國 立 交 通 大 學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

以遞迴方法求服務率不同的 M/M/s/s 佇列系統

之極限機率分配

Using a Recursive Method to Solve the Limiting

Distribution of M/M/s/s Queue with Different Service Rate

研究生：黃玉均

指導教授：彭南夫　博士

中華民國 九十四 年 六 月

以遞迴方法求服務率不同的 M/M/s/s 佇列系統

之極限機率分配

Using a Recursive Method to Solve the Limiting Distribution of M/M/s/s Queue with Different Service Rate

研究生：黃玉均 Student：Yu-Chun Huang

指導教授：彭南夫 博士 Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

國 立 交 通 大 學 理 學 院

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Institute of Statistics

College of Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In Statistics

June 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年六月

以遞迴方法求服務率不同的 M/M/s/s 佇列系統之極限機率分配

研究生：黃玉均　　　　　　　　　　指導教授：彭南夫　博士

國立交通大學統計學研究所

摘　　要

一般討論佇列系統都是假設服務人員服務率相同，在本篇論文中我們稍加推廣，考慮一個佇列系統，以服務率不同將服務人員分為兩部分：第一部份形成一 M/M/n/n 佇列系統，第二部分相似於 M/M/m/m 佇列系統，但顧客只有在第一部份的服務人員都在忙碌中才進入第二部分接受服務。在此種模型下以遞迴方法求其極限機率分配；並且進一步以損失的觀點，找出這兩組服務人員人數的最佳分配以達到最小之損失。

關鍵字：M/M/n/n 佇列系統

Using a Recursive Method to Solve the Limiting Distribution of M/M/s/s Queue with Different Service Rate

Student : Yu-Chun Huang Advisors : Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistics

National Chiao Tung University

ABSTRACT

Consider a queueing system having two separative parts each with different service rate. The first part of the system is an M/M/n/n queue and the second part is similar to an M/M/m/m queue with the exception that a customer enters the second part of the system only if the first part is full. We use a recursive method to solve the limiting probability distribution of the queueing system. Also, we find the optimal number of servers such that minimizing the loss of the systems.

Key word : M/M/n/n queue

誌　　謝

隨著論文的完成，兩年研究所生活也將告一段落，心中浮現許多回憶，老師們的諄諄教誨，和同學們一起努力完成課業的身影，以及生活的點點滴滴，都是我寶貴的記憶。

這篇論文的完成，要感謝我的指導教授彭南夫老師，不厭其煩的指導我，並且在我有問題無法解決時，總是願意排出時間為我解惑，真的非常感謝。同時也非常感謝所長盧鴻興老師以及口試委員鄭天澤、王鴻龍老師，在百忙中抽空幫我口試，也給我許多寶貴的建議。此外也要感謝一起跟著彭南夫老師做研究的美麗夥伴，辰昀、宇葶、翊琳，一起讀書、看論文，互相討論程式的結果，沒有你們，獨自奮鬥是很寂寞的。還有同一個研究室的同學，穎劭、碰仔、育仕，大家一起窩在研究室聊天搞笑以及討論作業的情景是我一段深刻的回憶。打羽球的夥伴，景嵐、雅靜、秀仁、穗碧、球友們，兩年羽球場上的切磋，讓我球技進步不少，也認識了更多不同的人。當然不能忘記我可愛的室友筱薇，總是和我聊天聊到半夜，讓我在寢室的生活非常開心。最後是我的家人，在求學的過程中若是沒有你們的支持，這一路將會是非常辛苦的，謝謝你們。

在新竹的兩年研究所生活，感謝所有陪伴著我度過歡樂辛苦日子的朋友們，即將畢業了，在此獻上我的祝福。

玉均于交通大學統計所

民國九十四年六月

目　　錄

表 目 錄

圖 目 錄

一、 緒論

在日常生活中，總是不可避免的需要排隊等待處理事情，例如買東西排隊等待結帳，去郵局匯款要先抽取號碼等待有空的櫃檯，排隊等候搭乘電梯。此外，電腦系統在處理資料時，也是必須一筆一筆資料送進處理器，等到處理完一筆，才能處理下一筆資料。在這樣的情況下，若是服務人員處理的速度過慢，就會造成排隊的顧客越來越多，到達顧客看到太多人排隊，也許就會不想進來消費，如此便會造成顧客的流失而有損失。因此，我們便對這樣的現象感到興趣，在統計上我們以佇列系統（queueing systems）來描述此一現象，並且以此種模型來作統計推論。

一般在處理佇列系統時，假設服務人員的處理速率都是相同的，但在現實中其實是很難達到此種理想之狀況。王士維學長曾提出處理相同服務率的佇列系統極限值的有效方法（交通大學統計學研究所，民國九十年)，在此篇論文中對此稍加推廣，假設以處理率之不同將服務人員分為兩批，在特定的一些假設條件下，以遞迴的方法求得此種系統在穩定狀態下的機率分配。以這種遞迴的方法處理極限機率，有一個很大的好處為，當服務人員很多時，微矩陣Q之維度會很大；而以遞迴方法迭代時，可將矩陣之計算減少很多，使用電腦計算時將會更有效率。在本文章最後以損失的觀點找出最佳的服務人員分配以達到最小之損失。

二、 基本理論

本篇論文所用到之基本理論主要為隨機過程中之生死佇列系統，在本章中稍加描述，參考資料來自於[1]，[2]，[3]。

2.1 馬可夫鏈（Markov Chains）

考慮一個系統其狀態為有限的，令 S 表示其狀態之集合且假設 S 為整數的子集合，此集合稱為系統之狀態空間（state space）。令系統在離散之時間點 $n = 0,1,....,$ 觀察到且以 X_n 表示系統在時間點 n 觀察到之狀態。通常我們以 $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\cdots\}$ 表示一隨機過程（stochastic process）其狀態空間為 $S = \{E_i, i = 1,2,\cdots\cdots\}$，因此 $\sum_i P(X_n = E_i) = 1, \forall n$。在不失一般性之下，我們假設 $E_j = j, j = 1,2,....$。許多系統擁有一個特別的性質，當給定現在的狀態時，其未來不受到過去狀態之影響，此一性質稱為馬可夫性質（Markov property），而有此一性質的系統稱之為馬可夫鏈（Markov chains）。更仔細的定義馬可夫性質可以

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

表示，上式對任意 n 都成立且 $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ 屬於狀態空間 S。其中條件機率 $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}$ 稱為轉移機率（transition probability），轉移機率與 n 獨立，此性質稱為齊次性（homogeneous），且 P_{ij} 稱為一步轉移機率，滿足 $\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1, \forall i$。

連續時間之馬可夫鏈（CTMC）與離散時間之馬可夫鏈（DTMC）類似，同樣符合馬可夫性質，也就是說一過程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 為一 CTMC 若對任意之 $s,t \geq 0$ 且任意之 $i, j, x(u)$，符合

$$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i, X(u)=x(u), 0 \le u \le s)$$
$$=P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$$

此外，若 $P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$ 與 s 為獨立的，則我們說此 CTMC 有穩定的（stationary）或是齊次（homogeneous）之轉移機率。CTMC 每次進入狀態 i 有以下性質：

(1) 在進入另一個不同狀態之前的停留時間為一比率（rate）為 ν_i 的指數分配（Exponentially distributed），且

(2) 當此過程要離開狀態 i 下一刻進入狀態 j 的機率以 P_{ij} 表示，$\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$。

令 $q_{ij} = \nu_i P_{ij}, \forall i \neq j$，我們稱 q_{ij} 為由狀態 i 到狀態 j 之轉移率（transition rate），即為當過程在狀態 i 時，轉移至狀態 j 之比率。爲了與離散型馬可夫鏈之轉移機率作區別，我們以 $P_{ij}(t)$ 表示一 CTMC 之轉移機率，表示現在在狀態 i 經過時間 t 後，會到狀態 j 之機率。也就是

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$$

以矩陣的形式表示，寫成

$$\mathbf{P(t)} = \left(P_{ij}(t)\right) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & . & . & . \\ P_{21} & P_{22} & . & . & . \\ . & . & . & & \\ . & . & & . & \\ . & . & & & . \end{bmatrix}$$

