

國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

橢圓偏光光譜儀對

線性二色及雙折射複合式結構的研究

The study of a linear dichroism and retarder  
combined system by Multi-wavelength  
Photoelastic Modulated ellipsometry



研究生：莊俊逸

指導教授：趙于飛教授

中華民國 九十四年七月

## 誌謝

在求學生涯中，我想先感謝父母親全力的栽培與支持，讓我能在一個沒有經濟壓力的環境下學習，並且適時的給予鼓勵，讓我感受到家庭的溫暖，也謝謝妹妹在日常生活中幫了我不少忙。

感謝我的指導教授趙于飛老師從我大三下的專題時期就開始指導我，研究所也順利進了老師的實驗室。在老師的指導下，實驗室是一個充滿開放與自由學術風氣的環境，從老師身上我學到了許多實用的知識，不論是在研究上或者是生活上。另外要感謝實驗室的康源、建遠、劉行、柏儒、修銘、夢偉等學長，以及我的同學嘉倫、育承、君愷、奕德，感謝你們陪伴我在實驗室的這兩年，幫助我解決許多學業上的問題。還有志融、建德、政家，雖然你們並不在新竹，但你們的關心與幫忙我都感受到了，謝謝你們。

感謝阿罵、宇廷、moca、小白、文嵐、小毅、筠予一路陪伴，並在我一度陷入低潮時，大力支持我，幫助我渡過那時期並且成長不少。最後要感謝一位神祕的女孩，你的出現為我帶來了一股活力，在碩二下為了趕數據與論文的緊張生活中，做為我精神的支柱。

謝謝大家，沒有你們我很難完成這本論文。接下來幾年的求學階段我會更加努力，期許能有出色的表現。

# 橢圓偏光光譜儀對 線性二色及雙折射複合式結構之研究

學生：莊俊逸

指導教授：趙于飛

國立交通大學

光電工程研究所

## 摘要

利用光彈調變式橢圓儀量測具有複合式結構的材料。在本論文中選用了商業圓偏光片為樣品，圓偏光片是由具雙折射的  $1/4\lambda$  補波片及線性偏極片兩種材料組成。本研究將以 Kr-Ar 可調波長雷射為量測光源，建立一複合式結構材料在各波長的特性的量測技術。

首先建立數學理論式並與實驗圖形做比對，藉以粗略判斷材料的吸收軸和快軸的軸向。接著再將不同析光片方位角下的一倍頻和二倍頻訊號，藉由數值擬合的方法，進一步求得圓偏片參數：線性偏振二向性(Linear Dichroism, LD)、雙折射(Linear Birefringence, LB)及 LD 的穿透軸與 LB 的快軸之間的夾角( $\gamma$ )。雖然量測到的  $\gamma$  為一定值，但並非理論上的  $45^\circ$ ，而 LD 和 LB 在不同波長下也幾乎維持定值。

最後，我們移除架構中起偏片和光彈調變器，並旋轉析光片量測樣品的出射光強度，驗證實驗所得結果的可靠度。

# The study of a linear dichroism and retarder combined system by Multi-wavelength Photoelastic Modulated ellipsometry

Student : Chun-I Chuang

Advisors : Dr. Y. F. Chao

Institute of Electro-Optical Engineering

National Chiao Tung University

## Abstract

The Photoelastic Modulation Ellipsometer is used to measure an artificial circular polarizer (CP), which is a combination of a linear polarizer and a retarder. The multi-wavelength measurement technique is built up by using the Kr-Ar tunable laser.

In the beginning, the azimuth direction of optical axis of this CP is roughly determined by comparing the theoretical model with its measurement for a single wavelength. The parameters: linear dichroism (LD), phase retardation and the azimuth angle between the linear polarizer and retarder ( $\gamma$ ) are measured by fitting its 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> harmonics signals of various azimuth positions of analyzer for the Kr-Ar tunable laser. Although the measured  $\gamma$  is independent of wavelength but it is not at 45°, and its phase retardation and LD are almost the same for every wavelength. Finally by comparing the theoretical transmission, which is derived by substituting its measured parameters, to its measured transmission under various azimuth positions of analyzer, we observed a well fitted result for every wavelength.

# 目錄

第一章	序論 .....	1
第二章	原理 .....	4
2.1	光的偏振態與表示法 .....	4
2.2	史脫克參數(Stokes Parameter)與穆勒矩陣(Mueller Matrix)...	8
2.3	光彈調變式橢圓儀 .....	10
2.4	圓偏振片參數 .....	13
2.5	圓偏振片量測 .....	16
2.6	驗證量測參數 .....	17
2.7	圓偏振率.....	18
2.8	消光率(extinction ratio)與光學密度(optical density).....	20
第三章	實驗步驟 .....	24
3.1	穿透式橢圓儀實驗架構 .....	24
3.2	圓偏振片方位角校正 .....	26
3.3	多波長測量圓偏振片參數 .....	26
3.4	多波長驗證圓偏振率 .....	27
第四章	實驗結果 .....	28
4.1	倍頻訊號量測結果 .....	28
4.1.1	多波長橢圓儀(P-PEM-S-A)量測圓偏振片結果 .....	28
4.1.2	多波長驗證圓偏振率 .....	29
4.2	圓偏振片理論圖形模擬 .....	30
4.3	以曲線擬合法求圓偏振片參數 .....	35
4.3.1	倍頻訊號相位判斷 .....	35
4.3.2	擬合結果 .....	38
4.4	圓偏振率.....	44
4.5	消光率(extinction ratio)、光學密度(optical density).....	45
第五章	結論 .....	48
未來展望	.....	50
參考文獻	.....	52
附錄	.....	53

# 表目錄

表 4-1 倍頻訊號對參數的敏感度 .....	35
表 4-2 圖偏振片擬合結果 .....	40
表 5-1 各析光片方位角量測標準差.....	49

# 圖目錄

圖 2-1 橫向傳播光場 .....	4
圖 2-2 旋轉的橢圓偏振 .....	5
圖 2-3 線性偏振光 .....	6
圖 2-4 圓偏振光 .....	7
圖 2-5 橢圓偏振光 .....	7
圖 2.6 PEM 外觀及功能介紹 .....	11
圖 2-7 PEM 調變振幅為 $\lambda/2$ .....	11
圖 2-8 穿透式光彈調變式橢圓儀 .....	12
圖 2-9 驗證圓偏振率 .....	17
圖 2-10 以布魯斯特角反射的光線具有線偏振態 .....	19
圖 2-11 Optical density 示意圖.....	22
圖 3-1 穿透式光彈調變式橢圓儀 .....	25
圖 3-2 校正圓偏振片方位角 .....	26
圖 4-1 波長 488nm 的各倍頻訊號 .....	28
圖 4-2 波長 514.5nm 的各倍頻訊號 .....	28
圖 4-3 波長 520.8nm 的各倍頻訊號 .....	29
圖 4-4 波長 568.2nm 的各倍頻訊號 .....	29
圖 4-5 波長 632.8nm 的各倍頻訊號 .....	29
圖 4-6 波長 647.1nm 的各倍頻訊號 .....	29
圖 4-7 多波長光強度極座標分布圖 .....	30
圖 4-8 觀察不同的 LD 對 $I_{dc}$ 的影響 .....	31
圖 4-9 觀察不同的 LB 對 $I_{dc}$ 的影響 .....	31
圖 4-10 觀察不同的 $\gamma$ 對 $I_{dc}$ 的影響 .....	31
圖 4-11 觀察不同的 LD 對 $I_{1f}$ 的影響 .....	32
圖 4-12 觀察不同的 LB 對 $I_{1f}$ 的影響 .....	32
圖 4-13 觀察不同的 $\gamma$ 對 $I_{1f}$ 的影響 .....	32
圖 4-14 觀察不同的 LD 對 $I_{2f}$ 的影響 .....	33
圖 4-15 觀察不同的 LB 對 $I_{2f}$ 的影響 .....	33

圖 4-16 觀察不同的 $\gamma$ 對 $I_{2f}$ 的影響 .....	33
圖 4-17 $\gamma = 50^\circ$ 時觀察不同的 LD 對 $I_{2f}$ 的影響 .....	34
圖 4-18 $\gamma = 50^\circ$ 時觀察不同的 LB 對 $I_{2f}$ 的影響 .....	34
圖 4-19 波長 488nm 的一倍頻訊號 .....	36
圖 4-20 波長 488nm 的二倍頻訊號 .....	36
圖 4-21 波長 488nm 的一倍頻訊號 .....	36
圖 4-22 波長 488nm 的二倍頻訊號 .....	36
圖 4-23 代入 $\gamma = +50^\circ$ , LD= 10, LB= $\pm 90^\circ$ .....	37
圖 4-24 代入 $\gamma = -50^\circ$ , LD= 10, LB= $\pm 90^\circ$ .....	37
圖 4-25 $I_{2f}$ 代 $\gamma = 50^\circ$ , LD= 10, LB= $\pm 90^\circ$ .....	38
圖 4-26 $I_{2f}$ 代 $\gamma = 40^\circ$ , LD= 10, LB= $\pm 90^\circ$ .....	38
圖 4-27 LB= $50.35^\circ$ , $\gamma = 47.4^\circ$ , LD= 2.54 理論與實驗比較圖 .....	39
圖 4-28 各波長下所量出的 $\gamma$ , $\gamma = 49.92^\circ \pm 0.3^\circ$ .....	40
圖 4-29 各波長下所量出的 LB .....	40
圖 4-30 各波長下所量出的 LD .....	41
圖 4-31 多波長驗證圓偏振率 .....	42
圖 4-32 極坐標分布圖: LB 與 $\gamma$ 對光強度分布的影響 .....	43
圖 4-33 圓偏振片幾何結構 .....	43
圖 4-34 圓偏極率與入射線偏振光方位角的關係圖 .....	44
圖 4-35 圓偏極率對應入射光波長的關係圖 .....	45
圖 4-36 Extinction ratio of circular polarizer versus wavelength .....	45
圖 4-37 Optical density for pair of 03 FPG dichroic sheet polarizers of MELLES GRIOT .....	46
圖 4-38 extinction ratio of dichroic sheet polarizer of MELLES GRIOT; (-) 利用二項方程式擬合法 .....	46
圖 5-1 欲擬合點取捨示意圖 .....	49

# 第一章 序論

自然界中存在一種晶體，屬於各向異性(anisotropic medium)的非吸收性材料。當光線入射此晶體時，因為 TE 波和 TM 波所感應的折射率不同，造成出射光會分歧為兩道光束，此即線性雙折射特性(linear birefringence)。當入射光以某特定方向入射晶體時，出射光不會有分歧的現象，此方向即為晶體的光軸(optic axis)。顧名思義，具有一個光軸的晶體稱單光軸晶體(uniaxial crystals)，如方解石(calcite)、石英(quartz)，而具有兩個光軸的晶體則為雙光軸晶體(biaxial crystals)，如雲母(mica)。

另有一種晶體，屬於各向異性的吸收性材料。晶體中具有一個特定的軸向，稱為主軸或光軸。當入射光的電場振動方向垂直於光軸時，會被晶體強烈吸收，此時出射光將只有單一的線偏振方向。此特性稱為線性二向性(linear dichroism)。

本論文中選用了圓偏振片為量測樣品，由實驗可知，圓偏振片並非環狀二向性吸收材料(circular dichroism medium)，而是由兩種分別具有線性雙折射特性(LB)與線性二向性(LD)的材料結合而成，且兩種材料的光軸皆在同一平面上。因此圓偏振片為一種具有複合式光軸的組件。由 LB 所引起 TE 波和 TM 波間的相位延遲、LD 所代表的線性吸收率以及光軸間的夾角，都必須滿足特定條件才能成為圓偏振片。由理論式可知，LD 應為無限大，代表材料能完全吸收某一方向的光，具有理想的線偏振特性，而 LB 應為  $\pi/2$ ，



光軸間夾角為 $\pi/4$ 。在這種條件下通過圓偏振片的光線才具有圓偏振態。

以圓偏振片的量測來說，傳統量測法主要是量測其穿透率，然而此種量測法所使用的光偵測器，必須對光強度有廣大的偵測範圍，以免因光強度太強而進入光偵測器的非線性區或飽和區，或者是在光源區加入濾光片，達到降低光強度的目的，但濾光片亦有許多嚴苛的規格條件需滿足。

為了克服此問題，我們使用光彈調變式橢圓儀(PhotoElastic Modulator Ellipsometer)系統，量測此類具有雙光軸的材料特性。這是屬於一種亮比式橢圓儀(light intensity ratio ellipsometry)，由於光彈調變器(PEM)的特性，在光偵測器接收到訊號後，將訊號傳送至訊號處理區，藉由 DAQ 卡(Data Acquisition card)及 LabVIEW 程式的監控，可以得到直流及倍頻項訊號，再利用倍頻訊號做數值擬合分析(curve fitting method)，即可得到圓偏振片的特性參數。

以光彈調變式橢圓儀量測圓偏振片，不僅可量測線性吸收率、相位延遲及光軸夾角，亦可由 LD 與 LB 的正負號判斷快慢軸向及穿透吸收軸向。由理論可知，LD 與 LB 都是與波長相關的函數，因此本實驗採用多波長量測架構，以 KrAr 可調波長雷射為量測光源，可以建立樣品的特性光譜。實驗量測到的 LD 為 3.85~4.55，相位延遲 LB 為 92.2°到 113.9°，兩光軸間的夾角為 49.92°。

在實驗的最後，我們會就圓偏振片的特性光譜作討論，探討不同入射波

長的圓偏振率變化，可以發現量測樣品於短波長時有較好的特性。由於 LD 代表的是光線穿透二向性材料時，最小光強度與最大光強度的比例，因此我們將 LD 換算為消光率(extinction ratio)後，與實驗室所用的 Melles Griot 線偏振片做規格比較，圓偏振片的消光率約為 $1.12 \times 10^{-4} \sim 4.53 \times 10^{-4}$ 之間，而線偏振片的消光率約在 $10^{-4.9} \sim 10^{-5.4}$ 。



## 第二章 基本原理

### 2.1 光的偏振態與表示法

光波實質上就是電磁波，完整描述光波需要用到四個基本的場向量，分別是：電場強度 $\vec{E}$ ，電位移密度 $\vec{D}$ ，磁場強度 $\vec{H}$ 及磁通量密度 $\vec{B}$ 。在這四個向量中選用了電場 $\vec{E}$ 來定義光的偏振態，這是因為當光與物質發生相互作用時，光波的電場對電子的作用力比磁場對電子的作用力大得多。通常只要確定了 $\vec{E}$ 的偏振態就可由馬克斯威爾方程式(Maxwell equations)求出其餘三個場向量 $\vec{D}$ 、 $\vec{H}$ 和 $\vec{B}$ 的偏振態。

今假設一光波之傳播方向為Z方向,其電場之振動方向將位於 X-Y 平面上，如圖 2-1

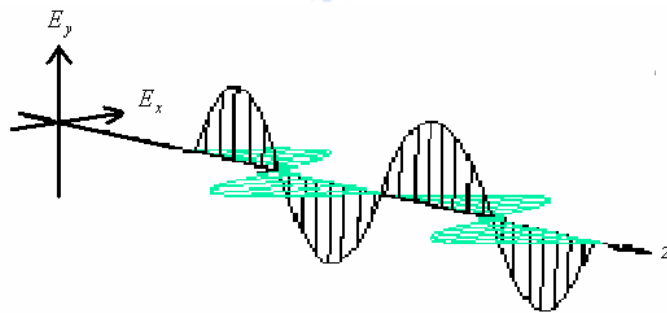


圖 2-1 橫向傳播光場

以 $\vec{E}(z,t)$ 表示空間中光波某一點之電場時變關係式：

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$$

其中

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\tau - \delta_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\tau - \delta_y) \end{cases} \dots\dots\dots (2.1-1)$$
$$\tau = kz - \omega t$$

k: 波數(wave number)

