

國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

楔形板式超薄背投顯示器之像差分析
Aberration analysis of a wedge-plate display

研究生：鍾森年

指導教授：陳志隆 教授

中華民國九十四年六月

楔形板式超薄背投顯示器之像差分析

Aberration analysis of a wedge-plate display

研究生：鍾森年
指導教授：陳志隆

Student: Sen-Nien Chung
Advisor: Jyh-Long Chern



A Thesis
Submitted to the Institute of Electro-Optical Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Electro-Optical Engineering

June 2005

Hsinchu, Taiwan

中華民國九十四年六月

楔形板式超薄背投顯示器之像差分析

學生 鍾森年

指導教授 陳志隆

國立交通大學光電工程研究所碩士班

摘要

在本論文中，利用光束覓跡的技巧，建立了楔形板的數學模型。透過所建立的數學模型，我們仿照一般像差的分析方法來分析像差，並推導出前三階像差的形式。對於楔形板來說，螢幕上某些部分是不會有光到達的，稱之為暗帶。在本論文中不但算出了暗帶發生的位置，而且還使用光學模擬軟體來驗證螢幕對角線比上厚度為 20:1 的 14 吋樣本板。最後，我們還分析了楔形板的折射率及頂角的變化對像差所造成的影響。



Aberration analysis of a wedge-plate display

Student: Sen-Nien Chun

Advisor: Dr. Jyh-Long Chern

Institute of Electro-Optics Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

In this thesis, the mathematical model of the wedge plate is established by the ray tracing skill. The aberration of the wedge plate is derived from this model, and the third order aberrations are computed. In wedge plate, there are some regions that no rays reach, dark zone. In this thesis, the position of dark zone is analytically determined and verified by direct numerical simulation with a software package, TracePro. As an exploration, a 0.7-inch thick plastic acrylic wedge plate that with 14-inch screen diagonal, in which the ratio of the thickness versus the screen diagonal is 1:20, is analyzed. Finally, the influences of the change of wedge vertex angle and refraction index on aberration are also analyzed.

誌 謝

時光匆匆，很高興能從交大光電所學成畢業。首先我要感謝我的指導教授，陳志隆老師。謝謝老師在這些年來的教導，讓我不論在學業上或是待人接物上都有很大的收穫。

另外要感謝的是中華映管公司在本研究所提供的支持以及 Lambda Research 公司以優惠的價格提供我們光學模擬軟體。

再來要感謝鄭伊凱及曹兆璽兩位學長，他們兩位在我的研究上提供許多中肯的建議，使得此篇論文得以順利完成。尤其是在畢業前的這段時間內，不厭其煩的陪我討論到半夜，在這裡要向他們兩位表達我最深的謝意。

再來要感謝實驗室的同學們，清祥、家佑、晟傑、慧文及志雲，在這段日子來的互相鼓勵，我會永遠珍惜這份同窗之誼，也祝福各位在未來的人生旅途上一帆風順，平平安安。還有要感謝實驗室的這一群可愛的學弟妹們，謝謝你們創造的實驗室歡樂氣氛，讓大家都能在愉快的心情下工作。

最後要感謝我最愛的父母、兄弟及家人們，當然還有我的女朋友，琬琳。有你們的支持，我才能心無旁騖的完成學業，我愛你們。

目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
圖表目錄	VI
第一章、 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 楔形板的發展歷史	4
1.3 楔形板使用在超薄顯示器的優勢	7
1.4 本碩士論文架構	11
第二章、 理論推導	13
2.1 前人工作	13
2.2 前人工作的延伸—楔形板上非子午面討論	15
2.3 影像資訊(物)為無限小時,出射位置與入射角度關係式推導	17
2.4 影像資訊(物)為有限大小時,出射位置與入射角度的關係式推導	18
2.5 入射角度變化對出射位置的影響(靈敏度分析)	23
2.6 小結	25
第三章、 三階像差細論	26
3.1 楔形板之像差計算	26
3.2 非軸對稱系統的像差分析	29
3.3 楔形板中的暗帶(dark zone)	31
3.4 前三階像差的形式	35
3.5 像差大小與系統參數的關係	41
3.6 小結	48
第四章、 總結與未來展望	49
4.1 結論	49
4.2 未來展望	50

參考文獻	51
附錄一 靈敏度分析作圖的程式碼	53
附錄二 像差作圖的程式碼	54
附錄三 計算暗帶位置的程式碼	55
附錄四 像差對頂角變化作圖的程式碼	56
附錄五 像差對折射率變化作圖的程式碼	57
作者簡歷	58



圖 表 目 錄

【表 1-1】各種顯示器的優缺點比較	10
【表 3-1】暗帶位置計算結果	33
【圖 1-1】彩色 CRT 工作原理	2
【圖 1-2】LCD 示意圖	2
【圖 1-3】PDP 示意圖	3
【圖 1-4】美國專利#6, 002, 826 專利主圖	4
【圖 1-5】美國專利#6, 608, 961 專利主圖	5
【圖 1-6】Travis 2003 年在 SID 上發表的主要成果	6
【圖 1-7】Travis 2004 年在 SID 上發表的主要成果	6
【圖 1-8】Shikama 在 2002 年的 SID 上所發表的超薄背投顯示器	8
【圖 1-9】Infocus 公司所推出的一款 61 吋超薄背投顯示器	9
【圖 1-10】14 吋壓克樣本板的測試	10
【圖 2-1】光線利用在楔形板中的全反射來摺疊光程之示意圖	13
【圖 2-2】楔形板之翻摺等效	14
【圖 2-3】光線出射落點位置與入射角度關係	14
【圖 2-4】楔形板螢幕外保留區域示意圖	15
【圖 2-5】子午面頂角與非子午面等效頂角的關係	16
【圖 2-6】光源無限小時的入射角度估算	17
【圖 2-7】影像來源為有限大小下，非子午面與子午面的夾角示意圖	19
【圖 2-8】光線在楔形板內反射示意圖	20
【圖 2-9】在楔形板內具有同樣反射次數的光線，其出射角度和位置關係圖	21
【圖 2-10】在影像來源為有限大小下，光線出射落點位置與入射角度關係	23
【圖 2-11】楔形板出射落點位置與入射角度的靈敏度分析	24
【圖 2-12】出射落點位置偏差對入射角度變化做圖	25

【圖 3-1】	像差分析時各座標的示意圖	26
【圖 3-2】	光線的入射楔形板的角與場點，孔徑的關係	27
【圖 3-3】	光線入射楔形板後可能的兩種情況	27
【圖 3-4】	整合入射楔形板的兩種情形	28
【圖 3-5】	像差對孔徑的變化作圖（場點 0.0，0.7，1.0）	29
【圖 3-6】	像差對孔徑的變化作圖（場點 0.0，-0.7，-1.0）	30
【圖 3-7】	亮帶暗帶的示意圖	32
【圖 3-8】	暗帶的 TracePro 模擬圖	34
【圖 3-9】	前三階像差對 ρ 作圖	38
【圖 3-10】	前三階像差與全部像差的比較	39
【圖 3-11】	螢幕大小：厚度為 10:1 的 50 吋面板之像差	40
【圖 3-12】	像差對折射率的作圖	43
【圖 3-13】	像差對楔形板頂角的作圖	45
【圖 3-14】	場點=0.7，像差對楔形板的折射率變化關係圖	46
【圖 3-15】	場點=0.7，像差對楔形板的頂角變化關係圖	47



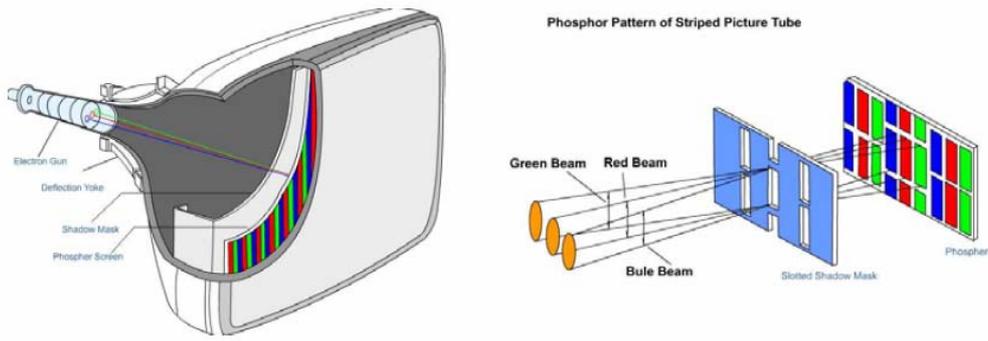
第一章 緒論

在這一章中，將以市面上各類顯示器的介紹做開頭，並比較之間的優劣之處。接著回顧楔形板式超薄背投顯示器的起源，把近年來在這個領域的成果做重點式的報告。除此之外，對於應用在超大尺寸上的背投顯示器我們也會分析其間的優缺點，最後並以日前 Infocus 公司推出的 61 吋背投電視做為例子來討論比較。

1.1 前言

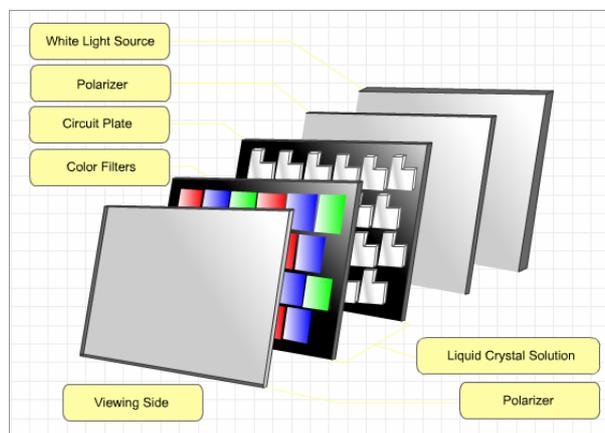
自從電視機的問世以來，造成人類生活習慣很大的改變，不管是資訊的傳播或是視覺上的享受，電視機在人們的生活中已經成為不可或缺的必須品。隨著時代的進步，傳統的電視機也由最早的陰極射線管（Cathode Ray Tube，縮寫為 CRT）慢慢進步到液晶顯示器（Liquid Crystal Display，縮寫為 LCD）及電漿顯示器（Plasma Display Pannel，縮寫為 PDP）。目前市面上的主流也仍然是這三種，因此我們將對這三種最常見的顯示器做簡單的介紹和比較[11]。

CRT 的工作原理是藉由電場控制電子槍所發出的電子束方向，利用電子打在螢幕上的磷化物發光，進而形成螢幕上的亮暗點分佈。CRT 的技術發展最久，也最成熟，但是因為它的厚度較厚，尤其是面板尺寸愈做愈大時，它的外型也更笨重，因此逐漸由 LCD 及 PDP 所取代。



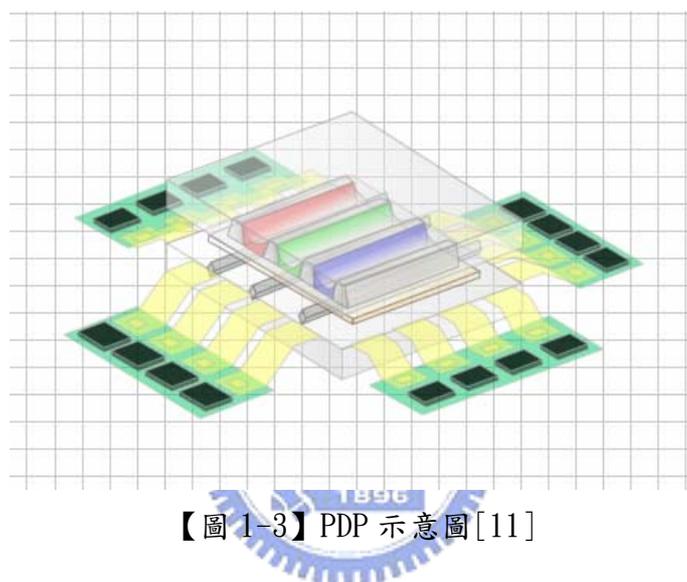
【圖 1-1】彩色 CRT 工作原理[11]

因為液晶本身不會發光，而是僅僅扮演類似開關的角色，用來控制通過的光的強弱程度，因此 LCD 通常都需要一個均勻的白色背光光源。LCD 是利用電壓可以控制通過液晶的光之偏振態的原理，搭配上偏振片，來改變最後出射的光的強弱程度。最後，光線通過紅，綠，藍三色的彩色濾光片，混合成各種色彩。因為 LCD 的體積比 CRT 薄，因此近年來已漸漸的取代 CRT 的地位。但是因為 LCD 中的光線必須通過彩色濾光片，所以在能量上的利用率往往因此受到限制，此外因為液晶的反應時間比較長，當畫面影像切換較快時，就會有殘影的問題發生。而對比度在 LCD 也是一個問題，因為 LCD 是利用液晶來控制光的亮暗，因此要顯示黑色，就必須把液晶控制在關的狀態，如果”關”的程度不夠的話就會因為漏光而造成黑色不夠黑的問題。這些都是 LCD 為人所詬病的缺點，但是隨著技術的發展，已逐漸的改善了。



【圖 1-2】LCD 示意圖[11]

PDP 的工作原理是利用惰性氣體放電時所產生的紫外線來激發彩色螢光粉，進而發出人眼可以看到的可見光。因為它的厚度及重量都比 CRT 小很多，也不會有 LCD 的黑色不夠黑的問題，以及 PDP 的反應時間快速，因此一度成為大型顯示器的新寵兒。但是因為它解析度與其他顯示技術相比偏低以及工作時會發出大量的熱，另外如果同一個影像顯示過久會有殘留影像 (burn-in) 的問題，因此仍有很大的努力空間。



【圖 1-3】PDP 示意圖[11]

以上介紹的顯示器技術雖然各有優缺點，但是仍朝著追求更大更細緻的畫面而努力。然而畫面愈做愈大，相對的整個機構的厚度也更厚了，因此畫面大小與螢幕的厚度比例也是一個重要的課題。在目前的市場上，誰能在縮減顯示器厚度的技術上有所突破，往往就成了重要的致勝關鍵。

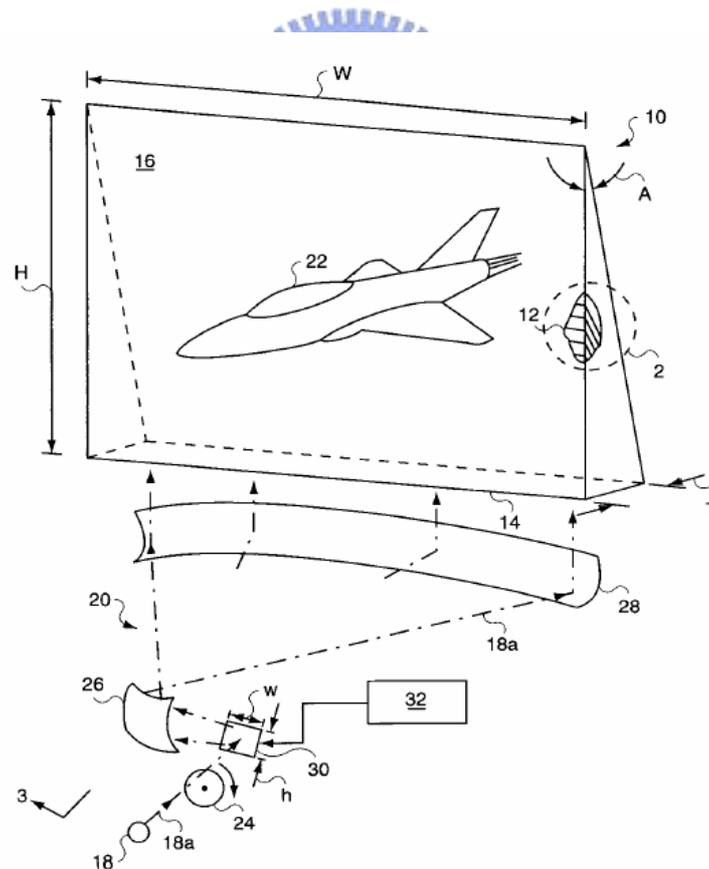
在本篇論文中所介紹的楔形板式超薄背投顯示器是屬於一種嶄新的技術，它不但能夠把目前一般的畫面大小與螢幕的厚度比例，十比一，大幅的縮減至二十比一，甚至是更高的比例也可以輕易達到。除了厚度上的優勢，由於影像是以全反射的形式在楔形板中傳播，因此比起一般的液晶顯示器，它在能量上的有效利用率更是一大優點。

然而，由於這是一種極為新穎的技術，因此在這個領域中仍有許多未解決

的問題存在，其中楔形板的像差分析在它做為顯示器的應用上是一個很重要的研究方向，而這正是本論文所探討的主題。

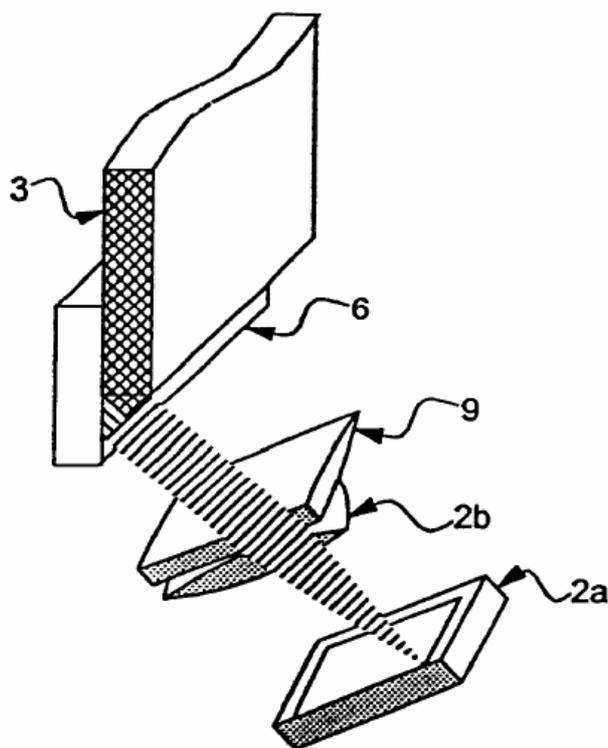
1.2 楔形板的發展歷史

在 1999 年的美國專利上，Vligdan 提出了一篇以 Thin display optical projector 為名的專利[1]。主要的內容包含了使用一片由多層波導板堆疊而成的楔形導光板，以及將光源灌入楔形板的光學裝置，其主圖如圖 1-4 所示。其中 18 為白光光源、24 為色輪、30 及 32 為光調變器、26 及 28 分別為拋物面的反射鏡，用以將影像導入楔形板中。16 為顯示影像的楔形板螢幕，其中 12 表示楔形板是由 525 片波導板所疊合起來。



