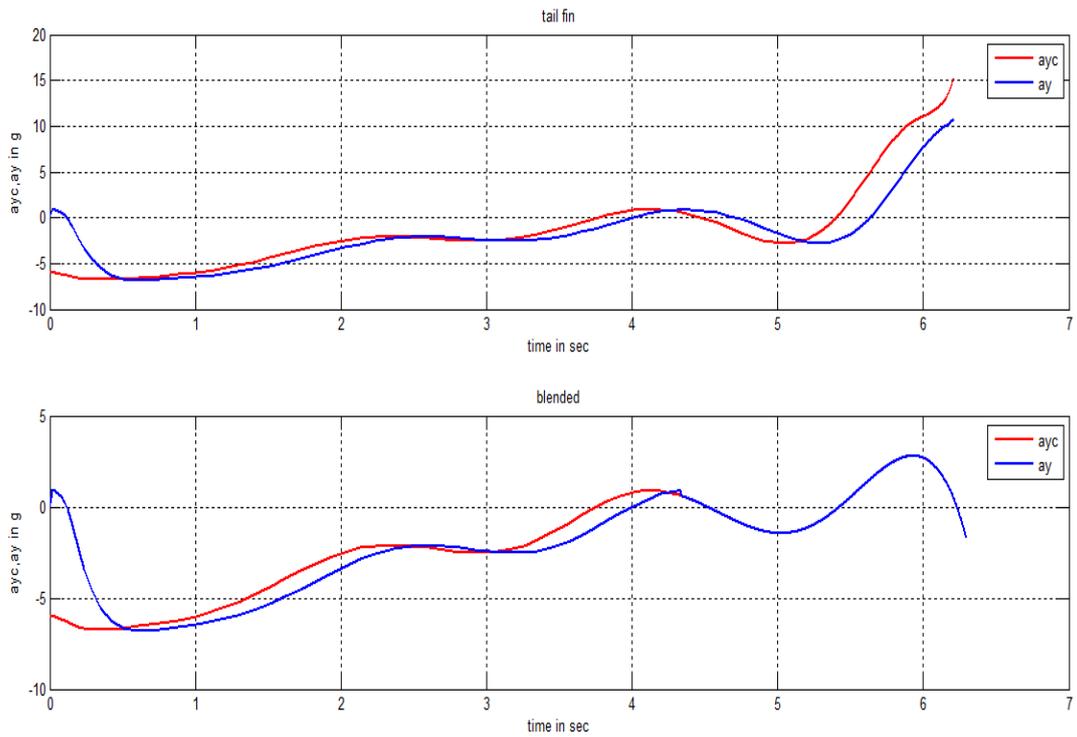


圖 5-10 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(1)

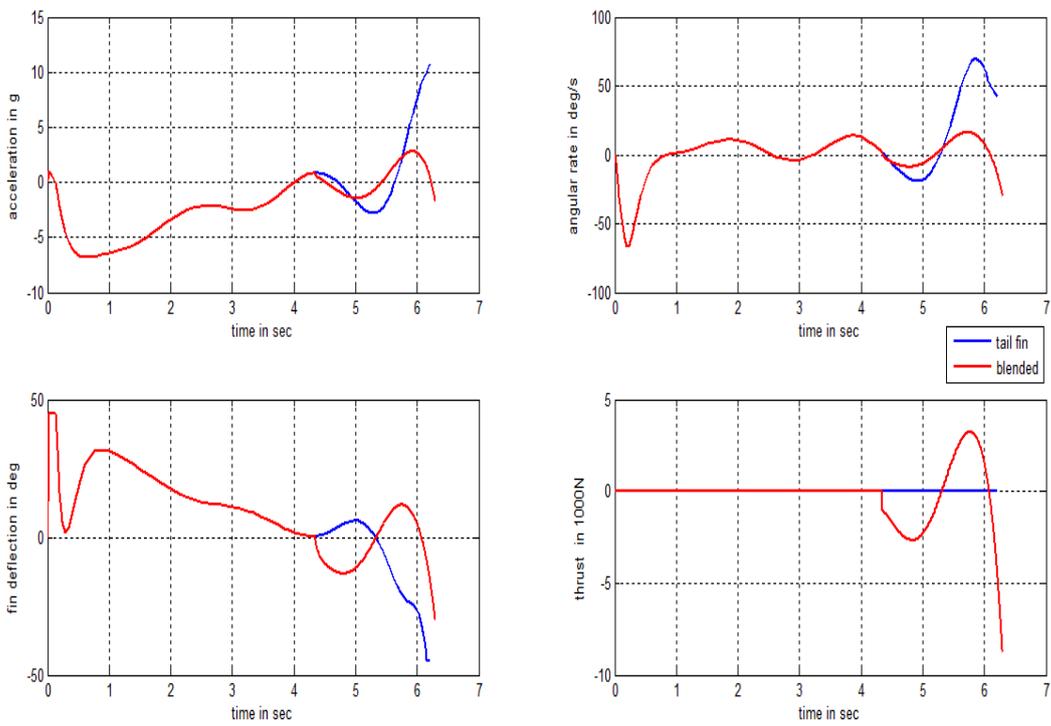


圖 5-11 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(2)

