

國立交通大學

光電工程研究所

數值分析簡式橢偏儀中的偏光片
及析光片之校正及更正



Numerical correction for the azimuth deviation
of polarizer and analyzer in PSA ellipsometry

研究生：林奕德

指導教授：趙于飛

中華民國九十四年七月

數值分析簡式橢偏儀中的偏光片
及析光片之校正及更正

Numerical correction for the azimuth deviation of
polarizer and analyzer in PSA ellipsometry

研究生：林奕德

Student：Yi-De Lin

指導教授：趙于飛

Adviser：Dr. Yu-Faye Chao



A Thesis
Submitted to Institute of Electro-Optical
Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of
Master
On
Electro-Optical Engineering
July 2005
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年七月

誌謝

兩年來的研究所生活讓我學習到許多事物，包括書本中知識、實驗精神以及如何去解決未知事物。

感謝趙于飛老師兩年來給我的指導以及提供我良好的研究環境，使我的碩士論文得以順利完成。而每當我碰到書上的問提或是物理觀念不清楚時，可經由跟學長及同學的討論幫助我解決問題、釐清觀念。至於實過程中，李康源學長的教導與討論，讓我在實驗的技巧有很大的幫助。至於對我幫助最大的當然是同學，無論是心情不好或是課業問題、實驗問題，你們都會幫助我。

最後僅將本論文獻給我的父母、家人，沒有你們的協助、關心，我是不可能完成碩士學位。



數值分析簡式橢圓偏儀中的偏光片 及析光片之校正及更正

學生：林奕德

指導教授：趙于飛

國立交通大學光電工程研究所

摘要

本文將在簡式橢圓偏光儀 (Polarizer-Sample-Analyzer ellipsometer, PSA) 架構下介紹新的數值計算法，此新法可量測樣品之橢圓偏光參數 (Ψ, Δ)、偏光片和析光片的方位角誤差 (α, β)。本文將證明此新法只需量測六個光強度，即可推算橢圓偏光參數、偏光片和析光片的方位角誤差。並用所測得之方位角誤差更正偏光片及析光片原點，修正樣品之橢圓偏光參數，進而推算薄膜的厚度和入射角。我們僅用了六個光強度，即可校正橢圓偏光系統；並修正樣品之橢圓偏光參數。此數值計算法可求得較佳的薄膜光學參數，不但節省了量測的時間，並提高了其精確度。

Numerical correction for the azimuth deviation of polarizer and analyzer in PSA ellipsometry

student : Yi-De Lin

Advisors : Dr. Y. F. Chao

Institute of Electro-Optical
National Chiao Tung University

Abstract

This work presents a novel technique to determine the ellipsometric parameters (Ψ, Δ) and the azimuth deviations of the polarizer and analyzer (α, β) in a polarizer-sample-analyzer ellipsometer. We will prove that this technique only needs six intensity measurements to extract the ellipsometric parameters and the azimuth deviations. The six intensity measurements is to perform two sets of this three-intensity measurement with the polarizer's azimuth at 45° and -45° , respectively, we can obtain a set of ellipsometric parameters, which are free from the azimuth deviations of polarizer and analyzer. The ellipsometric parameters can be used to deduce the thickness of the thin film and incident angle. By this method, we can get the optimized parameters of the thin film, reduce the time of measurement, and raise its accuracy.

目 錄

第一章 序論	1
第二章 基本原理	
2.1 光波的電場理論與橢圓偏極態理論	4
2.2 史脫克參數 (Stokes Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)	7
2.3 橢圓特性參數 (Ψ, Δ) 之定義	9
2.4 反射光之史脫克參數 (Stokes Parameter)與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)	13
2.5 簡式橢偏儀 (PSA : Polarizer Sample Analyzer) 求橢圓偏光參	15
2.6 考慮偏光片及析光片方位角誤差的影響	19
2.7 數值模擬	25
第三章 實驗結果	
3.1 實驗裝置及規格	26
3.2 實驗步驟	27
3.3 校正偏光片和析光方方位角原點	28
3.4 探討方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響	30
3.5 量測入射角及樣品厚度	35
3.6 量測傾斜角	37
第四章 結論	39
參考文獻	
附錄 A	40
附錄 B	42
附錄 C	44
附錄 D	47
附錄 E	48
附錄 F	51

圖目錄

圖 1-1：光強度相對於析光片方位角之分布圖	2
圖 1-2：流程圖	2
圖 2-1：橢圓偏振光	5
圖 2-2：線性偏振光	6
圖 2-3：圓偏振光	6
圖 2-4：單次反射	10
圖 2-5：多次反射	10
圖 2-6：光程一	10
圖 2-7：光程二	10
圖 2-8：橢圓偏振光	16
圖 2-9：方位角誤差和 Ψ 的關係(方法一)	25
圖 2-10：方位角誤差和 Δ 的關係(方法一)	25
圖 2-11：方位角誤差和 Ψ 的關係(方法二)	25
圖 2-12：方位角誤差和 Δ 的關係(方法二)	25
圖 3-1：簡式橢偏儀系統裝置圖	26
圖 3-2： α 和析光片偏移量的關係	32
圖 3-3： β 和析光片偏移量的關係	32
圖 3-4： Δ 和析光片偏移量的關係	33
圖 3-5： Ψ 和析光片偏移量的關係	33
圖 3-6： α 和偏光片偏移量的關係	33
圖 3-7： β 和偏光片偏移量的關係	33
圖 3-8： Δ 和偏光片偏移量的關係	33
圖 3-9： Ψ 和偏光片偏移量的關係	33
圖 3-10：入射角和厚度的關係	36
圖 3-11： Δ 和入射角的關係	36
圖 3-12： Ψ 和入射角的關係	36
圖 3-13：樣品傾斜圖	38
圖 F-1：傾斜圖	51

表 目 錄

表一：定義參數·····	2
表二：未校正時測得之橢圓偏光參數·····	28
表三：已校正時測得之橢圓偏光參數·····	28
表四：未校正時測得之方位角誤差·····	29
表五：已校正時測得之方位角誤差·····	29
表六：析光片偏移量和各參數的關係·····	31
表七：偏光片偏移量和各參數的關係·····	31
表八：不同入射角之實驗結果·····	35
表九：實驗結果·····	37
表十：由 $\delta\alpha$ 和入射角計算斜傾角·····	38
表十一：由 $\delta\beta$ 和入射角計算斜傾角·····	38



第一章 序論

當一道光入射至物體表面所產生反射光的偏振態 (polarized state) 決定於物體的光學特性和入射光的偏振態 [1][2]；因此可借由量測入射光、反射光的偏振態來推測物體的光學特性 (如：折射率、吸收率、厚度等)，這種量測方法稱為橢圓偏光術 (ellipsometry)，運用此技術所發展出來的儀器為橢圓儀 (ellipsometer)。

橢圓儀可說是與干涉儀精密度相當的一種測量儀器，橢圓儀它可量測材料的厚度、折射率、吸收率等。根據運作原理的不同，橢圓儀可以分為歸零式橢圓儀 (nulling ellipsometer) 和亮度式橢圓儀 (photometric ellipsometer)。歸零式橢圓儀發展較早，所以市面上所購得的多為此型，由於須尋找最暗點故需要有一個極靈敏的偵測器。而 Meyer et. Al. [3] 測量析光片各個方位角下的反射光強度分布，並利用最小平方法來推算物質之光學特性。趙于飛教授 [4] 僅將析光片轉動至三個角度，量測該角度下的光強度即可推算出橢圓偏光參數，並降低了因偏光片的方位角誤差所造成的影響 [5]。本實驗室陳居仁 [6] 利用擴束系統和電子耦合偵測器 (CCD) 製成二維影像橢圓偏光儀。傳統的橢圓偏光儀組成元件主要為偏光片 (Polarizer)、補波片 (Compensator)、待測樣品 (Sample) 和析光片 (Analyzer)，由於本文實驗架構並沒有補波片，故稱為簡式橢圓偏光儀 (Polarizer Sample Analyzer ellipsometry, PSA)，此型可輕易的使用在各波長的量測上而成橢圓偏光光譜儀。

為了量測的精確，橢圓偏光儀對平面的要求非常嚴格，如果樣品表面傾斜會造成入射面和入射角的改變，其中入射角的改變會直接影響橢圓偏光參數；入射面的改變會影響偏光片和析光片的方位角

誤差，而方位角誤差會造成測得之橢圓偏光參數的誤差。本文將介紹一個新的數值計算法，此方法所測得之橢圓偏光參數和方位角誤差無關，並利用數值模擬驗證此結果。圖 1-2 為光強度相對於析光片方位角之分布圖，其中各參數定於表一。此方法只須量測六個光強度即可計算出析光片及偏光片方位角誤差和橢圓偏光參數，詳細過程如下：

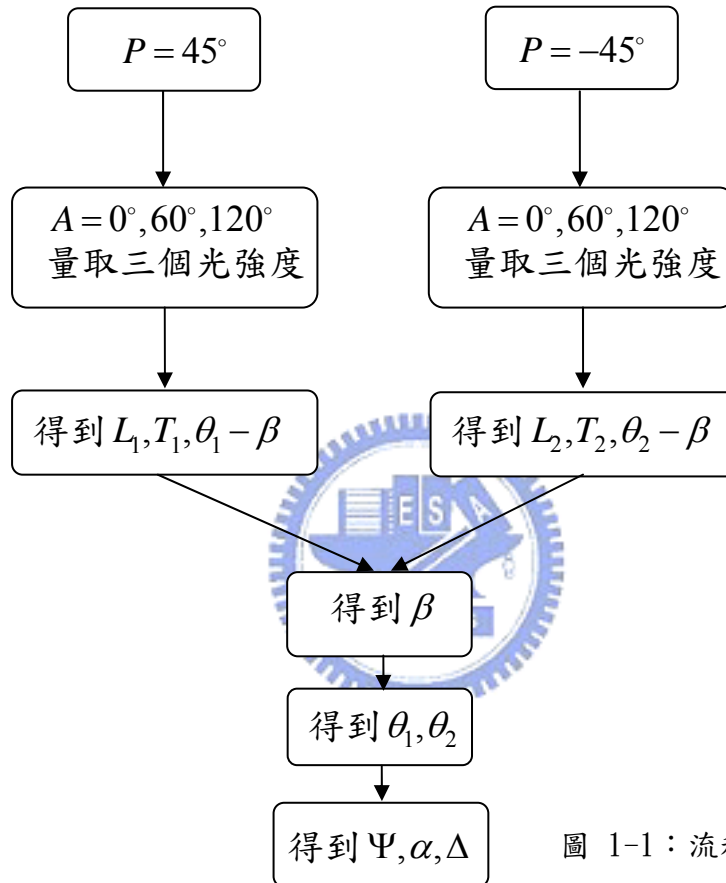


圖 1-1：流程圖

P	控制偏光片轉臺的面板度數	已知
α	偏光片方位角誤差	未知
$P+\alpha$	實際偏光片方位角	未知
A	控制析光片轉臺的面板度數	已知
β	析光片方位角誤差	未知
$A+\beta$	實際析光片方位角	未知
L	長軸的平方	未知
T	短軸的平方	未知
θ	長軸偏振角 (azimuth angle)	未知

表一：定義參數

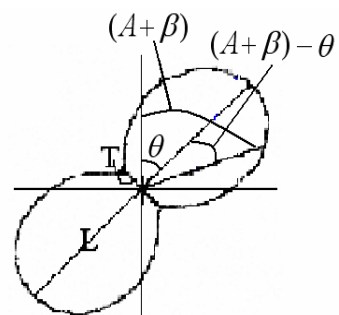


圖 1-2：光強度相對於析光片方位角之分布圖

此新法可以量測到方位角誤差並且修正樣品之橢圓偏光參數，其好處分成以下三部分討論：

一、在 2.7 節中，我們純用數值模擬橢圓偏光參數，並分析其值是否會受到方位角誤差的影響，其結果證明此法所得的橢圓偏光參數完全不受到方位角誤差的影響。所以我在 3.4 節中量測不同方位角誤差的橢圓偏光參數並且和數值模擬結果比較。

二、簡式橢偏儀架構最重要的是校正偏光片及析光片之方位角和確定入射角，由此法所測得之結果可以完全解決此問題。(1)控制偏光片及析光片轉臺的面板度數 (P, A) 為已知值，再利用量測其方位角誤差 (α, β) ，再重新設定面板度數為 (P', A') ，即 $P' = P + \alpha$ 和 $A' = A + \beta$ 。(2)由修正後的橢圓偏光參數推算薄膜的厚度和入射角，用此方法確定入射角。

三、為了瞭解面的傾斜狀態，我們故意將樣品表面傾斜一固定角並分析其造成入射面和入射角變化，證明可由入射角和入射面改變量推知傾斜角。

第二章 原理

2.1 光波的電場理論與橢圓偏極態理論

光波實質上就是電磁波，完整描述光波要用到四個基本的場向量。而我們通常以光波電場的時變分布來定義光波之偏振狀。假設光波沿 z 軸方向前進，則電場之振動方向將位於 x - y 平面上，而電場可表示為