$\omega$ : 角頻率(angular frequency)

$\delta_x$ 、 $\delta_y$ : 初始相位

經化簡可得到:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \dots\dots\dots (2.1-2)$$

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

表示在任何時間光場的傳播軌跡是一個橢圓，這種特性稱作光學偏振(optical polarization)，此即為橢圓方程式。

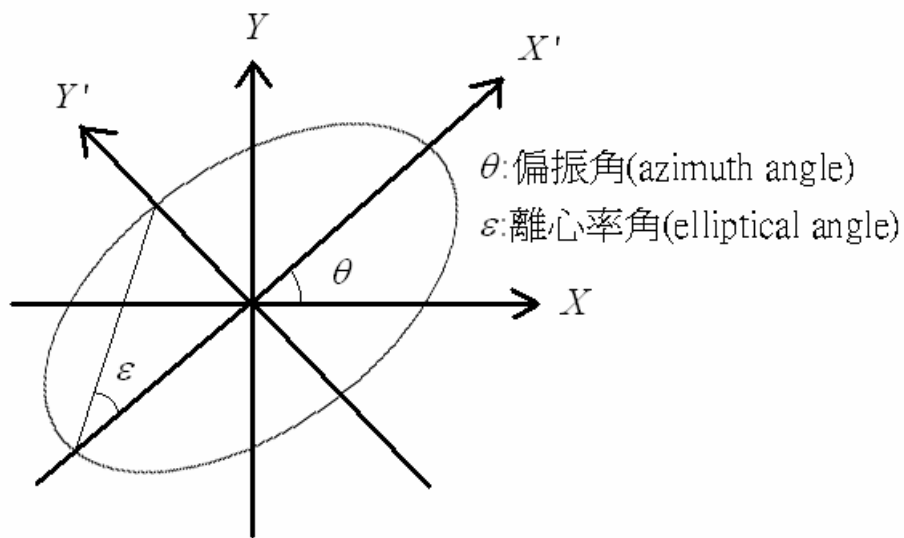


圖 2-2 旋轉的橢圓偏振

如圖 2-2 為一旋轉  $\theta$  角的橢圓，則

$$E_x = \cos \theta E'_x - \sin \theta E'_y$$

$$E_y = \sin \theta E'_x + \cos \theta E'_y$$

..... (2.1-3)

$$a^2 = \cos^2 \theta A_x^2 + \sin^2 \theta A_y^2 + 2A_x A_y \cos \delta \cos \theta \sin \theta$$

$$b^2 = \sin^2 \theta A_x^2 + \cos^2 \theta A_y^2 - 2A_x A_y \cos \delta \cos \theta \sin \theta$$

由式(2.1-2)、(2.1-3)可化簡得到

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1$$

故光波在某一點之電場分布為橢圓形故稱橢圓偏振。

當  $\delta = 0, \delta = \pm\pi$  時,電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光(圖 2-3)。

當  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , 之奇數倍時，且  $x$  與  $y$  方向之振幅相等，稱為圓偏振光(圖 2-4)。

當  $\delta \neq 0, \delta \neq \pm\pi$  時,電場之振動方向投影於平面為橢圓，稱為橢圓偏振光(圖 2-5)。

線性偏振光  $\delta = 0, \delta = \pm\pi$

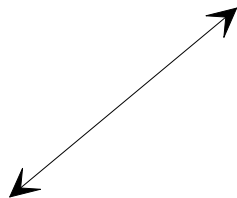


圖 2-3 線性偏振光

圓偏振光  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,

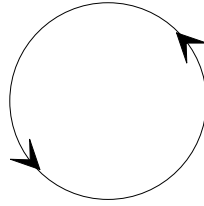


圖 2-4 圓偏振光

橢圓偏振光  $\delta \neq 0, \delta \neq \pm\pi$

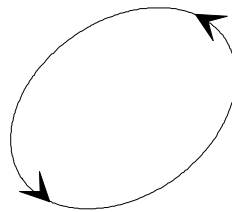


圖 2-5 橢圓偏振光

一般為了方便表示光波的偏振狀態並加以運算，會將式(2.1-1)改寫為複數型式，並寫成 2x1 階的瓊斯向量(Jones vector):

$$E_x = E_{0x}e^{-j(\tau-\delta_x)}$$

$$E_y = E_{0y}e^{-j(\tau-\delta_y)}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{-j(\tau-\delta_x)} \\ E_{0y}e^{-j(\tau-\delta_y)} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-j(\tau-\delta_x)} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{\delta} \end{bmatrix}$$

其中  $\delta = \delta_{0y} - \delta_{0x}$

一般而言 Jones vector 只能形容純偏振 (pure polarized) 光，不能形容非偏振 (unpolarized) 光或部份偏振 (partially polarized) 光,但一般光波大部

份均為部份偏振光，故須用 Stokes Parameters 來代表。

## 2.2 史脫克參數 (Stokes Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

Stokes Vector 為一  $4 \times 1$  階矩陣

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos(\delta_y - \delta_x)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin(\delta_y - \delta_x)$$



將定義代入可得

$$S = I_o \begin{bmatrix} 1 \\ p \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ p \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ p \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

其中

$p$ : 偏極度 (degrees of polarization)

$I_o$ : 入射光強度 (Intensity)

$$p = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{\frac{1}{2}}}{S_0}, \quad p = 1 \text{ 時為 pure polarized light}$$

Mueller matrix 則是一個  $4 \times 4$  階的矩陣，用來表示光學元件的傳導矩陣，主

要架構建立在 Stokes Parameters 上，如以下的出射光

$$S_0' = m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3$$

$$S_1' = m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3$$

$$S_2' = m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3$$

$$S_3' = m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3$$

可表示成

$$\begin{pmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

簡化為

$$S' = M \cdot S$$

M 即為 Mueller matrix

$$\text{其中 } S_0' = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$$



即為光偵測器所接收到光訊號強度。

以下列舉理想的旋轉矩陣、線性偏振片及補波片。

旋轉矩陣

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta$  為旋轉角度



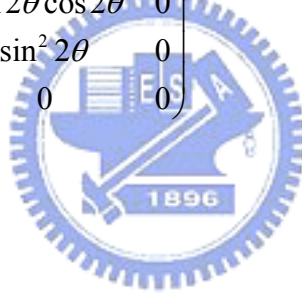
線性偏振片(穿透軸在水平方向)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

線性偏振片(穿透軸在任意角度)

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta$  為穿透軸之方位角

◎補波片

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & -\sin \phi \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \phi \sin 2\theta & \sin \phi \cos 2\theta & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$\theta$  為光軸方位角， $\phi$  為相位延遲

## 2.3 光彈調變式橢圓儀

光彈調變器(PhotoElastic Modulator—PEM)是一種以特定頻率調變入射光偏振態的儀器(如圖 2-6)，其原理是使用一壓電材料的晶體，以 20kHz~60kHz 的頻率(當 PEM 出廠後此頻率便已固定)，擠壓另一個與它黏

著在一起的材料，此材料的特性為具有穿透性，並會等比例隨外在的應力改變雙折射效應(如圖 2-7)。

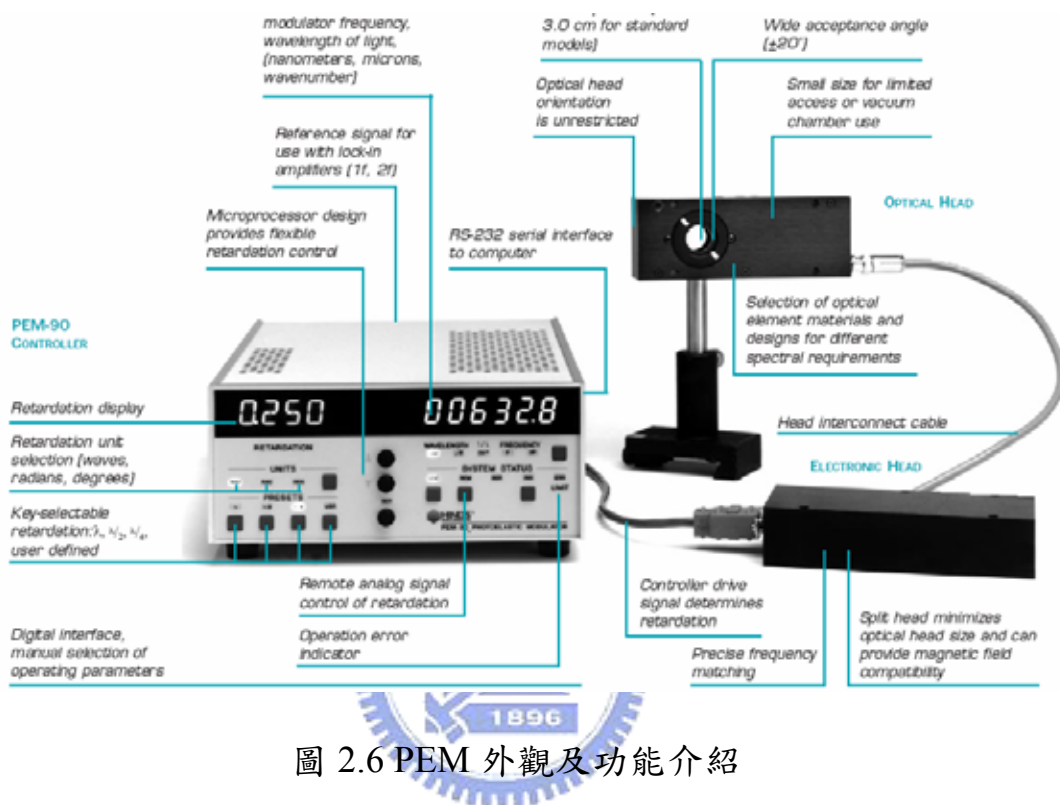


圖 2.6 PEM 外觀及功能介紹

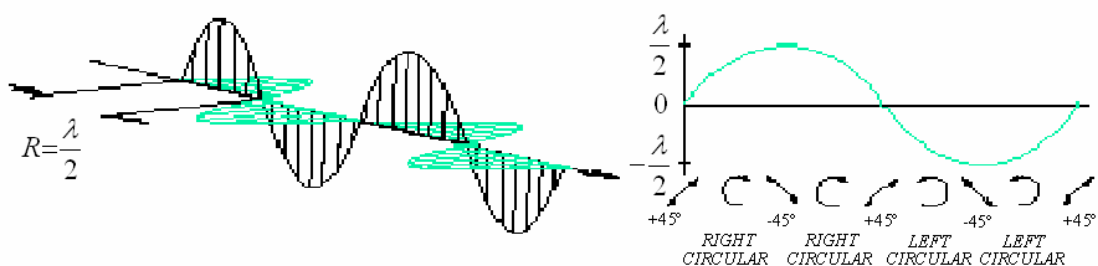


圖 2-7 PEM 調變振幅為  $\frac{\lambda}{2}$

PEM 的 Mueller matrix 如下(光軸位於 0 度)

$$M_{PEM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & \sin \Delta_p \\ 0 & 0 & -\sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{pmatrix}$$

PEM 所提供的相位延遲  $\Delta_p$  為一個角頻率為  $\omega$  的時間函數，一般可表示為  $\Delta_p = \delta_0 \sin \omega t$ ，其中  $\delta_0 = 2\pi \cdot \Delta_0$ ， $\Delta_0$  為光彈調變器的相位調變振幅， $\omega$  為調變頻率。

將穿透式的光彈調變式橢圓儀(如圖 2-8)偵測到的光訊號經過傅立葉轉換後，可由訊號截取卡(Data acquisition card --DAQ card) 截取各倍頻訊號，並加以計算分析得到樣品的參數。

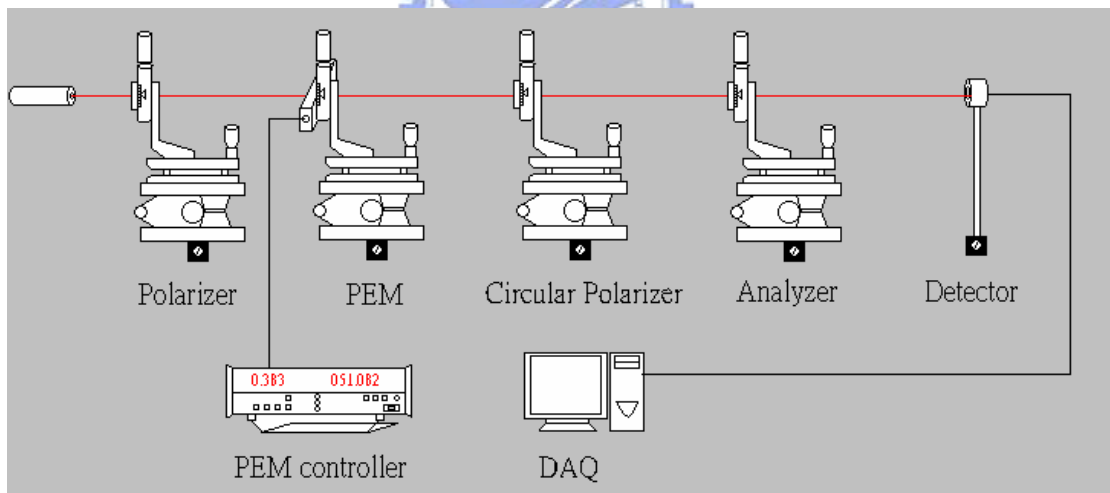


圖 2-8 穿透式光彈調變式橢圓儀

## 2.4 圓偏振片

圓偏振片的構造是由線性偏振片與四分之一波長補波片組合而成，且線性偏振片的穿透軸與補波片的快軸(或慢軸)夾角為四十五度。

出射光即為圓偏振光：

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(A + \frac{\pi}{4}) & -\sin 2(A + \frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \sin 2(A + \frac{\pi}{4}) & \cos 2(A + \frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(A + \frac{\pi}{4}) & -\sin 2(A + \frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \sin 2(A + \frac{\pi}{4}) & \cos 2(A + \frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2A & -\sin 2A & 0 \\ 0 & \sin 2A & \cos 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2A & \sin 2A & 0 \\ 0 & -\sin 2A & \cos 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.4-1)
 \end{aligned}$$



以上的推導假設了圓偏振片是由理想的線偏振片與補波片組合而成，為了量測其實際的線偏化程度、相位延遲及光軸夾角，以下將先介紹圓偏振片的待量測參數。

由於線偏振片非理想，且材料的吸收係數會隨入射波長不同而改變，我們先以瓊斯矩陣加以推導：

$$M_p = e^{\frac{-j2\pi dn}{\lambda}} \begin{pmatrix} e^{\frac{-2\pi dk_e}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi dk_o}{\lambda}} \end{pmatrix}$$