【圖 1-4】美國專利#6, 002, 826 專利主圖

此後，由 Travis 在 2003 年提出一篇關於使用楔形板作為顯示器的美國專利 Optical system including a planar waveguide[2]，為最重要的文獻之一，在這篇專利中所提到的楔形板是採用單一塊材質所製成，有別於以往的堆疊式多層波導板。自此之後，有關於這一種形態的楔形板式顯示器的研究陸陸續續發表，嚴格說起來，此篇專利實為單一材質類型楔形板顯示器研究之濫觴。圖 1-5 所示的是此篇專利的主圖。其中由 2a 影像來源及 2b 投影鏡頭組成投影系統，9 為柱狀透鏡，6 為反射鏡，3 為波導平板。

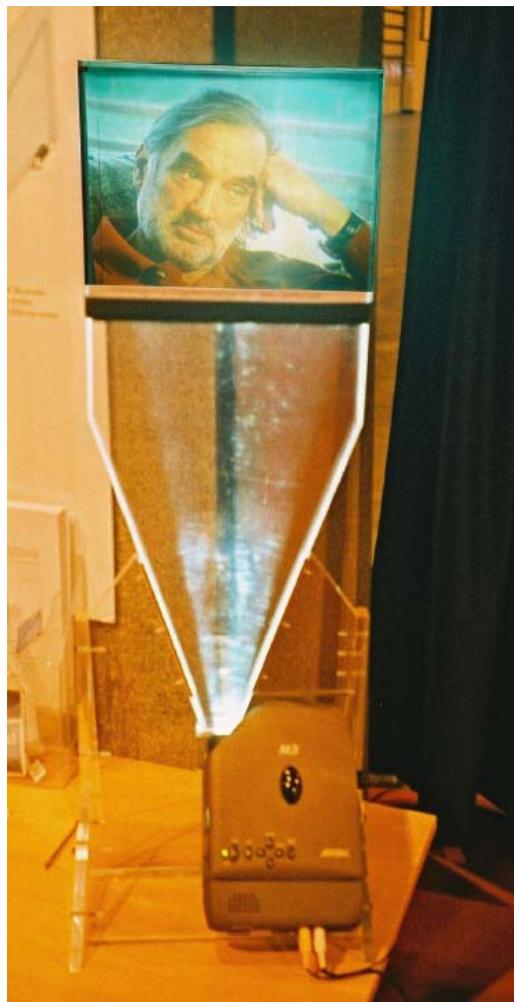


【圖 1-5】美國專利#6, 608, 961 專利主圖

之後 Travis 在 2003 及 2004 年的 SID 會議上均就此一主題提出成果發表 [3][4]，而這兩篇發表的會議論文也是本論文的重要參考文獻。其主要發表的成果如下



【圖 1-6】Travis 2003 年在 SID 上發表的主要成果[3]



【圖 1-7】Travis2004 年在 SID 上發表的主要成果[4]

其中圖 1-6 是 Travis 在 2003 發表的成果。他以厚度 10mm 的 14 吋樣本板做示範，將影像灌入，由楔形板的螢幕面顯示出來。圖 1-7 是 Travis 在 2004

發表的成果，他以投影機直接將影像灌入由 PMMA 製成的 14 吋樣本板中，在楔形板螢幕上成像。

在這段時間內仍陸續有做為顯示器應用的技術論文發表，如 Travis 在 2002 年 IDW 發表的關於暗帶的現象討論[5]。但是很可惜的，至今尚未有更深入的數學模型建立以及像差分析的論文發表，也因此，沒有一個可靠的理論分析可以當做光學設計的基礎，導致要對楔形板式的顯示器進行光學優化就會遇到瓶頸。有鑑於此，本論文的重點將著重在像差的討論。

1.3 楔形板使用在超薄顯示器的優勢

如先前所提到的，楔形板式的顯示器最大的優勢就是它的厚度可以大幅減小，並且可以將此設計的原理套用在大型的面板上，如 50 吋、65 吋等。目前應用在超薄背投顯示器上的突破性技術當屬 Shikama 在 2002 年的 SID 上所發表的 Optical system of ultra-thin rear projector equipped with refractive-reflective projection optics[6] 為最早，他們利用一組光機引擎搭配菲涅耳 (Fresnel) 透鏡來有效縮短整個顯示器的厚度，在論文中有提到，60 吋的螢幕大小總厚度僅為 260 毫米，相當於螢幕寬度比上厚度為 6:1 左右，如圖 1-8 所示。



【圖 1-8】Shikama 在 2002 年的 SID 上所發表的超薄背投顯示器

在 2004 年，Infocus 公司推出一款 61 吋的大螢幕顯示器，它是使用 Ultra-Thin Micro Display (縮寫為 UTMD) 的技術，由 Infocus 官方網站[12] 可以找到相關的規格。這款 61 吋的顯示器厚度約為 6.85 吋，即螢幕大小與厚度比約為 10:1，見圖 1-9。UTMD 的工作原理是利用一系列的透鏡及反射鏡的組合，把由光學引擎發出來的影像投射到螢幕上，因為是使用投影的技術，所以它可以用比較低的價錢達到大螢幕高畫質的要求。

Size:
 Without Base:
62.24w x 46.65h x 6.85d

With Base:
62.24w x 47.91h x 12.80d

Weight:
 Without Base:
135.2 lbs

With Base:
189.5 lbs



【圖 1-9】Infocus 公司所推出的一款 61 吋超薄背投顯示器[12]

接下來我將引用由 Infocus 官方網站所節錄的各種顯示器技術比較，用來說明楔形板式顯示器應用在大尺寸上的優勢。

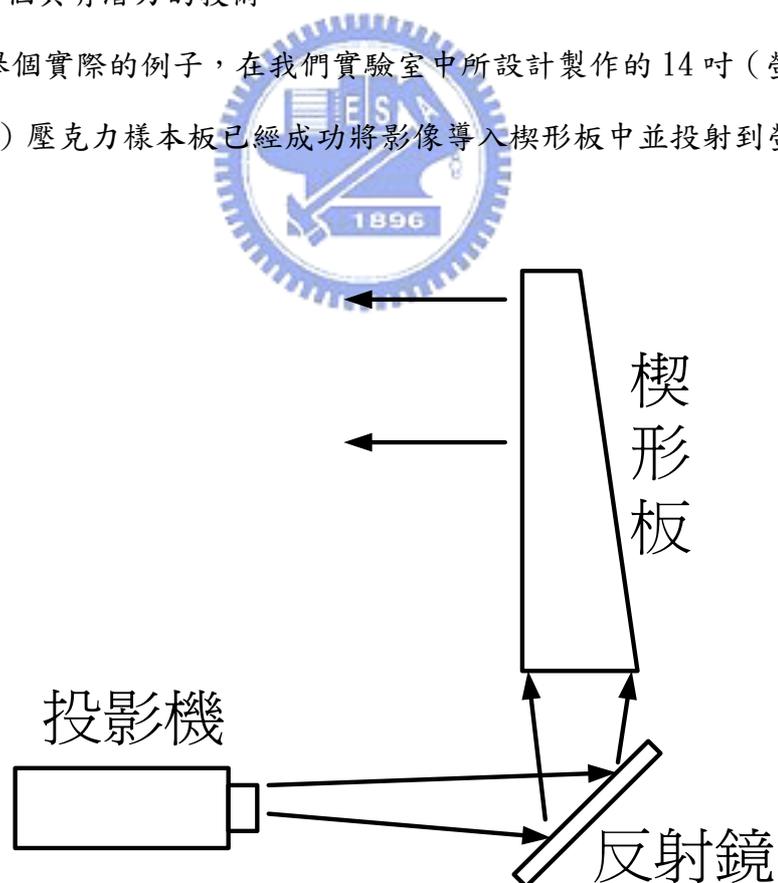
	UTMD	PDP	LCD	楔形板式
每平方吋的平均花費	低	高	高	低
尺寸範圍	50 吋-70 吋	37 吋-63 吋	小於 46 吋	都可，但主要設計在大尺寸
亮度對比受週遭影響程度	幾乎不受影響	嚴重	尚可接受	幾乎不受影響
色域	極佳	佳	佳	極佳
重量	輕	重	中等	輕
耗電量	低	高	中等	低
影像 burn-in 的程度	無	高	低	無

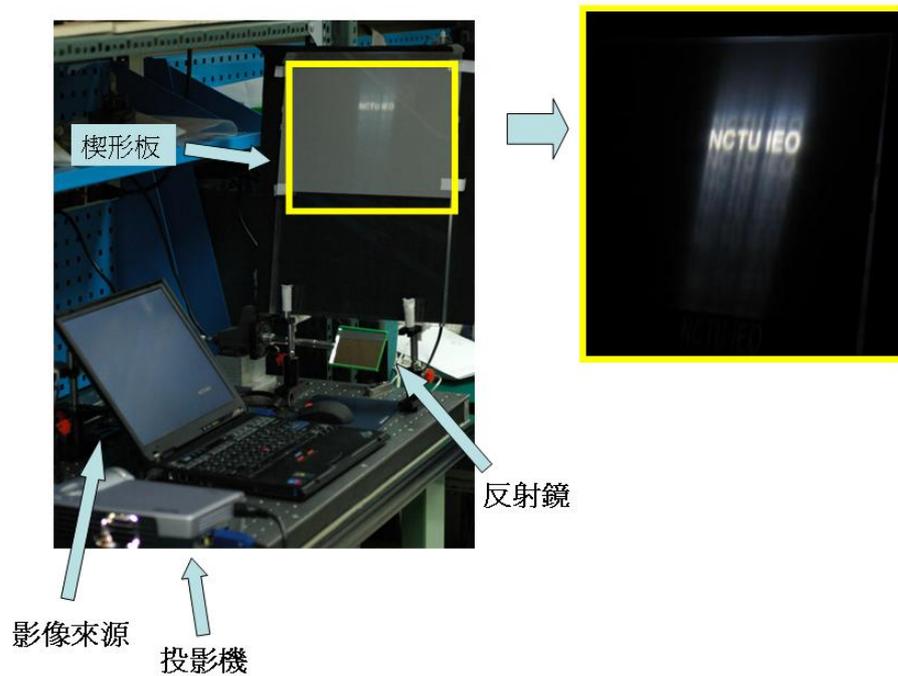
厚度	約 6.5 吋	約 6 吋	約 6 吋	3 吋以下
亮度可否再更新	可，換光學引擎燈泡容易	不可	不可	可，換光學引擎燈泡容易
快速移動影像的成像品質	極佳	佳	不好	極佳

【表 1-1】各種顯示器的優缺點比較（參考自 Infocus 官方網站[12]）

由表 1-1 中可以看出來，因為同樣是以投影技術製作而成的大尺寸顯示器，因此 UTMD 擁有的優點，楔形板式顯示器都有。尤其可以注意到，在厚度的方面，楔形板式顯示器更是遠遠勝出。因此對於未來的薄形化大尺寸要求，楔形板式顯示器應該是一個具有潛力的技術。

另外，舉個實際的例子，在我們實驗室中所設計製作的 14 吋（螢幕大小比上厚度 20：1）壓克力樣本板已經成功將影像導入楔形板中並投射到螢幕上，見圖 1-10。





【圖 1-10】14 吋壓克樣本板的測試

雖然影像的解析度不是很高，但這是因為只使用一般的 DLP 投影機，並加以簡單的光學元件把影像灌入楔形板中，並未對整個系統的設計進行優化所致。由此可以知道要利用楔形板的設計達到 20:1 的比例並非難事，尤其是 Travis 先前所發表的成果，其螢幕大小比上厚度的比例更是高於 20:1 以上。所以說面對顯示器面板尺寸愈做愈大的挑戰，楔形板式的超薄背投設計不失為具有競爭力的研究方向。

1.4 本碩士論文架構

本論文的重點在於楔形板的數學模型建立以及楔形板的像差分析，因此我把論文的重心著重在第二章跟第三章。

第二章的工作是回顧前人所做過的工作，然後我再由此做延伸，將數學的完整模型給建立起來。因為先前他人發表的論文中，僅提到點光源發出的光線在

楔形板中的對稱面（子午面）上的行進方式，但是我們知道這是不夠的，所以我首要的工作是把光線在非子午面上的行進方式也用數學式描述出來，接著把點光源的情況拓展到非點光源的討論，並推導出由楔形板出射的光線與入射光線之間的關係。由導出的關係中我們可以發現光線由楔形板出射的位置主要是由入射的角度所控制，因此，在第二章的最後一節，我們做出射位置對入射角度的靈敏度分析。

第三章的工作是著重在像差的討論。從第二章建立起來的數學模型，我們可以算出影像通過楔形板之後的真實成像位置，再把真實成像位置與理想成像位置之間的差值計算出來，即為像差。要注意的是因為楔形板屬於面（子午面）對稱系統，和一般光軸對稱的系統不一樣，因此討論像差必須考慮場點為負的情況。另外基於同樣的原因，楔形板的二階像差並不為零，因此楔形板的前三階像差分析中也包含了一階及二階的像差分析。在分析像差的過程中，我們澄清一個很有趣的現象，就是暗帶的存在[5]，詳細的成因也會在第三章中討論。最後，為了將來做為楔形板系統的光學設計基礎，也為了能更加了解像差的特性，我們會討論像差與楔形板設計參數之間的關係，期望能夠找出一個比較好的初始設計值。

第二章 理論推導

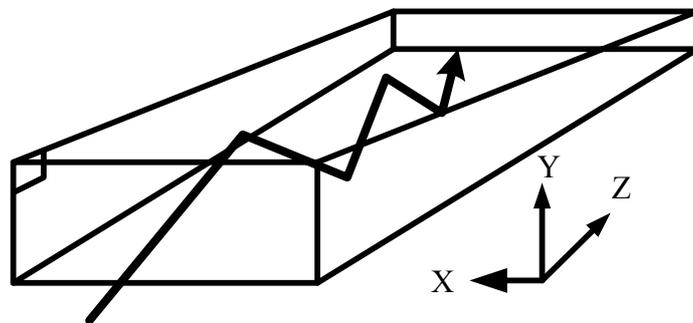
在本章中主要是利用光束覓跡的技巧來分析光束線在楔形板中行進的軌跡，進而了解楔形板對於成像品質有何影響，並尋求改善的方法。

楔形板在背投顯示器系統中的主要作用是摺疊光程，將原本比較長的投影光程利用楔形板中的全反射，反覆地摺疊起來，以達到超薄背投的目的。因為光線在楔形板中的行進主要是利用全反射，因此最後出射的光線落點位置和進入楔形板中的光線之位置及角度有很密切的關係。而推導出其中的關係式正是本章的主要工作。

2.1 前人工作

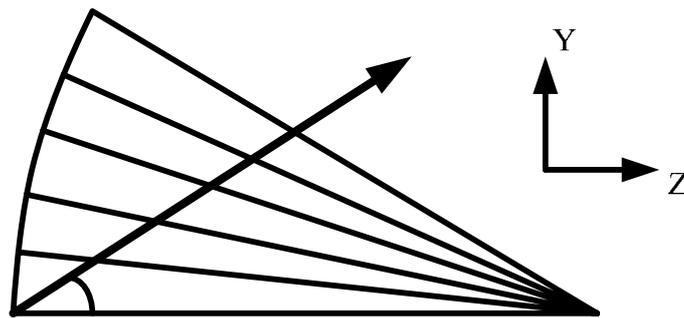
這一個章節的工作主要是整理前人已做過的工作，主要參考的文獻是 Travis 2003 年 SID 所發表的一篇論文[3]。

如圖 2-1 所示光線從楔形板較厚的一端進入，每經過一次全反射，光線與反射面的法線夾角就會逐漸遞減，直到最後不符合全反射的條件而出射。因此若能控制光線進入楔形板的角度的，也就等於控制了光線到達螢幕的位置。



【圖 2-1】光線利用在楔形板中的全反射來摺疊光程之示意圖

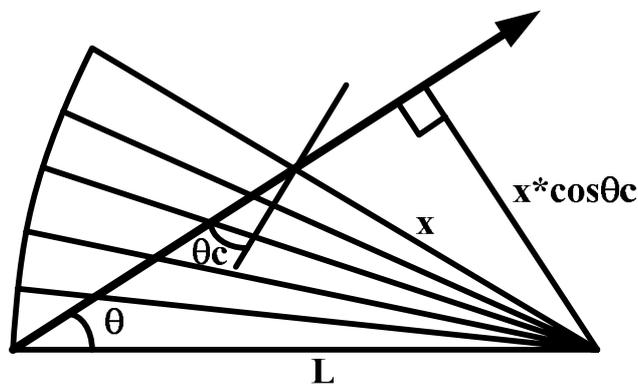
至於分析的方式，可以利用幾何光學中常用的光路翻摺等效法來降低分析的難度。為了簡單起見，考慮光線在楔形板的對稱面（子午面）上行進的情況，如圖 2-2 所示，當光線在楔形板中每遭遇一次全反射時，就將整個楔形板沿著反射面做一次翻摺，如此一來，原本反射的光線可以利用一條等效的直進光線來代表。



