

國立交通大學

應用數學系

碩士論文

定線複製法之特性及其運用之研究

A Study on Line-Based Duplication and Its Applications



研究生：蔡宜誠

指導教授：陳明璋 博士

陳秋媛 博士

中華民國九十四年六月

定線複製法之特性及其運用之研究
A Study on Line-Based Duplication and Its Applications

研究生：蔡宜誠

Student : Yih sien Tsai

指導教授：陳明璋

Advisor : Mingjang Chen

陳秋媛

Chiuyuan Chen

國立交通大學
應用數學系
碩士論文

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like border. Inside the circle, there is a shield with a book and a torch, and the year '1896' at the bottom. The text 'A Thesis' is positioned above the shield, and 'Submitted to Department of Applied Mathematics' is written across the middle of the circle.

A Thesis
Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Applied Mathematics

June 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年六月

定線複製法之特性及其運用之研究

學生：蔡宜誠

指導教授：陳明璋 博士
陳秋媛 博士

國立交通大學應用數學研究所

摘 要

定線複製法(Line-Based Duplication)是 Structural Self-clone Method 一系列方法之一，它以視覺化的方式呈現轉換所需的參數，準確處理平移、旋轉、縮放及鏡射等相似變換。此一方法是手動繪圖的一個新的介面，操作簡單，用途廣泛。主要的用途有：(1)是一種新的碎形、自我相似形的構圖法，(2)可產生類似 Julia sets 的吸子，(3)運用多元產生器的概念，可當作視覺設計工具，(4)可同時將多個多邊形精準密鋪，(5)它可用來繪製幾何對稱圖，以及(6)其他有關運用相似變換的複雜結構之繪圖。

本論文的目的是在探討定線複製法的數學特性及繪圖方法，研究不同題材的特性，設計所對應的產生器、起始結構及運用的方法。本研究探討的題材包含疊代(Recurrent Substitutions)、收縮映射(Contraction Mappings)、自我相似(Self-similarity)、碎形(Fractals)、吸子(Attractors)、幾何對稱圖(Symmetrical Patterns)、仿自然(Artificial Nature)、鋪磚(Tiling)和密鋪平面(Tessellation)等。我們以 PowerPoint 版本的數學簡報系統(Mathematical Presentation System, MathPS)為構圖平台，完成此一研究。

A Study on Line-Based Duplication and Its Applications

Student : Yih sien Tsai

Advisors : Dr. Mingjang Chen
Dr. Chiuyuan Chen

Institute of Applied Mathematics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

Line-Based Duplication is a core function of Structural Self-clone Method. It uses line-segments and a base-line to represent multiple similar transformations visually. It is a new methodology for drawing complex structures manually. Line-Based Duplication is (1) a new method for generating fractals and self-similarity figures, (2) a new method for generating attractors as Julia sets, (3) a new method for visual design by using multi-generator, (4) a new method for tilings and tessellations, (5) a new method for drawing symmetrical patterns, and (6) a new method for designing complex structures.

The purpose of this thesis is to study the mathematical characteristics of Line-Based Duplication, the drawing methods for different topics and their applications. The applications of Line-Based Duplication include recurrent substitutions, contracting mappings, self-similarity, fractals, attractors, symmetrical patterns, artificial nature, tiling and tessellation. The research is accomplished by using the PowerPoint version of Mathematical Presentation System (MathPS).

誌 謝

兩年的研究生涯裡，曾有遭遇困難而停滯不前，亦有滿懷的成就感，誠摯地感謝指導教授陳明璋老師與陳秋媛老師，在學習的過程中所給予的指導與關懷，讓學生得以順利完成論文。口試期間承蒙莊重教授、莊榮宏教授及周文賢教授的不吝指教，使學生論文更趨完善。

在此，特別感謝父母親與哥哥，你們的鼓勵帶給我更多研究的動力。感謝孟珊多方面的照顧；淑萍、莞容的精神支持；佳欣、怡倫、兆儀的經驗分享；曲敏、莉君、祐寧、啟賢、佳玟、芳婷等球友的陪伴，讓我在研究之餘可以透過運動來調劑身心；亦感謝學長姐與同儕們的切磋指教。

感謝在求學過程中，所有陪伴我一路走來的人。



目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章	簡介.....	1
1-1	動機與目的.....	1
1-2	變換(Transformations).....	2
1-2-1	相似變換(Similar Transformations).....	2
1-2-2	仿射變換(Affine Transformations).....	5
1-2-3	對稱(Symmetry).....	8
第二章	方法論.....	12
2-1	Lindenmayer systems (L-systems).....	12
2-1-1	L-systems Machine.....	12
2-1-2	Turtle Graphic.....	13
2-1-3	Growing Classical Fractals with L-systems.....	14
2-2	Multiple Reduction Copy Machine (MRCM).....	16
2-3	疊代函數系統(Iterated Function Systems, IFS).....	18
2-4	定線複製法(Line-Based Duplication, LBD).....	20
第三章	繪製一致性圖案之方法.....	23
3-1	相似變換(Similar Transformations).....	23
3-2	一致性圖案(Uniform Pictures).....	23
3-3	應用(Applications).....	24
3-3-1	圖形學繪圖(Graphs).....	24
3-3-2	視覺設計(Visual Design).....	25
第四章	疊代.....	29
4-1	疊代(Recurrent Substitution).....	29
4-2	收縮映射(Contraction Mapping).....	30
4-3	古典碎形(Classical Fractals).....	31
4-4	仿自然(Artificial Nature).....	34
4-4-1	古典型.....	34
4-4-2	草.....	35
4-4-3	水草.....	36
4-4-4	擬山擬雲.....	36
4-4-5	輕微的差異.....	37
第五章	定線複製法之特徵.....	39
5-1	複製過程之分析.....	39
5-2	The Attractors of IFS by Line-Based Duplication on Complex Plane.....	44
5-2-1	The IFS Attractor of $\{C; \omega_1(z), \omega_2(z)\}$	45
5-2-2	The IFS Attractor of Transformations by Line-Based Duplication.....	46
5-3	維度(Dimension)之探討.....	49
5-3-1	Hausdorff measure.....	49

	5-3-2 Hausdorff Dimension.....	50
第六章	對稱構圖.....	52
6-1	以定線複製繪製對稱圖之方法.....	52
6-2	對稱圖的解構分析.....	53
第七章	多元產生器.....	59
7-1	理論.....	59
7-2	仿自然.....	60
7-3	鋪磚與密鋪平面.....	63
7-4	圖案設計.....	67
7-5	其他.....	68
第八章	結論.....	70
參考文獻	72
附錄一	五種網狀系統.....	75
附錄二	十七種圖樣型態.....	77
附錄三	古典碎形之產生器分析.....	84



表 目 錄

表 2-1	Turtle graphic 中烏龜所接收的指令.....	13
表 2-2	簡短記號.....	15
表 2-3	定線複製法與 L-systems、MRCM 之比較表.....	22
表 6-1	p4, p4m, p4g 之解構表.....	54
表 6-2	基準線的選擇與對應之結構.....	54
表 6-3	起始結構與巨型結構之對應.....	55
表 6-4	p3, p31m, p3m1, p6, p6m 之解構表.....	56
表 6-5	基準線的選擇與對應之結構(1).....	56
表 6-6	基準線的選擇與對應之結構(2).....	57
表 6-7	起始結構與巨型結構之對應.....	57
表 8-1	多重產生器之運用.....	71



圖 目 錄

圖 1-1	繪製齊一圖案.....	1
圖 1-2	密接.....	1
圖 1-3	縮放.....	2
圖 1-4	疊代.....	2
圖 1-5	鏡射.....	3
圖 1-6	相似變換.....	4
圖 1-7	(a)Koch curve (b)Sierpinski gasket.....	4
圖 1-8	Two-branch tree.....	5
圖 1-9	(a)以 x 軸方向變形 (b)以 y 軸方向變形 (c)兩軸同時變形.....	7
圖 1-10	仿射變換.....	7
圖 1-11	對稱中的平移基底.....	8
圖 1-12	鏡射與滑動鏡射.....	9
圖 1-13	七種一維圖樣之分類流程圖.....	9
圖 1-14	來自 San Ildefonso pueblo 的七種一維圖樣之範例.....	10
圖 1-15	十七種二維圖樣之分類流程圖.....	11
圖 1-16	(a)Roman mosaic in Perge, Turkey (b) Pavement pattern from China.....	11
圖 2-1	L-systems Machine.....	12
圖 2-2	Anabaena 細胞分裂與 L-systems 表示法.....	13
圖 2-3	turtle interpretation : $F+Ff-F-Ff+F+$	14
圖 2-4	相同字串與三種角度會產生三種不同的圖形.....	14
圖 2-5	Koch curve.....	14
圖 2-6	簡短記號:L,R,S,Z.....	15
圖 2-7	Weedlike plant.....	16
圖 2-8	Multiple Reduction Copy Machine 及 Sierpinski gasket.....	16
圖 2-9	modified Sierpinski gasket.....	17
圖 2-10	以 MRCM 產生 Koch curve.....	17
圖 2-11	Generator Iteration 產生 Koch Snowflake.....	18
圖 2-12	Sierpinski gasket.....	19
圖 2-13	IFS Iteration 產生 Sierpinski gasket.....	19
圖 2-14	The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1; \omega_2(z) = \lambda z - 1$...	20
圖 2-15	定線複製法之結構.....	21
圖 2-16	定線複製法中的比例關係.....	21
圖 3-1	(a)先鏡射再平移 (b)先平移再鏡射.....	23
圖 3-2	(a)原始結構 (b)想達到的效果.....	24
圖 3-3	(a)起始結構 (b)產生器.....	24
圖 3-4	The flower Snark J_n , for $n=1,2,3,4$	24
圖 3-5	起始結構的類型.....	25
圖 3-6	多邊形起始結構之範例(1).....	25
圖 3-7	多邊形起始結構之範例(2).....	26
圖 3-8	放射線起始結構之範例(1).....	26
圖 3-9	放射線起始結構之範例(2).....	27
圖 3-10	格線起始結構之範例(1).....	27

圖 3-11	格線起始結構之範例(2).....	28
圖 3-12	更複雜起始結構之範例.....	28
圖 4-1	珍珠串的產生器.....	29
圖 4-2	珍珠串的疊代過程.....	29
圖 4-3	畢達哥拉樹的產生器.....	30
圖 4-4	畢達哥拉樹的成長過程.....	30
圖 4-5	收縮映射的產生器.....	31
圖 4-6	Contraction Mappings.....	31
圖 4-7	鸚鵡螺.....	31
圖 4-8	Koch Antisnowflake.....	32
圖 4-9	切割線段並比對找出產生器中的型.....	32
圖 4-10	Ice Fractal.....	32
圖 4-11	Peano-Gosper Curve.....	32
圖 4-12	Sierpinski Arrowhead Curve.....	33
圖 4-13	Sierpinski Arrowhead Curve 的產生過程.....	33
圖 4-14	Hilbert Curve.....	33
圖 4-15	S-Shaped Peano Curve.....	34
圖 4-16	基準線與型等高的樹.....	34
圖 4-17	左密右疏的樹.....	35
圖 4-18	不同的產生器所對應的樹.....	35
圖 4-19	草之成長過程.....	36
圖 4-20	水草.....	36
圖 4-21	同型不同基準線的五株水草.....	36
圖 4-22	以定線複製模擬山或雲的外觀.....	37
圖 4-23	型之改變對結果的影響(1).....	37
圖 4-24	型之改變對結果的影響(2).....	38
圖 4-25	鏡射性質所產生之老樹.....	38
圖 5-1	畢達哥拉樹.....	40
圖 5-2	定線複製法之分析.....	41
圖 5-3	連通性質.....	41
圖 5-4	$\theta = 60^\circ$	42
圖 5-5	$\theta = 45^\circ$	43
圖 5-6	螺旋環狀.....	43
圖 5-7	中垂線交點即中心點.....	44
圖 5-8	$z_{n+1} = z_n + c$ 之 Mandelbrot set.....	44
圖 5-9	Mandelbrot set : $z^2 - c$ 與對應的 Julia sets.....	45
圖 5-10	The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1; \omega_2(z) = \lambda z - 1$	45
圖 5-11	The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1; \omega_2(z) = \lambda^* z - 1$	46
圖 5-12	$\omega_1(z) = \lambda z ; \omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之產生器.....	46
圖 5-13	$\omega_1(z) = \lambda z ; \omega_2(z) = \lambda z + 1$ 的前 10 次疊代過程.....	47
圖 5-14	$\omega_1(z) = \lambda^* z ; \omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之產生器.....	47
圖 5-15	$\omega_1(z) = \lambda^* z ; \omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之吸子.....	47

圖 5-16	改變兩線段與基準線的夾角產生之結果.....	48
圖 5-17	以定線複製法所產生 $\omega_1(z) = \lambda_1 z + c_1$; $\omega_2(z) = \lambda_2 z + c_2$ 之吸子.....	48
圖 5-18	Variations of von Koch Curve.....	51
圖 6-1	演算法.....	52
圖 6-2	(a)為 p6m 的無鏡射之最小元件.....	53
圖 6-3	將 p6m 簡化為 p6.....	53
圖 6-4	基本結構圖與元件、解構圖之間的關係式.....	54
圖 6-5	以 a 為起始結構之範例.....	55
圖 6-6	以 a 為起始結構之範例.....	58
圖 6-7	以 c 為起始結構之範例.....	58
圖 7-1	多元產生器之交互運用.....	60
圖 7-2	單一產生器仿自然之範例.....	60
圖 7-3	多元產生器的順序會影響結果.....	61
圖 7-4	三種產生器之運用與編碼.....	62
圖 7-5	多元產生器之範例.....	62
圖 7-6	經剪枝、重組後之梅與竹.....	63
圖 7-7	Tiling 之範例.....	63
圖 7-8	以定線複製法繪製鋪磚圖案.....	64
圖 7-9	regular tessellation 只有六角陣、三角陣與方陣三種.....	64
圖 7-10	types of vertices.....	64
圖 7-11	Ⓐ-Ⓒ semi-regular tessellation Ⓓ demi-regular tessellation.....	64
圖 7-12	(a) edge-to-edge (b) non- edge-to-edge.....	65
圖 7-13	多邊形的 edge-to-edge.....	65
圖 7-14	正多邊形的 edge-to-edge.....	66
圖 7-15	non-edge-to-edge 的主要步驟：等分(divide).....	66
圖 7-16	partial edge-to-edge 密鋪平面.....	67
圖 7-17	圖案設計之範例(1).....	67
圖 7-18	圖案設計之範例(2).....	67
圖 7-19	圖案設計之疊代概念.....	68
圖 7-20	圖案設計之疊代範例.....	68
圖 7-21	其他範例(1).....	68
圖 7-22	其他範例(2).....	69
圖 7-23	其他範例(3).....	69
圖 7-24	其他範例(4).....	69

第一章 簡介

1-1 動機與目的

透過操作滑鼠或使用工具來輔助構圖，我們需要不斷地將圖案平移、旋轉、縮放及鏡射，定線複製法(Line-Based Duplication, LBD) [26]提供一個新的繪圖環境，突破人機繪圖介面的極限，簡單的操作讓我們輕易地完成定點平移、定角旋轉、定長縮放及定線鏡射等工作，達到「模糊操作，準確定位」的目標。它可完成許多的工作，比如：

1. 繪製齊一圖案

當使用者欲複製規格相同的物件至某特定位置時，容易因為手工移動而造成定位不夠準確，為了避免手工操作產生的誤差，以線段控制複本產生的精確位置。

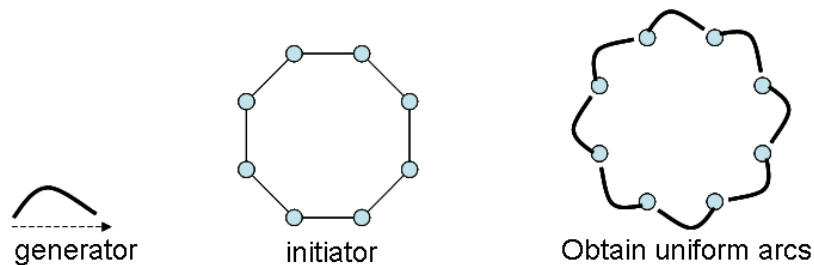


圖 1-1 繪製齊一圖案

2. 密接圖案

在使用者以肉眼的觀察與手工的微調之下，物件之間的貼齊常常出現些微的差距，為使能夠緊密貼齊，賦予物件(包括端點或邊線等)吸附功能可使貼齊效果更好；除此，MathPS 中連結物件(Connection)的功能，更加強了物件與物件的端點、中心點等之間的連結功能。

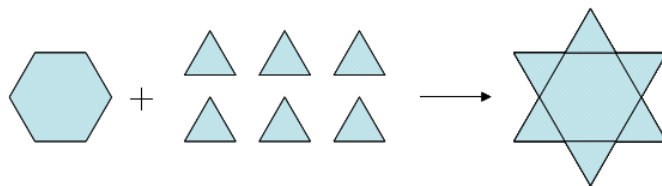


圖 1-2 密接

3. 縮放圖案

除了複製規格相同的物件之外，系統可依照基準線(base-line)與疊代線(recurrent line)的比例，將型(pattern)放大或縮小的複本產生於疊代線上，而達到放大或縮小的效果。

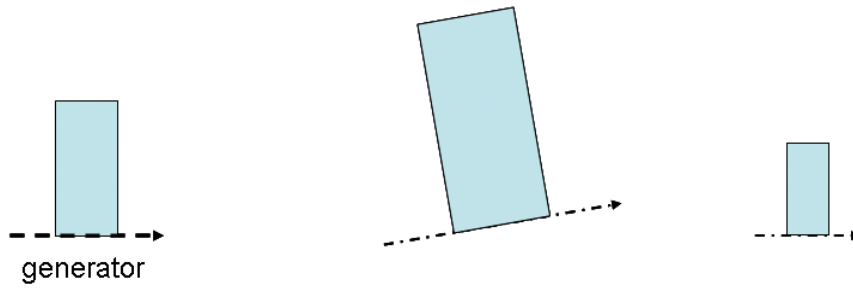


圖 1-3 縮放

4. 繪製疊代圖案

在探討 Fractal 中的疊代函數系統(Iterated Function System)或自我相似(self-similar)時，我們需要觀察每次疊代之間的變化，因此在產生器(generator)中加入了疊代線(recurrent line)，使其疊代關係及生長狀態清楚地呈現。

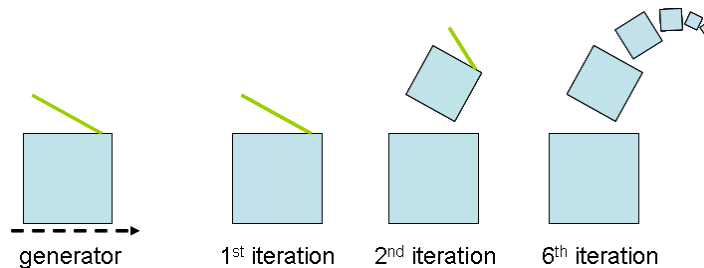


圖 1-4 疊代

本論文的動機與目的在研究如何運用定線複製法，以手動的方式完成一些需要特殊軟體才能完成的繪圖設計，比如疊代設計(Recurrent Substitution)、碎形(Fractals)、吸子(Attractors)、幾何對稱繪圖(Symmetrical Patterns)、仿自然(Artificial Nature)、鋪磚(Tiling)、密鋪平面(Tessellation)以及視覺設計(Visual Design)，同時探討定線複製法的一些數學特性。

1-2 變換(Transformations)

1-2-1 相似變換(Similar Transformations)

將物件平移到新的位置、旋轉某個角度、或放大縮小，稱為變換(transformation)；如果將這些動作作用於物件上所產生的新物件，在整體看來仍與原物件相似(similar)，則此種變換稱為「相似變換」(similar transformation)。

相似變換由等向縮放(isotropic scaling)、旋轉(rotation)、平移(translation)、鏡射(reflection)所構成，具體地來說，如果對平面上一點 $P_0 = (x_0, y_0)$ 作等向縮放、旋轉、平移、鏡射這些動作，所得的結果以矩陣變換(matrix transformation)的形式表示如下：

1. 等向縮放(I)

若對 P_0 作比例為 $s(s > 0)$ 的等向縮放後，產生新的點 $P_1 = (x_1, y_1)$ ，則兩點座

標之間的關係式為：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_0 \\ sy_0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

2. 旋轉(R)

若對 P_1 作逆時針角度為 θ (相對於座標原點) 的旋轉後，產生新的點 $P_2 = (x_2, y_2)$ ，則兩點座標之間的關係式為

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot y_1 \\ \sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot y_1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

3. 平移(T)

若對 P_2 作平移 (T_x, T_y) 的動作後，產生新的點 $P_3 = (x_3, y_3)$ ，則兩點座標之間的

關係式為：

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + T_x \\ y_2 + T_y \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

4. 鏡射(M)

若將 P_3 對直線 $ax + by + c = 0$ 作鏡射的動作後，產生新的點 $P_4 = (x_4, y_4)$ ，則兩點

座標之間的關係式為：

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - 2 \frac{a(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \\ y_3 - 2 \frac{b(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

但較常使用的是對 x 軸或 y 軸做鏡射，則

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{對 } x \text{ 軸}) \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{對 } y \text{ 軸}) \quad (1.5)$$

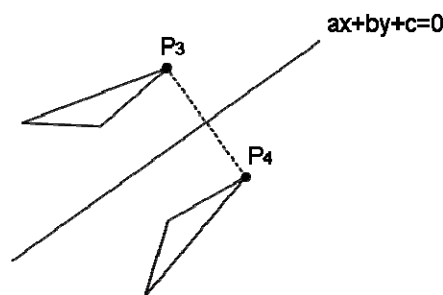


圖 1-5 鏡射

綜合以上，可表示為 $P_4 = M(P_3) = M(T(P_2)) = M(T(R(P_1))) = M(T(R(I(P_0))))$ 或 $W(P_0) = M(T(R(I(P_0))))$ 。

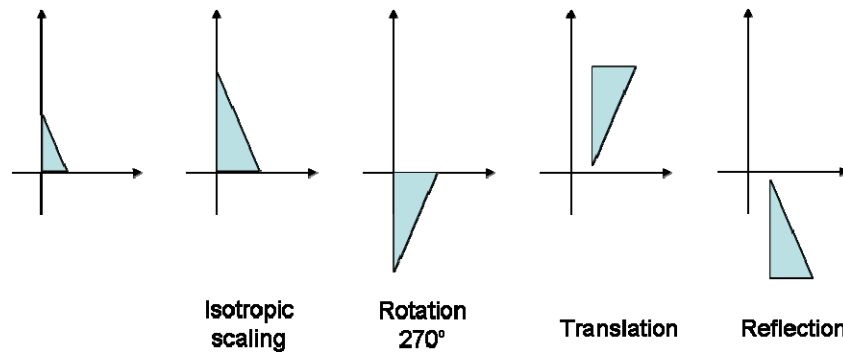


圖 1-6 相似變換

自我相似(self-similar)

一個物體或圖案具「自我相似」(self-similar)的特性就是其局部結構與整體結構完全(exactly)相似或幾乎(approximately)相似，也就是在相似變換的作用下仍保持不變。自我相似是碎形(fractals)的特性之一，在碎形圖案中便可觀察出這個特性，如圖 1-7 的 Koch curve 和 Sierpinski gasket，任意取其局部結構(圈選部分)皆與整體結構完全相似，則稱為「嚴格的自我相似」(strictly self-similar)；圖 1-8 的 two-branch tree 中，其樹葉部分(圖左)與整體結構完全相似，但樹幹部分(圖右)則不相似，因所選取的局部不包含末端。雖然在碎形幾何(Fractals Geometry)中常探討到「嚴格的自我相似」這個特性，但在日常生活中我們所接觸到的大自然碎形，譬如：花、草、樹木、海岸線等，卻常常只符合較寬鬆的自我相似條件。

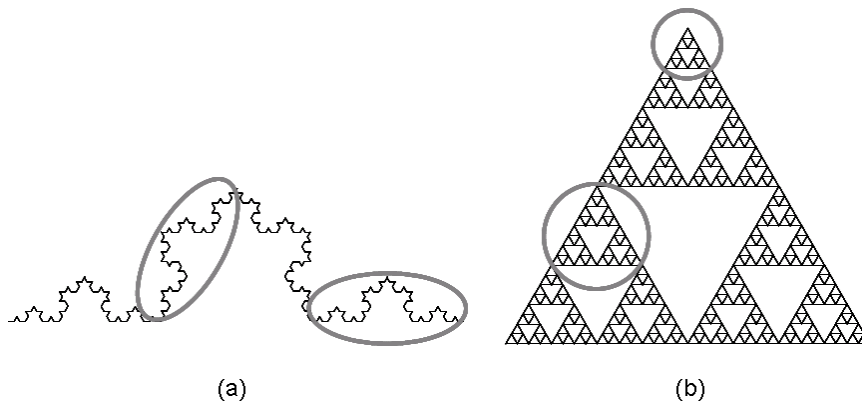


圖 1-7 (a) Koch curve (b) Sierpinski gasket

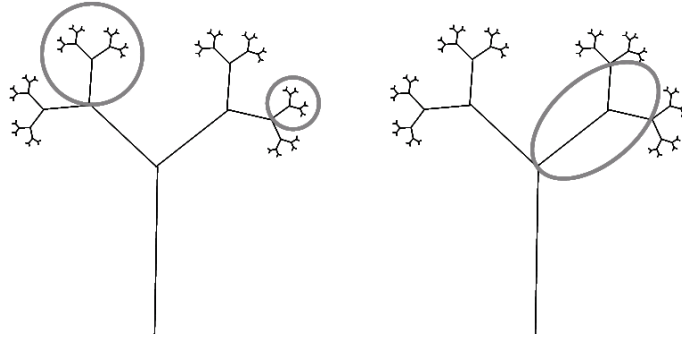


圖 1-8 two-branch tree

1-2-2 仿射變換(Affine Transformations)

物件在經過變換的過程中，兩座標軸的縮放比例不同、旋轉角度不同時，相似這個條件便會遭到破壞，則此種變換稱為「仿射變換」(affine transformation)。

仿射變換由非等向縮放(anisotropic scaling)、旋轉、平移、鏡射及滑動鏡射(glide-reflection)、變形(shearing) 所構成，具體地來說，如果對平面上一點 $P_0 = (x_0, y_0)$ 作非等向縮放、旋轉、平移、鏡射及滑動鏡射、變形這些動作，所得的結果以矩陣變換的形式表示如下：

1. 非等向縮放(A)

若對 P_0 作兩軸縮放比例分別為 s_x, s_y ($s_x, s_y > 0$) 的非等向縮放後，產生新的點

$$P_1 = (x_1, y_1), \text{ 則兩點座標之間的關係式為: } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x_0 \\ s_y y_0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

2. 旋轉(R)

若對 P_1 作兩軸旋轉角度為 θ_x, θ_y (相對於座標原點逆時針為正向)的旋轉後，產生

新的點 $P_2 = (x_2, y_2)$ ，則兩點座標之間的關係式為：

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ \sin\theta_y & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x \cdot x_1 - \sin\theta_y \cdot y_1 \\ \sin\theta_x \cdot x_1 + \cos\theta_y \cdot y_1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

3. 平移(T)

若對 P_2 作平移(T_x, T_y)的動作後，產生新的點 $P_3 = (x_3, y_3)$ ，則兩點座標之間的

$$\text{關係式為: } \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + T_x \\ y_2 + T_y \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

4. 鏡射(M) / 滑動鏡射(G)

(1) 鏡射(M)

若將 P_3 對直線 $ax + by + c = 0$ 作鏡射的動作後，產生新的點 $P_4 = (x_4, y_4)$ ，則

$$\text{兩點座標之間的關係式為：} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - 2 \frac{a(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \\ y_3 - 2 \frac{b(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

但較常使用的是對 x 軸或 y 軸做鏡射，則

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{對 } x \text{ 軸}) \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{對 } y \text{ 軸}) \quad (1.10)$$

(2) 滑動鏡射(G)

若將 P_3 對直線 $ax + by + c = 0$ 作滑動鏡射(包括鏡射及平移 (G_x, G_y))的動作

後，產生新的點 $P_4 = (x_4, y_4)$ ，則兩點座標之間的關係式為：

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - 2 \frac{a(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \\ y_3 - 2 \frac{b(ax_3 + by_3 + c)}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

但較常使用的是對 x 軸或 y 軸做滑動鏡射，則

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \quad (\text{對 } x \text{ 軸}) \quad (1.12)$$

$$\text{或} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \quad (\text{對 } y \text{ 軸}) \quad (1.13)$$

5. 變形(S)

若 $P_4 = (x_4, y_4)$ 為物件上一點，對物件作變形的動作後，產生新的點

$P_5 = (x_5, y_5)$ ，則兩點座標之間的關係式為[4]：

(1) 以 x 軸方向作變形

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 + \alpha \cdot y_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

(2) 以 y 軸方向作變形

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ \beta \cdot x_4 + y_4 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

(3) 兩軸同時變形

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cos \theta_x & -s_y \sin \theta_y \\ s_x \sin \theta_x & s_y \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cos \theta_x \cdot x_4 - s_y \sin \theta_y \cdot y_4 \\ s_x \sin \theta_x \cdot x_4 + s_y \cos \theta_y \cdot y_4 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

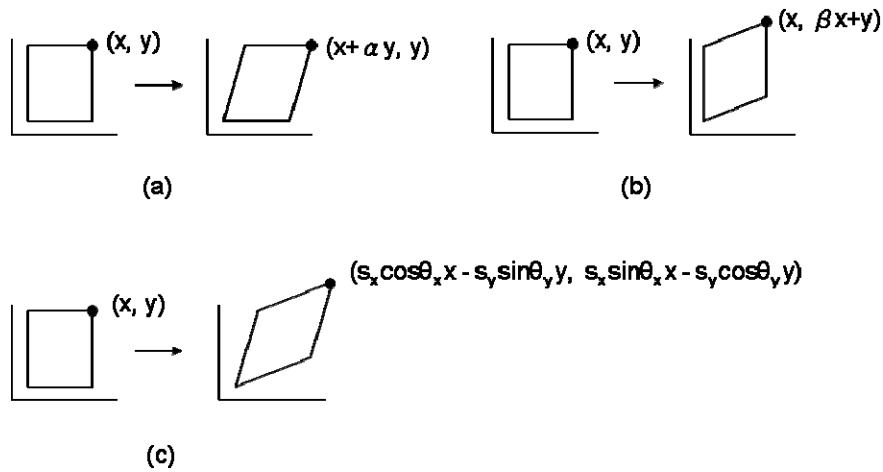


圖 1-9 (a) 以 x 軸方向作變形 (b) 以 y 軸方向作變形 (c) 兩軸同時變形

綜合以上，可表示為

$$P_5 = S(P_4) = S(M(P_3)) = S(M(T(P_2))) = S(M(T(R(P_1)))) = S(M(T(R(A(P_0)))))) \text{ 或}$$

$$P_5 = S(P_4) = S(G(P_3)) = S(G(T(P_2))) = S(G(T(R(P_1)))) = S(G(T(R(A(P_0)))))) \text{ ,}$$

$$W(P_0) = S(M(T(R(A(P_0)))))) \text{ 或 } W(P_0) = S(G(T(R(A(P_0)))))) \text{ .}$$

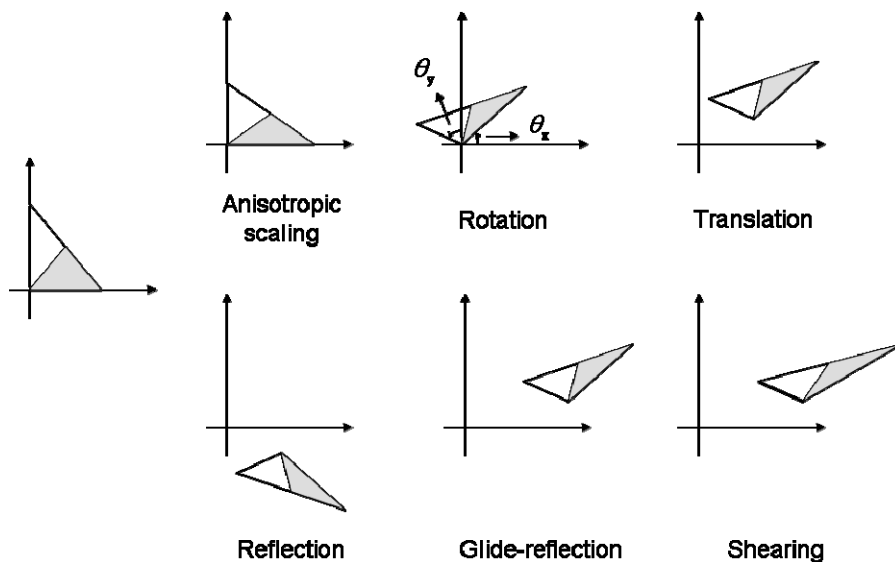


圖 1-10 仿射變換

自我仿射(self-affine)