P 稱為轉置機率矩陣（transition probability matrix）。另外也定義

$$\mathbf{Q} = \left(q_{ij}\right) \quad , \quad q_{ii} = -\nu_i = -\sum_{k \neq i} q_{ik} < 0$$

稱為轉置率矩陣（transition rate matrix），或稱為微矩陣（infinitesimal matrix），因此 Q 滿足列和為零的性質，即為 $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{1}} = \tilde{\mathbf{0}}$。

2.2　生死過程（Birth and Death processes）

一個連續時間的馬可夫鏈，其狀態空間為$\{0,1,2,\cdots\cdots\}$。若此 CTMC 狀態移動只有加一個或是減一個，也就是說，其轉移率在$|i-j|>1$時，$q_{ij}=0$，此種過程我們稱之為生死過程，因此一生死過程若現在狀態為ｉ，下一刻進入的狀態則為ｉ＋１或是ｉ－１。通常此種過程用來描述人口數目，所以當狀態增加１時，稱為一”生”發生；反之，狀態減少１時，稱為一”死”發生，因此我們以λ表示生率（birth rate），以μ表示死率（death rate），即為

$$\lambda_i = q_{i,i+1} \quad , \quad \mu_i = q_{i,i-1}$$

我們可將其想成，當系統中有ｉ人時，下一刻為生的經過時間為一比率為λ_i指數分配；反之，下一刻為死的經過時間為一比率為μ_i的指數分配，且生與死之間是獨立的。生死過程之微矩陣表示為

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & .. \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & .. \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & .. \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

2.3　佇列系統（Queueing Systems）

一般我們描述一個佇列系統時，分成幾個部分：

(1)　顧客到達之過程（arrival process）：

以顧客到達的間隔時間描述，通常假設間隔時間為某一機率分配，若以$A(t)$表示其機率分配，則

$$A(t) = P[\text{time between arrivals} \le t]$$

我們經常假設到達顧客為一卜瓦松過程，即表示顧客到達之間隔時間為一指數分配，以M表示；若是一般的機率分配，則以G表示。

(2) 服務時間（service time）

顧客接受服務所花的時間，以 $B(x)$ 表示服務時間的機率分配，則

$$B(x) = P[\text{service time} \le x]$$

若是服務時間服從指數分配，則以M表示；若是一般的機率分配則以G表示。

(3) 容納數目（storage capacity）

表示此系統中最多可容納的顧客數，通常以K表示。

(4) 服務人員數（number of service stations）

若是服務人員超過一人，每個人的服務時間分配也許會不同，但一般而言假設為相同的。

(5) 排隊規則（the queueing discipline）

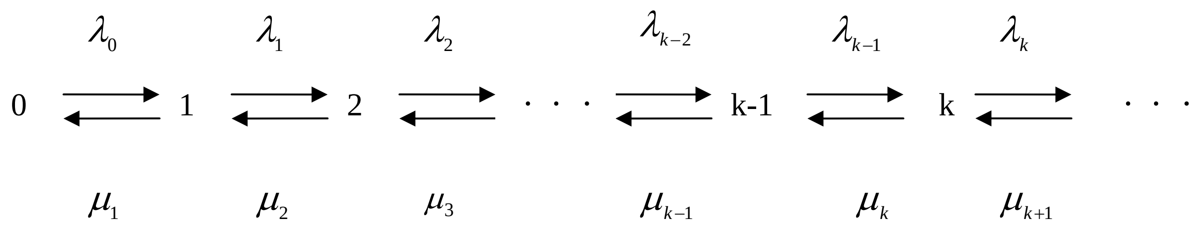
用以描述排隊顧客接受服務的順序。舉例來說，先到先服務（first-come-first-serve, FCFS），後到先服務（last-come-first-serve, LCFS），或者是隨機接受服務。

因此我們通常以 M/M/m/K 的符號表示一個佇列系統，顧客到達為卜瓦松過程，服務時間為指數分配，有m位服務人員以及系統最多可容納K位顧客。我們在佇列系統中，有興趣的量例如顧客的等待時間、系統中的顧客數、系統空閒的時間（idle period）等。

2.4 生死佇列系統（Birth-Death Queueing systems）之極限機率

考慮一個佇列系統，狀態的改變為一生死過程，$X(t)$ 表示在時間 t

系統中的顧客數，狀態空間為$\{0,1,2,\cdots\}$，狀態遷移過程見＜圖 1＞。



-圖 1-

生死過程狀態遷移圖

定義 $P_k(t)=P(X(t)=k)$，表示系統在時間 t 時狀態為 k 的機率。由動態的觀點，從＜圖 1.1＞可看出在狀態 k 時，離開狀態 k 的比率與進入狀態 k 的比率之差即為系統在狀態 k 之流動率。因此我們將焦點放在狀態 k ，觀察在時間 t 的流動率，可表示為

狀態 k 之流入率 $=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)$

狀態 k 之流出率 $=(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)$

狀態 k 之流動率 $=\dfrac{dP_k(t)}{dt}$

因此便得到等式

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)-(\lambda_k+\mu_k)P_k(t) \quad , \quad k\geq 1$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt}=\mu_1P_1(t)-\lambda_0P_0(t) \qquad (2.1)$$

長時間的觀察下，當系統進入穩定狀態時，可以說此一系統已無瞬間性的行為，因此我們可以 p_k 表示系統在狀態 k 時的極限機率，定義為

$$p_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t)$$

且在任一狀態之流動率為零，也就是說，在任一狀態，流出率＝流入率，

因此可將（2.1）改寫為

$$\lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k = 0 \quad , \quad k \geq 1$$

$$\mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0$$

加上機率總合為一的條件

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

我們便可以得到此一系統之極限機率分配。

以矩陣的形式，令$\tilde{P}' = [p_1, p_2, \cdots]$，表示此系統之極限機率向量，Q 為此系統之轉置率矩陣，可得到

$$\tilde{P}' \cdot Q = \tilde{0}'$$

$$\tilde{P}' \cdot \tilde{1} = 1$$

三、 M/M/s/s Queue 模型之設定

一般在討論佇列系統時，都是假設服務人員(server)處理速率皆一致，但實際的日常生活中，經常是處理速度上是有差異的，因此在此想考慮一個佇列系統的服務人員分成兩組，處理速率是不一樣的。舉例來說，一個電腦系統有兩個處理器，一為主要的處理器，處理速度較快；而另一個為備用的處理器，處理速度較慢。訊息進來時，送進主要處理器進行處理，當主處理器滿了來不及處理時，便將訊息送進備用的處理器；若是處理器皆忙碌中，就會遺失下一個進來的訊息。而我們想知道，在這樣的系統之下，長時間下系統趨於穩定時每一個狀態的機率分配。

在此考慮一個 M/M/s/s 佇列系統，符合以下幾個假設：

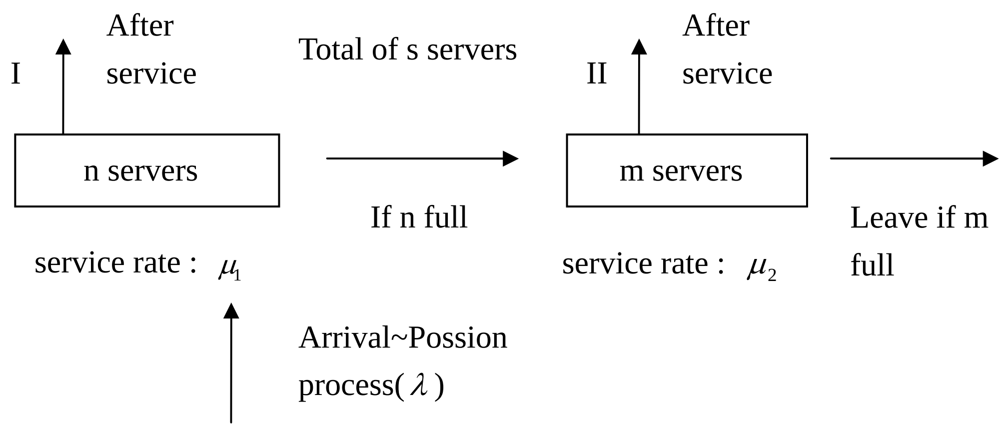
(1) 到達的顧客形成一個卜瓦松過程，也就是說顧客到達的間隔時間(interarrival time)為一 $Exp(\lambda)$ 分配。