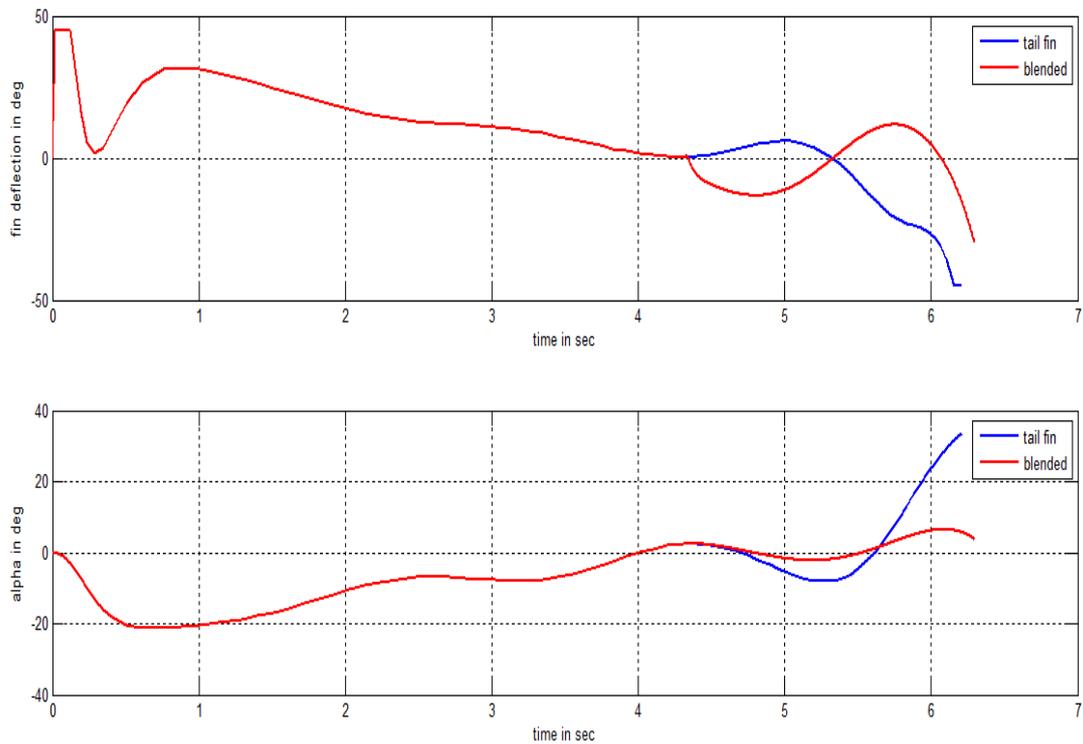


圖 5-12 純尾翼控制與設計一複合控制的比較(3)

我們使用(4.35)式改善複合控制的設計。從圖 5-13 中明顯的發現左上圖改善前後加速度追蹤響應完全一樣。此外尾翼角補正向或負向的依據是利用加速度的微分，但此依據並不是完全準確，在加速度微分正負轉換瞬間會有誤差，造成補足方向錯誤的情形，尾翼角會因為累加而變大。從圖 5-13 左下圖可以看出加速度微分轉換的時候尾翼角會較大，但因為角度不大也不會使側向推力變得過大，我們也不用為此進行修正。圖 5-13 右下角圖可以看出側向推力明顯的下降，證明改善設計不但能使系統在穩態時側向推力能下降，在暫態響應時也能改善側向推力的大小，更有效率的使用側向推力。圖 5-14 上圖為尾翼角響應，可以看出除了加速度微分正負轉換區間，尾翼角能在加速度減少時往正方向增加，加速度增加時往負方向增加。而圖 5-14 下圖的攻角響應在加速度減少時往負方向增加，加速度增加時往正方向增加，顯示此設計能達到我們的目標，利用提升攻角的方式達到加速度要求。

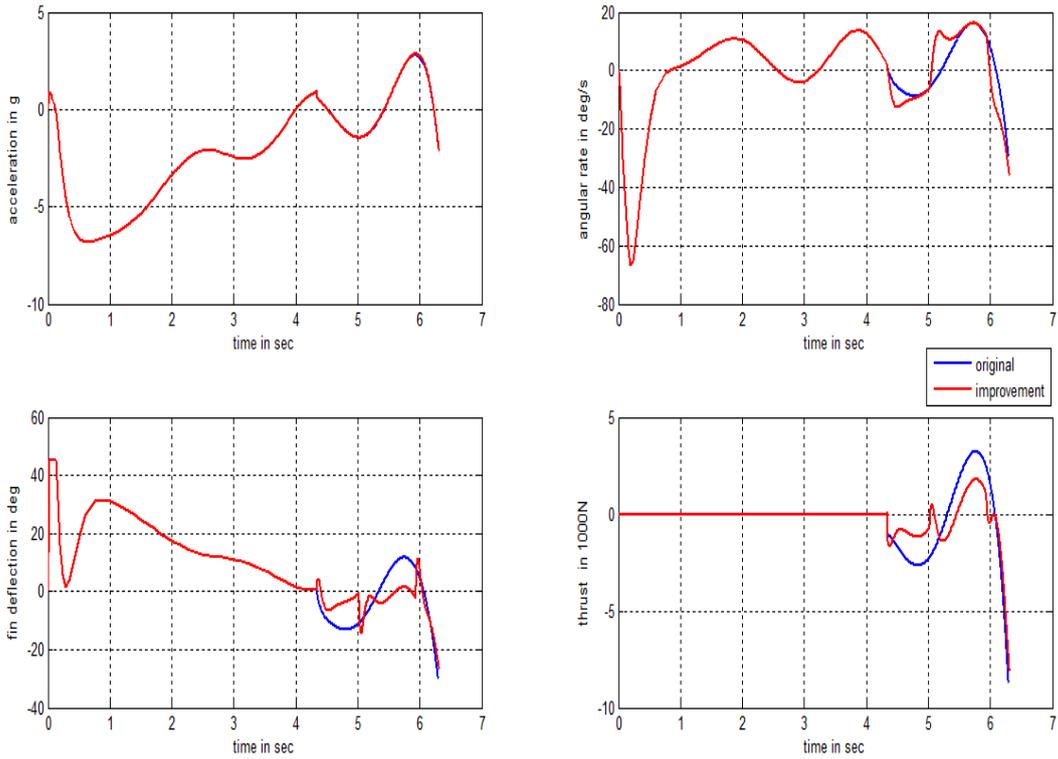


圖 5-13 設計一複合控制改善前後的比較 (1)