一個物體或圖案具「自我仿射」(self- affine)的特性就是其局部結構與整體結構在仿射變換的作用下仍保持不變。

1-2-3 對稱(Symmetry)

對稱的變換包含「等量」與「非等量」兩種類型(Charles Wallschlaeger & Cynthia Busic-Snyder, 1996)。等量變換，是指若一物體在空間中所佔有的位置，在一個或多個等距變換(isometry transformation) [44]之後仍保持不變，則此物體是對稱的；也就是說等量變換維持其原單位形與複製圖形間的點對稱關係。等量變換包含平移、旋轉、鏡射、滑動鏡射四種基本操作形式。而非等量變換，是指原圖形與其複本間不保有點對稱的關係，保持部份外形的特質使得原圖與其複本間仍具有相似性與比較性。非等量變換的操作形式是在等距變換的基礎上，再加上非等向縮放、透視、仿射、變形等變換的應用[48]。

1. 對稱變換(Symmetry Transformation)

(1) 平移對稱

平移對稱是重複圖樣最基本的對稱，也是最基本的特性，所以藉由將圖樣平移無數個方向，即可構成重複圖樣。但在每一個方向，都有一個最小平移，其中兩個最小平移 u 和 v 形成其他平移的基底(basis)，也就是說，其他無數個平移皆可經由連續使用 u 和 v 來達成[44]。

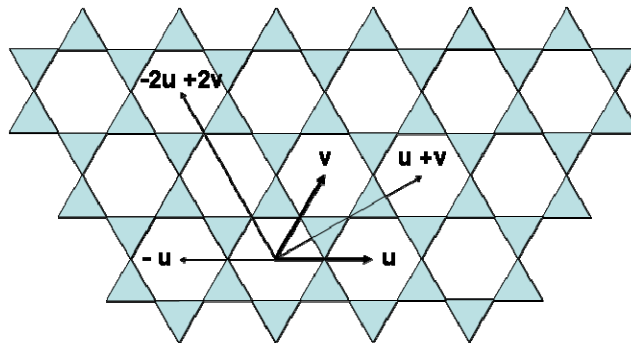


圖 1-11 對稱中的平移基底

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

(2) 旋轉對稱

旋轉對稱是指將物件根據旋轉中心旋轉某個角度後與另一個物件疊合。一個物件的旋轉中心最可能出現於端點或中心點(包括物件的中心或邊的中點)；而旋轉角度在無線重複圖樣上最常出現的是 180° (二重旋轉對稱)、 120° (三重旋轉對稱)、 90° (四重旋轉對稱)及 60° (六重旋轉對稱)。

(3) 鏡射對稱

鏡射對稱是將物件相對於鏡射軸而產生外觀相同的新物件。鏡射軸的選擇通常是物件的邊線或中心線。

(4) 滑動鏡射對稱

滑動鏡射對稱是將物件相對於鏡射軸產生外觀相同的新物件後，再加上平移的動作。

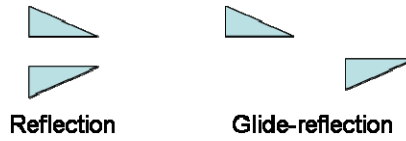


圖 1-12 鏡射與滑動鏡射

2. 七種一維圖樣

一維圖樣擁有四個特性：(1)只有垂直方向平移或水平方向平移；(2)只有垂直方向鏡射或水平方向鏡射；(3)只有垂直方向滑動鏡射或水平方向滑動鏡射；(4)只有 180° 旋轉(即二重旋轉)或無旋轉。將以上四種特性組合之後，應該會產生十六種可能的一維圖樣，但其中有九種組合是不可能發生的[14]，譬如由垂直方向鏡射、水平方向滑動鏡射但無旋轉所產生的組合，因為垂直方向鏡射與水平方向滑動鏡射等於產生了 180° 旋轉，所以這種組合的一維圖樣並不存在。剩餘的七種是的確可能發生的組合，見圖 1-13 的流程表。

一維圖樣的表示法採用結晶學的標記法(last edition of the International Tables for Crystallography, 1995) [17,18]，由 S1-S2-S3 三個連續符號所組成，各字母與數字代表的意義如下：

(1) S1 = {p}，表示有週期性(periodic)的排列。

(2) S2 = {1, 2, m, g}，「1」表示平移，「2」表示二重旋轉，「m」表示鏡射，「g」表示滑動鏡射。

(3) S3 = {m, g}，表示另一方向的鏡射或滑動鏡射。

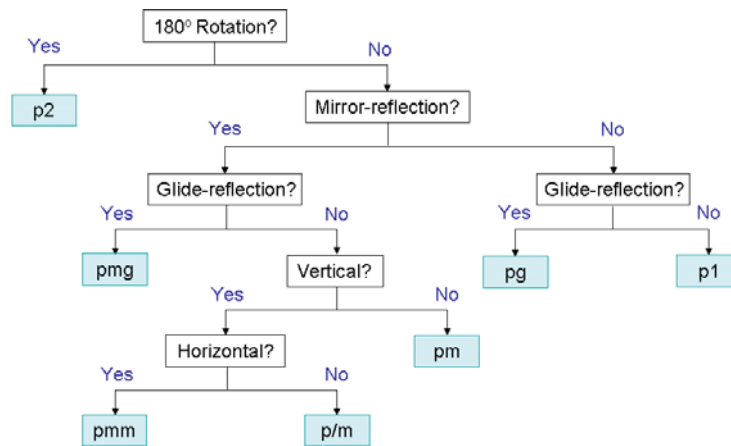


圖 1-13 七種一維圖樣之分類流程圖

資料來源：Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns

此七種一維(帶狀)圖樣廣泛地出現在許多國家，如圖 1-14 為美國新墨西哥州 San Ildefonso 的普魏布勒印地安人村莊(pueblo)，其陶器上也有一維圖樣的裝飾；或者在美國西南部的 Anasazi 陶器上，西非迦納(Ghana)的煙管(smoking pipes)上，都曾出現這種結構的圖案[14]。

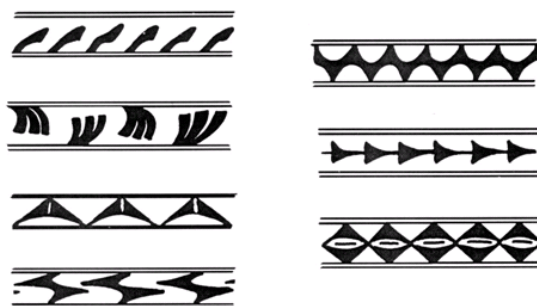


圖 1-14 來自 San Ildefonso pueblo 的七種一維圖樣之範例
資料來源：<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowel/>

3. 十七種二維圖樣

二維圖樣的分類，由於平移、旋轉、鏡射與滑動鏡射都比一維圖樣有更多可能的方向與角度，而產生無限種看似複雜的組合，但很幸運地，所謂的「結晶學限制」(crystallographic restriction)說明了只可能有十七種二維圖樣。這些限制，包括旋轉角度只可能有 180° 、 120° 、 90° 、 60° 四種，即二重旋轉、三重旋轉、四重旋轉及六重旋轉；旋轉的角度受到限制，同時影響了鏡射軸之間的夾角，使得最後僅剩十七種可能的組合(見附錄二)，如圖 1-15 流程表所示[1,39]。

其表示法為結晶學的標記法[17,18]，由 S1-S2-S3-S4 四個連續符號所組成，各字母與數字代表的意義如下：

- (1) $S1 = \{c, p\}$ ，單位格子為中心矩形時符號為「c」，其他為「p」。
- (2) $S2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，表示最高階旋轉對稱，「1」表無旋轉對稱。
- (3) $S3 = \{m, g, 1\}$ ，「m」表鏡射，「g」表滑動鏡射，「1」表無鏡射也無滑動鏡射。
- (4) $S4 = \{m, g, 1\}$ ，同 S3，表示另一方向的鏡射或滑動鏡射。

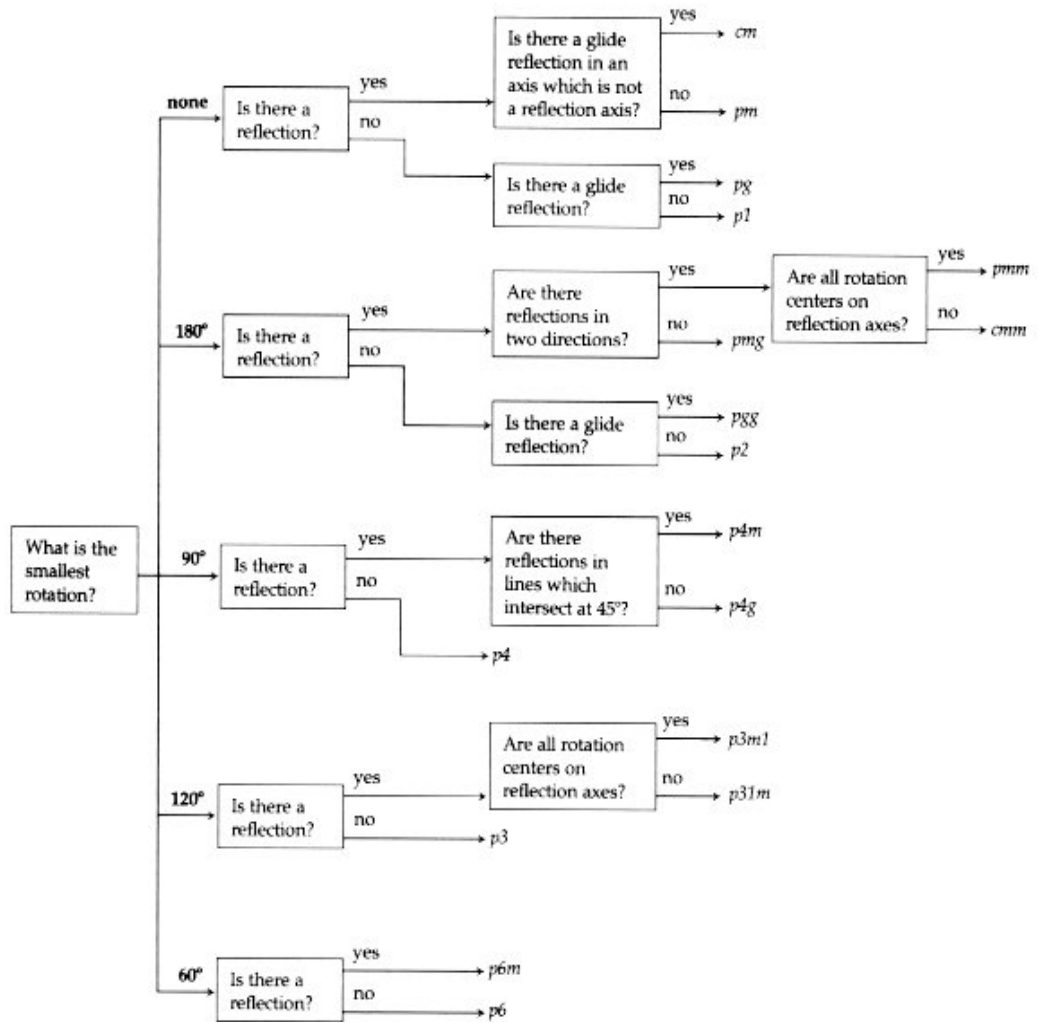


圖 1-15 十七種二維圖樣之分類流程圖

資料來源：<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowe1/>

此十七種二維圖樣除了大量地出現在伊斯蘭的圖樣藝術之外，如圖 1-16(a) 為土耳其的地面上以馬賽克圖樣所鑲嵌的路徑，圖 1-16(b)則是來自中國的圖樣。



圖 1-16 (a) Roman mosaic in Perge, Turkey (b) Pavement pattern from China

資料來源：<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowe1/>

第二章 方法論

本章將介紹三種碎形的產生方法：(1) Lindenmayer systems (L-systems)；(2) Multiple Reduction Copy Machine (MRCM)；(3) Iterated Function System (IFS)。L-systems 的特點在於將線段之間的疊代過程以語法的方式來敘述，MRCM 是重複輸入圖形以多鏡頭的影印機模擬產生的過程，而 IFS 則是經過一系列的變換不斷地疊代產生碎形。除了這些碎形產生系統之外，本章最後介紹我們所發明的「定線複製法」，以幾何圖案所構成的物件群闡述碎形產生的規則，重複疊代後產生碎形。

2-1 Lindenmayer systems (L-systems)

1968 年生物學家 Aristid Lindenmayer 為了描寫多細胞生物的生長及植物細胞之間的鄰近關係，創造出一套描述植物生長的系統「Lindenmayer Systems」，簡稱為 L-systems [23]。

2-1-1 L-systems Machine

L-systems 是一種正規語法(formal language)[19,20]，主要的概念為「複寫」(rewriting)或「複製」(reproduction)，根據訂定的複製規則 ((re)production rules) 對輸入字串(input string)作核對的動作，若符合則按照規則取代，並得到新的字串輸出 (output string)，如圖 2-1 的 L-systems machine 流程，如此重覆迴授(feedback)下去，隨著循環次數的增加，字串的長度會跟著增長，也逐漸產生越來越複雜的結構[31,33]。

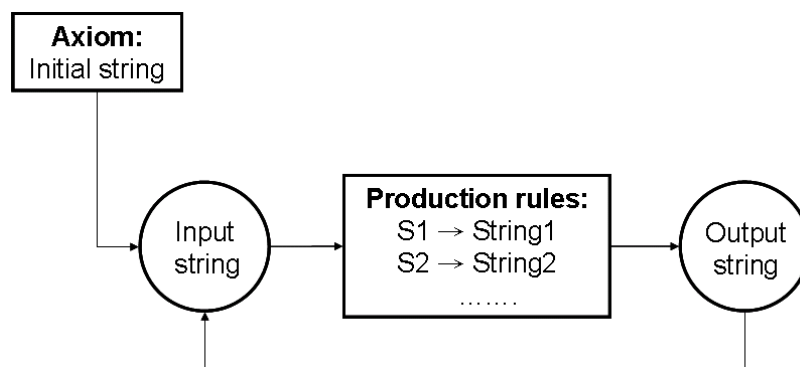


圖 2-1 L-systems machine

資料來源：Chaos and Fractals

L-systems 通常以一個集合 $G = \{V, S, \omega, P\}$ 表示，其中 $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 為一個由字母系統(alphabet)所構成的集合； S 為保持不變(fixed)的集合； ω 為初始狀態(start, axiom, or initiator)，由 V 中元素構成的字串； P 為 production rule 所構成的集合，production rule

是 L-systems 中的取代規則，而每個 production rule 皆由 predecessor 和 successor 兩個字串組成，當字串與 predecessor 相同時，則以 successor 取代此字串。圖 2-2 Anabaena 的例子中，每個細胞會分裂成兩個子細胞， \bar{A} 代表較小的左子細胞(left daughter cell) (在圖右以箭頭向左的方塊表示)， \bar{A} 代表較小的右子細胞(在圖右以箭頭向右的方塊表示)， \bar{B} 和 \bar{B} 為較大的左子細胞和右子細胞(在圖右以較長方塊與左右箭頭表示)，所以可得到 $V = \{\bar{A}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{B}\}$ ， $S = \{\phi\}$ ， $\omega = \{\bar{A}\}$ ， $P = \{\bar{A} \rightarrow \bar{A}\bar{B}, \bar{A} \rightarrow \bar{B}\bar{A}, \bar{B} \rightarrow \bar{A}\bar{B}, \bar{B} \rightarrow \bar{B}\bar{A}\}$ 。當起始條件為 \bar{A} (圖 2-2(a))，依照複製規則第一階段以 $\bar{B}\bar{A}$ 取代 \bar{A} 得到 $\bar{B}\bar{A}$ (圖 2-2(b))，第二階段以 $\bar{A}\bar{B}$ 取代 \bar{B} ， $\bar{B}\bar{A}$ 取代 \bar{A} 得到 $\bar{A}\bar{B}\bar{B}\bar{A}$ (圖 2-2(c))，如此類推可得知 Anabaena 的細胞分裂狀態。

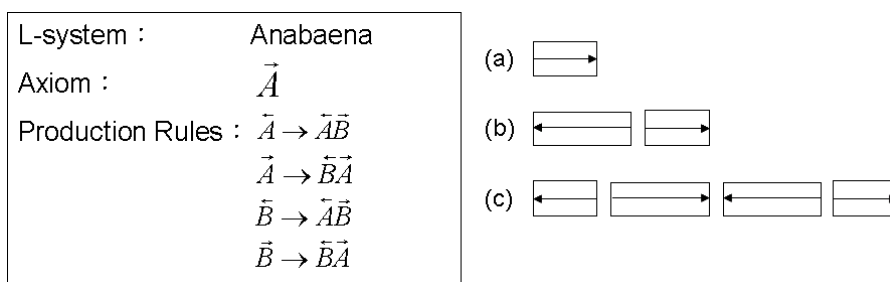


圖 2-2 Anabaena 細胞分裂與 L-systems 表示法

資料來源：Chaos and Fractals

2-1-2 Turtle Graphic



L-systems 對於字串的生成(string generation)，已能相當有系統地表示，但對於平面上的任何圖形，僅僅只有字串並無法充分說明圖形的獨特性，必須考慮如何簡潔地詮釋方向、旋轉角度、線段長度等因素對圖形的影響，因此我們需要更詳盡的表示法來幫助敘述平面上的圖形，特別是針對古典碎形(classical fractals)。

以 Seymour Papert's concept of turtle graphics 為依據，我們想像有一隻烏龜在紙上爬行，牠朝著某個方向出發前進，根據接收到的某些指令而移動，拖曳著尾巴在紙上所留下的痕跡，即平面上的圖形。烏龜所接收到的指令包括前進的距離和轉彎的角度，表 2-1 表示烏龜每次前進一步的固定長度皆為 l ，每次轉彎的固定角度皆為 δ ，以及轉彎的方向左為 +、右為 -；圖 2-3 中烏龜根據這些指令，位於起點準備朝右方出發，前進七步後到達終點，停止時頭朝上方，這條路線可以用 $F+Ff-F-Ff+F+$ 十二個符號來表示，其中 $\delta = 90^\circ$ 。

表 2-1 turtle graphic 中烏龜所接收的指令

F	往前走固定長度 l 的距離並留下軌跡(實線或虛線或箭頭)
f	往前走固定長度 l 的距離但不留軌跡
+	向左轉(逆時鐘方向)固定角度 δ
-	向右轉(順時鐘方向)固定角度 δ

資料來源：Chaos and Fractals

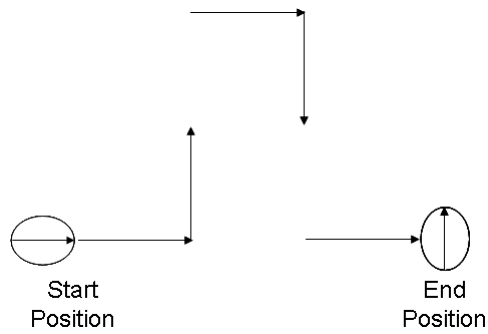


圖 2-3 turtle interpretation : F+Ff-F-Ff+F+

資料來源：Chaos and Fractals

前進的距離長度對於圖形的影響，僅是整體圖形的大小，但旋轉角度卻會產生完全迥異的圖形，如圖 2-4 中，相同的字串 F+F+F+-F-F 搭配三種旋轉角度(60°,90°,120°)會產生三種差異很大的圖形。

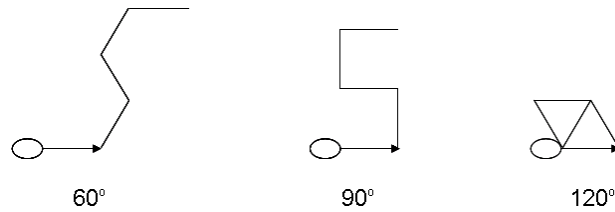


圖 2-4 相同字串與三種角度會產生三種不同的圖形

資料來源：Chaos and Fractals



2-1-3 Growing Classical Fractals with L-systems

有了 turtle graphic 在距離長度和旋轉角度兩方面的補強，我們就可使用 L-systems 來建構古典碎形，並且能夠以字串及+-符號完整地描述，如圖 2-5 的 Koch curve。

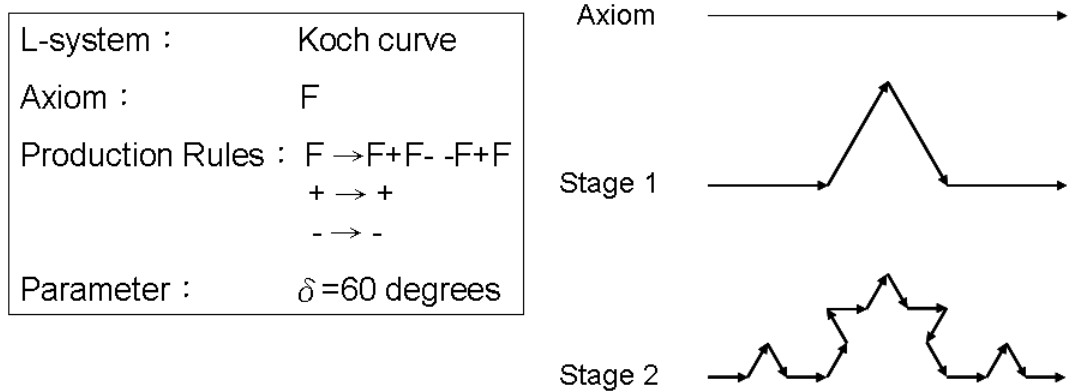


圖 2-5 以 L-systems 產生 Koch curve

資料來源：Chaos and Fractals

圖右的 Axiom 和前兩個 stage 可以字串生成的方式表達如下：

Axiom : F

Stage 1 : F+F- -F+F

Stage 2 : F+F- -F+F+ F+F- -F+F - - F+F- -F+F+ F+F- -F+F

繼續以 F+F- -F+F 取代 Stage 2 中的 F，便可推得接下來的生成狀況，其餘類推。我們也可以假設烏龜能接收複合式的指令，並完成連續性的動作，如圖 2-6 上面的四種連續動作，我們將 +F-F-F+ 記為 L，-F+F+F- 記為 R，FF+F+FF-F-FF 記為 S，FF-F-FF+F+FF 記為 Z，即為表 2-2 所匯整，這些記號能簡短我們的敘述，而不致過於冗長，如圖 2-6 中的圖形，若 $\delta = 90^\circ$ ，原本應表示為 F+F+-F-FF+F+F-F-FF+F+FF-F-FF，經簡化後則變成 FLRF-S。

表 2-2 簡短記號

Symbol	interpretation
L	+F-F-F+
R	-F+F+F-
S	FF+F+FF-F-FF
Z	FF-F-FF+F+FF

資料來源：Chaos and Fractals

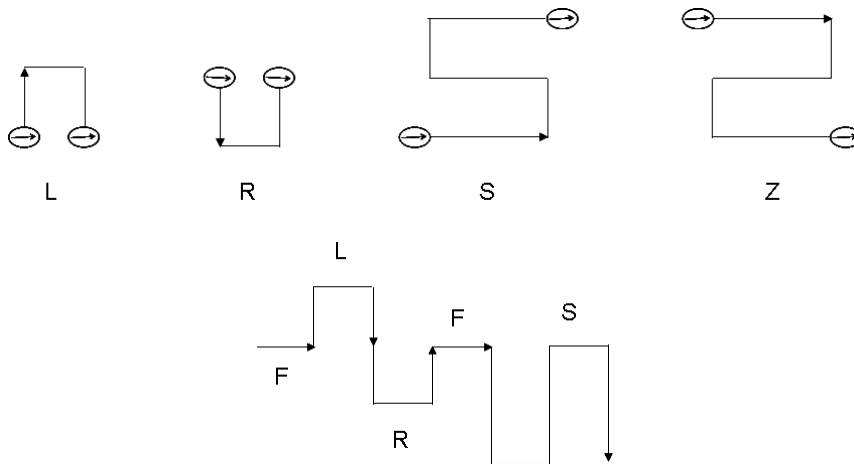


圖 2-6 簡短記號：L, R, S, Z

資料來源：Chaos and Fractals

當我們也將 turtle graphic 和 L-systems 應用在「樹」這個常見的大自然碎形時，會發現「樹枝」造成了描述上的困難，但加進“[”和“]”兩個左右括弧來表達後即解決這個困擾[31,36]；同樣地，我們想像一隻烏龜在爬行，當遇到樹枝的分歧點時，牠必須記住此時的位置與前進的方向，在牠爬完樹枝之後，必須回到分歧點的位置並依照原本的前進方向繼續移動，如圖 2-7 所示。

L-system :	Weedlike Plant
Axiom :	F
Production Rules :	F \rightarrow F[+F]F[-F]F + \rightarrow + - \rightarrow -
Parameter :	$\delta = 25.7$ degrees

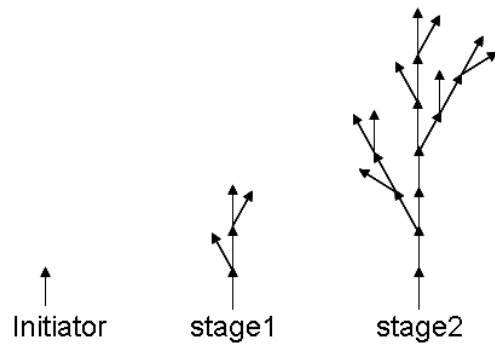


圖 2-7 Weedlike plant
資料來源：Chaos and Fractals

Axiom : F

Stage 1 : F[+F]F[-F]F

Stage 2 : F[+F]F[-F]F[+F[+F]F[-F]F]F[+F]F[-F]F[-F[+F]F[-F]F]F[+F]F[-F]F

2-2 Multiple Reduction Copy Machine (MRCM)

以多鏡頭的影印機重複影印的方式來模擬碎形的產生過程，稱為「Multiple Reduction Copy Machine」，簡稱 MRCM[31,32]。如圖 2-8 中，將一個圓以三個鏡頭的影印機影印，輸出三個圓的影像，再將此影像放入影印機繼續影印，會輸出九個圓的影像，以此類推，多次之後便可產生碎形圖案「Sierpinski gasket」。

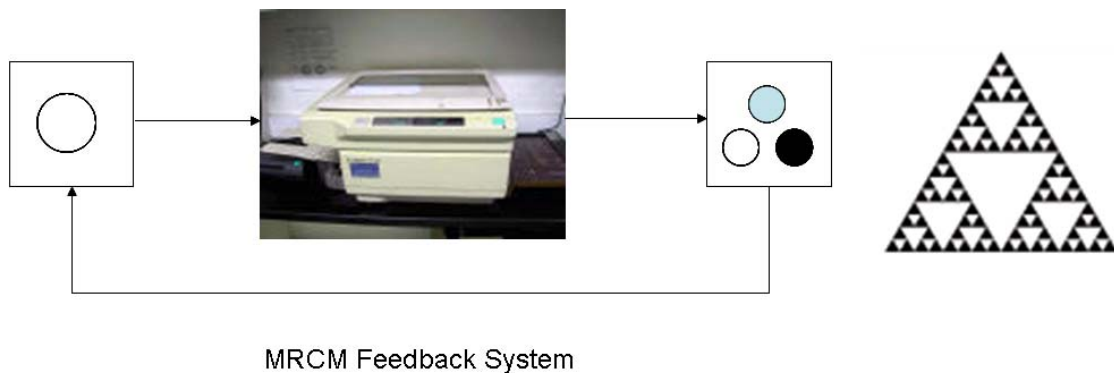


圖 2-8 Multiple Reduction Copy Machine 及 Sierpinski gasket

資料來源：Chaos and Fractals, <http://juang.bst.ntu.edu.tw/Lab520/images/520L67copier.JPG>

這樣以多鏡頭影印機將原本的影像，透過等向縮放、平移、旋轉等方式複製成為新影像，即所謂的「相似變換」，其中可控制的選項包括鏡頭的數目，縮放的比例，和擺放新影像的位置。例如圖 2-9，左邊的三个方形為多鏡頭影印機，分別代表三個不同的變換，當我們將 stage 0 的方形放入影印機，影印後得到 stage 1 的圖形，再將此圖形丟進多鏡頭影印機重複影印，繼續得到 stage 2 到 stage 4 的圖形，即為以 MRCM 方式所產

生之「modified Sierpinski gasket」。

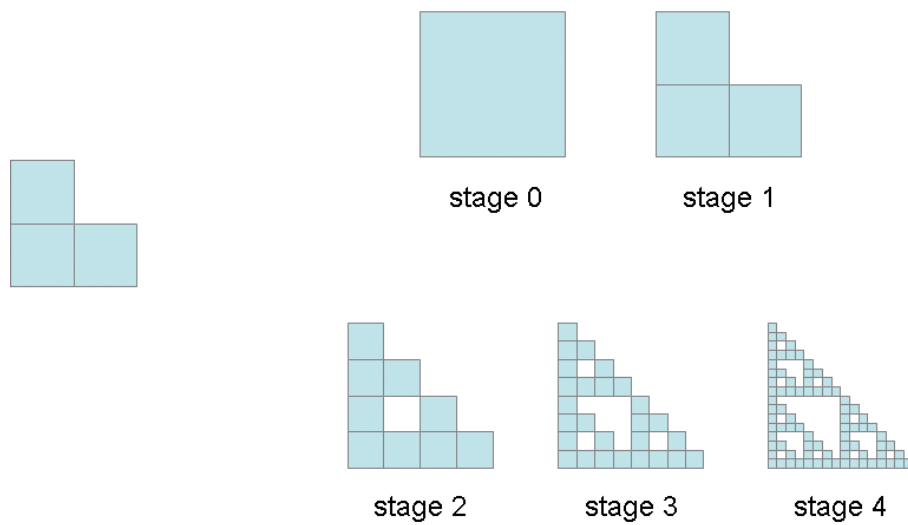


圖 2-9 modified Sierpinski gasket

資料來源：Chaos and Fractals

不同於 L-systems 以字串取代的產生方式，MRCM 是以「框」為元件來產生碎形，其產生 Koch curve 的過程如圖 2-10。

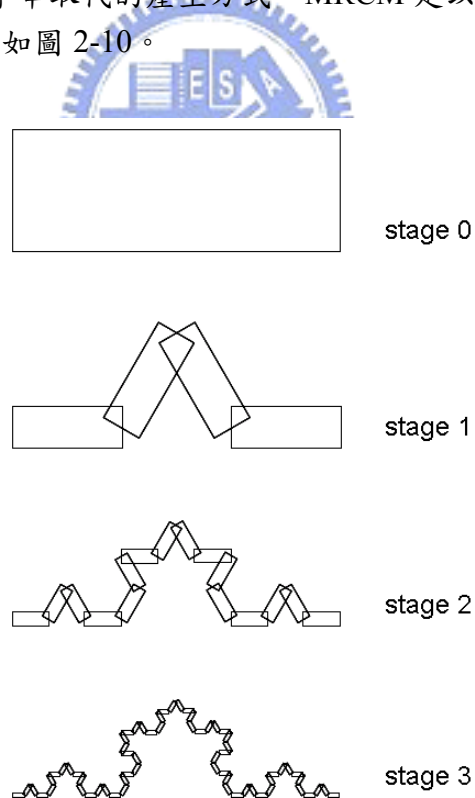


圖 2-10 以 MRCM 產生 Koch curve

資料來源：Chaos and Fractals

2-3 疊代函數系統(Iterated Function Systems, IFS)

疊代函數系統(Iterated Function Systems)為另一種產生碎形的方法，簡稱為 IFS。IFS 產生碎形的過程由簡單的構圖開始，經過一連串的遞迴(iteration)之後完成。

設 A_0 為起始圖形，有 w_1, w_2, \dots, w_N 共 N 個變換，同時作用於 A_0 上，產生 $w_1(A_0), w_2(A_0), \dots, w_N(A_0)$ ，則令此 N 個輸出圖形為 A_1 ，表示為

$$A_1 = W(A_0) = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup \dots \cup w_N(A_0) \quad (2.1)$$

在下個回合中， A_1 為輸入圖形，再次將 w_1, w_2, \dots, w_N 這 N 個變換，同時作用於 A_1 後，得到

$$A_2 = W(A_1) = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup \dots \cup w_N(A_1) \quad (2.2)$$

不斷地將上個回合的輸出圖形作為下個回合的輸入圖形，繼續對輸入圖形做 N 個變換，因此對於每回合的輸入與輸出圖形之間的關係可表示為

$$A_{k+1} = W(A_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

重複使用這個遞迴方式，作用無窮多次後達到收斂才停止，即

$$W(A_\infty) = A_\infty \quad (2.4)$$

則稱 A_∞ 為 IFS 的吸子(attractor) [31]。

運用 IFS 特性的方法有很多種，主要的方法有下列三種：generator iteration，IFS iteration，和 formula iteration。

1. Generator Iteration

以圖形(generator / motif)取代起始圖形(initiator)中的每一部份後，再次以圖形(generator / motif)取代新圖中的每一部份，如此重複取代無限多次，直到產生碎形為止，如圖 2-11。由一個正三角形為起始圖形，以四條等長線段(長度為正三角形邊長的三分之一)構成的 generator 取代起始圖形中的每一邊，獲得一個星形圖案；再以 generator 取代星形圖案中的 12 個邊，重複取代無限多次後，產生的雪花圖案稱為「Koch Snowflake」。