其中

$n$  與  $d$  分別為介質的折射率與厚度

$k_e$  與  $k_o$  為介質的 extraordinary 和 ordinary coefficients

對理想的線偏振片來說， $k_e = 0$ ， $k_o \rightarrow \infty$ ，此時穿透軸在水平方向。

將  $M_p$  簡化可得

$$\begin{aligned} M_p &= e^{\frac{-j2\pi dn}{\lambda}} \begin{pmatrix} e^{\frac{-1}{2}\alpha_1 d} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-1}{2}\alpha_2 d} \end{pmatrix} = e^{\frac{-j2\pi dn}{\lambda}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\alpha_1 d} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-1}{2}\alpha d} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-j2\pi dn}{\lambda}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\alpha_1 d} \cdot e^{\frac{-\alpha d}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha d}{4}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha d}{4}} \end{pmatrix} \\ &= Z \cdot M_p' \end{aligned}$$

其中  $\alpha_1 = \frac{4\pi k_e}{\lambda}$ ， $\alpha_2 = \frac{4\pi k_o}{\lambda}$ ， $\alpha = \frac{4\pi}{\lambda}(k_o - k_e)$

$$M_p' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha d}{4}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-\alpha d}{4}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.4-2)$$

$Z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-j2\pi dn}{\lambda}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\alpha_1 d} \cdot e^{\frac{-\alpha d}{4}}$ ，代表介質所造成的各向同性相位差

將  $M_p'$  轉換為 Mueller matrix，可得

$$M_p = \begin{pmatrix} \cosh(LD) & \sinh(LD) & 0 & 0 \\ \sinh(LD) & \cosh(LD) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $LD = \frac{\alpha d}{2}$  ..... (2.4-3)

為本實驗待求參數之一，對理想的線偏振片來說， $LD \rightarrow \infty$

同理，可將非理想的四分之一補波片寫成 Mueller matrix 如下：

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos LB & \sin LB \\ 0 & 0 & -\sin LB & \cos LB \end{pmatrix}$$

其中 LB 為四分之一補波片實際造成的相位延遲。

在本實驗中，將圓偏振片中四分之一補波片那面朝向雷射，因此 Mueller matrix 可寫成

$$M_{CP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2A & -\sin 2A & 0 \\ 0 & \sin 2A & \cos 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(LD) & \sinh(LD) & 0 & 0 \\ \sinh(LD) & \cosh(LD) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2A & -\sin 2A & 0 \\ 0 & \sin 2A & \cos 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(A+\gamma) & \sin 2(A+\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin 2(A+\gamma) & \cos 2(A+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos LB & \sin LB \\ 0 & 0 & -\sin LB & \cos LB \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(A+\gamma) & -\sin 2(A+\gamma) & 0 \\ 0 & \sin 2(A+\gamma) & \cos 2(A+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

..... (2.4-4)

$\gamma$  為線偏振片穿透軸與四分之一補波片快軸的夾角。理想的圓偏振片  $\gamma$  為  $45^\circ$ 。

## 2.5 圓偏振片量測

找出圓偏振片的穿透軸方位角後，將穿透軸放置於  $0$  度，Polarizer 穿透軸放置於  $-45$  度，我們可以推導出射光的史脫克向量  $S_p$

$$S_p = M_A M_{CP}(LD, LB, \gamma) M_{PEM} M_{P=-45^\circ} S_i$$

$$S_0 = \cosh LD + \cos 2A \sinh LD - \cos \Delta_p (\sin 2A (\cos LB \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma) + \sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma (\cos 2A \cosh LD + \sinh LD)) + \sin \Delta_p \sin LB (\cos 2\gamma \sin 2A + \sin 2\gamma (-\cos 2A \cosh LD - \sinh LD)) \dots\dots\dots (2.5-1)$$

針對  $\Delta_p$  我們可以採用傅立葉展開式表示如下：

$$\sin \Delta_p = 2J_1(\delta_o) \sin \omega t + 2J_3(\delta_o) \sin 3\omega t + \dots\dots\dots$$

$$\cos \Delta_p = J_0(\delta_o) + 2J_2(\delta_o) \cos 2\omega t + 2J_4(\delta_o) \cos 4\omega t + \dots\dots\dots \dots\dots\dots (2.5-2)$$

將式(2.5-2)代入式(2.5-1)，可以得到各倍頻訊號

$$I_{dc} = I_0 (\cosh LD - J_0(\delta_o) (\sin 2A (\cos LB \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma) + \sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma (\cos 2A \cosh LD + \sinh LD)) + \cos 2A \sinh LD) \dots\dots\dots (2.5-3)$$

$$I_{1f} = 2I_0 J_1(\delta_o) \sin LB (\cos 2\gamma \sin 2A - \cos 2A \cosh LD \sin 2\gamma - \sinh LD \sin 2\gamma) \sin \omega t \dots (2.5-4)$$

$$I_{2f} = -2I_0 J_2(\delta_o) (\sin 2A (\cos LB \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma) + \cos 2A \cosh LD \sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma +$$

$$\sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma \sinh LD) \cos 2\omega t \dots\dots\dots (2.5-5)$$

$$I_{3f} = 2I_0 J_3(\delta_0) \sin LB (\cos 2\gamma \sin 2A - \cos 2A \cosh LD \sin 2\gamma - \sinh LD \sin 2\gamma) \sin 3\omega t \dots (2.5-6)$$

$$I_{4f} = -2I_0 J_4(\delta_0) (\sin 2A (\cos LB \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma) + \cos 2A \cosh LD \sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma + \sin^2 \frac{LB}{2} \sin 4\gamma \sinh LD) \cos 4\omega t \dots\dots\dots (2.5-7)$$

經由適當的假設參數以及將倍頻訊號與理論圖形做曲線擬合 (curve fitting)，即可得到圓偏振片各參數，細節將於第四章闡述。

## 2.6 驗證量測參數

為了驗證由曲線擬合得到的圓偏振片參數，以下圖所示的實驗架構說明

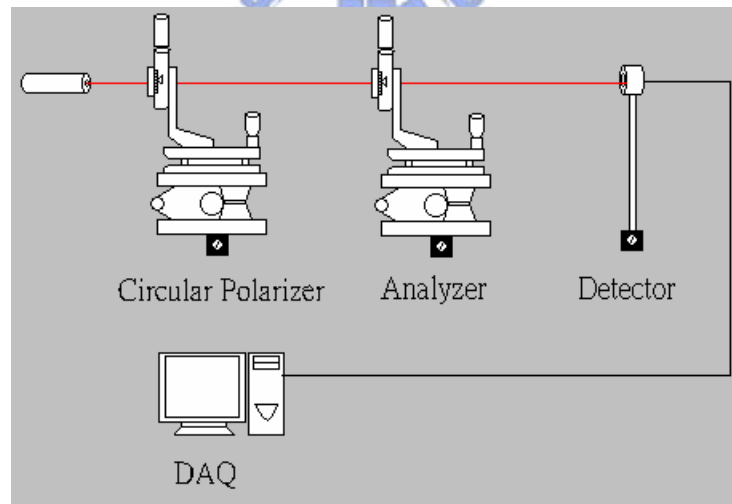


圖 2-9 驗證圓偏振率

將圓偏振片中線偏振片的那面朝向雷射，出射光  $S_f$  可寫成

$$S_f = M_A M_{CP} S_i \dots\dots\dots (2.6-1)$$

理想的圓偏振片如式(2.4-1)所示，穿透圓偏振片的光為圓偏振態，而在



其後再加置一個檢偏片，不論檢偏片的方位角為何，光偵測器所接收的光強度應為定值。需注意的是 Kr-Ar 離子雷射在光線射出共振腔時，便已具備線性偏振態，He-Ne 離子雷射則否，因此在  $S_i$  的寫法上便有所不同。

將實際的圓偏振片模型代入第(2.6-1)式，可以得到出射光  $S_f$  如下：

$$S_{f,He-Ne} = -\frac{I_0}{2} e^{-LD} (-2 + \cos 2A + \cos(2(A - 2\gamma)) - 2 \cos LB \sin(2(A - \gamma)) \sin 2\gamma) \dots\dots (2.6-2)$$

$$S_{f,Ar} = I_0 (\cosh LD + \sinh LD (\cos 2(A - \gamma) \cos 2\gamma - \cos LB \sin(2(A - \gamma)) \sin 2\gamma)) \dots\dots (2.6-3)$$

將擬合得到的圓偏振片參數代入式(2.6-2)、(2.6-3)，並與實驗結果做對照，即可驗證參數的準確性。



## 2.7 圓偏振率

光線若以布魯斯特角(Brewster Angle)為入射角，其反射光將被線偏極化，線偏極化方向為垂直入射面。在攝影學中，基於此原理，就利用了偏振片來提升色彩飽和度並消除反射光，如圖(2-10)。而圓偏振片則是經過特別設計以適用於自動對焦與自動曝光系統的相機。

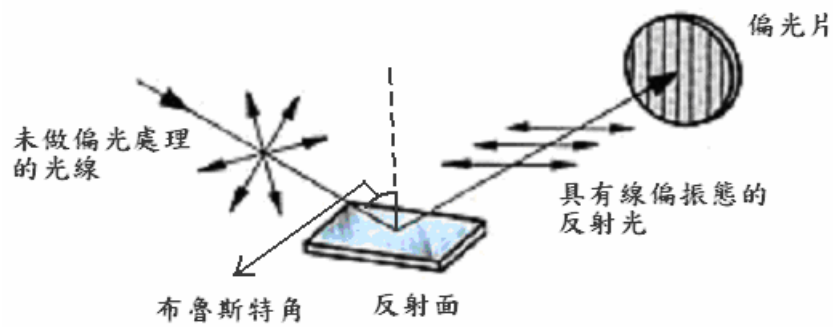


圖 2-10 以布魯斯特角反射的光線具有線偏振態

由於圓偏振片的參數  $LD$  與  $LB$  均為波長  $\lambda$  的函數，因此隨著入射波長的改變會有不同的圓偏振率。此外，在攝影的同時，必須轉動圓偏振片以達到消除反射光及色彩飽和的要求，接下來我們將探討圓偏振率對照不同方位角的線偏振光及不同入射波長的關係式。由式(2.4-4)，將圓偏振片  $LD$  的吸收軸方位角放在  $0^\circ$ ，入射光為任意角度的線偏振光。Mueller Matrix 結構將如以下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma & 0 \\ 0 & \sin 2\gamma & \cos 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos LB & \sin LB \\ 0 & 0 & \sin LB & -\cos LB \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\gamma & \sin 2\gamma & 0 \\ 0 & -\sin 2\gamma & \cos 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \cosh LD & \sinh LD & 0 & 0 \\ \sinh LD & \cosh LD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2p \\ \sin 2p \\ 0 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

其中

$$S_3 = I_0(\sin LB(-\cos 2\gamma \sin 2p + \sin 2\gamma(\cos 2p \cosh LD + \sinh LD))) \quad \dots\dots\dots (2.7-1)$$

p 代表線偏入射光的方位角，由式(2.4-1)我們可知，理想圓偏振態的瓊斯矩陣，僅有  $S_0$  與  $S_3$  有值，其值為 1，當  $S_3$  越接近 1，代表圓偏振化越完全。在這裡我們所說的圓偏振率，指的就是  $S_3$ 。

代入 LD、LB 與  $\gamma$ ，我們可以做出圓偏振率對應波長與角度 p 的關係圖。

## 2.8 消光率(extinction ratio)與光學密度(optical density)

為了使論文中的參數與市售產品的規格表做比較，我們將說明 LD 與消光率的關係。

### • 消光率

將線偏振片的 Jone's Matrix 寫如下：

$$M_p = \begin{pmatrix} \sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2} \end{pmatrix} \dots\dots (2.8-1)$$

對理想偏振片來說， $k_1=1$ ， $k_2=0$ 。然而實際的偏振片是 $k_1 \approx 1$ ， $k_2 \approx 0$ 。

以一道理想的線偏振態光線入射此偏振片，可以下列數學結構表示：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_0 \cos \theta \\ I_0 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= I_0 \begin{pmatrix} \sqrt{k_1} \cos \theta \\ \sqrt{k_2} \sin \theta \end{pmatrix} \dots\dots (2.8-2) \end{aligned}$$

$$I' = I_0 k_1 \cos^2 \theta + I_0 k_2 \sin^2 \theta$$

當入射光偏振態垂直或平行偏振片的穿透軸方向時，分別可得到 $I_{\min}$ 與 $I_{\max}$

$$I_{\min} = I_0 k_2$$

$$I_{\max} = I_0 k_1$$

$$\text{消光率} \equiv \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{k_2}{k_1}$$



$$\dots\dots (2.8-3)$$

• 光學密度

將一道不具偏振態的光線穿透兩片相同的線偏振片，如下圖

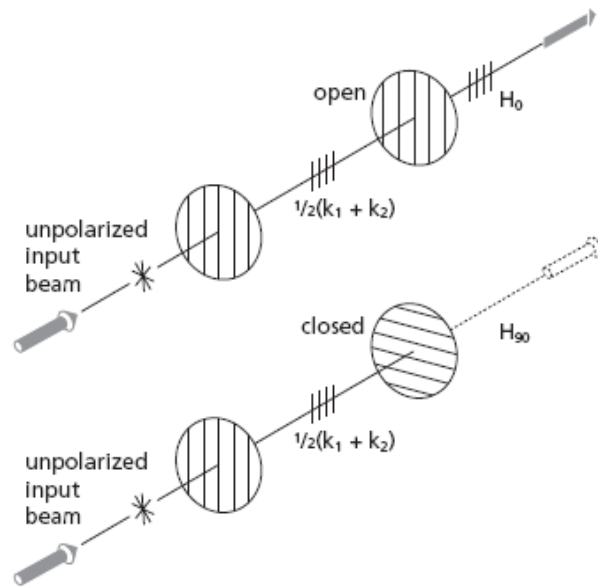


圖 2-11 Optical density 示意圖

可得到穿透率

$$T_{pair} = k_1 k_2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (2.8-4)$$

$\theta$  為兩偏振片穿透軸夾角

在此定義

$$H_{90} \equiv I_{\min} = T_{pair}(90^\circ) = k_1 k_2 \quad \dots\dots\dots (2.8-5)$$

$$H_0 \equiv I_{\max} = T_{pair}(0^\circ) = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \quad \dots\dots\dots (2.8-6)$$

$H_{90}$  即 closed transmittance， $H_0$  則為 open transmittance。這兩個參數都和波長有關。由於隨著波長的改變， $H_{90}$  和  $H_0$  跳動範圍很大，為了方便起見，

做了另外的定義如下：

$$\Delta_{90} = \log\left(\frac{1}{H_{90}}\right) \quad \dots\dots\dots (2.8-7)$$

$$\Delta_0 = \log\left(\frac{1}{H_0}\right) \quad \dots\dots\dots (2.8-8)$$

此即為 open 和 closed optical density 。

經推導

$$k_1 = 10^{-\frac{\Delta_0}{2}}$$

$$k_2 = 10^{-(\Delta_{90} - \frac{\Delta_0}{2})}$$

由式(2.8-3)

$$\text{extinction ratio} = \frac{k_2}{k_1} = 10^{-(\Delta_{90} - \Delta_0)} \quad \dots\dots (2.8-9)$$



