國 立 交 通 大 學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

馬可夫過程可修復系統加入更新隨機干擾之模型的穩定狀態機率

The Steady State Probabilities of A Repairable System following A Markov Process Subject to Renewal Random Interventions

研 究 生：洪辰昀

指導教授：彭南夫 博士

中 華 民 國 九 十 四 年 六 月

馬可夫過程可修復系統加入更新隨機干擾之模型的穩定狀態機率

The Steady State Probabilities of A Repairable System following A Markov Process Subject to Renewal Random Interventions

研 究 生：洪辰昀　　Student：Chen-Yun Hung

指導教授：彭南夫 博士　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

國 立 交 通 大 學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Statistics
June 2005
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 四 年 六 月

馬可夫過程可修復系統加入更新隨機干擾之模型的
穩定狀態機率

學生：洪辰昀　　　　　　　　　　指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所

摘　要

本篇論文主要是想探討，當馬可夫過程中加入更新隨機干擾，變成非馬可夫過程之後，此非馬可夫過程的模型之穩定狀態機率。此外，因為模型的穩定狀態機率計算較為繁複，我們提出另一個計算比較容易的馬可夫過程穩定狀態機率，來近似此非馬可夫過程的模型之穩定狀態機率。在論文中，我們是將模型套用在可修復系統上，並且會舉數個例子來比較兩者的結果。

關鍵字：馬可夫過程，穩定狀態機率，干擾，更新過程。

The Steady State Probabilities of A Repairable System following A Markov Process Subject to Renewal Random Interventions

Student：Chen-Yun Hung Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistics
National Chiao Tung University

Abstract

This thesis is focused on deriving the steady state probabilities of a non-Markov process obtained from a Markov process subject to renewal random interventions. In addition, we propose the steady state probabilities from a different but related Markov process which can be computed easily and with high precision to the steady state probabilities from a non-Markov process. In this thesis, a non-Markov process is applied in a repairable system, and several examples are presented.

Keywords： Markov process, steady state probability, intervention, renewal process.

誌謝

論文即將完成，心中的大石終於落了下來。回首兩年來的研究所生活，教授們的指導以及同學們之間的互相幫忙與扶持，都使我在畢業前夕，有著無限的不捨。

首先，要非常感謝我的指導老師—彭南夫教授，感謝老師在百忙之中，仍以專業的學識與認真的態度，耐心地指引我解開研究的困惑及瓶頸，並給予我在踏入工作之際適時的協助，在此，獻上由衷地感謝和祝福。此外，也感謝口試委員王鴻龍教授、鄭天澤教授與陳鄰安教授給予我論文之見解和改正方向，讓本論文得以更嚴謹。並感謝全交大統計學研究所的教授們，感謝您們不僅提供優秀的學習環境及課程，更親切和氣地對待每一個學生。

接著，感謝同門的宇葶、玉均與翊琳，謝謝在論文的誕生和完成之間，互相幫忙討論與打氣。也謝謝育仕面試以及編排技巧的分享。更感謝全統研所 408、409 所有同學兩年來的課業及生活上的幫忙，也難忘曾經一同的出遊和聚餐，謝謝你們的包容，因為我總是不斷惹出許多麻煩，呵呵！另外，當然沒忘記感謝統研所靈魂人物—郭姐。

再來，非常感謝陪伴我四年多的家佑，感謝你常常在我心情煩悶時帶給我歡樂及鼓勵，更教導我不論是生活上或是文書處理上的問題。也感謝倩如、阿廢、岱璉、阿君、悅情、長峰、君培、暉哥、方經理及北門土地公等人，謝謝兩年中生活與課業上的支持及勉勵。

最後，要特別感謝我最親愛的家人們，謝謝愛說大道理的爸爸、謝謝要我特別提出名字的漂亮媽媽—陳美妍小姐、謝謝時尚大姐與鬼靈精怪小妹。本篇論文在此獻給每一個我所認識的人。

辰昀 2005.06

目錄

圖表目錄

第一章 緒論

1-1 研究動機

生產線上的機器操作員，往往會因為某些人為的疏失而導致錯誤的發生。錯誤一旦發生，機器的損害即跟著產生，於是機器操作員開始變得謹慎小心，而發生錯誤的機率就變小，因為錯誤造成機器損害的衝擊也跟著變小。但是，隨著時間的過去，機器操作員的謹慎小心會隨著時間的增加而逐漸消失，因此發生錯誤的機率就又上升，因為錯誤造成機器損害的衝擊也跟著變大。所以，不論何時錯誤發生，機器操作員又重新開始他的警覺心。這個現象如此週而復始，本篇研究主要是想探討有此過程的模型之穩定狀態機率(steady state probability)，並先將模型在此節中分析說明如下四點：

(1) 我們將原始模型的狀態假設為單一因子。因為過程停留在任一個狀態而尚未轉換到下一個狀態所花的時間是一指數分配(exponentially distributed)，所以我們視這個原始模型是一個有微矩陣(infinitesimal matrix) Q 的連續時間馬可夫過程(continuous time Markov process) $\{Y(t), t \geq 0\}$，而 $Y(t)$ 是在時間 t 的時候，原始過程的狀態。此馬可夫過程(Markov process) $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的轉置機率矩陣(transition probability matrix)為

$$P(t) = e^{Qt}$$

(2) 現在，假設有一連串的干擾過程加入，且這些干擾的發生是根據更新過程(renewal process)。令兩個連續干擾之間的間隔時間有個發生率(hazard rate) $\lambda(t)$，因為

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{-d\ln(1-F(t))}{dt}$$

$$\lambda(t)dt=-d\ln(1-F(t))$$

$$\int_0^t \lambda(x)dx=-\ln(1-F(t))$$

所以間隔時間之機率密度函數(probability density function)是

$$f(t)=\lambda(t)\exp(-\int_0^t \lambda(x)dx)$$

而這些干擾所造成的瞬間影響，有個和時間有關的影響矩陣(time dependent impact matrix) $D(t)$：$D_{ij}(t)$ 則代表當有一個干擾發生於時間 t ，在時間 t^+ 時，過程從狀態 i 到狀態 j 的機率。

(3) 在此加入干擾後的模型中有個很重要的特點：當一個循環(cycle)定義為兩個連續干擾中間經過的一段時間，則每一個干擾造成立即影響之後，下一個循環(cycle)會立即回復到最初的環境，也就是干擾的發生率與干擾所造成的損害衝擊又重新開始。這樣的行為使得這樣的過程運作就像是一個再生過程(regenerative process)。因此，$D(t)$ 的 t 和 $\lambda(t)$ 的 t 是一樣的，而時間 t 是從前一次干擾完後開始算起。