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{i} + E_y(z,t)\hat{j} \quad (2.1)$$

其中

$$E_x(z,t) = E_{ox} \cos(\omega t - \kappa z + \delta_x) \quad (2.2a)$$

$$E_y(z,t) = E_{oy} \cos(\omega t - \kappa z + \delta_y) \quad (2.2b)$$

κ : 波數 (wave number)

ω : 角頻率 (angular frequency)

δ_x : x 方向的相位

δ_y : y 方向的相位

將(2.2a)及(2.2b)兩式的三角函數展開可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} = \cos(\omega t - \kappa z) \cos(\delta_x) - \sin(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_x) \quad (2.3a)$$

$$\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}} = \cos(\omega t - \kappa z) \cos(\delta_y) - \sin(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_y) \quad (2.3b)$$

將(2.3a)及(2.3b)合併計算可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} \sin(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{oy}} \sin(\delta_x) = \cos(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.4a)$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} \cos(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{oy}} \cos(\delta_x) = \sin(\omega t - \kappa z) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.4b)$$

將(2.4a)及(2.4b)式合併可得

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\right)^2 - 2\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (2.5)$$

其中

$$\delta = \delta_x - \delta_y$$

方程式(2.5)為橢圓方程式，也就是說在任何時間點電場的傳播軌跡為橢圓形。

一般來說，橢圓的長軸和短軸並不是在 x 軸和 y 軸上；所以必須借由座標轉換才可將(2.5)式化成標準的橢圓方程式。如圖 2-1 所示，將座標 (x,y) 旋轉 θ 角，則新座標 (x',y') 為

$$E_x = E'_x \cos \theta - E'_y \sin \theta \quad (2.6a)$$

$$E_y = E'_x \sin \theta + E'_y \cos \theta \quad (2.6b)$$

將(2.6a)和(2.6b)代入(2.5)式中計算可得[1]

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

$$a^2 = E_{ox}^2 \cos^2 \theta + E_{oy}^2 \sin^2 \theta + 2E_{ox}E_{oy} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \equiv L \quad (2.8a)$$

$$b^2 = E_{ox}^2 \sin^2 \theta + E_{oy}^2 \cos^2 \theta - 2E_{ox}E_{oy} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \equiv T \quad (2.8b)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \delta}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad (2.8c)$$

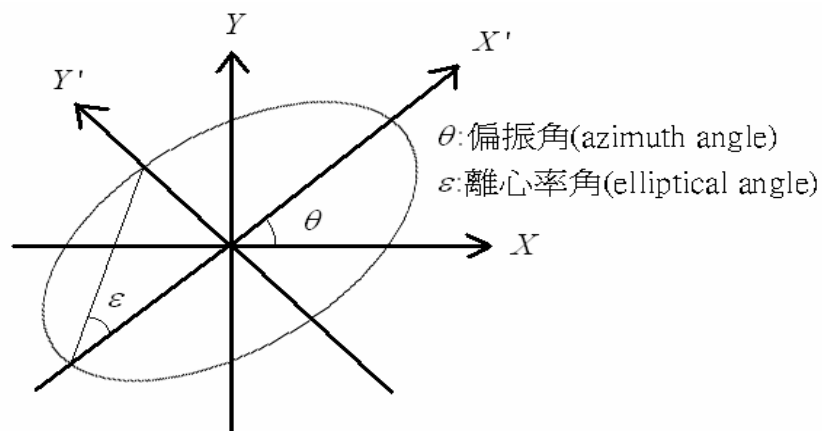


圖 2-1：橢圓偏振光

因光波在任一點之電場分布為橢圓形故稱橢圓偏振形式，接

下來介紹幾種橢圓偏極的特例：

- (1) 當 $\delta=0$ 或 $\delta=\pm\pi$ 時，電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光（圖 2-2）。
- (2) 當 $\delta=\frac{\pi}{2}$ 並且 x 與 y 方向之振幅相等時，電場在 x-y 平面的振幅永遠相同，稱為圓偏振光（圖 2-3）。

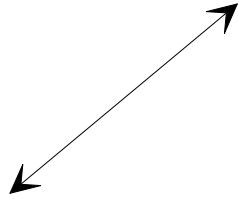


圖 2-2：線性偏振光

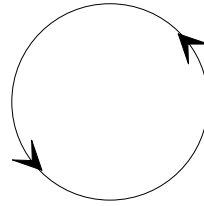


圖 2-3：圓偏振光

為了方便描述電場之偏振狀態，通常以 2 乘 1 階矩陣表示電場，此 2 乘 1 階矩陣稱為瓊斯向量 (Jones vector)。

$$|E\rangle = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\delta_x} \\ E_{oy}e^{i\delta_y} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - \kappa z)} \quad (2.9)$$

一般而言瓊斯向量只能表示純偏振光 (pure polarized light)，不能表示純非偏振光 (unpolarized light) 或部份偏振光 (partially polarized light)，但光波大部份均為部份偏振光，故須用史脫克參數來代表。

2.2 史脫克參數 (Stokes Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

史脫克參數 (Stokes Parameter) 為 4 乘 1 階矩陣

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox}^2 + E_{oy}^2 \\ E_{ox}^2 - E_{oy}^2 \\ 2E_{ox}E_{oy} \cos(\delta) \\ 2E_{ox}E_{oy} \sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

其中

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{S_3}{S_0} = \sin 2\varepsilon \Rightarrow S_3 = S_0 \sin 2\varepsilon \quad (2.12)$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \tan 2\theta \Rightarrow S_2 = S_1 \tan 2\theta \quad (2.13)$$

將(2.13)和(2.12)式代入(2.11)可得

$$S = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ p \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ p \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ p \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

其中

p : 偏極度 (degree of polarization)

I_0 : 入射光強度 (Intensity)

當 $p=1$ 時為純偏振光 (pure polarized light), 而 p 和 I_0 方程式為:

$$I_0 = E_{ox}^2 + E_{oy}^2$$

$$p = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{\frac{1}{2}}}{S_0}$$

當一入射光進入偏光元件時, 可用穆勒矩陣 (M) 表示入射光 (S) 和出射光 (S') 的關係

$$S' = M \cdot S \Rightarrow \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_0 \\ S_0 \\ S_0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

以下列舉常用到的矩陣

(1) 旋轉矩陣 (假設旋轉 ϕ 度)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & \sin 2\phi & 0 \\ 0 & -\sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

(2) 偏光片的方位角為 P 度時

$$M_{polarizer}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & -\sin 2P & 0 \\ 0 & \sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ 0 & -\sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{polarizer}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.3 橢圓特性參數 (Ψ, Δ) 之定義

根據馬克斯威爾方程式 (Maxwell equations) 和介面條件 (Boundary conditions) 可導出介質表面的反射係數及穿透係數。

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_0 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1} \quad (2.18a)$$

$$r_s = \frac{n_0 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_1}{n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1} \quad (2.18b)$$

$$t_p = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1} \quad (2.18c)$$

$$t_s = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1} \quad (2.18d)$$

其中

r_p : 平行入射面方向之反射係數

r_s : 垂直入射面方向之反射係數

t_p : 平行入射面方向之穿透係數

t_s : 垂直入射面方向之穿透係數

n_0 : 入射前介質之折射率

n_1 : 待測物之折射率

θ_0 : 入射角

θ_1 : 折射角

定義

$$\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{|r_p|}{|r_s|} e^{i(\delta_p - \delta_s)} \quad (2.19)$$

$$r_p = |r_p| e^{i\delta_p}, \quad r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$$

由前式可得：

$$\tan \Psi = \frac{|r_p|}{|r_s|}, \quad \Delta = \delta_p - \delta_s$$

$\tan \Psi$ 為反射光在平行入射面與垂直入射面之振幅比值

Δ 為反射光在平行入射面與垂直入射面之相位差

這兩參數被命名為橢圓偏光參數 (ellipsometric parameters)，橢圓儀所能測得的即為此參數，如何藉此參數得到樣品的光學常數則須了解各個光學常數 (例如：入射角、樣品的折射率、樣品的厚度... 等等) 對於參數的影響，接下來介紹兩種模式：

(1) 塊狀物 (bulk medium)：單次反射型態 (如圖 2-4)

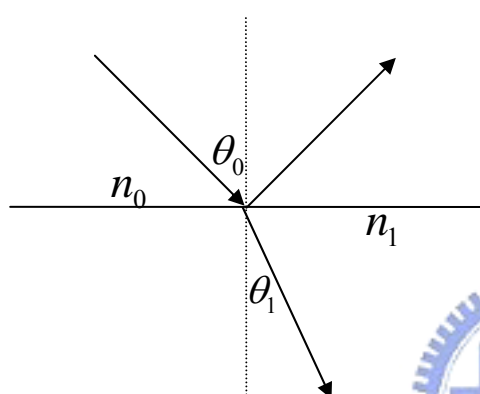
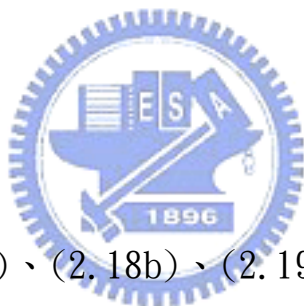


圖 2-4：單次反射



由方程式(2.18a)、(2.18b)、(2.19)可以知道橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 與物理參數 (n_0, n_1, θ_0) 之函數關係。

(2) 薄膜型式 (thin film)：多次反射型態 (如圖 2-5)

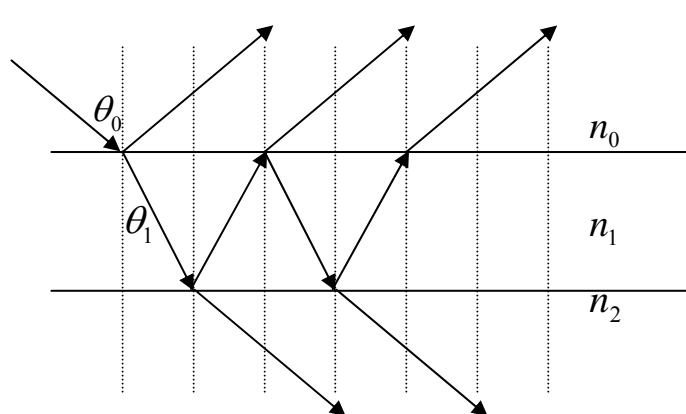


圖 2-5：多次反射

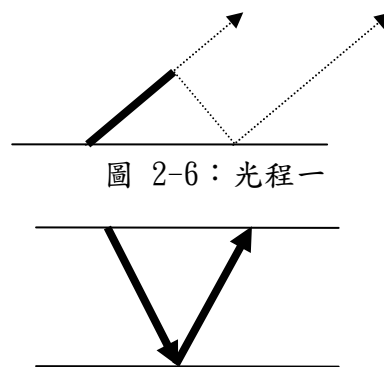


圖 2-6：光程一

圖 2-7：光程二

由圖 2-5 可以了解反射光是由很多光干涉出來的，假設第一道反射光和第二道反射光的相位差為 2γ ，同理第二道反射光和第三

道反射光的相位差也為 2γ ，所以第 n 道反射光和第 $n+1$ 道反射光的相位差都為 2γ 。則反射係數為：

$$r_p = r_{01p} + t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}r_{12p}^2e^{-i4\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}^2r_{12p}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.20a)$$

$$r_s = r_{01s} + t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}r_{12s}^2e^{-i4\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}^2r_{12s}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.20b)$$

其中

$$r_{ijp} = \frac{n_j \cos \theta_i - n_i \cos \theta_j}{n_j \cos \theta_i + n_i \cos \theta_j}$$

$$r_{ijs} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_j \cos \theta_j}{n_i \cos \theta_i + n_j \cos \theta_j}$$

$$t_{ijp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_j \cos \theta_i + n_i \cos \theta_j}$$

$$t_{ijs} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_j \cos \theta_j}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}[(\text{圖2-6的光程}) - (\text{圖2-7的光程})]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2dn_1}{\cos \theta_1} \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2dn_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0}{\cos \theta_1} \frac{2\pi}{\lambda} \right) = \frac{d2\pi}{\cos \theta_1 \lambda} (n_1 - \sin \theta_1 \sin \theta_0 n_0)$$

$$= \frac{d2\pi}{\cos \theta_1 \lambda} (n_1 - n_1 \sin^2 \theta_1) = \frac{2d\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_1 \quad (2.21)$$

d ：待測物厚度

λ ：雷射光的波長

r_{ijp} ：光線從介質 i 入射到介質 j 並且平行入射面方向之反射係數

r_{ijs} ：光線從介質 i 入射到介質 j 並且垂直入射面方向之反射係數

t_{ijp} ：光線從介質 i 入射到介質 j 並且平行入射面方向之穿透係數

t_{ijs} ：光線從介質 i 入射到介質 j 並且垂直入射面方向之穿透係數

方程式(2.20a)和(2.20b)是等比級數和，所以可簡化為

$$r_p = r_{01p} + \frac{t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma}}{1 - r_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma}}$$

$$r_s = r_{01s} + \frac{t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma}}{1 - r_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma}}$$