# 第三章 實驗步驟

實驗基本設置如下：

雷射光源： 1. He-Ne Laser: Melles Griot laser 10mw

2. Kr-Ar Laser: Melles Griot

偏光片及析光片： Melles Griot 03FPG sheet polarizer

待測物: B+W circular polarizer

光偵測器：Thorlabs PDA55 silicon pin diode

Spectral Range：400-1100nm

數據擷取卡 DAQ (Data Acquisition)：NI PCI-6111

光彈調變器：Hinds PEM-90



## 3.1 穿透式橢圓儀實驗架構

綜合以上對圓偏振片的了解，我們要量測的參數有三：

### 1. 線性偏振二向性(Linear Dichroism, LD)

由式(2.4-2)、(2.4-3)可知

$$LD = \frac{2\pi}{\lambda} (k_o - k_e) d \quad \dots\dots\dots (3.1-1)$$

此參數代表光線在經過厚度為  $d$  的材料後，p-polarized light 和 s-polarized light 強度被吸收的差異程度。

### 2. 雙折射(Linear Birefringence, LB)

$$LB = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad \dots\dots\dots (3.1-2)$$

此參數代表光線在經過厚度為 d 的材料後，p-polarized light 和 s-polarized light 的相位差。

### 3. LD 的穿透軸與 LB 的快軸之間的夾角( $\gamma$ )

我們在簡式橢圓儀(Polarizer-Sample-Analyzer，簡稱 PSA 架構)中，另外加放了光彈調變器(PEM)，即為光彈調變式橢圓儀(圖 3-1)。

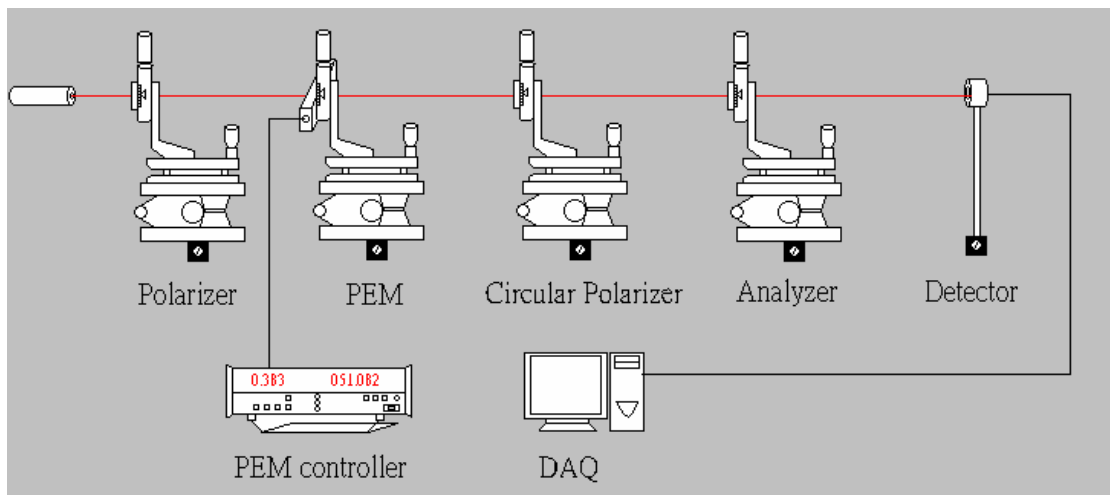


圖 3-1 穿透式光彈調變式橢圓儀

綜合以上對光彈調變式橢圓儀及圓偏振片的認識，我們可以著手進行圓偏振片的量測。為了減少待量測參數，提高量測的準確度，先將圓偏振片中的線偏振片穿透軸放置於零度。所有實驗皆以撰寫的 LabVIEW 程式透過數據擷取卡取得各倍頻訊號。



### 3.2 圓偏振片方位角校正

為了找出圓偏振片中的線偏振片穿透軸的方位角，主要利用了 Malus Law 的原理，將線偏振片那面朝向雷射，並旋轉 180 度，即可得到穿透軸的方位角。實驗架構如下：

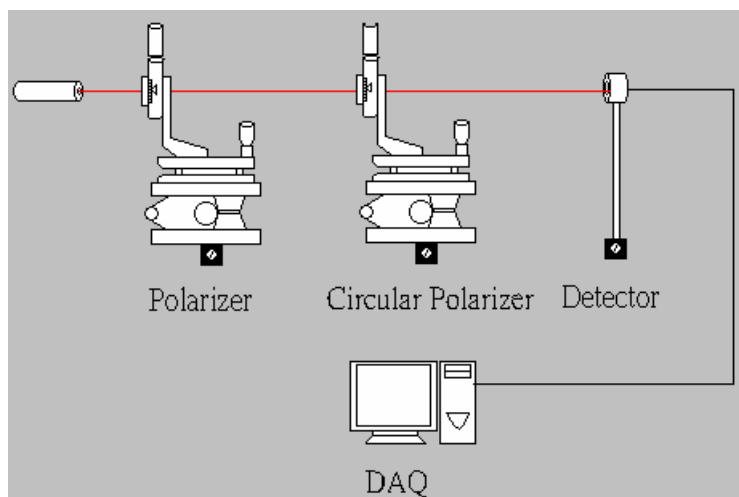


圖 3-2 校正圓偏振片方位角

### 3.3 多波長量測圓偏振片參數

為了驗證實驗準確度，以及了解待測材料的吸收與折射係數對應波長的關係，選用了 He-Ne 及 Kr-Ar 離子雷射共六組波段做為光源，以便將量得的參數做比較。

將檢偏片(Analyzer)由 0 度轉至 180 度，並記錄每隔 15 度角度下的直流與倍頻訊號，經由運算即可得到圓偏振片中的 LD、LB 與  $\gamma$  三個參數。

### 3.4 多波長驗證圓偏振率

將圓偏振片中線偏振片的那面朝向雷射。為了減少因儀器造成的系統誤差，此實驗步驟並無放置起偏片(如圖 2-9)。將檢偏片方位角由 $0^\circ$ 轉至 $360^\circ$ ，每隔 $15^\circ$ 記錄一次光強度值。

最後將得到的圓偏振參數代入式(2.6-2)、(2.6-3)，對析光片的穿透軸方位角  $A$  做光強度分布極坐標圖，再與實驗數據做對照。



# 第四章 實驗結果

## 4.1 倍頻訊號量測結果

此章節將分別展示兩種實驗架構所量測到的訊號波形。在 4.1.1 節是以橢圓儀(P-PEM-S-A 架構，參照第 3.1 節)量測圓偏振片時的各倍頻訊號，此時的圓偏振片擺置方式是將線偏振片那面朝向光偵測器，目的是方便接下來的數值擬合過程。4.1.2 節則是將架構中的起偏器與光彈調變器移除，並將圓偏振片中的線偏振片朝向雷射(參照第 3.4 節)，目的是檢驗圓偏振率(圓偏振率的定義請參照第 2.7 節)

### 4.1.1 多波長橢圓儀(P-PEM-S-A)量測圓偏振片結果

圖(4-1)至圖(4-6)分別是以六種不同波長的雷射為光源的量測在各析光角下的亮度，在實驗中的訊號取值並無考慮相位，因此可以發現不論是直流或其他倍頻訊號皆為正值。相位的判斷將於第 4.3 節作進一步討論。

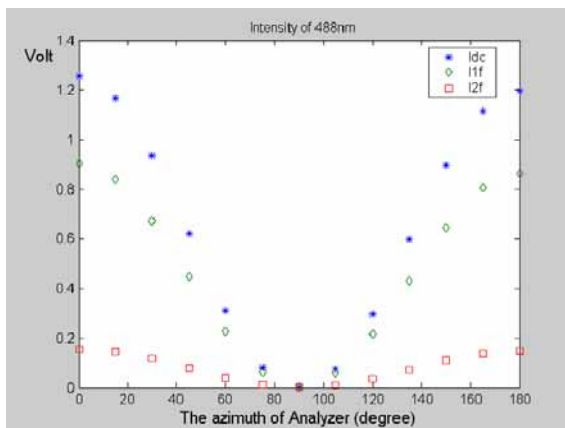


圖 4-1 波長 488nm 的各倍頻訊號

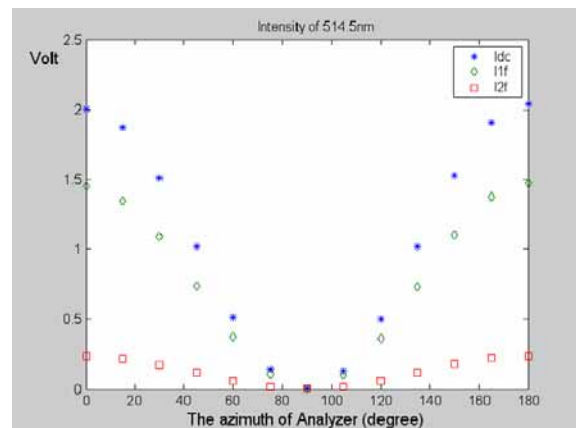


圖 4-2 波長 514.5nm 的各倍頻訊號

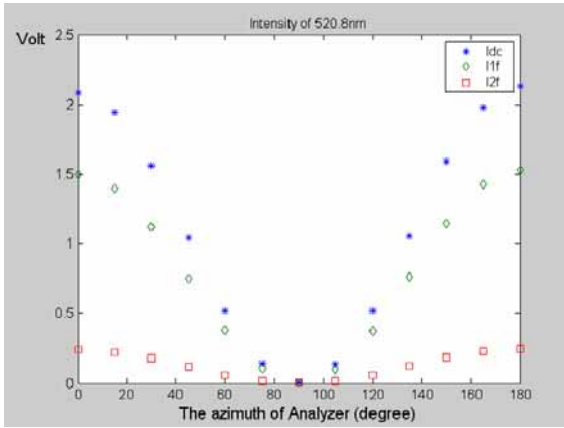


圖 4-3 波長 520.8nm 的各倍頻訊號

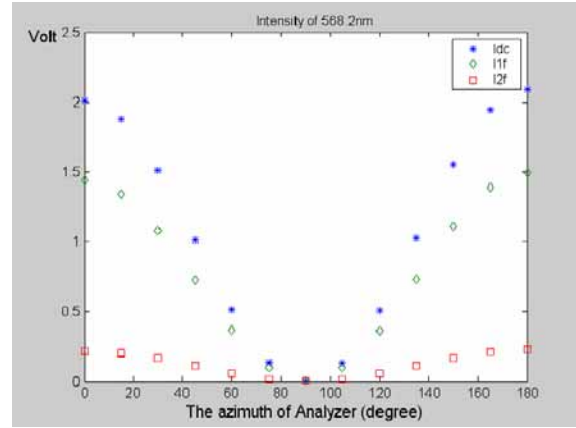


圖 4-4 波長 568.2nm 的各倍頻訊號

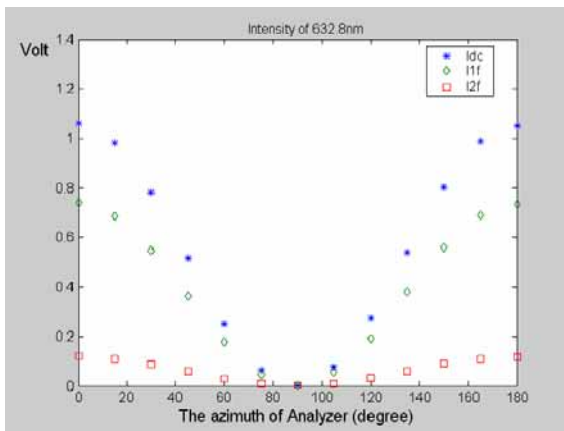


圖 4-5 波長 632.8nm 的各倍頻訊號

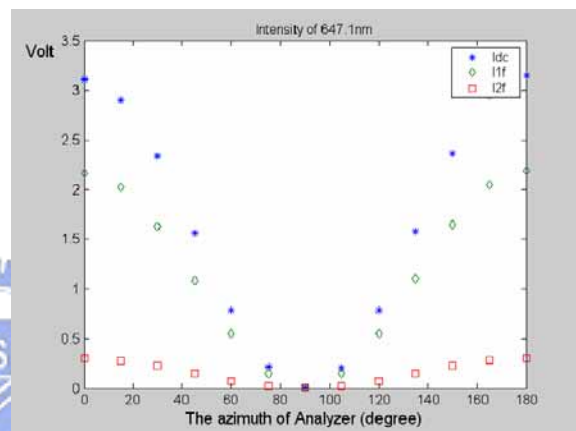


圖 4-6 波長 647.1nm 的各倍頻訊號

#### 4.1.2 多波長驗證圓偏振率

下圖是以第 3.4 節的架構所量測出來的結果，由於已經將光彈調變器移除，因此只會取得直流訊號。由式(2.4-1)及式(2.6-2)、(2.6-3)可知，光偵測器所接收的訊號不會隨檢偏器的轉動而改變，因此最外圍的粗體黑線代表的是理想圓偏振片該有的實驗結果。我們可以發現，當波長增加時，其圓偏極化程度越差，此結果將在最後一章再加以討論。

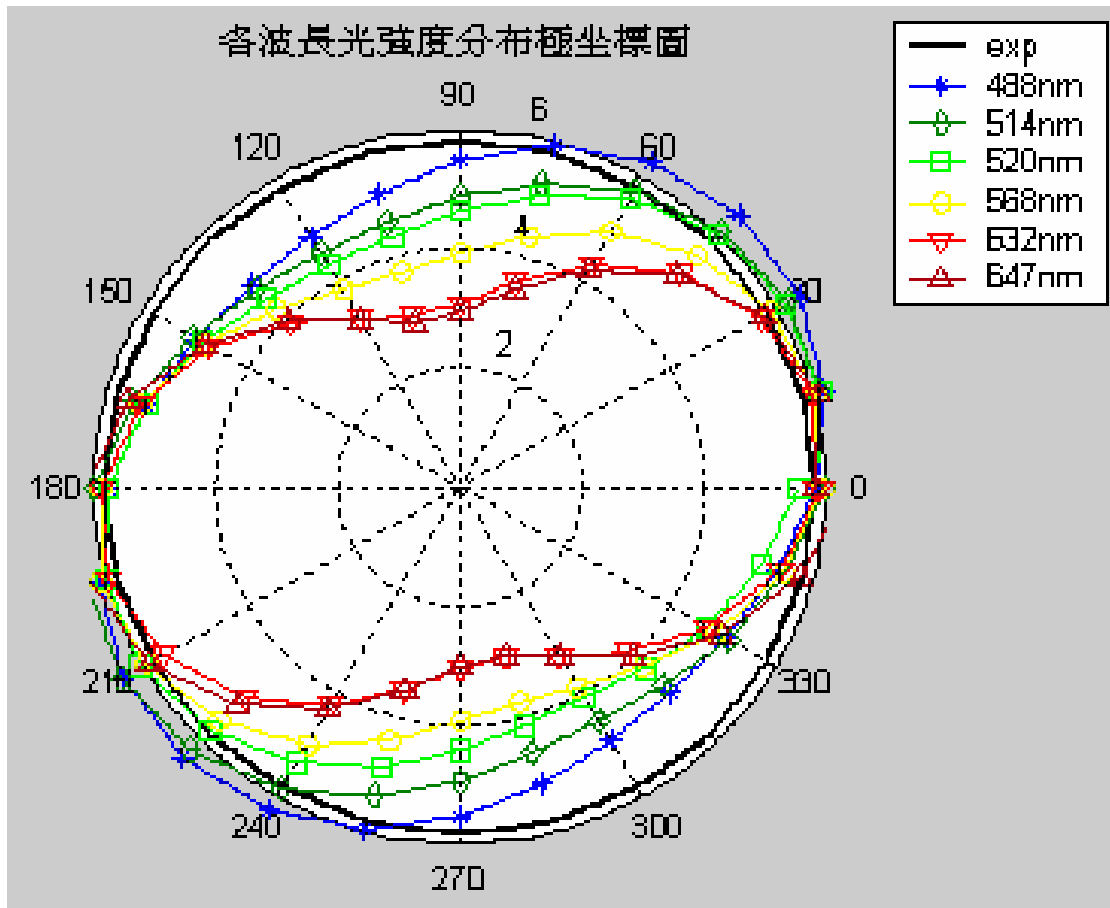


圖 4-7 多波長光強度極座標分布圖

## 4.2 圓偏振片理論圖形模擬

為了減少曲線擬合時的變數，以增加實驗準確度及計算速度，可先做圖形模擬，觀察參數的變動對倍頻訊號的影響。在此我們選用  $\lambda=488\text{nm}$  時的實驗數據做數值模擬，而為了方便與實驗數據做比對，我們將適度等比例縮小理論圖形的振幅。