【圖 2-2】楔形板之翻摺等效

光線由楔形板的一端進入，經過若干次的全反射之後，會從楔形板中做為螢幕的一面出射，根據幾何光學的翻摺技巧，如圖 2-3 所示，可以得出以下的關係式

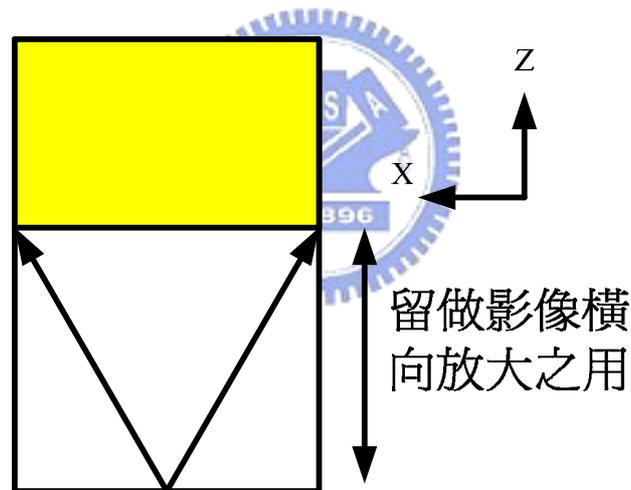
$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos \theta_c}{L} \quad (2.1)$$



【圖 2-3】光線出射落點位置與入射角度關係

其中 θ 為光線進入楔形板的入射角， x 為楔形板頂點到出射位置的距離， L 為楔形板的總長度， θ_c 為臨界角。

參考圖 2-4，由於在一般的使用上，進入楔形板的影像資料(物)尺寸比進入楔形板的入射面尺寸小，所以必須經由光學系統將影像放大後投射在螢幕上。假設影像資訊貼在楔形板的入射面一角進入，則 Z 軸方向上的影像位置可以由影像資料(物)上每個像點的入射角度所控制，因此影像在 Z 軸方向上的放大率可以很容易地依需求改變。但在 X 方向上，影像的放大由影像資料(物)一開始橫向的發散角決定，因此楔形板勢必要保留一段區域做為影像在橫向上(在 X 軸上)放大之用。



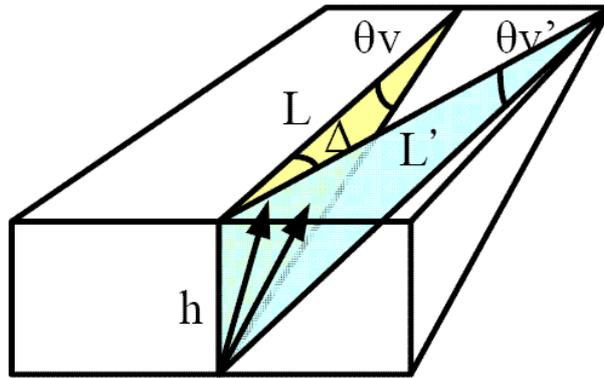
【圖 2-4】楔形板螢幕外保留區域是為了做為影像橫向放大之用

2.2 前人工作的延伸－楔形板上非子午面討論

Travis 的工作是推導出光線在子午面上行進時的簡易模型，然而事實上絕大部分的光線所在的平面是位於非子午面，因此討論光線在非子午面上的特性是有其必要的。因為先前所建立的子午面模型形式簡潔，因此接下來希望可以找出

相似形式的數學模型。

由圖 2-5 可以注意到，光線除了在楔形板的子午面上行進時對應的頂角 θ_v 為楔形板的真實夾角之外，其他非子午面所對應的等效頂角 θ_v' 都比原來的頂角小。



【圖 2-5】子午面頂角與非子午面等效頂角的關係

其中的關係如下所示



$$(2.2)$$

又由子午面

$$\tan \theta_v = \frac{h}{L}$$

$$(2.3)$$

由非子午面

$$\tan \theta_v' = \frac{h}{L'}$$

$$(2.4)$$

將(2.2)代入(2.4)可得

$$\tan \theta_v' = \frac{h}{L} \cos \Delta = \tan \theta_v \cos \Delta$$

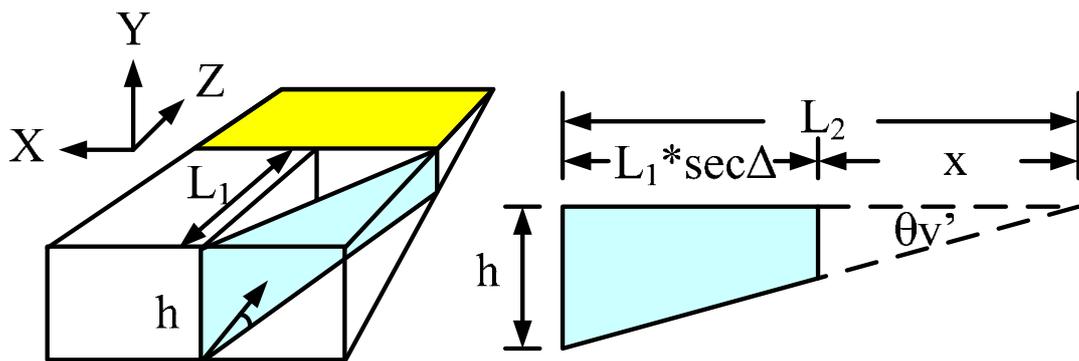
所以可以求出非子午面的等效頂角

$$\theta_v' = \tan^{-1}(\tan \theta_v \cos \Delta)$$

(2.5)

2.3 影像資訊（物）為無限小時，出射位置與入射角度關係式推導

由楔形板的入射角度與出射位置的關係式 (2.1)，可以知道控制入射的角度可以決定光線會從螢幕的何處出射。假設進入楔形板的影像與楔形板尺寸相比很小，可視為點光源，則螢幕上不同列位置所對應的入射角度可以被估算出來。如圖 2-6 (a) 所示，假設影像光源置於楔形板入口的中央下方處，由此點光源發出的光線將一一投射到螢幕上對應的位置上。螢幕上位於同一列上的不同點在計算時為具有一樣的 L_1 值。分析上，楔形板的非子午切面若為梯形，則將此梯形的兩個側邊做延長至交會於一點，形成非子午面所對應的三角形，需要注意的是不同的非子午面有其各別對應的三角形。其中， L_2 代表該三角形的底邊長度，而楔形板的厚度在此定為螢幕尺寸的二十分之一。



【圖 2-6】光源無限小時的入射角度估算

$$\frac{x}{L_2} = \frac{\frac{h}{\tan \theta_v'} - L_1 \sec \Delta}{h} = 1 - \frac{L_1}{h} \tan \theta_v' \sec \Delta$$

$$= 1 - \frac{L_1}{h} (\tan \theta_v \cos \Delta) \sec \Delta = 1 - \frac{L_1}{h} \tan \theta_v = \text{constant}$$

將此結果代入公式 (2.1)，可以求得螢幕上同一列的光線，其入射角度為定值。這代表只要光源的尺寸大小遠小於楔形板的大小時，螢幕上同一列的光線所對應的入射角度只有 Δ 不同（對應到不同的非子午面），但是在各別的子午面上所對應的仰角 θ 則是一致的。

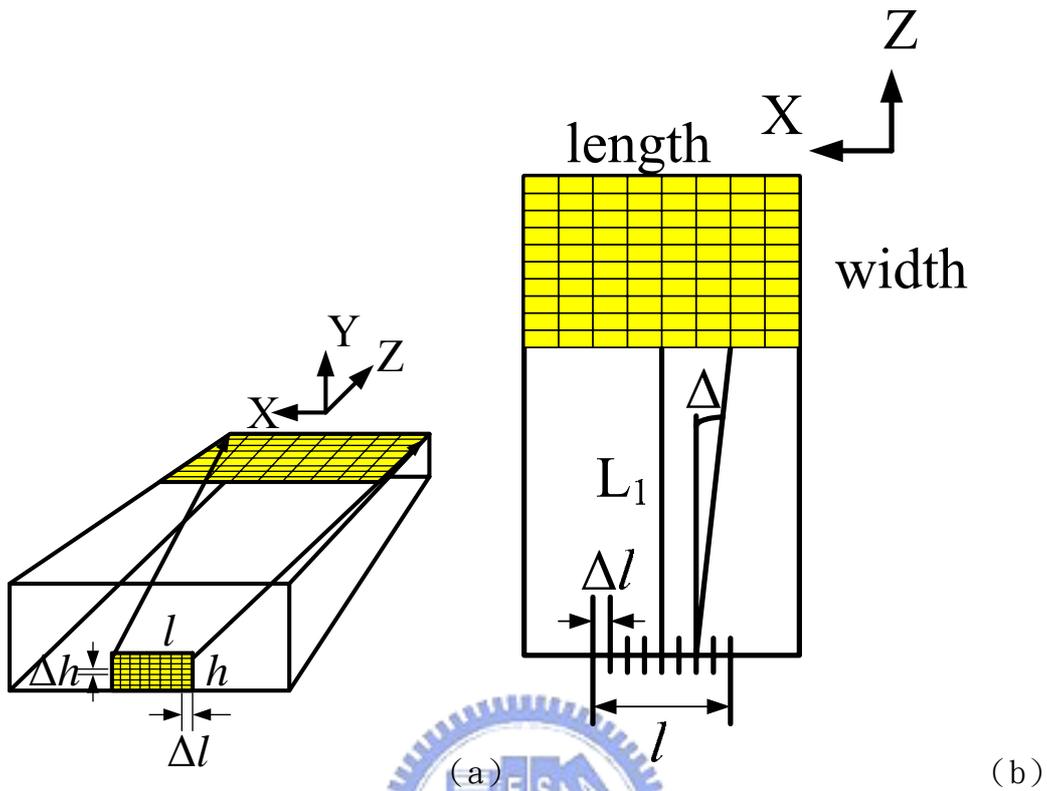
2.4 影像資訊（物）為有限大小時，出射位置與入射角度的關係式推導

由於在真實情況中，影像資訊來源並非無窮小，所以必須加以考慮有限大小的尺寸所造成的影響。其主要的影響為

(1) 非子午面與子午面夾角的重新估算

若影像來源尺寸為有限大小，則投射到螢幕上的每一個像素的光線都位於不同的非子午面上，而角度 Δ 會隨光源位置不同而改變。參考圖 2-7 所示，假設影像資訊為 $l \times h$ 的大小，每個像素為 $\Delta l \times \Delta h$ ，影像到螢幕上該列的距離為 L_1 ，則第 j 行所對應的 Δ 為

$$\Delta = \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\text{length}}{\text{行數}} \cdot j - \frac{l}{\text{行數}} \cdot j \right)}{L_1} \right) \quad (2.6)$$



【圖 2-7】影像來源為有限大小下，非子午面與子午面的夾角與影像大小有關

(2) 隨著影像資訊不同列高度(Δh_x)不同，則基本關係式

$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos \theta_c}{L} \text{ 必須修正}$$

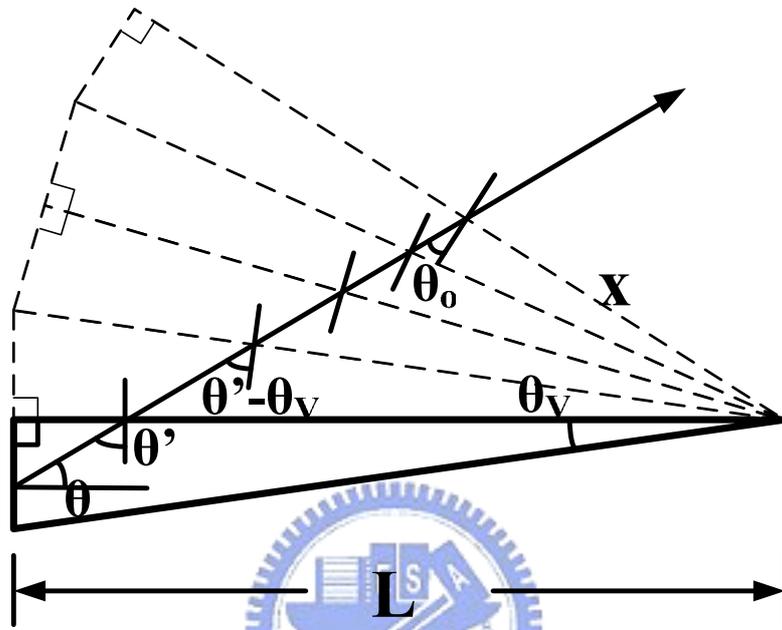
在 Travis 的工作裡，他推導出楔形板中光線入射角與出射位置的關係如下

$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos \theta_c}{L}$$

在這個關係式中，他假設以 θ 入射的光線會在螢幕上 x 的位置出射，而且是以臨界角出射。

但是在真實的情況並非如此，事實上光線在楔形板中進行全反射時，只要一旦反射角小於臨界角就會因為不滿足全反射的條件而出射，因此出射的角度不一定是臨界角，可以是小於臨界角的任意角度 θ_0 。

由圖 2-8 可以了解，若在楔形板中第一次全反射的反射角是 θ' ，則接下來每經過一次全反射，反射角會因為楔形板的上下兩面的法線不平行而減少，減少的量為楔形板的頂角 θ_v 。

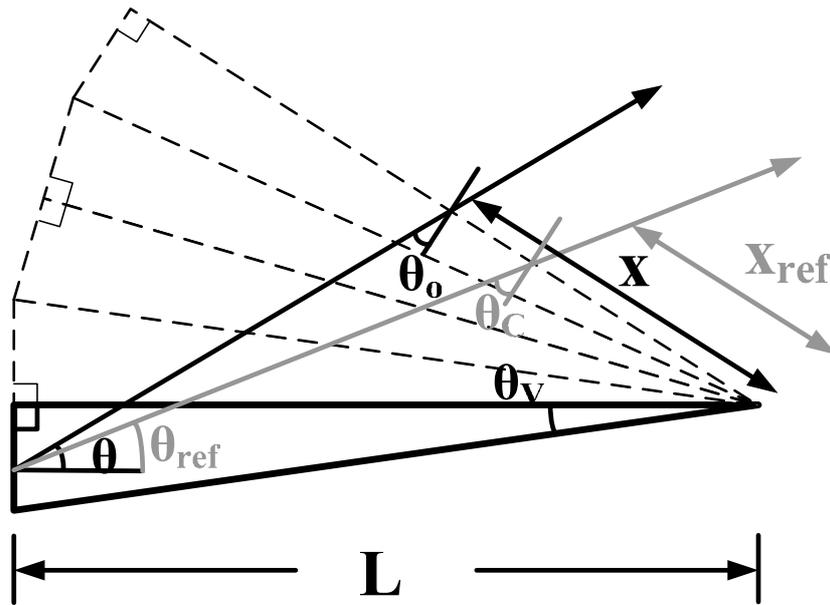


【圖 2-8】光線在楔形板內反射示意圖，每反射一次，光線和楔形板的法線夾角就減少 θ_v

假設光線在楔形板中經過了 $2m$ 次的反射（取偶數次反射是因為我們希望光線總是在螢幕面出射，因此螢幕的另一面我們可以鍍上反射面），則最後出射的角度 θ_0 與 θ 的關係就可以很明確的表示出來：

$$\theta_0 = \theta' - 2m \cdot \theta_v = 90^\circ - \theta - 2m \cdot \theta_v$$

為了方便計算出光線反射的次數 $2m$ ，我們引入某條全反射次數相同，但是以 θ_{ref} 角度入射，臨界角出射的參考光線，如圖 2-9 所示。



【圖 2-9】在楔形板內反射次數一樣但入射角度不同的光線，其出射角度和位置關係圖

參考光線的入射角與出射角關係式表示如下

$$\theta_c = 90^\circ - \theta_{ref} - 2m \cdot \theta_v$$

$$\Rightarrow m = \frac{90^\circ - \theta_{ref} - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}$$

在這個式子中包含了未知數 θ_{ref} ， θ_{ref} 求法有兩種

1. 若是把式子中的未知數 θ_{ref} 改以鄰近的 θ 代替，因為 θ 大於 θ_{ref} ，所以 m 會變成略小的非整數，只要將其取Ceiling函數即可修正過來，其中Ceiling函數是把輸入值以無條件進位至個位數作輸出。

$$\Rightarrow m = \text{Ceiling}\left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}\right]$$

因此

$$\theta_o = 90^\circ - \theta - 2 \cdot \text{Ceiling}\left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}\right] \cdot \theta_v$$

而楔形板的出射位置與入射角度關係式就可表示如下

$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos[90^\circ - \theta - 2 \cdot \text{Ceiling}[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}] \cdot \theta_v]}{L} \quad (2.7)$$

這個關係式中，因為 Ceiling 內不含 x，所以方便用在從已知入射角 θ 求出對應位置 x。

2. 利用 $\theta_{ref} = \sin^{-1}[\frac{x_{ref} \cdot \cos \theta_c}{L}]$ ，但是 x_{ref} 用 x 代替。這樣一來 θ_{ref} 會變得略大，

而 $m = \frac{90^\circ - \theta_{ref} - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}$ 會變得比較小，再取 Ceiling 函數即可修正

$$\Rightarrow m = \text{Ceiling}[\frac{90^\circ - \sin^{-1}[\frac{x \cdot \cos \theta_c}{L}] - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}]$$

因此

$$\theta_o = 90^\circ - \theta - 2 \cdot \text{Ceiling}[\frac{90^\circ - \sin^{-1}[\frac{x \cdot \cos \theta_c}{L}] - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}] \cdot \theta_v$$

而楔形板的出射位置與入射角度關係式就可表示如下

$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos[90^\circ - \theta - 2 \cdot \text{Ceiling}[\frac{90^\circ - \sin^{-1}[\frac{x \cdot \cos \theta_c}{L}] - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}] \cdot \theta_v]}{L}$$