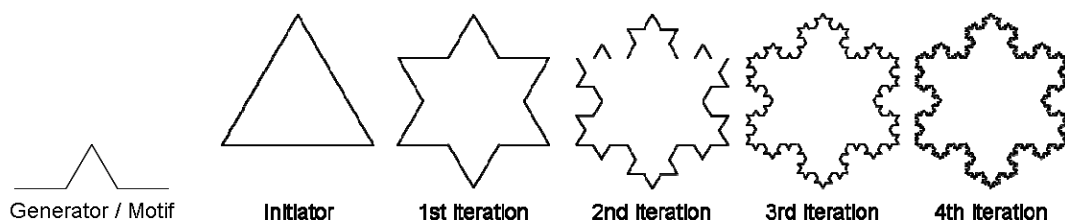


圖 2-11 Generator Iteration 產生 Koch Snowflake

資料來源：<http://library.thinkquest.org/26242/full/tutorial/ch9.html>

2. IFS Iteration

以點或圖形為起始圖形，經過兩個以上的變換產生數個點或圖形來取代自己，

不斷重複變換無限多次之後產生碎形，如圖 2-12。由一個被填滿黑色的正三角形開始，將原本的正三角形縮小二分之一後再平移至適當的位置，繼續重複此規則，即所謂的「Sierpinski gasket」。在數學意義上，此種方法與 MRCM 具有同樣的涵義，因此在 Chaos and Fractals[31]這本書中，將兩者視為相同的，即 MRCM=IFS，在產生過程中，以 MRCM 的多鏡頭影印機之譬喻來運作，但當探討到其中的數學意義時，則傾向於使用 IFS 的觀念。



圖 2-12 Sierpinski gasket

資料來源：Chaos and Fractals

我們想像原本的正三角形的底邊恰貼齊於 x 軸，左端點恰為原點，右端點為 $(1, 0)$ ，如圖 2-13 所示，此時我們可以將蘊含在 Sierpinski gasket 中的變換以矩陣變換的形式表示如下：

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x \quad (2.5)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$f_3(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.433 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

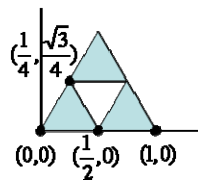


圖 2-13 IFS Iteration 產生 Sierpinski gasket

資料來源：<http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/siertri/siertri.htm>

3. Formula Iteration

以起始值代入一個或多個特定的數學函數，所產生的數值再重複代入函數中，不斷重複無限多次後，即產生碎形。Formula Iteration 是最簡明的疊代類型，但卻可產生最複雜的碎形，如：Mandelbrot set 和 Julia sets。

在複數平面上，以 $z = 0 + 0i$ 為起始值，不斷重複代入(2.8)的兩個函數即產生圖 2-14 之碎形。

$$\begin{cases} w_1(z) = \lambda z - 1 \\ w_2(z) = \lambda z + 1 \end{cases} \quad (\text{其中 } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 1) \quad (2.8)$$

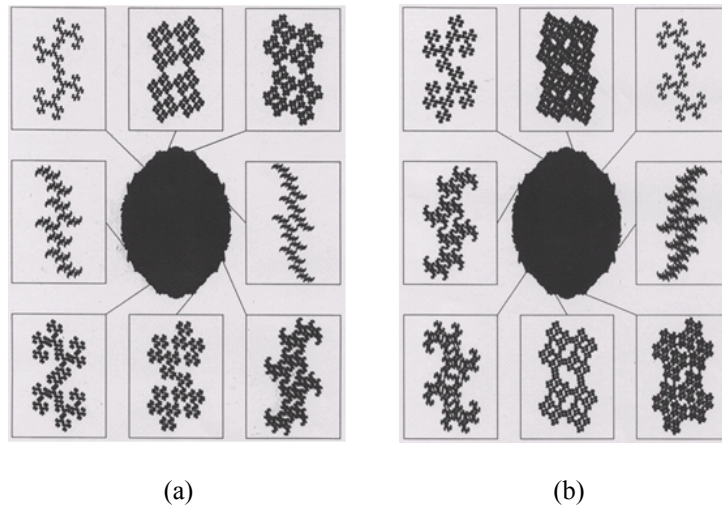


圖 2-14 The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1$; $\omega_2(z) = \lambda z - 1$

資料來源：Fractals Everywhere

2-4 定線複製法(Line-Based Duplication, LBD)

本節主要介紹我們所創造「定線複製法(LBD)」[26]之功能，以及如何產生具有自我相似或自我仿射之特性的圖形，而達到產生碎形圖形的最終目的。定線複製法的結構是由產生器(generator)和起始結構(initiator)所組成，產生器包括型(pattern)和基準線(base-line)兩部份，如圖 2-15。

1. 型(pattern)：由「複製物件群」和「銜接群」所組成。複製物件群中包括線段或圖形構成的圖像元型(pattern elements)，被複製後圖形將不會再改變，但其中所包含的線段則可能將成為下次疊代的基準線，稱為「疊代線」(recurrent line)，這些疊代線即所謂的銜接群，其幾何性質與基準線相同。
2. 基準線(base-line)：由一條線段構成，與型共存，基準線與型之間的相對位置、大小比例將成為複製的基準關係。
3. 起始結構(initiator)：由一條或多條線段構成，每條線段自成一座標系統，為預定產生相似物件的預定位置。根據基準線與型的大小比例與相對位置，對應產生複本於起始結構的每條線段上。
4. 複本：是型的相似圖形，其長寬的大小與位置是以基準線與型的大小比例與相對位置為基準。

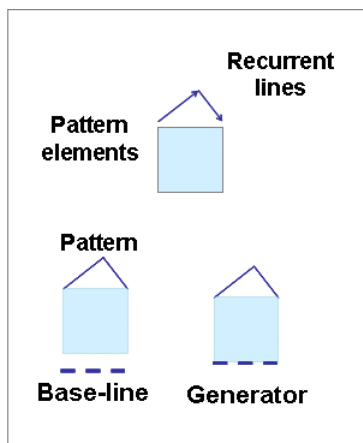


圖 2-15 定線複製法之結構

基準線與型之間的相對關係，自成一個相對座標系統，在此相對座標系統中，每個圖像元型各自代表不同的相似變換，而定線複製法的主要概念就是根據基準線與型之間的相似變換，複製與型相似的複本到起始結構上，它們之間的關係以類比關係呈現：

基準線：型 = 起始結構中的線段：複本

如圖 2-16 中，起始結構之線段是基準線的二分之一，因此所產生的複本是型縮小二分之一的相似形，由三角形邊長佔據的格子數可得知，且複本與起始結構線段的距離也是型與基準線之距離的一半。

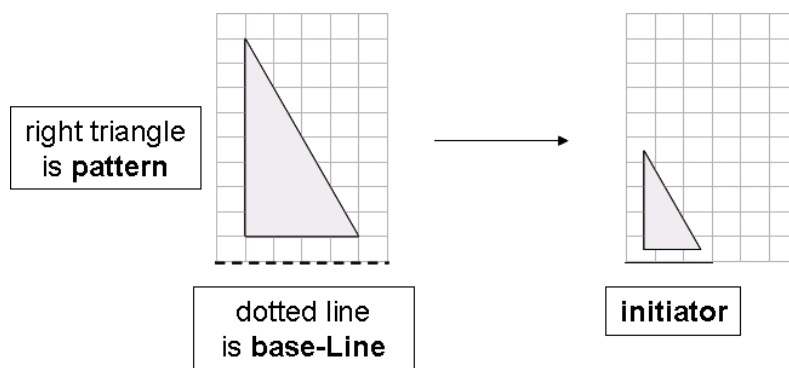


圖 2-16 定線複製法中的比例關係

定線複製法與 L-systems、MRCM 之比較如表 2-3，L-systems 是以語法的方式描述結構，須倚賴線段長度與旋轉角度來敘述，若缺乏這些資訊會造成描述不易；MRCM 以「框」為元件，可處理仿射變換，但是框的圖像較不易掌握，與 L-systems 同樣必須在特殊軟體或特殊介面上才可使用，而定線複製法以「線段」為元件，在一般平台上透過手動操作即可，是通用型的繪圖，可說是改善了 L-systems 與 MRCM 在使用上的主要困難。

表 2-3 定線複製法與 L-systems、MRCM 之比較表

	Lindenmayer systems (L-systems)	Multiple Reduction Copy Machine (MRCM)	Line-Based Duplication (LBD)
本質	語法描述結構 相似變換 疊代 多重多變結構	視覺化(框) 仿射變換 疊代	視覺化(線段) 相似變換 疊代
用途	植物造型、碎形	碎形	通用繪圖
特點	描述語法不易 特殊軟體	圖像掌握不易 特殊軟體	手動操作 一般平台
	<i>Aristid Lindenmayer (1968)</i>	<i>Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe (1992)</i>	<i>Mingjang Chen (2003)</i>



第三章 繪製一致性圖案之方法

當我們想複製規格相同或相似的物件至預定位置時，對於複雜繁瑣的物件群而言，以手工操作滑鼠來移動物件，容易產生不可避免的誤差，此時以定線複製法來輔助並設計適當的起始結構就可控制複本產生的精確位置。

3-1 相似變換(Similar Transformations)

在第一章曾經提到：相似變換是由等向縮放、旋轉、平移、鏡射所構成。物件透過相似變換可能被放大縮小、被旋轉某個角度、或被平移到新的位置，而產生與原物件相似的複本。在本節我們將說明如何使用定線複製法來呈現這四種變換。

由於定線複製法的主要概念是根據基準線與型之間的相對關係，複製與型相似的複本到起始結構上，那麼當產生器(基準線與型的相對位置)已被設計好時，起始結構便控制了將複本的變換類型。若起始結構只是一條線段時，將線段拉長或縮短，會使複本產生等向縮放的效果；將線段旋轉一個角度，會使複本產生旋轉的效果；將線段移動一段距離，會使複本產生平移的效果；對線段做鏡射，則會產生上下顛倒或左右顛倒的複本。這四種變換除了可單獨使用，也可結合運用，但不同的順序會導致不同的結果，譬如：「先鏡射再平移」與「先平移再鏡射」是完全不同的，如圖 3-1 之範例，灰色為起始圖形，比較圖(a)與圖(b)的最後結果，會發現位置並不相同。

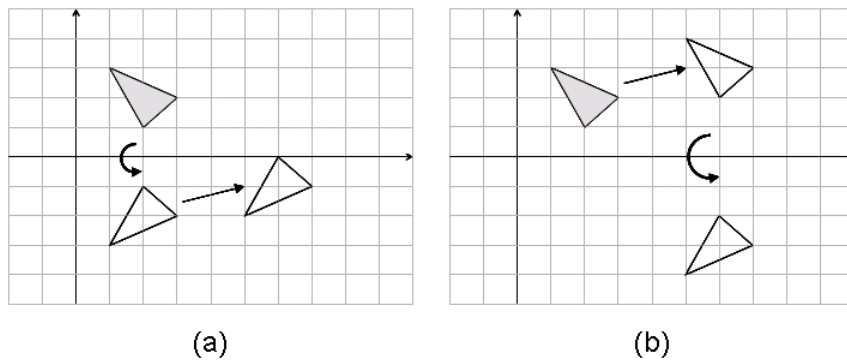


圖 3-1 (a) 先鏡射再平移 (b) 先平移再鏡射

3-2 一致性圖案(Uniform Pictures)

由上述知道，起始結構中的各線段無論是經過平移或旋轉，只要保持每條線段皆等長，透過定線複製法就可一次產生數個規格完全相同的圖形。如下圖(a)，我們想要在點與點之間加入規格相同的箭頭，即圖(b)的效果。

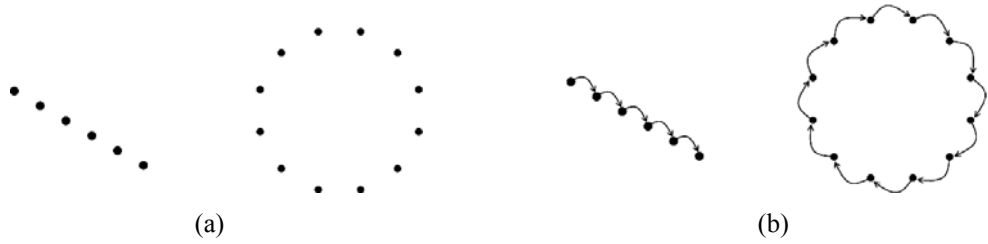


圖 3-2 (a) 原始結構 (b) 想達到的效果

只需在點與點之間產生連線，並且設計想要的箭頭格式，如圖 3-3 (b)，然後使用定線複製法，以箭頭取代圖 3-3 (a) 中的每條線段，便可完成圖 3-2 (b)。

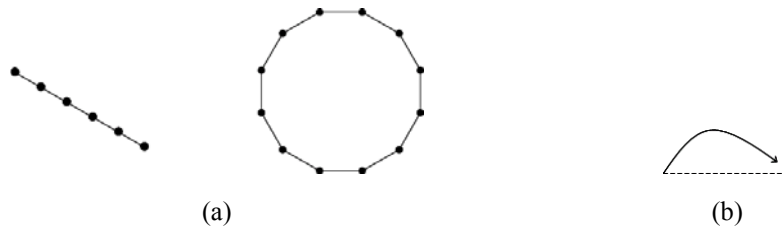


圖 3-3 (a) 起始結構 (b) 產生器

3-3 應用 (Applications)

3-3-1 圖型學繪圖 (Graphs)

在數學的領域裡，常常出現由相同的圖形元素所構成的圖，例如圖型學或鋪磁磚 (tiling) 問題等，具有規律的特性。在圖型學中，當探討尤拉迴圈 (Eulerian trails) 或漢彌爾頓圈 (Hamilton cycles) 等問題時，我們常以圖形描繪點與點之間的連線情形來輔助解題，但是如何才能將點與點之間的連線畫得既平滑又精準，卻總是困擾著使用者，本節介紹使用定線複製法所繪製的這類圖形。

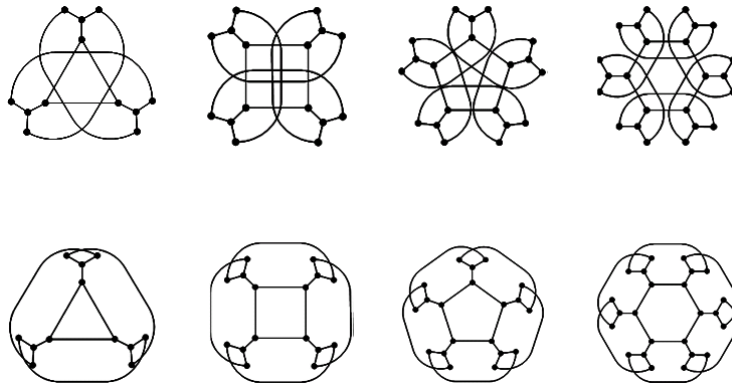


圖 3-4 The flower Snark J_n , for $n=1,2,3,4$

3-3-2 視覺設計(Visual Design)

如果我們對於起始結構稍加設計，使它具有對稱性或安排巧妙的位置，例如：多邊形、放射線、格線、方陣等基本結構(如圖 3-5)，再適當地調整產生器的構圖、顏色、透明度等，便能在視覺效果上製造出恰好連接(如圖 3-10)或重疊的美感(如圖 3-8, 3-9)，甚至是具有錯覺的圖形。

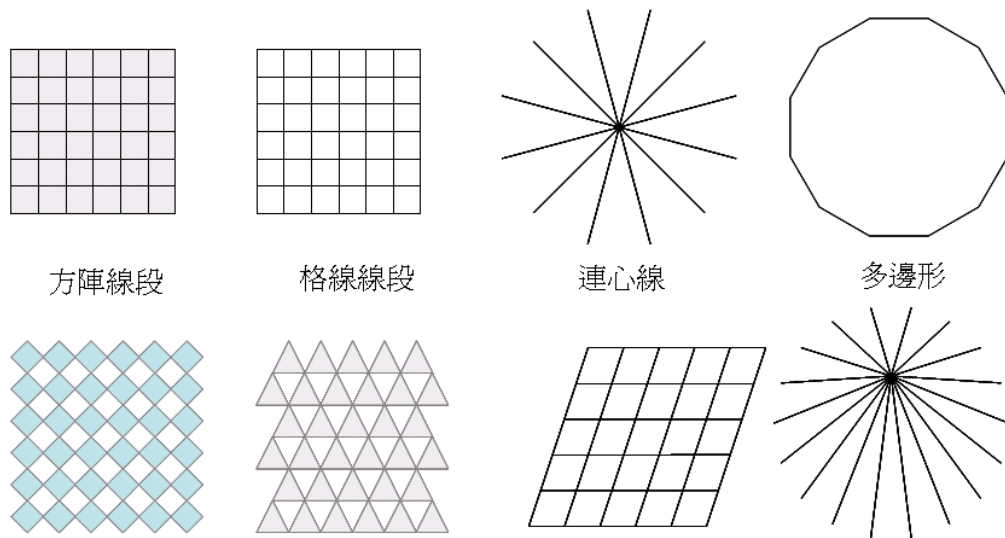


圖 3-5 起始結構的類型

1. 多邊形：

(1) 圖 3-6：以線段構圖而成的產生器，作用於正五邊形和十一邊形的起始結構後，產生星狀以及花瓣圖案。

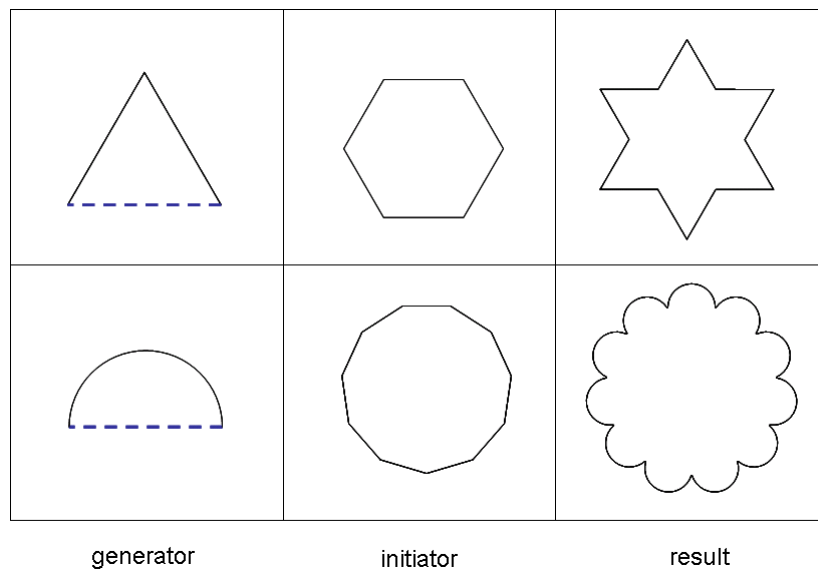


圖 3-6 多邊形起始結構之範例(1)

(2) 圖 3-7：以物件構圖而成的產生器，作用於三角形和六邊形的起始結構。

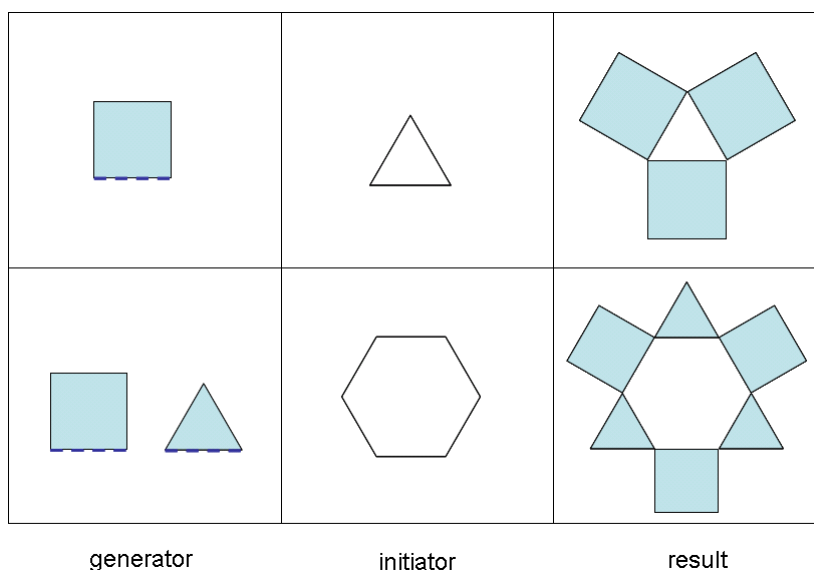


圖 3-7 多邊形起始結構之範例(2)

2. 放射線：

(1) 圖 3-8：以線段構圖而成的產生器，作用於放射線的起始結構，造成重疊的部分，互相交錯產生特殊的效果，上圖在中心交錯構成一個圓且有順時針方向旋轉的感覺，下圖則出現內密外疏，類似花的圖案。

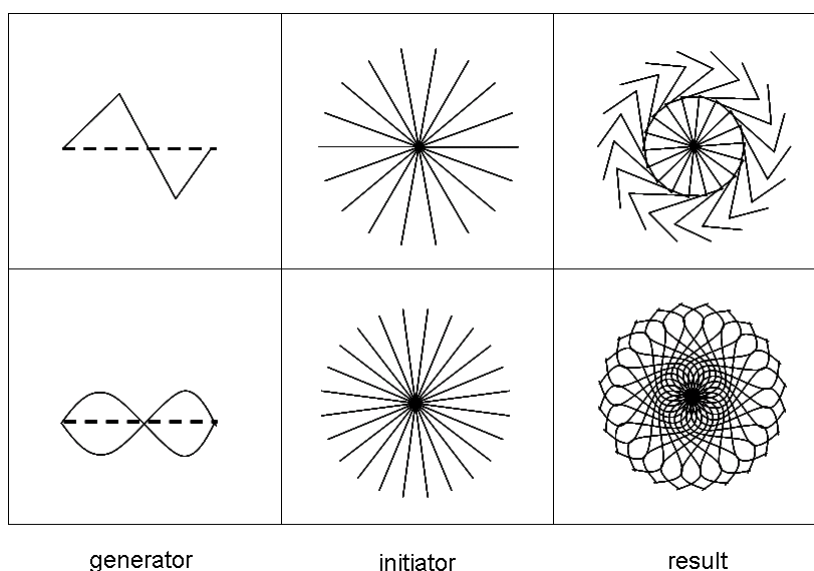


圖 3-8 放射線起始結構之範例(1)

(2) 圖 3-9：以物件構圖而成的產生器，作用於放射線的起始結構，重疊的區域隨著放射線段的數量增大，適當調整顏色與透明度更能顯現出交錯的美感。

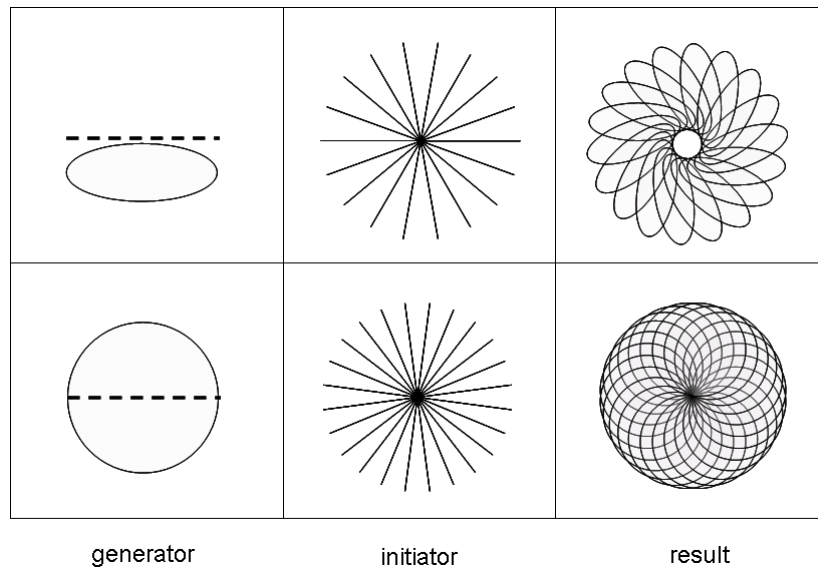


圖 3-9 放射線起始結構之範例(2)

3. 格線：

- (1) 圖 3-10：以線段構圖而成的產生器，作用於格線的起始結構。上圖的結果線段交錯產生看似風車的圖案，下圖則巧妙地互相連接，邊緣的幾個線頭皆可沿著彎曲的線走至另一面的線頭。

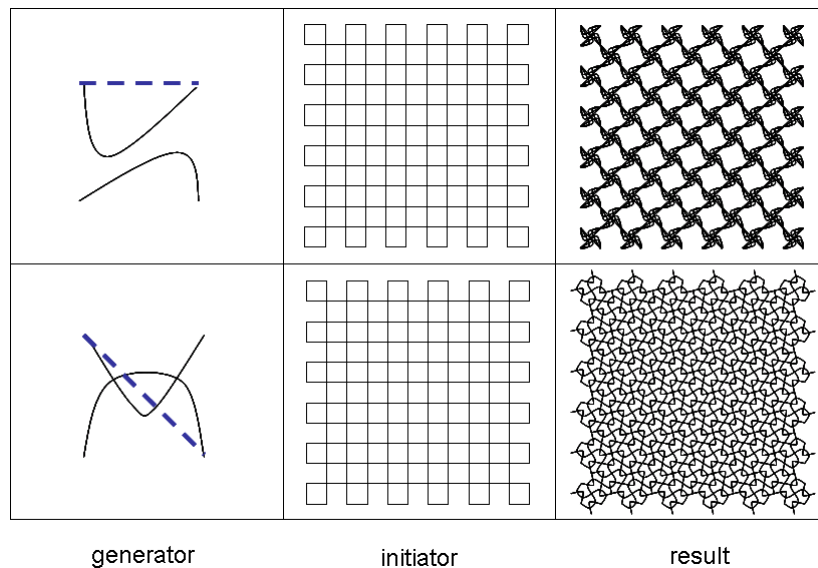


圖 3-10 格線起始結構之範例(1)

- (2) 圖 3-11：以物件構圖而成的產生器，作用於格線的起始結構。雖然是方正的格線，但作用後的結果反而出現斜格線的錯覺，看似歪斜卻仍是直線。

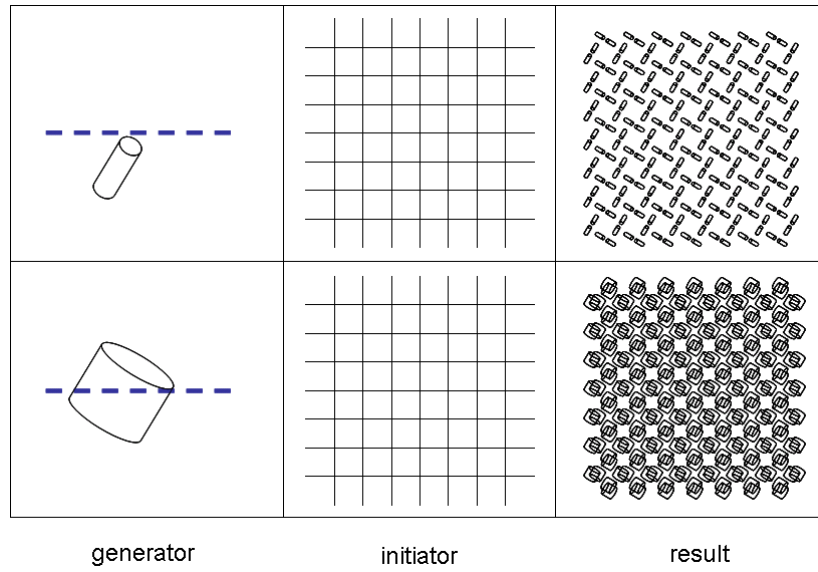


圖 3-11 格線起始結構之範例(2)

4. 更複雜結構：除了上述幾種由系統所提供的結構，我們也可以將疊代幾次後所產生的結果當作起始結構。如圖 3-12 中，先以產生器(a)疊代五次，將所得圖形作為起始結構，並以產生器(b)再疊代一次，即構成由數個正方形往內延伸的圖形。

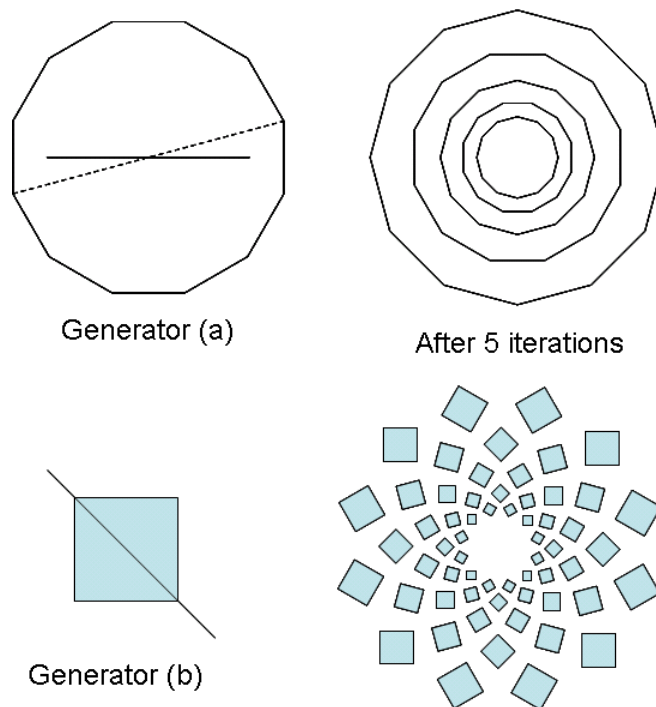


圖 3-12 更複雜起始結構之範例

第四章 疊代

4-1 疊代(Recurrent Substitution)

在數學上，疊代(recurrent substitution)的觀念被廣泛地運用在數學解題、函數表示、電腦演算法，電腦程式語言的架構或一些數學軟體，如 Geometrical Sketchpad (GSP), Logo 等，但在定線複製法中，我們是以視覺化的角度來解釋所謂的疊代關係。在此節我們以設計產生器來呈現疊代的產生過程，並說明如何透過定線複製法以簡單的產生器與起始結構，產生「疊代」的效果以及複雜的圖形結構。

在第二章曾經提到，當型之中的圖像元型被複製後，其中的線段可以被選擇成為下回合疊代的基準線，為了達到不斷疊代的效果，我們必須指定疊代將發生的位置在哪裡，被指定的線段稱為「疊代線」(recurrent line)，它在疊代過程中扮演重要的角色，使疊代位置固定並適當地銜接每次疊代所產生的圖形。

疊代線的數量最少為一條，如圖 4-1 中，產生器由球體與一相切線段所組成，上方線段為疊代線，下方虛線為基準線。每回合疊代根據疊代線與基準線的比例，在球體上產生一個半徑較小的球體，由於疊代線與球體相切，故每個球體是很精確的相切而無疊合，並隨著疊代線與球體的傾斜角度，逐漸以順時針方向往內旋，形成一串以球體疊成的珍珠串，圖 4-2 為前十三回合的疊代過程。

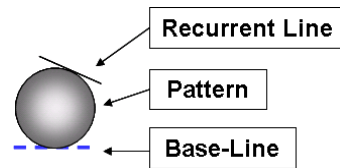


圖 4-1 珍珠串的產生器

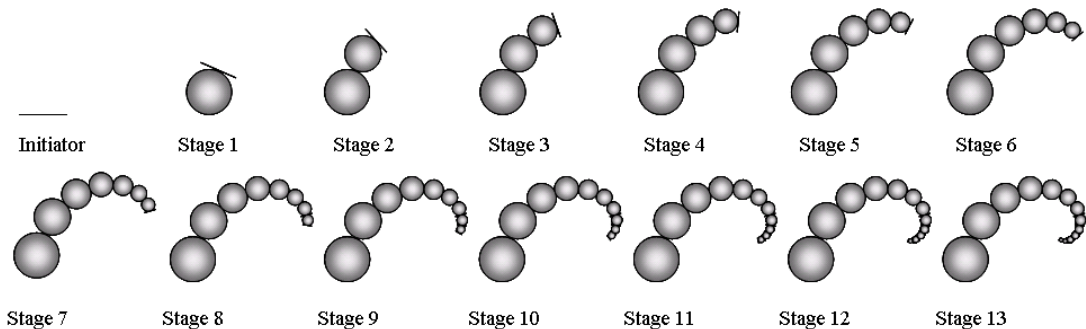


圖 4-2 珍珠串的疊代過程

疊代線多於一條的情形，我們以畢達哥拉樹(Pythagorean Tree)為例，見圖 4-3，產生器由一個正方形與兩垂直線段所構成，底下較粗的線段為基準線。上方的兩垂直線為疊代線，即下次疊代的基準線，指定了下一回合產生複本的預定位置。前七次的疊代過程