• 直流訊號對參數的敏感度

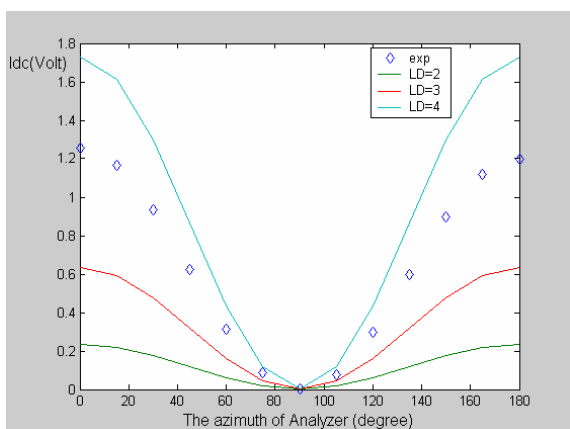


圖 4-8 觀察不同的 LD 對  $I_{dc}$  的影響

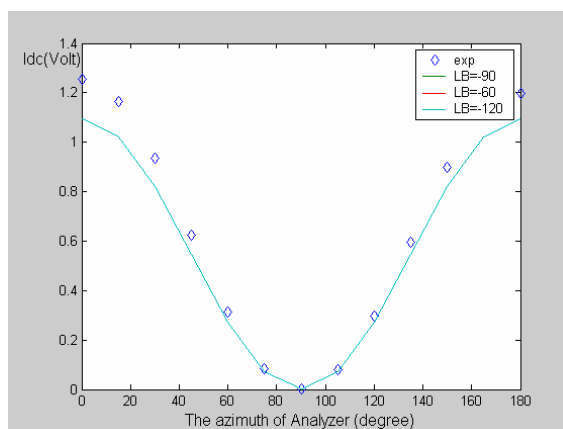


圖 4-9 觀察不同的 LB 對  $I_{dc}$  的影響

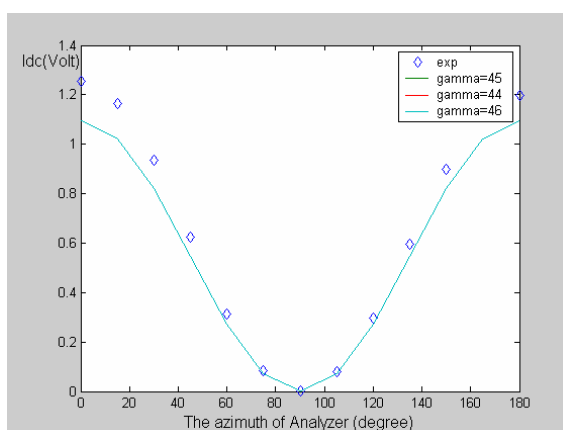


圖 4-10 觀察不同的  $\gamma$  對  $I_{dc}$  的影響

由以上三圖可知，直流項只對 LD 的變化有明顯反應，LD 改變對  $I_{dc}$  造成的效應在於改變振幅大小，唯獨波形最低點位置並無改變。因此若要以曲線擬合法(curve fitting method)尋求 LB 與  $\gamma$  時，應避開  $I_{dc}$  訊號。

• 一倍頻訊號對參數的敏感度

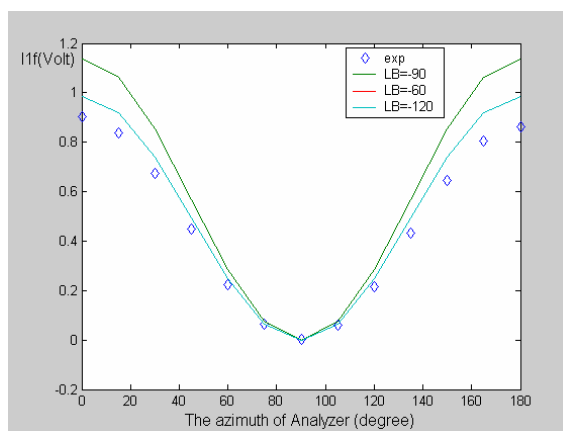
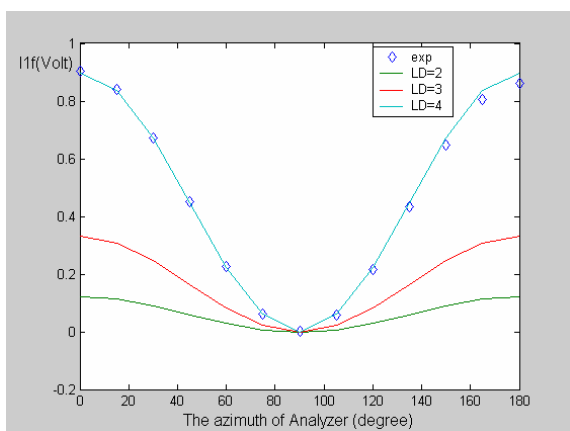


圖 4-11 觀察不同的 LD 對  $I_{1f}$  的影響    圖 4-12 觀察不同的 LB 對  $I_{1f}$  的影響

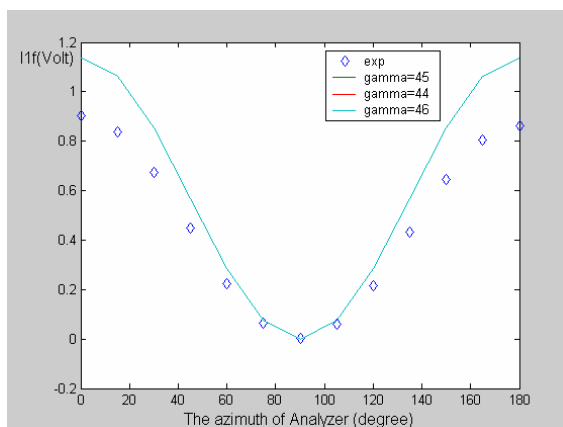


圖 4-13 觀察不同的  $\gamma$  對  $I_{1f}$  的影響

由以上三圖可知，一倍頻訊號對 LD 與 LB 有反應，其中 LD 對  $I_{1f}$  造成的效應與對  $I_{dc}$  造成的效應相同，而 LD 與 LB 對  $I_{1f}$  的效應亦大同小異，因此在擬合時，應避免同時尋求這兩個參數的解，以免造成簡併(degenerate)的現象。另一點值得注意的是，在  $LB=60^\circ$  與  $LB=120^\circ$  時，曲線重合，原因是 LB 在  $I_{1f}$  中是以  $\sin$  函數的形式呈現(參照 2.11 式)，因此若希望單以  $I_{1f}$  求得 LB，會出現上述的問題，無法判定 LB 的正確值。

• 二倍頻訊號對參數的敏感度

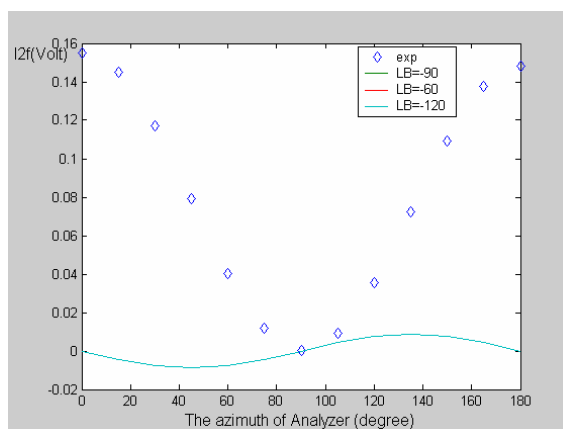
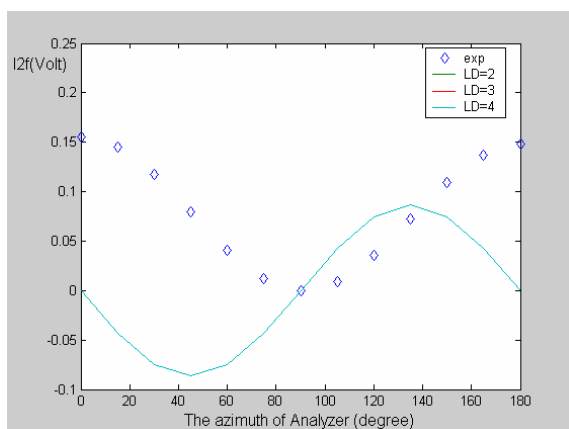


圖 4-14 觀察不同的 LD 對  $I_{2f}$  的影響 圖 4-15 觀察不同的 LB 對  $I_{2f}$  的影響

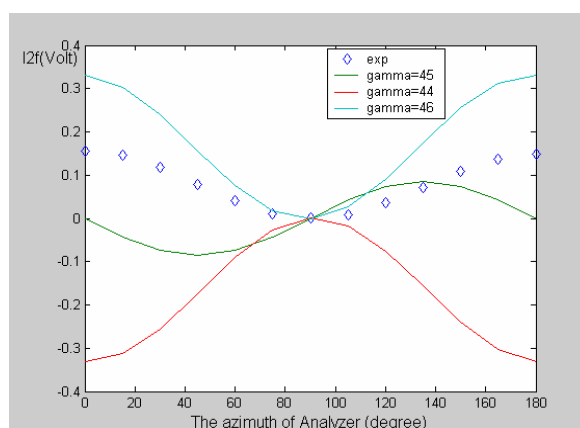


圖 4-16 觀察不同的  $\gamma$  對  $I_{2f}$  的影響

若單由圖 4-14 與圖 4-15，很容易做出錯誤判斷，認為  $I_{2f}$  對 LD 與 LB 沒有反應。在觀察圖 4-16 後，可以清楚發現，原因在於其夾角  $\gamma$  並不是  $45^\circ$ 。圖 4-16 顯示，若  $\gamma = 45^\circ$ ，其理論波形與實驗數據大相逕庭。當  $\gamma = 46^\circ$  時較接近實驗數據，而  $\gamma = 44^\circ$  時相位將反相。



現在將  $\gamma = 50^\circ$  代回圖 4-8 至圖 4-15 重新討論，發現對圖 4-8 至圖 4-13 並無影響，而圖 4-14 與圖 4-15 將改變如下

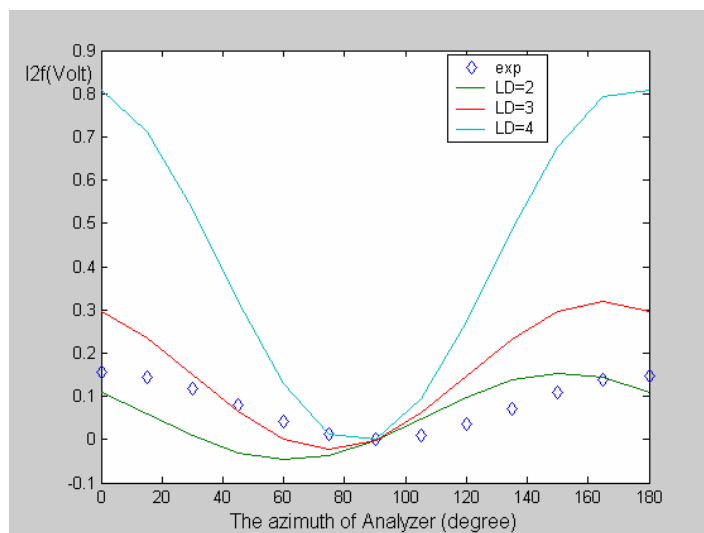


圖 4-17  $\gamma = 50^\circ$  時觀察不同的 LD 對  $I_{2f}$  的影響

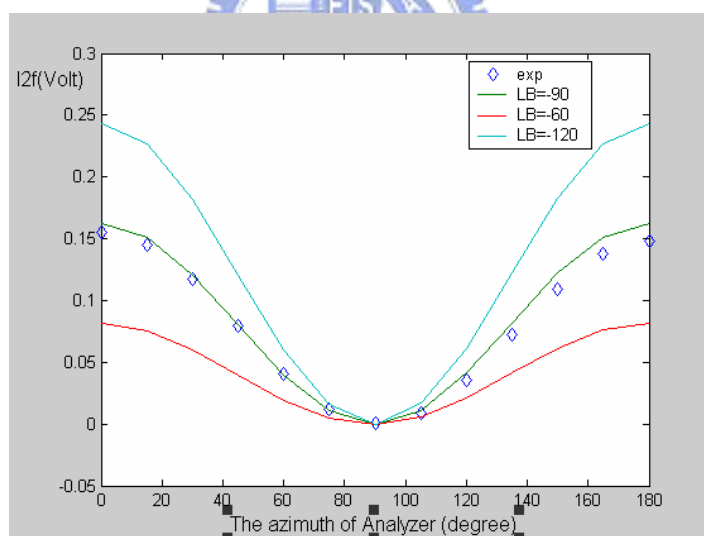


圖 4-18  $\gamma = 50^\circ$  時觀察不同的 LB 對  $I_{2f}$  的影響

可以發現，LD 與 LB 對  $I_{1f}$  與  $I_{2f}$  造成的效應類同，與  $I_{1f}$  不同的是，LB 在  $I_{2f}$  會以  $\cos$  函數的形式呈現(參照 2.12 式)，因此 LB 在大於或小於  $90^\circ$  時， $I_{2f}$  值會有變化，在判斷 LB 值會較  $I_{1f}$  容易。

表 4-1 倍頻訊號對參數的敏感度

	LB	LD	$\gamma$
Idc	×	✓	×
I1f	✓	✓	×
I2f	✓	✓	✓

### 4.3 以曲線擬合法求圓偏振片參數

#### 4.3.1 參數相位判斷

參數的正負號有其特定的含意，可決定快慢軸向、穿透吸收軸向與夾角。如圖(4-1)到圖(4-6)所示，由於並未採用 LabVIEW 取得的倍頻訊號相位，因此必須藉由其他方法判斷參數的正負號。

#### • LD正負號判斷

首先我們改變倍頻訊號 LD 參數的正負號，並將倍頻訊號取絕對值，與圖 4-1 做比較，以判斷 LD 正負號。圖(4-19)至圖(4-22)為波長 488nm 的一倍頻與二倍頻訊號，分別將  $LD=\pm 10$ ， $LB=\pm 90^\circ$ ， $\gamma=\pm 50^\circ$  代入第(11)、(12)式