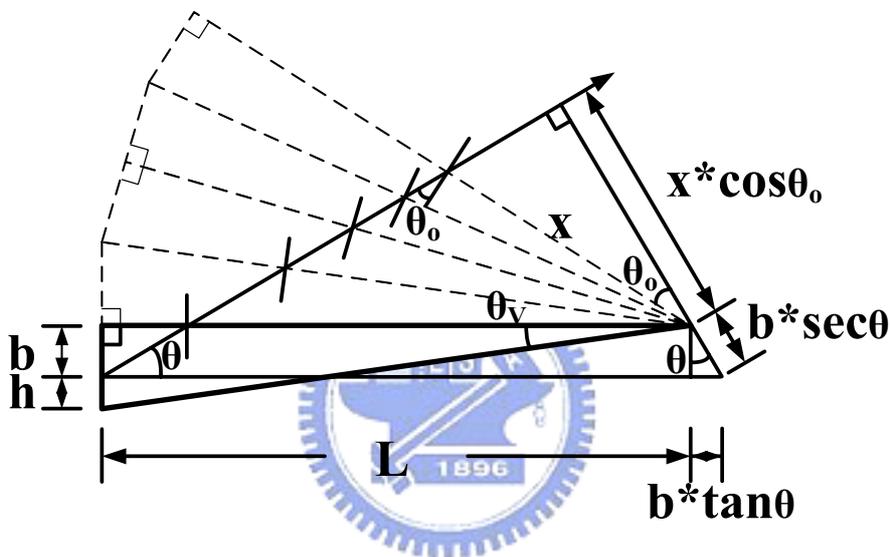
(2.8)

這個關係式中，因為 Ceiling 內不含 θ ，所以方便用在從已知位置 x 求出對應入射角度 θ 。

接下來考慮影像光源的尺寸大小，即光源發出的位置會對最後的成像位置所造成影響為何。如圖 2-10 所示，仿照先前的推導方式，關係式必須修正為

$$\sin \theta = \frac{x \cdot \cos \theta_o + b \cdot \sec \theta}{L + b \cdot \tan \theta} = \frac{x \cdot \cos[90^\circ - \theta - 2 \cdot \text{Ceiling}[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}] \cdot \theta_v] + b \cdot \sec \theta}{L + b \cdot \tan \theta}$$

(2.9)



【圖 2-10】在影像來源為有限大小下，光線出射落點位置與入射角度關係

2.5 入射角度變化對出射位置的影響（靈敏度分析）

光線經由在楔形板之內多次全反射之後，由楔形板做為螢幕的一面出射。由於出射的位置和入射的角度有絕對的關係，因此有必要將出射位置對入射角度的靈敏度做一分析。

將先前導出的關係式 (2.9) 做進一步的量化分析，如圖 2-11 所示，當入射的角度由 θ 變化了 $\Delta \theta$ 的量時，出射位置的改變量以 Δx 代表之，表示式如下

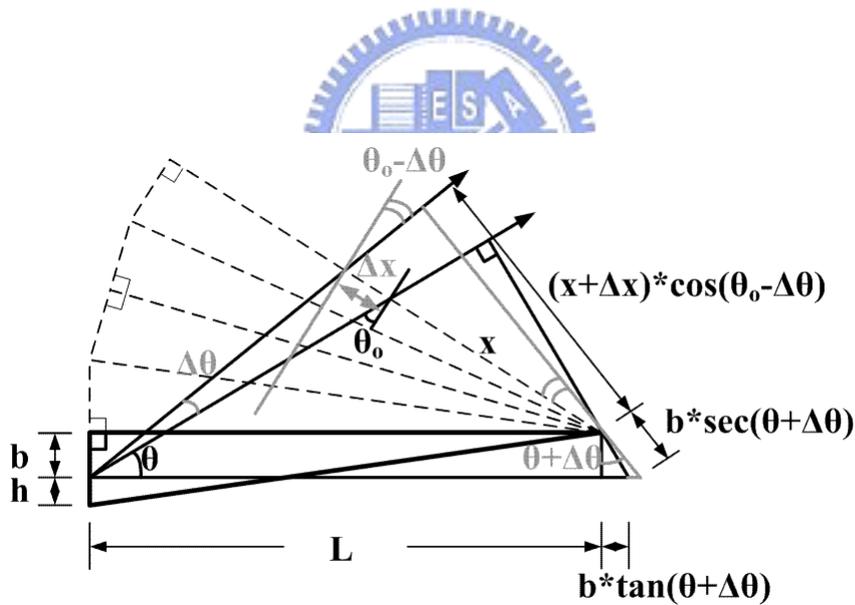
$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \frac{(x + \Delta x) \cdot \cos(\theta_0 - \Delta\theta) + b \cdot \sec(\theta + \Delta\theta)}{L + b \cdot \tan(\theta + \Delta\theta)}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) \cdot \cos\left(90^\circ - (\theta + \Delta\theta) - 2 \cdot \text{Ceiling}\left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}\right] \cdot \theta_v\right) + b \cdot \sec(\theta + \Delta\theta)}{L + b \cdot \tan(\theta + \Delta\theta)}$$

可得位置的偏移量 Δx

$$\Delta x = -\csc(\Delta\theta + \theta + 2 \cdot \theta_v \cdot \text{Ceiling}\left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}\right]) \left(\begin{array}{l} b \cdot \sec(\Delta\theta + \theta) - L \cdot \sin(\Delta\theta + \theta) \\ + x \sin\left(\Delta\theta + \theta + 2 \cdot \theta_v \cdot \text{Ceiling}\left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2 \cdot \theta_v}\right]\right) \\ - b \cdot \sin(\Delta\theta + \theta) \cdot \tan(\Delta\theta + \theta) \end{array} \right)$$

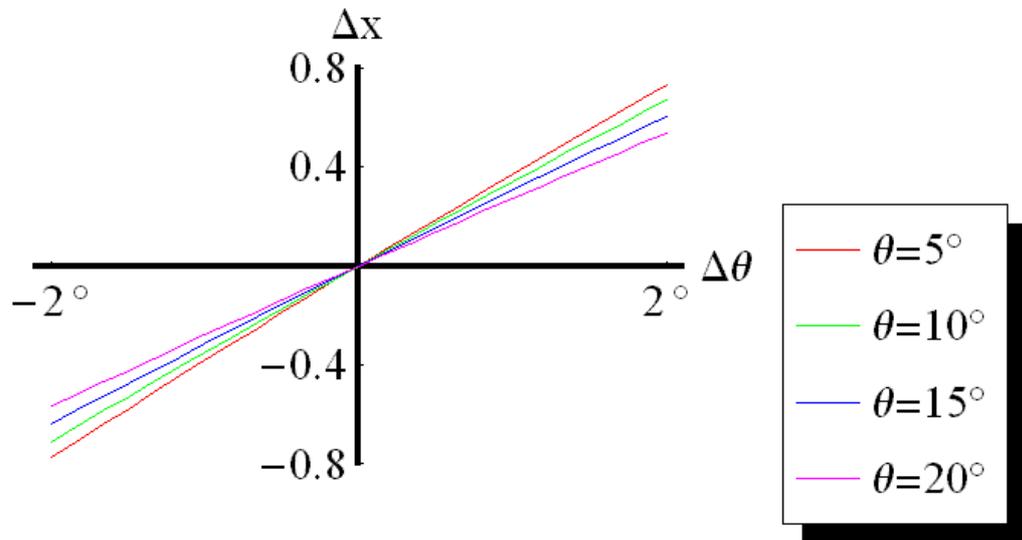
(2.9)



【圖 2-11】楔形板出射落點位置與入射角度的靈敏度分析

若以 14 吋大小的螢幕來估算，假設入射的影像大小為位於入射孔徑的底部 ($h=0$)， $L=17.43$ 吋， θ 分別為 5° 、 10° 、 15° 、 20° ， $\Delta\theta$ 由 -2° 變化到 2° ，利用 Mathematica 可做出 Δx 對 $\Delta\theta$ 的關係圖，如圖 2-12 所示。由圖 2-12 可以看出，若入射的角度有所偏移，則最後在螢幕上的落點偏移量並不小，因此光線的

落點位置對入射角度的變化是很敏感的。



【圖 2-12】出射落點位置偏差對入射角度變化做圖

2.6 小結



在這一章中我們回顧了前人的工作，並且根據前人的工作做延伸。首先是討論在非子午面上的光線如何行進，並導出點光源、非子午面的情況下，光線出射位置所對應的入射角。另外，我們也把點光源拓展到非點光源的影像輸入時的情形，並且建立相關的數學模型。最後我們討論光線在螢幕上落點位置對應入射角度的敏感度分析。

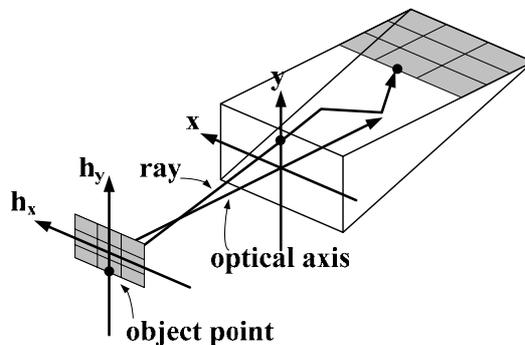
第三章 三階像差細論

本章的工作是仿照傳統的像差分析方式來分析楔形板的像差。傳統的像差討論大多著重在三階像差，因為一般來說，三階像差在全部像差所佔的比重是最重的，而且三階像差各項之間所蘊含的意義非常深遠，對於成像上的影響亦可分門別類來討論。傳統來說，各項像差可以依其形式分為球差、彗差、像散、場曲以及畸變，而在這章的討論之中，我們也可以看到楔形板的三階像差仍依稀具有以上各種不同像差的特性。另一方面，因為楔形板的相對於一般像差分析所討論的軸對稱系統而言是屬於非軸對稱系統，因此像差的各階展開仍保有偶次階，所以在這章的討論中除了三階像差的特性探討之外，對於較低階的二階像差也必須加以考慮。



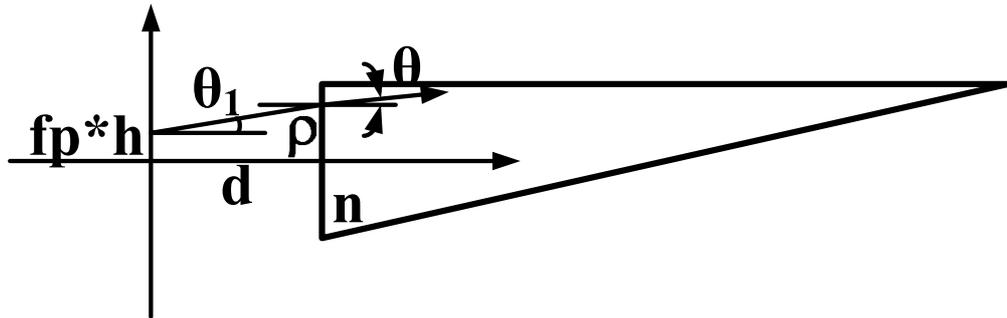
3.1 楔形板之像差計算

參考圖 3-1，一般像差的分析上，都是考慮由物的某個位置高度（object point）發出光線，通過光學系統的入射瞳孔（entrance pupil）之後，到達像平面上的真實落點，將此真實落點位置與理想成像位置的差值相減就可以算出像差。在這裡我們把孔徑阻闌（aperture stop）放在楔形板之前，此時孔徑阻闌相當於入射瞳孔。



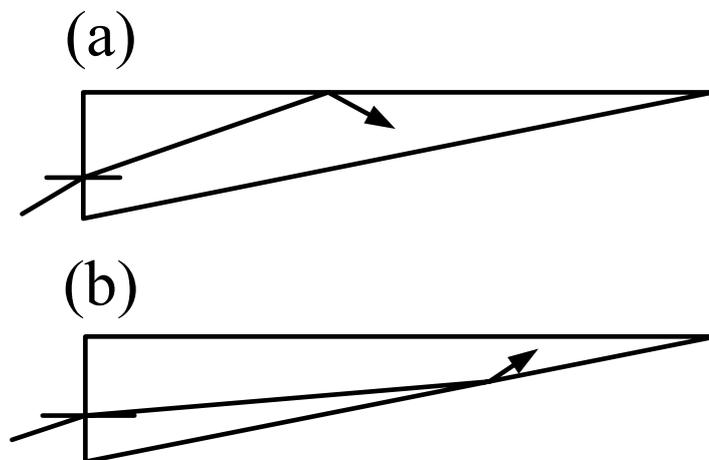
【圖 3-1】像差分析時各座標的示意圖

如圖 3-2 所示，如果知道光線是由物體上什麼高度（場點） $fp \times h$ 發出，經過多少長度 d 之後到達入射瞳孔上 ρ 的位置，那麼就可以算出光線進入楔形板的角
度。由進入楔形板的角
度，我們也可以算出這條光線落於螢幕上的位置為何，再與理想成像位置相比，就可以定出之間的誤差偏移量，即為像差。



【圖 3-2】光線的入射楔形板的角
度與場點，入射瞳孔的關係

因為在像差的分析上 ρ 值的變化涵蓋整個楔形板的進光面，因此對應的 θ 變化也很大，而我們先前推導出來的螢幕上落點 x 對入射角
度 θ 的關係式都是基於光線進入楔形板之後會先打到螢幕面做為假設（圖 3-3 (a)），並不適用於光線先打到螢幕背面（圖 3-3 (b)）的情況，這是必須加以注意的。



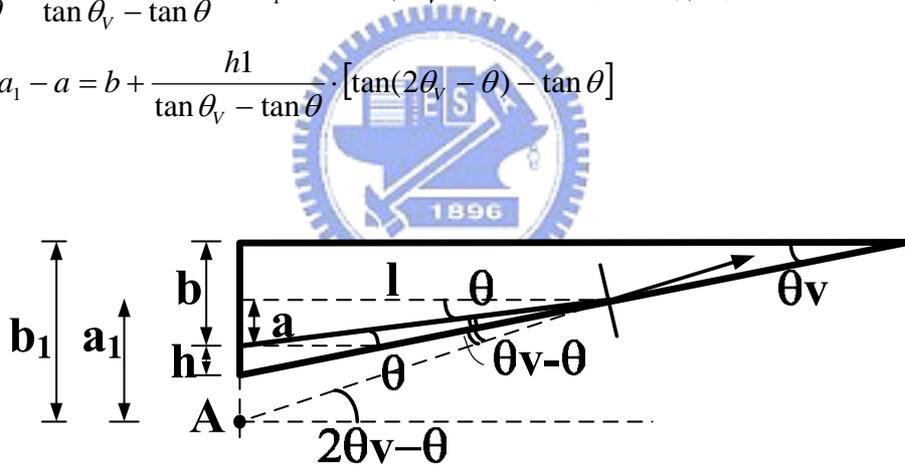
【圖 3-3】光線入射楔形板後可能的兩種情況

雖然圖 3-3 (b) 的情況沒辦法直接用公式 (2-9) 來描述，但是我們仍然可以將公式 (2-9) 做部分修正來適用於所有的可能發生的情形。參考圖 3-4，假設光線自楔形板的 b 位置以 θ 角度入射，並打到螢幕的另一面後開始進行全反射。我們將反射的光線軌跡往反方向做延伸，交於楔形板入口面的延伸線上，交點為 A。由圖中可以很清楚的看出來，光線可以視為自 A 處進入楔形板，並且以 $(2\theta_v - \theta)$ 的角度入射行進至螢幕面的光線。如此一來，所有圖 3-3 (b) 的情況都可以視為圖 3-3 (a) 的情況來處理，只需要將 b 以 b_1 、 θ 以 $2\theta_v - \theta$ 替代即可。 b_1 的求法如下：

$$\text{由 } \tan \theta = \frac{a}{l} \text{ 與 } \tan \theta_v = \frac{h+a}{l} \text{ 可求得 } a = \frac{h}{\frac{\tan \theta_v}{\tan \theta} - 1}, \text{ 又}$$

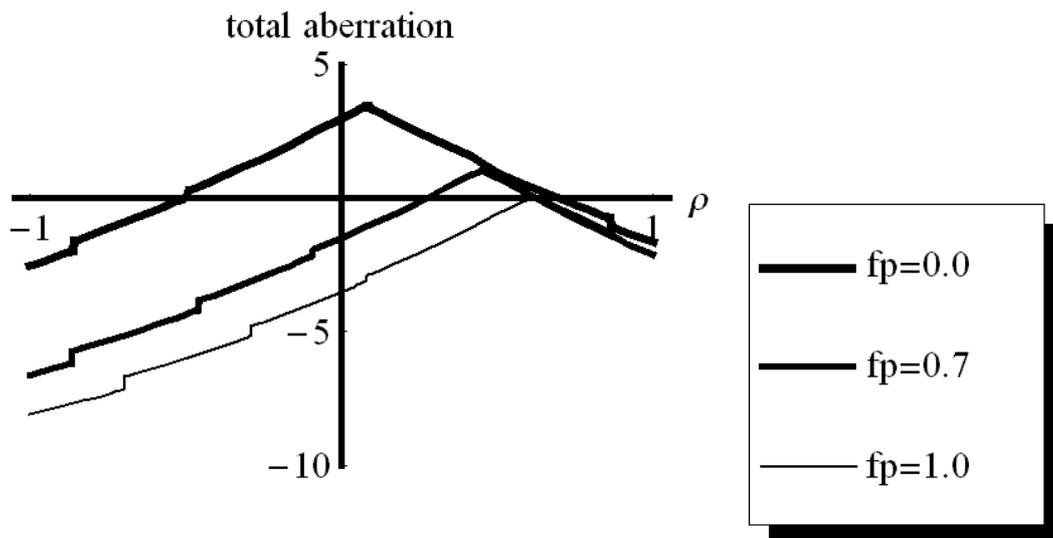
$$l = \frac{a}{\tan \theta} = \frac{h}{\tan \theta_v - \tan \theta}, \text{ 因此可以算出}$$

$$b_1 = b + a_1 - a = b + \frac{hl}{\tan \theta_v - \tan \theta} \cdot [\tan(2\theta_v - \theta) - \tan \theta]$$