(2) 共有 s 位服務人員(server)，分為兩個部分：一為主要的服務台，有 n 位服務人員；一為備用的服務台，有 m 位服務人員。兩部分的人員服務速率不同，主要之服務台服務時間(service time)為一 $Exp(\mu_1)$ 分配，而備用之服務台服務時間為一 $Exp(\mu_2)$ 分配，且 $s = n + m$。

(3) 到達的顧客若見到有空的服務人員，則進入接受服務；若 s 個服務人員都在忙碌中，則到達的顧客離開，不會進入系統中。

(4) 最後我們假設，到達的顧客優先進入主要服務台接受服務，若進入的顧客發現主要的服務台 n 個服務人員皆在忙碌中，則進入備用的服務台接受服務。

若以圖形表示，參見＜圖 2＞。而我們有興趣的是在長時間進入穩定狀態下，系統內顧客人數的機率分配。



- 圖 2 -

模型設定示意圖

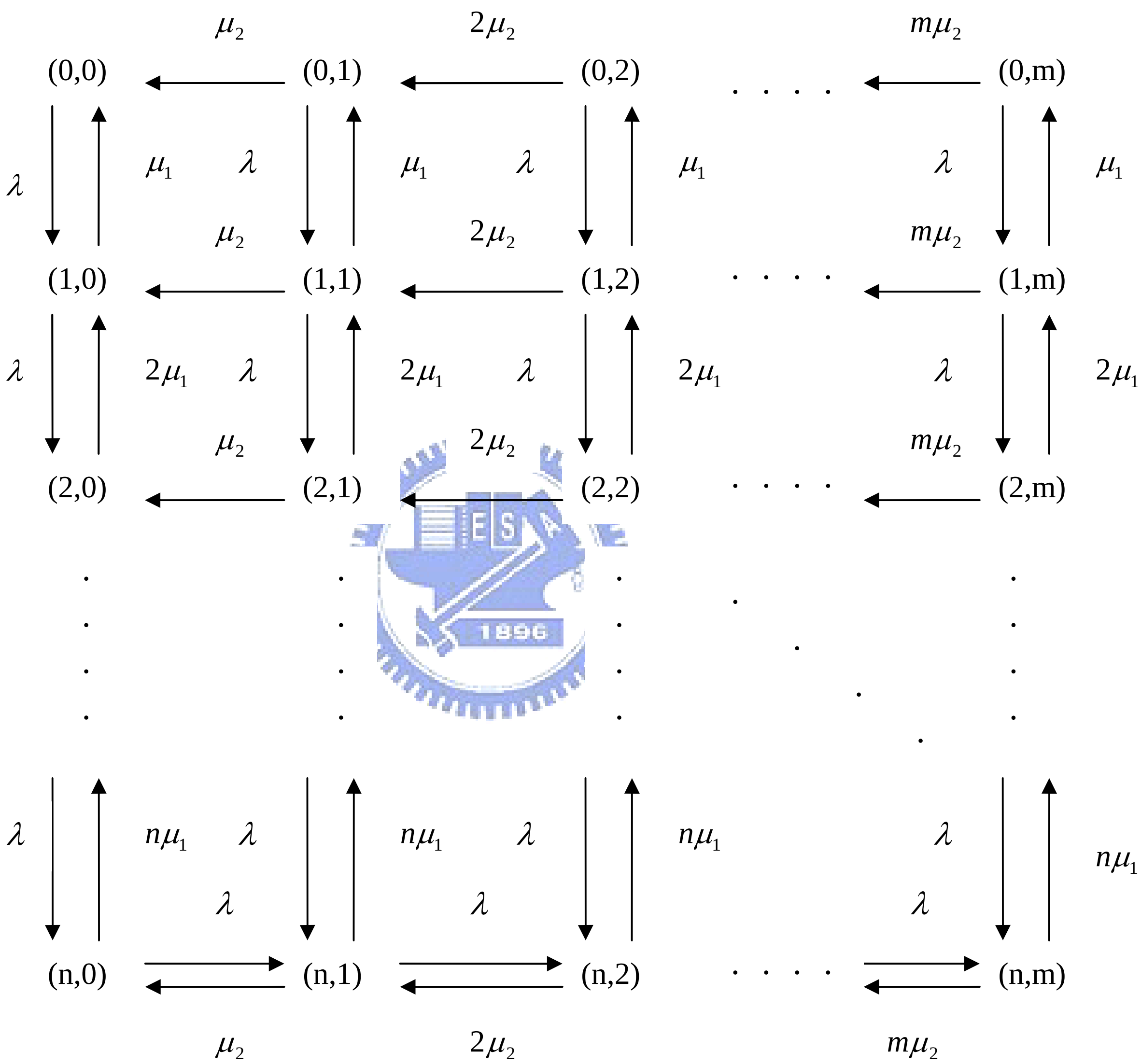
假設 I 為主要的服務人員，顧客到達優先進入；II 為備用服務人員。現在我們令

X = 長時間之後，穩定狀態下，在 I 接受服務的顧客數

Y = 長時間之後，穩定狀態下，在 II 接受服務的顧客數

因此，(X,Y) 形成一個二維馬可夫鏈，狀態空間（state space）= $\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,m),(1,0),(1,1),\cdots,(1,m),\cdots,(n,0),\cdots,(n,m)\}$ 共 $(n+1)\times(m+1)$ 個狀態，且其狀態遷移圖形可由＜圖 3＞表示。舉例說明：狀態由(0, 0)到(1, 0)表示系統內 I，II 皆沒有顧客，下一刻進入了一位顧客，到達率為λ。反過來由(1, 0)到(0, 0)表示，在 I 接受服務的顧客結束服務而離開，服務率為μ_1。(0, 1)到(0, 0)則表示在 II 接受服務的顧客結束服務離開，服務率為μ_2。在此要注意的是，(0, 0)到(0, 1)是不可能發生的，因為進入的顧客若 I 為空則進入 I 接受服務。因此只有在 $X=n$ 的狀態，Y 才會增加。以此類推，便可以得到整個狀態遷移的過程。在此我們發現，狀態遷移都只在附近的狀態移動，只有加一個顧客或是一個顧客離開的狀態才會發生，而不會有兩個以上顧客進入或是兩個以上顧客離開的狀

況，所以此佇列系統模型符合一個二維生死過程。且因為到達顧客優先進入 I，所以 X 為一 M/M/n/n queue，X 和 Y 是不獨立的。



-圖 3-

二維馬可夫鏈狀態遷移圖

四、 進入穩定狀態下系統內顧客人數之機率分配

4.1 找出微矩陣(infinitesimal matrix) Q

我們想要知道在長時間進入穩定狀態下，系統中顧客人數的機率分配，首先要將此二維的馬可夫鏈轉換成一維。因此我們將此 $(n+1)\times(m+1)$ 狀態令為 $1, 2, \cdots, (n+1)\times(m+1)$，意即狀態空間轉變為 $\{1, 2, 3, \cdots,\ (n+1)\times(m+1)\}$，與原本的二維狀態對應，即為＜表一＞

表一

一維	1	2	3	‧‧‧‧	m+1
二維	(0,0)	(0,1)	(0,2)	‧‧‧‧	(0,m)
一維	m+2	m+3	m+4	‧‧‧‧	2(m+1)
二維	(1,0)	(1,1)	(1,2)	‧‧‧‧	(1,m)
	．	．	．		．
	．	．	．		．
一維	n(m+1)+1	n(m+1)+2	n(m+1)+3	‧‧‧‧	(n+1)(m+1)
二維	(n,0)	(n,1)	(n,2)	‧‧‧‧	(n,m)

