國 立 交 通 大 學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

# 運用重排資料改善統計製程管制圖

# Improving the Statistical Process Control Chart by Rearranging the Data

研究生：曾翊琳

指導教授：彭南夫 博士

中華民國 九十四 年 六 月

# 運用重排資料改善統計製程管制圖

# Improving the Statistical Process Control Chart by Rearranging the Data


研 究 生：曾翊琳　　　　Student：Yi-Lin Tseng

指導教授：彭南夫 博士　　　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學

統計學研究所


碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute Statistics

College of Science

National Chiao Tung University

In partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

in

Statistics

June 2005

Hsin-chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年六月

# 運用重排資料改善統計製程管制圖

學生：曾翊琳　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：彭南夫

國立交通大學統計學研究所

摘　　要

我們考慮一個改善 SPC 的方法，先將每個樣本資料加上間隔差 1 的數列，作排序後，利用得到的排序數列再指回去原對應的樣本資料，即可得到一組新的數列，此新數列中會發現兩個樣本資料間會產生負相關，將其運用至管制圖上，即可製成非傳統的$\overline{\mathrm{X}}$管制圖。且在跟傳統$\overline{\mathrm{X}}$管制圖有相同型 I 誤差下，因為負相關使變異數降低，所以型 II 誤差也會降低，進而提升檢定力，而能在不良品產生前更快偵測出錯誤，以提高企業的競爭力及生產力。

關鍵字：統計製程管制、負相關。

# Improving the Statistical Process Control Chart by Rearranging the Data

Student：Yi-Lin Tseng Advisor：Nan-fu Peng

National Chiao Tung University Institute of Statistics

Abstract

We consider a method that improves the SPC. Firstly, add i to each sample datum at time i the one difference interval sequence. After arranging the sequence in order, we retrieve the arranged sequence to the corresponding original sample data. A new sequence of the data is thus obtained. In the new sequence, we can find the negative correlation between two sample data. We apply the negative correlation to the control chart. Then we can create a non-traditional control chart. Within the similar type I error, the risk of type II will be lowered down because negative correlation reduces the variance. This increases the power and it can detect error very fast before defect is happened. From here, it improves company competitive advantages and increases productivity.

Keyword: Statistical Process Control, Negative Correlation.

# 誌謝

在交大統計學研究所學習的這兩年時間內，除了要謝謝所上各位教授的細心教導外，也非常感謝自己的指導教授彭南夫老師，這兩年間，老師不厭其煩的指導，協助自己處理很多遭遇到的難題，讓自己能夠快速的解決問題，讓自己的論文能夠順利的完成。另外要謝謝盧鴻興老師、王鴻龍老師及鄭天澤老師在口試時，給予我的指導與協助。

也要感謝研究所同學辰昀、秀仁、雅靜、如美、淑儀、怡娟、揚波、婉菁、玉均及宇葶...等，在這兩年研究所日子裡，由於她們的陪伴，讓自己不管是在課業上或是日常生活上，都得到許多的幫忙與協助。

此外要非常感謝我的家人及正昌的支持與鼓勵，讓我能夠毫無顧慮的求學，使我能夠順利完成自己學習旅程中的一個階段。最後將這篇論文獻給所有協助過我的朋友。

翊琳

2005.06

# 目錄

# 第一章、緒論

## 1-1 研究動機

近年來可能有一部份的消費者，會懷疑現今的產品是否不如從前或製造商是否有在重視品質，而消費者會有這樣的觀念出現，可能的原因就是在於過去產量是比較低的時代，假設當時的年產量為 10000 件，假如發現其中有 300 件失效，這樣失效率為 3%，如果現在失效率不變，但年產量增加，為年產量 300000 件時，可能就會有 9000 件失效的產品；也就是說，在失效率不變的狀況下，由於產量的增加，可能會造成感受到產品失效的顧客數也會隨之增加，也就會使消費者懷疑現今的產品會不如從前；另外，也有可能的狀況是在市場的壓力下，造成製造商在產品未測試完畢，即推出市面，這樣過早的推出會讓消費者發現產品有更多缺失，這樣也會讓消費者認為產品品質不如過去，所以產品品質問題應該是目前各個企業管理最重視及關切的問題。