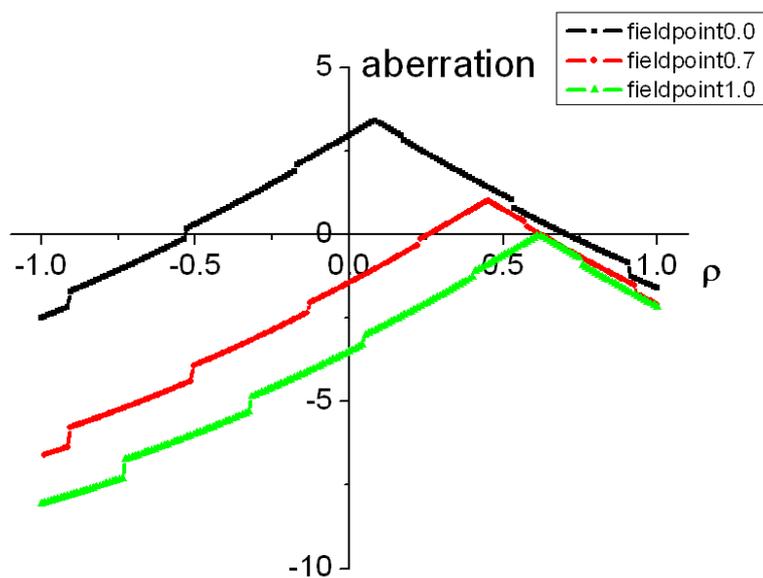


【圖 3-4】整合入射楔形板的兩種情形

圖 3-5 (a) 是利用以上推導出來的結果，將像差對入射瞳孔的變化作圖，場點 (field point) fp 分別取 0.0、0.7 及 1.0。圖 3-5 (b) 是利用光學模擬軟體 TracePro 模擬出來的結果取點作圖，可以注意到模擬的結果和計算的數值結果很相近。圖中曲線的趨勢轉折點是圖 3-3 的兩種情況的交界處，而曲線在某些位置會有一些突然的跳動，這是因為光線投射在螢幕上的位置剛好遇到了楔形板的物理限制，暗帶，而無法顯現，關於暗帶的部分，將在下一節詳細討論。



(a)



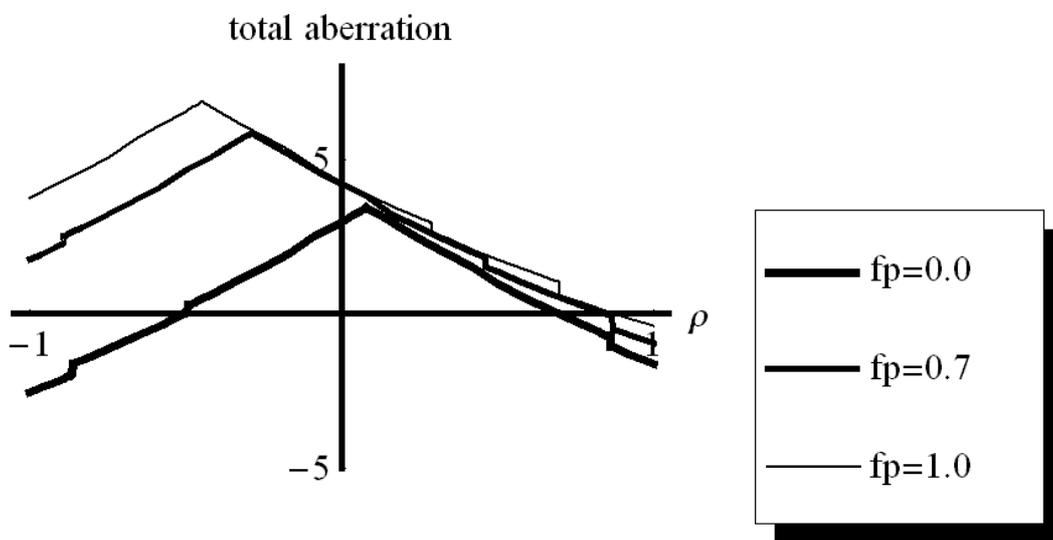
(b)

【圖 3-5】像差對入射瞳孔的變化作圖（場點 0.0，0.7，1.0），

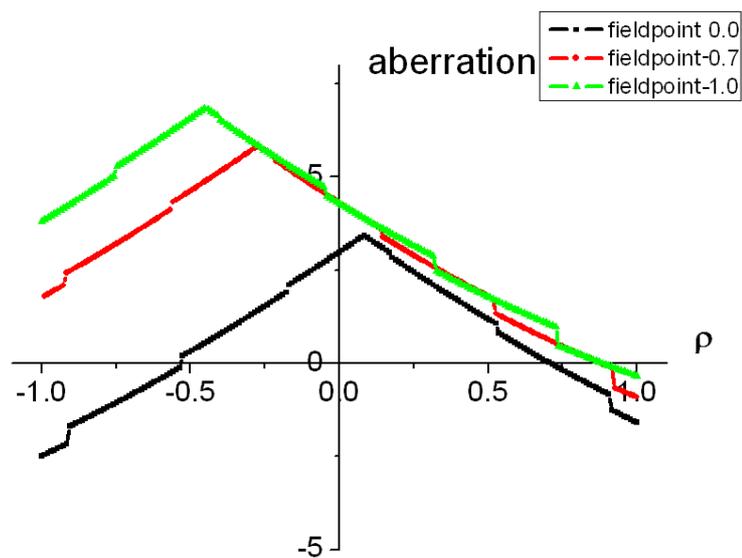
(a) 計算結果作圖，(b) TracePro 模擬數據作圖

3.2 非軸對稱系統的像差分析

在上一個章節討論的像差都是針對場點大於零的部分進行，但是必須要注意到的是，楔形板並不像一般的透鏡是屬於軸（光軸）對稱系統，而是對子午面對稱的面對稱系統。因此，為了對楔形板的像差做完整的分析，我們有必要對場點小於零的部分進行討論，來看看是否在场點為負的情況下，其像差曲線的特性仍與場點為正的情況維持一樣的趨勢。利用推導出來的數學模型，將像差對入射瞳孔的變化作圖，場點（field point） fp 分別取 0.0、-0.7 及 -1.0。



(a)



(b)

【圖 3-6】像差對入射瞳孔的變化作圖（場點 0.0，-0.7，-1.0），

(a) 計算結果作圖，(b) TracePro 模擬數據作圖

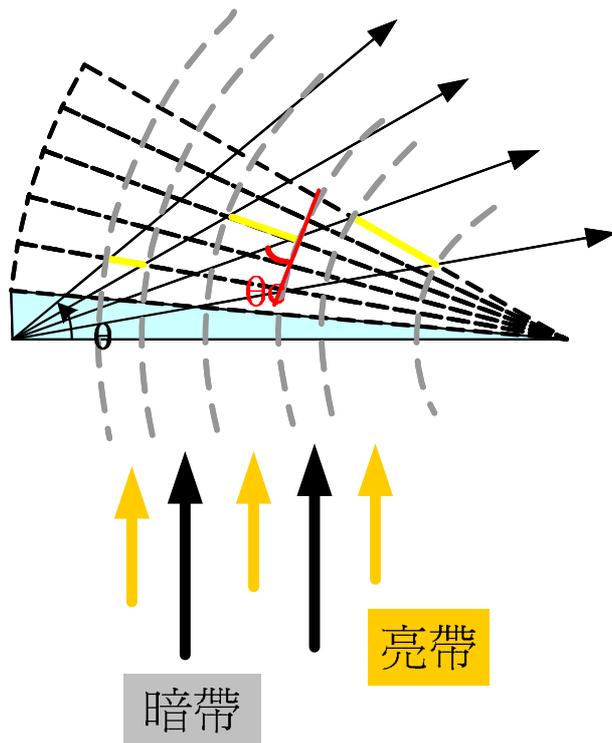
將圖 3-6 與圖 3-5 做比較，可以發現場點的正與負對像差所造成的影響是使得像差曲線平移了，曲線的轉折點以及暗帶的位置也改變了，但是曲線的整體趨勢仍大致相同，因此接下來的討論，在具有客觀的前提下，仍是著重在場點 0.0，0.7，1.0 上。

3.3 楔形板中的暗帶 (dark zone)

在 Travis 2002 年的 IDW 論文中曾提到暗帶的現象[5]，但是他沒有進一步計算暗帶位置，因此我們將在這個章節做更深入的研究。

由公式 2-9 可以知道某個入射的角度 θ 都對應著一個出射的位置 x ，這是無庸置疑的。但是反過來想想，是否螢幕上每個位置都能找到一個對應的入射角度 θ ，答案則是否定的，至於原因詳述如下。

參考圖 3-7，這是一個楔形板及它的翻摺等效示意圖，不同的入射角度 θ 對應到不同的全反射次數，因此會從不同的等效翻摺面出射，為了方便了解在螢幕面出射的位置，虛線是從楔形板的頂角作同心的輔助圓。若改變光線進入楔形板的角度的角度，則從螢幕上出射的位置也隨之改變，連續的角度變化將使得出射的位置也連續變化。圖中的黃色亮線就是代表具有同樣多次全反射次數的光線之落點位置分佈，因為具有同樣多次的全反射次數，所以出射位置落點是連續變化的。在圖中的楔形板為了避免光的能量由螢幕的背面損失，因此我們將螢幕的背面鍍上一層反射物質，強迫要由另一面散逸的光線反射回螢幕面再出射，所以將楔形板做翻折等效時，每回都是翻折兩次。



【圖 3-7】亮帶暗帶的示意圖

由圖 3-7 可以明顯看出，當光線自楔形板螢幕出射的角度愈來愈大，到達了臨界角之後將會在楔形板內多做一次全反射再由螢幕面出射，因此出射的等效翻折面是不同一個。此時可以由虛線的同心圓輔助線看出，出射的位置和先前出射的位置並不是緊緊相連的，意即螢幕上的影像在此會有些許的斷離。而分離的間隔大小和楔形板的規格以及入射的角度息息相關，其所造成的影響為螢幕上顯現出來的影像會有一環一環的暗帶，而對成像品質造成影響。

因為影像的不連續位置發生在臨界角處，因此我們可以假設某條光線在楔形板內全反射 $2m$ 次之後，是以略小但接近於臨界角 θ_c 的角度在螢幕上 x 的位置出射。而另一條角度相近的光線在楔形板內全反射 $2m$ 次之後假設和法線的夾角略大於臨界角 θ_c ，因此必須再多全反射一次，總計反射 $2(m+1)$ 次後以 $\theta_c - 2\theta_v$ 出射。為了分析上簡單起見，假設光源為一點光源，利用 $\theta = 90^\circ - \theta_c - 2m\theta_v$

及 $x = \frac{L \cdot \sin \theta}{\cos \theta_o}$ 可以算出該暗帶兩側邊緣的位置分別為 $x = \frac{L \cdot \cos(\theta_c + 2m\theta_v)}{\cos \theta_c}$ 、

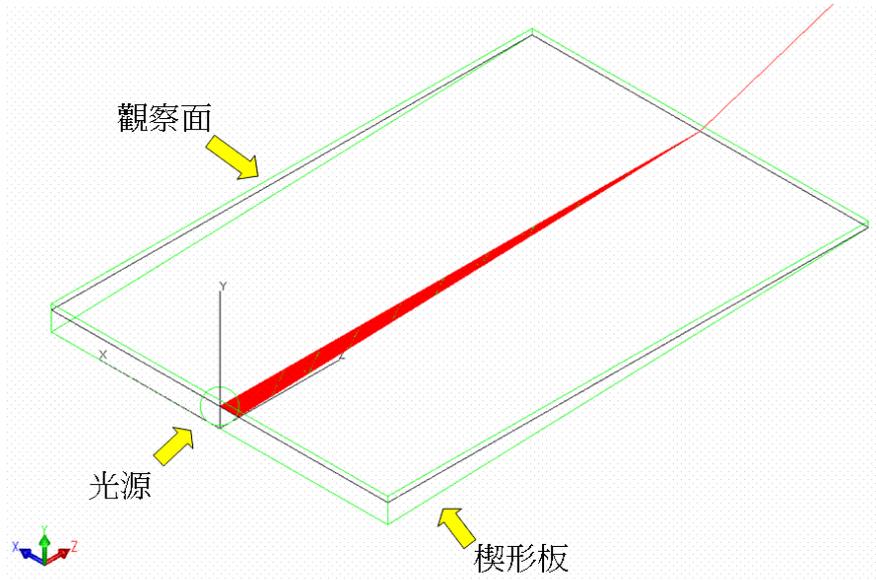
$$x' = \frac{L \cdot \cos(\theta_c + 2m\theta_v)}{\cos(\theta_c - 2\theta_v)}$$

，兩者相減即為該暗帶的寬度。

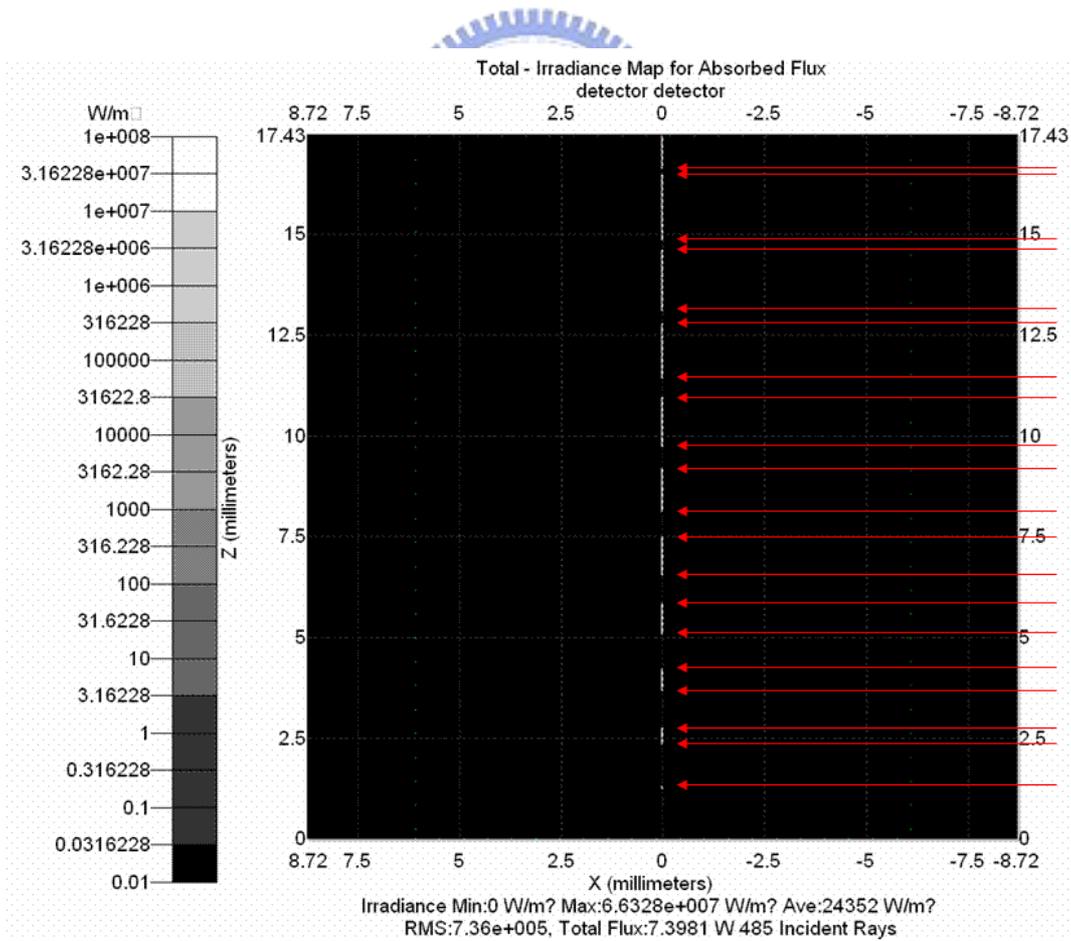
如果使用 14 吋的壓克力樣本板作為模擬測試， $L=17.43$ 、 $n=1.49309$ ，則用上面討論的關係式可以計算出暗帶的位置，計算結果如表 3-1 所列，另外，我們也用 TrocePro 來模擬，與計算的結果互相印證。其中要注意的是為了與 TracePro 的模擬結果對照，表 3-1 中，我們取暗帶位置為 $(L-x)$ 及 $(L-x')$ 。模擬的方式是在楔形板的入射瞳孔上建立一個點光源，並令此一點光源所發出的光線都在子午面上行進，而光線入射的角度由 $0^\circ \sim 45^\circ$ 均勻分佈，模擬的光線總共 500 條，見圖 3-8。因為入射光線的角度是均勻分佈，所以理想上螢幕上的光線落點也是連續分佈。但是因為暗帶存在的關係，所以實驗在螢幕上觀察到的光線落點是不連續的帶狀分佈。

光線全反射次數 $2m$	暗帶位置 $(L-x)$	暗帶位置 $(L-x')$
2	1.31679	2.35833
4	2.73736	3.68708
6	4.25258	5.10436
8	5.85267	6.60102
10	7.52733	8.16743
12	9.26577	9.79350
14	11.0568	11.4688
16	12.8889	13.1824
18	14.7502	14.9234
20	16.6288	16.6806

【表 3-1】暗帶位置計算結果



(a)



(b)

【圖 3-8】暗帶的 TracePro 模擬圖

(a) 模擬的配置圖 (b) 從螢幕上方觀察到的發光情況 (Irradiance Map)

圖 3-8 (b) 中的紅線所標示的是暗帶的兩端，將此結果對照表 3-1 可以發現，推導計算出來的結果和軟體模擬的結果十分接近，幾乎是完全一樣，因此可以確定暗帶的存在及其分佈情況。暗帶在楔形板中屬於先天上的物理限制，無法由入射的角度來加以控制及修正，為了改善暗帶在成像品質上的影響，或許可以由螢幕上的設計著手。