＜表一＞之閱讀方法為：第一列一維狀態從左到右對應到第二列從左到右之二維狀態，第三列一維狀態對應到第四列之二維狀態，以此類推，如此便可得到此一維馬可夫鏈的微矩陣$Q_{(n+1)(m+1)\times(n+1)(m+1)}$表示為

$$Q=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & A_{n,n-1} & A_{n,n} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & A_{n+1,n} & A_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

其中A_{ij}為$(m+1)\times(m+1)$的方陣，任意i,j，且

$$A_{i+1,i}=i\mu_1\cdot I \quad , \quad A_{i,i+1}=\lambda\cdot I \quad , \quad i=1,\dots,n$$

以A_{21}與A_{12}為例子說明如下：

A_{21}為$(m+1)\times(m+1)$的方陣，表示的轉置率(transition rate)為

$$A_{21}=\begin{array}{cc} \text{state} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & m & m+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} m+2 \\ m+3 \\ m+4 \\ . \\ . \\ . \\ 2(m+1) \end{array} & \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \mu_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

矩陣的(1，1)個元素，表示從狀態 m+2（二維狀態為(1,0)）到狀態 1（二維狀態為(0,0)）的轉置率為μ_1；而從狀態 m+2（二維狀態為(1,0)）到狀態 2（二維狀態為(0,1)）不可能發生，所以轉置率等於 0，第(1，2)個元素為 0，以此類推便可得到此矩陣。同樣的道理來推得A_{12}矩陣為

$$A_{12} = \begin{array}{cc} \text{state} & \begin{matrix} m+2 & m+3 & m+4 & \cdots & 2(m+1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

再來找出對角元矩陣。對角元矩陣的對角線元素為整個大矩陣$Q_{(n+1)(m+1)\times(n+1)(m+1)}$的對角線元素，由微矩陣列和為零的性質，我們可以推得$A_{jj}, j=1,\ldots,n+1$的矩陣如下：

當 j=1 時，A_{11}方陣的狀態轉換為 1, 2, ⋯, m+1（對照二維狀態為(0,0), (0,1), ⋯, (0,m)），因此A_{11}寫成

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & m & m+1 \end{array} \\
A_{11} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ m \\ m+1 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & .\ . & 0 & 0 \\
\mu_2 & -\lambda-\mu_2 & 0 & .\ . & 0 & 0 \\
0 & 2\mu_2 & -\lambda-2\mu_2 & .\ . & 0 & 0 \\
. & . & . & & . & . \\
. & . & . & & . & . \\
0 & 0 & 0 & .\ . & -\lambda-(m-1)\mu_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .\ . & m\mu_2 & -\lambda-m\mu_2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(state: 1, 2, 3, ⋯, m, m+1)

第(2，1)個元素代表從狀態 2（二維狀態(0,1)）轉換到狀態 1（二維狀態(0,0)）的轉置率為μ_2；由於微矩陣滿足列和為零，A_{12}矩陣的第(1，1)元素為λ，因此矩陣A_{11}第(1，1)個元素為$-\lambda$，以此方法推得對角元元素皆為負。

當 j=2, ⋯, n 時，A_{jj}方陣的狀態轉換為
{(j-1)(m+1)+1,(j-1)(m+1)+2, ⋯, j(m+1)}（對照二維狀態為(j-1,0),(j-1,1), ⋯,(j-1,m)），因此可以將轉置矩陣寫成

$$
A_{jj} = \begin{bmatrix}
-\lambda-(j-1)\mu_1 & 0 & .\ .\ . & 0 & 0 \\
\mu_2 & -\lambda-(j-1)\mu_1-\mu_2 & .\ .\ . & 0 & 0 \\
0 & 2\mu_2 & .\ .\ . & 0 & 0 \\
. & . & & . & . \\
. & . & & . & . \\
. & . & & . & . \\
0 & 0 & .\ .\ . & m\mu_2 & -\lambda-(j-1)\mu_1-m\mu_2
\end{bmatrix}
$$

最後為$A_{n+1,n+1}$，狀態為{n(m+1)+1, n(m+1)+2, …, (n+1)(m+1)}（對照二維狀態為(n, 0), (n, 1), …, (n, m)），因為此時$X=n$，所以到達的顧客進入II 接受服務，轉置率矩陣寫成

$$A_{n+1,n+1}=\begin{bmatrix} -\lambda-n\mu_1 & \lambda & 0 & .\ . & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda-n\mu_1-\mu_2 & \lambda & .\ . & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_2 & -\lambda-n\mu_1-2\mu_2 & .\ . & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & .\ . & m\mu_2 & -n\mu_1-m\mu_2 \end{bmatrix}$$

如此我們便得到此一維馬可夫鏈之微矩陣$Q_{(n+1)(m+1)\times(n+1)(m+1)}$。

4.2 以遞迴方法求極限機率

接下來我們想要求出極限機率。首先將此一維馬可夫鏈之極限機率分配向量$\tilde{P}'_{(n+1)(m+1)}$寫成

$$\tilde{P}'=(\tilde{P}_1',\tilde{P}_2',\cdots,\tilde{P}_n',\tilde{P}_{n+1}') \qquad (4.2)$$

$\tilde{P}_i'$為一(m+1)維列機率向量，i=1, …, n+1，表示的狀態為{(i-1)(m+1)+1, (i-1)(m+1)+2, …, i(m+1)}，且此向量$\tilde{P}'$會滿足

$$\begin{matrix}\tilde{P}'\tilde{1}=1 \\ \tilde{P}'Q=\tilde{0}'\end{matrix} \quad , \quad \tilde{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\.\\.\\.\\1\end{pmatrix}_{(n+1)(m+1)} \quad , \quad \tilde{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix}_{(n+1)(m+1)}$$

將(4.1)與(4.2)式及 $A_{i+1,i} = i\mu_1 \cdot I$ ，$A_{i,i+1} = \lambda \cdot I$ 代入 $\tilde{P}'Q = \tilde{0}'$ ，便可得到(n+1)個等式：

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_1' A_{11} + \tilde{P}_2' A_{21} = \tilde{0}'_{(m+1)} \Rightarrow \tilde{P}_1' A_{11} + \mu_1 \tilde{P}_2' = \tilde{0}'_{(m+1)} \\
&\tilde{P}_1' A_{12} + \tilde{P}_2' A_{22} + \tilde{P}_3' A_{32} = \tilde{0}'_{(m+1)} \Rightarrow \lambda \tilde{P}_1' + \tilde{P}_2' A_{22} + 2\mu_1 \tilde{P}_3' = \tilde{0}'_{(m+1)} \\
&\tilde{P}_2' A_{23} + \tilde{P}_3' A_{33} + \tilde{P}_4' A_{43} = \tilde{0}'_{(m+1)} \Rightarrow \lambda \tilde{P}_2' + \tilde{P}_3' A_{33} + 3\mu_1 \tilde{P}_4' = \tilde{0}'_{(m+1)} \\
&\qquad \vdots \\
&\tilde{P}_n' A_{n,n+1} + \tilde{P}_{n+1}' A_{n+1,n+1} = \tilde{0}'_{(m+1)} \Rightarrow \lambda \tilde{P}_n' + \tilde{P}_{n+1}' A_{n+1,n+1} = \tilde{0}'_{(m+1)}
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

其中當 k=2, ⋯, n 時，可寫成一般式

$$\lambda \tilde{P}_{k-1}' + \tilde{P}_k' A_{kk} + k\mu_1 \tilde{P}_{k+1}' = \tilde{0}'_{(m+1)}$$

由(4.3)我們可以推得

$$\tilde{P}_2' = -\frac{1}{\mu_1} \tilde{P}_1' A_{11} = (-1)\tilde{P}_1' \frac{A_{11}}{\mu_1} = (-1)\tilde{P}_1' D_1$$

$$\tilde{P}_3' = -\frac{1}{2} \tilde{P}_1' \left[\frac{\lambda}{\mu_1} I - \frac{1}{\mu_1^2} A_{11} A_{22} \right] = -\frac{1}{2} \tilde{P}_1' D_2$$

我們令

$$\tilde{P}_j' = -\frac{1}{j-1} \tilde{P}_1' D_{j-1} \quad , \quad j = 2, \cdots, n+1 \qquad (4.4)$$