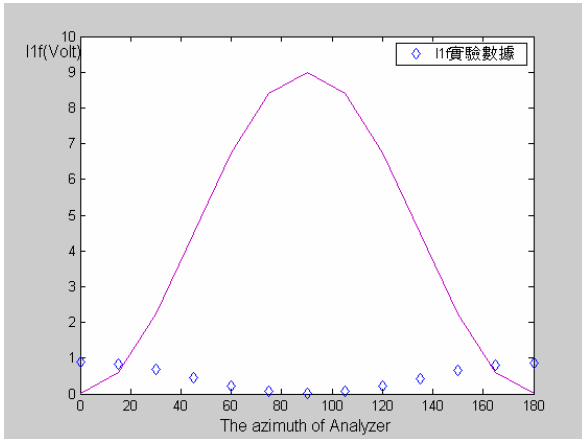


圖 4-19 波長 488nm 的一倍頻訊號

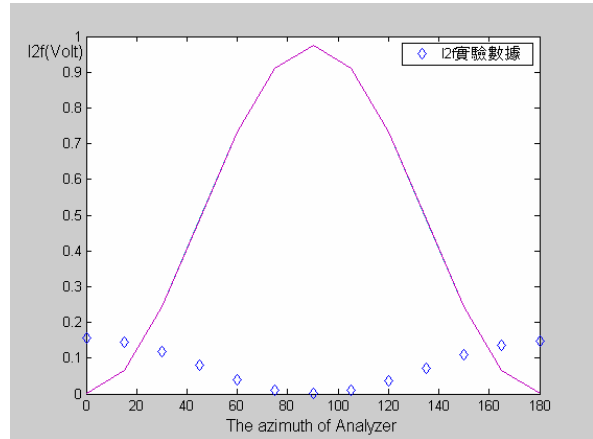


圖 4-20 波長 488nm 的二倍頻訊號

以上兩圖代入  $LD=-10$  ,  $LB=\pm 90^\circ$  ,  $\gamma=\pm 50^\circ$

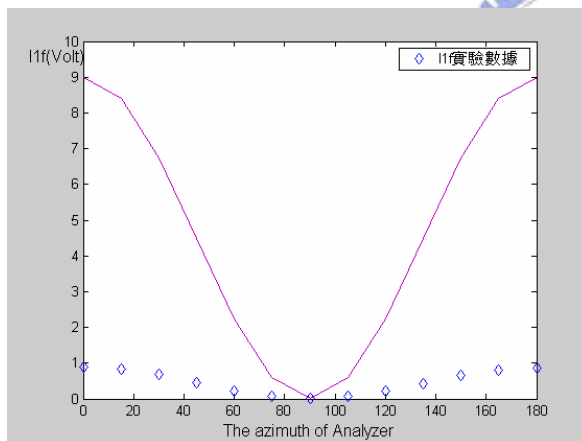


圖 4-21 波長 488nm 的一倍頻訊號

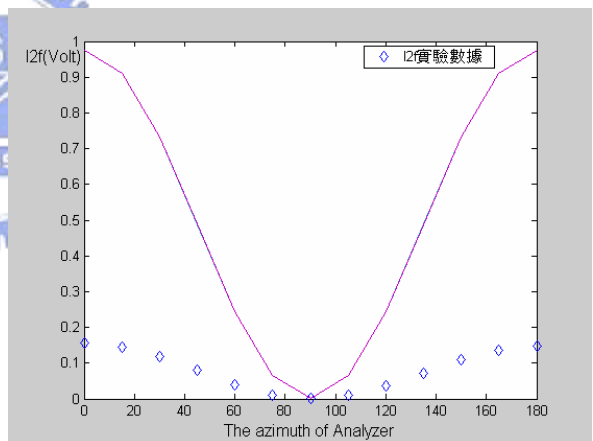


圖 4-22 波長 488nm 的二倍頻訊號

以上兩圖代入  $LD=10$  ,  $LB=\pm 90^\circ$  ,  $\gamma=\pm 50^\circ$

由圖(4-19)到圖(4-22)可看出，當  $LD$  為負號時，模擬訊號和實際訊號反相，當  $LD$  為正號時，模擬訊號和實際訊號同相。因此由這四張模擬圖形可判斷  $LD$  為正號。

•  $\gamma$  正負號的判斷

接下來，將  $\gamma = \pm 50^\circ$ ， $LD = 10$ ， $LB = \pm 90^\circ$  代入式(2.6-3)，與實驗數據比較：

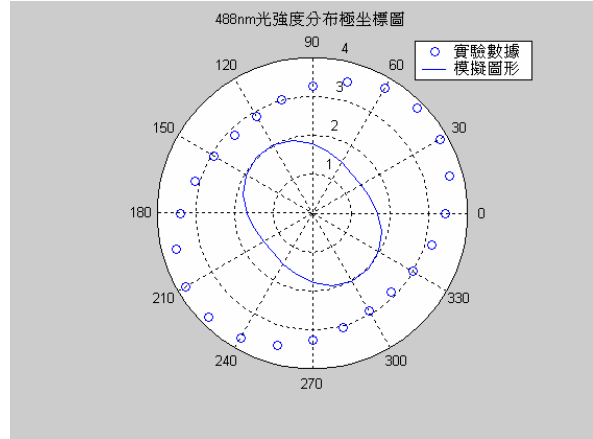
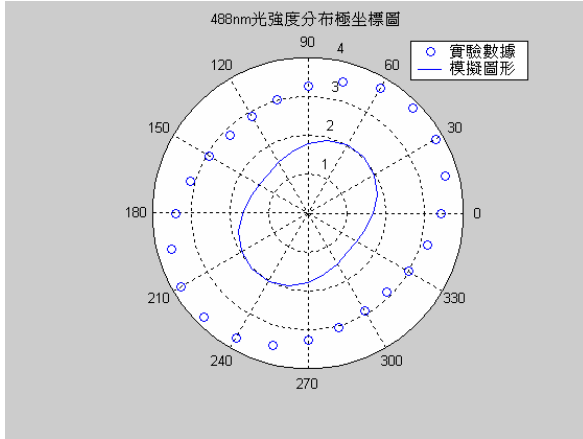


圖 4-23 代入  $\gamma = +50^\circ$ ， $LD = 10$ ， $LB = \pm 90^\circ$       圖 4-24 代入  $\gamma = -50^\circ$ ， $LD = 10$ ， $LB = \pm 90^\circ$

由圖(4-23)與圖(4-24)可看出，當  $\gamma$  為正號時，模擬圖形和實驗數據的傾斜趨勢是吻合的，而當  $\gamma$  為負號時，其趨勢則相反，因此由這兩張模擬圖形可判斷  $\gamma$  為正號。



由 4.1 節我們知道，當  $\gamma = 46^\circ$  時， $I_{2f}$  理論式較接近實驗數據，而  $\gamma = 44^\circ$  時相位將反相。然而尚不能由此確定  $\gamma$  大於或小於  $45^\circ$ ，因為取了絕對值後這兩者是沒有差別的。因此我們再做一次模擬，將  $\gamma = 50^\circ$ 、 $40^\circ$ ， $LD = 10$ ， $LB = \pm 90^\circ$  代入式(2.6-3)，與實驗數據比較：

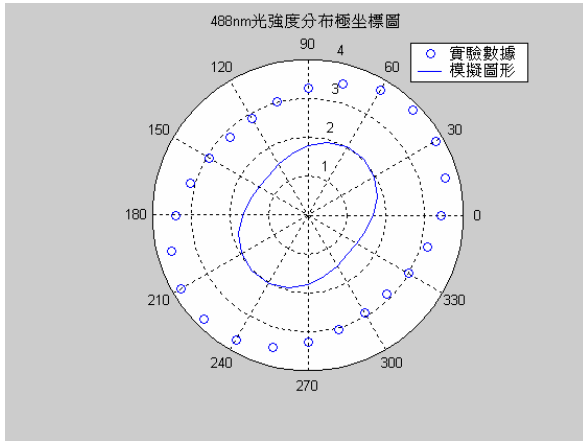


圖 4-25  $I_{2f}$  代  $\gamma=50^\circ$  ,  $LD=10$  ,  $LB=\pm 90^\circ$

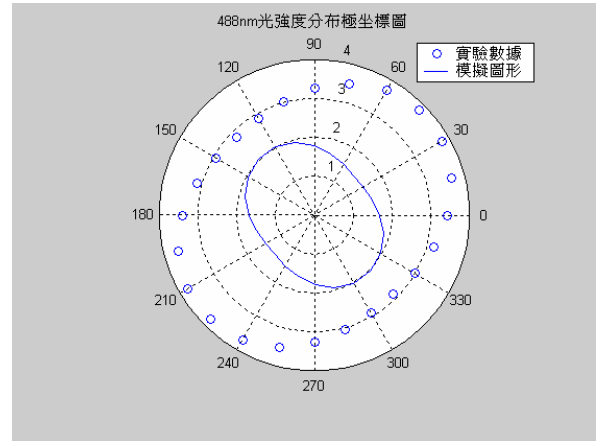


圖 4-26  $I_{2f}$  代  $\gamma=40^\circ$  ,  $LD=10$  ,  $LB=\pm 90^\circ$

由圖(4-25)與圖(4-26)可看出， $\gamma=50^\circ$ 時，模擬圖形和實驗數據的傾斜趨勢吻合，因此  $\gamma$  大於  $45^\circ$ 。藉由本節所介紹的步驟，可以縮小擬合變數的範圍，增加擬合速度並提高準確度。至於  $LB$  的正負號則需藉由下一節將最後結果擬合出來才能做判斷。



### 4.3.2 擬合結果

由 4.2 節的討論可知， $I_{2f}$ (或  $I_{4f}$ ，但兩者差別只在係數的大小不同)是唯一一對  $\gamma$  有反應的訊號，因此可以由  $I_{2f}$  著手對  $\gamma$  做擬合。而為了減少待擬合的參數，首先我們假設圓偏振片中的線偏振片是理想的，即  $LD \rightarrow \infty$ ，在實際運算時，代入  $LD=10$ ，以 MATLAB 寫出擬合程式(附錄 A)。

由表(4-1)，二倍頻訊號是唯一對三個參數都具有敏感度的訊號，而一倍訊號僅對  $LD$  與  $LB$  具有敏感度。而由式(2.5-4)與(2.5-5)可知，當這兩個倍頻訊號相除時，可將理論式中的  $I_0$  消去，亦即消去了雷射不穩定的系統誤差

項，因此我們以二倍頻訊號除以一倍頻訊號做為理論式，並將理論式與實驗數據作數值擬合。另外由圖(4-13)可看出，在析光片方位角為  $90^\circ$  時，一倍頻和二倍頻訊號很小且趨近於 0，因此當倍頻訊號相除時會出現奇異點 (singular point)，為避免此誤差，選擇了析光片角度在  $0^\circ\sim 60^\circ$  及  $120^\circ\sim 180^\circ$  的區間內做擬合分析。

由於尚未確定 LB 的正負號，因此必須分 LB 大於零和 LB 小於零兩個區段來做擬合，再將擬合結果代入式(2.6-3)與實驗數據比較，判斷 LB 的正負號。

首先假設 LB 為正號，在波長 488nm 時擬合出  $LB=50.35^\circ$ ， $\gamma=47.4^\circ$ 。

接下來是要擬合 LD 值，將得到的 LB 與  $\gamma$  值代回二倍頻訊號除以一倍頻訊號理論式，將 LD 設為變數進行擬合。在 488nm 得到的 LD 為 2.54 將  $LB=50.35^\circ$ ， $\gamma=47.4^\circ$ ， $LD=2.54$  代入式(2.6-3)，與圖(4.7)比較：

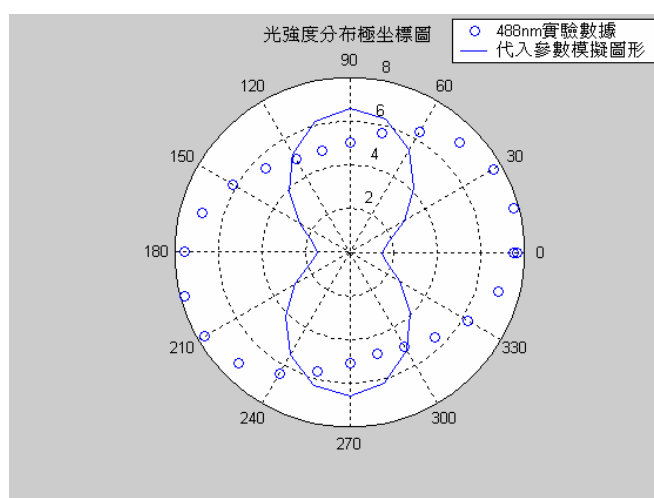


圖 4-27  $LB=50.35^\circ$ ， $\gamma=47.4^\circ$ ， $LD=2.54$  理論與實驗比較圖

由圖(4-7)發現，擬合結果與實驗數據並不符合。因此我們將 LB 定在負區間，可以得到以下結果

表 4-2 圓偏振片擬合結果

wavelength(nm)	488	514.5	520.8	568.2	632.8	647.1
$\gamma$ (degree)	49.8	49.9	50.0	50.0	50.2	49.9
LB (degree)	-92.2	-99.5	-95.5	-104.3	-105.25	-113.9
LD	4.55	4.42	4.31	4.13	3.85	3.92