(4) 原始的模型再加入干擾之後，因為干擾的發生率 $\lambda(t)$ 和時間有關，干擾所造成的瞬間影響矩陣 $D(t)$ 也和時間有關，整個過程已經不具有遺失記憶性(memoryless property)，不符合馬可夫性質(Markovian property)，所以整個過程是一個非馬可夫過程(Non-Markov process) $\{X(t), t\geq 0\}$，而 $X(t)$ 是在時間 t 的時候，整個過程的狀態。但是，當給定兩個連續干擾的間隔時間是 t ，中間的過程即是有微矩陣(infinitesimal matrix) Q 的馬可夫過程

(Markov process)。

1-2 研究目的

此篇研究是將 1-1 說明的非馬可夫過程(Non-Markov process)之模型，應用於存在人為疏失的工廠裡之可修復生產線上。研究目的如下：

(1) 利用此篇研究求得工廠生產線之狀態是良好的穩定狀態機率(steady state probability)，以評估是否需要多花成本在降低人為疏失的發生。

(2) 提供另一個計算過程比較容易的馬可夫過程(Markov process)穩定狀態機率(steady state probability)，來近似此非馬可夫過程(Non-Markov process)的模型之穩定狀態機率(steady state probability)，以節省計算時間。

1-3 研究方法

本篇研究運用離散時間馬可夫鏈(discrete time Markov chain)、連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)和更新過程(renewal process)的相關理論，以及發生率(hazard rate)的定義，解決推導過程中所遇到的問題。另外，一個矩陣積分的一般定義是需要先知道：我們定義矩陣的積分為矩陣中每個元素個別積分，也就是說對任意矩陣 A，

$$(\int A)_{ij} = \int A_{ij}$$

1-4 研究架構

除了在本章所介紹的研究動機、研究目的與研究方法之外，在第二章中，我們將簡單陳述一些隨機過程的相關理論與定義；在第三章中，將推導這個加入干擾過程的模型之穩定狀態分配；而在第四章，我們將提供一個計算相對簡單的馬可夫過程(Markov process)穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\pi}'$，去逼近此論文中所探討之非馬可夫過程(Non-Markov process)的模型穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\beta}'$，並且將兩者利用數個例子的結果做個比較，例子分別有二元(binary)、三元(ternary)及四元(quaternary)的模型，根據不同的模型，機器的狀態則分別具有不同的程度，例如：二元(binary)的狀態是假設包含好與壞兩種；三元(ternary)的狀態則是假設包含好、中、壞三種；第五章是結論。我們將以上的說明藉由研究架構圖更完整且更清楚的呈現如圖 1-1：

研究架構圖

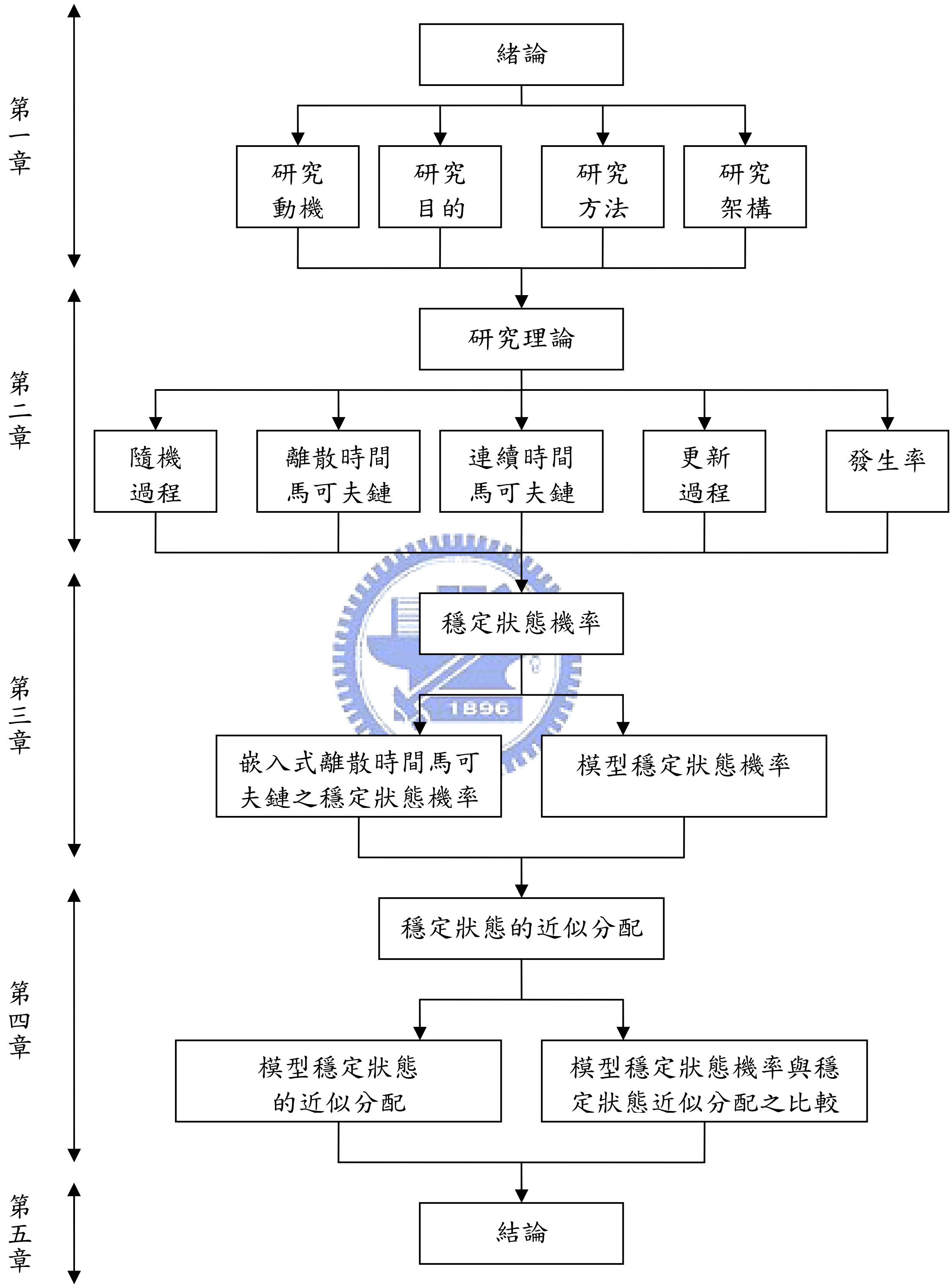


圖 1-1 研究架構圖
資料來源：本研究整理

第二章 研究理論

在尚未進入第三章及第四章之前，第二章根據[1]和[3]，簡單地說明必須先了解的相關理論基礎與定義。

2-1 隨機過程

隨機過程(stochastic process) $\underline{X}=\{X(t),t\in T\}$ 是隨機變數(random variable)的集合。我們一般都解釋 t 為時間，而 $X(t)$ 是過程在時間 t 時的狀態。假若 T 是一個可數的集合，則稱 $\underline{X}$ 是離散時間隨機過程(discrete time stochastic process)；若 T 是連續的，則稱 $\underline{X}$ 是連續時間隨機過程(continuous time stochastic process)(Ross [3])。