由 $\lambda \tilde{P}_{k-1}' + \tilde{P}_k' A_{kk} + k\mu_1 \tilde{P}_{k+1}' = \tilde{0}'_{(m+1)}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{P}_{k+1}' &= -\frac{1}{k\mu_1} \left[\lambda \tilde{P}_{k-1}' + \tilde{P}_k' A_{kk} \right] = -\frac{1}{k\mu_1} \left[\lambda \cdot \frac{-1}{k-2} \tilde{P}_1' D_{k-2} + \frac{-1}{k-1} \tilde{P}_1' D_{k-1} A_{kk} \right] \\
&= -\frac{1}{k} \tilde{P}_1' \left[-\frac{1}{k-2} \cdot \frac{\lambda}{\mu_1} D_{k-2} - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{\mu_1} D_{k-1} A_{kk} \right] \\
&= -\frac{1}{k} \tilde{P}_1' D_k
\end{aligned}$$

因此得到

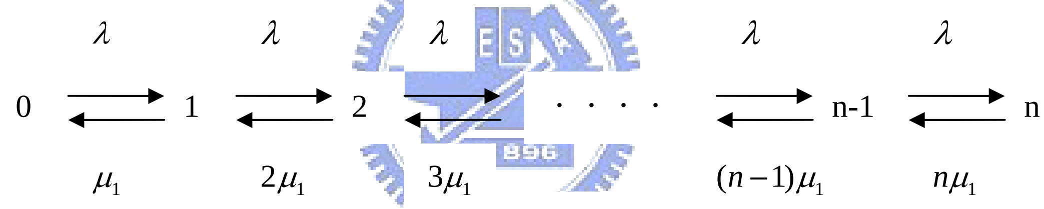
$$D_1 = \frac{A_{11}}{\mu_1} \quad , \quad D_2 = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot I - \frac{1}{\mu_1^2} \cdot A_{11} A_{22}$$

$$D_k = -\frac{1}{k-2} \cdot \frac{\lambda}{\mu_1} D_{k-2} - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{\mu_1} D_{k-1} A_{kk} \quad , \quad k = 3, \cdots, n \tag{4.5}$$

用此遞迴的方法可將 $\widetilde{P}_2^{'}, \widetilde{P}_3^{'}, \cdots, \widetilde{P}_{n+1}^{'}$ 以 $\widetilde{P}_1^{'}$ 表示，因此若將 $\widetilde{P}_1^{'}$ 解出代入(4.4)，便可求得所有 $\widetilde{P}_i^{'}, i = 2, \cdots, n+1$。

4.3 $\widetilde{P}_1^{'}$ 之求法

因為此系統假設到達的顧客優先進入 I 接受服務，因此 X 形成一 M/M/n/n queue，X 的邊際機率分配可由生死過程流入率＝流出率的性質求得（Sheldon M Ross, [2]），X 的狀態遷移過程可用<圖 4>表示。



-圖 4 -

X 的狀態遷移過程

將 X 的邊際機率分配表示為

$$P(X = i-1) = \pi_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n+1$$

由流入率＝流出率，可得到以下 n+1 個等式

$$\lambda \pi_1 = \mu_1 \pi_2$$

$$(\lambda + \mu_1)\pi_2 = \lambda \pi_1 + 2\mu_1 \pi_3$$

$$(\lambda + 2\mu_1)\pi_3 = \lambda \pi_2 + 3\mu_1 \pi_4$$

$$\vdots$$

$$\lambda \pi_n = n\mu_1 \pi_{n+1}$$

由上述式子可用遞迴方法得到

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{\mu_1}\pi_1$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2\pi_1$$

$$\vdots$$

$$\pi_k = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k-1}\pi_1 \quad , \quad 2\le k\le n+1$$

又因為機率總合為 1，$\sum_{k=1}^{n+1}\pi_k = 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1}\pi_k = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k-1}\pi_1 = \pi_1\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k} = 1$$

因此，我們得到

$$\pi_1 = P(X=0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k}}$$

$$\pi_j = P(X=j-1) = \frac{\frac{1}{(j-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{j-1}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k}} \quad , \quad 2\le j\le n+1 \qquad (4.6)$$

因此 X 的邊際機率值 $P(X=0), P(X=1), \cdots, P(X=n)$ 皆可用(4.6)式求出。

回到二維狀態馬可夫鏈，我們現在想要求出 $\widetilde{P}_1'$，可由(4.3)之最後一個等式

$$\lambda\widetilde{P}_n' + \widetilde{P}_{n+1}'A_{n+1,n+1} = \widetilde{0}' \quad \Rightarrow \quad \lambda\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\widetilde{P}_1'D_{n-1} - \frac{1}{n}\cdot\widetilde{P}_1'D_nA_{n+1,n+1} = \widetilde{0}'$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{P}_1^{'}\left[\frac{-\lambda}{n-1}D_{n-1}-\frac{1}{n}D_nA_{n+1,n+1}\right]=\tilde{0}^{'} \quad \cdots(*)$$

此齊次方程式有無窮多解，因此要加上限制式才能得到唯一解。而我們知道

$$\tilde{P}_1^{'}\cdot\tilde{1}=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+\cdots+P(X=0,Y=m)$$

$$=P(X=0)$$

為 $X=0$ 的邊際機率值，所以我們從(4.6)可得到限制式

$$\tilde{P}_1^{'}\cdot\tilde{1}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^k} \quad \cdots(**)$$

由(*)及(**)可以解得唯一的 $\tilde{P}_1^{'}=\left(p_{11},p_{12},\cdots,p_{1m+1}\right)$，$p_{11}$ 為二維狀態 $(X,Y)=(0,0)$ 的極限機率，p_{12} 為 $(X,Y)=(0,1)$ 的極限機率，再將 $\tilde{P}_1^{'}$ 代入(3.4)便可得到其他的 $\tilde{P}_j^{'}, j=2,\cdots,n+1$，且

$$\tilde{P}_j^{'}\cdot\tilde{1}$$

$$=P(X=j-1,Y=0)+P(X=j-1,Y=1)+\cdots+P(X=j-1,Y=m)$$

$$=P(X=j-1)$$

為 $X=j-1$ 的邊際機率值，因此 $\tilde{P}_j^{'}$ 滿足(4.6)。此外，也可以得到 Y 的邊際機率分配

$$\left(P(Y=0),P(Y=1),\cdots,P(Y=n-1),P(Y=m)\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{P}_i^{'}$$

用＜表二＞表示所有狀態的極限機率分配。

＜表二＞

state

X \ Y	0	1	2	‧ ‧	m	$f_X(x)$
0	p_{11}	p_{12}	p_{13}	‧ ‧	$p_{1,m+1}$	$P(X=0)$
1	p_{21}	p_{22}	p_{23}	‧ ‧	$p_{2,m+1}$	$P(X=1)$
2	p_{31}	p_{32}	p_{33}	‧ ‧	$p_{3,m+1}$	$P(X=2)$
.	.	.	.		.	.
.	.	.	.		.	.
n	$p_{n+1,1}$	$p_{n+1,2}$	$p_{n+1,3}$	‧ ‧	$p_{n+1,m+1}$	$P(X=n)$
$f_Y(y)$	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$	‧ ‧	$P(Y=m)$	1

＜說明＞：

1. 第一列以向量 $\tilde{P}_1'$ 表示，第二列以向量 $\tilde{P}_2'$ 表示，以此類推。
2. 列和為 X 的邊際機率，所以 $\tilde{P}_j' \cdot \tilde{1} = P(X=j-1)$。
3. 行和為 Y 的邊際機率，因此向量 $\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{P}_i'$ 的第 j 個值=$P(Y=j-1)$。

4.4 模擬過程

若想要實際使用此遞迴方法求得極限機率分配，其過程如下：

步驟一：給定 $\lambda, m, n, \mu_1, \mu_2$，代入 $A_{ij}, \forall i, j$（4.1 節）

步驟二：利用遞迴方法

$$D_1 = \frac{A_{11}}{\mu_1} \quad , \quad D_2 = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot I - \frac{1}{\mu_1^2} A_{11} A_{22}$$

$$D_k = -\frac{1}{k-2} \cdot \frac{\lambda}{\mu_1} D_{k-2} - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{\mu_1} D_{k-1} A_{kk} \quad , \quad k = 3, \cdots, n \tag{4.5}$$