又因

$$r_{10} = -r_{10} \quad , \quad t_{01}t_{10} = 1 - r_{01}^2$$

所以

$$\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{r_{01p} + r_{12p}e^{-i2\gamma}}{1 + r_{01p}r_{12p}e^{-i2\gamma}} \frac{1 + r_{01s}r_{12s}e^{-i2\gamma}}{r_{01s} + r_{12s}e^{-i2\gamma}} \quad (2.22)$$

由方程式(2.21)、(2.22)可知橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 與物理參數 $(n_0, n_1, n_2, \theta_0, d)$ 之函數關係。所以由實驗值 (Ψ, Δ) 和已知值 (n_0, n_1, n_2) 可求出入射角和待測物的厚度。

2.4 反射光之史脫克參數 (Stokes Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

在反射式的架構下，x 軸是平行入射面方向，y 軸是垂直入射面方向。

入射光的史脫克參數 (Stokes Parameter)

$$\begin{aligned}
 S_0 &= E_p E_p^* + E_s E_s^* \\
 S_1 &= E_p E_p^* - E_s E_s^* \\
 S_2 &= E_p E_s^* + E_s E_p^* \\
 S_3 &= i(E_p E_s^* - E_s E_p^*)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

反射光的史脫克參數 (Stokes Parameter)

$$\begin{aligned}
 S'_0 &= R_p R_p^* + R_s R_s^* \\
 S'_1 &= R_p R_p^* - R_s R_s^* \\
 S'_2 &= R_p R_s^* + R_s R_p^* \\
 S'_3 &= i(R_p R_s^* - R_s R_p^*)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$



又因 $R_s = r_s E_s$ ， $R_p = r_p E_p$

所以方程式(2.23)和(2.24)可寫成矩陣模式

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_p r_p^* + r_s r_s^* & r_p r_p^* - r_s r_s^* & 0 & 0 \\ r_p r_p^* - r_s r_s^* & r_p r_p^* + r_s r_s^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_p r_s^* + r_s r_p^* & -i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) \\ 0 & 0 & i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) & r_p r_s^* + r_s r_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

由定義 $\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s}$ 方程式(2.25)可改寫成

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{r_s r_s^*}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \Psi & -1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \Psi & 1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \Psi \cos \Delta & 2 \tan \Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \Psi \sin \Delta & 2 \tan \Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

所以一無向性待測物 (isotropic sample) 之穆勒矩陣 (Mueller

Matrix) 可表示為

$$M_{sample} = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \Psi & -1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \Psi & 1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \Psi \cos \Delta & 2 \tan \Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \Psi \sin \Delta & 2 \tan \Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$



2.5 簡式橢偏儀 (PSA : Polarizer Sample Analyzer)

求橢圓偏光參數

簡式橢偏儀架構為一入射光 (S_i) 經過偏光片 ($M_{polarizer}(P)$) 入射樣品 ($M_{sample}(\Psi, \Delta)$) 反射再經析光片 ($M_{analyzer}(A)$) 得一出射光 (S_r)；而實驗時只能量測到光強度，所以必須了解光強度和各參數 (Ψ, Δ, P, A) 的函數關係，我以兩方面來探討此問題：

(1) 史脫克參數 (Stokes Parameter) 第一項就是光強度，所以只須利用前面所提到的方程式(2.17)及(2.27)即可得到關係式。則矩陣乘積為：

$$S_r = M_{analyzer}(A)M_{sample}(\Psi, \Delta)M_{polarizer}(P)S_i$$

$$= \frac{I_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \frac{1}{2} \sin 4P & 0 \\ \sin 2P & \frac{1}{2} \sin 4P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \Psi & -1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \Psi & 1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \Psi \cos \Delta & 2 \tan \Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \Psi \sin \Delta & 2 \tan \Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2P \\ \sin 2P \\ 0 \end{bmatrix}$$

則 S_r 的第一項為：

$$I = \frac{I_0}{4} (\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A) \quad (2.28)$$

$$\rightarrow I = I_0 (\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A)$$

方程式(2.28)為光強度和各參數的函數關係。

(2) 以偏振態的觀念來探討此問題，當入射光經過偏光片時偏振態為線偏振，經樣片反射後為橢圓偏振，再經析光片後偏振態為線偏振。

假設橢圓偏振的圖形為圖 2-8，而析光片的穿透軸和橢圓交在 B 點

，則測量到的光強度為距離 OB 的平方，數學式子為：

$$I = a^2 \cos^2(\theta - A) + b^2 \sin^2(\theta - A) = L \cos^2(A - \theta) + T \sin^2(A - \theta) \quad (2.29)$$

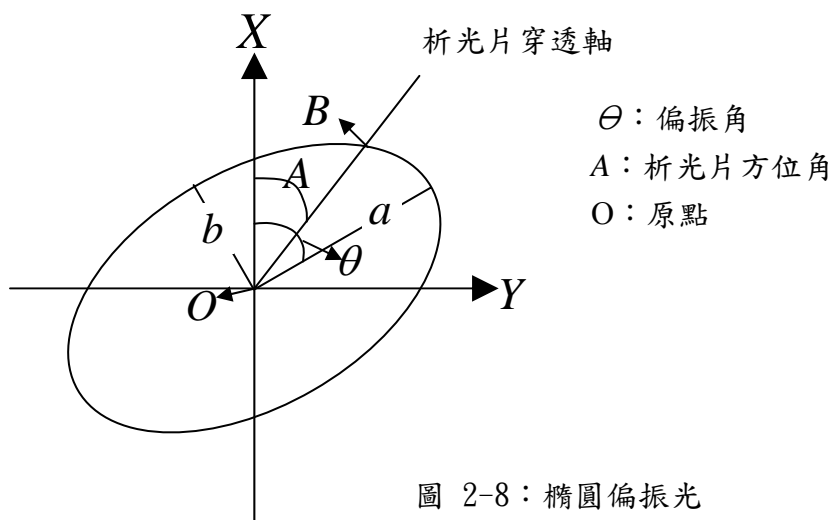


圖 2-8：橢圓偏振光

由定義

$$\tan \Psi = \frac{|r_p|}{|r_s|} \rightarrow \tan \Psi |r_s| = |r_p| \rightarrow \tan \Psi \frac{E'_{oy}}{E_{oy}} = \frac{E'_{ox}}{E_{ox}} \quad (2.30)$$

其中 (E'_{ox}, E'_{oy}) 為經樣品反射後的狀態，而 (E_{ox}, E_{oy}) 為經過偏光片後的狀態。假設偏光片為良好的偏振片則 $(E_{ox} = \cos P, E_{oy} = \sin P)$

，方程式(2.30)可改寫成：

$$\tan \Psi \frac{E'_{oy}}{\sin P} = \frac{E'_{ox}}{\cos P} \rightarrow \frac{\tan \Psi \cos P}{\sin P} = \frac{E'_{ox}}{E'_{oy}} \quad (2.31)$$

由方程式(2.31)可以定：

$$E'_{ox} = \sqrt{I_0} \tan \Psi \cos P, E'_{oy} = \sqrt{I_0} \sin P \quad (2.32)$$

由方程式(2.8a)、(2.8b)和(2.32)可得

$$L = I_0 (\tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 \theta + \sin^2 P \sin^2 \theta + 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (2.33a)$$

$$T = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin^2 \theta + \sin^2 P \cos^2 \theta - 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (2.33b)$$

方程式(2.29)中多了一個參數 (偏振角 θ)，我們必須找出 θ 和其他參數 (Ψ, Δ, P, A) 的函數關係。當 $A = \theta$ 時，光強度 (I) 為極值，也就是說光強度對 A 微分一次後令 $A = \theta$ 答案為零，數學式表示為：

$$\left. \frac{\partial I(A, P)}{\partial A} \right|_{A=\theta} = 0 \quad (2.34)$$

把方程式(2.28)代入方程式(2.34)可得

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \tan \Psi}{\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P} = \frac{\cos \Delta \sin 2P (2 \sin \Psi \cos \Psi)}{2 \cos^2 P \sin^2 \Psi - 2 \sin^2 P \cos^2 \Psi} = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} \quad (2.35)$$

或是由方程式(2.8c)也可得到上式。方程式(2.28)和方程式(2.29)雖然數學形式不同，但是為同一個方程式(詳見附錄 A)。

接下來介紹如何量測橢圓偏光參數 (Ψ, Δ)，首先必須先改寫

方程式(2.29)為：

$$\begin{aligned} I &= a^2 \cos^2(\theta - A) + b^2 \sin^2(\theta - A) = L \cos^2(A - \theta) + T \sin^2(A - \theta) \\ \rightarrow I &= \frac{L+T}{2} \left(1 + \frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} \cos 2A + \frac{(L-T) \sin 2\theta}{L+T} \sin 2A \right) \\ \rightarrow I &= B(1 + C \cos 2A + D \sin 2A) \end{aligned} \quad (2.36)$$

上式中有 3 個未知數 (B, C, D)，故需三個不同 A 角的光強度以推知三個未知數。我是測量 A 角在 0 度、60 度和 120 度的光強度，再經數學計算即可得到 (B, C, D)，此方法稱為三點量測法。

$$B = \frac{L+T}{2} = \frac{1}{3}(I(A=0^\circ) + I(A=60^\circ) + I(A=120^\circ))$$

$$C = \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} = 2 - \frac{1}{B}(I(A=60^\circ) + I(A=120^\circ))$$

$$D = \frac{(L-T)\sin 2\theta}{L+T} = \frac{1}{\sqrt{3}B}(I(A=60^\circ) - I(A=120^\circ))$$

再利用參數 (B, C, D) 和數學推算即可得到橢圓偏光參數

(Ψ, Δ) ，把方程式(2.33a)和方程式(2.33b)代入參數 (C) 可得（詳見附錄 B）：

$$C = \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} = \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}$$

$$\rightarrow \tan^2 \Psi = \frac{1+C}{1-C} \tan^2 P \quad (2.37)$$

$$\rightarrow \Psi = \arctan \sqrt{\frac{1+C}{1-C}} \tan P \quad (2.38)$$

由方程式(2.35)和參數 (C, D) 可得

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} = \frac{D}{C}$$

$$\rightarrow \Delta = \arccos \frac{D(\cos 2P - \cos 2\Psi)}{C(\sin 2P \sin 2\Psi)} \quad (2.39)$$

在不考慮偏光片及析光片方位角誤差的情況下，偏光片方位角 (P)

為已知值，由方程式(2.38)和方程式(2.39)即可求得橢圓偏光參數。



2.6 考慮偏光片及析光片方位角誤差的影響

假設偏光片方位角誤差為 α ，而析光片方位角誤差為 β 。則

前一節所提到的光強度方程式必須改寫成：

$$I = I_0(\sin^2(P+\alpha)\sin^2(A+\beta) + \tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\cos^2(A+\beta) + 0.5\tan\Psi\cos\Delta\sin 2(P+\alpha)\sin 2(A+\beta)) \\ = L\cos^2(A+\beta-\theta) + T\sin^2(A+\beta-\theta)$$

$$\rightarrow I = \frac{L+T}{2}\left(1 + \frac{(L-T)\cos 2(\theta-\beta)}{L+T}\cos 2A + \frac{(L-T)\sin 2(\theta-\beta)}{L+T}\sin 2A\right)$$

$$\rightarrow I = B(1 + C\cos 2A + D\sin 2A)$$

其中

$$B = \frac{L+T}{2} \quad (2.40a)$$

$$C = \frac{L-T}{L+T}\cos 2(\theta-\beta) \quad (2.40b)$$

$$D = \frac{L-T}{L+T}\sin 2(\theta-\beta) \quad (2.40c)$$

$$L = I_0(\tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\cos^2\theta + \sin^2(P+\alpha)\sin^2\theta + 0.5\tan\Psi\sin 2(P+\alpha)\sin 2\theta\cos\Delta) \quad (2.41a)$$

$$T = I_0(\tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\sin^2\theta + \sin^2(P+\alpha)\cos^2\theta - 0.5\tan\Psi\sin 2(P+\alpha)\sin 2\theta\cos\Delta) \quad (2.41b)$$

當 $A+\beta=\theta$ 時，光強度 (I) 為極值，以數學表示為：

$$\left.\frac{\partial I(A,P)}{\partial A}\right|_{A+\beta=\theta} = 0 \rightarrow \tan 2\theta = \frac{\cos\Delta\sin 2(P+\alpha)\sin 2\Psi}{\cos 2(P+\alpha) - \cos 2\Psi} \quad (2.42)$$

由上面方程式知 α 會直接影響到參數 (L, T, θ)；而 β 並不會影響到參數，只會使量測到的偏振角為 $\theta-\beta$ 。方程式(2.41a)和(2.41b)有五個未知數 ($\Psi, \Delta, \alpha, \beta, I_0$)，可由相除的模式將 I_0 消去，但是兩個方程式還是不能解出四個未知數，所以必須量取不同 P 角的參數 ($L, T, \theta-\beta$)：