2-2 離散時間馬可夫鏈

隨機過程(stochastic process) $\{X_n,n=0,1,2,\ldots\}$ 序列中，可能的值是有限或是可數，除非另外有說明，不然可能的值之集合為非負整數 $\{0,1,2,\cdots\}$。當 $X_n=i$，代表過程在時間 n 時的狀態是 i；如果下一個狀態是 j，則有一個轉置機率(transition probability) P_{ij}，令 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i,j$ 是任意狀態且 $n\geq 0$，則

$$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0\}=P_{ij}\quad(2.2.1)$$

此隨機過程(stochastic process)我們就稱它為離散時間馬可夫鏈(discrete time Markov chain)。式子(2.2.1)可以解釋為：一個離散時間馬可夫鏈(discrete time Markov chain)，任意未來狀態 X_{n+1} 的分配只與

現在的狀態 X_n 有關，而與過去的狀態 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ 無關，此也就是馬可夫性質 (Markovian property)。而在轉置機率 (transition probability) P_{ij} 的限制上，

$$P_{ij} \geq 0, \qquad i, j \geq 0; \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \qquad i = 0,1,\cdots$$

且我們令轉置機率矩陣(transition probability matrix) P 為

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

(Ross［3］)。

2-2-1 嵌入式離散時間馬可夫鏈

我們知道時間是連續的，狀態也是隨時間在改變。但是，當過程只看某些時間點的狀態 $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$，$X(\tau_i)$ = 過程在時間點 τ_i 的狀態，則當它們具有馬可夫性質(Markovian property)，也就是說：當過程停留在某一時間點狀態而尚未轉換到下一個時間點狀態所花的時間呈現指數分配(exponentially distribution)，具有遺失記憶性(memoryless property)，所以未來狀態的分配只與現在的狀態有關，而與過去的狀態們無關。我們就稱這些時間點的狀態 $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 形成一個嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain) (Ross［3］)。

2-2-2 穩定狀態機率

【定義】

我們說一個機率分配$\{P_j, j \geq 0\}$是馬可夫鏈(Markov chain)的定態(stationary)分配，當

$$P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i P_{ij}, \qquad j \geq 0$$

(Ross［3］)。

《推論》

令$P_j = P\{X_0 = j\}, j \geq 0$是一個定態(stationary)分配，則

$$P\{X_1 = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i P_{ij} = P_j$$

並且根據歸納法，

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} P\{X_{n-1} = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i P_{ij} = P_j$$

因此一開始的機率分配是定態(stationary)分配，則當$n \geq 0$，狀態X_n有相同的分配(Ross［3］)。

■

而當每一個狀態的分配皆為定態(stationary)分配，我們說此離散時間馬可夫鏈(discrete time Markov chain)的狀態是處於穩定狀態(steady state)，所以穩定狀態機率(steady state probability)向量$\vec{\alpha}'$就會滿足

$$\vec{\alpha}' = \vec{\alpha}' P$$

P是轉置機率矩陣(transition probability matrix) (Ross［3］)。

2-3 連續時間馬可夫鏈

當連續時間隨機過程(continuous time stochastic process)$\{X(t), t \geq 0\}$具有馬可夫性質(Markovian property)：未來狀態的分配只和現在狀態有關，而與過去狀態是獨立的。則，我們說連續時間隨機過程(continuous time stochastic process)$\{X(t), t \geq 0\}$是連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)，而$X(t)$＝過程在時間t的狀態。換句話說，當所有的$s, t \geq 0$，非負整數$i, j, x(u), 0 \leq u \leq s$，

$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ (Ross［3］)。

假設τ_i是過程停留在狀態i而尚未轉換到另一個不同狀態的停留時間，則當所有的$s, t \geq 0$，

$$P(\tau_i > s + t \mid \tau_i > s) = P(\tau_i > t)$$

因此，隨機變數τ_i具有遺失記憶性(memoryless property)且必須為指數分配(exponentially distribution)。並且，連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)$\{X(t), t \geq 0\}$當它進入狀態i，是一個有以下性質之隨機過程(stochastic process) (Ross［3］)：

(1) τ_i是比率(rate)為ν_i的指數分配(exponentially distribution)。

(2) 當過程離開狀態i，到下一個狀態j的機率為P_{ij}，$\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$。

■

當$i \neq j$，

$$q_{ij} = \nu_i P_{ij}$$

我們稱q_{ij}是i到j的轉換率(transition rate)。而$\sum_{j \neq i} q_{ij} = \nu_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = \nu_i$。另

外，要清楚的是，$P_{ij}(t)$和P_{ij}是不同的，$P_{ij}(t)$是指現在在狀態i，經過時間t到狀態j的機率，換句話說，當$s,t \geq 0$，

$$P_{ij}(t) = P\big(X(t+s) = j \mid X(s) = i\big)$$

(Ross［3］)。

2-3-1 KOLMOGOROV 微分方程式

【引理】

（1） $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - P_{ii}(t)}{t} = v_i$

（2） $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$，$i \neq j$

（3） $P_{ij}(t+s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$，$\forall s,t \geq 0$

(Ross［3］)。

【定理】 Kolmogorov 逆向方程式(backward equations)

對所有的i, j，且$t \geq 0$，

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

(Ross［3］)。

《推導》

將$P_{ij}(t+h) = \sum\limits_{k} P_{ik}(h) P_{kj}(t)$兩邊同時減去$P_{ij}(t)$，式子變成

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)] P_{ij}(t)$$

當兩邊同時除以h且取極限，當h趨近於零，

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\sum_{k\neq i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)-\frac{1-P_{ii}(h)}{h}P_{ij}(t)\right\}$$

因此，

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t)-v_iP_{ij}(t)$$

(Ross［3］)。

【定理】 Kolmogorov 順向方程式(forward equations)

對所有的i,j，且$t\geq 0$，

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\neq j}q_{kj}P_{ik}(t)-v_jP_{ij}(t)$$

(Ross［3］)。

2-3-2 轉置機率矩陣的計算

定義$P(t)=(P_{ij}(t))$、$P'(t)=(P_{ij}'(t))$、$Q=(q_{ij})$，且 $q_{ii}=-v_i=-\sum_{k\neq i}q_{ik}<0$，則當$\vec{1}'=(1,1,\ldots,1)$、$\vec{0}'=(0,0,\ldots,0)$，$Q$具有$Q\vec{1}=\vec{0}$的性質，換句話說，微矩陣$Q$的列和為零(Ross［3］)。