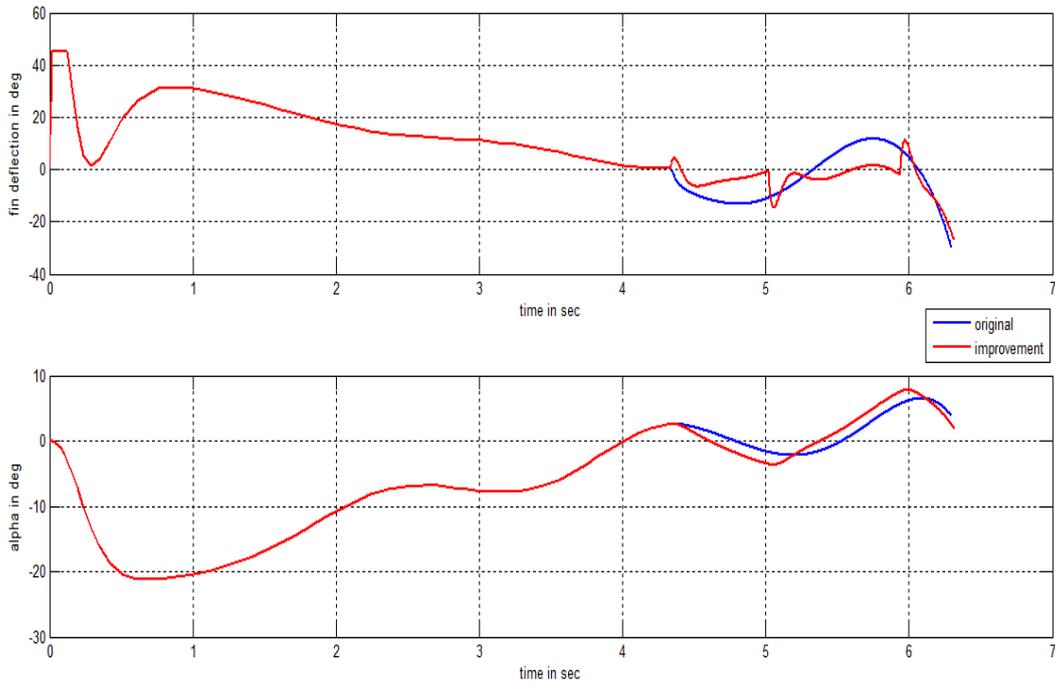


圖 5-14 設計一複合控制改善前後的比較(2)

設計二的控制定律為(4.55)式，其追蹤的目標飛彈加速度參數與設計一的模擬相同。我們也在導引結束前 2 秒時打開側向推力，其最小誤差距離幾乎為 0，攔截飛彈能打到目標飛彈。圖 5-15 為純尾翼控制與設計二的複合控制追蹤的比較，設計二的複合控制在側向推力打開後能很快的追上加速度命令。圖 5-16 比較側向推力打開有無的響應差別。圖 5-17 上圖為尾翼角響應，下圖為攻角響應。從圖 5-17 中可以知道設計二側向推力打開後仍有尾翼角在加速度減少時往負方向增加，加速度增加時卻往正方向增加，攻角大小變小的問題，因此也需要作改善的設計讓側向推力不要那麼大。

設計一與設計二的複合控制的追蹤導引的響應幾乎相同，顯示兩種設計在暫態時的響應差不多。兩者的側向推力大小也差不多，難以用肉眼來區分，我們在 5.2.5 節利用數學方法來比較何者使用燃料較為節省。整體而言此二種設計在暫態追蹤時並無太大差別，所設計的複合控制皆能達到我們的理想要求。