[1] 先定 $P=45^\circ$ 由三點量測法得參數 (B_1, C_1, D_1) ，再經數學計算可得 $(L_1, T_1, \theta_1 - \beta)$ 。

$$\theta_1 - \beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D_1}{C_1} \quad (2.43a)$$

$$L_1 = \frac{D_1 B_1}{\sin(2(\theta_1 - \beta))} + B_1 \quad (2.43b)$$

$$T_1 = 2B_1 - L_1 \quad (2.43c)$$

[2] 同理定 $P=45^\circ$ 由三點量測法得參數 (B_1, C_1, D_1) ，再經數學計算可得 $(L_2, T_2, \theta_2 - \beta)$ 。

如何從已知值 $(L_1, T_1, \theta_1 - \beta, L_2, T_2, \theta_2 - \beta)$ 解出未知數？我提出兩種方法，方法一只考慮偏光片方位角誤差，也就是假設析光片方位角誤差為零；方法二同時考慮兩個方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響。至於會介紹方法一，原因有兩個：(1) 當橢圓偏光參數為某些特殊值時，並不能同時考慮兩個方位角誤差，只能利用第一部分所提到的量測方法來降低量測誤差。(2) 可以比較兩個結果的差異。

[方法一] 假設析光片方位角誤差為零 ($\beta=0$) 和偏光片方位角誤差為 α ，所以已知值變成 $(L_1, T_1, \theta_1, L_2, T_2, \theta_2)$ ，先將方程式(2.41a)和(2.41b)代入(2.40b)可以得到：

$$C = \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} = \frac{-\sin^2(P+\alpha) + \cos^2(P+\alpha)\tan^2\Psi}{\sin^2(P+\alpha) + \cos^2(P+\alpha)\tan^2\Psi}$$

$$\rightarrow \tan^2\Psi = \frac{1+C}{1-C}\tan^2(P+\alpha) \quad (2.44)$$

將已知值代入上式：

$$\tan^2\Psi = \frac{1 + \frac{(L_1 - T_1)\cos 2\theta_1}{L_1 + T_1}}{1 - \frac{(L_1 - T_1)\cos 2\theta_1}{L_1 + T_1}} \tan^2(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + C_1}{1 - C_1} \tan^2(45^\circ + \alpha) \quad (2.45a)$$

$$\tan^2 \Psi = \frac{1 + \frac{(L_2 - T_2) \cos 2\theta_2}{L_2 + T_2}}{1 - \frac{(L_2 - T_2) \cos 2\theta_2}{L_2 + T_2}} \tan^2(-45^\circ + \alpha) = \frac{1 + C_2}{1 - C_2} \tan^2(-45^\circ + \alpha) \quad (2.45b)$$

將(2.45a)及(2.45b)合併計算可得：

$$\tan^4 \Psi = \frac{(1 + C_1)(1 + C_2)}{(1 - C_1)(1 - C_2)} \rightarrow \Psi = \arctan\left(\left(\frac{(1 + C_1)(1 + C_2)}{(1 - C_1)(1 - C_2)}\right)^{1/4}\right) \quad (2.46)$$

$$\frac{1 + C_2}{1 - C_2} \tan^2(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + C_1}{1 - C_1} \tan^2(-45^\circ + \alpha)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{(1 + C_1)(1 - C_2)}{(1 - C_1)(1 + C_2)}}}{1 + \sqrt{\frac{(1 + C_1)(1 - C_2)}{(1 - C_1)(1 + C_2)}}}\right) \quad (2.47)$$

將已知值代入(2.42)式：

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\cos \Delta \sin 2(45^\circ + \alpha) \sin 2\Psi}{\cos 2(45^\circ + \alpha) - \cos 2\Psi} \sim -\cos \Delta \tan 2\Psi \Big|_{\alpha=0} \quad (2.48a)$$

$$\tan 2\theta_2 = \frac{\cos \Delta \sin 2(-45^\circ + \alpha) \sin 2\Psi}{\cos 2(-45^\circ + \alpha) - \cos 2\Psi} \sim \cos \Delta \tan 2\Psi \Big|_{\alpha=0} \quad (2.48b)$$

其中 θ_1 為 $P=45^\circ$ 之偏振角， θ_2 為 $P=-45^\circ$ 之偏振角

由方程式(2.40b)和(2.40c)可得：

$$\tan 2(\theta_1 - \beta) = \frac{D_1}{C_1} \rightarrow \theta_1 - \beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D_1}{C_1} \quad (2.49a)$$

$$\tan 2(\theta_2 - \beta) = \frac{D_2}{C_2} \rightarrow \theta_2 - \beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D_2}{C_2} \quad (2.49b)$$

由方程式(2.48a)和(2.48b)知 $\theta_1 \sim -\theta_2$ ，而且由方程式(2.49a)和(2.49b)知可經由相減來降低誤差，所以另取參數：

$$\theta_1' = \frac{((\theta_1 - \beta) - (\theta_2 - \beta))}{2} = \frac{1}{4} (\arctan \frac{D_1}{C_1} - \arctan \frac{D_2}{C_2}) \quad (2.50)$$

由方程式(2.48a) (令 $\alpha=0$) 和(2.50)可得：

$$\tan 2\theta_1' = -\cos \Delta \tan 2\Psi \rightarrow \Delta = \arccos\left(-\frac{\tan 2\theta_1'}{\tan 2\Psi}\right) \quad (2.51)$$

上式中令 $\alpha=0$ 而不用(2.47)式所計算出來的參數 (α)，是因假設 $\beta=0$ 時對於 α 的影響是很大的，因此在計算 Δ 時不考慮 α 。

[方法二] 定析光片方位角誤差和偏光片方位角誤差為 α, β ，所以已知值為 $(L_1, T_1, \theta_1 - \beta, L_2, T_2, \theta_2 - \beta)$ ，由方程式(2.41a)、(2.41b)合併計算得：

$$\frac{(L+T)^2}{LT} = \frac{(\cot \Psi \tan(P+\alpha) + \cot(P+\alpha) \tan \Psi)^2}{\sin^2 \Delta} \quad (2.52a)$$

$$\frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} = \frac{-\sin^2(P+\alpha) + \cos^2(P+\alpha) \tan^2 \Psi}{\sin^2(P+\alpha) + \cos^2(P+\alpha) \tan^2 \Psi} = \frac{-1 + \cot^2(P+\alpha) \tan^2 \Psi}{1 + \cot^2(P+\alpha) \tan^2 \Psi} \quad (2.52b)$$

方程式(2.42)改寫成(詳見附錄 C)：

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2(P+\alpha) \sin 2\Psi}{\cos 2(P+\alpha) - \cos 2\Psi}$$

$$\rightarrow \tan^2 2\theta = \frac{4 \cos^2 \Delta}{(-\cot \Psi \tan(P+\alpha) + \cot(P+\alpha) \tan \Psi)^2} \quad (2.53)$$

方程式(2.52a)、(2.52a)和(2.53)合併化簡為(詳見附錄 C)：

$$\frac{(L-T)^2}{4LT} \sin^2 2\theta = \cot^2 \Delta$$

$$\rightarrow \frac{(L-T)^2}{4LT} \sin^2 2(\theta - \beta + \beta) = \cot^2 \Delta \quad (2.54)$$

將已知值代入上式：

$$\frac{(L_1 - T_1)^2}{4L_1 T_1} \sin^2 2(\theta_1 - \beta + \beta) = \cot^2 \Delta$$

$$\rightarrow \frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta + \beta) = \pm \cot \Delta \quad (2.55a)$$

$$\frac{(L_2 - T_2)^2}{4L_2 T_2} \sin^2 2(\theta_2 - \beta + \beta) = \cot^2 \Delta$$

$$\rightarrow \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta + \beta) = \pm \cot \Delta \quad (2.55b)$$

因為 $\theta_1 \sim -\theta_2$ ，所以(2.55a)和(2.55b)可合併成：

$$\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta + \beta) = \frac{-(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta + \beta) \quad (2.56)$$

將方程式(2.56)和差化積(詳見附錄 D)：

$$\tan 2\beta = \frac{\frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta) + \frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta)}{-\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \cos 2(\theta_1 - \beta) - \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \cos 2(\theta_2 - \beta)} \quad (2.57)$$

$$\rightarrow \beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta) + \frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta)}{-\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \cos 2(\theta_1 - \beta) - \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \cos 2(\theta_2 - \beta)} \right) \quad (2.58)$$

由方程式(2.58)和已知值 $(\theta_1 - \beta, \theta_2 - \beta)$ 可得偏振角 (θ_1, θ_2) ，再將已知值代入方程式(2.41a)、(2.41b)和(2.42)並且合併計算得：

$$\frac{(L_1 - T_1) \cos 2\theta_1}{L_1 + T_1} = \frac{-\sin^2(45^\circ + \alpha) + \cos^2(45^\circ + \alpha) \tan^2 \Psi}{\sin^2(45^\circ + \alpha) + \cos^2(45^\circ + \alpha) \tan^2 \Psi} \equiv C_1' \quad (2.59a)$$

$$\frac{(L_2 - T_2) \cos 2\theta_2}{L_2 + T_2} = \frac{-\sin^2(-45^\circ + \alpha) + \cos^2(-45^\circ + \alpha) \tan^2 \Psi}{\sin^2(-45^\circ + \alpha) + \cos^2(-45^\circ + \alpha) \tan^2 \Psi} \equiv C_2' \quad (2.59b)$$

將(2.59a)和(2.59b)合併得：

$$\tan^4 \Psi = \frac{1 + C_1'}{1 - C_1'} \frac{1 + C_2'}{1 - C_2'} \rightarrow \Psi = \arctan \left\{ \left(\frac{1 + C_1'}{1 - C_1'} \frac{1 + C_2'}{1 - C_2'} \right)^{1/4} \right\} \quad (2.60)$$

$$\frac{1 + C_2'}{1 - C_2'} \tan^2(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + C_1'}{1 - C_1'} \tan^2(-45^\circ + \alpha)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{(1 + C_1')(1 - C_2')}{(1 - C_1')(1 + C_2')}}}{1 + \sqrt{\frac{(1 + C_1')(1 - C_2')}{(1 - C_1')(1 + C_2')}}} \right) \quad (2.61)$$

再前所得參數 $(\Psi, \alpha, \beta, \theta_1)$ 代入方程式(2.42)得：

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\cos \Delta \sin 2(45^\circ + \alpha) \sin 2\Psi}{\cos 2(45^\circ + \alpha) - \cos 2\Psi}$$

$$\rightarrow \Delta = \arccos\left(\frac{\tan 2\theta_1 (\cos 2(45^\circ + \alpha) - \cos 2\Psi)}{\sin 2(45^\circ + \alpha) \sin 2\Psi}\right) \quad (2.62)$$

由方程式(2.58)、(2.60)、(2.61)和(2.62)可得橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 和方位角誤差 (α, β) 。



2.7 數值模擬

假設橢圓偏光參數為 ($\Psi=30^\circ, \Delta=140^\circ$) 和偏光片及析光片方位角誤差為 (α, β)，可模擬出 $P=45^\circ$ 的參數 ($L_1, T_1, \theta_1 - \beta$) 和 $P=-45^\circ$ 的參數 ($L_2, T_2, \theta_2 - \beta$)。由方法一可模擬出在不同方位角誤差下的橢圓偏光參數 (Ψ', Δ')，如圖 2-9、2-10；由方法二可模擬出在不同方位角誤差下的橢圓偏光參數 (Ψ'', Δ'')，如圖 2-11、2-12。

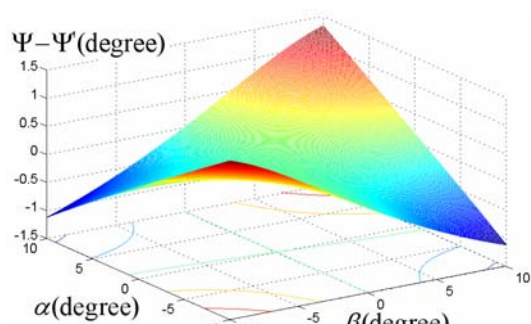


圖 2-9：方位角誤差和 Ψ 的關係
(方法一)

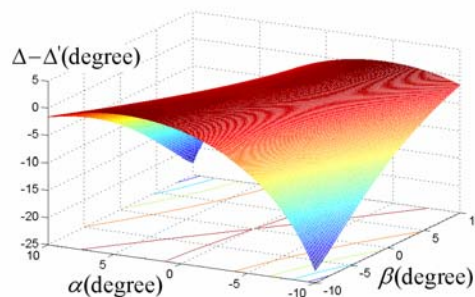


圖 2-10：方位角誤差和 Δ 的關係
(方法一)