3.4 前三階像差的形式

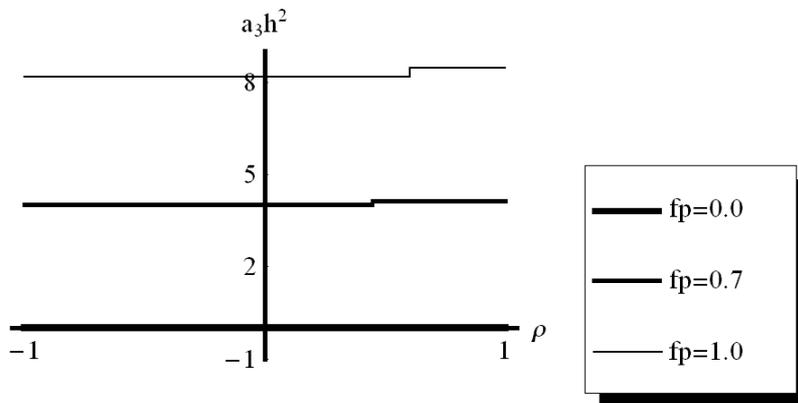
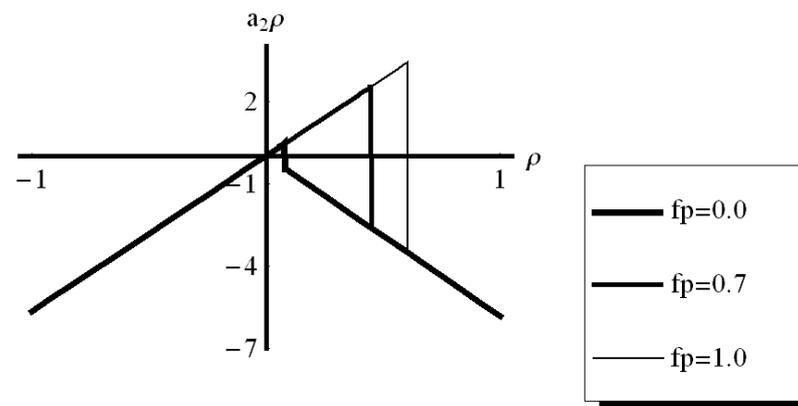
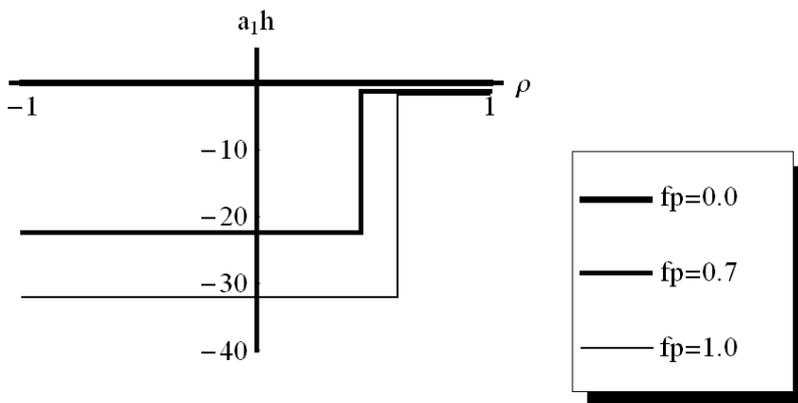
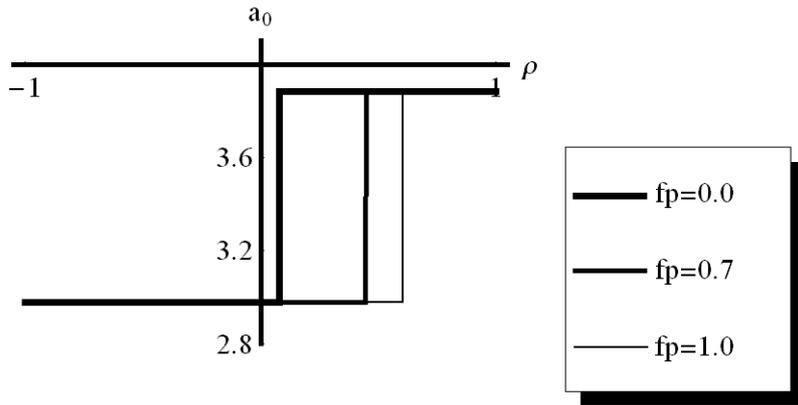
由先前的分析，我們知道像差是理想的影像位置減去實際影像位置。其關係可以表示如下

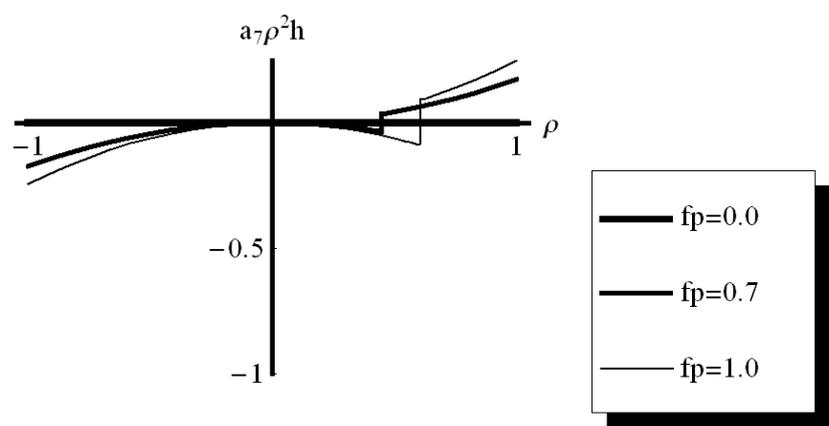
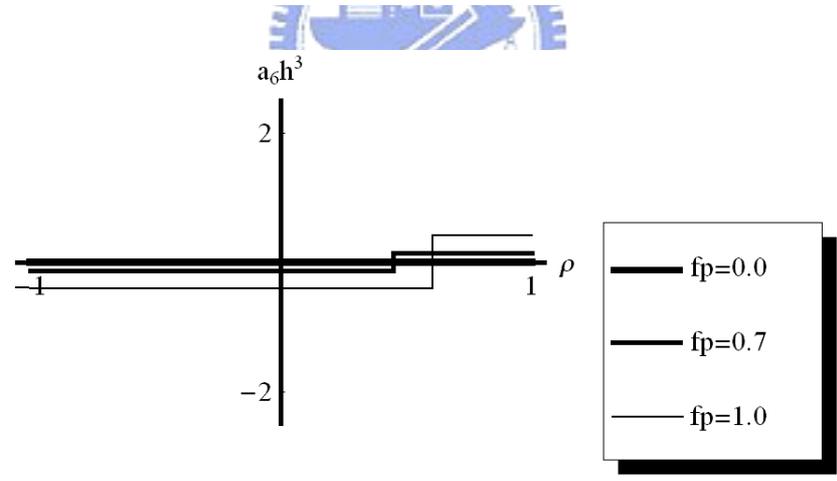
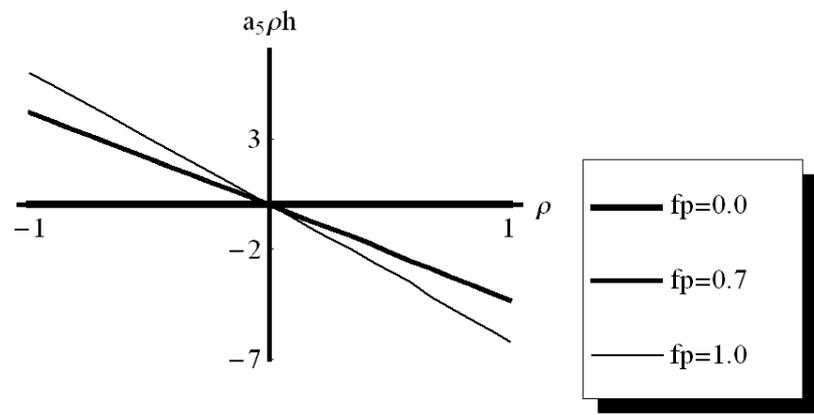
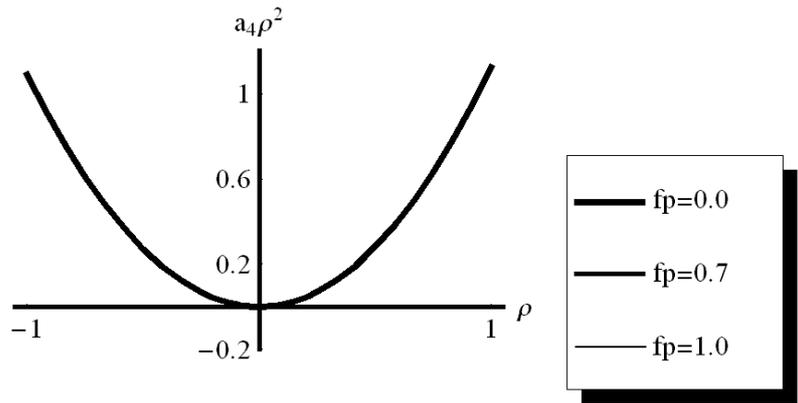
$$aberration = x_{real} - x_{perfect} = \frac{(L + b \cdot \tan \theta) \cdot \sin \theta - b \cdot \sec \theta}{\cos \left[90^\circ - \theta - 2 * \text{ceiling} \left[\frac{90^\circ - \theta - \theta_c}{2\theta_v} \right] * \theta_v \right]} - (1 - fp) \cdot m \cdot h \quad (3.1)$$

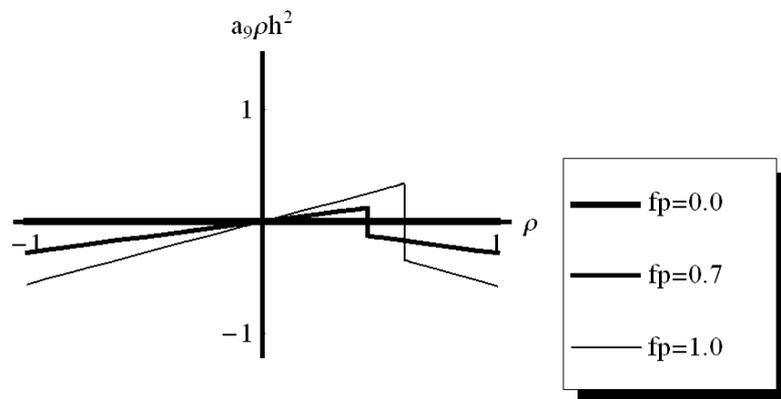
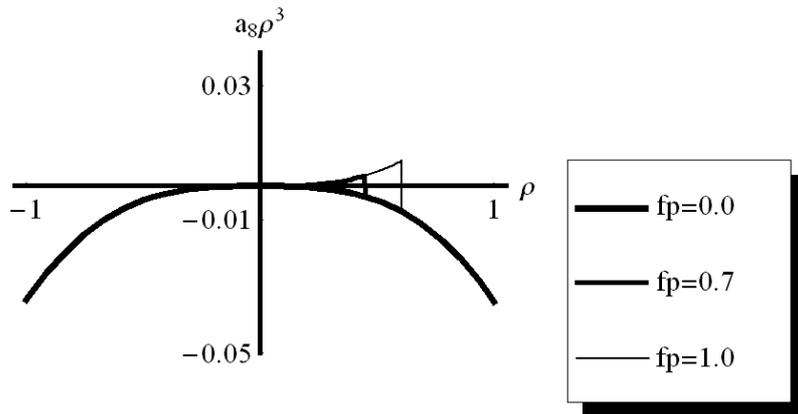
式中的 θ 及 b 都與系統的 ρ 及 h 有關，參見圖 3-2，因此我們可以將上式對 ρ 及 h 做泰勒展開式，即可分出各階的像差，在本章我們將著重在前三階像差的分析，其形式為

$$aberration = a_0 + a_1 h + a_2 \rho + a_3 h^2 + a_4 \rho^2 + a_5 \rho h + a_6 h^3 + a_7 \rho^2 h + a_8 \rho^3 + a_9 \rho h^2$$

對此我們可以繪出各項像差對 ρ 的關係圖



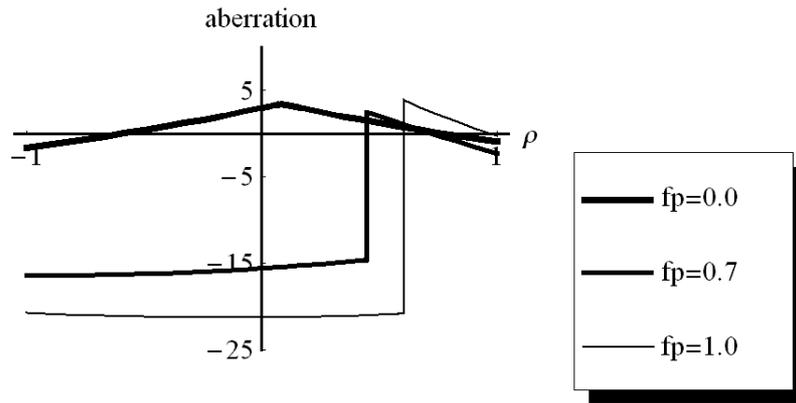




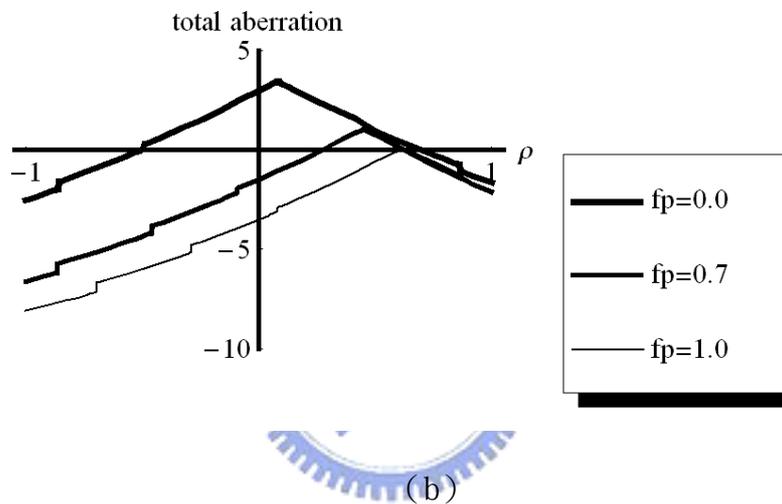
【圖 3-9】前三階像差對 ρ 作圖

其中 $a_4\rho^2$ 及 $a_8\rho^3$ 對應到傳統像差中的球差， $a_7\rho^2h$ 對應到彗差， $a_9\rho h^2$ 對應到像散， a_6h^3 、 a_3h^2 對應到畸變，另外 $a_5\rho h$ 因為是屬於二階的像差，而且形式比較難歸類到一般的像差，所以是屬於一種比較特殊的像差。

接著，我們可以將前三階的像差相加，比較前三階像差與全部像差的不同



(a)



(b)

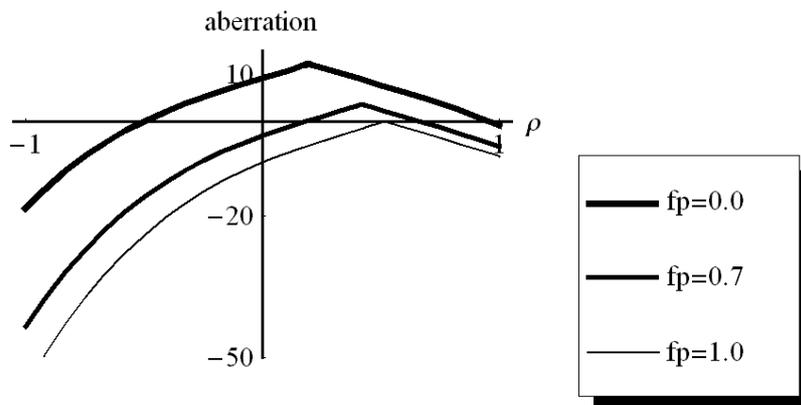
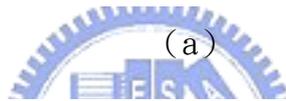
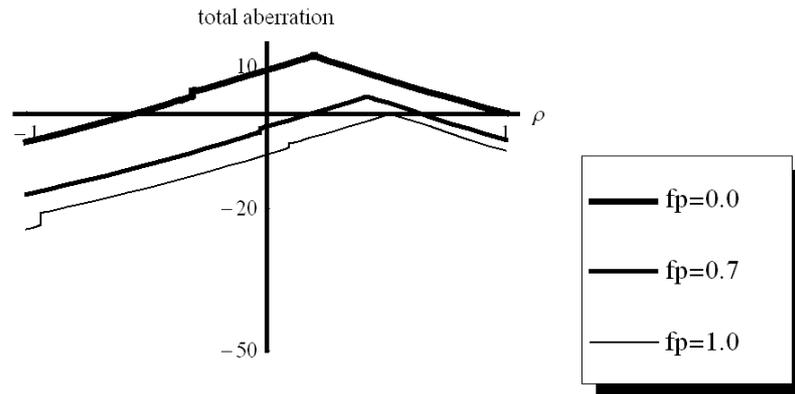
【圖 3-10】前三階像差與全部像差的比較

(a) 前三階像差總和 (b) 全部的像差總和

由圖 3-10 中可以比較出前三階像差與全部的像差相比，趨勢不太相同，對照圖 3-9，發現這主要是因為 a_1h 項所造成。這種現象在真實情況並非不可能發生，因為我們在這邊的分析省略了三階以上的高階項，所以造成了與全部的像差總和不一致。若是把與 a_1h 所對應的高次項考慮進來，則會與 a_1h 互相配對而相消，使得像差的曲線愈來愈符合考慮了所有像差的總和。

當然，這是在這種規格下的個別分析，並非在所有的情況下 a_1h 項都會這麼

大。事實上，每一項的像差完全取決於系統的規格，當規格改變，像差的量可能就相差十萬八千里了。舉個例子來說，若設計一個 50 吋的楔形板顯示器，螢幕大小比上楔形板厚度為 10:1，材料採用 BK7。則可以仿照先前的手法，把像差計算出來，也可以只取其前三階的像差來分析。分析的結果繪圖如下



(b)