如圖 4-4 所示，可看出疊代線使得每次疊代所產生的圖形緊密地連接在一起，最後構成類似樹的圖形，故稱為「畢達哥拉樹」。

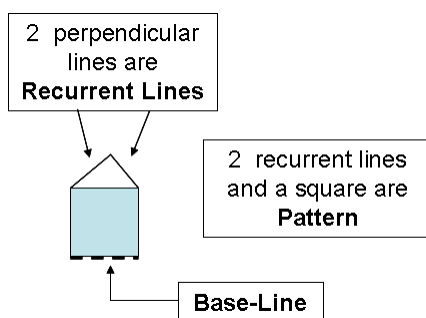


圖 4-3 畢達哥拉樹的產生器

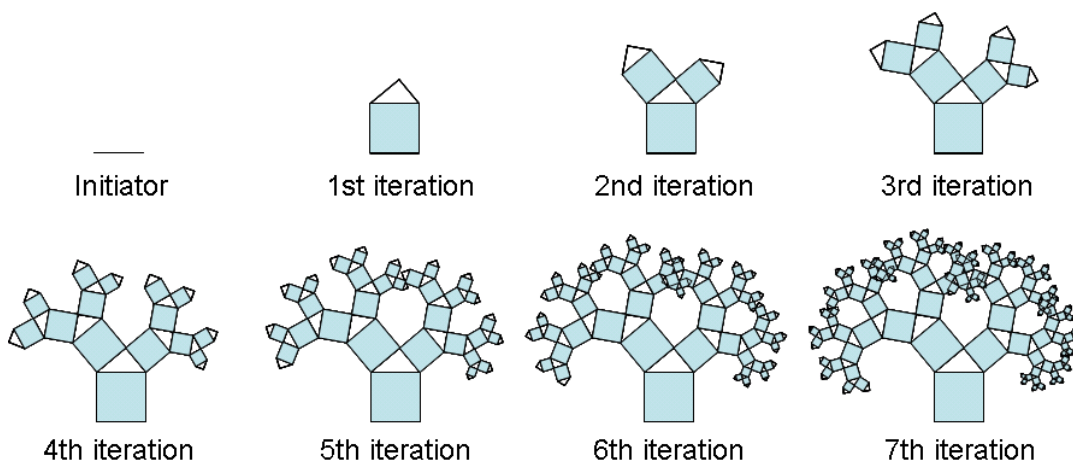


圖 4-4 畢達哥拉樹的成長過程

4-2 收縮映射(Contraction Mapping)

收縮映射(contraction mapping)是經過收縮變換，使得空間上任意兩點之間的距離減小的映射，反覆疊代後收斂到一個極限圖形。圖 4-5，在正三角形 ABC 中放置兩個小正三角形 BDE 與 CFG ，讓兩個小正三角形與正三角形 ABC 其中兩個角疊合，並將小正三角形的頂點與左端點產生連線，即 \overline{DF} 為疊代線(或將小正三角形的頂點與右端點產生連線，即 \overline{EG} 為疊代線)，以正三角形 ABC 、疊代線 \overline{DF} 、基準線 \overline{BC} (較粗虛線所表示)構成產生器，反覆疊代往內產生與自己互切且縮小的複本，越縮越小直到收斂狀態(如圖 4-6 最左)，就是收縮映射的一個例子。不僅是正三角形，正多邊形也可達到相同的收斂狀態，見圖 4-6。

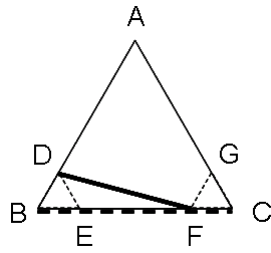


圖 4-5 收縮映射的產生器

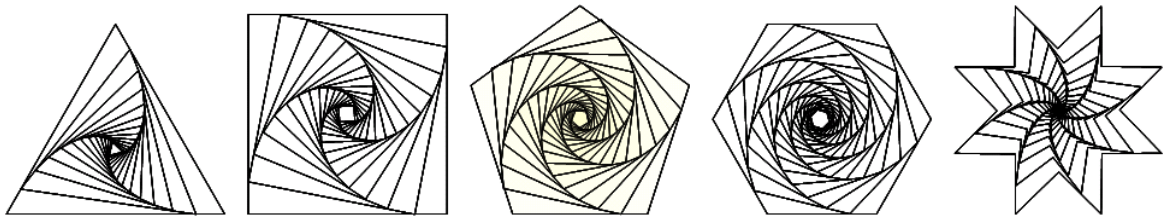


圖 4-6 Contraction Mappings

除了相切的例子，相互重疊也是被允許的，如圖 4-7，由半月形逐漸縮小至收斂後，產生類似鸚鵡螺的圖(e)。

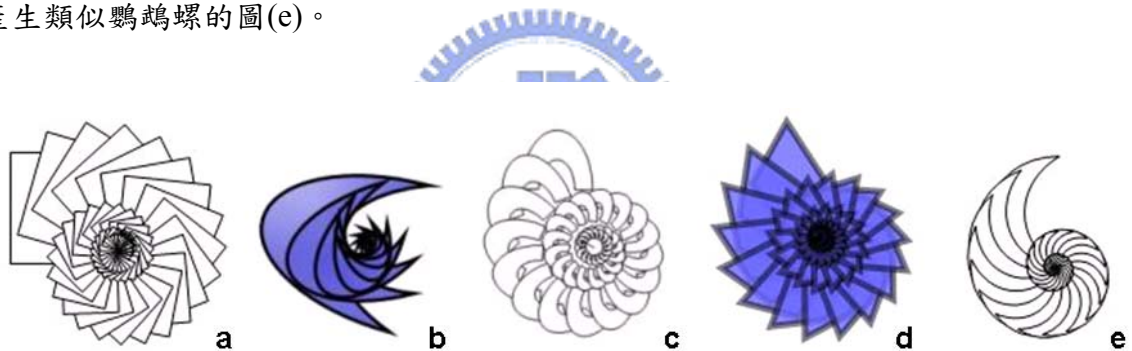


圖 4-7 鸚鵡螺

4-3 古典碎形(Classical Fractals)

在 1967 年，碎形幾何之父 Mandelbrot 發表碎形之前，就已經有許多數學家創造了符合碎形自我相似與無限延展等特徵的規則數理圖形，如 Georg Cantor (1872)，Guiseppe Peano (1890)，David Hilbert (1891)，Helge von Koch (1904) 等等，這些圖形可說是發展碎形幾何的基礎，也是規則碎形的典範[48]。

有別於使用特殊軟體或程式語言，如 JAVA 或 C++ 等來幫助繁複而大量的計算以產生碎形，在本節我們將探討如何以定線複製法或定框複製法來重現這些古典碎形，完全不需具備程式語言的背景知識，只依靠視覺化的操作便可完成大部分的圖形，是我們的主要目的。

在產生碎形的過程中，每次疊代所產生的線段皆為下回合將產生疊代的疊代線，疊代無限多次後達到收斂狀態始停止。有些古典碎形我們可以找出它的複製規則，並以定線複製法的眼光來產生(見附錄三)，通常具有幾個特性：

1. 產生器中的型在疊代前後，與基準線的起始點保持不變。

例如圖 4-8 的 Koch Antisnowflake，每一回合疊代之後會有三個頂點保持不變，即基準線的起始點，因此我們將第一回合的三個頂點相連，如圖 4-9 中虛線所示，將起始結構切割成三線段後互相比對，就可得到產生器中的型了。

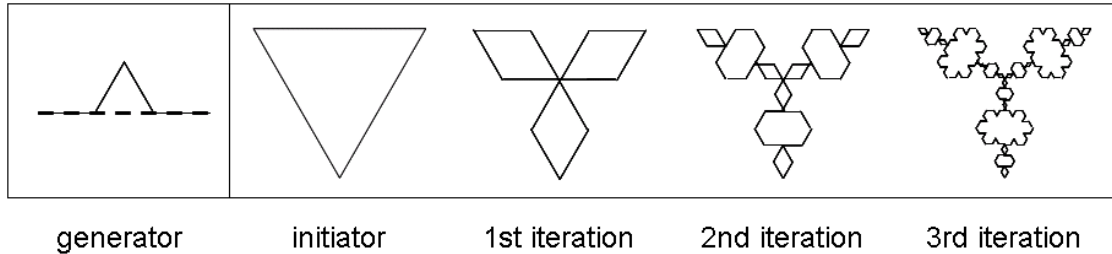


圖 4-8 Koch Antisnowflake

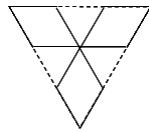


圖 4-9 切割線段並比對找出產生器中的型

但其中有些古典碎形的複製規格較難以發現，使得切割難度變高。

2. 部分線段為雙向線段。

如 4-10 的 Ice Fractal 中，每次疊代所產生的 V 字線段，實為兩雙向線段，因此在下回合疊代時，會往兩側生長，此類碎形具有對稱性質。

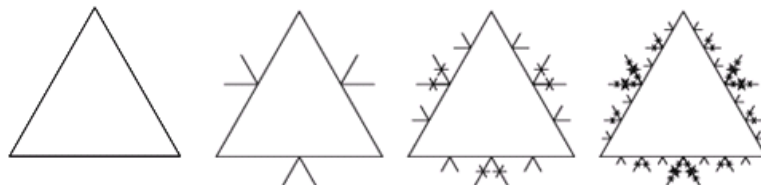


圖 4-10 Ice Fractal

3. 每次疊代後旋轉某個角度。

如圖 4-11 的 Peano-Gosper Curve，若將左下的起點與右上的終點虛線相連，會發現每經過一次回合，這條虛線就以逆時針方向旋轉某個角度，但仍是一筆畫的圖。



圖 4-11 Peano-Gosper Curve

圖 4-12 的 Sierpinski Arrowhead Curve，也是在每次疊代後旋轉某個角度，在圖 4-13 我們可以看到 Sierpinski Arrowhead Curve 未經旋轉的前五次疊代過程，其實圖案

是一樣的。



圖 4-12 Sierpinski Arrowhead Curve

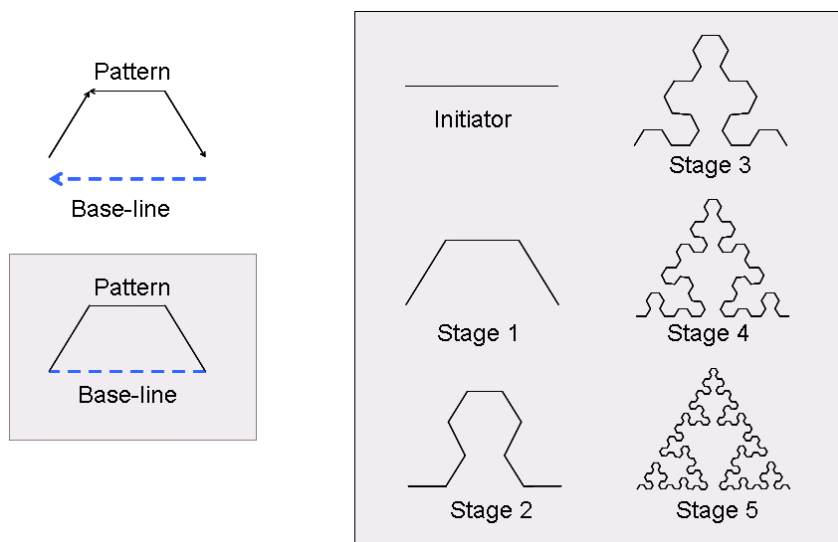


圖 4-13 Sierpinski Arrowhead Curve 的產生過程

4. 除疊代的線段之外，額外添加某些連接線段。

如圖 4-14 的 Hilbert Curve 與圖 4-15 的 S-Shaped Peano Curve 中，除了圖形本身的疊代之外，連接的粗線段也同時在疊代，因此必須加入「merge」的步驟。

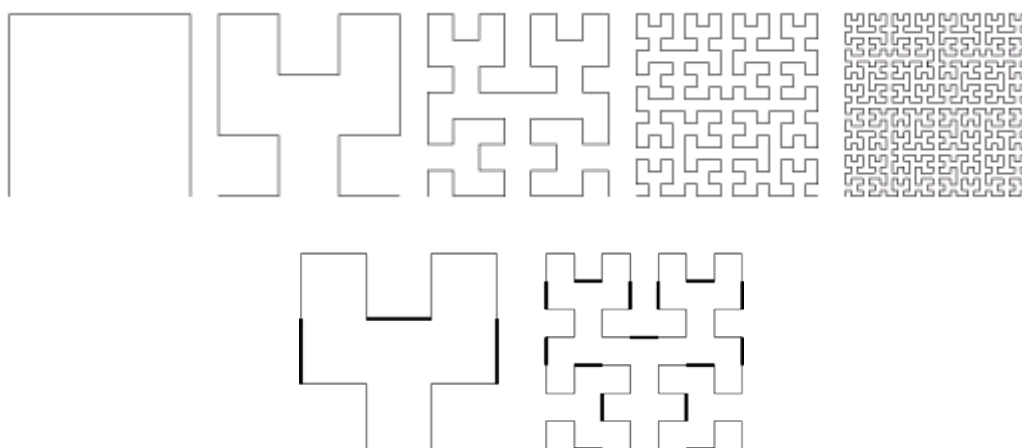


圖 4-14 Hilbert Curve

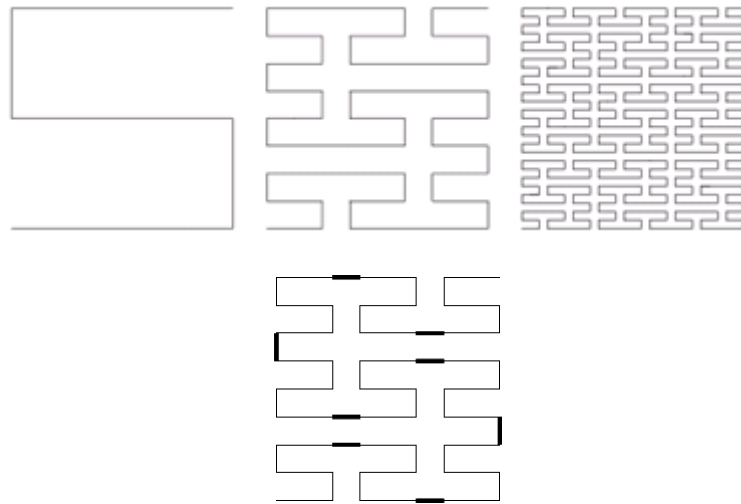


圖 4-15 S-Shaped Peano Curve

這類的碎形，其產生過程可視為多台影印機負責不同部分的圖形變換，但卻是同時進行影印的工作，稱為「Networked MRCMs」[31]。

4-4 仿自然(Artificial Nature)

自然界中的碎形，如植物類的樹木與草、山與岩石的形狀、雲的外觀等等，都具有自我相似的特性，而我們的定線複製法，不斷地以相同的型取代線段，使得整體與局部架構同樣具有自我相似的特性，因此，以定線複製法來仿造自然界的碎形，是可以保有自我相似的。

4-4-1 古典型

首先，我們以五條等長線段構成樹木的雛型，作為產生器中的型，並取與型等高的線段作為基準線，那麼，產生器就完成如圖 4-16 右上。在以下的例子中，我們皆以一條直線作為起始結構來進行疊代。樹或矮灌木叢(bush)的例子皆以鉛直線進行。圖 4-20 為前五回合的疊代過程。

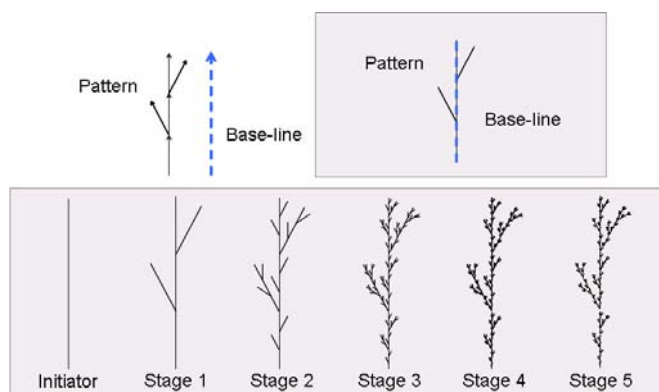


圖 4-16 基準線與型等高的樹

能構成樹的型必須有「枝幹」，疊代後才會有所謂的樹幹出現；型的架構中，線段數目越多，產生的樹越濃密，若線段的分布偏向某一方，則會造成疏與密的差異，如圖 4-17，型的左邊線段多於右邊，使得最後會呈現左密右疏的狀態，其實這是可以從型的架構預測得到的。圖 4-18 為其他不同產生器所對應產生的樹之範例。

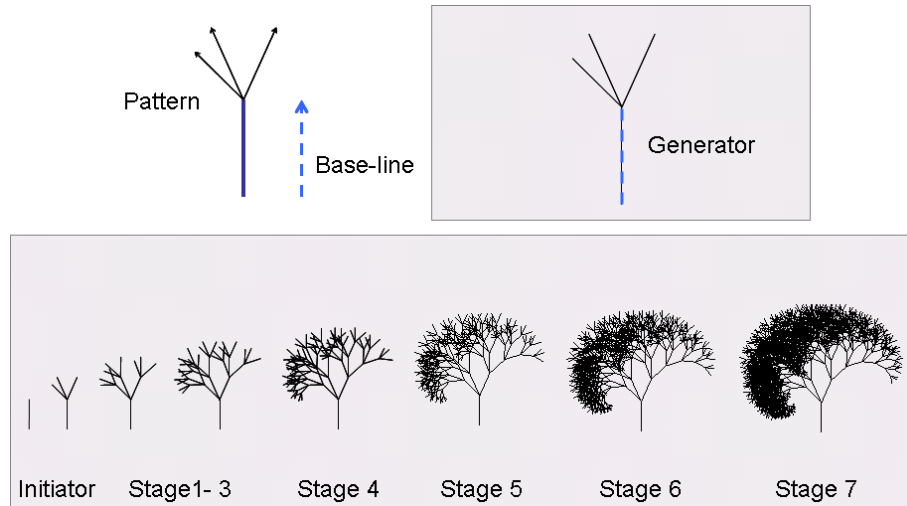


圖 4-17 左密右疏的樹

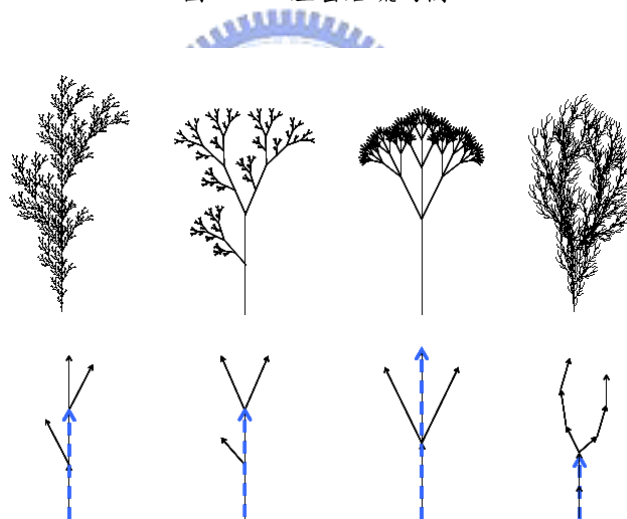


圖 4-18 不同的產生器所對應的樹

4-4-2 草

從樹木的範例中，透過型的改變，樹葉的部份可以從頂端逐漸下移到接近根部的位置，根據植物的特性，草是越靠近根部越為濃密的一种植物，因此我們只要加強根部的茂密程度，便可模擬出草的構造。

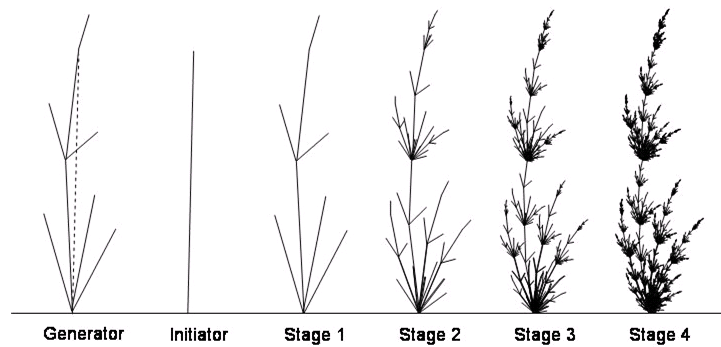


圖 4-19 草之成長過程

4-4-3 水草

據觀察，型的構造主宰著整棵植物的主要外觀。以九條線段構成圖 4-20 中類似 ψ 的型，連接根部與最頂端作為基準線，作用於稍微傾斜的一直線上，在四回合疊代後產生一株在水中搖曳的水草。與圖 4-20 同樣的型，但以不同的基準線作組合，如圖 4-21 中，五株水草的外觀是完全不同類型，但靠近仔細地看每個細微的部份，卻還是相同的，都是型的縮圖。

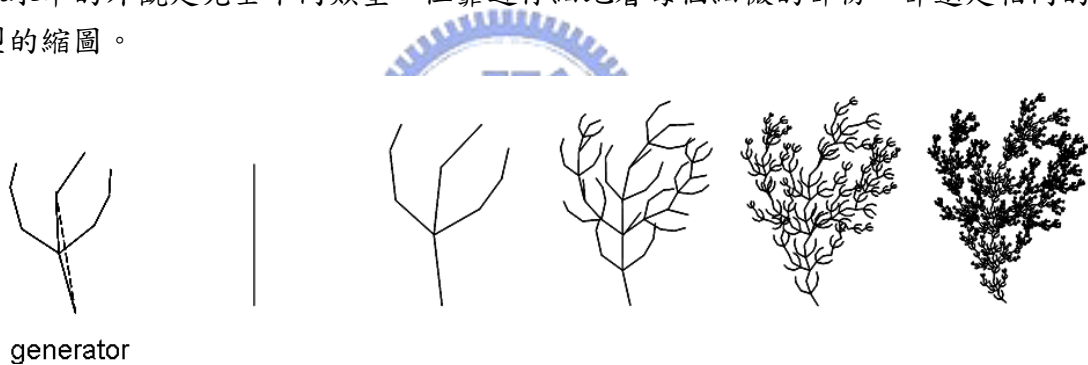


圖 4-20 水草



圖 4-21 同型不同基準線的五株水草

4-4-4 擬山擬雲

在定線複製法模擬山或雲的過程中，起始結構仍是簡單的一條直線，產生器中的型由四條線段構成，如圖 4-22(a)，經過三至四次的疊代後，逐漸出現山或岩石所獨具有稜有角的外型。若在最後一次疊代時，以弧線當作型，如圖 4-22(b)，以定線複製法取代所

有的線段之後，將原本的稜角轉為圓滑的蓬鬆感，便出現了類似雲的造型。同樣地，以圖 4-22(c)的曲線來取代原有的線段，又是另一種山岩的樣子。

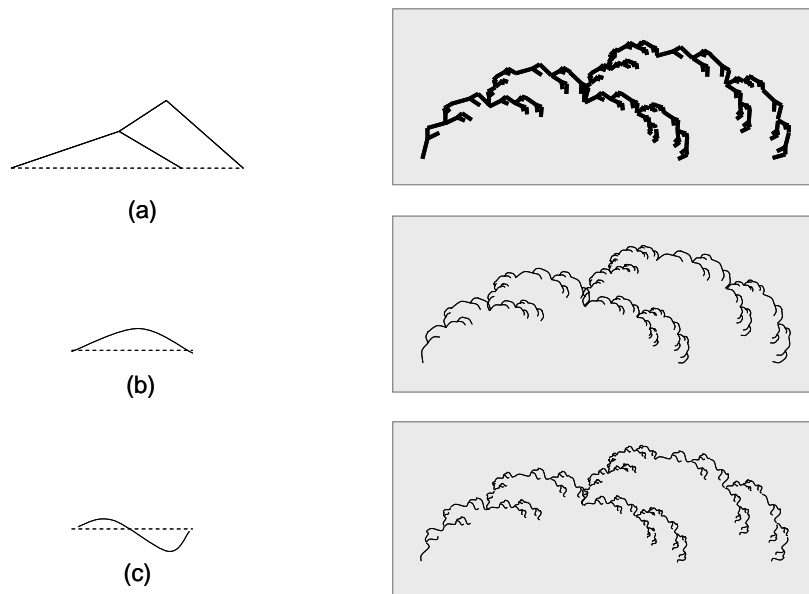


圖 4-22 以定線複製模擬山或雲的外觀

4-4-5 輕微的差異

根據前幾節，我們已經知道型對於疊代結果是會產生影響的，在這一節將呈現只要對型稍作微小的改變，所造成的差異會是多麼地超乎想像。在圖 4-23 中，將型(a)的左右線段往內壓即得到型(b)，而這輕微的擠壓，卻使得最後結果迥然不同。

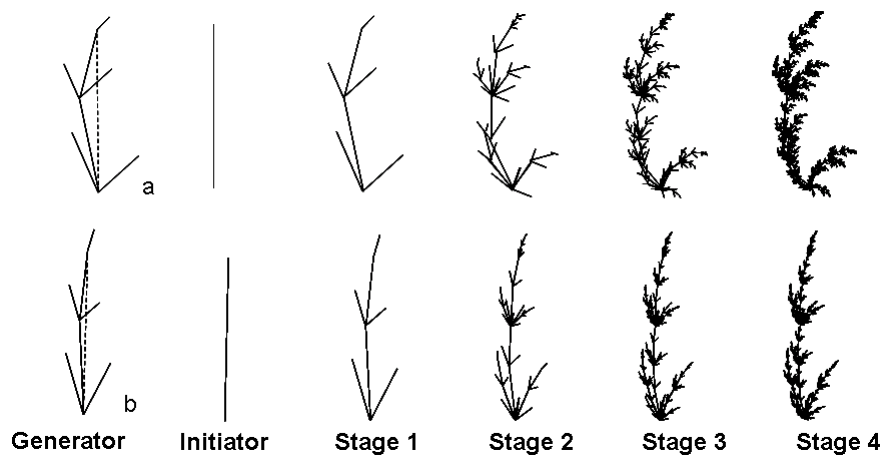


圖 4-23 型之改變對結果的影響(1)

圖 4-24 之中的三種型，線段數目是相同的，三者之間的差異在於高度與彎曲程度，其中圖右的型是最高最彎的，這個特徵也顯現於最後的疊代結果。



圖 4-24 型之改變對結果的影響(2)

除此，我們還可以賦予線段「鏡射」的屬性，當疊代過程中遇到具備此性質的線段，是以鏡射變換來處理的，圖 4-25 中，我們在同樣的產生器中，選擇不同的線段並賦予鏡射的性質，得到七棵類似國畫裡的老樹。

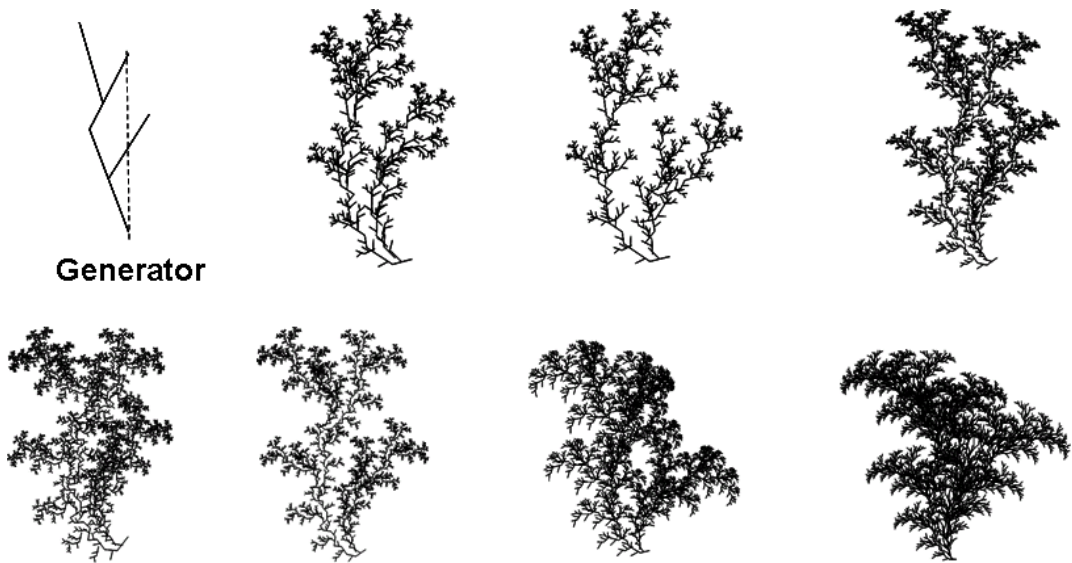


圖 4-25 鏡射性質所產生之老樹

第五章 定線複製法之特徵

5-1 複製過程之分析

假設產生器中的型是由 m 條線段與 n 個物件所構成，它們與基準線的相對位置代表即將作用於起始結構的變換，我們以 $W_i, i=1,2,\dots,m$ 來表示 m 條線段所賦予的變換，以 $W_i, i=m+1, m+2, \dots, m+n$ 表示 n 個物件的變換。

令 I 為起始結構，當我們對 I 執行 k 次的定線複製法，則結果可表示為

$$(W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m)^{\circ k} (I) = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_m=1, 2, \dots, k} W_{i_k} W_{i_{k-1}} \dots W_{i_1} (I) \quad (5.1)$$

以 $I_{i_1 i_2 \dots i_m} = W_{i_m} W_{i_{m-1}} \dots W_{i_1} (I)$ 表示起始結構中某一線段經過 m 次定線複製法之後的輸出結果，我們針對此圖形探討其下回合(即執行第 $k+1$ 次定線複製法)的變換情形。

在此將第 $k+1$ 次標記為 p 。若此次執行後所得到的結果是由線段所組成，也就是針對前 k 次已產生的所有線段再經過 W_p 變換後仍全是線段，故將這些線段表示為

$I_{i_1 i_2 \dots i_k p} = W_p (I_{i_1 i_2 \dots i_k})$ ，其中 $i_1, i_2, \dots, i_k, p=1, 2, \dots, m$ 。若此次執行後所得到的結果為物件所組成，也就是針對前 k 次已產生的所有線段再經過 W_p 變換成物件群(線複製法根據 $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 的長度與方向，將物件經過縮放、旋轉、平移等變換後貼至某特定位置)，故將這些物件群表示為 $O_{i_1 i_2 \dots i_k p} = W_p (I_{i_1 i_2 \dots i_k})$ ，其中 $i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m$ 且 $p = m+1, m+2, \dots, m+n$ 。

所有經過 k 次定線複製法的結果，可能由線段或物件群所構成，我們將全是線段的收集起來成為 $I_k = \{I_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m\}$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots$ ；全是物件群的則收集起來成為 $O_k = \{I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} p} \mid i_1, i_2, \dots, i_{k-1} = 1, 2, \dots, m, \text{ and } p = m+1, m+2, \dots, m+n\}$ 。換個角度來看，第 k 次的所有可能結果就是把每種變換作用於第 $k-1$ 次的所有可能結果的聯集，所以也可表示為 $I_k = \bigcup_{i=1}^m W_i (I_{k-1})$ 與 $O_k = \bigcup_{i=m+1}^{m+n} W_i (I_{k-1})$ 。

若 I_0 為起始結構中的線段所成之集合， A_i 表示第 i 回合的執行結果， A_0 為初始狀況，那麼每一回合的執行結果為

$$\begin{aligned} A_0 &= I_0 \\ A_1 &= I_1 \cup O_1 \\ A_2 &= I_2 \cup O_1 \cup O_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$A_k = I_k \cup \left(\bigcup_{i=1}^k O_i \right) \quad (5.2)$$

以畢達哥拉樹為例，如圖 5-1，第一回合對 I_0 執行定線複製法後，產生線段群 I_1 與物件群 O_1 ，所以 $A_1 = I_1 \cup O_1$ ；第二回合只能針對 A_1 中的線段群 I_1 執行定線複製法，產生線段群 I_2 與物件群 O_2 ，而物件群 O_1 仍舊存在，所以 $A_2 = I_2 \cup O_1 \cup O_2$ ；以此類推，第 k 回合只能針對 A_{k-1} 中的線段群 I_{k-1} 執行定線複製法，產生線段群 I_k 與物件群 O_k ，而物件群 O_1, O_2, \dots, O_{k-1} 仍舊存在，所以 $A_k = I_k \cup \left(\bigcup_{i=1}^k O_i \right)$ 。若產生器中的型皆由線段所組成，則 $A_k = I_k$ 。

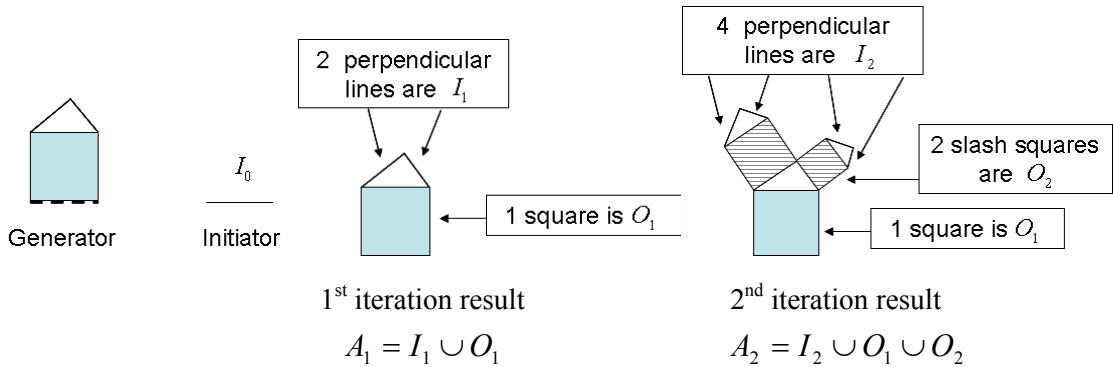


圖 5-1 畢達哥拉樹

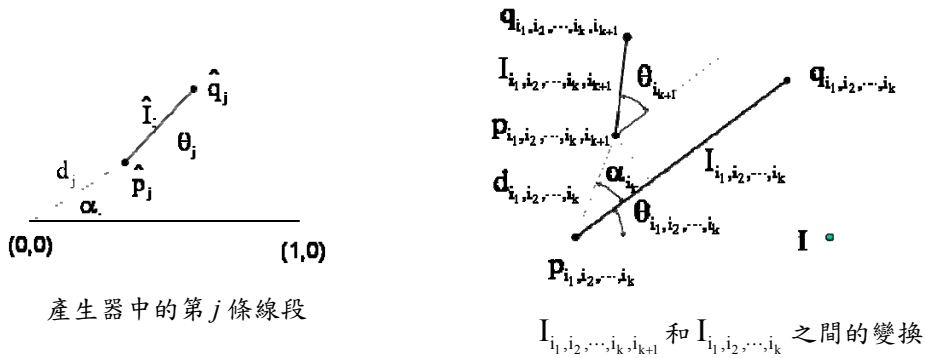
接下來，我們探討的是經過 k 回合疊代的線段 $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 。不失其一般性，我們將產生器之中基準線的兩個端點正規化為 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ ，其中第 j 條線段記為 \hat{I}_j ，其長度記為 r_j ， \hat{I}_j 的兩個端點分別記為 \hat{p}_j 和 \hat{q}_j ，而 $(0, 0)$ 到 \hat{p}_j 的距離記為 d_j 。同樣地，我們假設起始結構中的線段 I 為 $(0, 0)$ 至 $(1, 0)$ 的一條單位線段，經過 k 回合疊代後， $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 的兩個端點為 $p_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 和 $q_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ， $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 和 I 的夾角為 $\theta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ，長度為 $r_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ，而 $p_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 和 $p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ 的距離為 $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 。那麼 $I_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ 的兩個端點為

$$\begin{cases} p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = p_{i_1 i_2 \dots i_k} + d_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} \times (\cos(\theta_{i_1 i_2 \dots i_k} + R(I_{i_1 i_2 \dots i_k}) \cdot \alpha_{i_k}), \sin(\theta_{i_1 i_2 \dots i_k} + R(I_{i_1 i_2 \dots i_k}) \cdot \alpha_{i_k})) \\ q_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} + r_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} \times (\cos(\theta_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}), \sin(\theta_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}})) \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\text{其中 } \theta_{i_1 i_2 \dots i_k} = R(I_{i_1}) \cdot \theta_{i_1} + R(I_{i_2}) \cdot \theta_{i_2} + \dots + R(I_{i_1 i_2 \dots i_k}) \cdot \theta_{i_k}, \quad R(I_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \begin{cases} -1 & \text{reflection} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$r_{i_1 i_2 \dots i_k} = r_{i_1} \times r_{i_2} \times \dots \times r_{i_k} \quad (5.5)$$

$$d_{i_1 i_2 \dots i_k} = r_{i_1, i_2, \dots, i_k} \times d_{i_{k+1}} \quad (5.6)$$



The j th line segment is a transformation scaling, rotate and translate. The transformation can be represented as $\lambda z + c$ on complex plane.