求得所有 $D_j, j = 1, \cdots n$

步驟三：將 $\lambda, n, \mu_1, D_{n-1}, D_n$ 代入

$$\tilde{P}_1' \left[\frac{-\lambda}{n-1} D_{n-1} - \frac{1}{n} D_n A_{n+1,n+1} \right] = \tilde{0}'$$

$$\tilde{P}_1' \cdot \tilde{1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^k}$$

解出 $\tilde{P}_1'$

步驟四：利用（4.4）

$$\tilde{P}_j' = -\frac{1}{j-1} \tilde{P}_1' D_{j-1} \quad , \quad j = 2, \cdots, n+1$$

將 $\tilde{P}_1'$ 和 D_j 代入得到 $\tilde{P}_j', j = 2, \cdots, n+1$

步驟五：求出 X 的邊際機率分配以及 Y 的邊際機率分配：

$$\tilde{P}_j' \cdot \tilde{1} = P(X = j-1) \quad , \quad j = 0, \cdots n$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_j' = \left(P(Y=0), P(Y=1), \cdots, P(Y=n-1), P(Y=m) \right)$$

五、 舉例模擬

在前一章介紹了理論結果，在此舉五個例子來實際驗證。方法參考上一節之模擬過程，最後驗證用遞迴方法得到之$\widetilde{P}_j^{'}$是否滿足(4.6)式

$$\widetilde{P}_j^{'} \cdot \widetilde{1} = P(X = j-1) = \frac{\frac{1}{(j-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{j-1}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k}}$$

在此五個例子都假設顧客到達率相同，$\lambda = 1$，總共有$s = 13$位服務人員。說明如下：

主要服務人員有n位，服務率平均為μ_1位/單位時間。

備用服務人員m位，服務率平均為μ_2位/單位時間。

想知道長時間下，當系統處於穩定狀態，每個狀態的極限機率分配

$$\widetilde{P}_{(n+1)(m+1)} = (\widetilde{P}_1^{'}, \widetilde{P}_2^{'}, \cdots, \widetilde{P}_n^{'}, \widetilde{P}_{n+1}^{'})$$

$$\widetilde{P}_i^{'} = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{im})$$

以及X和Y之邊際機率分配。

<case 1>和<case 2> $\mu_1 > \lambda > \mu_2$

<case 3>和<case 4> $\mu_2 > \lambda > \mu_1$

<case 5> $\lambda > \mu_1 > \mu_2$

<Case 1> $n=5, m=8, \mu_1=2, \mu_2=\frac{1}{2}$

(X,Y)聯合極限機率

$\tilde{P}_1'$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
	0.606428	0.000108	0.3509×10^{-5}	0.1499×10^{-6}	0.7078×10^{-8}
	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	
	0.34946×10^{-9}	0.1758×10^{-10}	0.8818×10^{-12}	0.3942×10^{-13}	
$\tilde{P}_2'$	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}
	0.303187	0.000079	0.3397×10^{-5}	0.1803×10^{-6}	0.1018×10^{-7}
	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	
	0.5852×10^{-9}	0.3361×10^{-10}	0.191×10^{-11}	0.10×10^{-12}	
$\tilde{P}_3'$	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}
	0.075773	0.000042	0.2452×10^{-5}	0.1602×10^{-6}	0.1059×10^{-7}
	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	
	0.6921×10^{-9}	0.4436×10^{-10}	0.278×10^{-11}	0.16×10^{-12}	
$\tilde{P}_4'$	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	p_{45}
	0.012610	0.000024	0.1846×10^{-5}	0.1400×10^{-6}	0.1037×10^{-7}
	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	
	0.7454×10^{-9}	0.5192×10^{-10}	0.351×10^{-11}	0.23×10^{-12}	
$\tilde{P}_5'$	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}
	0.001560	0.1750×10^{-4}	0.1513×10^{-5}	0.1261×10^{-6}	0.1011×10^{-7}
	p_{56}	p_{57}	p_{58}	p_{59}	
	0.7791×10^{-9}	0.5782×10^{-10}	0.414×10^{-11}	0.29×10^{-12}	

$\tilde{P}_6'$	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}
	0.1425×10^{-3}	0.1403×10^{-4}	0.1309×10^{-5}	0.1164×10^{-6}	0.9888×10^{-8}
	p_{66}	p_{67}	p_{68}	p_{69}	
	0.8041×10^{-9}	0.6275×10^{-10}	0.4712×10^{-11}	0.3574×10^{-12}	

X 的邊際機率分配

邊際機率	$\tilde{P}_i' \cdot \tilde{1}$（遞迴方法）	理論值(4.6)
$P(X=0)$	0.60653925131639	0.60653925130311
$P(X=1)$	0.30326962565820	0.30326962565156
$P(X=2)$	0.07581740641455	0.07581740641289
$P(X=3)$	0.01263623440242	0.01263623440215
$P(X=4)$	0.00157952930030	0.00157952930027
$P(X=5)$	1.579529300303108e-004	1.579529300268520e-004

Y 的邊際機率分配

邊際機率	遞迴方法
$P(Y=0)$	0.99970005781571
$P(Y=1)$	0.00028498098335
$P(Y=2)$	0.00001402579980
$P(Y=3)$	0.00000087296567
$P(Y=4)$	0.00000005821485
$P(Y=5)$	0.00000000395536
$P(Y=6)$	0.00000000026804
$P(Y=7)$	0.00000000001793
$P(Y=8)$	0.00000000000118

<*case 2*> $n=8, m=5, \mu_1=2, \mu_2=\dfrac{1}{2}$

<u>(X, Y)聯合極限機率</u>

$\tilde{P}_1'$	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	0.606531	0.3691×10^{-7}	0.6639×10^{-9}
	p_{14}	p_{15}	p_{16}
	0.1618×10^{-10}	0.4453×10^{-12}	0.1205×10^{-13}
$\tilde{P}_2'$	p_{21}	p_{22}	p_{23}
	0.303265	0.2735×10^{-7}	0.6518×10^{-9}
	p_{24}	p_{25}	p_{26}
	0.1978×10^{-10}	0.65×10^{-12}	0.2×10^{-13}
$\tilde{P}_3'$	p_{31}	p_{32}	p_{33}
	0.075816	0.1454×10^{-7}	0.4784×10^{-9}
	p_{34}	p_{35}	p_{36}
	0.1788×10^{-10}	0.69×10^{-12}	0.3×10^{-13}
$\tilde{P}_4'$	p_{41}	p_{42}	p_{43}
	0.012636	0.8692×10^{-8}	0.3653×10^{-9}
	p_{44}	p_{45}	p_{46}
	0.1584×10^{-10}	0.69×10^{-12}	0.3×10^{-13}
$\tilde{P}_5'$	p_{51}	p_{52}	p_{53}
	0.0015795	0.6286×10^{-8}	0.3025×10^{-9}
	p_{54}	p_{55}	p_{56}
	$0.1443\ \times 10^{-10}$	0.68×10^{-12}	0.3×10^{-13}

$\tilde{P}_6^{'}$	p_{61}	p_{62}	p_{63}
	0.1579×10^{-3}	0.5072×10^{-8}	0.2638×10^{-9}
	p_{64}	p_{65}	p_{66}
	0.1343×10^{-10}	0.6689×10^{-12}	0.3293×10^{-13}
$\tilde{P}_7^{'}$	p_{71}	p_{72}	p_{73}
	0.1316×10^{-4}	0.4315×10^{-8}	0.2369×10^{-9}
	p_{74}	p_{75}	p_{76}
	0.1267×10^{-10}	0.6613×10^{-12}	0.3445×10^{-13}
$\tilde{P}_8^{'}$	p_{81}	p_{82}	p_{83}
	0.9362×10^{-6}	0.3781×10^{-8}	0.2167×10^{-9}
	p_{84}	p_{85}	p_{86}
	0.1207×10^{-10}	0.6546×10^{-12}	0.3579×10^{-13}
$\tilde{P}_9^{'}$	p_{91}	p_{92}	p_{93}
	0.5517×10^{-7}	0.3380×10^{-8}	0.2008×10^{-9}
	p_{94}	p_{95}	p_{96}
	0.1158×10^{-10}	0.6486×10^{-12}	0.3699×10^{-13}