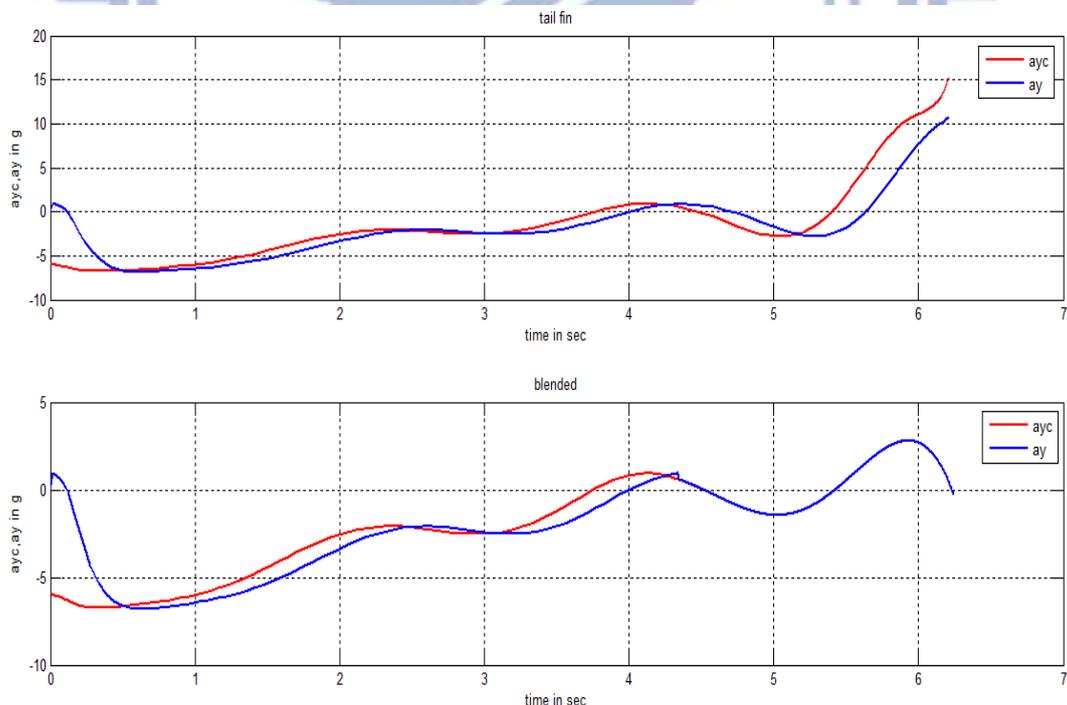


圖 5-15 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(1)

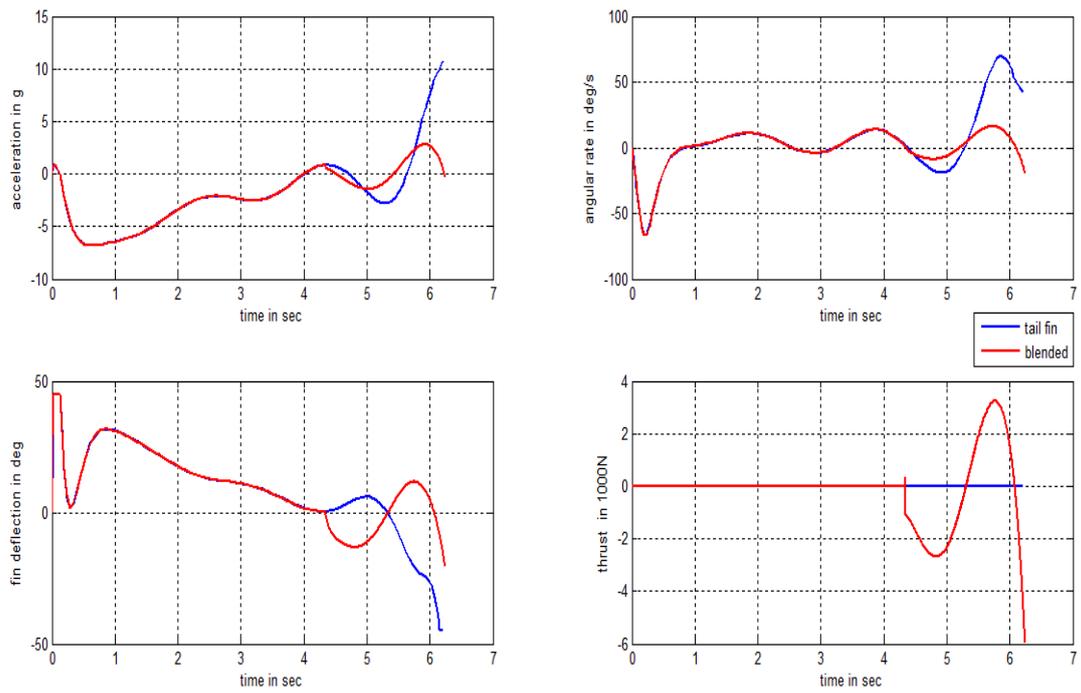


圖 5-16 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(2)