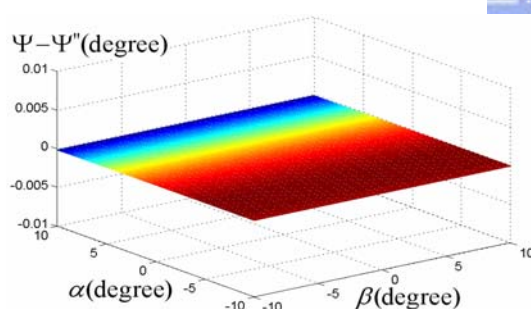


圖 2-11：方位角誤差和 Ψ 的關係
(方法二)

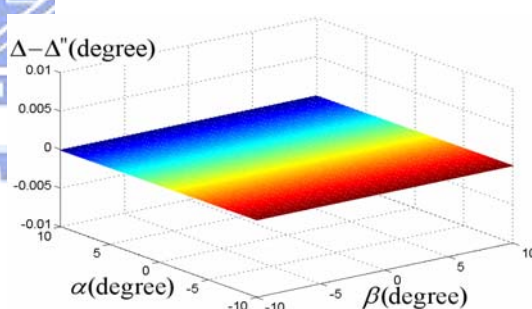


圖 2-12：方位角誤差和 Δ 的關係
(方法二)

由圖 2-11 和圖 2-12 可以看出方法二可以完全消除方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響。

第三章 實驗結果

3.1 實驗裝置及規格

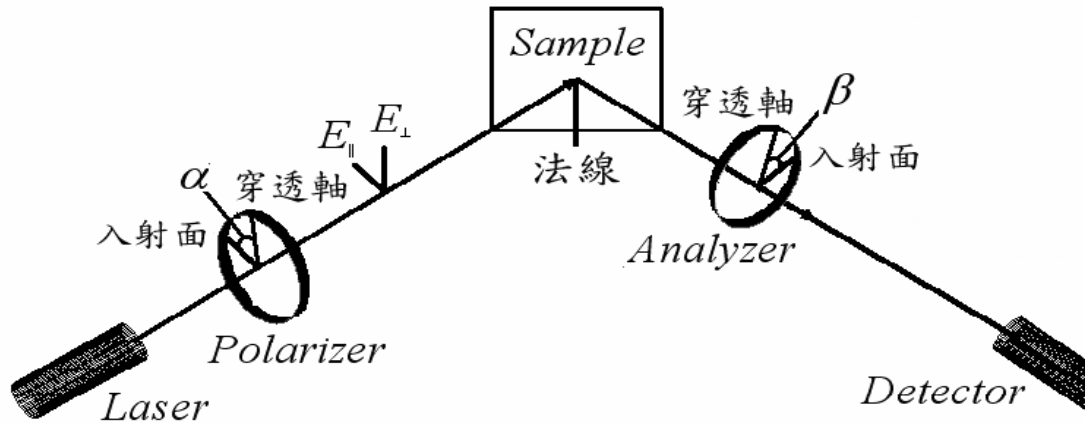


圖 3-1：簡式橢偏儀系統裝置圖

圖 3-1 為簡式橢偏儀系統裝置圖，其中偏光片方位角 (α) 是把控制偏光片轉臺的面板度數轉到零的情況；析光片方位角 (β) 是控制析光片轉臺的面板度數轉到零的情況。主要裝置規格為：

雷射 (Laser)：HeNe Laser (廠商(MELLES GRIOT)，Model：05-STP-901)

光偵測器 (Detector)：廠商(Newport)， Model：818-SL

轉臺 (Two-Axis Motion Controller)：廠商(宏惠)， Model：08THC-2

偏光片：廠商(MELLES GRIOT)， Model:03-FPG-007

3.2 實驗步驟

步驟一：偏光片方位角轉到正 45 度

步驟二：析光片方位角轉到 0 度，量取光強度(I_0)

步驟三：析光片方位角轉到 60 度，量取光強度(I_{60})

步驟四：析光片方位角轉到 120 度，量取光強度(I_{120})

由前一章方程式可得：

$$B_1 = \frac{1}{3}(I_0 + I_{60} + I_{120}), \quad C_1 = 2 - \frac{1}{B}(I_{60} + I_{120}), \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{3}B}(I_{60} - I_{120})$$

$$\theta_1 - \beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D_1}{C_1}, \quad L_1 = \frac{D_1 B_1}{\sin(2(\theta_1 - \beta))} + B_1, \quad T_1 = 2B_1 - L_1$$

步驟五：偏光片方位角轉到負 45 度

步驟六：析光片方位角轉到 0 度，量取光強度(I'_0)

步驟七：析光片方位角轉到 60 度，量取光強度(I'_{60})

步驟八：析光片方位角轉到 120 度，量取光強度(I'_{120})

由前一章方程式可得：

$$B_2 = \frac{1}{3}(I'_0 + I'_{60} + I'_{120}), \quad C_2 = 2 - \frac{1}{B}(I'_{60} + I'_{120}), \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{3}B}(I'_{60} - I'_{120})$$

$$\theta_2 - \beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D_2}{C_2}, \quad L_2 = \frac{D_2 B_2}{\sin(2(\theta_2 - \beta))} + B_2, \quad T_2 = 2B_2 - L_2$$

將量測參數代入方程式(2.58)、(2.60)、(2.61)和(2.62)可得橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 和方位角誤差 (α, β)。

3.3 校正偏光片和析光方方位角原點

實驗目的：方法二可以直接量測偏光片和析光片方位角誤差，也就是說可以明確知道穿光軸和入射面所夾的角度。因此可以利用 α 和 β 校正偏光片和析光方方位角原點。

實驗流程：由 3.2 節的實驗步驟量取 4 組數據，利用 α 和 β 重新設定偏光片和析光片方位角原點，再量取 4 組數據。

實驗結果：以下各表為樣品厚度 $1293(\text{\AA})$ SiO_2/Si 在入射角 70 度時所得各項參數。其中 Ψ_1 和 Δ_1 為假設沒有方位角誤差的情況下，並且偏光片方位角在 45 度所測得之橢圓偏光參數(利用方程式(2.38)和(2.39));同理 Ψ_2 和 Δ_2 為偏光片在-45 度所測得之橢圓偏光參數。 Ψ 和 Δ 為方法二所測得之結果。

	Ψ_1 (度)	Ψ_2 (度)	Δ_1 (度)	Δ_2 (度)	Ψ (度)	Δ (度)
1	70.4541	71.8046	83.7156	90.0729	71.1717	86.7423
2	70.4526	71.8124	83.7050	90.0913	71.1753	86.7445
3	70.4671	71.7866	83.7197	90.0859	71.1689	86.7543
4	70.4515	71.8017	83.6709	90.0903	71.1696	86.7270
平均	70.456	71.80	83.70	90.085	71.171	86.74
標準差	0.007	0.01	0.02	0.009	0.003	0.01

表二：未校正時測得之橢圓偏光參數

	Ψ_1 (度)	Ψ_2 (度)	Δ_1 (度)	Δ_2 (度)	Ψ (度)	Δ (度)
1	71.1652	71.1876	86.7115	86.7666	71.1764	86.7390
2	71.1648	71.1823	86.7166	86.7432	71.1735	86.7299
3	71.1641	71.1687	86.7139	86.7419	71.1664	86.7279
4	71.1577	71.1900	86.7149	86.7364	71.1739	86.7256
平均	71.163	71.18	86.714	86.75	71.173	86.731
標準差	0.004	0.01	0.002	0.01	0.004	0.006

表三：已校正時測得之橢圓偏光參數

	α (度)	β (度)
1	0.9933	-1.2290
2	1.0007	-1.2343
3	0.9681	-1.2310
4	0.9914	-1.2412
平均	0.99	-1.234
標準差	0.01	0.005

表四：未校正時測得之方位角誤差

	α (度)	β (度)
1	0.0174	-0.0106
2	0.0138	-0.0051
3	0.0032	-0.0054
4	0.0260	-0.0041
平均	0.015	-0.006
標準差	0.009	0.003

表五：已校正時測得之方位角誤差

結果討論：

- 1、理論上偏光片方位角在正負 45 度所測得之橢圓偏光參數是相同的，然而實際量測時是會有些差距，而這差異是有許多誤差造成的（例如：方位角誤差、光路偏差……等等）。我借由量測到的方位角誤差重新設定方位角原點可降低方位角誤差所造成的影響。可由實驗結果看出此現象，原本差距為 $\Psi_1 - \Psi_2 = -1.344^\circ$ 及 $\Delta_1 - \Delta_2 = -6.385^\circ$ 經過重新設定原點後差距為 $\Psi_1 - \Psi_2 = -0.017^\circ$ 及 $\Delta_1 - \Delta_2 = -0.036^\circ$ 。
- 2、由方法二所測得之方位角誤差重新設定方位角原點，可將偏光片方位角誤差降低到 $0.015^\circ \pm 0.009^\circ$ ，並且將析光片方位角誤差降低到 $-0.006^\circ \pm 0.003^\circ$ 。

3.4 探討方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響

實驗目的：2.6 節的數值模擬法必須忽略其他誤差，然而實驗時還是會有其他誤差，所以必須透過實驗才可了解方位角誤差和橢圓偏光參數的關係，並且比較實驗和模擬結果可以了解方位角誤差的影響性。

實驗流程：實驗分成兩部分，(1)以析光片偏移量為變數：由 3.2 節的實驗步驟量取第一組數據，並且定此數據為析光片偏移量 0 度。改變 3.2 節的實驗步驟內容，將有提到析光片方位角的度數都多加 1 度並且量取第二組數據，定此數據為析光片偏移量 1 度。同理將有提到析光片方位角的度數都減少 1 度並且量取第三組數據，定此數據為析光片偏移量-1 度。同理量取不同析光片偏移量的數據。(2)以偏光片偏移量為變數：類似第一部分的量測手法，量取不同偏光片偏移量的數據。



實驗結果：以下各表為樣品 SiO_2/Si 在入射角 70 度時所得各項參數。其中第一部分和第二部分的橢圓偏光參數有點差距，這是因為入射角不同所造成。有關入射角和橢圓偏光參數的關係在下一節有詳細的介紹。

實驗一：以析光片偏移量為變數，其中 Ψ' 和 Δ' 為方法一測得之結果； Ψ'' 和 Δ'' 為方法二測得之結果。

析光片偏 移量(度)	Ψ'' (度)	Δ'' (度)	Ψ' (度)	Δ' (度)	α (度)	β (度)
-5	17.1608	112.5795	17.6419	111.7432	-0.0089	-5.1281
-4	17.1209	112.5766	17.4430	112.0113	0.0362	-4.1880
-3	17.0952	112.5768	17.3000	112.2143	0.1577	-3.3064
-2	17.1078	112.5511	17.2130	112.3652	0.1921	-2.3502
-1	17.1124	112.6005	17.1462	112.5408	0.1742	-1.3155
0	17.1137	112.5485	17.1160	112.5453	0.1736	-0.3018
1	17.0933	112.6225	17.1022	112.6066	0.0966	0.7342
2	17.0843	112.6030	17.1327	112.5169	0.1186	1.6689
3	17.0811	112.5927	17.1998	112.3825	0.1836	2.6062
4	17.1226	112.5524	17.3334	112.1827	0.2951	3.4822
5	17.1706	112.5473	17.5106	111.9561	0.3685	4.4127
平均	17.115	112.58	17.3	112.3	0.16	
標準差	0.03	0.03	0.2	0.3	0.11	

表六：析光片偏移量和各參數的關係

實驗二：以偏光片偏移量為變數

偏光片偏 移量(度)	Ψ'' (度)	Δ'' (度)	Ψ' (度)	Δ' (度)	α (度)	β (度)
-5	17.6264	115.6010	17.5825	116.2865	-4.4602	-1.8628
-4	17.5837	115.6139	17.5588	116.0393	-3.5576	-1.8316
-3	17.5802	115.6364	17.5727	115.8668	-2.7058	-1.8038
-2	17.5434	115.6055	17.5546	115.6733	-1.7648	-1.7610
-1	17.5259	115.6235	17.5546	115.5928	-0.9158	-1.7145
0	17.5242	115.5991	17.5529	115.5090	-0.0181	-1.6897
1	17.5344	115.5540	17.5685	115.4520	0.8197	-1.6630
2	17.5242	115.5675	17.5942	115.4985	1.6820	-1.6182
3	17.4936	115.6175	17.5985	115.6287	2.5583	-1.5643
4	17.5037	115.5498	17.5841	115.6870	3.4611	-1.5475
5	17.5573	115.4588	17.6767	115.7704	4.3442	-1.5286
平均	17.54	115.583	17.58	115.7		-1.67
標準差	0.04	0.051	0.04	0.3		0.12

表七：偏光片偏移量和各參數的關係

結果討論：

1、由表六和表七可知方法二測得之參數 (Ψ'' , Δ'') 遠比方法一測得之參數 (Ψ' , Δ') 穩定，這是因為方法二可以消除方位角誤差所帶來的影響。但是上節中測得之參數 (Ψ , Δ) 又比表五和表六的參數 (Ψ'' , Δ'') 穩定，這又是什麼誤差造成的呢？我認為主要誤差是因為雷射不是垂直入射偏光片表面及析光片表面，而此誤差要分兩部分討論：(1)偏光片和析光片本身所造成的誤差，這會造成實驗一和實驗二測得之參數 (Ψ'' , Δ'') 的誤差。(2)光路經過偏光片後會有稍微偏差，會造成入射角改變和樣品上的雷射點偏移，這會造成實驗二測得之參數 (Ψ'' , Δ'') 的誤差。也因此實驗一測得之參數 (Ψ' , Δ') 會比實驗二測得之參數 (Ψ'' , Δ'') 穩定。