X的邊際機率分配

邊際機率	$\tilde{P}_i^{'} \cdot \tilde{1}$（遞迴方法）	理論值(4.6)
$P(X=0)$	0.60653066179465	0.60653066179636
$P(X=1)$	0.30326533089732	0.30326533089818
$P(X=2)$	0.07581633272433	0.07581633272455
$P(X=3)$	0.01263605545406	0.01263605545409
$P(X=4)$	0.00157950693176	0.00157950693176
$P(X=5)$	1.579506931756906e-004	1.579506931761364e-004
$P(X=6)$	1.316255776464141e-005	1.316255776467803e-005
$P(X=7)$	9.401826974748412e-007	9.401826974770022e-007
$P(X=8)$	5.876141859257555e-008	5.876141859231264e-008

Y的邊際機率分配

邊際機率	遞迴方法
$P(Y=0)$	0.99999988614055
$P(Y=1)$	0.00000011033668
$P(Y=2)$	0.00000000338003
$P(Y=3)$	0.00000000013386
$P(Y=4)$	0.00000000000579
$P(Y=5)$	0.00000000000026

<*case 3*> $n = 8, m = 5, \mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = 2$

<u>(X, Y)聯合極限機率</u>

$\tilde{P}_1^{'}$	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	0.135367	0.2363×10^{-6}	0.1156×10^{-8}
	p_{14}	p_{15}	p_{16}
	0.1233×10^{-10}	0.1775×10^{-12}	0.2472×10^{-14}
$\tilde{P}_2^{'}$	p_{21}	p_{22}	p_{23}
	0.270733	0.1409×10^{-5}	0.1141×10^{-7}
	p_{24}	p_{25}	p_{26}
	0.1699×10^{-9}	0.315×10^{-11}	0.5×10^{-13}
$\tilde{P}_3^{'}$	p_{31}	p_{32}	p_{33}
	0.270730	0.4649×10^{-5}	0.6058×10^{-7}
	p_{34}	p_{35}	p_{36}
	0.1236×10^{-8}	0.2916×10^{-10}	0.62×10^{-12}
$\tilde{P}_4^{'}$	p_{41}	p_{42}	p_{43}
	0.180478	0.1130×10^{-4}	0.2298×10^{-6}
	p_{44}	p_{45}	p_{46}
	0.6325×10^{-8}	0.1881×10^{-9}	0.495×10^{-11}
$\tilde{P}_5^{'}$	p_{51}	p_{52}	p_{53}
	0.090222	0.2263×10^{-4}	0.6975×10^{-6}
	p_{54}	p_{55}	p_{56}
	0.2551×10^{-7}	0.9484×10^{-9}	0.3061×10^{-10}

$\tilde{P}_6'$	p_{61}	p_{62}	p_{63}
	0.036056	0.3963×10^{-4}	0.1800×10^{-5}
	p_{64}	p_{65}	p_{66}
	0.8627×10^{-7}	0.3975×10^{-8}	0.1572×10^{-9}
$\tilde{P}_7'$	p_{71}	p_{72}	p_{73}
	0.011966	0.6271×10^{-4}	0.4095×10^{-5}
	p_{74}	p_{75}	p_{76}
	0.2541×10^{-6}	0.1440×10^{-7}	0.6971×10^{-9}
$\tilde{P}_8'$	p_{81}	p_{82}	p_{83}
	0.003337	0.9150×10^{-4}	0.8410×10^{-5}
	p_{84}	p_{85}	p_{86}
	0.6684×10^{-6}	0.4624×10^{-7}	0.2743×10^{-8}
$\tilde{P}_9'$	p_{91}	p_{92}	p_{93}
	0.7173×10^{-3}	0.1246×10^{-3}	0.1584×10^{-4}
	p_{94}	p_{95}	p_{96}
	0.1599×10^{-5}	0.1340×10^{-6}	0.9771×10^{-8}

X 的邊際機率分配

邊際機率	$\tilde{P}_i' \cdot \tilde{1}$(遞迴方法)	理論值(4.6)
$P(X=0)$	0.13536742589758	0.13536742587022
$P(X=1)$	0.27073485179517	0.27073485174044
$P(X=2)$	0.27073485179517	0.27073485174044
$P(X=3)$	0.18048990119678	0.18048990116029
$P(X=4)$	0.09024495059839	0.09024495058015
$P(X=5)$	0.03609798023936	0.03609798023206
$P(X=6)$	0.01203266007979	0.01203266007735
$P(X=7)$	0.00343790287994	0.00343790287924
$P(X=8)$	8.594757199846597e-004	8.594757198109154e-004

Y 的邊際機率分配

邊際機率	遞迴方法
$P(Y=0)$	0.99960735049179
$P(Y=1)$	0.00035864699192
$P(Y=2)$	0.00003114880915
$P(Y=3)$	0.00000264067718
$P(Y=4)$	0.00000019982775
$P(Y=5)$	0.00000001340437

<case 4> $n=5, m=8, \mu_1=\frac{1}{2}, \mu_2=2$

(X, Y)聯合極限機率

$\tilde{P}_1'$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
	0.137565	0.4935×10^{-4}	0.8040×10^{-6}	0.2063×10^{-7}	0.6129×10^{-9}
	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	
	0.1904×10^{-10}	0.5910×10^{-12}	0.1771×10^{-13}	0.4454×10^{-15}	
$\tilde{P}_2'$	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}
	0.274932	0.2897×10^{-3}	0.7792×10^{-5}	0.2790×10^{-6}	0.1065×10^{-7}
	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	
	0.4047×10^{-9}	0.1487×10^{-10}	0.52×10^{-12}	0.2×10^{-13}	
$\tilde{P}_3'$	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}
	0.274254	0.9334×10^{-3}	0.4038×10^{-4}	0.1987×10^{-5}	0.9652×10^{-7}
	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	
	0.4456×10^{8}	0.1929×10^{-9}	0.775×10^{-11}	0.26×10^{-12}	
$\tilde{P}_4'$	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	p_{45}
	0.181139	0.002188	0.1484×10^{-3}	0.9894×10^{-5}	0.6067×10^{-6}
	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	
	0.3384×10^{-7}	0.1718×10^{-8}	0.7952×10^{-10}	0.316×10^{-11}	
$\tilde{P}_5'$	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}
	0.087109	0.004160	0.4324×10^{-3}	0.3863×10^{-4}	0.2968×10^{-5}
	p_{56}	p_{57}	p_{58}	p_{59}	
	0.1989×10^{-6}	0.1180×10^{-7}	0.6269×10^{-9}	0.2914×10^{-10}	

$\tilde{P}_6^{'}$	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}
	0.028747	0.006753	0.001059	01256×10^{-3}	0.1202×10^{-4}
	p_{66}	p_{67}	p_{68}	p_{69}	
	0.9643×10^{-6}	0.6663×10^{-7}	0.4044×10^{-8}	0.2202×10^{-9}	

X 的邊際機率分配

邊際機率	$\tilde{P}_i^{'}\cdot\tilde{1}$(遞迴方法)	理論值(4.6)
$P(X=0)$	0.13761467894200	0.13761467889908
$P(X=1)$	0.27522935788400	0.27522935779817
$P(X=2)$	0.27522935788400	0.27522935779817
$P(X=3)$	0.18348623858933	0.18348623853211
$P(X=4)$	0.09174311929467	0.09174311926606
$P(X=5)$	0.03669724771787	0.03669724770642