圖 5-2 定線複製法之分析

$I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 在下回合的疊代中扮演著原本起始線段 I 的角色，與 $I_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ 構成一個相對座標系統。

1. 連通 (connected) / 不連通 (disconnected)

若產生器中的型為連通的是指基準線為型之中某兩條線段的端點所連線，如圖 5-3 (a) 為連通的型，但圖 5-3 (b) 則屬於不連通的型。由於型(a)的基準線連接的是兩線段的端點，所以每條線段在疊代後仍保持連接在端點，使得所有疊代的結果在端點的部分能連接地相當準確，依舊為連通；型(b)的基準線有一端接在端點，但另一端是接在線段上，所以在疊代的過程中，只能保持其中一端的連接，而使得整體結果是不連通的。在圖 5-3 中，我們可以看到分別將兩種型執行四次定線複製法後的結果，由型(a)所產生的結果為連通的；由型(b)所產生的結果，則有很多分枝是重疊地散落，而非互相連接的。因此，如果產生器中的型具有連通的性質，那麼經過 k 回合的疊代後，其結果仍保持連通的性質。

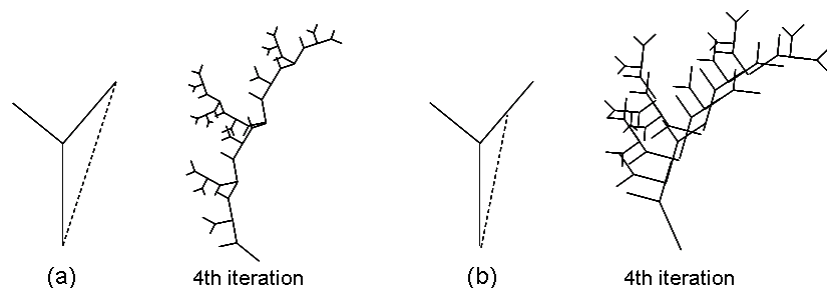


圖 5-3 連通性質

2. 收斂 (converge) / 發散 (diverge)

若產生器之中型的每條線段與基準線的比例皆小於等於 1 ($r_i \leq 1$)，由(5.5)可得知經

過無窮多次的疊代後， $r_{i_1 i_2 \dots i_\infty}$ 仍小於等於 1 ($r_{i_1 i_2 \dots i_\infty} \leq 1$)，故達到收斂狀態。若產生器之中型存在一條線段與基準線的比例大於 1 ($r_t > 1$)，由(5.5)可得知經過無窮多次的疊代後， $r_{i_1 i_2 \dots i_\infty}$ 可能因為 $r_t > 1$ 的影響使得乘積大於 1 或小於等於 1： $r_{i_1 i_2 \dots i_\infty} > 1$ 的線段會達到發散狀態， $r_{i_1 i_2 \dots i_\infty} \leq 1$ 的線段則會達到收斂狀態，這種只有某些線段是發散的狀況稱為「局部發散」。

(1) 當 $r = 1$ ， $d = 0$ 時：

若產生器中的型只由一條與基準線等長的線段所構成，此線段之左端點與基準線夾 θ 角且相連，每次疊代以基準線與型相連處為中心點，繞著中心點旋轉 θ 角產生新線段，疊代 n 次後共旋轉 $n\theta$ 角度，若 $n\theta$ 恰為 360° 之整數倍，即 $n\theta = 360^\circ \cdot k$ 時，表示在繞了 k 圈後新線段將與基準線重疊，接下來所產生的線段也都會發生重疊的情形。

$$n\theta = 360^\circ \cdot k \quad (5.7)$$

$$n = \frac{360^\circ}{\theta} \cdot k \quad (5.8)$$

由於 n 為疊代次數， k 為環繞的圈數，因此我們必須找到最小整數 k 使得 n 亦為整數，而達到收斂狀態。

- ① 當 $(360, \theta) = \theta$ 時， $\frac{360}{\theta}$ 為整數，此時 $k = 1$ ， $n = \frac{360}{\theta}$ ，表示在疊代 $\frac{360}{\theta}$ 次(繞了一圈)之後新線段開始與基準線重疊，最後的圖形以基準線與型相連處為中心點，共有 $\frac{360}{\theta}$ 條線段呈放射狀。

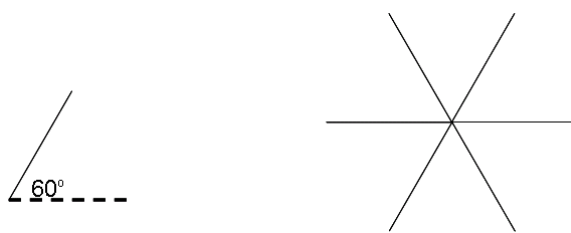


圖 5-4 $\theta = 60^\circ$

- ② $(360, \theta) = 1$ 時，最小整數 k 必須等於 θ 才能使 n 成為整數，此時 $k = \theta$ ， $n = 360$ ，表示在疊代 360 次(繞了 θ 圈)之後新線段開始與基準線重疊，最後的圖形以基準線與型相連處為中心點，共有 360 條線段呈放射狀。

- ③ $1 < (360, \theta) = g < \theta$ 時，最小整數 $k = \frac{\theta}{g}$ 才使得 $n = \frac{360}{g}$ 也為整數，表示在疊代 $\frac{360}{g}$ 次(繞了 $\frac{\theta}{g}$ 圈)之後新線段開始與基準線重疊，最後的圖形以基準線與型相連處為中心點，共有 $\frac{360}{g}$ 條線段呈放射狀。

(2) 當 $r=1$ ， $d \neq 0$ 時：

若產生器中的型只由一條與基準線等長的線段所構成，此線段之左端點與基準線夾 θ 角，距離為 d ($d \neq 0$)，每次疊代旋轉 θ 角產生新線段，疊代 n 次後共旋轉 $n\theta$ 角度，若 $n\theta$ 恰為 360° 之整數倍，即 $n\theta = 360^\circ \cdot k$ 時，表示在繞了 k 圈後新線段將與基準線重疊，接下來所產生的線段也都會發生重疊的情形，而達到收斂狀態。

- ① 當 $(360, \theta) = \theta$ 時， $\frac{360}{\theta}$ 為整數，此時 $k=1$ ， $n = \frac{360}{\theta}$ ，表示在疊代 $\frac{360}{\theta}$ 次(繞了一圈)之後新線段開始與基準線重疊，最後的圖形為正 $\frac{360}{\theta}$ 邊形的切線，共有 $\frac{360}{\theta}$ 條線段呈螺旋狀，中心點為正 $\frac{360}{\theta}$ 邊形的任兩邊之中垂線交點。

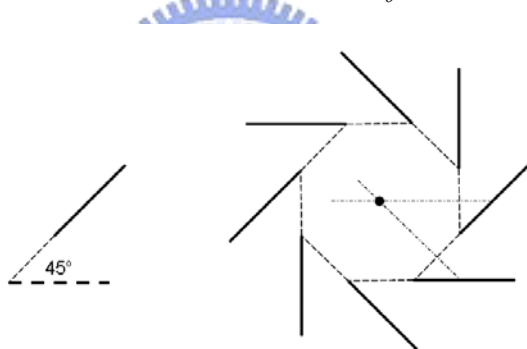


圖 5-5 $\theta = 45^\circ$

- ② $(360, \theta) = 1$ 時，最小整數 k 必須等於 θ 才能使 n 成為整數，此時 $k = \theta$ ， $n = 360$ ，表示在疊代 360 次(繞了 θ 圈)之後新線段才開始與基準線重疊，最後的圖形共有 360 條線段呈螺旋環狀(如圖 5-6)，中心點為前兩次疊代所產生的 d 之中垂線交點(如圖 5-7)。

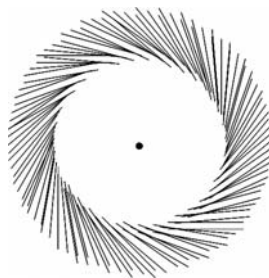


圖 5-6 螺旋環狀

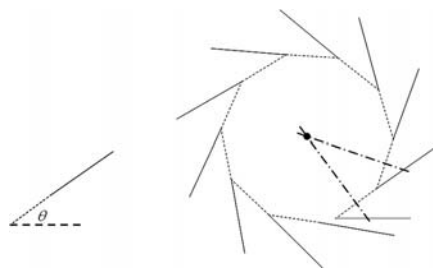


圖 5-7 中垂線交點即中心點

- ③ $1 < (360, \theta) = g < \theta$ 時，最小整數 $k = \frac{\theta}{g}$ 才使得 $n = \frac{360}{g}$ 也為整數，表示在疊代 $\frac{360}{g}$ 次(繞了 $\frac{\theta}{g}$ 圈)之後新線段開始與基準線重疊，最後的圖形共有 $\frac{360}{g}$ 條線段呈螺旋環狀，中心點為前兩次疊代所產生的 d 之中垂線交點。

由以上的結果，我們猜想也許存在一種狀況是所謂的「週期性發散」(cyclic diverge)，也就是只在某個區間內循環性地跳動，但關於如何找出這個區間，在此我們稍作保留。

5-2 The Attractors of IFS by Line-Based Duplication on Complex Plane

在第二章我們曾提到疊代函數系統的呈現模式，其中一種是在複數平面上不斷地將數值代入一個或多個特定的函數而產生碎形，最著名的就是「Mandelbrot set」和「Julia sets」。

Mandelbrot set 是在起始值 z_0 (通常選擇 $z_0 = 0 + 0i$) 與常數項 c 選定之後，開始將數值不斷重複地代入

$$z_{n+1} = f(z_n, c) \quad (5.9)$$

這個遞迴的二次方程式，經過幾回合的疊代可能出現的情形有兩種：(1)趨近於某特定的值，或在某些數值之間跳動；(2)發散至無窮大。對於某個 c 而言，如果出現第一種情形，就會被塗上黑色並收集起來成為 Mandelbrot set 的元素；如果出現第二種情形，則會根據發散的快慢給予特定的顏色作為標記，如圖 5-8。當標記完顏色之後，繼續選擇其他的 c 值重複以上的步驟。

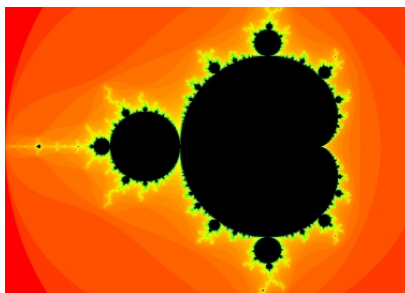


圖 5-8 $z_{n+1} = z_n + c$ 之 Mandelbrot set

資料來源：<http://users.erols.com/ziring/mandel.html>

Julia sets 所使用的函數和 Mandelbrot set 相同，但是 c 值是固定的，也就是對於 Mandelbrot set 中的每一個 c 值，都存在一個特定的 Julia set，如圖 5-9。Mandelbrot set 和 Julia sets 是息息相關的，但 Mandelbrot set 只有一個，Julia set 卻有無限多個。

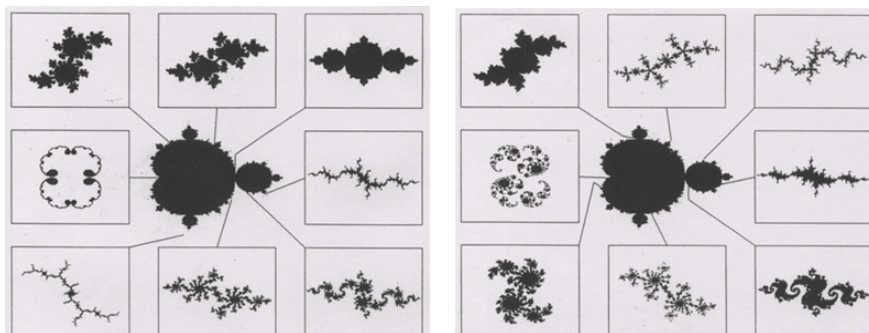


圖 5-9 Mandelbrot set : $z^2 - c$ 與對應的 Julia sets
資料來源：Fractals Everywhere

5-2-1 The IFS Attractor of $\{C; \omega_1(z), \omega_2(z)\}$

Mandelbrot set 與 Julia sets 所使用的函數為非線性的二次式，本節我們將探討由 $\omega_1(z) = \lambda_1 z + c_1$ 和 $\omega_2(z) = \lambda_2 z + c_2$ 兩個線性函數所組成的疊代函數系統，在複數平面的收斂或發散情形。在 $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 中， $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$ 皆為複數(可寫成 $a + bi$ 的形式)，其中 λ_1, λ_2 為控制旋轉與縮放的參數， c_1, c_2 為控制平移的參數。

當選定這四個參數之後，任意選擇一起始點 z_0 (通常選擇原點為 $z_0 = 0 + 0i$) 作為疊代的初始值，將 z_0 代入 $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 中分別得到 z_1 和 z_2 ，再將這兩個新數值代入相同的兩個函數，如此重複疊代，直到數值達到無窮大，達到收斂狀態或僅在某些數值之間跳動 [42]。當兩個函數經過無窮多次的疊代後達到收斂，稱為 IFS 的吸子 (attractor)。

1. 圖 5-10 為 $\omega_1(z) = \lambda z + 1$ 和 $\omega_2(z) = \lambda z - 1$ 的吸子：

控制旋轉與縮放的參數同為 λ ，所以 $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 有相同的縮放參數 $|\lambda|$ ；控制平移的參數分別為 1 和 -1，差別只在於平移的方向而已，因此這類型的吸子具有上下對稱的特質，也可視為由上下兩個相同的圖形經由平移所構成。

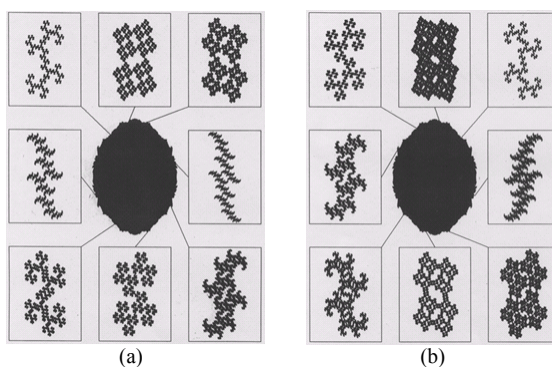


圖 5-10 The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1; \omega_2(z) = \lambda z - 1$
資料來源：Fractals Everywhere

2. 圖 5-11 為 $\omega_1(z) = \lambda z + 1$ 和 $\omega_2(z) = \lambda^* z - 1$ 的吸子：

若 $\lambda = a + bi$ ，則 $\lambda^* = (a + bi)^* = a - bi$ 為 λ 的共軛複數， $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 仍保有相同的縮放參數 $|\lambda|$ ，旋轉角度相同但方向相反，因此這類型的吸子具有左右對稱的特質。

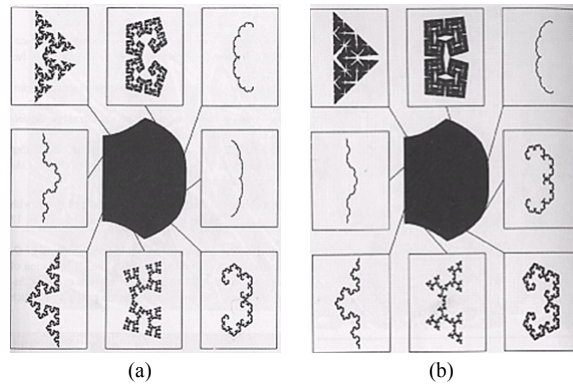


圖 5-11 The IFS Attractor of transformations $\omega_1(z) = \lambda z + 1$; $\omega_2(z) = \lambda^* z - 1$
資料來源：Fractals Everywhere

5-2-2 The IFS Attractor of Transformations by Line-Based Duplication Method

在本節將以定線複製法來模擬由 $\omega_1(z) = \lambda_1 z + c_1$ 和 $\omega_2(z) = \lambda_2 z + c_2$ 兩個變換所組成的疊代函數系統達到收斂後的吸子圖形。 $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 分別由兩條線段來呈現其變換類型，線段與基準線的長度比即縮放參數，線段與基準線的夾角即旋轉參數，而線段平移的距離即平移參數。

1. $\omega_1(z) = \lambda z$ 與 $\omega_2(z) = \lambda z + 1$

由於控制旋轉與縮放的參數相同，平移參數為 0 和 1，我們可以得知是由兩條與基準線等長、夾角相同的線段所構成，若使基準線 $(0, 0)$ 至 $(1, 0)$ 的一條單位線段，那麼產生器如圖 5-12 所示，其中一條線段與基準線左端點相連平移為 0，另一條線段與基準線右端點相連平移為 1。

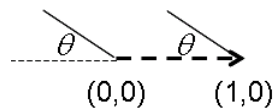


圖 5-12 $\omega_1(z) = \lambda z$; $\omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之產生器

以圖 5-12 為產生器，透過定線複製法重複疊代，疊代過程如圖 5-13，10 次之後在視覺上達到收斂狀態得到吸子，與圖 5-10 對照之下，是否與圖(b)左下角的圖形類似呢？

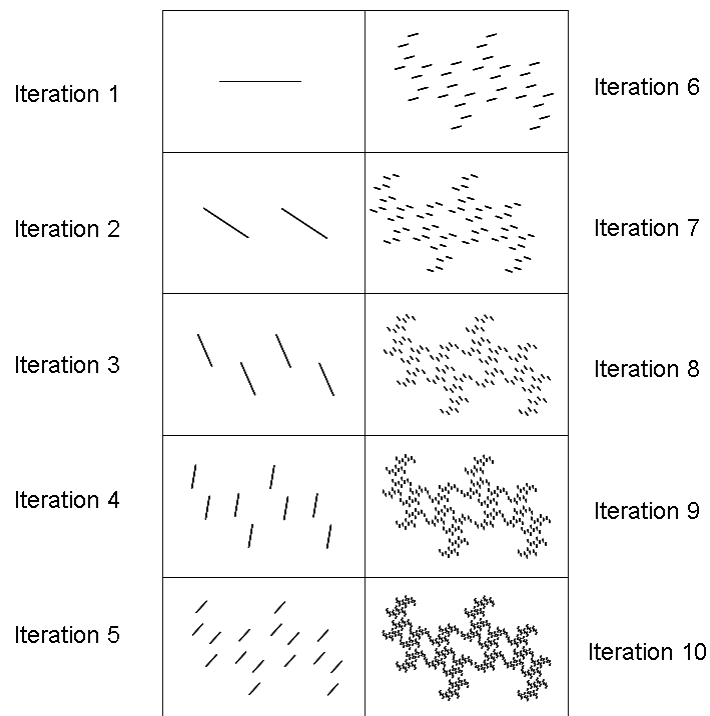


圖 5-13 $\omega_1(z) = \lambda z$; $\omega_2(z) = \lambda z + 1$ 的前 10 次疊代過程

2. $\omega_1(z) = \lambda * z$ 與 $\omega_2(z) = \lambda z + 1$

雖然仍保有相同的縮放參數與旋轉角度，平移參數還是 0 和 1，但旋轉方向是相反的，因此仍是由兩條與基準線等長的線段所構成，只需改變其中一條線段的旋轉方向即可，如圖 5-14，只是將圖 5-12 的其中一條線段作上下對稱。

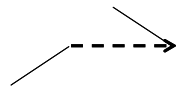


圖 5-14 $\omega_1(z) = \lambda * z$; $\omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之產生器

以圖 5-14 為產生器，透過定線複製法的重複疊代，在視覺上達到收斂狀態後，得到圖 5-15 的吸子，與圖 5-11 相互對照，會發現我們產生了與圖(b)左下角類似的圖形。



圖 5-15 $\omega_1(z) = \lambda * z$; $\omega_2(z) = \lambda z + 1$ 之吸子

同樣的產生器，我們改變兩線段與基準線的夾角，產生的結果大不相同，但卻還是與圖 5-10 和 5-11 的圖形類似，見圖 5-16。

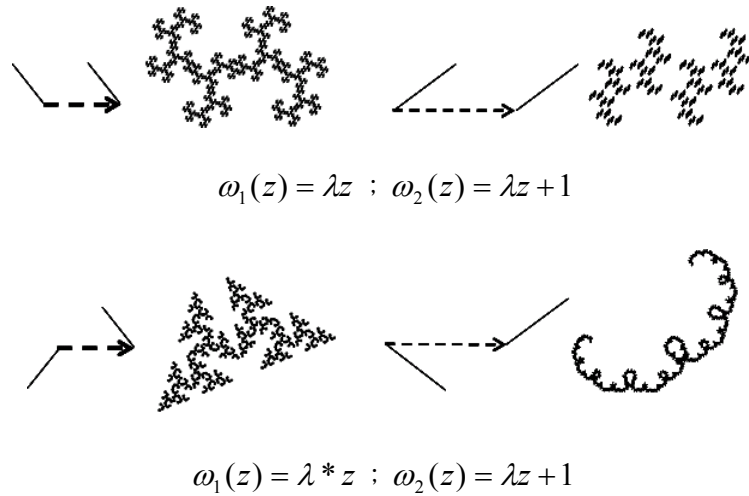


圖 5-16 改變兩線段與基準線的夾角產生之結果

3. $\omega_1(z) = \lambda_1 z + c_1$ 與 $\omega_2(z) = \lambda_2 z + c_2$

產生器由兩條長度不同、與基準線的夾角不相同的線段所構成，平移的距離也不同，所有可能收斂的吸子類型如圖 5-17。

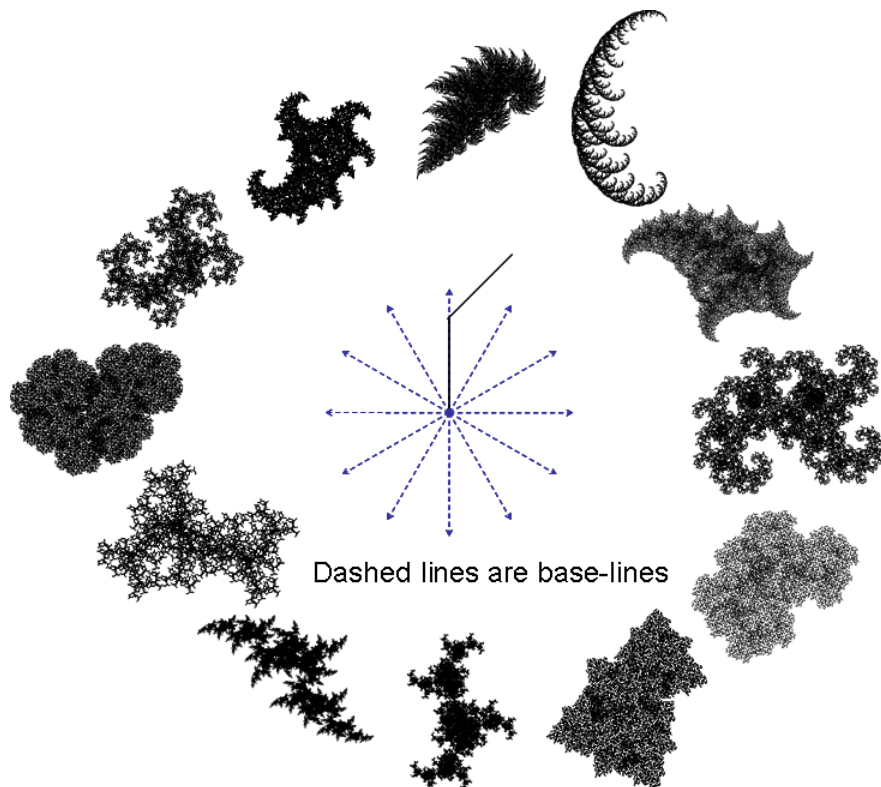


圖 5-17 以定線複製法所產生 $\omega_1(z) = \lambda_1 z + c_1$; $\omega_2(z) = \lambda_2 z + c_2$ 之吸子

5-3 維度 (Dimension) 之探討

碎形的特性有：(1) 自我相似；(2) 處處不可微分；(3) 非整數維度 (fractional dimension)。在歐幾里德幾何學中，我們所認識的點、線、面或體的維度皆為整數，然而，碎形卻有非整數的維度。以視覺化的觀點，碎形維度表示圖形粗糙的程度、結構的複雜度，或者是代表著碎形的長度、面積或體積介於兩次疊代之間的增加速率。

關於碎形的維度，有幾種不同的度量方法：(1) Hausdorff Dimension；(2) Self-Similarity Dimension；(3) Box-Counting Dimension。後兩種只適用於等長線段所構成之碎形，然而，定線複製法的使用並不侷限於每條線段必須等長，因此經過數次的疊代之後，可能每條線段的長度都不盡相同，這樣的碎形便無法以後兩種方法來度量維度，所以在此我們採用的是「Hausdorff Dimension」的度量方法。在介紹 Hausdorff Dimension 之前，我們必須先了解 Hausdorff measure 的概念。

5-3-1 Hausdorff measure

本節我們將介紹一些與 Hausdorff Dimension 相關之定義與性質，首先是「Hausdorff measure」的概念： U 是 n 維歐幾里德空間 R^n 中之任意子集合， $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ 為 U 的直徑 (diameter)；將覆蓋 F 之直徑最多為 δ 的集合蒐集起來成為 $\{U_i\}$ ，即

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad (5.10)$$

其中，對於每個 i 必須符合 $0 < |U_i| \leq \delta$ ，那麼如果 $\{U_i\}$ 為可數的話，則稱 $\{U_i\}$ 是 F 的一個 δ 覆蓋 (a δ -cover of F)。根據上述，「s-dimensional Hausdorff measure」定義為：若

$$H_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F\right\} \quad (5.11)$$

則 $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$ 為 F 的 s-dimensional Hausdorff measure，並具有下列特性：

1. 若 F 為空集合，則 $H^s(\emptyset) = 0$ 。
2. 若 E 為 F 的子集合，則 $H^s(E) \leq H^s(F)$ 。
3. 若 $\{F_i\}$ 為兩兩之間無交集的 Borel 集合之任意可數集，則

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i) \quad (5.12)$$

其中，Borel 集合是指重複地將開集合或閉集合經過可數次數的聯集或交集後所建造之集合[21]。另外，介紹一個在運算上常用的性質「Scaling Property」：若 $F \subset R^n$ 且 $\lambda > 0$ ，則

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F) \quad (5.13)$$

其中 $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ 。

5-3-2 Hausdorff Dimension

根據(5.11)，如果 $t > s$ 且 $\{U_i\}$ 是 F 的一個 δ ($\delta < 1$) 覆蓋，那麼可得到關係式如下：

$$\sum_t |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_t |U_i|^s \quad (5.14)$$

取 infima 後為

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F) \quad (5.15)$$

接著使 $\delta \rightarrow 0$ ，若 $H^s(F) < \infty$ 則 $H^t(F) = 0$ ($t > s$)，這個讓 $H^s(F)$ 從 ∞ 跳到 0 的臨界值 s (critical value) 就是 F 的 Hausdorff Dimension，標記為 $\dim_H F$ 。

若現有定線複製法所產生之碎形 F ，有 F_1, F_2, \dots, F_N 共 N 條長度不盡相同之線段，與產生器中的基準線長度比分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ，根據(5.12)， F 的 Hausdorff Dimension 為

$$H^s(F) = H^s(F_1) + H^s(F_2) + \dots + H^s(F_N) \quad (5.18)$$

$$H^s(F) = H^s(\lambda_1 F) + H^s(\lambda_2 F) + \dots + H^s(\lambda_N F) \quad (5.19)$$

根據 Scaling Property，

$$H^s(F) = \lambda_1^s H^s(F) + \lambda_2^s H^s(F) + \dots + \lambda_N^s H^s(F) \quad (5.20)$$

同除 $H^s(F)$ 後可得

$$1 = \lambda_1^s + \lambda_2^s + \dots + \lambda_N^s \quad (5.21)$$

如果這 N 條線段的長度為 $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_N$ 且產生器中的基準線長度為 b ，則(5.21)等價於

$$1 = \left(\frac{l_1}{b}\right)^s + \left(\frac{l_2}{b}\right)^s + \dots + \left(\frac{l_N}{b}\right)^s \quad (5.22)$$

其中須滿足 $\frac{l_1}{b} \leq \frac{l_2}{b} \leq \dots \leq \frac{l_N}{b} \leq 1$ ，才能使得 F 達到收斂狀態且其 Hausdorff Dimension 介於合理範圍 $1 \leq s \leq 2$ 。

圖 5-18 中，產生器皆為四條線段所構成，它們與基準線的長度比分別為：(a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ；(b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ ；(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ 。經由四次疊代後的結果如圖右，根據(5.22)，這些圖形的 Hausdorff Dimension 分別如下列運算式：

$$(a) \left(\frac{1}{3}\right)^{s_a} + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_a} + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_a} + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_a} = 1 \quad (5.23)$$

$$(b) \left(\frac{1}{3}\right)^{s_b} + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_b} + \left(\frac{1}{4}\right)^{s_b} + \left(\frac{2}{5}\right)^{s_b} = 1 \quad (5.24)$$

$$(c) \left(\frac{1}{3}\right)^{s_c} + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_c} + \left(\frac{1}{4}\right)^{s_c} + \left(\frac{1}{4}\right)^{s_c} = 1 \quad (5.25)$$

可得到 $s_a \approx 1.2619$, $s_b \approx 1.2513$, $s_c \approx 1.1263$, 其中維度最小的(c)在第四次疊代後已幾乎不再變動趨近收斂狀態，由此可知圖形的維度越小，會越快達到收斂狀態。