在 2-3-1 節，我們可以將 Kolmogorov 逆向方程式(backward equations)表示成

$$P'(t)=QP(t)$$

將 Kolmogorov 順向方程式(forward equations)表示成

$$P'(t)=P(t)Q$$

因此，得到轉置機率矩陣(transition probability matrix)$P(t)$為

$$P(t) = e^{Qt} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Qt)^i}{i!}$$

(Ross［3］)。但是，如果用上式的展開式來計算 $P(t)$，會有兩個非常沒有效率的原因(Ross［3］)：

(1) 因為微矩陣(infinitesimal matrix) Q 中包含正值及負值，在計算 Q 的次方上，會有四捨五入的誤差問題。

(2) 我們計算必須要接近無限多項以趨近真值。

■

所以，我們計算 $P(t)$ 選擇使用

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

也就是

$$e^{Qt} = \lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{Qt}{n}\right)^n$$

令 $n = 2^k$，$M(t) = I + \frac{Qt}{n}$，可以得到 $(M(t))^n = (M(t))^{2^k}$，於是只需要 k 次矩陣相乘即可求得 $P(t)$(Ross［3］)。

2-3-3 穩定狀態機率

當 $t > 0$、Q 是連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)的微矩陣(infinitesimal matrix)，則連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)的穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\vec{\pi}'$ 需滿足，

$$\vec{\pi}' = \vec{\pi}' P(t) = \vec{\pi}' e^{Qt}$$

兩邊同時對 t 微分，且 t 代零，我們可以得到

$$\vec{0}' = \vec{\pi}' Q$$

則利用$\sum_i \pi_i = 1$可以得到唯一解$\bar{\pi}'$(Ross［3］)。

因此，在已知$\nu_j = \sum_{k \neq j} q_{jk}$、$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0$以及$\sum_i \pi_i = 1$的情況之下，

$$\pi_j \nu_j = -\pi_j q_{jj} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \tag{2.3.3.1}$$

$\pi_j \nu_j$ =過程離開j的比率(rate)；$\sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}$ =過程進入j的比率(rate)。而因為$q_{ij} = \nu_i P_{ij}$，P_{ij}是嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain)的轉置機率(transition probability)，(2.3.3.1)又可寫成

$$\pi_j \nu_j = \sum_{i \neq j} \pi_i \nu_i P_{ij}$$

所以嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain)的穩定狀態機率(steady state probability)α_i可以表示為

$$\alpha_i = \frac{\pi_i \nu_i}{\sum_k \pi_k \nu_k} \tag{2.3.3.2}$$

連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)的穩定狀態機率(steady state probability)π_i也可以表示為

$$\pi_i = \frac{\alpha_i / \nu_i}{\sum_k \alpha_k / \nu_k} \tag{2.3.3.3}$$

(2.3.3.2)與(2.3.3.3)是由於兩個穩定狀態機率(steady state probability)的關連而來的(Ross［3］)。

另外，我們也可以將連續時間馬可夫鏈(continuous time Markov chain)的穩定狀態機率(steady state probability)π_j看成是一個在長時間下，過程停留在狀態j所占全部時間的比例，

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\text{時間從0到}t\text{，過程停留在狀態}j\text{的所有時間}}{t}$$

(Ross［3］)。

2-4 更新過程

如果有一個可數的過程，它任兩個連續事件的間隔時間是任意的分配，且分配彼此獨立與相同，則我們稱這個可數的過程是一個更新過程(renewal process) (Ross［3］)。

一般來說，令$\{X_n, n=1,2,3,\cdots\}$是個非負的獨立隨機變數(random variable)序列，且有共同的分配F。為了避免一些不必要的討論，假設$F(0)=P\{X_n=0\}<1$。X_n則是第$(n-1)$個事件與第n個事件的間隔時間。在$X_n \geq 0$且$F(0)<1$的假設下，可以令期望間隔時間為

$$\mu = E[X_n] = \int_0^\infty x dF(x)$$

而$0<\mu\leq\infty$。現在再令S_n是第n個事件發生的時間，可知

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \qquad n \geq 1$$

所以當$N(t)$代表在時間t所發生的事件數，可以表示成

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$$

(Ross［3］)。

【定義】

我們稱可數過程$\{N(t), t\geq 0\}$是一個更新過程(renewal process)，而$N(t)$代表在時間t所發生的事件數(Ross［3］)。

2-4-1 再生過程

一個狀態空間是$\{0,1,2,\cdots\}$的隨機過程(stochastic process) $\{X(t), t \geq 0\}$，$X(t)$ = 過程在時間t的狀態，存在特定時間點具有過程重新開始之性質。換句話說，假設時間是連續的過程，存在一個時間點為S_1，越過S_1就好像整個過程又從零開始；當時間超過S_1的$S_2, S_3, \cdots$也存在，它們都具有和S_1一樣的性質。這樣的隨機過程(stochastic process)，我們就稱之為再生過程(regenerative process) (Ross［3］)。

$\{S_1, S_2, \cdots\}$是由更新過程(renewal process)發生事件的時間點所構成。我們定義一個循環(cycle)為時間直至一個更新(renewal)事件的發生(Ross［3］)。

【定理】

當$E[S_1] < \infty$，

$$P_j \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = j\} = \frac{E[\text{一個循環內，過程停留在狀態}j\text{的所有時間}]}{E[\text{一個循環的總時間}]}$$

(Ross［3］)。

【論點】

一個再生過程(regenerative process)，當$E[S_1] < \infty$，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\text{時間0到}t\text{，過程停留在狀態}j\text{的時間}}{t} = \frac{E[\text{一循環內，過程停留在狀態}j\text{的時間}]}{E[\text{一個循環的總時間}]}$$

的機率為1(Ross［3］)。

2-5 發生率

定義發生率(hazard rate)為

$$\lambda(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left[x\le X<x+\Delta x\,|\,X\ge x\right]}{\Delta x} \qquad (2.5.1)$$

如果 X 是連續隨機變數(continuous random variable)，且分配函數(distribution function)為 F 、機率密度函數(probability density function)為 f ，則

$$\lambda(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{-d\ln\left[1-F(x)\right]}{dx}$$

從(2.5.1)，我們可以將 $\lambda(x)\Delta x$ 解釋成是一個個體已經活到 x 歲，將在下一個很短暫的時刻 Δx 內發生事件的趨近機率(Klein et al. [1])。