【圖 3-11】螢幕大小：厚度為 10:1 的 50 吋面板之像差，

(a) 整體像差 (b) 前三階像差總和

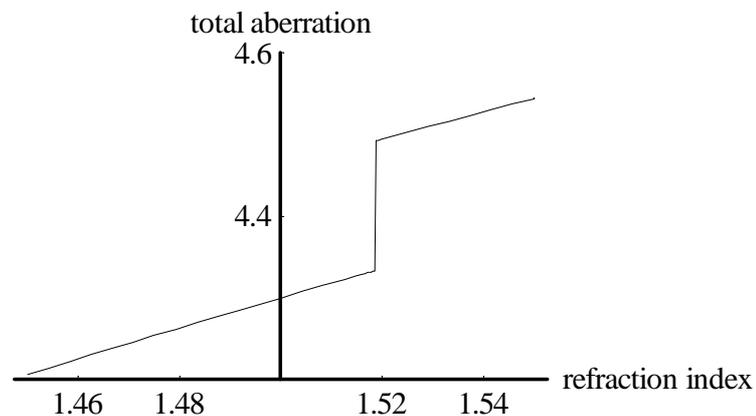
由圖 3-11 中可以看出來，前三階像差總和所有像差總和趨勢大致相同，因此在某些特定情況下，只要取前三階像差來分析就可以具有代表性。

3.5 像差大小與系統參數的關係

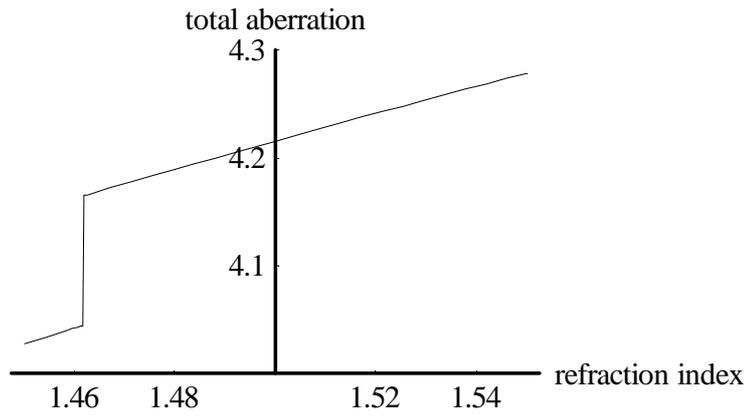
由像差的表示式 (3.1) 可以知道像差的大小除了與光線行進的路線有關之外，還與系統的參數有關。所謂的系統參數就是楔形板的規格，一般來說，就是楔形板的傾斜面夾角 θ 與楔形板的材質折射率 n 。接下來將對這兩個參數做圖分析

(1) 折射率 n

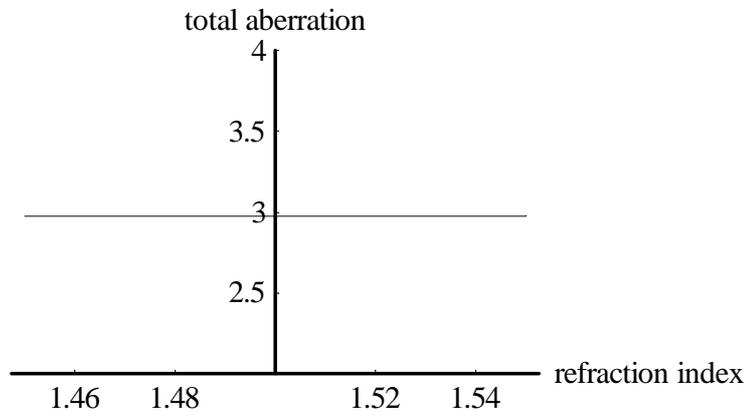
由於在 14 吋樣板的材質是採用壓克力 ($n=1.49309$, 546.1nm)，所以我將分析的範圍定在 1.45~1.55，分析的方式是對通過入射瞳孔的光線作圖分析，因為楔形板並不是一個軸對稱系統，因此場點選擇 -1.0, -0.7, 0.0, 0.7, 1.0



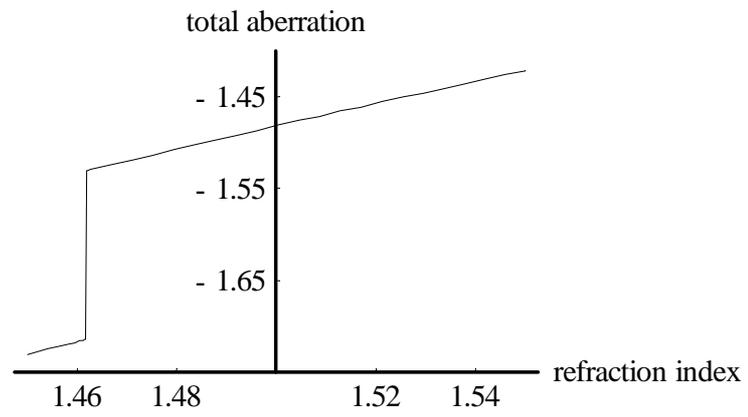
(a)



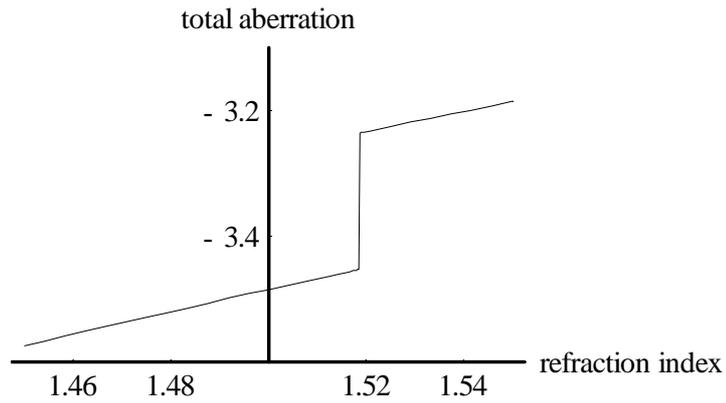
(b)



(c)



(d)



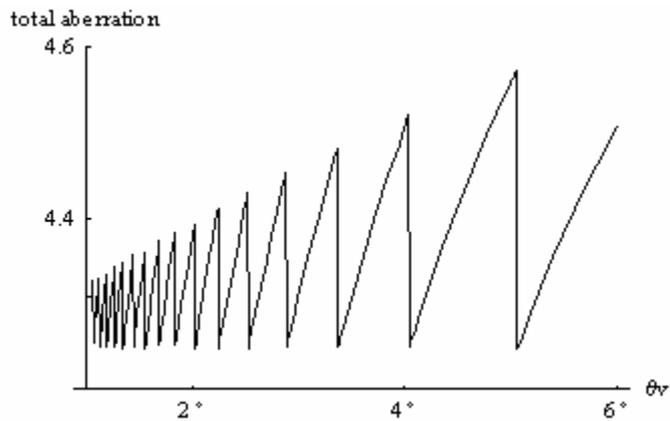
(e)

【圖 3-12】像差對折射率的作圖，場點分別為
 (a) -1.0，(b) -0.7，(c) 0.0，(d) 0.7，(e) 1.0

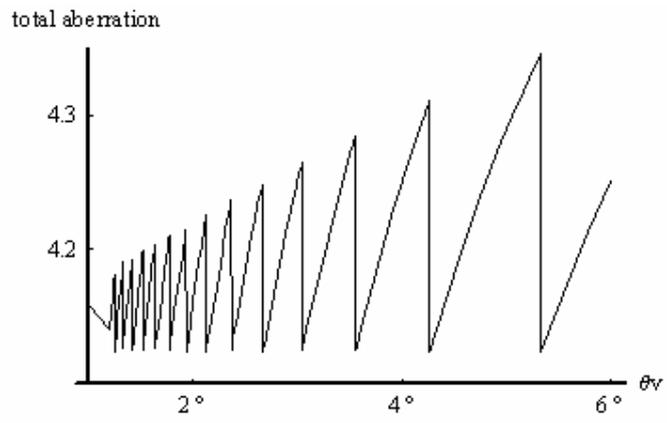
(2) 楔形板頂角 θ_v



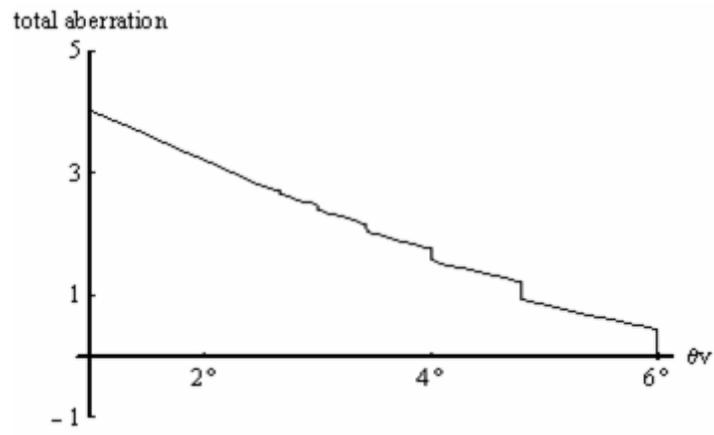
在 14 吋樣本板，螢幕大小比上厚度 20:1 的設計中，頂角大約是 2.3°，因此我們頂角的分析範圍取在 1°~6°，分析的方式是對通過入射瞳孔的光線作圖分析，因為楔形板並不是一個軸對稱系統，因此場點選擇 -1.0，-0.7，0.0，0.7，1.0



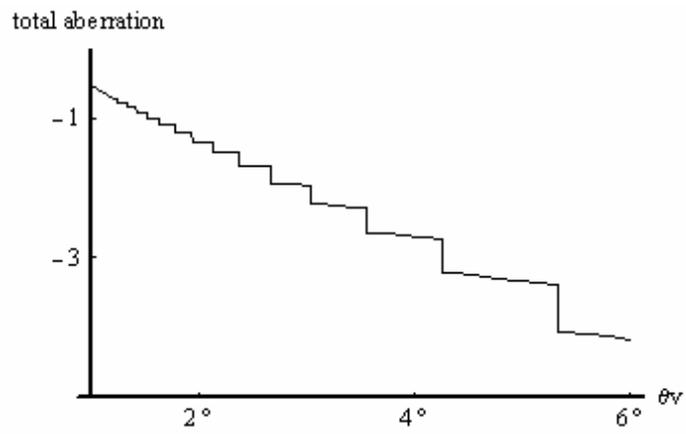
(a)



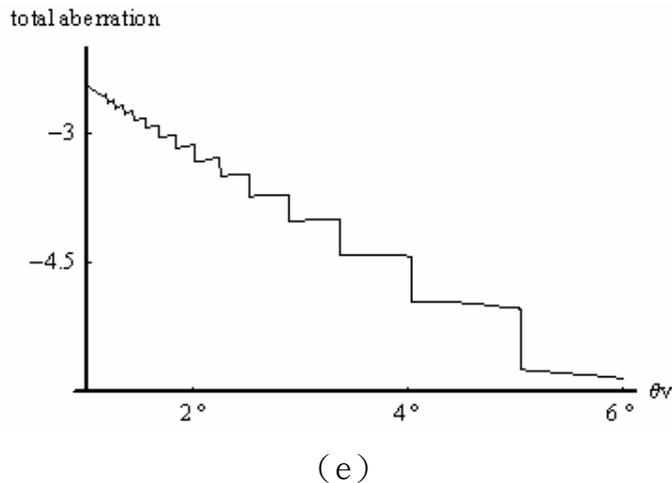
(b)



(c)



(d)

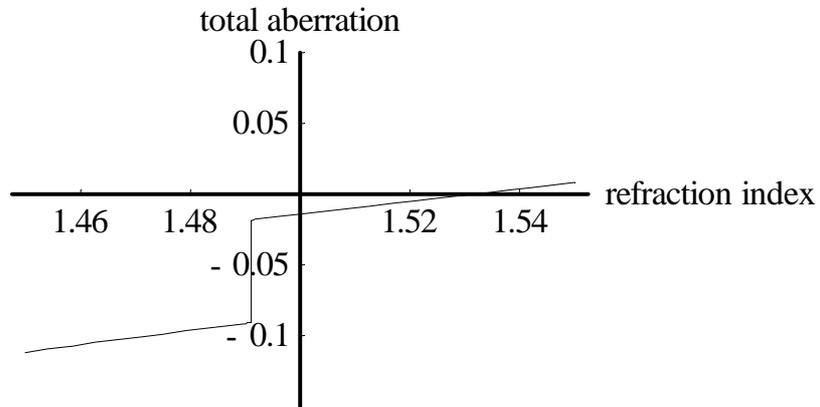


【圖 3-13】像差對楔形板頂角的作圖，場點分別為
(a) -1.0，(b) -0.7，(c) 0.0，(d) 0.7，(e) 1.0

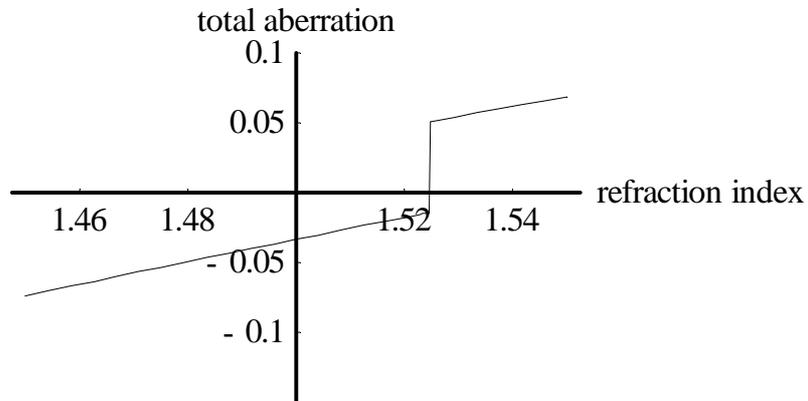
由圖 3-12、3-13 中可以看出來，似乎在討論的變動範圍之內都很難把像差給壓到足夠低的狀態，但這並不表示這一系列的分析無法有效的控制像差。因為在這裡的分析我們都是假設光線通過入射瞳孔的中心 ($\rho=0$)，因此只要場點一選定，追跡的這一條光線入射楔形板的角度也就確定了。但是這個入射的角度與理想的入射角度相差可能很大，因而造成的像差也會很大，這時候只靠改變系統的設計參數（折射率 n ，楔形板頂角 θ_v ）要把像差給壓低就顯得心有餘而力不足。除非是一開始的設計就很不錯，像差也在允許的範圍之內，這時候再來變動某些參數，那麼才有比較大的機會可以把像差給消除（壓到夠低）。

舉個例子來說，如果選定的場點跟通過入射瞳孔的位置配合得夠好，那麼再來變動折射率或頂角的大小，就很有可能完成一個比較理想的設計。參考圖 3-5，若選定場點 0.7 的所發出來的光線，可以知道若光線通過 $\rho=0.26$ 及 0.63 的地方會有比較小的像差，因此可以選擇 $\rho=0.26$ 及 0.63 來進行分析。

以下是分析的結果，在選擇場點=0.7 發出來的光線，分別通過入射瞳孔 $\rho=0.26$ 及 0.63 的位置，對楔形板的折射率變化作圖



(a)



(b)

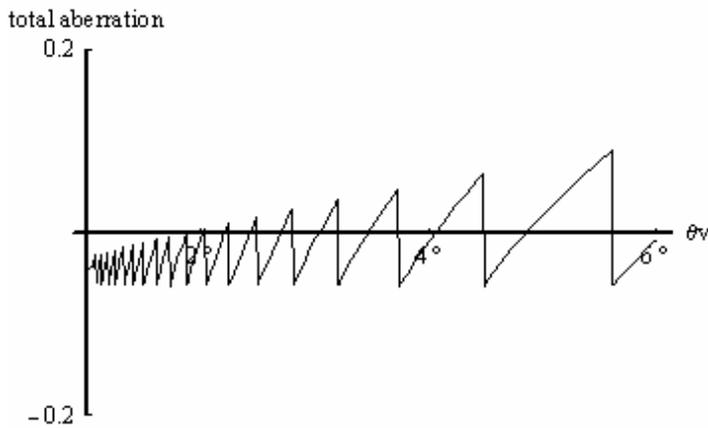
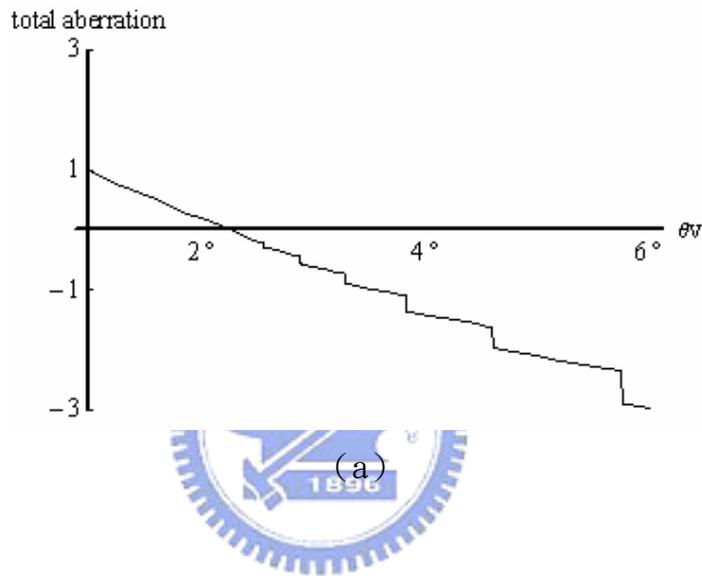
【圖 3-14】場點=0.7，像差對楔形板的折射率變化關係圖

(a) $\rho=0.26$ ，(b) $\rho=0.63$

由圖 3-14 中可以看到在折射率約略等於 1.53 的時候，像差剛好為零。不

過圖 3-14 (a) 的折射率由 1.50 變化到 1.55 時，像差都是在零附近緩慢變動，而圖 3-14 (b) 的曲線則是快速地通過零附近，像差隨著折射率變化而劇烈跳動。這代表同樣都是像差為零附近的初始設計，但是卻對折射率有不同的靈敏度，因此做這個分析有助於挑選出較好的初始設計。