2、比較數值模擬和實驗結果

(1)以析光片偏移量 0 度的量測結果為參考點，模擬析光片偏移量和各參數的關係。其中 Ψ' 和 Δ' 為方法一測得之結果； Ψ'' 和 Δ'' 為方法二測得之結果。由下列各圖可以發現實驗數據和數值模擬曲線的趨勢是相同的。

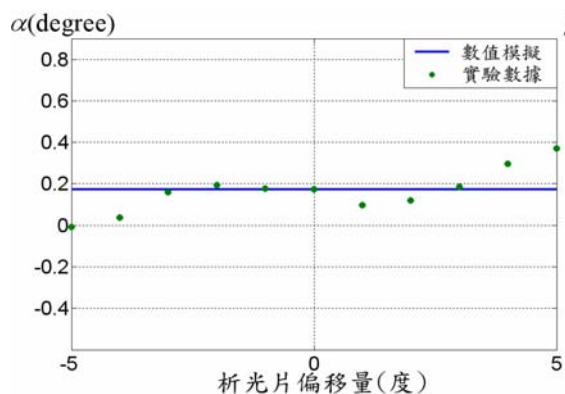


圖 3-2： α 和析光片偏移量的關係

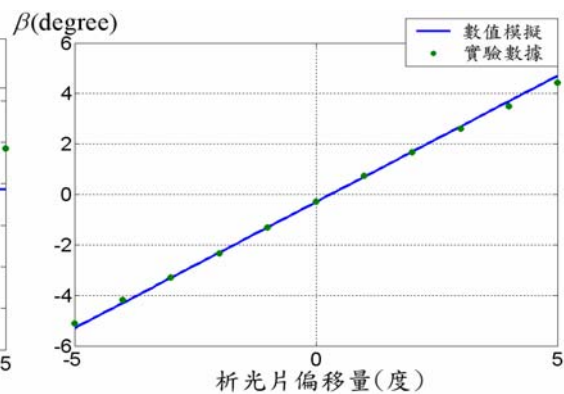


圖 3-3： β 和析光片偏移量的關係

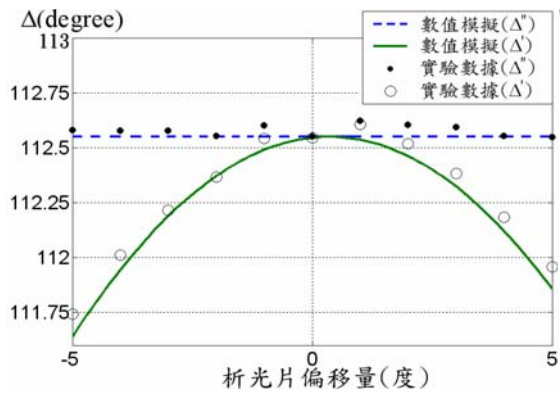


圖 3-4： Δ 和折光片偏移量的關係

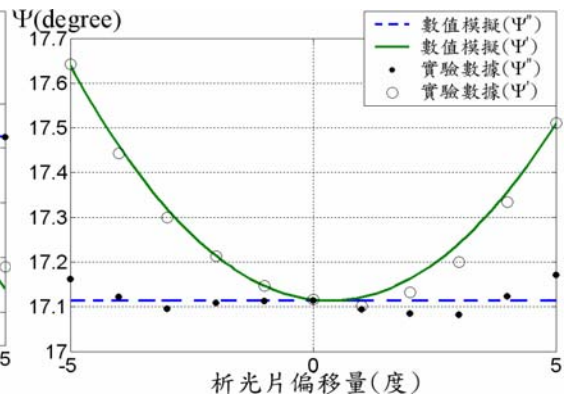


圖 3-5： Ψ 和折光片偏移量的關係

(2) 以偏光片偏移量 0 度的量測結果為參考點，模擬偏光片偏移量和各參數的關係。

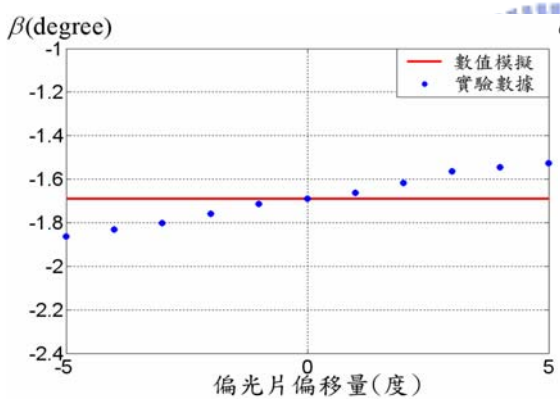


圖 3-6： β 和偏光片偏移量的關係

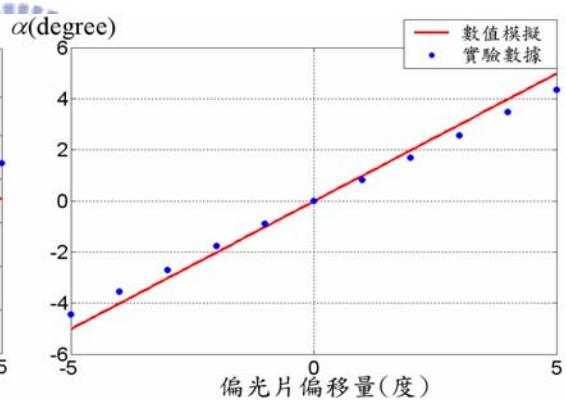


圖 3-7： α 和偏光片偏移量的關係

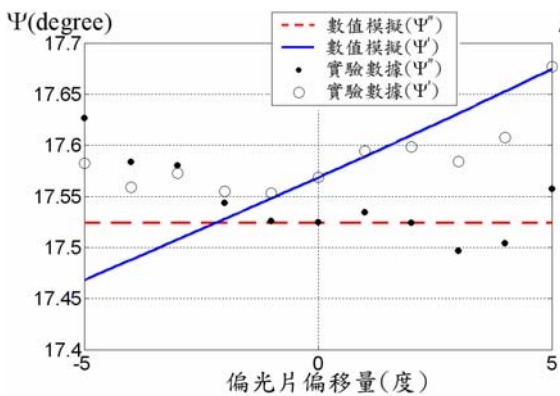


圖 3-8： Ψ 和偏光片偏移量的關係

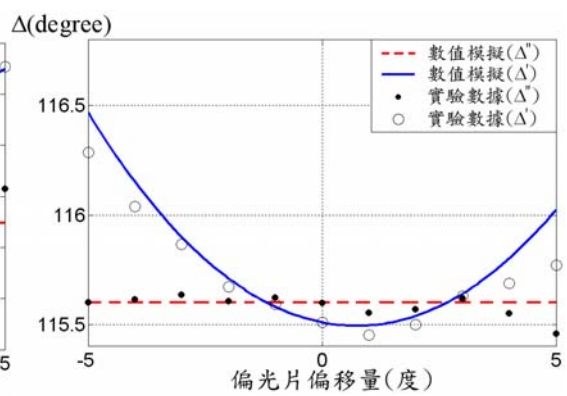


圖 3-9： Δ 和偏光片偏移量的關係

圖 3-8 中實驗數據和數值模擬曲線有明顯的差距，這是因為入射角偏移的影響力比方位角誤差大；換句話說，當 $\Psi = 17.5^\circ$ 、 $\Delta = 115^\circ$ 時 α 對於 Ψ 的影響並不明顯。所以方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響會因橢圓偏光參數而改變。



3.5 量測入射角及樣品厚度

實驗目的：入射角對於量測結果有很大的影響，所以校正入射角為重要步驟。但是我的實驗架構並不能確定入射角，所以必須量測薄膜型式之橢圓偏光參數反求出入射角和待測物厚度(詳見附錄 E)。

實驗流程：由 3.2 節的實驗步驟量取八組不同入射角的數據。

實驗結果：下表樣品為 SiO_2/Si 在不同入射角所得各項參數。

	Ψ (度)	Δ (度)	入射角(度)	厚度(\AA)
1	70.0260	103.4029	67.867	1288.94
2	69.7195	96.5476	68.856	1290.12
3	69.1331	90.0702	69.795	1290.03
4	68.2970	83.6995	70.754	1289.78
5	67.4792	77.5750	71.730	1290.03
6	66.7237	72.1578	72.635	1291.54
7	65.4994	66.4763	73.643	1290.73
8	64.3929	60.9987	74.664	1291.41
平均				1290.3
標準差				0.9

表八：不同入射角之實驗結果

結果討論：

1、理論上入射角和薄膜厚度是沒有關係，也就是說薄膜厚度不因入射角不同而改變。可是樣品表面還是會有稍微起伏，所以由薄膜厚度標準差 (0.9\AA) 知量測之可信度很高。

2、以第三組數據（入射角為 69.795 度，厚度為 1290.03 Å）模擬入射角和各參數的關係。

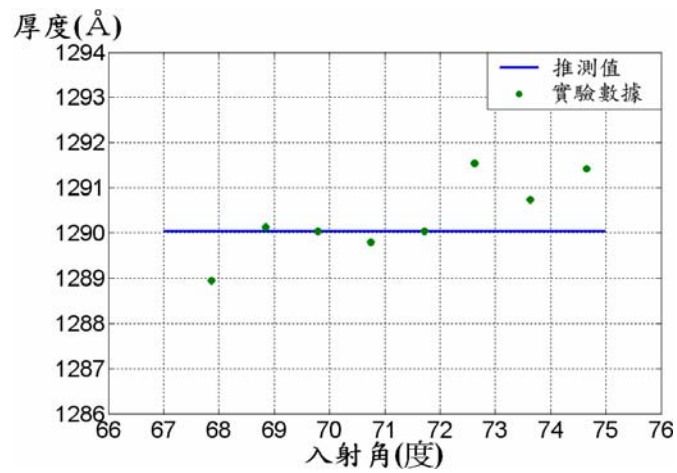


圖 3-10：入射角和厚度的關係

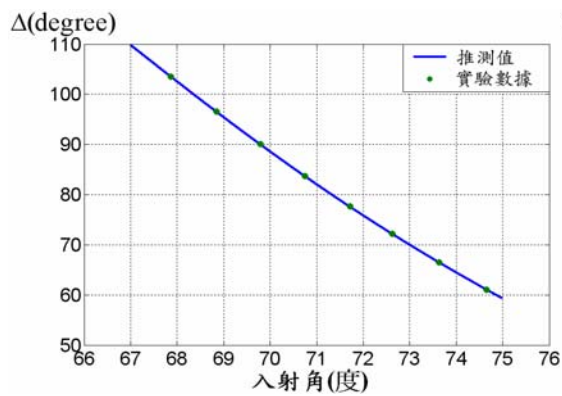


圖 3-11：Δ和入射角的關係

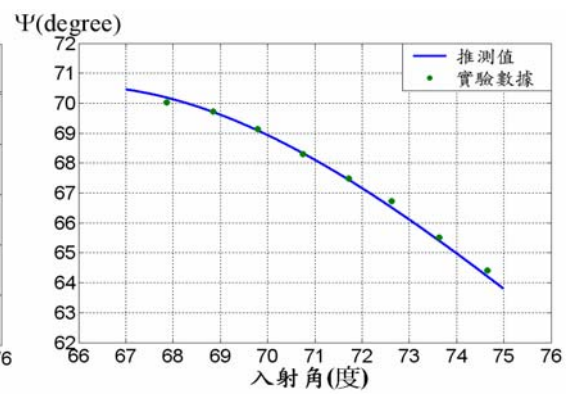


圖 3-12：Ψ和入射角的關係

3.6 測量傾斜角

實驗目的：傾斜樣品表面會造成入射面和入射角改變，反過來說可由入射角和入射面改變量推知傾斜角。本實驗目為利用實驗結果（方位角誤差和入射角）計算斜傾角。

實驗流程：先將樣品放在檯子A上面並且由3.2節的實驗量取數據（未傾斜），再將檯子B放在檯子A上面使樣品傾斜（如圖3-13）並且固定檯子B使傾斜角不變，量取檯子A在六個方向的數據（傾斜(1)~傾斜(6)）。