Y 的邊際機率分配

邊際機率	遞迴方法
$P(Y=0)$	0.98374480151031
$P(Y=1)$	0.01437355108696
$P(Y=2)$	0.00168823723212
$P(Y=3)$	0.00017642167423
$P(Y=4)$	0.00001570150460
$P(Y=5)$	0.00000120193504
$P(Y=6)$	0.00000008035681
$P(Y=7)$	0.00000000475902
$P(Y=8)$	0.00000000025277

$$<Case\ 5>\quad n=5, m=8, \mu_1=\frac{2}{3}, \mu_2=\frac{1}{3}$$

(X, Y)聯合極限機率

$\tilde{P}_1'$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
	0.220375	0.003416	030084×10^{-3}	03258×10^{-4}	0.3757×10^{-5}
	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	
	0.4398×10^{-6}	0.5083×10^{-7}	0.5521×10^{-8}	0.4561×10^{-9}	
$\tilde{P}_2'$	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}
	0.328854	0.006532	0.7032×10^{-3}	0.9023×10^{-4}	0.1205×10^{-4}
	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	
	0.1607×10^{-5}	0.2094×10^{-6}	0.2578×10^{-7}	0.2509×10^{-8}	
$\tilde{P}_3'$	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}
	0.244153	0.006884	0.9374×10^{-3}	0.1440×10^{-3}	0.2229×10^{-4}
	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	
	0.3372×10^{-5}	0.4927×10^{-6}	0.6819×10^{-7}	0.7811×10^{-8}	
$\tilde{P}_4'$	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	p_{45}
	0.119271	0.005600	0.9824×10^{-3}	0.1800×10^{-3}	0.3203×10^{-4}
	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	
	0.5449×10^{-5}	0.8832×10^{-6}	0.1358×10^{-6}	0.1827×10^{-7}	
$\tilde{P}_5'$	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}
	0.041923	0.004173	0.9318×10^{-3}	0.2000×10^{-3}	0.4028×10^{-4}
	p_{56}	p_{57}	p_{58}	p_{59}	
	0.7608×10^{-5}	0.1352×10^{-5}	0.2277×10^{-6}	0.3590×10^{-7}	

$\tilde{P}_6'$	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}
	0.009916	0.003142	0.8566×10^{-3}	0.2099×10^{-3}	0.4700×10^{-4}
	p_{66}	p_{67}	p_{68}	p_{69}	
	0.9727×10^{-5}	0.1875×10^{-5}	0.3405×10^{-6}	0.6273×10^{-7}	

<u>X 的邊際機率分配</u>

邊際機率	$\tilde{P}_i' \cdot \tilde{1}$（遞迴方法）	理論值(4.6)
$P(X=0)$	0.22412887414593	0.22412887410261
$P(X=1)$	0.33619331121889	0.33619331115391
$P(X=2)$	0.25214498341417	0.25214498336544
$P(X=3)$	0.12607249170709	0.12607249168272
$P(X=4)$	0.04727718439016	0.04727718438102
$P(X=5)$	0.01418315531705	0.01418315531431

<u>Y 的邊際機率分配</u>

邊際機率	遞迴方法
$P(Y=0)$	0.96449138871537
$P(Y=1)$	0.02974824360537
$P(Y=2)$	0.00471232028107
$P(Y=3)$	0.00085664781731
$P(Y=4)$	0.00015740232751
$P(Y=5)$	0.00002820272079
$P(Y=6)$	0.00000486353988
$P(Y=7)$	0.00000080350570
$P(Y=8)$	0.00000012768029

六、 服務人員之最佳配適

在此佇列系統中將服務人員分為兩部分系統Ｉ與ＩＩ，服務率不同，因此雇用之費用也會不同，在不失一般性下，假設服務速率較快的雇用費用高，慢的較低。在固定服務人員數之下，若是服務率較快的服務人員過多，可能會形成有閒置人員的現象，如此便會造成浪費；反之，若是服務率快的人員太少，服務率慢的人員過多，容易造成系統處在滿的狀態，到達顧客無法進入接受服務，便造成顧客的流失。因此我們想考慮此 M/M/s/s 佇列系統在固定總共ｓ個服務人員下，系統Ｉ與ＩＩ服務人員的數目該如何分配能使得損失達到最小。在此舉例子說明：

考慮一個電腦系統，總共有ｓ個處理器，分為兩部分，系統Ｉ包含ｎ個處理器，ＩＩ包含ｍ個處理器，$s = n + m$。訊號進入率為平均λ個訊號/單位時間，訊號進入時先進入系統Ｉ，Ｉ滿了才會進入系統ＩＩ。系統Ｉ處理速率較快，為平均μ_1個訊號/單位時間；系統 ＩＩ 處理速率較慢，為平均μ_2個訊號/單位時間。由於系統 Ｉ 處理速率快因此單價較昂貴，ＩＩ 單價較低。因此我們假設系統 Ｉ 若有空著的處理器，單位損失為C_1，相對於損失，有使用到的處理器單位獲益為D_1；ＩＩ若有空著的處理器，單位損失為C_2，有使用到的處理器單位獲益為D_2。如此我們便可以將損失寫成

$$Loss = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[C_1 \cdot (n-i) - D_1 \cdot i + C_2 \cdot (m-j) - D_2 \cdot j\right] \cdot P(X=i, Y=j) \qquad (6.1)$$

$C_1 > C_2, D_1 > D_2$，$P(X=i, Y=j)$為X與Y的聯合機率分配，可用第四章遞迴方法求得。由於是損失函數，所以將損失視為正。如此便可在固定ｓ下，變動ｎ與ｍ，找到最佳的（n,ｍ）使得(6.1)達到最小。

模擬過程求X和Y的聯合極限機率方法和第四章相同，步驟如下：

*步驟一：*給定λ,μ_1,μ_2,s，$s=n+m$，n，m 屬於整數，變動 n 和 m，利用第四章的遞迴方法得到每一組(n, m)之X和Y的聯合極限機率。

*步驟二：*固定C_1,C_2,D_1,D_2，$C_1>C_2,D_1>D_2$，將每一組（n, m）之X和Y的聯合極限機率值代入（6.1）式，得到 s+1 個不同的損失值。

*步驟三：*比較這 s+1 個損失值，損失值最小時之（n, m）即為在固定 s 個服務人員下，最佳的系統 I 與 II 服務人員數目之分配。

在固定 s 之下得到了一組（n, m）使得系統損失達到最小，進一步我們可以在一個可容許的範圍內變動 s，每一個 s 可以得到一組最佳之（n, m），再比較這幾組（n, m）得到之損失值，之中最小損失值之（n, m）即為此範圍內之最佳組合。

七、 結論

一般討論佇列系統時假設服務人員處理率相同，在此模型中假設服務人員服務率不全相同，將較為複雜之二維馬可夫鏈轉換成簡單的一維狀態，並且找出更有效率的遞迴方法求得極限機率分配。更進一步以損失的觀點求得不同服務率的服務員數目之最佳分配，使得系統損失可以達到最小。而我們在理論上生死佇列系統一般是用

$$\tilde{P}^{'} \cdot Q = \tilde{0}^{'}$$

$$\tilde{P}^{'} \cdot \tilde{1} = 1$$

來解出極限機率分配 $\tilde{P}^{'}_{(n+1)(m+1)} = \left[p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{(n+1)(m+1)}\right]$，微矩陣Q維度為 $(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)$。就算 n，m 不大，但相乘出來的值也很可觀，解聯立方程式在計算上便困難了許多，計算效率也低。但是使用第四章所述之遞迴方法計算，矩陣維度變為 $(m+1) \times (m+1)$，減少了非常多！在電腦模擬時，用此種迭代的方式比起原本的計算減少了許多記憶體的浪費，效率也因此大大提升！因此我們得到一個更有效率的方法求得極限機率，所以，在本論文中提出此種遞迴方法來求佇列系統之極限機率分配。

參考文獻

[1] Leonard Kleinrock, Queueing Systems Volume I : Theory (1975), John Wiley and Sons.

[2] Sheldon M Ross, Stochastic Processes, 2nd Ed. (1995), John Wiley and Sons.

[3] Paul G. Hoel, Sidney C. Port, and Charles J. Stone , Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company.

[4] 王士維，「計算 M/M/s/s 佇列系統極限值的有效方法」，國立交通大學統計學研究所，碩士論文，民國 90 年六月。