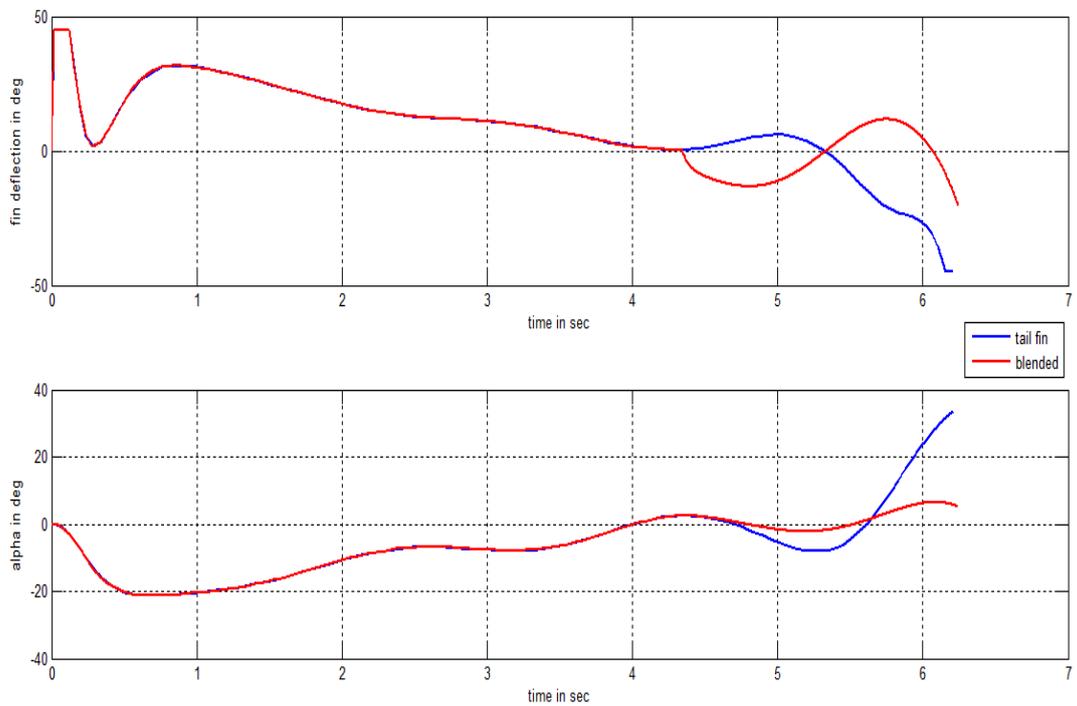


圖 5-17 純尾翼控制與設計二複合控制的比較(3)

設計二的改善原理與設計一相同，調整尾翼角以及側向推力，利用攻角的提升達到加速度要求。補足的尾翼角度以及側向推力減少的量與設計一不一樣，(4.56)式為改善複合控制的設計。從圖 5-18 中明顯的發現左上圖加速度追蹤響應完全一樣，並不會因為改善設計改變了加速度。圖 5-18 右下角圖可以看出側向推力明顯的下降，且從圖 5-19 上圖可看出尾翼角改變的情形，圖 5-19 下圖攻角的大小有明顯提升。

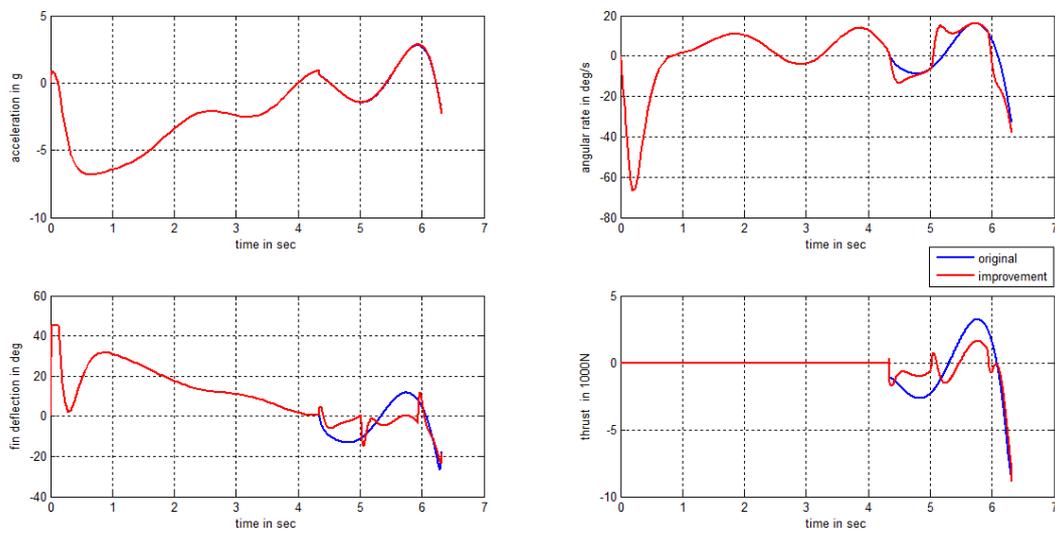


圖 5-18 設計二複合控制改善前後的比較(1)

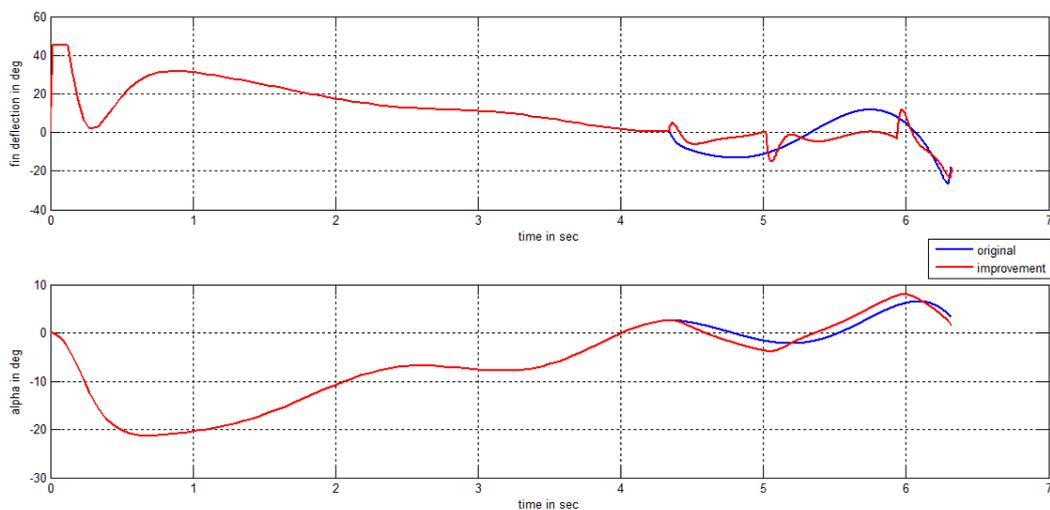


圖 5-19 設計二複合控制改善前後的比較(2)