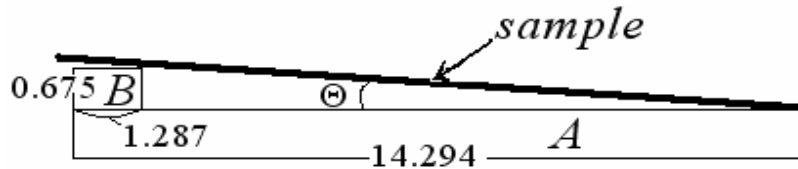


圖 3-13：樣品傾斜圖

實驗結果：實驗樣品為 SiO_2 / Si 。下表中各參數的關係為(附錄 F)：

$$\delta\alpha(1\sim 6) = |\alpha(\text{傾斜}(1\sim 6)) - \alpha(\text{未傾斜})|, \quad \delta\beta(1\sim 6) = |\beta(\text{傾斜}(1\sim 6)) - \beta(\text{未傾斜})|$$

$$\Theta_1(1\sim 6) = \arccos\left(\frac{\cos(\delta\alpha(1\sim 6)) + \cot(\text{入射角}(\text{傾斜}(1\sim 6)))\cot(\text{入射角}(\text{未傾斜}))}{\sqrt{1 + \cot^2(\text{入射角}(\text{傾斜}(1\sim 6)))}\sqrt{1 + \cot^2(\text{入射角}(\text{未傾斜}))}}\right)$$

$$\Theta_2(1\sim 6) = \arccos\left(\frac{\cos(\delta\beta(1\sim 6)) + \cot(\text{入射角}(\text{傾斜}(1\sim 6)))\cot(\text{入射角}(\text{未傾斜}))}{\sqrt{1 + \cot^2(\text{入射角}(\text{傾斜}(1\sim 6)))}\sqrt{1 + \cot^2(\text{入射角}(\text{未傾斜}))}}\right)$$

	Ψ	Δ	α	β	入射角(度)
未傾斜	24.4395	91.9878	0.1331	0.0691	70.087
傾斜(1)	24.1292	94.0222	-2.9541	-1.9990	69.793
傾斜(2)	24.6282	89.8359	-2.9192	-2.0124	70.467
傾斜(3)	23.8585	98.6140	-2.8404	-1.5887	68.974
傾斜(4)	24.5537	91.6964	3.3772	3.2448	70.101
傾斜(5)	24.6126	91.1456	3.3070	3.1275	70.193
傾斜(6)	24.9690	88.1872	3.2785	3.2070	70.688

表九：實驗結果

	入射面改變量 $\delta\alpha$ (度)	斜傾角 Θ_1 (度)
1	3.0872	2.91473
2	3.0523	2.89821
3	2.9735	2.99977
4	3.2441	3.05026
5	3.1739	2.98697
6	3.1454	3.0232
平均		2.979
標準差		0.061

表十：由 $\delta\alpha$ 和入射角計算斜傾角

	入射面改變量 $\delta\beta$ (度)	斜傾角 Θ_2 (度)
1	2.0681	1.96474
2	2.0815	1.99588
3	1.6578	1.91072
4	3.0503	2.98595
5	2.9870	2.87842
6	3.1379	3.01627
平均		2.459
標準差		0.553

表十一：由 $\delta\beta$ 和入射角計算斜傾角

結果討論：

1、 Θ_2 的標準差遠比 Θ_1 的標準差大，也就是說 Θ_1 的可信度比較高。至於這個結果是可預見的，因為改變檯子 A 的方向時必須調整析光片的位置才可使雷射光通過析光片，所以 β 的改變量除了入射面改變量還有另一個無法估計的值。

2、用螺旋測微移測量檯子 A 及檯子 B 的規格(圖 3-13)，並且計算斜傾角 $\Theta = \arctan(0.675/(14.297-1.2874)) = 2.970^\circ$ 。 Θ_1 和 Θ 最大差距為 0.08 度。

第四章 結論

在數值模擬中，我們先不考慮析光片的誤差並證明其對橢圓偏光參數是有影響，再考慮析光片的誤差並找出其誤差後，然後用以修正樣品之橢圓偏光參數，此結果可以消除方位角誤差對於橢圓偏光參數的影響。依據數值計算法，我們實際量測了一片薄膜 (SiO_2/Si) 量出的結果所推算出的薄膜的厚度 ($d=1290.3\pm 0.9 \text{ \AA}$) 與商用橢偏儀所測的值 (1293 \AA) 相吻合，且此結果為多入射角所得，由薄膜厚度的標準差可以了解量測之可信度很高，並且用此方法也可以算出入射角，可以確認所有量測的可信度。

由於我們可以在同一套量測中推算出入射角，在研究傾斜樣品所造成的入射面和入射角改變，我們利用方位角誤差得到入射面改變量，再由入射角和入射面改變量求出樣品斜傾角 ($2.979 \pm 0.061^\circ$) 與螺旋測微儀 (2.97°) 所測的值相吻合。

此簡式橢圓偏光儀不適用以下兩種情況：(1)當雷射經樣品反射後為線性偏振態時，會使參數 T_1 及 T_2 為零，所以不可能同時求出四個未知數，(2)當 $\Psi=45^\circ$ 時會使 $L_1=T_2$ 和 $L_2=T_1$ ，所以不可能同時求出四個未知數。第一種情況的改善方法為在架構中多加補波片，至於第二種情況的改善方法為量取不同 P 角之參數 ($L, T, \theta - \beta$)，例如量取 $P=40^\circ$ 及 $P=-40^\circ$ 的參數即可求得橢圓偏光參數和方位角誤差。

參考文獻

- [1] Edward Collett, "POLARIZED LIGHT," Marcel Dekker, Inc. 1993,cptl and pp21-89
- [2] Edward Collett, "POLARIZED LIGHT," Marcel Dekker, Inc. 1993,cptl and pp546-554
- [3] Erhard Meyer, Heike Frede, and Hans Knof, "Optical Effect in Metal: Application of a Least-Squares Method to Measurement on Gold and Silver," J. Appl. Phys. Vol.38 , No.9(1967) , pp3682-3684
- [4] Y F Chao, Wen-Chi Lee, C S Hung and J J Lin, "A three-intensity technique for polarizer-sample-analyzer photometric ellipsometry and polarimetry," J.Phys.D:Appl.Phys.31(1998) 1968-1974
- [5] 李文智, "PSA 簡式橢圓儀," 國立交通大學光電所碩士論文 (1995)
- [6] 陳居仁, "二維影像掃描式橢圓儀," 國立交通大學光電所碩士論文 (2003)

附錄 A

$$I = I_0(\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A) \quad (\text{A-1})$$

$$I = a^2 \cos^2(\theta - A) + b^2 \sin^2(\theta - A) = L \cos^2(A - \theta) + T \sin^2(A - \theta) \quad (\text{A-2})$$

証明(A-1)式和(A-2)式為同一個方程式，加另一參數 S 使兩式相等

$$\begin{aligned} I_0(\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A) \\ = L \cos^2(A - \theta) + T \sin^2(A - \theta) + S \sin(A - \theta) \cos(A - \theta) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

其中

$$L = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 \theta + \sin^2 P \sin^2 \theta + 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{A-4})$$

$$T = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin^2 \theta + \sin^2 P \cos^2 \theta - 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} S = I_0(-\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin 2\theta + \sin^2 P \sin 2\theta + \tan \Psi \sin 2P \cos^2 \theta \cos \Delta \\ - \tan \Psi \sin 2P \sin^2 \theta \cos \Delta) \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$\rightarrow S = I_0(-\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin 2\theta + \sin^2 P \sin 2\theta + \tan \Psi \sin 2P \cos 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{A-7})$$

又因

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \tan \Psi}{\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P} = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi}$$

$$\rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} (\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P) = \cos \Delta \sin 2P \tan \Psi$$

$$\rightarrow 0 = -\sin 2\theta \cos^2 P \tan^2 \Psi + \sin 2\theta \sin^2 P + \cos 2\theta \cos \Delta \sin 2P \tan \Psi$$

所以

$$\begin{aligned} S = I_0(-\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin 2\theta + \sin^2 P \sin 2\theta + \tan \Psi \sin 2P \cos 2\theta \cos \Delta) \\ \rightarrow S = I_0(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

將(A-8)式代回(A-3)式得：

$$\begin{aligned} I_0(\sin^2 P \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cos \Delta \sin 2P \sin 2A) \\ = L \cos^2(A - \theta) + T \sin^2(A - \theta) \end{aligned}$$

所以(A-1)式和(A-2)式相同

附錄 B

由(B-2)、(B-3)和(B-4)三式証明(B-1)式成立

$$\frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} = \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \quad (\text{B-1})$$

$$L = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 \theta + \sin^2 P \sin^2 \theta + 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{B-2})$$

$$T = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin^2 \theta + \sin^2 P \cos^2 \theta - 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{B-3})$$

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \tan \Psi}{\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P} = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} \quad (\text{B-4})$$

將(B-2)式和(B-3)式代入(B-1)式左邊得

$$\begin{aligned} \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-\cos^2 2\theta \sin^2 P + 0.5 \cos \Delta \sin 2P \sin 4\theta \tan \Psi + \cos^2 P \cos^2 2\theta \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \\ &= \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 2\theta \sin^2 P + 0.5 \cos \Delta \sin 2P \sin 4\theta \tan \Psi - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \end{aligned}$$

將(B-4)式代入上式得

$$\begin{aligned} \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} + \\ &\quad \frac{\sin^2 2\theta \sin^2 P + 0.5 \frac{\tan 2\theta(\cos 2P - \cos 2\Psi)}{\sin 2P \sin 2\Psi} \sin 2P \sin 4\theta \tan \Psi - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \\ \rightarrow \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} + \frac{Q}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \quad (\text{B-5}) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= \sin^2 2\theta \sin^2 P + 0.5 \frac{\tan 2\theta(\cos 2P - \cos 2\Psi)}{\sin 2P \sin 2\Psi} \sin 2P \sin 4\theta \tan \Psi - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 P + 0.5(\cos 2P - \cos 2\Psi) \sec^2 \Psi \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\ &= [\sin^2 P + 0.5 \cos 2P \sec^2 \Psi - 0.5 \cos 2\Psi \sec^2 \Psi] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\ &= [\sin^2 P + 0.5 \cos 2P(1 + \tan^2 \Psi) - 0.5(1 - \tan^2 \Psi)] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [0.5 + 0.5 \cos 2P \tan^2 \Psi - 0.5(1 - \tan^2 \Psi)] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\
&= [0.5 \cos 2P \tan^2 \Psi + 0.5 \tan^2 \Psi] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\
&= [(0.5 \cos 2P + 0.5) \tan^2 \Psi] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \sin^2 2\theta \tan^2 \Psi \\
\rightarrow Q &= [\cos^2 P \tan^2 \Psi] \sin^2 2\theta - \cos^2 P \tan^2 \Psi \sin^2 2\theta = 0 \tag{B-6}
\end{aligned}$$

將(B-6)式代入(B-5)式得

$$\frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} = \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}$$



附錄 C

由(C-2)式、(C-3)式和(C-4)式證明(C-1)式成立(為了簡化方程式，將 $P + \alpha$ 以 P 表示)

$$\frac{(L+T)^2}{4LT} \sin^2 2\theta = \cot^2 \Delta \quad (\text{C-1})$$

$$L = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \cos^2 \theta + \sin^2 P \sin^2 \theta + 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{C-2})$$

$$T = I_0(\tan^2 \Psi \cos^2 P \sin^2 \theta + \sin^2 P \cos^2 \theta - 0.5 \tan \Psi \sin 2P \sin 2\theta \cos \Delta) \quad (\text{C-3})$$

$$\tan 2\theta = \frac{\cos \Delta \sin 2P \tan \Psi}{\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P} = \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} \quad (\text{C-4})$$

1、考慮 LT

$$\begin{aligned} & LT - \sin^2 P \cos^2 P \tan^2 \Psi \sin^2 \Delta \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 \Psi \left(\frac{-1}{2} (\cos 2P - \cos 2\Psi) \sin 2\theta + \cos P \cos 2\theta \cos \Delta \sin P \sin 2\Psi \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 \Psi \cos^2 2\theta \left(\frac{-1}{2} (\cos 2P - \cos 2\Psi) \tan 2\theta + \cos P \cos \Delta \sin P \sin 2\Psi \right)^2 \end{aligned}$$

將(C-4)式代入上式

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \sec^4 \Psi \cos^2 2\theta \left(\frac{-1}{2} (\cos 2P - \cos 2\Psi) \frac{\cos \Delta \sin 2P \tan \Psi}{\cos^2 P \tan^2 \Psi - \sin^2 P} + \cos P \cos \Delta \sin P \sin 2\Psi \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 \Psi \cos^2 2\theta (0)^2 \\ &\rightarrow LT = \sin^2 P \cos^2 P \tan^2 \Psi \sin^2 \Delta \quad (\text{C-5}) \end{aligned}$$

2、考慮 $\frac{LT}{(L+T)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{LT}{(L+T)^2} &= \frac{\sin^2 P \cos^2 P \tan^2 \Psi \sin^2 \Delta}{(\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \Delta}{(\cot \Psi \tan P + \cot P \tan \Psi)^2} = \frac{\sin^2 \Delta}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2} \quad (\text{C-6}) \end{aligned}$$