而發生率(hazard rate) $\lambda(x)$ 可以是各種形式，例如：隨時間遞增、隨時間遞減，或是和時間無關的常數。它唯一的限制是

$$\lambda(x)\ge 0$$

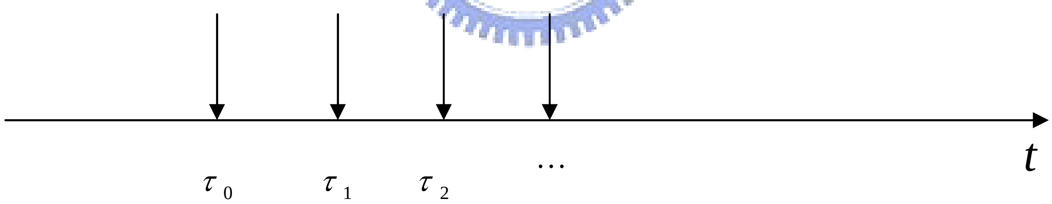
(Klein et al. [1])。

第三章 穩定狀態機率

在第一章的緒論裡，我們知道模型中干擾的發生是根據發生率為 $\lambda(t)$ 的更新過程(renewal process)，且整個過程就像是一個再生過程(regenerative process)，此性質即是解出模型穩定狀態機率(steady state probability)的關鍵。3-1 節中，我們先利用干擾點的狀態序列形成一嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain)的性質，求出模型干擾點的穩定狀態機率(steady state probability)。而後，藉著 3-1 節的結果與穩定狀態機率(steady state probability)的定義，3-2 節裡再推導出模型的穩定狀態機率(steady state probability)。

3-1 嵌入式離散時間馬可夫鏈之穩定狀態機率

首先，將加入干擾的過程只看干擾點的狀態 $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$，



$X(\tau_i)$ = 過程在時間點 τ_i 的狀態。當 $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 具有馬可夫性質(Markovian property)，也就是說：當過程停留在狀態 $X(\tau_i)$ 而尚未轉換到下一個狀態 $X(\tau_{i+1})$ 所花的時間呈現指數分配(exponentially distributed)，具有遺失記憶性，所以未來狀態的分配只與現在的狀態有關，而與過去的狀態們無關。則，$\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 是一個嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain)，我們要利用嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain) $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 的轉置機率矩陣(transition probability matrix)，以求得干擾點之穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\bar{\alpha}'$。因為 $P(t)$ 與 $D(t)$ 是獨立的，所以 $P(t)D(t)$ 是在給定兩連續干擾間隔時間為 t 的轉置機率矩陣(transition probability matrix)，為了消除條件機率，則我們必須將 $P(t)D(t)$ 乘上 t 的機率密度函數 $f(t)$，再對 t 作積分，因此

$$\int_0^\infty P(t)D(t)\lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt$$

是嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain) $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 的轉置機率矩陣(transition probability matrix)。則嵌入式離散時間馬可夫鏈(embedded discrete time Markov chain) $\{X(\tau_0), X(\tau_1), \ldots\}$ 的穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\bar{\alpha}'$ 會滿足

$$\bar{\alpha}'\int_0^\infty P(t)D(t)\lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt = \bar{\alpha}' \qquad (3.1.1)$$

再加上 $\sum_i \alpha_i = 1$，即可求得 $\bar{\alpha}'$ 唯一解。另外，α_i 也可表示為，

$$\alpha_i = \lim_{m\to\infty} \frac{m\text{個干擾點中，狀態是}i\text{的次數加總}}{m}$$

m 是干擾的次數。

3-2 模型穩定狀態機率

我們定義一個循環(cycle)是兩個連續發生的干擾中間經過的一段時間。現在，以全部的過程來看，也就是加入干擾之後的模型，狀態 i 的穩定狀態機率(steady state probability)應為：

$$\beta_i = \lim_{T\to\infty} \frac{\text{時間從0到}T\text{，過程停留在狀態}i\text{的所有時間}}{T}$$

，當分子與分母同時除以循環(cycle)個數 n ($n \to \infty$)，則根據大數法則，β_i 也等於：一個循環(cycle)裡，停留在狀態 i 的期望(平均)時間占一個循環(cycle)的期望(平均)時間的比例。因此，加入干擾後的整體模型穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\vec{\beta}'$ 就會滿足，

$$\vec{\beta}' = \frac{\int_0^\infty \int_0^t \vec{\alpha}' P(x)dx \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}$$

$$= \frac{\vec{\alpha}' \int_0^\infty P(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt} \qquad (3.1.2)$$

$\vec{\beta}'$ 即可求得。

其中，在(3.1.2)式，分母的來由是因為一個循環(cycle)的期望時間為

$$E(cycle) = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$$

所以

$$E(cycle) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt$$

而(3.1.2)式分子方面的解釋，先推導時間從零到 t 間，過程停留在狀態 i 的期望(平均)時間：

利用指標函數

$$I(x)=\begin{cases}1 & if\ X(x)=i \\ 0 & o.w.\end{cases}$$

且令$S_i(t)$為時間從零到t間，過程停留在狀態i所花的時間，則$S_i(t)$可以表示成

$$S_i(t)=\int_0^t I(x)dx$$

於是，在時間從零到t間，過程停留在狀態i的期望(平均)時間是

$$E(S_i(t))=E\int_0^t I(x)dx=\int_0^t E(I(x))dx=\int_0^t P(X(x)=i)dx \qquad (3.1.3)$$

■

現在，因為(3.1.3)的$E(S_i(t))$是在給定t的情況下，過程停留在狀態i的期望(平均)時間，所以加上消除條件機率的因素，整個過程的穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\beta}'$的分子為

$$\int_0^\infty\left[\int_0^t \bar{\alpha}'P(x)dx\right]\lambda(t)\exp\left(-\int_0^t\lambda(x)dx\right)dt$$

而$(\bar{\alpha}'P(x))_i$ =從穩定狀態機率(steady state probability)向量為$\bar{\alpha}'$的干擾點開始，過程在時間x時，為狀態i的機率。另外，在(3.1.2)式中的機率密度函數(probability density function)

$$\frac{\exp\left(-\int_0^t\lambda(x)dx\right)}{\int_0^\infty\exp\left(-\int_0^t\lambda(x)dx\right)dt}$$

是一個均衡分布(equilibrium distribution)，也就是兩個連續干擾間隨機抽取任一時間，此時間和上一個干擾的間隔時間與和下一個干擾的間隔時間兩者之機率密度函數(probability density function)。

雖然$\bar{\beta}'$的算式已經求得，但是，要求得$\bar{\beta}'$並非一件容易的事，因為至少需要找到所有Q的特徵值，才可以解出$P(t)=e^{Qt}$，參見[2]。所以在計算$\bar{\beta}'$時，我們利用[3]所介紹相對簡單的方法去逼近$\bar{\beta}'$，也就是利用$\left(I+\frac{Qt}{2^n}\right)^{2^n}$去逼近$P(t)=e^{Qt}$以解出$\bar{\beta}'$，這個方法只需要選取適當$\log_2 2^n = n$次矩陣相乘即可。而在利用軟體計算$\bar{\alpha}'$及$\bar{\beta}'$中的積分時，可利用黎曼和積分來解決問題。在下一章中，我們將會提供另一個模型穩定狀態的近似分配$\bar{\pi}'$，且會舉幾個例子來比較$\bar{\beta}'$及$\bar{\pi}'$兩個式子。