在消費者方面，由於現今生活水準和教育水準的提高，我們可以發現到現今的消費者，對於產品的品質和安全性的要求也日益增加，所以一個企業想要永續經營，就必須要先了解顧客的需求，然後將顧客的需求表現在產品上，這樣整個企業才能夠永續經營下去。而在公司企業方面，因為現在社會中生產技術的提升及現代企業環境下，品質已經變成一個企業競爭力中的一個很大的影響主因，所以產品品質管制方面成為各個企業最關心的層面，因為品質的好壞將是未來市場上決定勝負的關鍵。

而此篇論文即是針對品質管制最常使用的 $\overline{\mathrm{X}}$ 管制圖上作改善，在和傳統的 $\overline{\mathrm{X}}$ 管制圖有相同的型 I 誤差 $\alpha$ 下，但是能相對的提高檢定力

(power)，這樣可以更有效的監控整個產品製造過程，也可以減少不必要的人力資源及降低成本，產品才能更符合顧客的需求，藉以提升企業本身的競爭力。

## 1-2 研究方法

先找出每個樣本大小 n 中，使變異數降低幅度最大的值定為最佳值$\sigma^{*2}$，最後再將取得的最佳值運用到管制圖上，來得到新的管制界線，而取得降低變異數最大幅度的最佳值$\sigma^{*2}$方法如下：

(1)收集每單位時間的代表性樣本資料。

(2)將每個樣本資料$x_i$加上一常數$i$定為$y_i$，即$y_i = x_i + i$，其中 i 為間隔差 1 的數列，如圖 1.1 中實線為原始資料$x_i$。

(3)將加上一常數 i 的樣本資料$y_i$作排序，得到一組新的樣本資料，如圖 1.1 菱形點即為$y_i$。

(4)由排序過的資料$y_i$找回原本所對應的$x_i$值，即可得到一組原始資料$x_i$新排序後的新數列$x_i^{'}$，如圖 1.2 為$x_i$新排序過後的資料即是$x_i^{'}$數列。

(5)從新的資料$x^{'}$取中間 n 個作平均可以得到$\bar{x}^{'}$，重複上面的流程即可收集到一組$\bar{x}^{'}$數據。

(6)由這組$\bar{x}^{'}$數據去估算出樣本變異，做圖來看出最佳值$\sigma^{*2}$的位置。(如附錄 A、B)