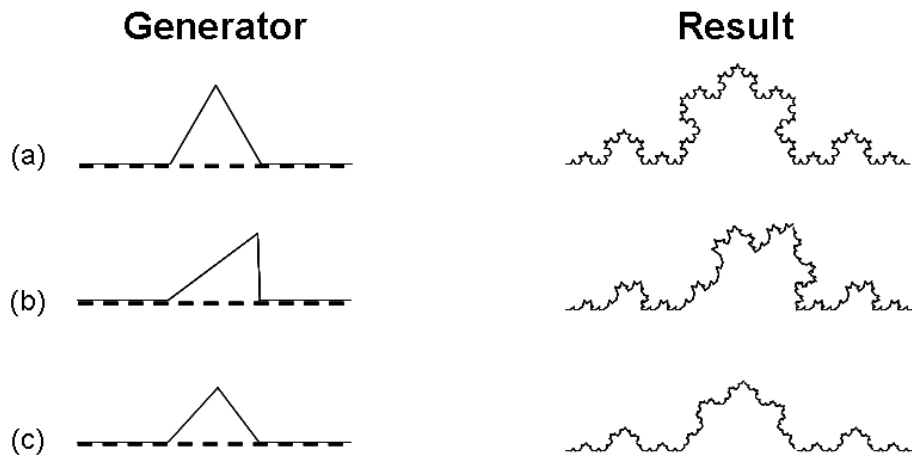


圖 5-18 Variations of von Koch Curve



第六章 對稱構圖

對稱構圖經常出現於各種族群的傳統圖案，尤其是伊斯蘭幾何構圖更是大量地使用，其中包括十七種基本結構(見附錄二)，有些簡單有些卻相當複雜，而以往繪製對稱構圖的方式，主要是使用特殊軟體來協助，才能夠處理這些分類繁多的複雜結構，我們希望能將定線複製法的精神融入，重組結構使得結構層次化且分類單純化後，透過單一指令呈現繪圖。

6-1 以定線複製繪製對稱圖之方法

由於對稱變換中的平移、旋轉、鏡射與滑動鏡射四種基本操作，皆包含在相似變換之下(滑動鏡射也只是鏡射與平移的結合)，因此使用定線複製法來製作高對稱性的圖形是最適合的。

我們遵循以下演算法之中的幾項原則，來將傳統的對稱結構轉換成以線段所構成的起始結構，以便執行定線複製法：

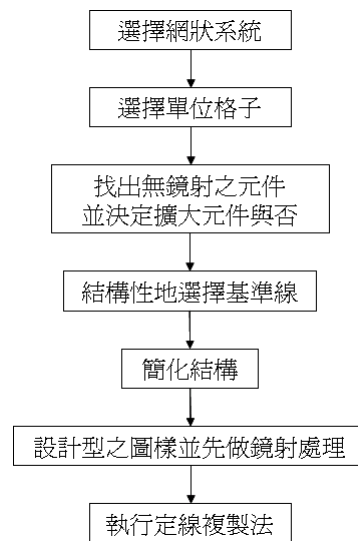


圖 6-1 演算法

1. 無鏡射之最小元件

若想對於某線段產生鏡射後的對稱圖案，我們可以賦予此線段「鏡射」的性質，來告知系統這條被標記的線段在下回合疊代時將產生線對稱的效果，但如果線段的數量過於龐大時，使用者很難以肉眼來判斷哪些線段具有鏡射性質而哪些線段沒有，會容易造成混淆與控制的不便，所以在此我們所討論的定線複製法，線段是不具「鏡射」性質的。然而鏡射並無法以線段反向或雙向線段來解決，因此我們考慮擴大單位格子的選擇，將鏡射先做處理，或選擇其他基準線，將結構分解至無鏡射之最小元件。

如圖 6-2，我們可以看到在 p6m 中會出現鏡射的情形，因此我們將單位格子擴大由兩個直角三角形所組成，而接下來的過程只需要旋轉不再有鏡射，所以(a)就是 p6m 的無鏡射之最小元件。

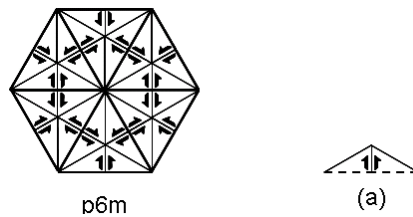


圖 6-2 (a)為 p6m 的無鏡射之最小元件

2. 不同元件的處理

有時候無鏡射之最小元件所簡化的結構可能還過於複雜，我們會選擇擴大元件，也就是將數個無鏡射之最小元件結合成為新的元件，但過度地擴大元件雖然能使結構變得相當簡單，卻也會造成元件內部太複雜，故適當的擴大是必須在兩者之間取得平衡。

3. 結構性地選擇基準線

找到無鏡射的最小元件之後，面臨的問題便是該如何選擇基準線。在選擇基準線時，我們基於「結構性」的考量，以既有的線段為優先選擇，而避免再新增線段；自行創造基準線的變化雖多，但必須考慮超出邊界所產生的問題。

4. 簡化(reduce)結構

原本的五種網狀系統(見附錄一)，經過取代的動作，可解構(decomposition)至較簡單的結構，如圖 6-6，我們以平行四邊形 T 來取代 p6 中的結構，原本的 p6m 結構被簡化為 p6。

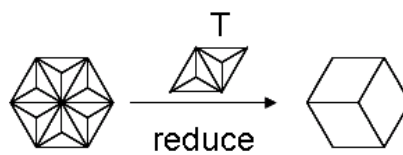


圖 6-3 將 p6 簡化為 p6

5. 鏡射處理

如果無鏡射之最小元件中出現鏡射的情形，我們必須在設計型之圖樣的時候，利用 Structure 中的對稱(reflection)功能將需要做線對稱的線段全部處理過後，才能以此為產生器執行定線複製法。

6-2 對稱圖的解構分析

上一節所提到的「解構」(decomposition)，我們發現在正方形與六邊形網狀系統中存在一種對應關係，整理如下列的解構表所示：

1. 正方形網狀系統—p4, p4m, p4g :

解構表中，左欄為基本結構圖，經過不同元件(灰色區域)的取代可簡化為下欄的解構圖，三者之間的關係如表 6-1 中的箭頭所指示，p4g 結構經過元件 a 之取代會對應至 p4 的結構，他們的關係式可表示為：

基本結構圖 → 元件 + 解構圖

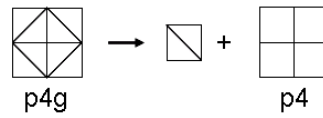


圖 6-4 基本結構圖與元件、解構圖之間的關係式

但 p4m 與 p4g 之間無法找到適當的取代元件來獲得對應關係。

表 6-1 p4, p4m, p4g 之解構表

p4				
p4m				
p4g				
		p4	p4m	p4g




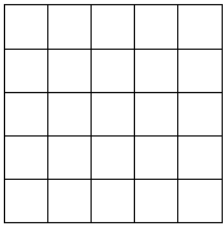
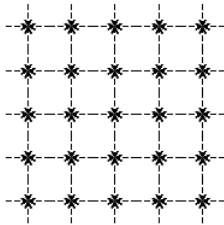
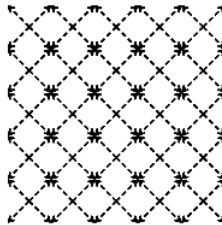
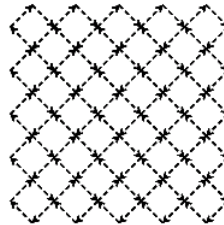
我們發現這三種基本結構圖分別以不同的元件來取代，卻可對應到相同的解構圖 p4，因此如果同樣選擇正方形元件的右邊為基準線(方向朝上)，那麼對應至解構圖會得到四條基準線所構成的十字型起始結構(方向皆朝內)，如表 6-2 的圖 a。

表 6-2 基準線的選擇與對應之結構

p4				
p4m				
p4g				
Initiators →				
		a	b	c

在表 6-2 的最底欄，p4m 以直角三角形的斜邊作為基準線會得到叉叉形狀的起始結構 b，而 p4g 以直角三角形的斜邊作為基準線則會得到菱形起始結構 c，這些都是由解構圖對應得來的起始結構，當我們將這三種起始結構放入正方形網狀系統，巨型結構(macro structure)如表 6-3 所示。圖 6-5 是以圖 a 為起始結構的範例。

表 6-3 起始結構與巨型結構之對應

	a 	b 	c 
			

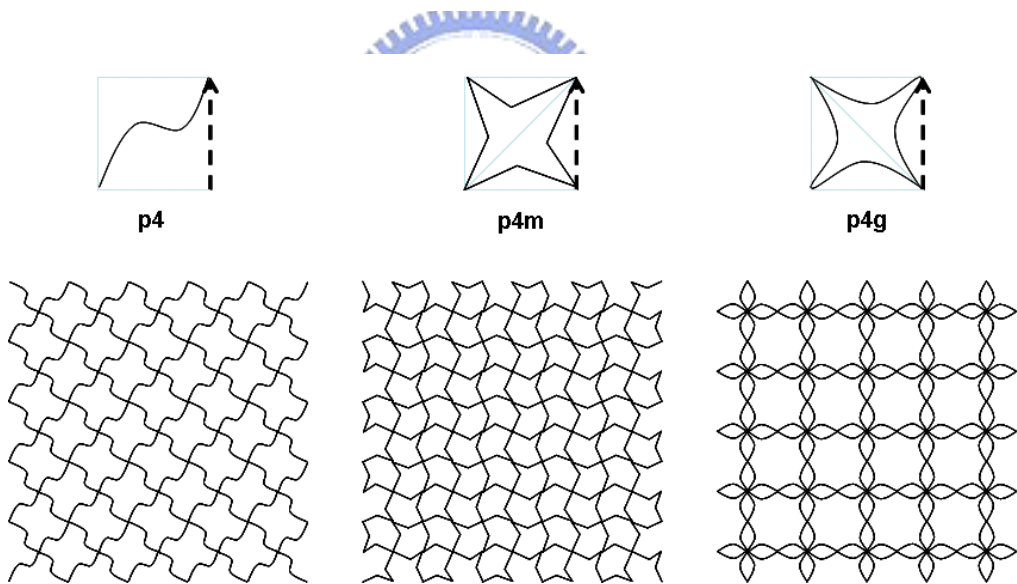


圖 6-5 以 a 為起始結構之範例

2. 六邊形網狀系統—p3, p31m, p3m1, p6, p6m :

在解構表中，我們可以看到除了 p3m1、p6 與 p31m 無法找到適當的取代元件來獲得對應之外，其他的結構，兩兩皆有對應關係。如果以平行四邊形為取代元件，則此五種結構皆可對應至解構圖 p3，雖然這樣的元件適用於每個結構來做簡化，但在取代 p6m 的過程中，其平行四邊形的元件裡包含過多複雜的小結構，在操作上並不容易；可是如果取代元件太細小，對應的解構圖就會相對地太複雜，因此必須在兩者之間取得平衡，如表 6-4 中虛線所圈選者是我們認為元件不會過於細小，且簡

化後的解構圖也不會太複雜的組合。

表 6-4 p3, p31m, p3m1, p6, p6m 之解構表

p3						
p31m						
p3m1						
p6						
p6m						
		p3	p31m	p3m1	p6	p6m

在表 6-5 與 6-6 中，舉例說明同一個基本結構圖但選擇不同的兩種基準線所對應的解構圖以及起始結構，然而基準線的選擇並不侷限於這兩種。我們將其中三種起始結構(表 6-5 的圖 a, b 和 c)放入六邊形網狀系統，巨型結構(macro structure)如表 6-7。

表 6-5 基準線的選擇與對應之結構(1)

p3						
p31m						
p3m1						
p6						
p6m						
Initiators →						
		a	b	c	d	e

表 6-6 基準線的選擇與對應之結構(2)












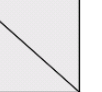




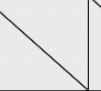
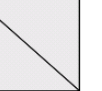





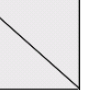





















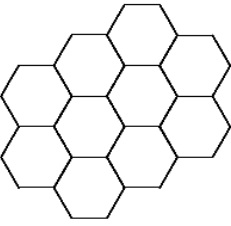
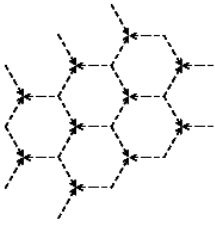
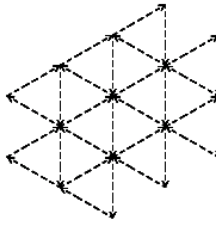
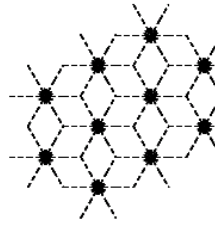
p3						
p31m						
p3m1						
p6						
p6m						
						
Initiators →						

表 6-7 起始結構與巨型結構之對應

	a 	b 	c 
			

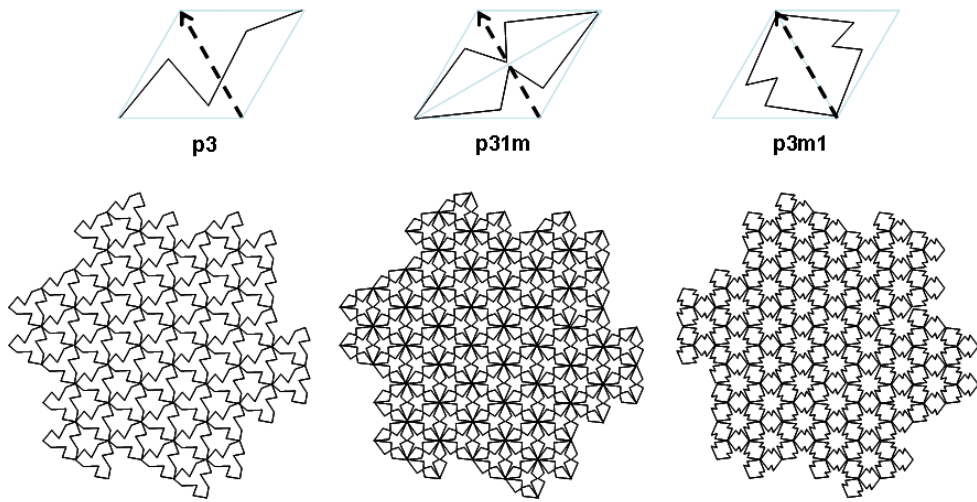


圖 6-6 以 a 為起始結構之範例

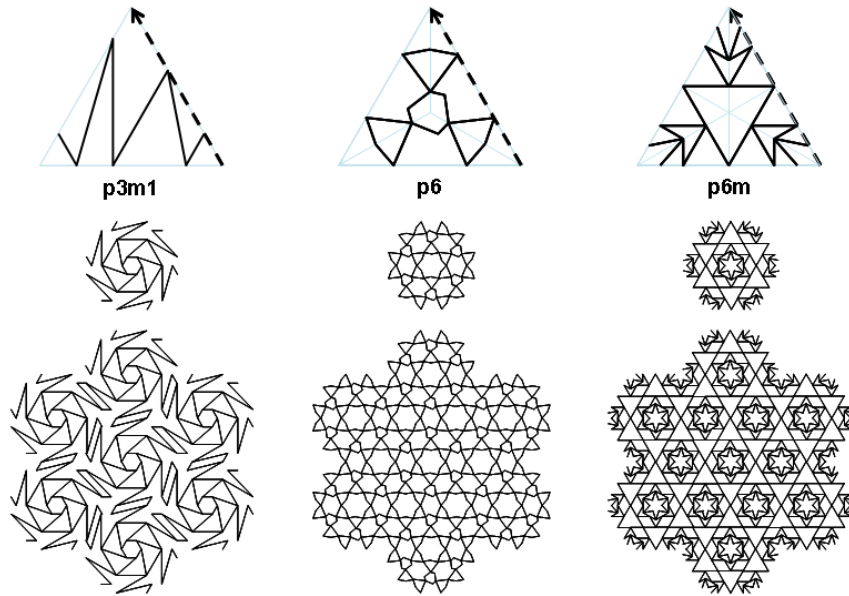


圖 6-7 以 c 為起始結構之範例

第七章 多元產生器

我們在前幾章所討論的定線複製法，都只有使用單一產生器，而產生器中的型多為線段所構成，雖然經由這樣簡單的單一產生器，已經可以創造出許多令人驚奇的結果，但事實上，定線複製法的運用並不侷限於此，是容許數個產生器交互作用的，因此本章主要介紹多元產生器(multi-generator)的疊代過程及其應用。

7-1 理論

假設有 t 個不同的產生器 G_1, G_2, \dots, G_t ，每個產生器中由 n_t ($t=1, 2, \dots$) 條線段或物件所組成，其中的變換可表示為

$$\begin{aligned} G_1 &= w_1^{(1)} \cup w_2^{(1)} \cup \dots \cup w_{n_1}^{(1)} \\ G_2 &= w_1^{(2)} \cup w_2^{(2)} \cup \dots \cup w_{n_2}^{(2)} \\ &\dots \\ G_t &= w_1^{(t)} \cup w_2^{(t)} \cup \dots \cup w_{n_t}^{(t)} \end{aligned} \quad (7.1)$$

對於起始結構 I 而言，每次都可以從 G_1, G_2, \dots, G_t 之中任選一個產生器來作定線複製，則起始結構 I 之中的某一條線段在經過 k 回合疊代後的輸出結果為

$$I_{i_1 i_2 \dots i_k} = w_{i_k}^{(s_k)} (w_{i_{k-1}}^{(s_{k-1})} (\dots (w_{i_2}^{(s_2)} (w_{i_1}^{(s_1)} (I)))))) \quad (7.2)$$

其中 $1 \leq i_m \leq n_t$ ， $1 \leq s_l \leq t$ 為生產器之選擇順序， $k = 1, 2, \dots$ 為有限次數疊代。

舉例來說，若現有 G_1 、 G_2 和 G_3 三種產生器，分別由三條、四條及五條線段所組成(如圖 7-1)，即

$$\begin{aligned} G_1 &= w_1^{(1)} \cup w_2^{(1)} \cup w_3^{(1)} \\ G_2 &= w_1^{(2)} \cup w_2^{(2)} \cup w_3^{(2)} \cup w_4^{(2)} \\ G_3 &= w_1^{(3)} \cup w_2^{(3)} \cup w_3^{(3)} \cup w_4^{(3)} \cup w_5^{(3)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

我們選擇 G_1 為第一次疊代的產生器， G_2 為第二次疊代的產生器， G_3 為第三次疊代的產生器，則經過三次疊代之後的輸出結果為

$$I_{i_1 i_2 i_3} = w_{i_3}^{(1)} (w_{i_2}^{(3)} (w_{i_1}^{(2)} (I))) \quad (7.4)$$

其中 $1 \leq i_1 \leq 4$ ， $1 \leq i_2 \leq 5$ ， $1 \leq i_3 \leq 3$ ，共有 60 種組合，也就是有 60 條線段的產生。其中的線段如 $I_{452} = w_2^{(1)} (w_5^{(3)} (w_4^{(2)} (I)))$ ，表示它是起始結構 I ，在第一次疊代經過 G_2 的 w_4 變換為 I_4 ，第二次疊代經過 G_3 的 w_5 變換為 I_{45} ，第三次疊代經過 G_1 的 w_2 變換最後得到

I_{452} ，圖 7-1 中較粗黑線段為 I_{452} 的產生過程。

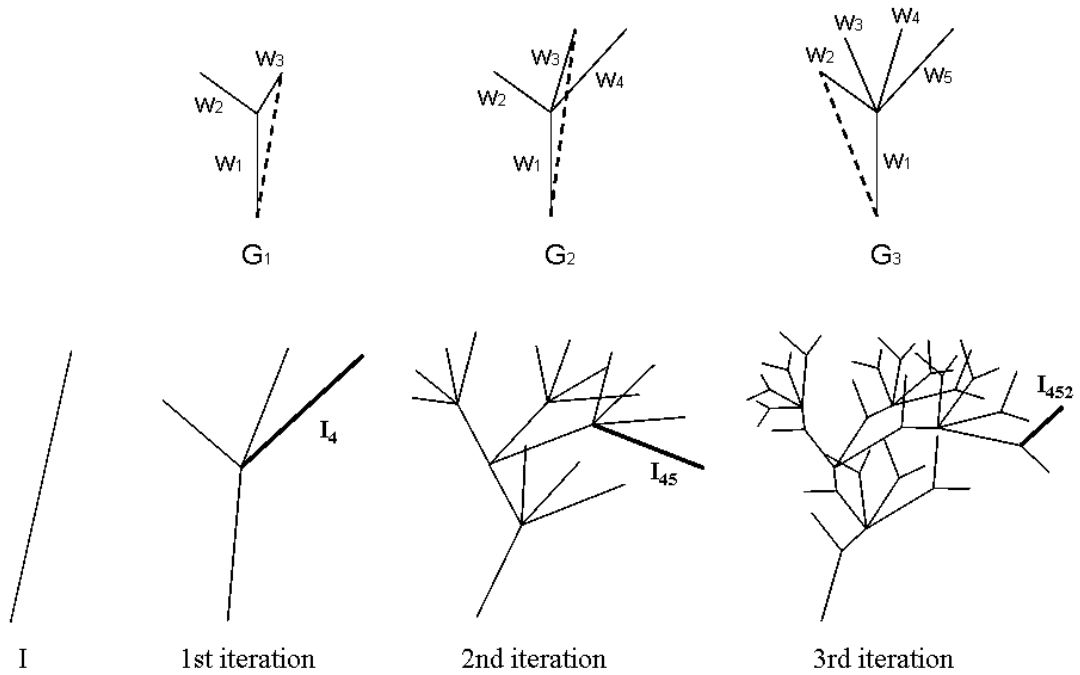


圖 7-1 多元產生器之交互運用

接下來，我們將多元產生器應用於繪製：(1)仿自然(artificial nature)；(2)貼磚(tiling)與密鋪平面(tessellation)；(3)視覺設計(visual design)。

7-2 仿自然

透過單一產生器的巧妙設計，與基準線的不同選擇，我們已經能夠模擬許多自然界中的植物，如圖 7-2 之中的圖案，在枝幹、樹葉以及花朵的擬真方面，皆具有極高的相似度，因此在視覺上會讓我們有認為像薰衣草、楓葉或樹等植物的感覺。



圖 7-2 單一產生器仿自然之範例

以單一產生器來使用定線複製法進行疊代，由於從頭到尾都是以同樣的產生器來取代線段，使得整體的大架構與近看的細部架構是相同的，即具備碎形之「自我相似」的特性。

而透過多元產生器的交互運用，我們可以創造出更多彷彿相似卻又相異的植物。如圖 7-3 中，我們有兩種同型但不同基準線的產生器 a 與 b，分別以不同的使用順序來進行四回合的疊代。圖 7-3(1)是前兩次採用產生器 a，後兩次採用產生器 b 的疊代過程；圖 7-3(2)則是前兩次採用產生器 b，後兩次採用產生器 a 的疊代過程。如果將兩個結果對照，會發現雖然兩產生器同型造成細部結構(樹葉部分)是相同的，但是整體看來，兩者的大架構(枝幹部分)與濃密程度卻是完全不同的，由此可知，前幾次疊代所採用的產生器會影響整個大架構的外觀，後幾次疊代所採用的產生器則是造成細部架構的造型，所以產生器的使用順序是會影響最後結果的關鍵因素之一。

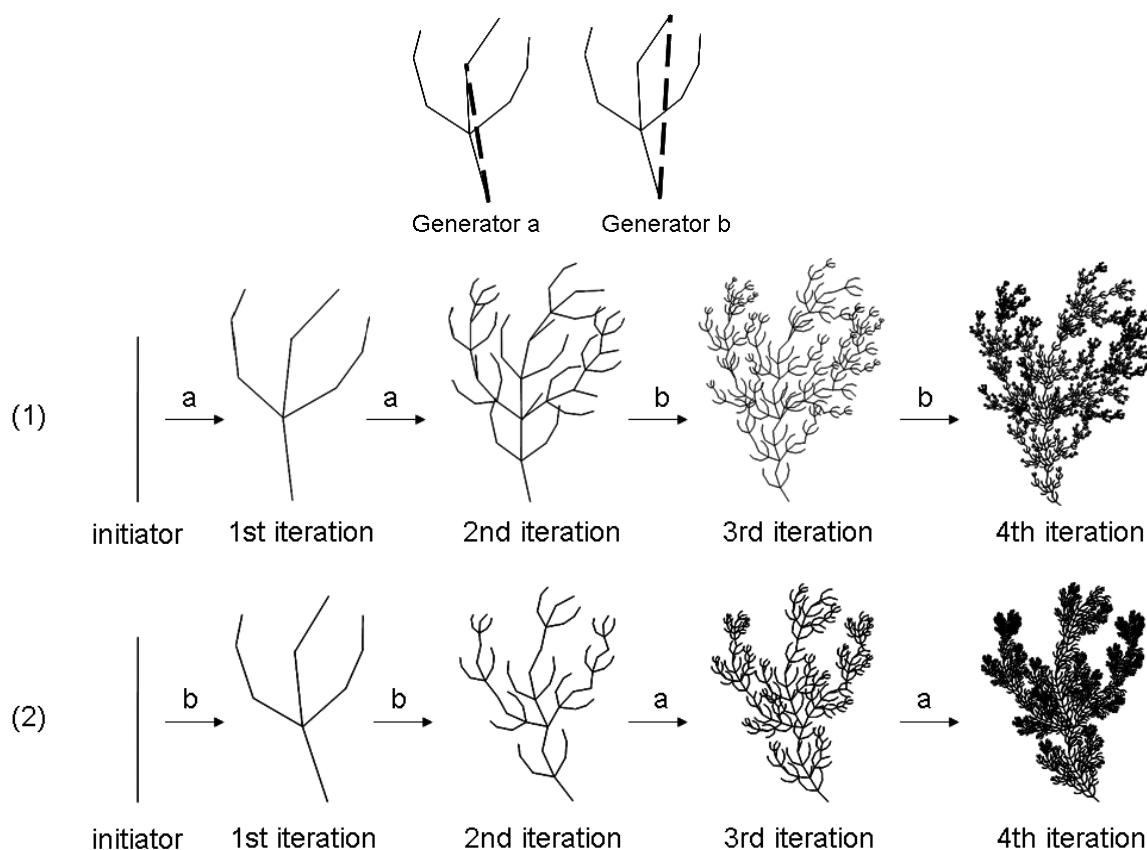


圖 7-3 多元產生器的順序會影響結果

圖 7-4 為三種產生器之範例，以產生器 a 進行第一次疊代，再以產生器 b 進行兩次疊代，最後以產生器 c 進行一次疊代。然而，以三種產生器來排序完成四次疊代，共有 3^4 種組合，若有更多種產生器則將創造出更多變的組合，因此我們對於這些結果必須做「編碼(labeling)」的動作，使得產生器的使用順序能夠一目瞭然，如圖 7-4 的範例，將被編碼為「abbc」。

如果出現某些圖案被編碼為「abxx」，表示前兩次疊代分別使用產生器 a 和 b，那麼它們在大架構上會是相似的；而如果有某些圖案被編碼為「xxab」，表示後兩次疊代分別使用產生器 a 和 b，那麼它們在細部結構上會是相似的；疊代次數增多，仍會保有此原則，故可從編碼上來分辨。

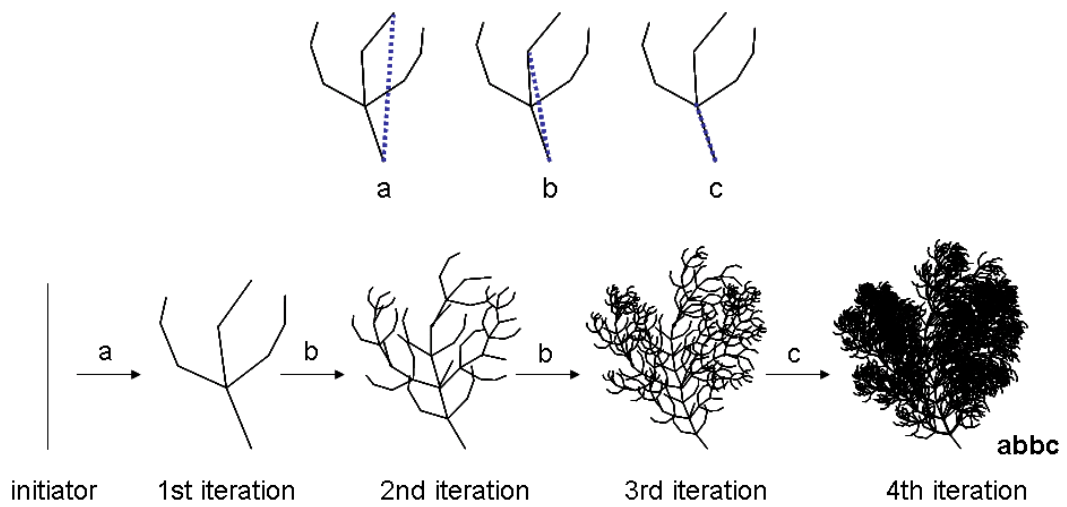


圖 7-4 三種產生器之運用與編碼



圖 7-5 多元產生器之範例

植物在生長過程中，不可避免地受到許多外力因素影響其成長，包括風吹雨打或動物啃食等干擾，使得整體架構並非相當符合自我相似的特性，故在模擬植物生長的過程常常會引進「隨意化(randomness)」的想法，是為了更符合植物的真實狀態，在此我們以「插花」原則之中剪枝與重組的概念來呈現隨意化。圖 7-6 是以此原則所產生之梅與竹。



圖 7-6 經剪枝、重組後之梅與竹

7-3 鋪磚與密鋪平面

「鋪磚(tiling)」是指將任意形狀之磁磚鋪於平面，兩兩之間無縫隙或重疊的情形發生，譬如常見的磁磚地板、牆壁或天花板都是鋪磚的一種。

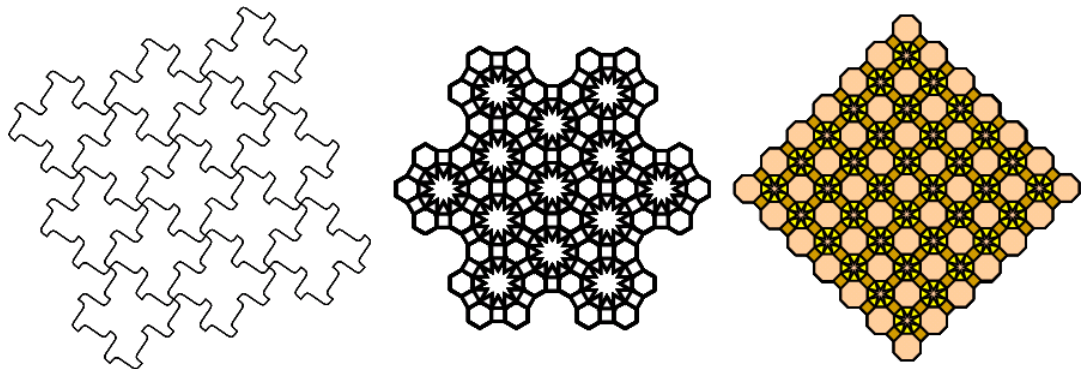


圖 7-7 tiling 之範例

使用定線複製法的基礎必須建立於起始結構是由線段所構成的，因此我們須先將鋪磚的「平面」轉換為「線段」，而數學簡報系統(MathPS)所提供的方法包括：(1)分段(polygonal line to segment)；(2)顯示邊(show edges)；(3)線互切(cut line)等功能，可幫助我們產生線段作為起始結構。譬如圖 7-8，將取消群組的格線適當地調整線段方向，便得到了起始結構(a)，再以產生器(b)執行定線複製法的結果，即為鋪磚圖案。

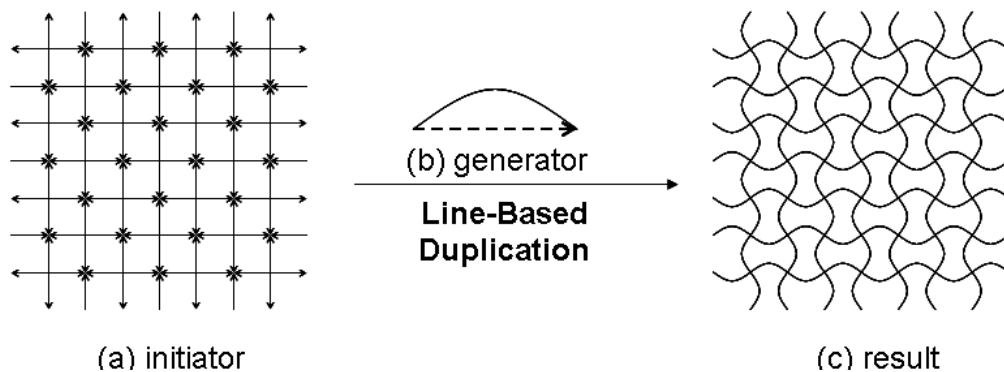


圖 7-8 以定線複製法繪製鋪磚圖案

「密鋪平面 (tessellation)」則是以正多邊形來作鋪嵌平面。根據正多邊形之類型可分為三種：(1) regular tessellation；(2) semi-regular tessellation；(3) demi-regular tessellation。