其中 $x = \cot P \tan \Psi$

3、改寫(C-4)式

$$\begin{aligned}
 \tan 2\theta &= \frac{\cos \Delta \sin 2P \sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} = \frac{\cos \Delta}{\frac{\cos 2P}{\sin 2P \sin 2\Psi} - \frac{\cos 2\Psi}{\sin 2P \sin 2\Psi}} \\
 &= \frac{\cos \Delta}{\frac{\cot 2P}{\sin 2\Psi} - \frac{\cot 2\Psi}{\sin 2P}} \\
 &= \frac{\cos \Delta}{\frac{0.5(\cot P - \tan P)}{2 \sin \Psi \cos \Psi} - \frac{0.5(\cot \Psi - \tan \Psi)}{2 \sin P \cos P}} \\
 &= \frac{\cos \Delta}{\frac{0.5(\cot P(\sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi) - \tan P(\sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi))}{2 \sin \Psi \cos \Psi} - \frac{0.5(\cot \Psi(\sin^2 P + \cos^2 P) - \tan \Psi(\sin^2 P + \cos^2 P))}{2 \sin P \cos P}} \\
 &= \frac{2 \cos \Delta}{0.5(\cot P(\tan \Psi + \cot \Psi) - \tan P(\tan \Psi + \cot \Psi)) - 0.5(\cot \Psi(\tan P + \cot P) - \tan \Psi(\tan P + \cot P))} \\
 &= \frac{2 \cos \Delta}{0.5(x + \cot P \cot \Psi - \tan P \tan \Psi - \frac{1}{x}) - 0.5(\frac{1}{x} + \cot \Psi \cot P - \tan \Psi \tan P - x)} \\
 &= \frac{2 \cos \Delta}{0.5(x - \frac{1}{x}) - 0.5(\frac{1}{x} - x)} \\
 \rightarrow \tan 2\theta &= \frac{2 \cos \Delta}{(x - \frac{1}{x})} \tag{C-7}
 \end{aligned}$$



4、改寫附錄二結果

$$\begin{aligned}
 \frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi}{\sin^2 P + \cos^2 P \tan^2 \Psi} \\
 \rightarrow \frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-1 + \cot^2 P \tan^2 \Psi}{1 + \cot^2 P \tan^2 \Psi} \\
 \rightarrow \frac{(L-T) \cos 2\theta}{L+T} &= \frac{-1 + x^2}{1 + x^2} \tag{C-8}
 \end{aligned}$$

5、將(C-6)式和(C-7)式合併

$$\frac{(L+T)^2}{LT} \tan^2 2\theta = \frac{(\frac{1}{x} + x)^2}{\sin^2 \Delta} \frac{4 \cos^2 \Delta}{(x - \frac{1}{x})^2} = 4 \cot^2 \Delta \frac{(1+x^2)^2}{(-1+x^2)^2}$$

將(C-8)式代入上式

$$\frac{(L+T)^2}{LT} \tan^2 2\theta = 4 \cot^2 \Delta \frac{(L+T)^2}{(L-T)^2 \cos^2 2\theta}$$

$$\rightarrow \frac{(L-T)^2}{LT} \sin^2 2\theta = 4 \cot^2 \Delta$$



附錄 D

由(D-1)式解出 β

$$\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 + \beta - \beta) = \frac{-(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 + \beta - \beta) \quad (\text{D-1})$$

假設

$$\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} = a_1, \quad \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} = a_2$$

(D-1)式改寫為

$$\begin{aligned} a_1 \sin 2(\theta_1 + \beta - \beta) &= -a_2 \sin 2(\theta_2 + \beta - \beta) \\ \rightarrow a_1 [\sin 2(\theta_1 - \beta) \cos 2\beta + \cos 2(\theta_1 - \beta) \sin 2\beta] \\ &= -a_2 [\sin 2(\theta_2 - \beta) \cos 2\beta + \cos 2(\theta_2 - \beta) \sin 2\beta] \\ \rightarrow [a_1 \sin 2(\theta_1 - \beta) + a_2 \sin 2(\theta_2 - \beta)] \cos 2\beta \\ &= [-a_2 \cos 2(\theta_2 - \beta) - a_1 \cos 2(\theta_1 - \beta)] \sin 2\beta \\ \rightarrow \frac{a_1 \sin 2(\theta_1 - \beta) + a_2 \sin 2(\theta_2 - \beta)}{-a_2 \cos 2(\theta_2 - \beta) - a_1 \cos 2(\theta_1 - \beta)} &= \tan 2\beta \\ \rightarrow \beta &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a_1 \sin 2(\theta_1 - \beta) + a_2 \sin 2(\theta_2 - \beta)}{-a_2 \cos 2(\theta_2 - \beta) - a_1 \cos 2(\theta_1 - \beta)}\right) \\ \rightarrow \beta &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \sin 2(\theta_2 - \beta) + \frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \sin 2(\theta_1 - \beta)}{-\frac{(L_1 - T_1)}{2\sqrt{L_1 T_1}} \cos 2(\theta_1 - \beta) - \frac{(L_2 - T_2)}{2\sqrt{L_2 T_2}} \cos 2(\theta_2 - \beta)}\right) \end{aligned}$$

附錄 E

以下程式適用於 MATLAB ，而適用範圍為($d_0 \pm 50 \text{ \AA}$ ， $\text{ang} \pm 5^\circ$) ，其中 d_0 為猜測的厚度， ang 為猜測的入射角。

```
clear all
psiex=input('experiment data for psi (degree)');
deltaex=input('experiment data for delta (degree)');
wavelength=input('wavelength of layer(10^-10m)');
d0=input('ideal thickness(10^-10m)');
ang=input('ideal incident angle (degree)');
n0=input('incident refractive index');
n1=input('n of one layer');
k1=input('k of one layer');
n2=input('n of substrate');
k2=input('k of substrate');
n1=n1+k1*(-1)^0.5;n2=n2+k2*(-1)^0.5;

for k=1:101
for j=1:101
d(j)=d0-50+(j-1);
angle0(k)=(ang-5+(k-1)*0.1)*pi/180;
cosangle1=(1-(sin(angle0(k))*n0/n1)^2)^0.5;
cosangle2=(1-(sin(angle0(k))*n0/n2)^2)^0.5;
r01p=(n1*cos(angle0(k))-n0*cosangle1)/(n1*cos(angle0(k))+n0*cosangle1);
r12p=(n2*cosangle1-n1*cosangle2)/(n2*cosangle1+n1*cosangle2);
r01s=(n0*cos(angle0(k))-n1*cosangle1)/(n0*cos(angle0(k))+n1*cosangle1);
r12s=(n1*cosangle1-n2*cosangle2)/(n1*cosangle1+n2*cosangle2);
phaseshift=(4*pi*d(j)*n1/wavelength)*cosangle1;
Rp=(r01p+r12p*exp(-i*phaseshift))/(1+r01p*r12p*exp(-i*phaseshift));
Rs=(r01s+r12s*exp(-i*phaseshift))/(1+r01s*r12s*exp(-i*phaseshift));
psi(k,j)=atan(abs(Rp/Rs))*180/pi;
delta(k,j)=angle(Rp/Rs)*180/pi;
```




```

diff(k,j)=abs((psi(k,j)-psiex))+abs((abs(delta(k,j))-deltaex));
end
end
[m,n]=find(diff==min(min(diff)));
d0=d(n);
ang=angle0(m)*180/pi;
psi(m,n);
abs(delta(m,n));

for k=1:21
for j=1:101
d(j)=d0-5+(j-1)*0.1;
angle0(k)=(ang-0.1+(k-1)*0.01)*pi/180;
cosangle1=(1-(sin(angle0(k))*n0/n1)^2)^0.5;
cosangle2=(1-(sin(angle0(k))*n0/n2)^2)^0.5;
r01p=(n1*cos(angle0(k))-n0*cosangle1)/(n1*cos(angle0(k))+n0*cosangle1);
r12p=(n2*cosangle1-n1*cosangle2)/(n2*cosangle1+n1*cosangle2);
r01s=(n0*cos(angle0(k))-n1*cosangle1)/(n0*cos(angle0(k))+n1*cosangle1);
r12s=(n1*cosangle1-n2*cosangle2)/(n1*cosangle1+n2*cosangle2);
phaseshift=(4*pi*d(j)*n1/wavelength)*cosangle1;
Rp=(r01p+r12p*exp(-i*phaseshift))/(1+r01p*r12p*exp(-i*phaseshift));
Rs=(r01s+r12s*exp(-i*phaseshift))/(1+r01s*r12s*exp(-i*phaseshift));
psi(k,j)=atan(abs(Rp/Rs))*180/pi;
delta(k,j)=angle(Rp/Rs)*180/pi;
diff(k,j)=abs((psi(k,j)-psiex))+abs((abs(delta(k,j))-deltaex));
end
end
[m,n]=find(diff==min(min(diff)));
d0=d(n);
ang=angle0(m)*180/pi;
psi(m,n);
abs(delta(m,n));

for k=1:21

```

```

for j=1:101
d(j)=d0-0.5+(j-1)*0.01;
angle0(k)=(ang-0.01+(k-1)*0.001)*pi/180;
cosangle1=(1-(sin(angle0(k))*n0/n1)^2)^0.5;
cosangle2=(1-(sin(angle0(k))*n0/n2)^2)^0.5;
r01p=(n1*cos(angle0(k))-n0*cosangle1)/(n1*cos(angle0(k))+n0*cosangle1);
r12p=(n2*cosangle1-n1*cosangle2)/(n2*cosangle1+n1*cosangle2);
r01s=(n0*cos(angle0(k))-n1*cosangle1)/(n0*cos(angle0(k))+n1*cosangle1);
r12s=(n1*cosangle1-n2*cosangle2)/(n1*cosangle1+n2*cosangle2);
phaseshift=(4*pi*d(j)*n1/wavelength)*cosangle1;
Rp=(r01p+r12p*exp(-i*phaseshift))/(1+r01p*r12p*exp(-i*phaseshift));
Rs=(r01s+r12s*exp(-i*phaseshift))/(1+r01s*r12s*exp(-i*phaseshift));
psi(k,j)=atan(abs(Rp/Rs))*180/pi;
delta(k,j)=angle(Rp/Rs)*180/pi;
diff(k,j)=abs((psi(k,j)-psiex))+abs(abs(delta(k,j))-deltaex);
end
end
[m,n]=find(diff==min(min(diff)));
d1=d(n)
ang1=angle0(m)*180/pi
psi=psi(m,n)
delta=abs(delta(k,j))

```



(d1, ang1, psi, delta) 為最後的結果，其中 d1 為厚度，ang1 為入射角。當第一層厚度為 d1，入射角為 ang1 時；理論的橢圓參數為 psi 和 delta。

附錄 F

圖 F-1 為未傾斜之入射面和傾斜之入射面的模擬圖。

其中

三角形 OAC 為未傾斜之入射面，三角形 OBD 為傾斜之入射面

入射波為 O 點垂直入射紙面

向量 OA 和向量 OB 垂直於入射波

向量 OC 為未傾斜之法線，向量 OD 為傾斜之法線

θ_0' 未傾斜之入射角， θ_0'' 傾斜之入射角

Θ 為傾斜角， $\delta\alpha$ 為入射面改變量

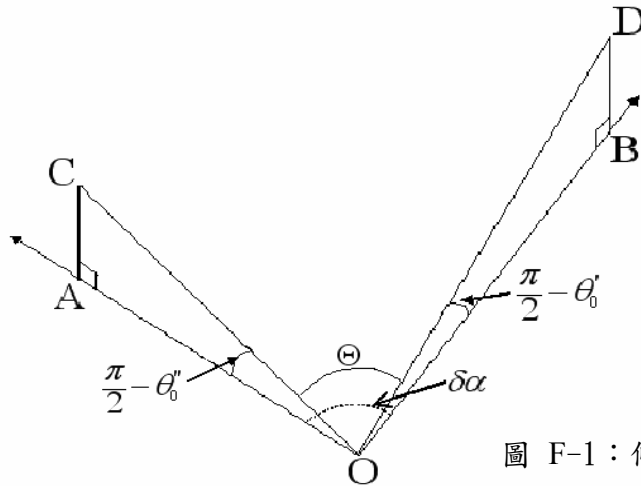


圖 F-1：傾斜圖

假設 A 點座標為 $(\cos \delta\alpha, \sin \delta\alpha, 0)$ ，B 點座標為 $(1, 0, 0)$

由三角函數可計算出：

C 點座標為 $(\cos \delta\alpha, \sin \delta\alpha, \tan(\frac{\pi}{2} - \theta_0'))$ ，D 點座標為 $(1, 0, \tan(\frac{\pi}{2} - \theta_0''))$

向量 OC · 向量 OD = |向量 OC| |向量 OD| cos Θ

$$\rightarrow \cos \delta\alpha + \cot \theta_0' \cot \theta_0'' = \sqrt{1 + \cot^2 \theta_0'} \times \sqrt{1 + \cot^2 \theta_0''} \times \cos \Theta$$

$$\rightarrow \Theta = \arccos \frac{\cos \delta\alpha + \cot \theta_0' \cot \theta_0''}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta_0'} \sqrt{1 + \cot^2 \theta_0''}}$$