### 5.2.4 降低側向推力的導引分析

使用 4.3 節所討論的參數設定來執行導引的模擬。圖 5-20 為設計一使用(4.60)式參數的導引模擬結果，圖 5-21 為設計二使用(4.61)式參數的導引模擬結果。將響應速度調慢會讓追蹤攔截的成效降低，設計一使用(4.60)式參數的模擬誤差距離為 0.025 公尺，設計二使用(4.61)式參數的模擬誤差距離為 0.034 公尺，兩種參數設定仍保有好的攔截效果。我們無法用肉眼分辨出側向推力大小是否有下降，在 5.2.6 節利用數學計算比較側向推力能量的消耗大小。此二種設計的誤差距離仍是我們可以容忍的範圍內，若是側向推力有明顯的改善則可以使用此二種參數設定。

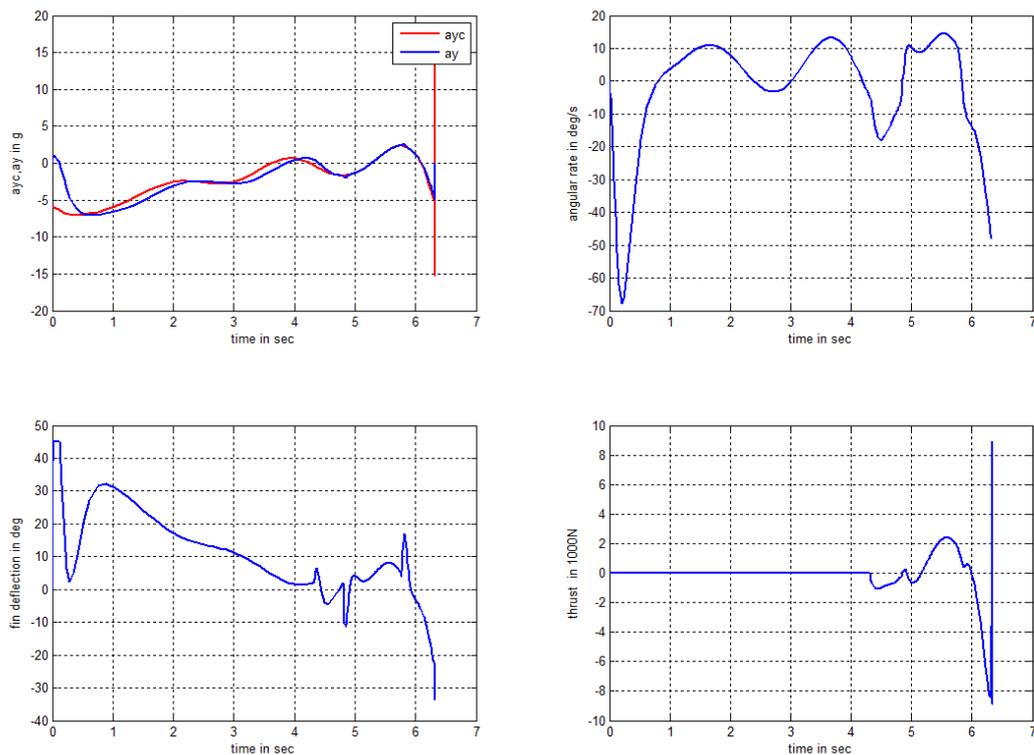


圖 5-20 設計一降低側向推力的導引

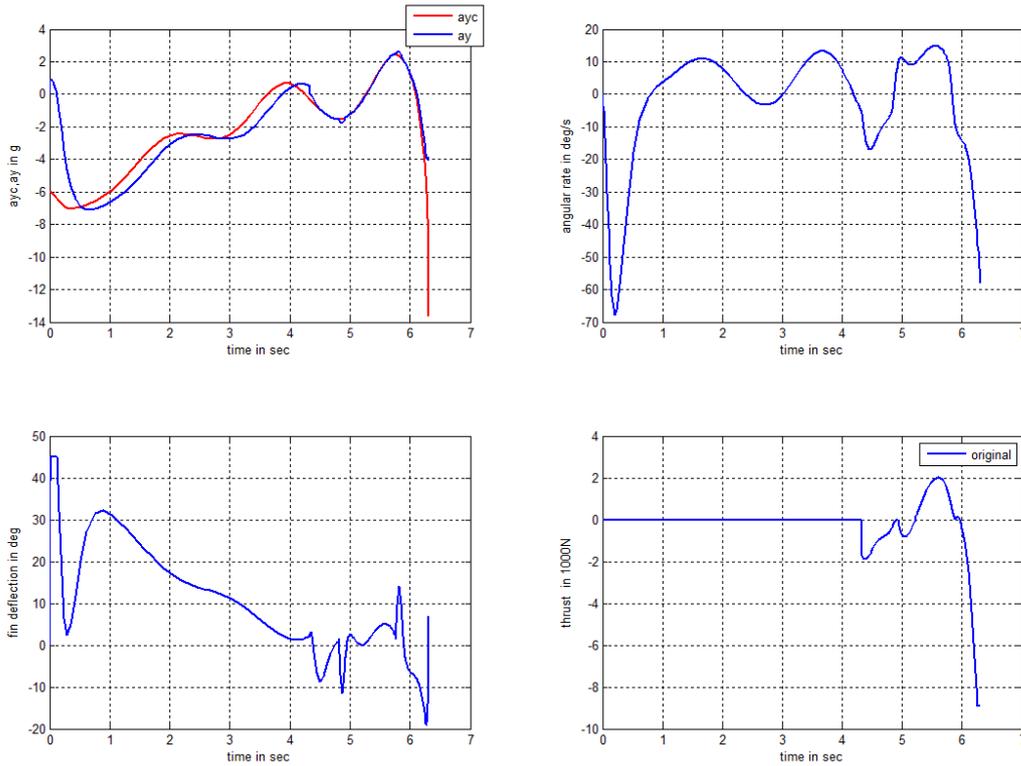


圖 5-21 設計二降低側向推力的導引

### 5.2.5 氣動力係數誤差所造成的影響

一般來說在側向推力打開後會造成氣場的改變，導致氣動力係數下降。我們利用此二種穩態側向推力過大改善後的複合控制來探討氣動力誤差所造成的影響。我們將氣動力下降 20%~60%，統整 20 組不同相位的目標飛彈的追蹤情形。圖 5-22 所示，此二種設計大致上可以容忍 40% 的氣動力係數的下降。從 5.2.3 小節的響應中，兩者的導引表現很接近，氣動力係數的下降的容忍度也很相近。