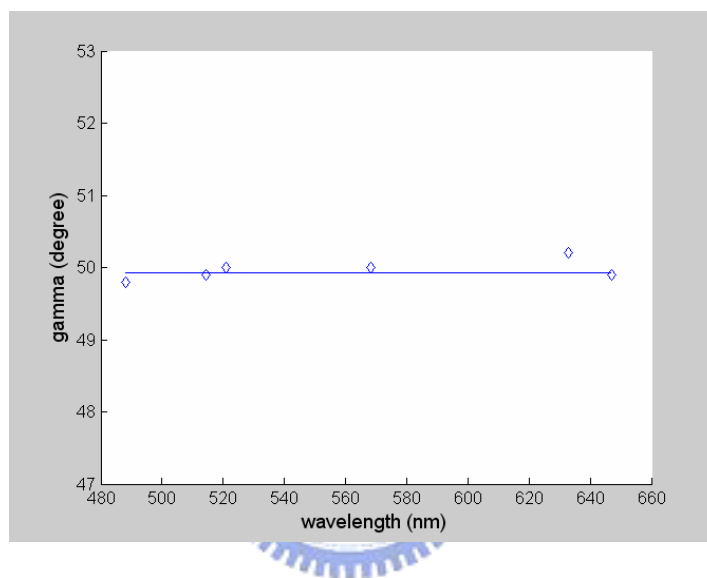


圖 4-28 各波長下所量出的  $\gamma$ ， $\gamma=49.92^\circ \pm 0.3^\circ$

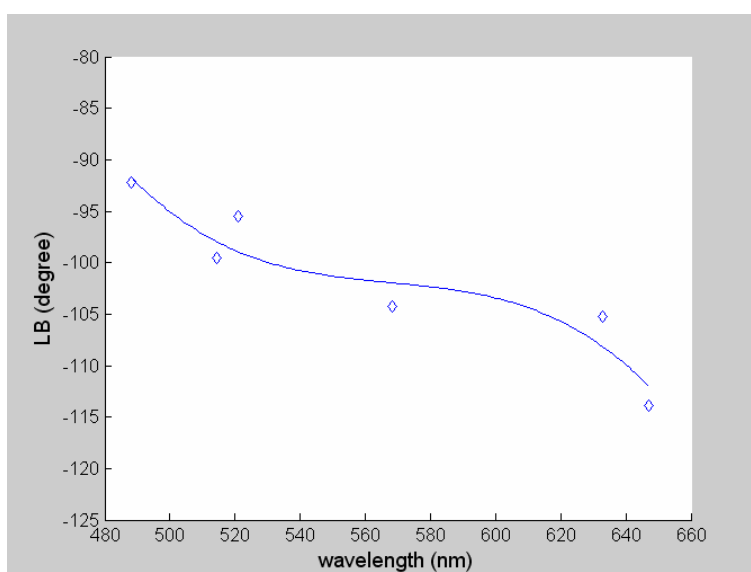


圖 4-29 各波長下所量出的 LB

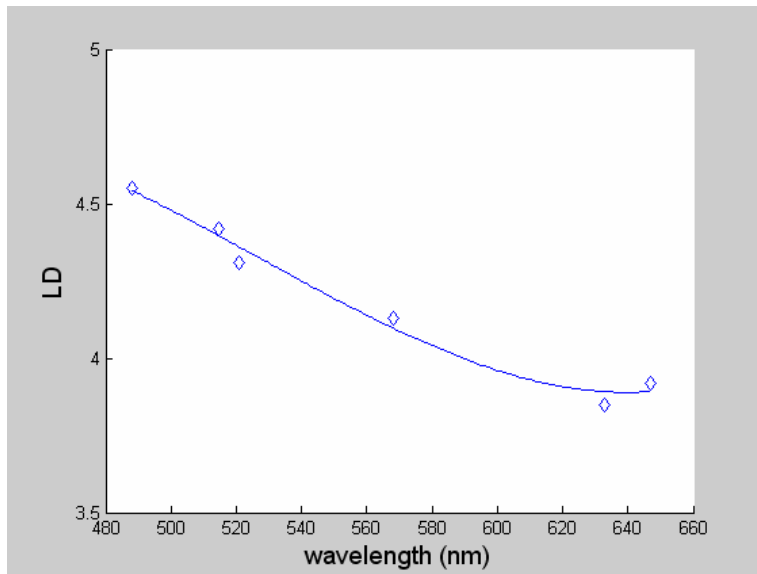
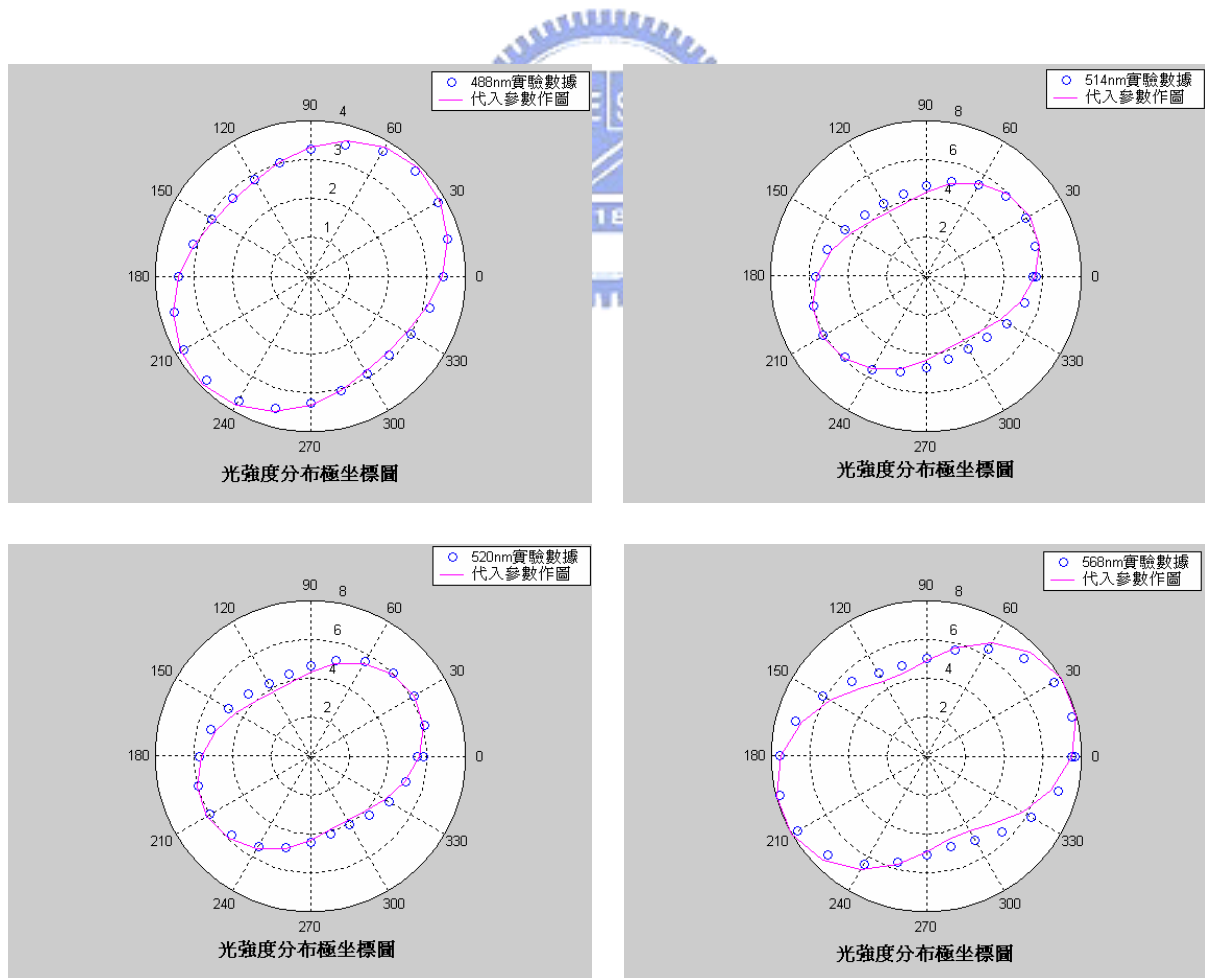


圖 4-30 各波長下所量出的 LD

將參數代入式(2.6-2)與式(2.6-3)，與圖(4.7)比較:





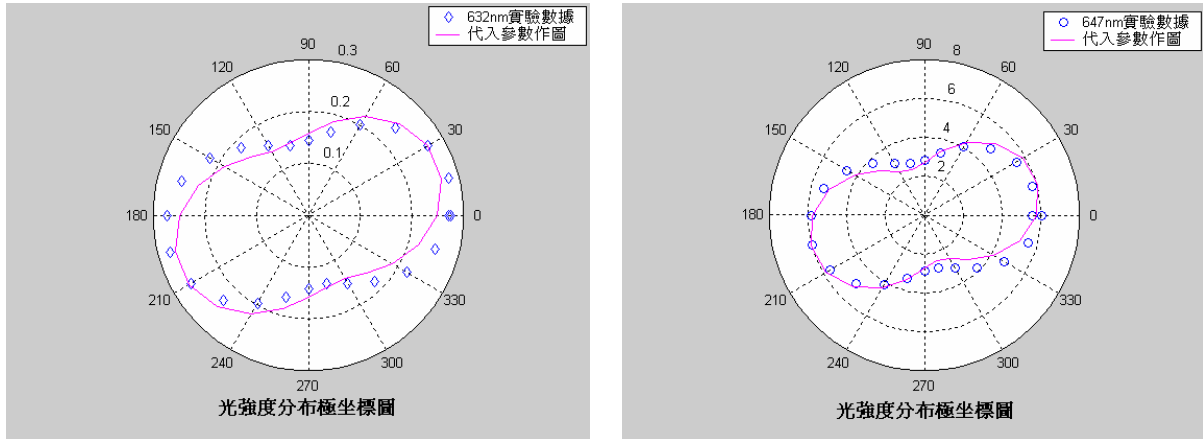


圖 4-31 多波長驗證圓偏振率

圖(4-31)的實線部份，即代入數據作圖部份，皆已乘上一一定的倍數加以放大(或縮小)，理由是為为了方便和實驗數據比對。經由圖形模擬，發現LB若有誤差，將影響圖形的扁平或彎曲程度(LB越大彎曲程度越大)， $\gamma$ 則是影響圖形的傾斜程度，如圖(4-32)所示。由圖(4-31)可知，圖形在短波長時非常吻合，到了長波長開始有一點誤差。至於LD則會將圖形等比例放大或縮小，由式(2.6-2)、(2.6-3)可知，由於 $I_0$ 不確定的關係，因此對於LD的準確性尚有待討論。

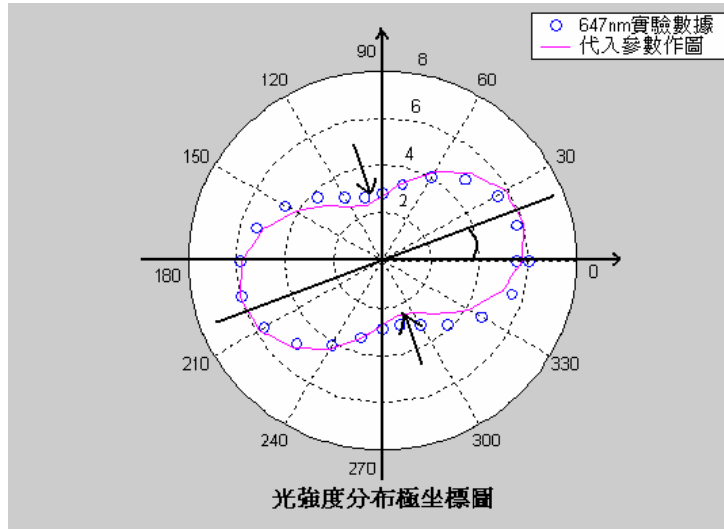


圖 4-32 極坐標分布圖: LB 與  $\gamma$  對光強度分布的影響

擬合結果 LD 為正號，由式(2.4-2)、(2.4-3)可知，其穿透軸在水平(x)方向，事實上，在實驗步驟第 3.2 節就已敘述到，在做實驗前就已把圓偏振片的穿軸設置於  $0^\circ$ ，以減少擬合參數，因此由 LD 的正負號判斷穿透及吸收軸向是可行的。而 LB 為負號，代表其慢軸在水平方向。由式(2.4-4)，因為  $\gamma$  為正號，代表逆時針旋轉(眼睛朝向光源)，因此圓偏振片的幾何結構如下：

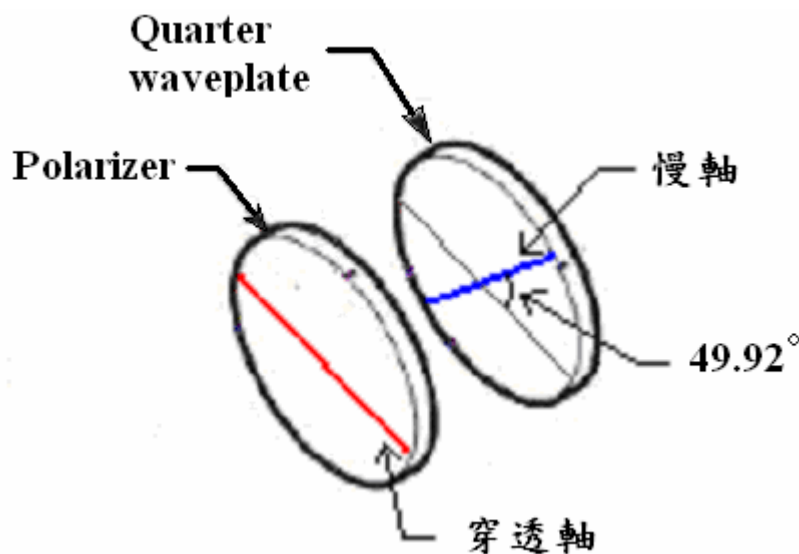


圖 4-33 圓偏振片幾何結構

## 4.4 圓偏振率

將實驗所得  $LD$ 、 $LB$ 、 $\gamma$  代入式(2.7-1)，可做出圓偏振率對應入射光的線性偏極角度與波長的關係圖，如圖(4-34)和圖(4-35)。

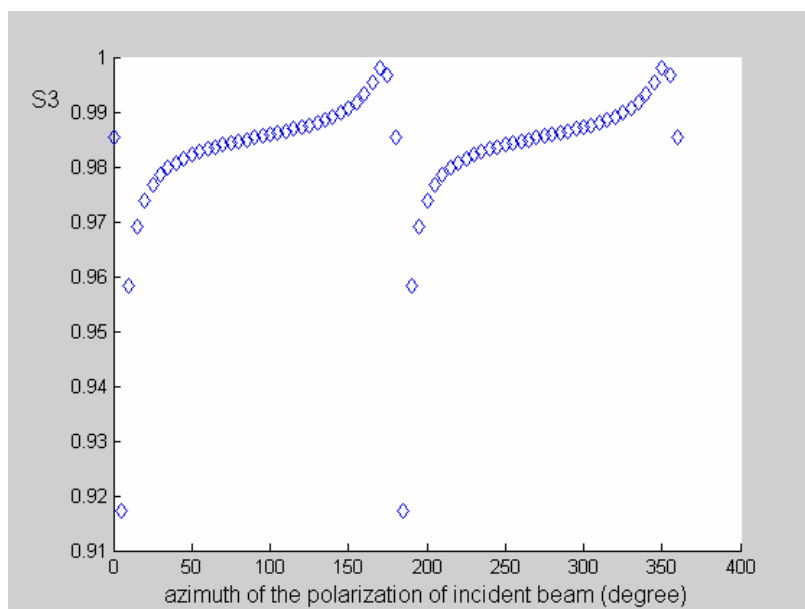


圖 4-34 圓偏振率與入射線偏振光方位角的關係圖

圖(4-34)為使用 488nm 為量測光源，代入  $LB=-92.2^\circ$ ， $LD=4.55$ ， $\gamma=49.8^\circ$  所做的圖。在實際攝影時，為了消除反射光，必須使圓偏振片穿透軸與入射的線偏振光正交，也就是入射光的方位角在  $90^\circ$  的時候。由圖(4-34)可看出，入射光的方位角在  $90^\circ$  附近的圓偏振率變化很小，在攝影上是個很便利的設計，避免因無法以手動方式精準調整方位角至  $90^\circ$ ，而造成圓偏振率的大幅跳動。

接下來我們討論當以未偏振光入射圓偏振片時，圓偏振率對應波長的關係圖。

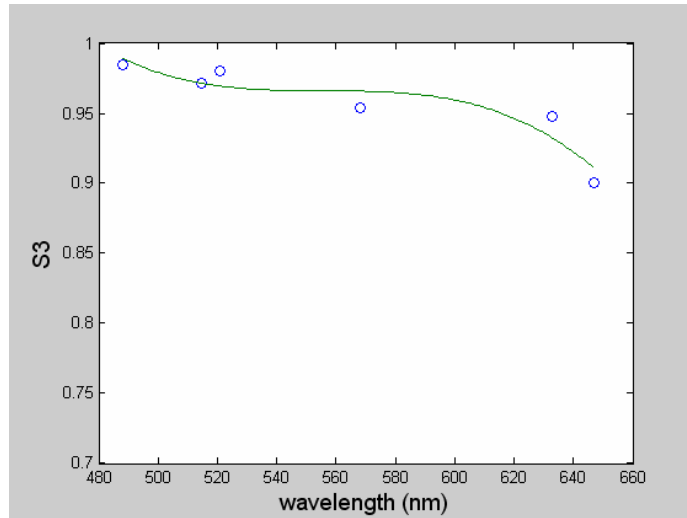


圖 4-35 圓偏極率對應入射光波長的關係圖

如圖(4-35)所示，此圓偏振片的圓偏振率隨著入射波長增加而遞減，此結論與圖(4-7)結論相同，亦證明此圓偏振片適用於短波長。



#### 4.5 消光率(extinction ratio)

由 2.8 節的原理，將量測到的 LD 換算為消光率，可做出下列圖譜：

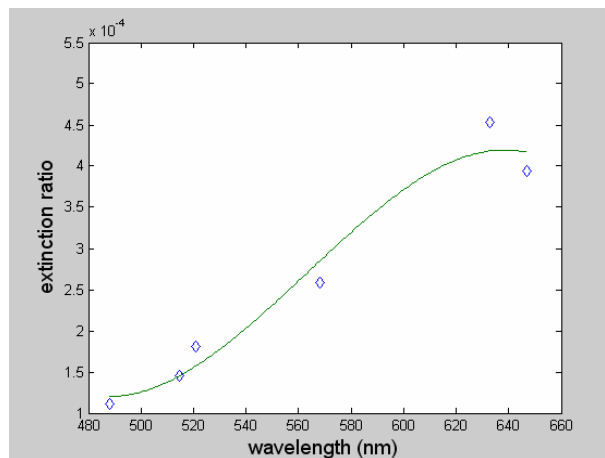


圖 4-36 extinction ratio 對應波長關係圖

與實驗中所用 MELLES GRIOT 的線偏振片來做比較。下圖為 MELLES GRIOT 的二色性片狀偏振片(dichroic sheet polarizer)，型號 03 FPG 的光學密度對應波長關係圖