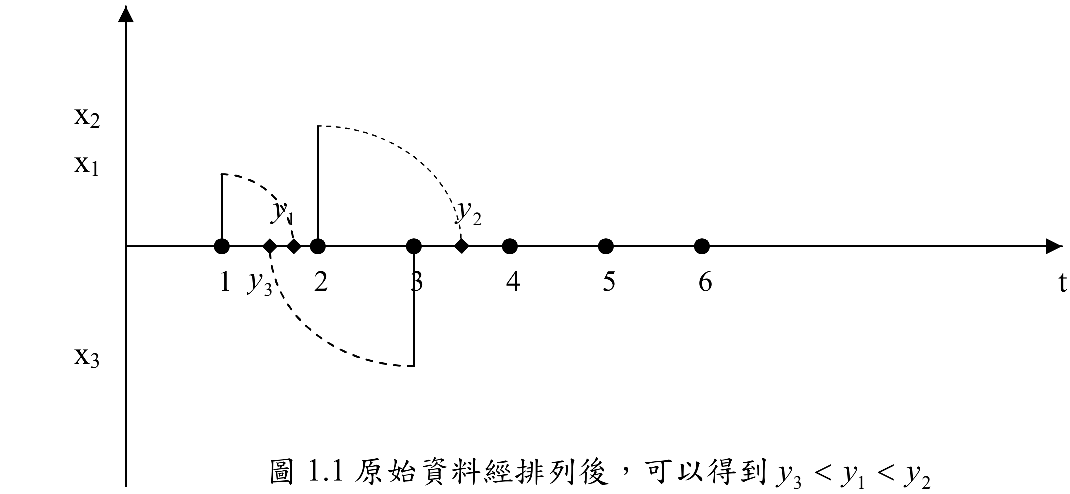



圖 1.1 原始資料經排列後，可以得到 $y_3 < y_1 < y_2$

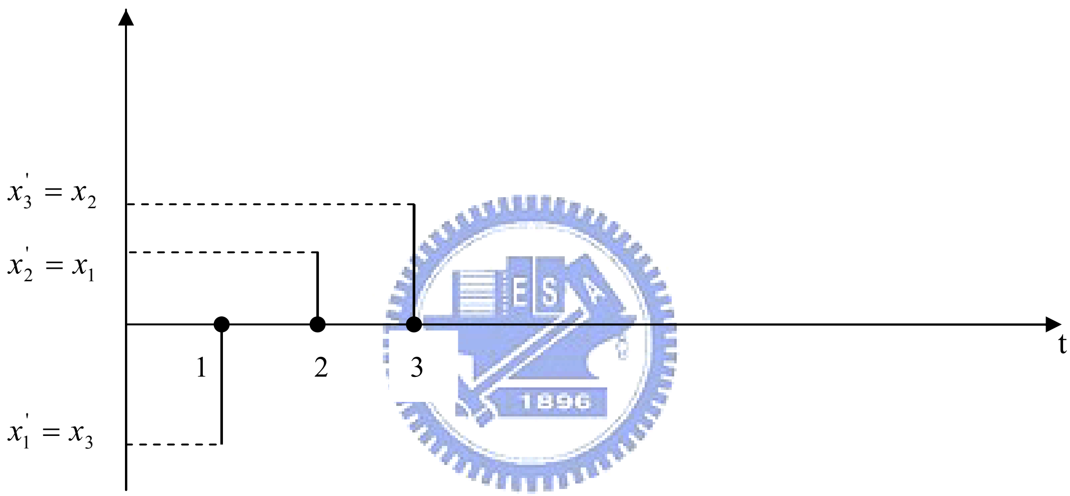



圖 1.2 資料重新排列，在此樣本中，$x_1^{'} = x_3$、$x_2^{'} = x_1$、$x_3^{'} = x_2$

假設 $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ 為獨立且服從 Normal$(0, \sigma^2)$，將 $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ 依上述作法重新排列後，若 $x_i$ 為正數，再加上 i，會將 $x_i$ 的位置往右移動；若 $x_i$ 為負值，則加上 i 後，此 $x_i$ 將往左移動，如圖 1.1 及圖 1.2，資料經重新排列過後可以得到新的資料($x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}, \ldots.$)，當進入穩定狀態(steady state)後，即位置狀態上的穩定，可以發現新的資料會出現一正一負的狀況，即資料會出現負相關(於第二章加以詳述)。

在上述作法中取中間 n 項作平均，是因為在樣本資料重新排序後，有較大的機率會發生的狀況，僅有附近的資料交換位置，而不會

有很大的位置變動，如圖 1.3，即是重排之後的資料，最大的可能是附近的點交換位置，並不會有太大的改變。若是取前面 n 項，會沒有之前的資訊，如圖 1.4，例如：$x_1^{'}$ 的位置由原本位置的右邊來或是自

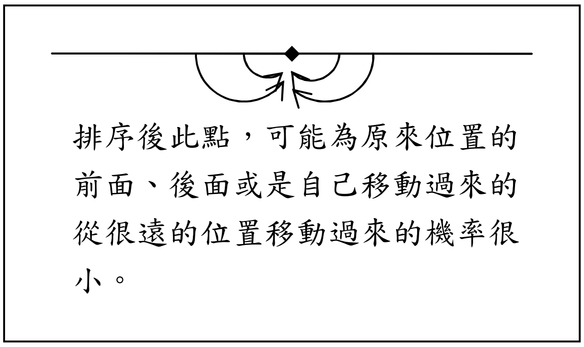



圖 1.3

己本身留在此位置，但是左邊的值應該也會影響，但左邊沒有值，所以取前面 n 項會遺失掉之前的資訊，若取後面 n 項，則會沒有之後的資訊，所以取中間 n 項作平均，則前面及後面的資訊都有，這樣也可以確保進入穩定狀態(steady state)。