第四章 穩定狀態的近似分配

因為模型的穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\beta}'$之計算較為繁複，所以在第四章的第一節中，我們提供一個馬可夫過程(Markov process)的穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\pi}'$，去逼近為非馬可夫過程(Non-Markov process)的模型之穩定狀態機率(steady state probability)向量$\bar{\beta}'$。而向量$\bar{\pi}'$在計算上相對地比較簡易，且在第二節中我們會將兩者以例子作個比較，並發現到一個有趣的現象，就是$\bar{\beta}'$與$\bar{\pi}'$的值相當接近。

4-1 模型穩定狀態的近似分配

假設現在

$$\lambda(t) = \lambda$$

$$D(t) = D$$

分別是干擾的發生率與干擾所造成的影響矩陣，它們都是常數構成的，和時間沒有關係，則任兩個連續干擾的間隔時間互相獨立且分配相同，都是指數分配(exponentially distributed)。再加上原始模型就是屬於馬可夫過程(Markov process)的條件，所以整個加入干擾的過程仍具有遺失記憶性(memoryless property)，也是一個馬可夫過程(Markov process)，符合馬可夫性質(Markovian property)：未來狀態的分配只與現在的狀態有關，而與過去的狀態無關。而加入干擾的模型之微矩陣(infinitesimal matrix)就可以推得是

$$Q + \lambda[D - I] \tag{4.1.1}$$

列和為零。因此，假設現在

$$\lambda(t)=\lambda(t)$$

$$D(t)=D(t)$$

分別是干擾的發生率與干擾所造成的影響矩陣，它們皆與時間有關。雖然事實上，任兩個連續干擾的間隔時間已經不是指數分配(exponentially distributed)，所以整個加入干擾的過程不再具有遺失記憶性(memoryless property)，而非馬可夫過程(Non-Markov process)，但是，如果我們仍然把整個過程利用一個馬可夫過程(Markov process)來計算的話，(4.1.1)的式子使我們有動機將

$$Q+\lambda(t)\left[D(t)-I\right]$$

乘上均衡分布(equilibrium distribution)再對 t 作積分，假設這就是整個馬可夫過程(Markov process)的模型之微矩陣(infinitesimal matrix)

$$\hat{Q}=\frac{\int_0^\infty \{Q+\lambda(t)[D(t)-I]\}\exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}$$

則，有此微矩陣(infinitesimal matrix) $\hat{Q}$ 的馬可夫過程(Markov process)模型之穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\vec{\pi}'$ 會滿足

$$\vec{\pi}'\hat{Q}=\vec{0}'$$

而 $\vec{0}'$ 是零向量，加上 $\sum_i \pi_i=1$ 的條件，我們要的 $\vec{\pi}'$ 即可求出。

4-2 模型穩定狀態機率與穩定狀態近似分配之比較

根據第三章所推導的模型穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\vec{\beta}'$ 與本章第一節所提出的模型穩定狀態之近似分配向量 $\vec{\pi}'$，我們在本節以例子將兩者作個比較，並把演算過程利用 matlab 執行。