1. regular tessellation 是以單一正多邊形來作鋪嵌。

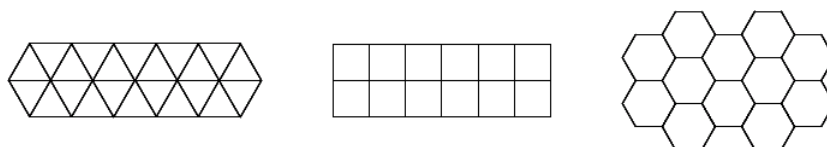


圖 7-9 regular tessellation 只有六角陣、三角陣與方陣三種

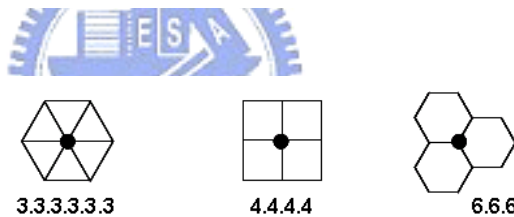


圖 7-10 types of vertices

n_1, n_2, \dots 稱為點的種類 (type of vertex) [16]，表示在正多邊形上任選一頂點，這個頂點是由一個正 n_1 邊形、一個正 n_2 邊形...所環繞著，若其中包括 s 個正 n_i 邊形則可簡記為 n_i^s ，譬如圖 7-10 中 3.3.3.3.3.3 可簡記為 3^6 ，以此類推。

2. semi-regular tessellation 是以兩種以上的正多邊形來作鋪嵌。
3. demi-regular tessellation (polymorph tessellation) 是具有兩種點的種類，又稱為 2-uniform tessellation。

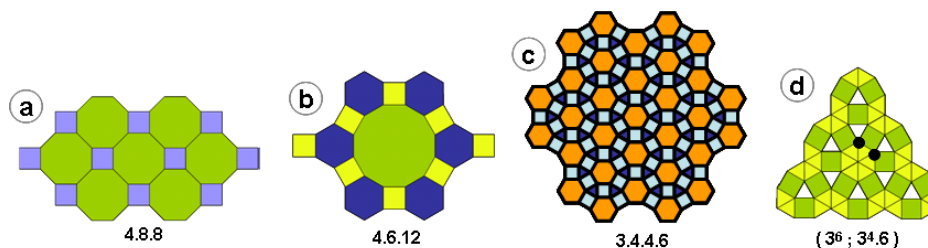


圖 7-11 (a)-(c) semi-regular tessellation (d) demi-regular tessellation

若根據邊與邊之間的相連狀態，則分為兩種：(1) edge-to-edge；(2) non-edge-to-edge。

1. edge-to-edge 是指相鄰的兩正多邊形有某一邊完全重合。
2. non-edge-to-edge 是指相鄰的兩正多邊形有某一邊僅部分重合。

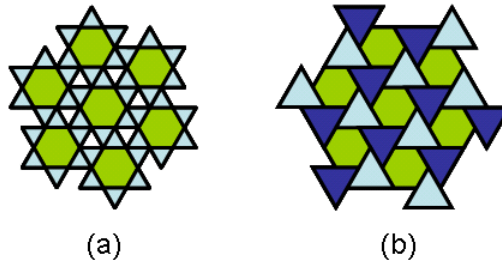


圖 7-12 (a) edge-to-edge (b) non-edge-to-edge

接著我們示範如何以定線複製法繪製多邊形的 edge-to-edge 與 non-edge-to-edge 圖形：

1. 多邊形 edge-to-edge 的密鋪平面

將多邊形顯示邊線並反向之後，每條邊皆可當為基準線，每次疊代時可選擇不同的產生器來對任選的邊產生多邊形，由於定線複製法會根據線段的比例來產生與型相似的多邊形複本，因此不必擔心基準線與疊代線不等長的問題，且所產生的複本必定與已存在之多邊形為 edge-to-edge 相連。如圖 7-13，將五邊形顯示邊線後的五條線段反轉成為順時針方向，並編號為 1 至 5；第一次使用 1 號基準線與五邊形作為產生器，對虛線所圈選的邊以定線複製法產生 edge-to-edge 相連的五邊形 a；第二次使用 3 號基準線與五邊形作為產生器，第三次則使用 4 號基準線，根據與基準線之比例所產生的相似五邊形皆為 edge-to-edge 相連。

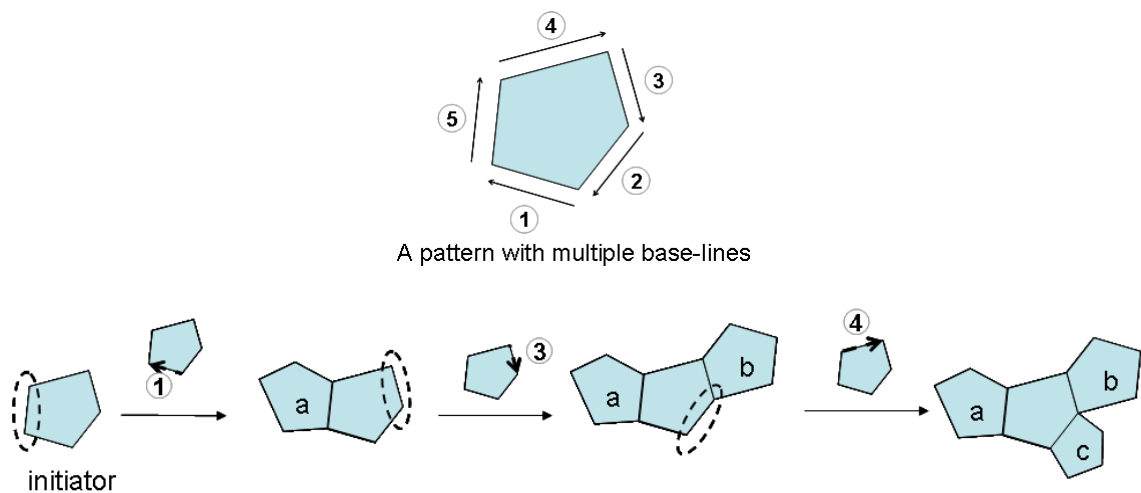


圖 7-13 多邊形的 edge-to-edge

如果是正多邊形的 edge-to-edge，因為顯示邊線之後的每條邊所組成的產生器是相同的，所以其實只有一種基準線。圖 7-14 左邊的三種產生器中，我們皆以底邊作為基準線，一開始我們以正方形產生器讓正三角形的每個邊各長出一個正方

形，接著以正六邊形產生器使虛線所圈選的三個邊各長出一個正六邊形，以此類推，所產生的正多邊形之間都是 edge-to-edge 的。

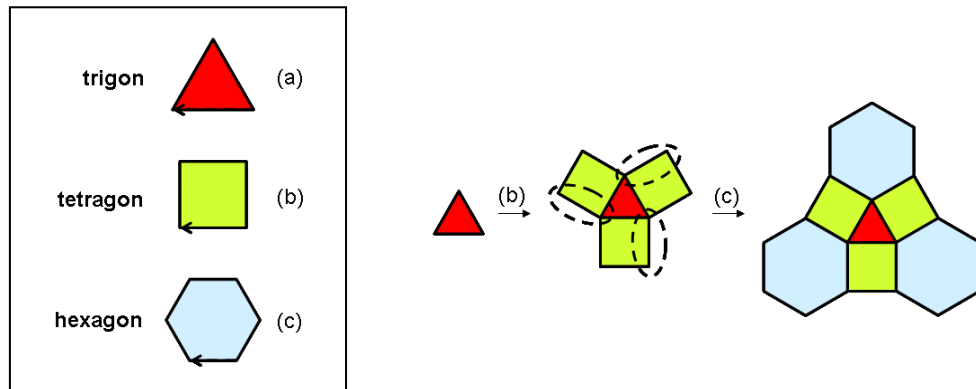


圖 7-14 正多邊形的 edge-to-edge

2. 多邊形 non-edge-to-edge 的密鋪平面

由於這類的密鋪平面，是兩相鄰多邊形之間的邊只有部分重合，因此我們將邊線「等分(divide)」成適當的數量，啟動對齊物件的功能後，藉著等分點的吸引力來貼齊。圖 7-15 中，把每個正三角形的邊線皆等分為二，所以在拼貼正六邊形時，可以和正三角形只重合二分之一的邊。

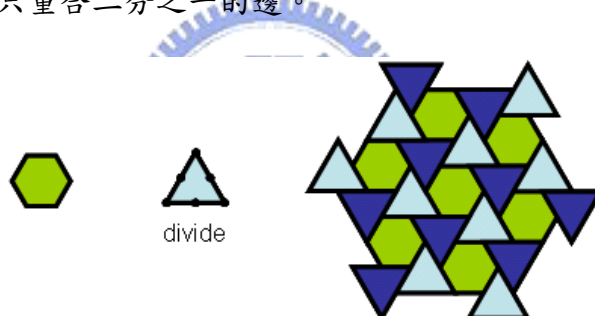


圖 7-15 non-edge-to-edge 的主要步驟：等分(divide)

在這節的內容裡，我們所強調的是圖形間「無重疊」與「無縫隙」之鋪貼，但如果跳脫這些限制，允許重疊的現象發生或不再強調(non-)edge-to-edge 時，會有更多的發揮空間來創造出特殊的圖樣，這類的圖樣我們稱之為「partial edge-to-edge」的密鋪平面，如圖 7-16，左圖中有些多邊形是邊與邊相連，有些則是重疊；右圖中有些多邊形之間僅以頂點相連。這類型的圖樣，重疊的情形在經過重新切割後可獲得新的網狀結構與型，依舊屬於密鋪平面，所以使用者在設計圖樣的過程中並不需特別擔心重疊的情形，能更自由地任意創造，因此在下一節，我們將說明如何以定線複製法來做圖案設計。

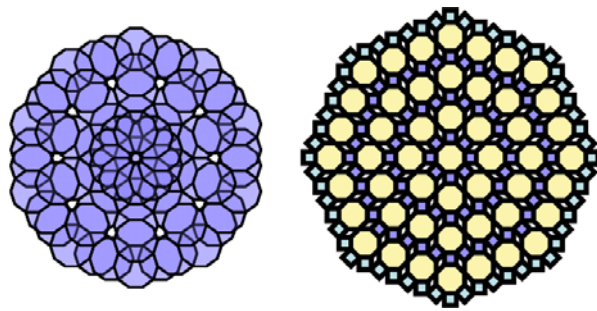


圖 7-16 partial edge-to-edge 密鋪平面

7-4 圖案設計

想要創造出具有視覺效果的圖樣，產生器與起始結構的設計是首要條件。如圖 7-17 中的七個圖樣，是由放射線的起始結構(a)，進行一次以上的定線複製法所產生的，我們可以看到有些圖樣是產生器互相交錯而來的，有些則完全不重疊，這都是受產生器之影響。同樣地，圖 7-18 則是採用格線或方陣的起始結構，雖然圖案或線段之間有重疊或空隙，但也可視為密鋪平面的一種應用。

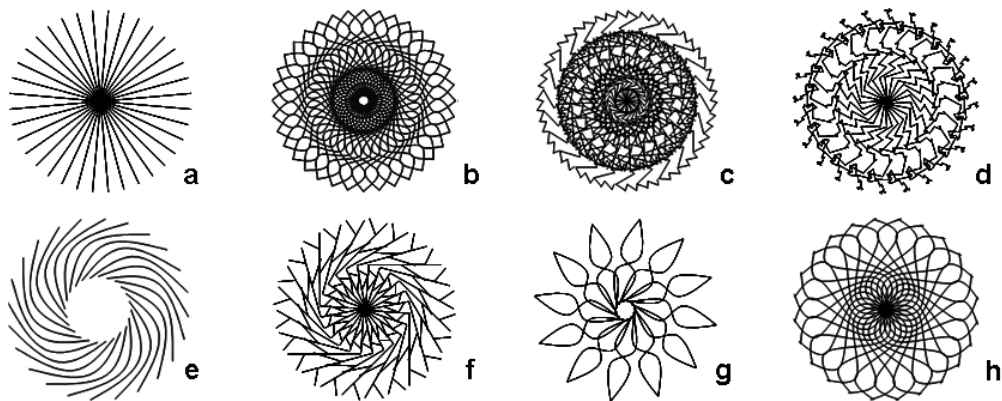


圖 7-17 以放射線為起始結構之圖案設計範例(1)

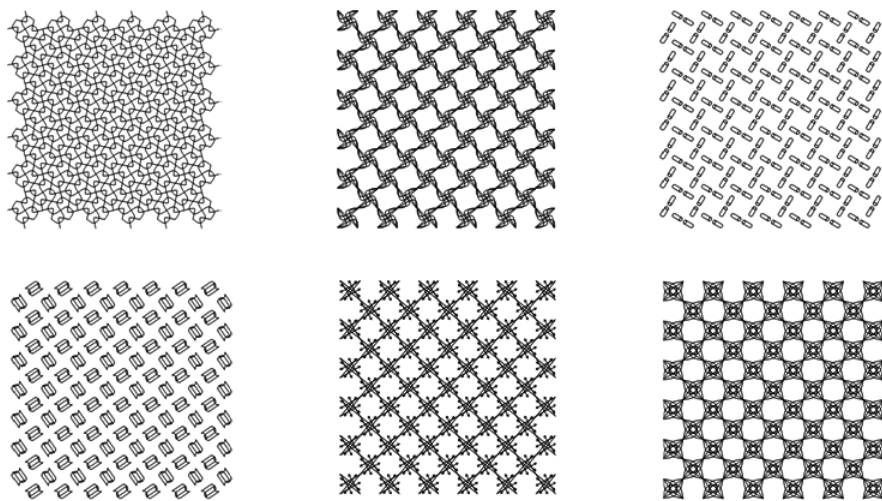


圖 7-18 以格線及變形為起始結構之圖案設計範例(2)

除了上面這些執行一次定線複製法的成品，我們也可以將「疊代」的概念放進來，如圖 7-17 中的 c、d、f 就是以放射線為起始結構疊代多次所產生的圖案，其過程如圖 7-19 所分解。圖 7-20 為同樣以放射線進行疊代之範例，但增加疊代次數使線條顯得更細緻，在視覺上有股典雅的味道。

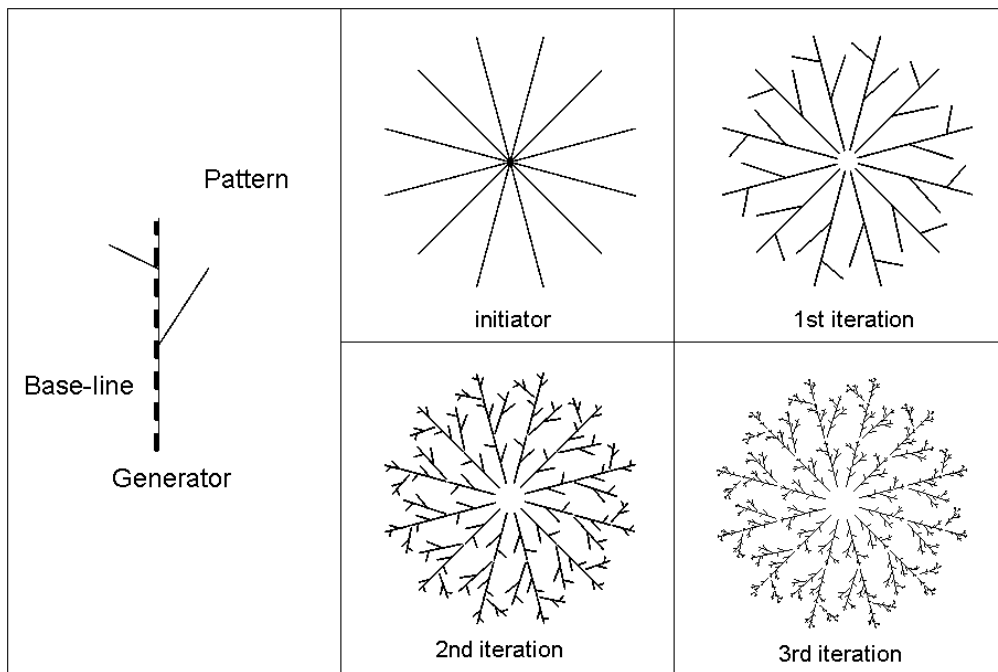


圖 7-19 圖案設計之疊代概念

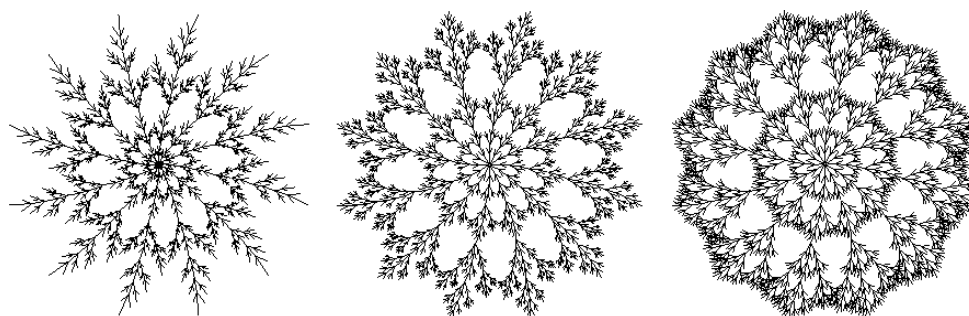


圖 7-20 圖案設計之疊代範例

7-5 其他

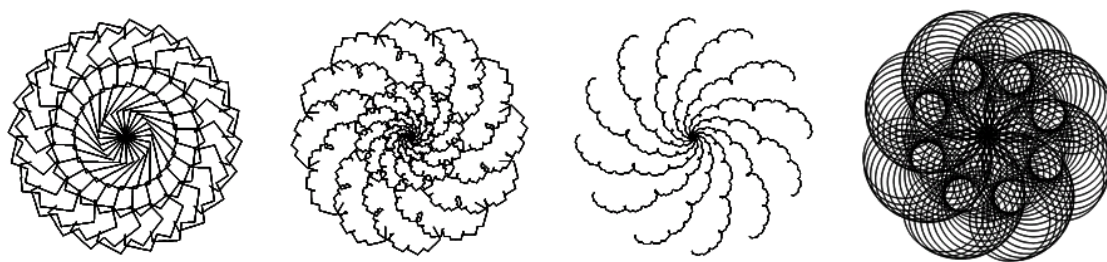


圖 7-21 其他範例(1)

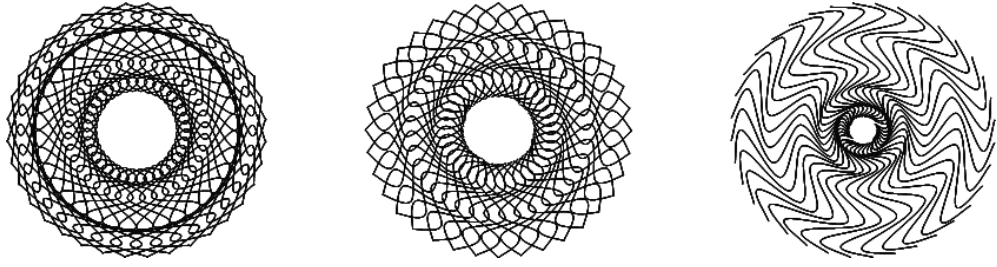


圖 7-22 其他範例(2)

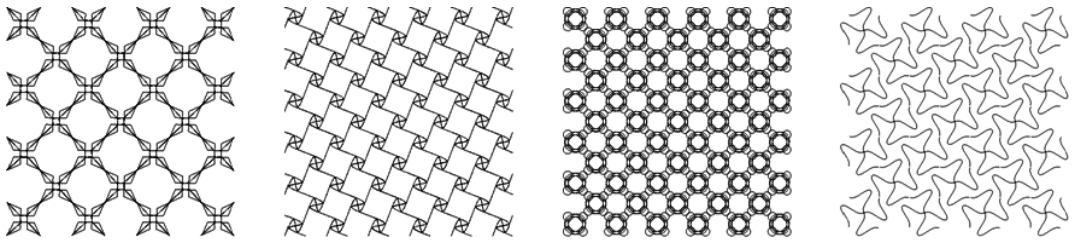


圖 7-23 其他範例(3)

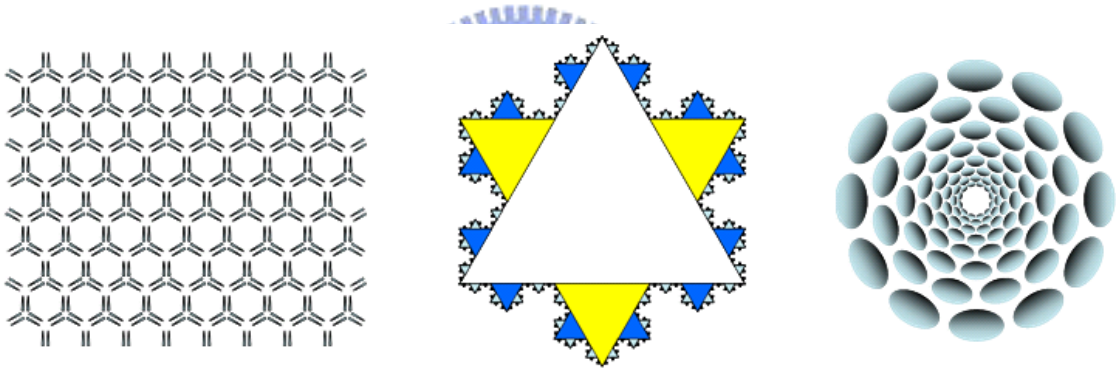


圖 7-24 其他範例(4)

第八章 結論

定線複製法的特點

定線複製法以視覺化的方式提供相似變換所需要的訊息，讓我們能夠在一般的構圖平台上，以手動的方式完成定點位移、定角旋轉、定長縮放，以及定線鏡射的動作。操作者只需要告訴定線複製法相關定位訊息的所在即可，不需要直接輸入相似變換所需要的位置、角度及縮放比例等數值資料。更重要的是，不需要直接運用滑鼠處理平移、旋轉、縮放及鏡射，解決了滑鼠操作的不確定性與不準確性，也節省了大量的人力操作。

定線複製法提供一個通用型的繪圖環境，產生器與起始結構和系統本身並沒有任何的關聯，所有的型或結構都是自由規格，可運用各種方法產生。此一特性可提供使用者更具彈性的繪圖空間。比如：幾何對稱構圖、密鋪結構性強，自我相似圖、仿自然及視覺設計結構性弱。

設計自我相似圖時，如仿自然，產生器的圖像和最後的結果之間有著相似的感覺，不過這種感覺並非都非常的強烈，有其模糊性，似乎可以掌握，又不確定。這一個特性讓使用者設計圖像時有依循的方向，產生的結果卻往往充滿驚奇，這是其他設計自我相似圖的軟體無法提供的。

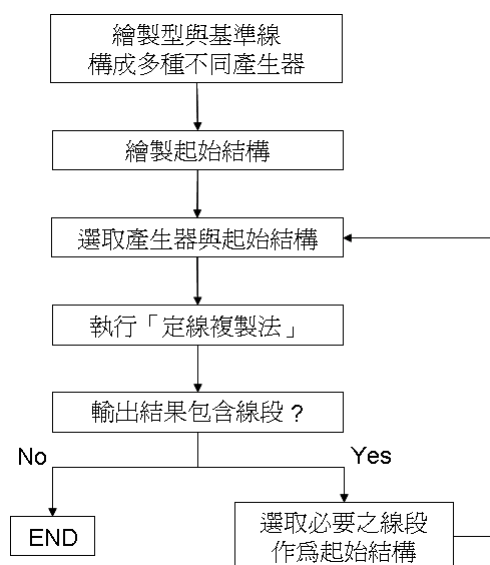
疊代往往需要大量的計算，因此何時停止繼續疊代，是一個重要的課題。在數學的上，當疊代無窮多次後 $W(A_{\infty})=A$ ，即稱為達到收斂狀態—數學概念上的收斂。在數值計算上，我們可以定義一個容忍程度，決定收斂的時機—數值計算上的收斂。如果計算的結果需要數位化後呈現在電腦螢幕上，那麼容忍的程度就更為寬鬆—數位呈現上的收斂。以定線複製法疊代繪製圖像時，由於線段具有「素描」的效果，在幾個循環之後，畫面上的圖像雖然仍在變動中，圖像已經能讓人有所感覺—視覺上的收斂，這是定線複製法的一個特色。

未來研發方向

1. 多元產生器的設計

單一的產生器所能繪製的圖像比較單純，然而，在我們的生活中所見到的圖像大部份是由多種結構所構成，比如大樹的整體形象是由樹幹及較粗的枝幹所構成，它們和細枝及新芽，結構是不同的。如何運用多元產生器設計圖案的主要結構，次要結構，以至於末梢微型結構。

表 8-1 多元產生器之運用



2. 起始結構中屬性的設置

當起始結構與產生結構中的線段具備多種屬性時，可讓不同的產生器在不同屬性的起始結構上作用，創造更為複雜精緻的圖案。如圖 4-25，是我們在產生器的各個線段中賦予不同的「鏡射」組合，產生一系列的圖形變化。屬性的設計與掌控，可協助構圖。

3. 定線複製法、定框複製法與其他複製法則之結合

本文所探討之定線複製法，主要是以「線段」作為基準，呈現視覺上的相似變換；Structural Self-clone Method 中的「定框複製法(Frame-Based Duplication)」，以「框」為基準，可以處理仿射變換，它的作用比定線複製法強，但是視覺效果不好，操作不易。如何結合兩者特點，研發更具效果的繪圖環境是未來必要的工作之一。

4. 與繪圖專業軟體結合

PowerPoint 只提供簡單的繪圖功能，我們將定線複製法外掛在該軟體上，本文所有的構圖，都是運用外掛於 PowerPoint 的 MathPS 所繪製而成。簡單的功能，已經能夠發揮如此強的效益，如果能夠結合繪圖專業軟體，那麼所產生的人力效益將更為強大。

5. 視覺知覺之研究

對於所繪製的結果，使用者時常會自動產生一種「感覺像某種事物」的圖像感覺，針對視覺知覺這方面的研究，我們可以再作更進一步的探討。

參考文獻

1. Abas, S. J., Salman, A. S., Symmetries of Islamic Geometrical Patterns, World Scientific, 1995.
2. Armstrong, M. A., Groups and Symmetry, Springer-Verlag, 1988.
3. Barnsley, M. F., Fractals Everywhere, 2nd ed, Academic Press, MA, 1993.
4. Barnsley, M. F., Lyman, P. H., Fractal Image Compression, AK Peters, Ltd., 1993.
5. Bovill, C., Fractal Geometry in Architecture and Design, Birkhäuser, Boston, 1996.
6. Critchlow, K., Order in Space: A Design Source Book, Viking Press, 1970.
7. Croft, H. T., Falconer, K. J., Guy, R. K., Unsolved Problems in Geometry, Springer-Verlag, New York, 1991.
8. Crowe, D. W., The geometry of African art. Part 1. Bakuba art, Journal of Geometry 1, 169-182, 1971.
9. Crowe, D. W., The geometry of African art. Part 2. A catalog of Benin patterns, Historia Mathematica 2, pp.253-271, 1975.
10. Daniel, M. D., Mathieu, B., Generating Self-Symmetrical Fractals by Hyperincurive Automata and Multiple Reduction Copy Machine, Interational Journal of Computing Anticipatory Systems, Vol. 6, pp. 95-115, 2000.
11. Ghyka, M., The Geometry of Art and Life, Dover, New York, 1977.
12. Crowe, D. W., Washburn, D. K., Groups and geometry in the ceramic art of San Ildefonso, Algebras, Groups and Geometries 3(2), pp.263-277, 1985.
13. Crowe, D. W., Washburn, D. K., Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis, Seattle: University of Washington Press, 1988.
14. Crowe, D. W., Symmetries of Culture, BRIDGES, Volume 3, No. 2, 2001.
15. Gray, A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed., FL: CRC Press, Boca Raton, pp.130, 1997.
16. Grünbaum, B., Shephard, G. C., Tilings and Patterns, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
17. Hahn, T., International Tables for Crystallography, 4th ed., Vol. A, Reidl Publishing Co., 1995.
18. Henry, N. F. M., Lonsdale, K., International Tables for X-Ray Crystallography, Vol. 1, Kynock Press, 1952.
19. Hogeweg, Pauline, and Hesper, B., A Model Study on Biomorphological Description. Pattern Recognition, Vol. 6, pp. 165-179, Pergamon Press, 19774.
20. Hopcroft, John, E., and Jeffrey D. U., Formal Languages and Their Relation to Automata, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1969.
21. Kenneth Falconer, Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, Ltd., 1990.

22. Larry Riddle, Classic Iterated Function Systems, <http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/ifs.html>
23. Lindenmayer, A., Mathematical Models for Cellular Interactions in Development, Part I and II, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 18, pp. 280-315, 1968.
24. Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Co., New York, 1982.
25. M. J. Chen, Y. Yuan, Developing technologies support environments for school mathematics teaching and learning, 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics Education, Taiwan Normal University, Nov.19-23, 2001.
26. M. J. Chen, A Conceptual Structure of Mathematical Presentation System, 8th Asia Technology Conference in Mathematic, Hsinchu, Taiwan, Dec. 15-19, 2003.
27. M. J. Chen, An Extended Presentation System for Mathematics in Class, Workshop in 8th Asia Technology Conference in Mathematic, Hsinchu, Taiwan, Dec. 15-19, 2003.
28. M. J. Chen, A Conceptual Structure for Mathematical Presentation System, 2003 Mathematical Meeting and Annual Meeting of the Mathematical Society, NCU, Chungli, Dec. 19-20, 2003.
29. M. J. Chen, A Structural Self-clone Method for Self-similarity, 2004 Mathematical Meeting and Annual Meeting of the Mathematical Society, NTU, Taipei, Dec. 4-5, 2004.
30. M. J. Chen, A Visual-based Duplication for Self-similarity, 9th Asia Technology Conference in Mathematic, NIE, Singapore, Dec. 13-16, 2004.
31. Peitgen, H. O., Jürgens, H., Saupe, D., Chaos and Fractals:New Frontiers of Science, Springer-Verlag, New York, 1992.
32. Peitgen, H. O., Jürgens, H., Saupe, D., Fractals for classrooms, Springer-Verlag, New York, 1992.
33. Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A., The Algorithmic Beauty of Plants, Springer-Verlag, New York, 1990.
34. Shubnikov, A. V., Koptsik, V. A., Symmetry in science and art, Plenum Press, New York, 1974.
35. S. K. Chang, M. J. Chen, L. Y. Deng and Y. J. Liu, MAWC Operations for the Growing Book, Proc. of Seventh Int'l Conf. on Distributed Multimedia Systems, Taipei, Taiwan, Sep. 26-28, 2001.
36. Smith, A. R., Plants, Fractals and Formal Languages, *Computer Graphics*, Vol. 18, No. 3, pp. 1-10, 1984.
37. Steinhaus, H., Mathematical Snapshots, 3rd ed, Dover, New York, pp. 75-76, 1999.
38. Steven Dutch, Repeating Patterns on a Strip (One-dimensional space groups), *Natural and Applied Sciences*, University of Wisconsin-Green Bay, 1997.
39. Victor Ostromoukhov, Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns, Springer-Verlag, London, 1998.