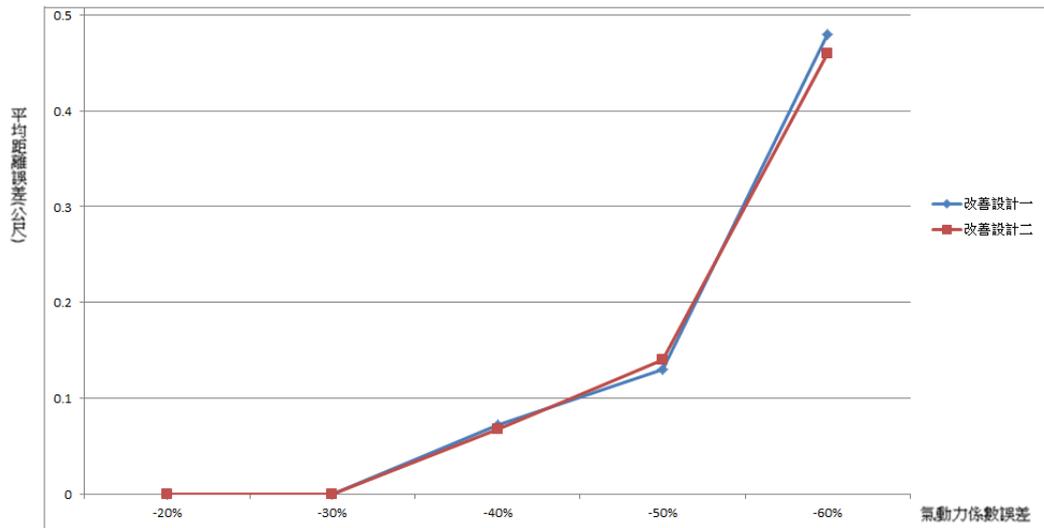


圖 5-22 複合控制穩態改善設計氣動力誤差對追蹤難度的影響

### 5.2.6 裝載燃料的重量計算

假設  $I_{sp} = 250$  s,  $I_t$  (in N-s) 為消耗的總能量, 則燃料裝載重量為

$$\text{propellant mass} = \frac{I_t}{I_{sp} \times 9.8} \text{ kg} \quad (5.18)$$

將側向推力取絕對值積分後可以得到消耗的總能量。我們計算 5.2.3 節所討論的追蹤響應的消耗能量, 其結果為表 5-1。

表 5-1 追蹤過程消耗能量以及燃料

	設計一	設計一穩態改善	設計二	設計二穩態改善
總消耗能量(N-s)	4414	2487	4372	2413
燃料裝載重量(kg)	1.82	1.02	1.78	0.98
	設計一下降側向推力設計		設計二下降側向推力設計	
總消耗能量(N-s)	2477		2452	
燃料裝載重量(kg)	1.01		1.00	

從以上結果可知在這追蹤過程, 設計二的複合控制較為節省燃料, 但與設計一並沒有相差很多。此外改善穩態側向推力過大的改善設計大幅的減少能量的消耗,

減輕需要裝載的燃料重量。下降側向推力設計消耗能量與穩態側向推力改善設計差不多，但後者的加速度響應較佳，因此由後者的設計方法來作導引較佳。

### 5.3 側向推力打開的時機

本小節探討攔截飛彈在目標飛彈加速度振幅  $3g$ ，初始航向誤差為  $5$  度，加速度頻率  $0.5$  赫茲的情形下，側向推力打開的時間點不同的影響。利用複合控制側向推力過大的改善設計(4.35)式及(4.56)式來討論不同打開時機所造成的誤差距離以及能量消耗的差異。表 5-2 為設計一改善設計(4.35)式在不同的時間點打開側向推力的差異比較。time-to-go(tgo)代表需要多少時間才能打到目標飛彈，例如  $tgo=2s$  代表在導引結束前  $2$  秒打開側向推力。表 5-3 為設計二改善設計(4.56)式的比較。統計十組的不同的目標加速度隨機相位來作平均。

表 5-2 設計一複合控制改善設計側向推力在不同時間打開的情形

設計一穩態改善設計	tgo=0.7s	tgo=0.65s	tgo =0.6s	tgo =0.58s	tgo =0.55s
平均誤差距離(m)	0	0	0.02	0.08	0.14
平均總消耗(N-s)	3238	2908	2729	2154	1953
平均燃料(kg)	1.32	1.19	1.11	0.87	0.80
	tgo =2s	tgo =1.8s	tgo =1.5s	tgo =1.2s	tgo =0.9s
平均誤差距離(m)	0	0	0	0	0
平均總消耗(N-s)	2514	2481	2611	2919	3531
平均燃料(kg)	1.03	1.01	1.07	1.19	1.44