底下分別是兩者的演算流程圖：

模型穩定狀態機率 step1

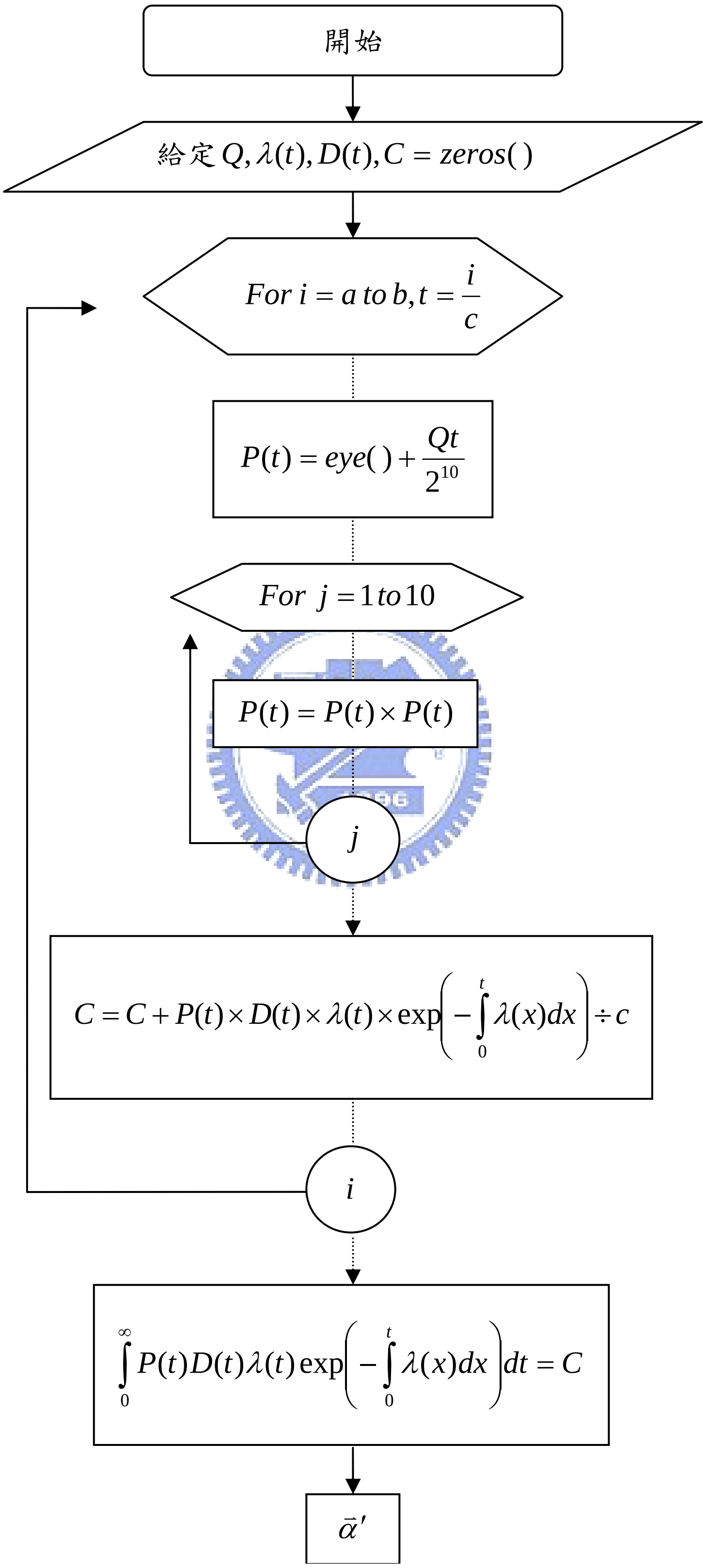


圖 4-1 演算流程圖〈一〉

模型穩定狀態機率 step2

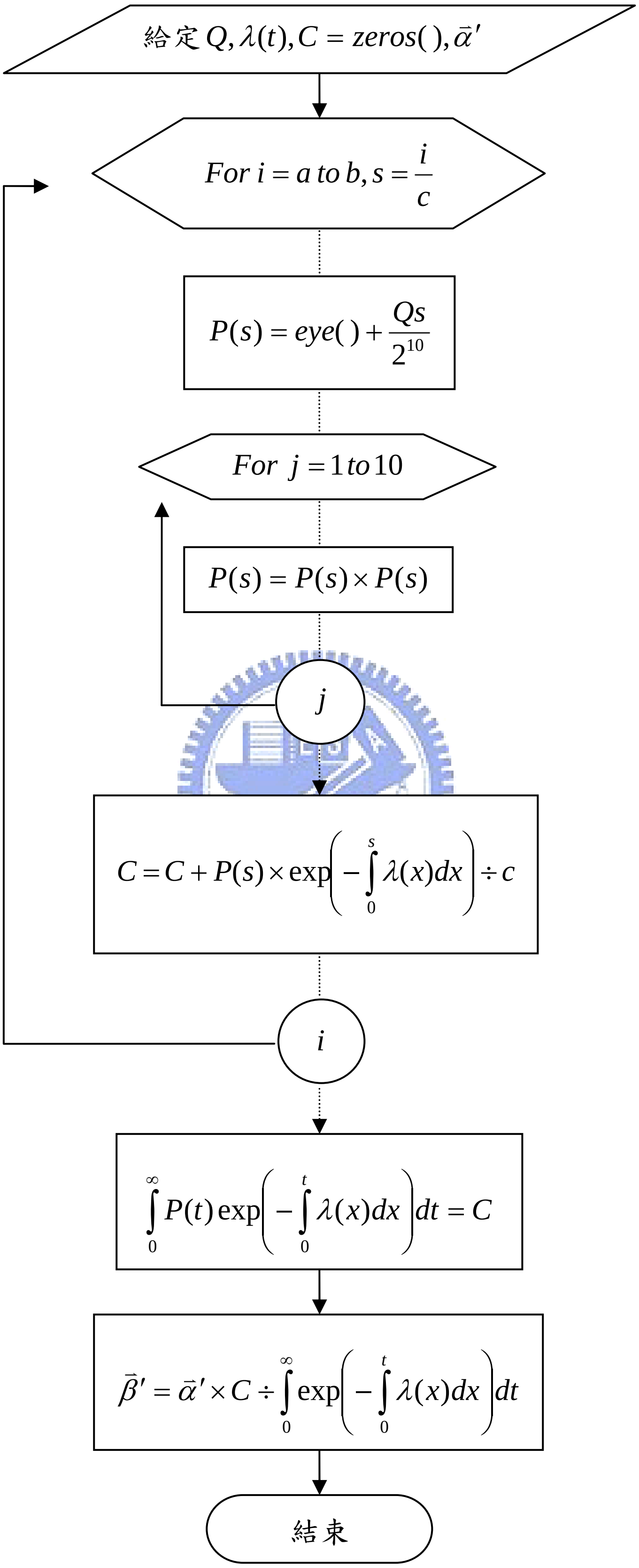


圖 4-2 演算流程圖〈二〉

模型穩定狀態的近似分配

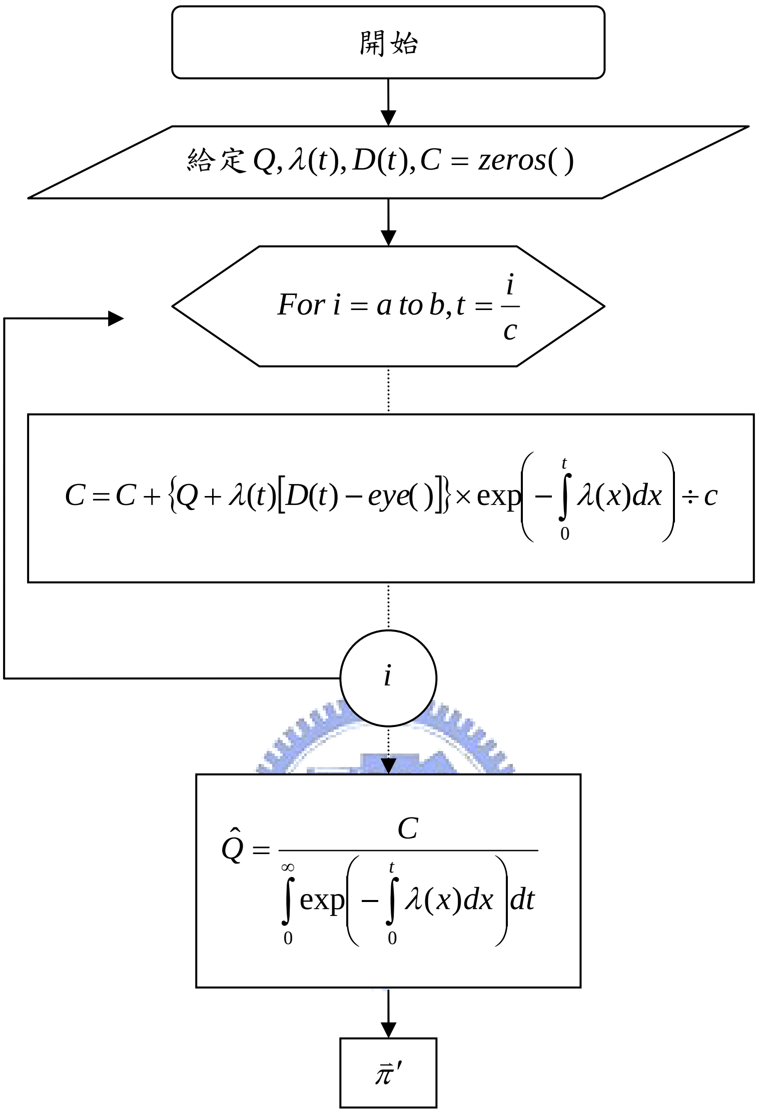


圖 4-3 演算流程圖〈三〉

■

例題中分別是呈現 matlab 執行後的結果：

【例題一】（Q 與 $D(t)$ 是 2X2 矩陣）

〈一〉

當

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}，D(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ e^{-t} & 1-e^{-t}\end{bmatrix}，\lambda(t)=1$$