40. Wells, D., The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry, Penguin, London, pp. 121, 213, and 226-227, 1991.
41. Williams, R., The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design, Dover, New York, pp. 35-43, 1979.
42. Wolfgang E. Lorenz, Fractals and Fractal Architecture, <http://www.iemar.tuwien.ac.at/modul23/Fractals/subpages/222selfsimilar.html>
43. Zwillinger, D., CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, FL: CRC Press, Boca Raton, pp.265-266, 1995.
44. 塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas), 阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer Shaker Salman) 著, 伊斯蘭的幾何藝術, 廖純中譯, 左岸文化, 台北, 2004。
45. 陳明璋, 創意碎形—視覺構圖法, 第二屆創意教學研討會, 交通大學, 新竹, Dec. 6, 2003。
46. 陳明璋, 數學視覺呈現與創意教學, 第三屆創意教學研討會, 交通大學, 新竹, Dec. 19, 2004。
47. 陳明璋, 數學視覺呈現與創意教學, 九十三年台灣聯大新進教師—創意暨網路平台教學研討會, 交通大學, 新竹, Dec. 31, 2004。
48. 江韋儀, 碎形幾何自我相似特徵應用於視覺識別設計之研究, 中原大學商業設計學系研究所, 碩士論文, 民國 93 年。



附錄一 五種網狀系統

重複圖樣的背後必存在由平移基底 u 和 v (見 1-2-3)所組成的網格或網狀系統，這兩組平行線共可產生五種網狀系統：

(1) 鄰邊不等之斜平行四邊形

可能的對稱只有 180° 旋轉。

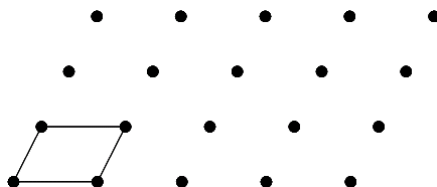


圖 1 鄰邊不等之斜平行四邊形

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

(2) 矩形

可能的對稱有 180° 旋轉，單邊或雙邊的鏡射及滑動鏡射。

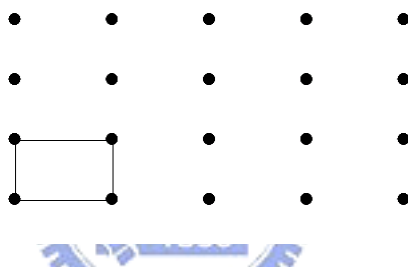


圖 2 矩形

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

(3) 不含 60° 角之菱形(中心矩形網狀系統)

由於菱形的兩對角線是互相垂直且等分，可視為有中心的矩形，故又稱「中心矩形網狀系統」，可能的對稱有 180° 旋轉與鏡射。

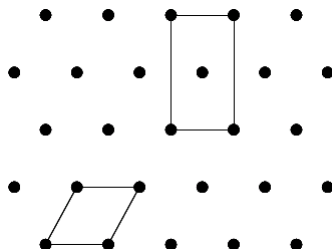


圖 3 不含 60° 角之菱形與中心矩形

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

(4) 正方形

可能的對稱有 90° 或 180° 旋轉， 45° 或 90° 鏡射。

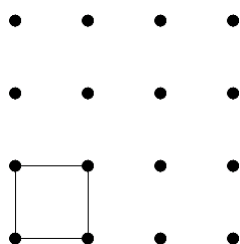


圖 4 正方形

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

(5) 含 60° 角之菱形(六邊形網狀系統)

這種特殊菱形可被分為兩個正三角形，而環繞一個點的六個正三角形可聚集成為一個六邊形，故又稱「六邊形網狀系統」，可能的對稱有 60° 、 120° 、 180° 旋轉與 60° 倍角之鏡射與滑動鏡射。

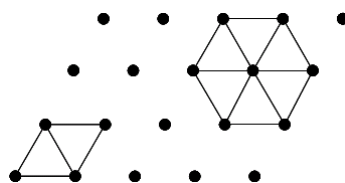


圖 5 含 60° 角之菱形與六邊形

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術

資料來源：

- [1] Armstrong, M. A., Groups and Symmetry, Springer-Verlag, 1988.
- [2] 塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas)，阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer Shaker Salman) 著，伊斯蘭的幾何藝術，廖純中譯，左岸文化，台北，2004。
- [3] Victor Ostromoukhov, Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns, Artistic Imaging and Digital Typography, Lecture Notes in Computer Science 1375, Springer Verlag, pp.193-223, 1998.

附錄二 十七種圖樣型態

即十七種二維圖樣，每種圖樣只出現在特定的網狀系統，如表 1 所示：

表 1 單位格子形狀與圖樣型態之對應表

單位格子形狀	圖樣型態
平行四邊形	p1, p2
矩形	pm, pg, pmm, pmg, pgg, cm, cmm
菱形	cm, cmm
正方形	p4, p4m, p4g
六邊形	p3, p3m1, p31m, p6, p6m

以下將介紹「拼貼磁磚式演算法」之表示法，並以此呈現這十七種圖樣形態。表示法所使用的符號意義如下所示：

- (1) 「 T 」表示樣本磁磚，即單位格子的形狀。
- (2) 「 T_H 」與「 T_v 」分別表示以水平或垂直方向為軸將 T 鏡射所得之磁磚。
- (3) 「 T_{AB} 」表示以線段 \overline{AB} 為軸將 T 鏡射所得之磁磚。
- (4) 「 T_{Π} 」表示將 T 上下顛倒所得之磁磚。
- (5) 「 T_{θ}^P 」表示將 T 繞著點 P 旋轉 θ 角度所得之磁磚。
- (6) 「+」表示將兩個磁磚拼貼在一起的動作。
- (7) 「 U 」表示單位磁磚，可能由數個樣本磁磚所拼貼而成。

對於每一種圖樣，我們必須瞭解單位磁磚之拼貼過程，包括旋轉與鏡射的方式等等，並注意每個樣本磁磚的方向。

(1) p1

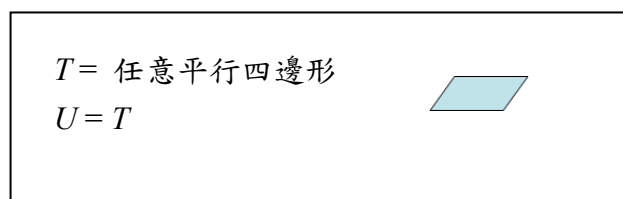


圖 6 p1

(2) p2

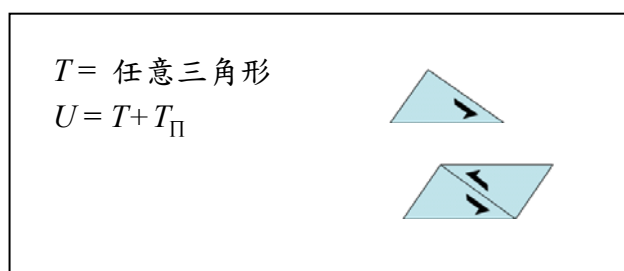


圖 7 p2

(3) pm

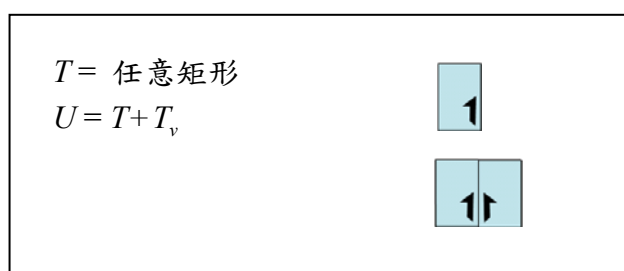


圖 8 pm

(4) pg



圖 9 pg

(5) pmm

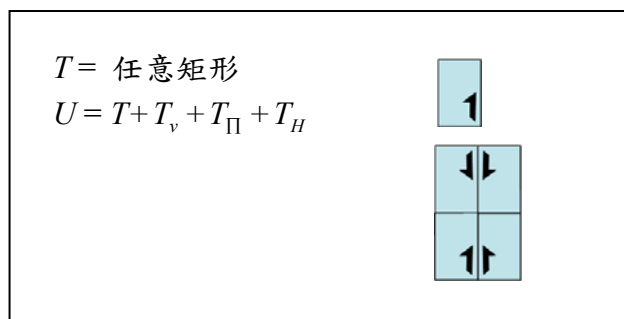


圖 10 pmm

(6) pmg

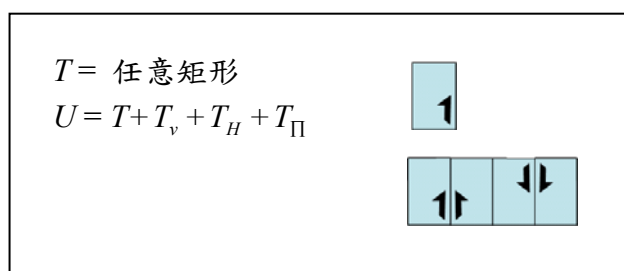


圖 11 pmg

(7) pgg

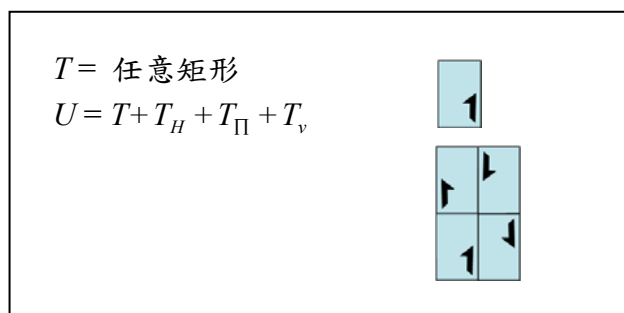


圖 12 pgg

(8) cm

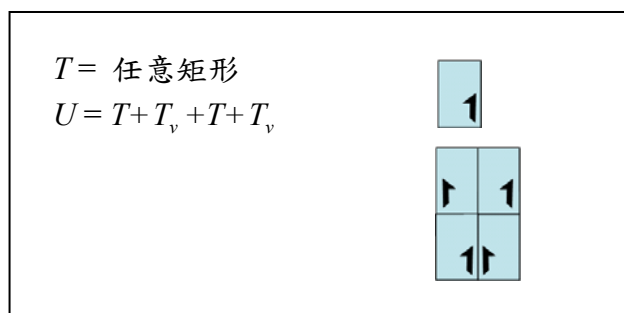
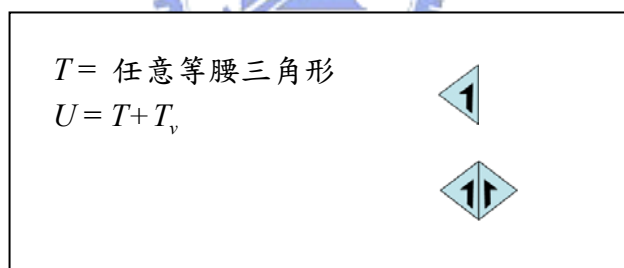


圖 13 cm

(9) cmm

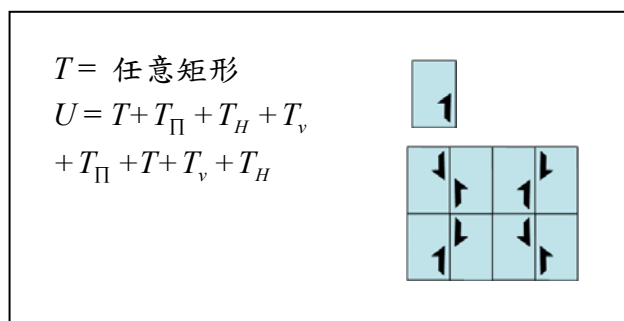
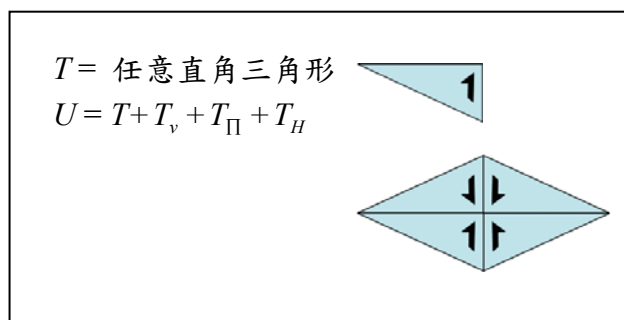


圖 14 cmm

(10) p4

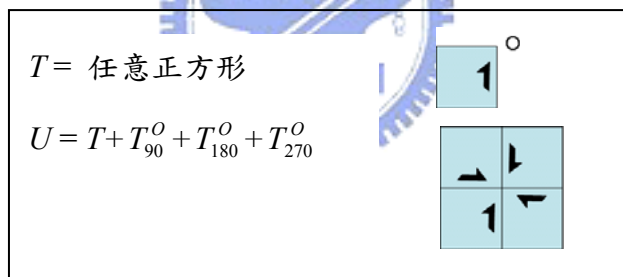


圖 15 p4

(11) p4m

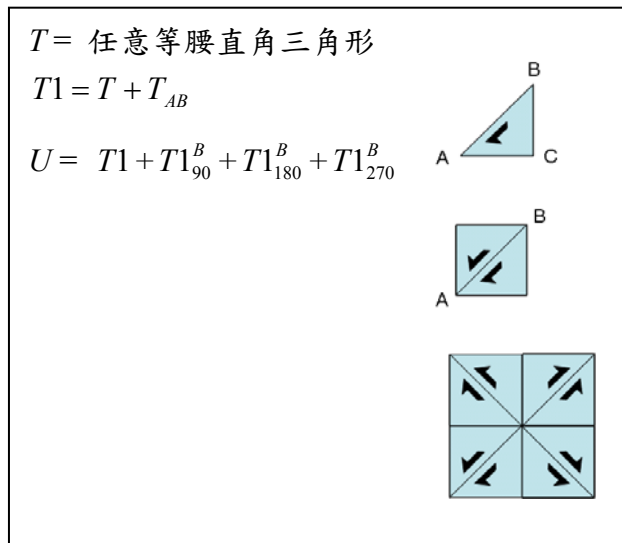


圖 16 p4m

(12) p4g

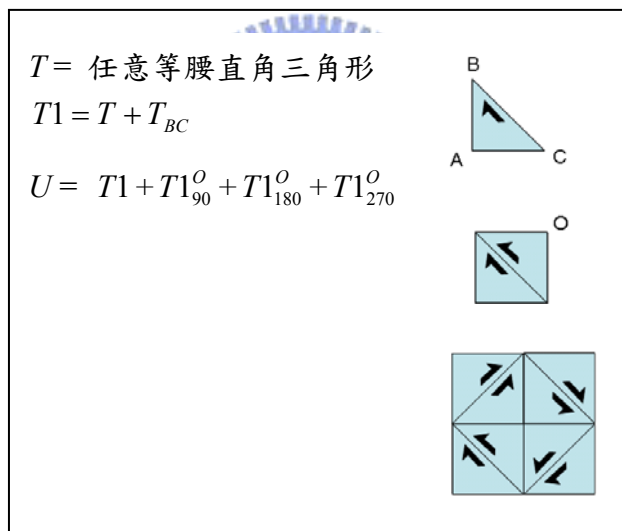


圖 17 p4g

(13) p3

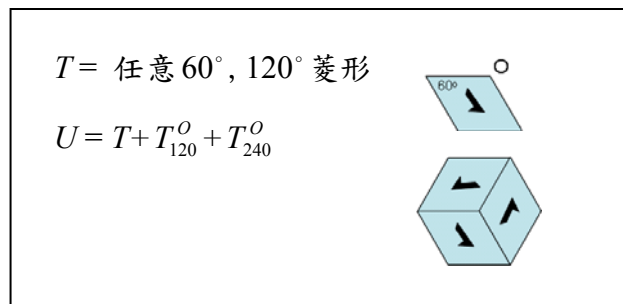


圖 18 p3

(14) p3m1

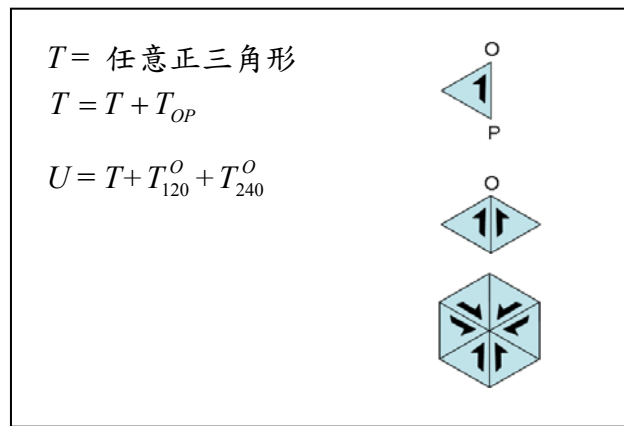


圖 19 p3m1

(15) p31m

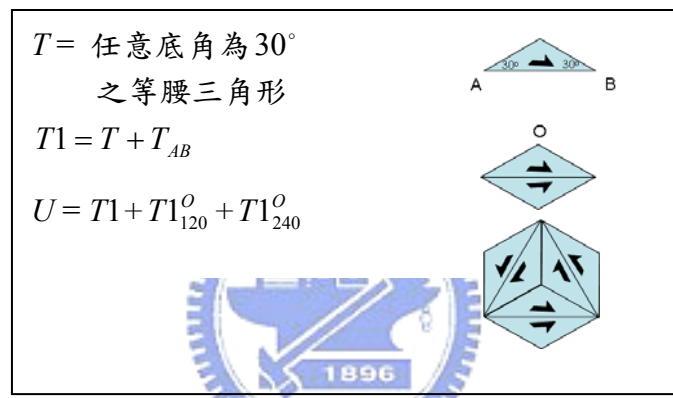


圖 20 p31m

(16) p6

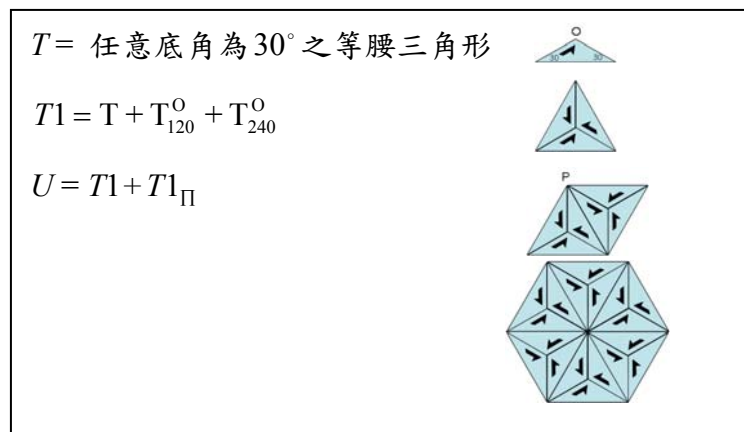


圖 21 p6

(17) p6m

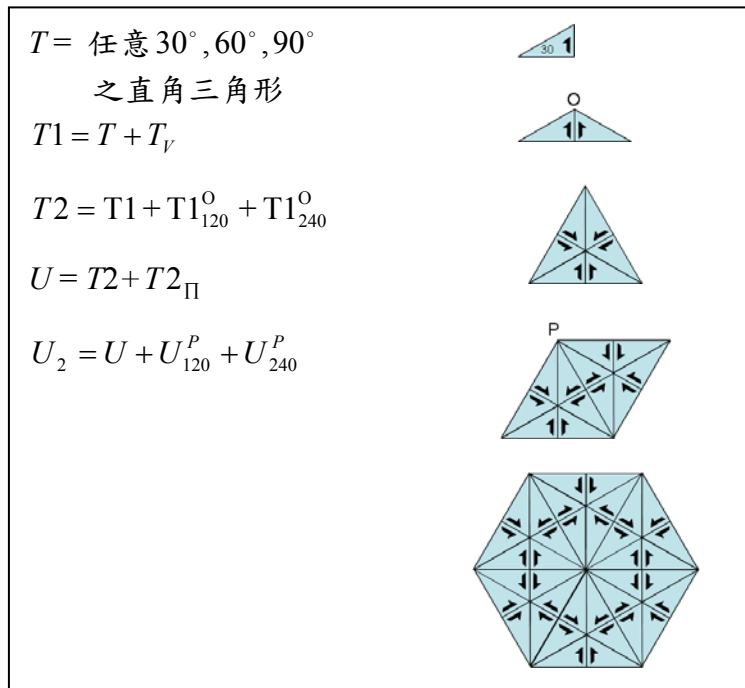






圖 22 p6m

資料來源：

- [1] Armstrong, M. A., Groups and Symmetry, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Grünbaum, B., Shephard, G. C., Tilings and Patterns, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [3] Shubnikov, A. V., Koptsik, V. A., Symmetry in science and art, Plenum Press, New York, 1974.
- [4] 塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas)，阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer Shaker Salman) 著，伊斯蘭的幾何藝術，廖純中譯，左岸文化，台北，2004。

附錄三 古典碎形之產生器分析

Koch Snowflake	
	
L-systems	MathPS
Axiom : F++F++F Production Rules : F → F++F++F + → + - → - Parameter : $\delta = 60\text{degrees}$	 【Line-Based Duplication】

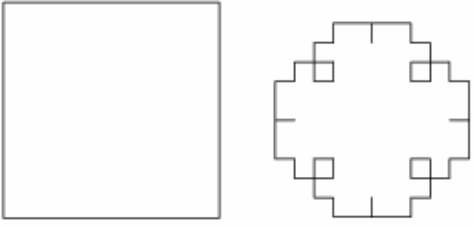

Koch Antisnowflake	
	
L-systems	MathPS
Axiom : F--F--F Production Rules : F → F-F++F-F + → + - → - Parameter : $\delta = 60\text{degrees}$	 【Line-Based Duplication】


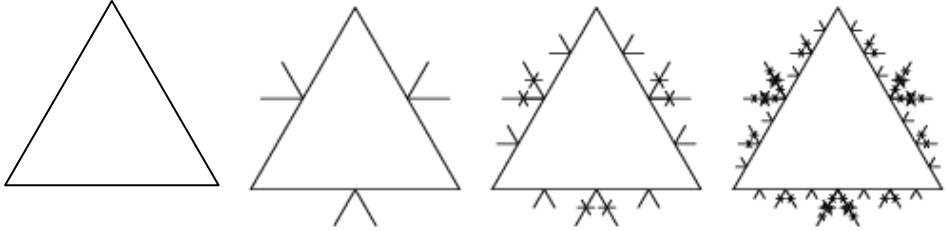

Cesàro Fractal	
L-systems	MathPS
Axiom : $F+++F+++F$ Production Rules : $F \rightarrow F++F---F++F$ $+ \rightarrow +$ $- \rightarrow -$ Parameter : $\delta = 30\text{degrees}$	 【Line-Based Duplication】

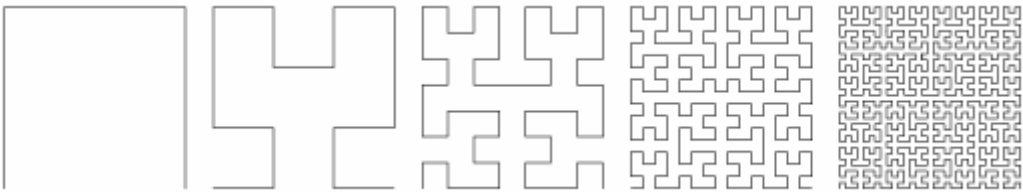
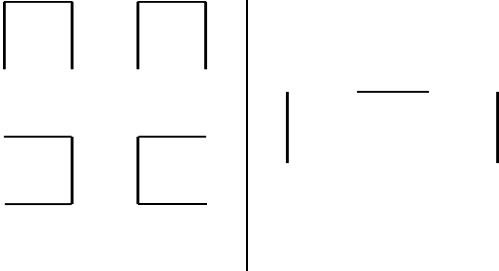
Minkowski Sausage	
L-systems	MathPS
Axiom : $F+_2F+_2F+_2F$ Production Rules : $F \rightarrow -_1F+_2F-_2F$ $+ \rightarrow +$ $- \rightarrow -$ Parameter : $\delta_1 \doteq 27\text{degrees}$ $\delta_2 = 90\text{degrees}$	 【Line-Based Duplication】

Exterior Snowflake	
L-systems	MathPS
Axiom : F+F+F+F+F+F Production Rules : F → F+F--F+F + → + - → - Parameter : $\delta = 60$ degrees	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

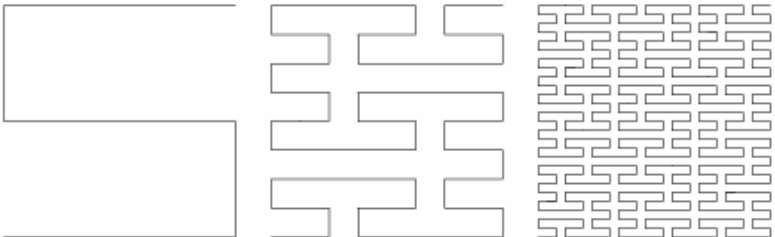
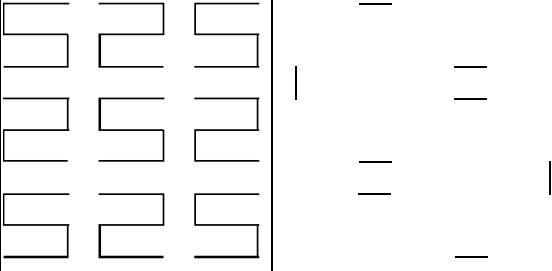
Cross-Stitch Curve	
L-systems	MathPS
Axiom : F-F-F-F Production Rules : F → F+F-F-F+F + → + - → - Parameter : $\delta = 90$ degrees	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

Levy Tapestry	
	
L-systems	MathPS
<p>Axiom : F+F+F+F</p> <p>Production Rules : F → E-F-E+E-F-E ++E-F-E+E-F-E where F =2 E </p> <p style="text-align: center;">+ → + - → -</p> <p>Parameter : $\delta = 90$degrees</p>	 <p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

 Ice Fractal	
	
L-systems	MathPS
<p>Axiom : F++F++F</p> <p>Production Rules : F → F--E+++E--E +++E--F where F =2 E </p> <p style="text-align: center;">+ → + - → -</p> <p>Parameter : $\delta = 60$degrees</p>	 <p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

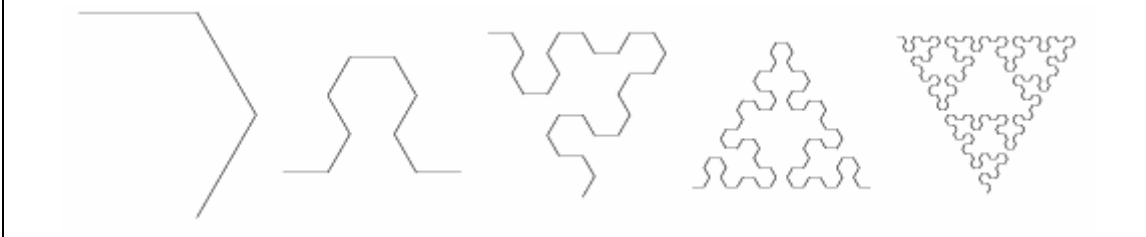

Hilbert Curve		
		
L-systems	MathPS	
Axiom : L Production Rules : L → +RF-LFL-FR+ R → -LF+RFR+FL- F → F + → + - → - Parameter : $\delta = 90\text{degrees}$		
	【Line-Based Duplication】 merge	

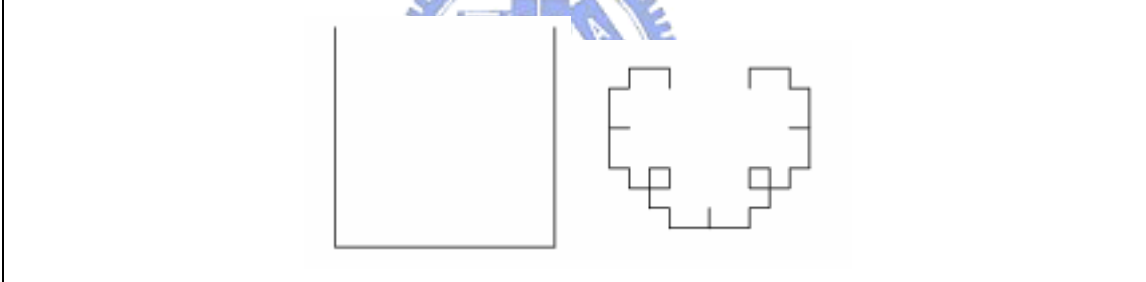



S-Shaped Peano Curve		
		
L-systems	MathPS	
Axiom : S Production Rules : S → SFZFS+F +ZFSFZ-F-SFZFS Z → ZFSFZ-F -SFZFS+F+ZFSFZ F → F + → + - → - Parameter : $\delta = 90\text{degrees}$		
	【Line-Based Duplication】 merge	

Peano Curve	
L-systems	MathPS
<p>Axiom : F</p> <p>Production Rules : $F \rightarrow FF+F+F$ $+FF+F+F-F$</p> <p style="padding-left: 40px;">$+ \rightarrow +$</p> <p style="padding-left: 40px;">$- \rightarrow -$</p> <p>Parameter : $\delta = 90$degrees</p>	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

Peano-Gosper Curve	
L-systems	MathPS
<p>Axiom : F</p> <p>Production Rules : $F \rightarrow -F+\overline{F}+\overline{F}-F$ $-FF-\overline{F}+$</p> <p style="padding-left: 40px;">$+ \rightarrow +$</p> <p style="padding-left: 40px;">$- \rightarrow -$</p> <p>Parameter : $\delta = 60$degrees</p>	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>

Sierpinski Arrowhead Curve	
	
L-systems	MathPS
Axiom : L (+F-F-F+) Production Rules : L → +R-L-R+ R → -L+R+L- + → + - → - Parameter : $\delta = 60$ degrees	 【Line-Based Duplication】

Levy Fractal	
	
L-systems	MathPS
Axiom : -F+F+F- Production Rules : F → E-F-E+E-F-E ++E-F-E+E-F-E where $ F =2 E $ + → + - → - Parameter : $\delta = 90$ degrees	 【Line-Based Duplication】

H-Fractal	
L-systems	MathPS
<p>Axiom : $\vec{F} (\overline{F} F)$</p> <p>Production Rules : $F \rightarrow$ $\quad + \rightarrow +$ $\quad - \rightarrow -$</p> <p>Parameter : $\delta = 90\text{degrees}$</p>	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>



Sierpinski Sieve / Sierpinski Gasket



L-systems

MathPS

Axiom : FXF++FF++FF

Production Rules : F → FF

X → ++FXF—FXF

--FXF++

+ → +

— → —

Parameter : $\delta = 60\text{degrees}$

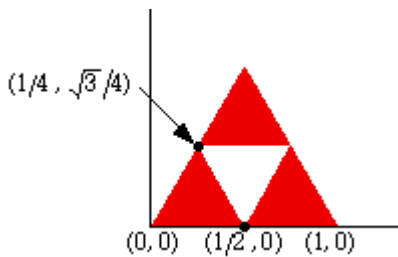


【Line-Based Duplication】



【Frame-Based Duplication】

Iterated Function System



$r = 1/2$

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

scale by r

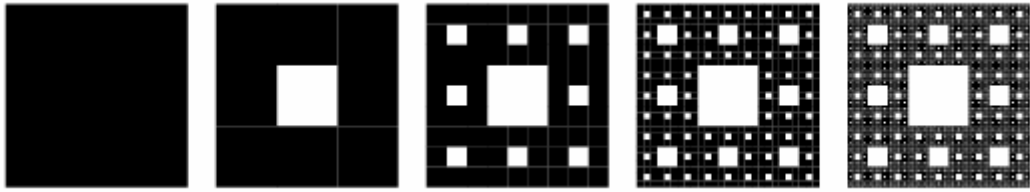
$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

scale by r

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.433 \end{bmatrix}$$

scale by r

Sierpinski Carpet



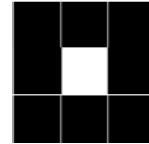
L-systems

line 1: "*" -> "***", " " -> " "

line 2: "*" -> "* *", " " -> " "

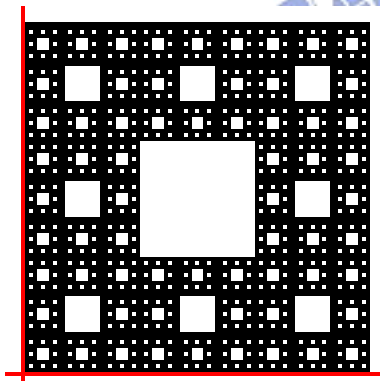
line 3: "*" -> "***", " " -> " "

MathPS



【Frame-Based Duplication】

Iterated Function System



$$r = 1/3$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Scale by r

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

Scale by r

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

Scale by r

$$f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scale by r

$$f_5(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

Scale by r

$$f_6(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scale by r

$$f_7(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

Scale by r

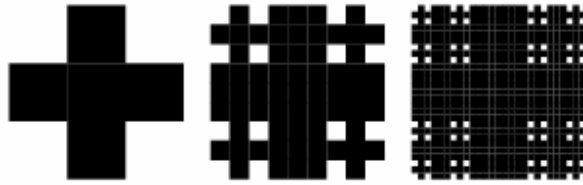
$$f_8(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

Scale by r

Box Fractal	
L-systems	MathPS
<p>line 1: "*" -> "** *", " " -> " "</p> <p>line 2: "*" -> " * ", " " -> " "</p> <p>line 3: "*" -> "** *", " " -> " "</p>	<p>【Line-Based Duplication】</p>
	<p>then 取代</p> <p>【Line-Based Duplication】</p>
	<p>【Frame-Based Duplication】</p>
Iterated Function System	
<p style="text-align: center;">$r=1/3$</p>	$f_1(x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ $f_2(x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ $f_3(x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $f_4(x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x$ $f_5(x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cantor Dust	
L-systems	MathPS
<p>line 1: "*" -> "*" * "r" " " -> " "</p> <p>line 2: "*" -> " " "r" " " -> " "</p> <p>line 3: "*" -> "*" * "r" " " -> " "</p>	<p style="text-align: center;">【Line-Based Duplication】</p>
	<p style="text-align: center;">【Frame-Based Duplication】</p>
Iterated Function System	
$r = 1/3$	

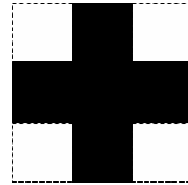
Cantor Square Fractal



L-systems

MathPS

Line1 : "*" → "*" , " " → " * "
 Line2 : "*" → "*" , " " → "***"
 Line3 : "*" → "*" , " " → " * "



【Frame-Based Duplication】

Iterated Function System

$r = 1/3$