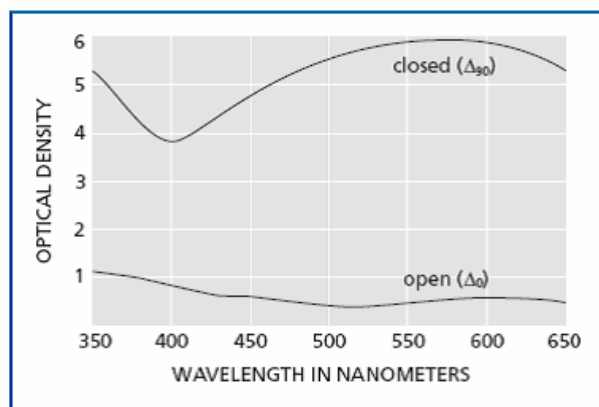


圖 4-37 Optical density for pair of 03 FPG

dichroic sheet polarizers of MELLES GRIOT

由式(2.8-4)至式(2.8-9)的推導，可將光學密度換算為消光率，而由於實驗時所使用的雷射光源分別為  $\lambda=488\text{nm}$ 、 $514\text{nm}$ 、 $520\text{nm}$ 、 $568\text{nm}$ 、 $632\text{nm}$ 、 $647\text{nm}$ ，因此我們由圖(4-37)讀出這六個波長的光學密度作換算並畫出下圖

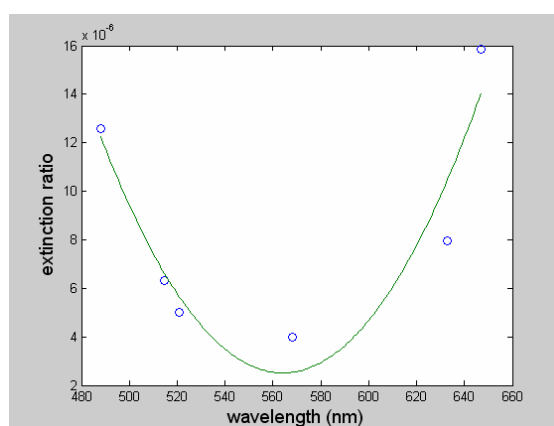


圖 4-38 extinction ratio of dichroic sheet polarizer of MELLES GRIOT;

(-) 利用二項方程式擬合法

由圖(4-36)與圖(4-38)可看出，樣品所用的材料在藍光時有較強吸收性，實驗室原有的線偏振片在黃綠光時有較強吸收性。



## 第五章 結論

在本論文中，介紹如何利用光彈調變式橢圓儀量測具有複合式雙光軸的材料，在此我們以圓偏振片為樣品，並界定出三個參數:LB(圓偏振片所造成的線性相位延遲)、LD(圓偏振片的線性吸收)及 $\gamma$ (光軸間的夾角)。

由實驗結果可以發現， $\gamma$ 並不是原本所預期的在理想 $45^\circ$ ，以多波長量測來說，平均是 $49.92^\circ$ 。而我們也量測出LD與LB，並以多波長架構量測樣品的特性光譜。除此以外，我們也可簡單的藉由LD與LB的正負號，判斷出其穿透吸收軸向與快慢軸向。

在此我們預測實驗誤差來源有二：

1. 樣品均勻度造成的誤差。由於樣品的均勻度可能不夠，因此不同的量測點會有不同的結果。
2. 由圖(4-1)至圖(4-6)可知，一二倍頻訊號在 $A=90^\circ$ 時極小，非常接近零，由於我們是利用二倍頻除以一倍頻進行擬合，在 $A=90^\circ$ 時會出現奇異點(singular point)，因此我們在擬合時，避開了這個區間，採用 $0^\circ\sim 60^\circ$ 及 $120^\circ\sim 180^\circ$ 這兩個區間共十個角度來取值，每個角度取100個點做平均，如圖(5-1)。然而不論是什麼波長，在這兩區間內取的值跳動的幅度都比 $90^\circ\sim 120^\circ$ 的區間來的大，下表是波長488nm時，各析光片方位角的量測標準差

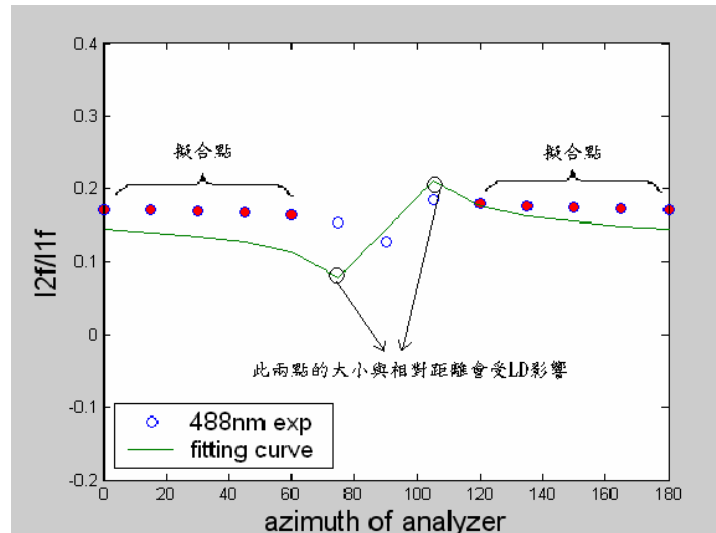


圖 5-1

表 5-1 各析光片方位角量測標準差

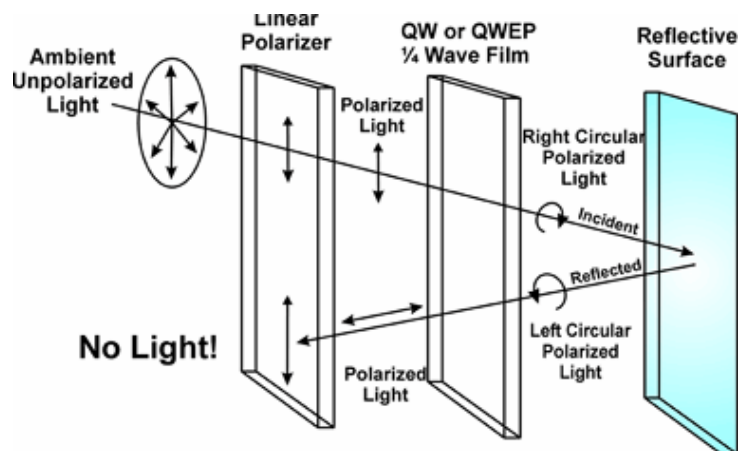
析光片方位角(度)	0	15	30	45	60	75	90
標準差	0.8136	0.7729	0.59	0.4141	0.2245	0.0917	0.0272
析光片方位角(度)	105	120	135	150	165	180	
標準差	0.0582	0.2089	0.381	0.6076	0.7334	0.7792	

改良此實驗的方法是縮小量測間隔，例如每隔 1 度取一次值，取的區間則定於 60°~75° 與 105°~120°，如此一來既可避開奇異點的計算，又可讓標準差減小，以提高實驗準確度。



# 未來展望

在論文中我們提出了以穿透式的光彈調變式橢圓儀量測雙光軸材料。以圓偏振片來說，使用在攝影用途時，是以穿透式為主，能消除物體造成的反光，並使顏色更加飽滿，因此我們先發展了穿透式量測法。圓偏振片尚有另一應用，就是能消除光線的多重反射，示意圖如下：



由示意圖可知，當光線第一次經過圓偏振片時，其出射光具有右旋性，經過反射後將變成左旋光，再通過四分之一波長補波片後，會變成線偏光，但此時的偏振方向垂直於偏振片的穿透軸方向，所以會被阻隔。因此接下來將發展反射式橢圓儀架構來量測圓偏振片等具有雙光軸特性的材料，主要是希望能量高分子異向薄膜的光學參數。

由於量測所用的圓偏振片並不是供實驗室用途，而是屬於攝影器材，原廠所公布的規格並沒有詳細的資料，因此無從比對量測精準度。原廠公布規格為 Filter Factor，介於 2.3 到 2.8 之間，但此規格亦太模糊，沒有說明量測條件，諸如入射波長範圍等等。實驗所測得的 Filter Factor 約為 2，

已具備一定的準確度。接下來會以有詳細規格的圓偏振片為量測樣品，如 NEWPORT 等專門提供實驗室器材的廠商，這類廠商生產的圓偏振片就有較詳細的規格。因此可以進一步確認實驗的準確度，並從而尋找實驗誤差源，加以改進。



## 參考文獻

- [1] R. M A. Azzam, N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarized light (North-Holland, Amsterdam, 1997)
- [2] 寇人傑, "預測單軸異向性介質之橢圓偏極參數," 國立交通大學光電工程研究所八十五年碩士論文, 1996
- [3] E. Collet: Polarized Light (Marcel Dekker, New York, 1992)
- [4] M. I. Alonso, M. Garriga, F. Alsina, S. Pinol, "Determination of the Dielectric Tensor in Anisotropic Materials," Appl. Phys. Lett. 67 (5) 31 July 1995 p596-598
- [5] Y. F. Chao, W. C. Lee, C. S. Hung and J. J. Lin, "A three-intensity technique for polarizer-sample-analyzer photometric ellipsometry and polarimetry", J. Phys. D: Appl. Phys. 31 (1998) 1968.
- [6] 林士強, "補波片在各波長下之相位", 國立交通大學電子物理研究所碩士論文, 1993
- [7] 王夢偉, "單軸各向異性晶體之橢圓偏光參數量測", 國立交通大學光電工程研究所碩士論文, 1997
- [8] Eugene Hecht, Optics (Addison Wesley Longman, 1998)

# 附錄 A

## Matlab 數值擬合程式

```
clear all
I1f=fopen('I1f.txt');
I1f=fscanf(I1f,'%g',[1 inf]);
I1f1=fopen('I1f1.txt');
I1f1=fscanf(I1f1,'%g',[1 inf]);
I1f2=fopen('I1f2.txt');
I1f2=fscanf(I1f2,'%g',[1 inf]);
I2f=fopen('I2f.txt');
I2f=fscanf(I2f,'%g',[1 inf]);
I2f1=fopen('I2f1.txt');
I2f1=fscanf(I2f1,'%g',[1 inf]);
I2f2=fopen('I2f2.txt');
I2f2=fscanf(I2f2,'%g',[1 inf]);

n0=0;m0=0;
step=1;step1=0.1;step2=0.01;
LB=-80;
LD=-10;
g=45;
delta0=0.383535*2*pi;
```



```
%%%%%%%%%% 區間一 0 度至 60 度 %%%%%%%%%%
```

```
A=0:15:60;
for j=1:1:60
    n=n0+j.*step1;
    for k=1:1:400
        m=m0-k.*step1;
        for i=1:1:5
            d1(i)=(-I2f1(i)./I1f1(i)-(-2.*besselj(2,delta0).*(sin(2.*A(i)*pi/180).*(cos((LB+m)
                *pi/180).*cos(2.*(g+n)*pi/180).^2+sin(2.*(g+n)*pi/180).^2)+cos(2.*A(i)*pi/180
```

```

). *cosh(LD). *sin((LB+m)*pi/180/2).^2. *sin(4. *(g+n). *pi/180)-sin((LB+m)*pi/1
80/2).^2. *sin(4. *(g+n)*pi/180). *sinh(LD)))/(2. *sin(LB+m*pi/180). *besselj(1,de
lta0). *(cos(2. *(g+n)*pi/180). *sin(2. *A(i)*pi/180)+sin(2. *(g+n)*pi/180). *(-cos(2.
*A(i)*pi/180). *cosh(LD)+sinh(LD))))))^2;
f1(j,k)=sum(d1);
end
end
end
w1=min(min(f1));
[a1,b1]=find(f1==w1);
n1=n0+a1.*step1;
m1=m0-b1.*step1;
g1=g+n1
LB1=LB+m1

```

%%%%%%%% 區間二 120 度至 180 度 %%%%%%%%%



```

A=120:15:180;
for j=1:1:60
    n=n0+j.*step1;
for k=1:1:400
    m=m0-k.*step1;
for i=1:1:5
d2(i)=(-I2f2(i)./I1f2(i)-(-2. *besselj(2,delta0). *(sin(2. *A(i)*pi/180). *(cos((LB+m)
*pi/180). *cos(2. *(g+n)*pi/180).^2+sin(2. *(g+n)*pi/180).^2)+cos(2. *A(i)*pi/180
). *cosh(LD). *sin((LB+m)*pi/180/2).^2. *sin(4. *(g+n). *pi/180)-sin((LB+m)*pi/1
80/2).^2. *sin(4. *(g+n)*pi/180). *sinh(LD)))/(2. *sin(LB+m*pi/180). *besselj(1,de
lta0). *(cos(2. *(g+n)*pi/180). *sin(2. *A(i)*pi/180)+sin(2. *(g+n)*pi/180). *(-cos(2.
*A(i)*pi/180). *cosh(LD)+sinh(LD))))))^2;
f2(j,k)=sum(d2);
end
end
end
w2=min(min(f2));
[a2,b2]=find(f2==w2);
n2=n0+a2.*step1;
m2=m0-b2.*step1;

```

$g_2 = g + n_2$   
 $LB_2 = LB + m_2$

$g = (g_1 + g_2) / 2$   
 $LB = (LB_1 + LB_2) / 2$

$A = 0:15:180;$   
 $\text{plot}(A, I2f./I1f, A, (-2.*\text{besselj}(2, \text{delta}0).*(\sin(2.*A*\text{pi}/180).*(\cos((LB)*\text{pi}/180).*\cos(2.*g*\text{pi}/180).^2 + \sin(2.*g*\text{pi}/180).^2) + \cos(2.*A*\text{pi}/180).*\cosh(LD).*\sin((LB)*\text{pi}/180/2).^2.*\sin(4.*g*\text{pi}/180) - \sin((LB)*\text{pi}/180/2).^2.*\sin(4.*g*\text{pi}/180).*\sinh(LD)))/(2.*\sin(LB*\text{pi}/180).*\text{besselj}(1, \text{delta}0).*(\cos(2.*g*\text{pi}/180).*\sin(2.*A*\text{pi}/180) + \sin(2.*g*\text{pi}/180).*(-\cos(2.*A*\text{pi}/180).*\cosh(LD) + \sinh(LD))))))$