另外，用同樣地分析手法，選擇場點=0.7 發出來的光線，分別通過入射瞳孔 $\rho=0.26$ 及 0.63 的位置，對楔形板的頂角變化作圖



(b)

【圖 3-15】場點=0.7，像差對楔形板的頂角變化關係圖

(a) $\rho=0.26$ ，(b) $\rho=0.63$

在圖 3-15 (a) 中，當楔形板的頂角變化到 2.3° 時，像差為零。在圖 3-15 (b) 中，楔形板的頂角在 $2^\circ \sim 6^\circ$ 之間有多次機會能使像差為零。可以注意到圖 3-15 (a) 跟圖 3-15 (b) 的曲線趨勢極不相同，而且圖 3-15 (b) 的像差是在零上下震盪，因此如果選擇圖 3-15 (b) 作為初始設計的話，是比較有可能得到比較好的設計。

由圖 3-14、3-15 兩個例子可以說明，當一開始的設計就很不錯時，只要再微調系統的某些參數就可以使像差為零。同樣的道理，如果一開始的設計和理想的設計相差很多，那麼希望藉由改變系統的某個參數來消除像差則是一件吃力的事，而且成功的機會也不大。

3.6 小結



在這一章中，我們利用第二章所建立的數學模型來計算影像通過楔形板之後的真實落點，並且將真實落點位置與理想落點位置的差值算出來，這就是我們要求的像差。因為楔形板不是光軸對稱系統，因此必須討論場點為負的情況，計算之後的結果發現場點為負的情況和場點為正的情況的像差趨勢是相似的。在討論像差的過程之中，我們澄清一種很特殊的像差，這種像差是由楔形板的暗帶所引起。在這一章中，也對暗帶的成因，及產生位置做詳細探討。接著我們討論楔形板的前三階像差，並舉了兩個實例（14 吋及 50 吋）的計算及模擬結果。最後，我們分析像差和楔形板參數的關係，期望能夠由分析的結果找出較佳的設計初始值。

第四章 總結與未來展望

4.1 結論

在本論文中，我們利用光束覓跡的技巧，追跡在楔形板中的光線，並建立出入射光線的角度與出射位置的基本關係。然而基於實際應用的需要，逐步地修正公式，最後得到一個描述光線在楔形板中行進的數學模型。

透過所建立的數學模型，我們仿照一般像差的分析方法來分析像差，在本論文中探討了楔形板中最具代表性的子午面上的情形，並計算到了前三階像差，即 $aberration = a_0 + a_1h + a_2\rho + a_3h^2 + a_4\rho^2 + a_5\rho h + a_6h^3 + a_7\rho^2h + a_8\rho^3 + a_9\rho h^2$ ，並將每一項的像差對光線通過入射孔徑的位置 ρ 作圖。這項分析可以用來做為日後對楔形板做光學設計時的重要參考，知道了楔形板系統的每個參數對每一項像差的影響，我們就知道設計時哪一項的參數對像差的影響較大，而能夠找出對應的消像差方法。

接著我們澄清一個很有趣的現象，基於楔形板的物理限制，楔形板的螢幕面上有某些部分是不會有光到達的，稱為暗帶，它的精確位置可以用先前推導出來的數學模型來找出來。暗帶在像差分析時會造成像差曲線發生突然跳動的情形，這是一種屬於楔形板的特殊現象，並無法透過光線入射時位置及角度的良好控制來改善，僅能在光線最後由螢幕面出射時，在螢幕面上做特殊的設計來消去暗帶所造成的像差。

最後我們分析楔形板的折射率及頂角的變化對像差所造成的影響，發現雖然都是取像差為零附近的條件來做初始設計，但是在某些初始設計下，即使折射率或頂角偏離了初始設計值，仍然能夠把像差壓制在很小，接近零的範圍。相反的某些設計只要一偏離了原先設計的初始值，像差量就會開始變大。因此在做系統的光學設計之前，如果能夠先對像差進行一系列的分析，將有助於我們選擇良

好的初始設計。

4.2 未來展望

在這篇論文中雖然已經把前三階的像差計算出來，但是對於真正應用在光學設計上仍然是不夠的，就像在論文中所提到的 14 吋和 50 吋的例子一樣，50 吋的情況剛好可以用前三階的像差來代表全部的像差，但是 14 吋的例子卻可以看出來，只算到前三階的像差是不夠的，因為有可能會誤導設計者的判斷。所以接下來可以繼續進行的研究是四階及五階像差的探討，這將有助於加深楔形板像差理論的深度。

另一方面，為了減低繁鎖的計算量，我們計算像差時都是取楔形板中最具代表性的子午面來進行。雖然只要確定光線所在的非子午面，則光線出射位置和入射的角度都可以仿照一般子午面的算法算出來，像差也就因此確定。但是缺少了非子午面的討論就相當於少了弧矢面的像差曲線，也因此沒辦法繪出斑點圖 (spot diagram)。所以接下來研究的方向應該是完成弧矢面的像差曲線，這將有助於加深楔形板像差理論的廣度。

參考文獻

- [1] J. T. Veligdan, "Thin display optical projector," *US Patent # 6, 002, 826* (1999)
- [2] J A. Travis, "Optical system including a planar waveguide," *US Patent # 6, 608, 961* (2003)
- [3] A. Travis and J. Zhong, "Linearity in flat panel wedge project," *SID*, pp. 716-719 (2003)
- [4] A. Travis, T. Large, and M. Buckingham, "Image quality in flat projection wedges," *SID*, pp. 850-853 (2004)
- [5] A. Travis, J. Moore, and J. Zhong, "Optical design of a flat panel projection wedge display," *IDW*, pp. 461-464 (2002)
- [6] S. Shikama, H. Suzuki, and K. Teramoto, "optical system of ultra-thin projector equipped with refractive-reflective projection optics," *SID*, pp 1250-1253 (2002)
- [7] E. H. Stupp and M. S. Brennessoltz, *Projection display*, Wiley, New York, (1999)
- [8] H. Suzuki, K. Teramoto, J. Suzuki and S. Shikama, "Image display device and adjustment for alignment," *US Patent #6631993* (2003)
- [9] H. Suzuki, K. Teramoto, Y. Ashizaki, S. Sikamu, H. Sekiguchi, T. Ryuugou and K. Kojima, "Fresnel lens, screen, image displaying device, lens forming, mold manufacturing method and lens manufacturing method," *US Patent Application, US2004/0169921* (2004)
- [10] J. T. Veligdan, "Flat or curved thin optical display panel," *US*

Patent # 5, 381, 502, (1995).

[11] 中華映管公司網站<http://www.cptt.com.tw/chinese/index.html>

[12] Infocus Engine 公司網站<http://www.infocus.com>



附錄一

靈敏度分析作圖的程式碼

```

In[12]:= << Graphics`Legend`

n = 1.49309; (*Acrylic*)
ApertureRadius = 0.35;
θv = ArcTan[2 * ApertureRadius / L];
θc = ArcSin[1 / n];
b = 2 * ApertureRadius;
L = 17.43;

x05[Δθ_] = -Csc[5° + Δθ + 2 θv Ceiling[ $\frac{85^\circ - \theta_c}{2 \theta_v}$ ]]
  (b Sec[5° + Δθ] - L Sin[5° + Δθ] +
  1.0575039256465708` Sin[5° + Δθ + 2 θv Ceiling[ $\frac{85^\circ - \theta_c}{2 \theta_v}$ ]] -
  b Sin[5° + Δθ] Tan[5° + Δθ]);
x10[Δθ_] = -Csc[0.8970362220226088` + Δθ]
  (0.7` Sec[10° + Δθ] + 2.990887605686958` Sin[0.8970362220226088` + Δθ] -
  17.43` Sin[10° + Δθ] - 0.7` Sin[10° + Δθ] Tan[10° + Δθ]);
x15[Δθ_] = -Csc[0.9040245405308613` + Δθ]
  (0.7` Sec[15° + Δθ] + 4.880324857078182` Sin[0.9040245405308613` + Δθ] -
  17.43` Sin[15° + Δθ] - 0.7` Sin[15° + Δθ] Tan[15° + Δθ]);
x20[Δθ_] = -Csc[0.9110128590391138` + Δθ]
  (0.7` Sec[20° + Δθ] + 6.712389112999929` Sin[0.9110128590391138` + Δθ] -
  17.43` Sin[20° + Δθ] - 0.7` Sin[20° + Δθ] Tan[20° + Δθ]);

Plot[{x05[Δθ], x10[Δθ], x15[Δθ], x20[Δθ]}, {Δθ, -2°, 2°},
  TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 30}, AxesLabel → {"Δθ", "Δx"},
  Ticks → {{-2°, 2°}, Range[-0.8, 0.8, 0.4]}, PlotRange → {-0.8, 0.8},
  PlotLegend → {"θ=5°", "θ=10°", "θ=15°", "θ=20°"},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]}, {RGBColor[0, 0, 1]},
  {RGBColor[1, 0, 1]}}, LegendPosition → {1.0, -.7},
  AxesStyle → {Thickness[0.01]}]

```

附錄二

像差作圖的程式碼

```

<< Graphics`Legend`
ApertureRadius = 0.35;

f[ρ_] = HalfWidth - 0.7` h m - Csc[θ1[ρ] + 2 θv Ceiling[ $\frac{90^\circ - \theta1[\rho] - \theta c}{2 \theta v}$ ]]
  (-b[ρ] Sec[θ1[ρ]] + Sin[θ1[ρ]] (L2 + b[ρ] Tan[θ1[ρ]]));

fp = 0.7;
b1 = ApertureRadius - ApertureRadius * ρ;
h1 = 2 * ApertureRadius - b1;
θ11 = ArcSin[(ApertureRadius * ρ - fp * h) / (n Sqrt[d^2 + (ApertureRadius * ρ - fp * h)^2])];
θ1[ρ_ /; ArcSin[ $\frac{\text{Sin}[\text{ArcTan}[\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * \text{h}}{\text{d}}]]}{\text{n}}$ ] ≥ ArcTan[ $\frac{\text{b1}}{\text{L2}}$ ]] := θ11;
θ1[ρ_ /; ArcSin[ $\frac{\text{Sin}[\text{ArcTan}[\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * \text{h}}{\text{d}}]]}{\text{n}}$ ] < ArcTan[ $\frac{\text{b1}}{\text{L2}}$ ]] := 2 * θv - θ11;
b[ρ_ /; ArcSin[ $\frac{\text{Sin}[\text{ArcTan}[\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * \text{h}}{\text{d}}]]}{\text{n}}$ ] ≥ ArcTan[ $\frac{\text{b1}}{\text{L2}}$ ]] := b1;
b[ρ_ /; ArcSin[ $\frac{\text{Sin}[\text{ArcTan}[\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * \text{h}}{\text{d}}]]}{\text{n}}$ ] < ArcTan[ $\frac{\text{b1}}{\text{L2}}$ ]] :=
  b1 +  $\frac{\text{h1}}{\text{Tan}[\theta v] - \text{Tan}[\theta 11]} (\text{Tan}[2 * \theta v - \theta 11] - \text{Tan}[\theta 11])$ ;
h = 0.2;
m =  $\frac{\text{HalfWidth}}{\text{h}}$ ;
d = 1;
n = 1.51872;
L2 = 17.43;
HalfWidth = 3.4315;
θc = ArcSin[1/n];
θv = ArcTan[2 * ApertureRadius / L2];
Plot[f[ρ], {ρ, -1, 1.0}, TextStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 25},
  AxesLabel -> {"ρ", "total aberration"}, Ticks -> {{-1, 0, 1}, Range[-9, 4, 5]},
  PlotRange -> {-9, 4}]

```

附錄三

計算暗帶位置的程式碼

```
ApertureRadius = 0.35;  
b = 0.00000000000001;  
n = 1.49309; (*壓克力*)  
L2 = 17.43;  
ec = ArcSin[1/n];  
ev = ArcTan[2*ApertureRadius/L2];  
For[i = 1, i < 11, i++,  
  
  m = 2*i;  
  
  x1 =  $\frac{1}{\text{Cos}[ec]}$  ((L2 + b*Cot[ec + m*ev]) * Cos[ec + m*ev] - b*Csc[ec + m*ev]);  
  x1b = ((L2 + b*Cot[ec + m*ev]) * Cos[ec + m*ev] - b*Csc[ec + m*ev]) / Cos[ec - 2*ev];  
  
  Print["m=", m];  
  Print["e(deg)=",  $\frac{(\frac{\pi}{2} - ec - m*ev) * 180}{\pi}$ ];  
  Print["L2-x1=", L2 - x1];  
  Print["L2-x1b=", L2 - x1b];  
  Print["black band width=", x1 - x1b];  
]
```



附錄四

像差對頂角變化作圖的程式碼

```

<< Graphics Legend

fp = -0.7;
ρ = 0.0;

f[ρ_, θv_] =
  HalfWidth - fp h m - Csc[θ1[ρ, θv] + 2 θv Ceiling[ $\frac{90^\circ - \theta1[\rho, \theta v] - \theta c}{2 \theta v}$ ]]
  (-b[ρ, θv] Sec[θ1[ρ, θv]] + Sin[θ1[ρ, θv]] (L2 + b[ρ, θv] Tan[θ1[ρ, θv]]));

b1 = ApertureRadius - ApertureRadius * ρ;
h1 = 2 * ApertureRadius - b1;
θ11 = ArcSin[(ApertureRadius * ρ - fp * h) / (n * Sqrt[d^2 + (ApertureRadius * ρ - fp * h)^2])];
θ1[ρ_, θv_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] >= ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ]] :=
  θ11;
θ1[ρ_, θv_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] < ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ]] :=
  2 * θv - θ11;
b[ρ_, θv_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] >= ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ]] := b1;
b[ρ_, θv_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] < ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ]] :=
  b1 +  $\frac{h1}{\text{Tan}[\theta v] - \text{Tan}[\theta 11]}$  (Tan[2 * θv - θ11] - Tan[θ11]);

ApertureRadius = 0.35;

h = 0.2;
m =  $\frac{\text{HalfWidth}}{h}$ ;
d = 1;
n = 1.49309; (* 壓克力 *)
L2 = 17.43;
HalfWidth = 3.4315;
θc = ArcSin[1/n];
(* θv - ArcTan[2 * ApertureRadius / L2]; *)
Plot[f[ρ, θv], {θv, 1°, 6°}, TextStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 25},
  AxesLabel -> {"θv", "total aberration"}, Ticks -> {{2°, 4°, 6°}, Range[-5, 0, 2]},
  PlotRange -> {-5, 0}, AxesStyle -> {Thickness[0.007]}, AxesOrigin -> {1°, -5}]

```

附錄五

像差對折射率變化作圖的程式碼

```

<< Graphics`Legend`

fp = 0.7;
ρ = 0.0;
θc[n_] = ArcSin[1/n];

f[ρ_, n_] = HalfWidth - fp h m - Csc[θ1[ρ, n] + 2 θv Ceiling[ $\frac{90^\circ - \theta1[\rho, n] - \theta c[n]}{2 \theta v}$ ]]
  (-b[ρ, n] Sec[θ1[ρ, n]] + Sin[θ1[ρ, n]] (L2 + b[ρ, n] Tan[θ1[ρ, n]]));

|
b1 = ApertureRadius - ApertureRadius * ρ;
h1 = 2 * ApertureRadius - b1;
θ11 = ArcSin[(ApertureRadius * ρ - fp * h) / (n Sqrt[d^2 + (ApertureRadius * ρ - fp * h)^2])];
θ1[ρ_, n_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] ≥ ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ] := θ11;
θ1[ρ_, n_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] < ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ] := 2 * θv - θ11;
b[ρ_, n_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] ≥ ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ] := b1;
b[ρ_, n_] /; ArcSin[ $\frac{1}{n}$  Sin[ArcTan[ $\frac{\text{ApertureRadius} * \rho - \text{fp} * h}{d}$ ]]] < ArcTan[ $\frac{b1}{L2}$ ] :=
  b1 +  $\frac{h1}{\text{Tan}[\theta v] - \text{Tan}[\theta 11]}$  (Tan[2 * θv - θ11] - Tan[θ11]);

ApertureRadius = 0.35;

h = 0.2;
m =  $\frac{\text{HalfWidth}}{h}$ ;
d = 1;

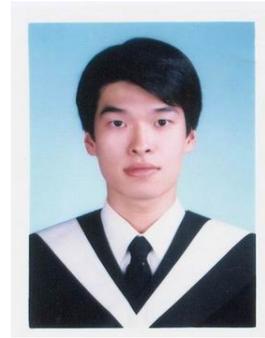
L2 = 17.43;
HalfWidth = 3.4315;

θv = ArcTan[2 * ApertureRadius / L2];
Plot[f[ρ, n], {n, 1.45, 1.55}, TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 25},
  AxesLabel → {"refraction index", "total aberration"},
  Ticks → {{1.46, 1.48, 1.5, 1.52, 1.54}, Range[-1.75, -1.4, 0.1]}, PlotRange → {-1.75, -1.4},
  AxesStyle → {Thickness[0.007]}]

```

作者簡歷

本論文作者：鍾森年 (Sen-Nien Chung)



台灣省台北市人。畢業於建國中學。2003 年取得成功大學物理學系學士學位及電機工程學系學士學位。2005 年於交通大學光電工程研究所取得碩士學位。

研究專長為光學設計。

會議論文：

1. Sen-Nien Chung, Yi-Kai Cheng, Jyh-Long Chern, Ming-Der Chou, Shih-Min Wu and Chi-Neng Mo, "Aberration analysis of an ultra-thin wedge-plate display," Proceeding of OPT (Optics and Photonics Taiwan), 2004.
2. Ming-Der Chou, Shih-Min Wu, Chi-Neng Mo, Sen-Nien Chung, Yi-Kai Cheng, and Jyh-Long Chern, "Aberration analysis of an ultra-thin wedge-plate display," SID, 2005.