表 5-3 設計二複合控制改善設計側向推力在不同時間打開的情形

設計二穩態改善設計	tgo =0.7s	tgo =0.65s	tgo =0.6s	tgo =0.58s	tgo =0.55s
平均誤差距離(m)	0	0	0.03	0.07	0.13
平均總消耗(N-s)	3188	2852	2677	2032	1911
平均燃料(kg)	1.30	1.16	1.09	0.83	0.78
	tgo =2s	tgo =1.8s	tgo =1.5s	tgo =1.2s	tgo =0.9s
平均誤差距離(m)	0	0	0	0	0
平均總消耗(N-s)	2489	2312	2523	2803	3331
平均燃料(kg)	1.01	0.94	1.03	1.14	1.36

從表 5-2 及表 5-3 的統計數據顯示在導引結束前 0.55 秒打開側向推力誤差距離較大，側向推力打開的時間短雖然可以減少燃料但追蹤效果不理想。尾翼追蹤時為了補足前面加速度的不足，在導引結束前加速度會變得比較大。圖 5-15 上圖尾翼控制的追蹤導引顯示加速度命令在導引結束前 1.2 秒開始大幅度增加。因此在加速度大幅度增加後打開側向推力，反而需要更多的推力使用。從表 5-2 及表 5-3 中顯示，tgo=0.6s~1.5s 時打開側向推力消耗的能量比 tgo=1.8s 打開時還要多。tgo=0.58s 時打開側向推力所造成的平均誤差距離不大且能量消耗很小，可以將此時間點視為較佳的側向推力打開時機。但是若要確保追蹤的成效，可以選擇 tgo=1.8s 此時間點。平均誤差距離為 0m，且燃料使用不大。

## 第六章

### 結論

本論文以二維空間四個自由度的座標系來設計純尾翼控制以及加上側向推力的複合控制。第三章中我們利用角速度的回授設計阻尼比，再使用比例積分控制器來設計純尾翼控制。此設計能夠達到穩定的加速度要求，且能讓攔截飛彈打到尚無加速度的目標飛彈，保有一定程度的追蹤成效。然而在目標飛彈擁有加速度時便無法達到我們所能容忍的誤差距離，需要側向推力的輔助。第四章中我們設計了兩種複合控制。一是將尾翼控制輸入當成干擾，直接對飛彈的動態方程式作順滑模控制的設計。二是將側向推力視為單輸入控制，考慮線性純尾翼控制的設計對動態方程式的影響，對整體的系統包含角速度的回授以及比例積分控制器來作順滑模控制的設計。然而這兩種複合控制的設計攻角都比純尾翼控制時還要小，尾翼角也沒有達到純尾翼控制時的大小，導致側向推力不是提升攻角速度的功能，而是提供 $Y_B$ 方向的力來達到系統所需加速度。因此我們額外給予須補足的尾翼角命令，並調整側向推力，攻角將會提升補足系統需要平衡的力，讓側向推力能夠下降。

我們在第四章後半部及第五章展示模擬結果，比較複合控制與純尾翼控制的好處。第四章後半部為步階響應，可以看出複合控制的響應比純尾翼控制還快，且側向推力穩態過大的修正設計也能很明顯看出改善。也調整控制律參數觀察側向推力下降的情形。第五章為追蹤導引的模擬過程，也能很明顯看出複合控制能夠理想地打到目標飛彈。且側向推力過大修正設計我們利用數學公式計算出燃料大小，與原本的設計有明顯的改善。將系統響應調慢不但追蹤成效變差且燃料使用並沒有明顯的下降。此外也對側向推力打開的時機作簡單的統計。

未來的研究方向建議可以設計三維空間六自由度的複合控制，且能對純尾翼控制系統以及複合控制系統進行改善，增快其響應。此外對側向推力的大小進行改善，讓燃料能夠達到最有效率的使用，減少飛行時的重量。

## 參考文獻

- [1] Chadwick K. A., "Augmentation of high-altitude maneuver performance of tail-controlled missile using lateral thrust," ADA-328973, 1997.
- [2] P. K. Menon and V. R. Jragavarapu, "Adaptive Techniques for Multiple Actuator Blending," AIAA Paper 1998-4494, AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 1998.
- [3] Yongtao Bi, Yu Yao and Kemao Ma, "Blended Control System Design for Agile Missile with Lateral Jets and Aerodynamic Surfaces" Conference Publishing 2 Yikuang Street Harbin Institute of Technology, Harbin 150080 China
- [4] Ajay Thukral and Mario Innocenti, "A Sliding Mode Missile Pitch Autopilot Synthesis for High Angle of Attack Maneuvering" IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 6, NO. 3, MAY 1998
- [5] Y.-T. Bi, "Research on Guidance and Control For Missile With Lateral Jets And Aerodynamic Surfaces", Ph.D, Dissertation, Harbin Institute of Technology, Harbin.2010.
- [6] 楊廷麗, "臨近空間攔截彈直接側向力/氣動力複合控制", 哈爾濱工業大學, 工學碩士學位論文, 2013年7月.
- [7] 陳永平, 張浚林, "可變結構控制設計(修訂版)" 全華圖書公司, 2002.
- [8] C.A.Lin, "中高空飛行體伺服控制系統理論與設計", 期末報告, NSC87 -2623 -D-009-014, 1998年六月.
- [9] 張碩, "自動控制系統", 鼎茂圖書, 2001.
- [10] Christopher Edwards and Sarah K. Spurgeon, "Sliding Mode Control: Theory and Applications", CRC Press, 1998
- [11] Rafael Yanushevsky, "Modern Missile Guidance", CRC Press, 2008.