$\vec{\beta}'$ 和 $\vec{\pi}'$ 分別為

$$\vec{\beta}'=\left(\frac{27}{43},\frac{16}{43}\right)\cong(0.6279,0.3721)$$

$$\vec{\pi}'=\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)=(0.6250,0.3750)$$

〈二〉

當

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}，D(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ e^{-t} & 1-e^{-t}\end{bmatrix}，\lambda(t)=0.01$$

$\vec{\beta}'$ 和 $\vec{\pi}'$ 分別為

$$\vec{\beta}'\cong(0.6650,0.3350)$$

$$\vec{\pi}'\cong(0.6656,0.3344)$$

〈三〉

當

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}，D(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ e^{-t} & 1-e^{-t}\end{bmatrix}，\lambda(t)=100$$

$\vec{\beta}'$ 和 $\vec{\pi}'$ 分別為

$$\vec{\beta}'\cong(0.6645,0.3355)$$

$$\vec{\pi}'\cong(0.6644,0.3356)$$

【例題二】（Q 與 $D(t)$ 是 3X3 矩陣）

〈一〉

當

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 2\\ 5 & 0 & -5\end{bmatrix}，D(t)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}} & 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\lambda(t)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{10}}\right)$$

$\vec{\beta}'$ 和 $\vec{\pi}'$ 分別為

$$\vec{\beta}'\cong(0.6736,0.1701,0.1563)$$

$$\vec{\pi}'\cong(0.6740,0.1701,0.1559)$$

〈二〉

當

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 2\\ 5 & 0 & -5\end{bmatrix}，D(t)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}(\cos t+1) & \frac{1}{2}(1-\cos t)\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\lambda(t)=\left(\frac{1}{2}\right)(1+\sin t)$$

$\vec{\beta}'$ 和 $\vec{\pi}'$ 分別為

$$\vec{\beta}'\cong(0.5846,0.2141,0.2013)$$

$$\vec{\pi}'\cong(0.5846,0.2162,0.1992)$$

【例題三】（Q 與 $D(t)$ 是 4X4 矩陣）

〈一〉

當

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ D(t)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}} & \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{10}} & 1-e^{-\frac{t}{10}} \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{10}} & 1-e^{-\frac{t}{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(t)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{10}}\right)$$

$\bar{\beta}'$ 和 $\bar{\pi}'$ 分別為

$$\bar{\beta}'\cong(0.3265,0.2050,0.3441,0.1242)$$

$$\bar{\pi}'\cong(0.3252,0.2049,0.3457,0.1240)$$

〈二〉

當

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ D(t)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(\cos t+1) & \frac{1}{4}(\cos t+1) & \frac{1}{2}(1-\cos t) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\cos t+1) & \frac{1}{2}(1-\cos t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(t)=\left(\frac{1}{2}\right)(1+\sin t)$$

$\bar{\beta}'$ 和 $\bar{\pi}'$ 分別為

$$\bar{\beta}'\cong(0.3332,0.1889,0.3132,0.1645)$$

$$\bar{\pi}'\cong(0.3336,0.1892,0.3133,0.1637)$$

■

以上的三個例子，我們可以發現不論例子中包含的函數是遞增、遞減或是震盪，亦或發生率(hazard rate)是大是小，$\bar{\beta}'$ 及 $\bar{\pi}'$ 的值都很

接近，大約準確到小數點後兩位數左右。所以，從這樣的結果來觀察，好像是不是馬可夫過程(Markov process)變得不是那麼重要了。因此，在模型的穩定狀態機率(steady state probability)向量 $\bar{\beta}'$ 比較難計算的情況下(包括利用 $\left(I+\frac{Qt}{2^n}\right)^{2^n}$ 去逼近 $P(t)=e^{Qt}$ 與用 Q 的特徵值來解 $P(t)=e^{Qt}$ 兩種情形)，如果沒有要求準確度要非常高，也就是可以忍受小於 0.01 以下的誤差，則這個時候，我們可以選擇容易計算的 $\bar{\pi}'$，來近似我們想要的結果。

第五章 結論

當生產線尚未加入「人為疏失引發錯誤」這項干擾時，整個系統我們可以看成是一個具有微矩陣(infinitesimal matrix)Q且符合馬可夫性質(Markovian property)的模型。此時，要求模型的穩定狀態機率(steady state probability)向量是非常容易，只要穩定狀態機率(steady state probability)向量$\vec{\pi}'$滿足

$$\vec{\pi}'Q = \vec{0}'$$

$\vec{0}'$是零向量，再加上$\sum_i \pi_i = 1$的條件，$\vec{\pi}'$即可求出。

但是，工廠生產線的運作往往不是那樣的單純，生產線的狀態除了受到內在因素的作用，同時也會受到許多外來因素的影響，例如：人為疏失引發錯誤。此篇論文主要就是探討，當生產線加入了「人為疏失引發錯誤」這項干擾，整體已經是一個非馬可夫過程(Non-Markov process)時，此模型的穩定狀態機率(steady state probability)向量，也就是第三章所推導出來的(3.1.2)式

$$\vec{\beta}' = \frac{\int_0^\infty \int_0^t \vec{\alpha}' P(x)dx \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}$$

$$= \frac{\vec{\alpha}' \int_0^\infty P(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)dt}$$

所以，當生產線經過很長一段的時間，在(3.1.1)與(3.1.2)式中的Q、

$D(t)$ 與 $\lambda(t)$ 也已經被估計出來，利用此篇研究就可以計算出模型的穩定狀態機率(steady state probability)向量；在要求快速運算或是先初步了解整體狀態的概況之下，亦可以使用第四章所提出之穩定狀態的近似分配 π' 來求得。

而在工廠方面，得到生產線加入人為疏失引發錯誤這項干擾的整個過程之穩定狀態機率(steady state probability)，主要是想了解生產線處於狀態是良好的穩定狀態機率(steady state probability)是否在可容忍範圍以內，因為人為疏失幾乎不能避免。如果經過縝密仔細的評估之後，整個系統狀態良好的穩定狀態機率(steady state probability)真的低於沒有人為疏失的生產線之機率太多，此時，或許多花一些成本在改善降低這樣的問題是有必要的。

參考文獻

［1］John P. Klein, & Melvin L. Moeschberger (2003). Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data. 2nd edition. New York: Springer.

［2］Nan Fu Peng (1996) “Spectral Representations of the Transition Probability Matrices for Continuous Time Finite Markov Chains” Journal of Applied Probability 33, 28-33

［3］Ross, S. M. (1996). Stochastic Processes. 2nd edition. New York: Wiley.