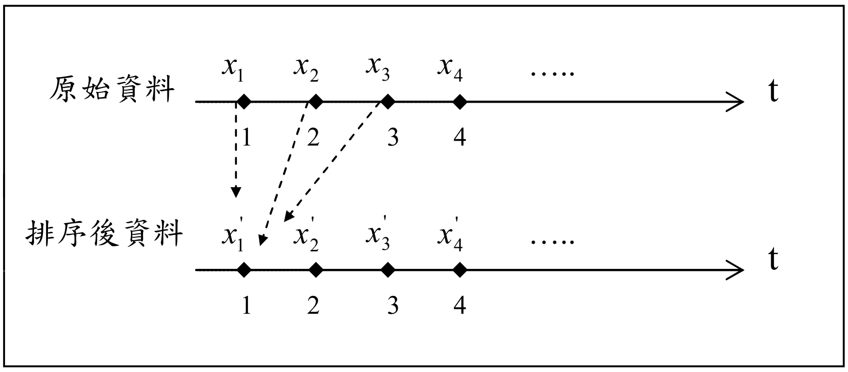



圖 1.4

利用前述的方法即可得到最佳化的$\sigma^{*2}$ ($\sigma^{*2}$ 的求法於第二章詳述)，相對於 n 所得到的最佳化$\sigma^{*2}$ 值列於表 1.1，其中 n 為樣本資料中的樣本大小，我們再將$\sigma^{*2}$ 應用於管制圖上，實施步驟如下：

(a) $x_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$  i=1,2,⋯，$x_i$為實際產品數據。

(b)令 $w_i = \frac{\sigma^*}{\sigma} x_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^{*2})$，其中$\sigma^*$為最佳化的$\sigma$值。

(c)再令 $y_i = w_i + i$。

(d)將 $y_i$ 作排序後，再找出原對應的 $w_i$ 值，則可以得到新的資料 $w_1', w_2', w_3', \ldots$。

(e)再令 $x_i' = w_i' \frac{\sigma}{\sigma^*}$ 則可以得到變異數降幅最大的結果。

由 $x_i'$ 可以得到新的管制界線，且新的管制界線會比原來的管制界線離中心線近，即可得到一個有別一般傳統的 $\overline{X}$ 管制圖且在和傳統的 $\overline{X}$ 管制圖有相同型 I 誤差 $\alpha$ 下，我們降低了型 II 誤差 $\beta$ 風險，並提高檢定力，利用這樣的管制圖可以更有效率的監控整各產品製造過程。

| n | $\sigma^*$ |
|---|---|
| 2 | 1.0 |
| 3 | 1.4 |
| 4 | 1.9 |
| 5 | 2.3 |
| 6 | 2.7 |
| 7 | 3.2 |
| 8 | 3.7 |
| 9 | 4.1 |
| 10 | 4.5 |

(表 1.1)

# 第二章、模擬及數值計算

## 2-1 模擬

利用電腦模擬的方式來找出對於每個 n 中的最佳$\sigma^2$值，也就是在求得使變異數降低幅度最大的$\sigma^{*2}$，再利用此$\sigma^{*2}$值，製作出非傳統$\overline{X}$管制圖，且提高檢定力，能夠使品質管制人員可以更快偵測出錯誤，以便在不良品生產前可以有效的改善製程。模擬步驟如下：

步驟 1. 模擬出樣本值$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{200}$為獨立且服從常態分配$N(0,\sigma^2)$。

步驟 2. 令$y_i = i + x_i$，$i=1,2,\cdots,200$。

步驟 3. 將$y_1,y_2,\ldots,y_{200}$做排序，可以得到$(y_{(1)},y_{(2)},\ldots,y_{(200)})$。

步驟 4. 由$(y_{(1)},y_{(2)},\ldots,y_{(200)})$的次序，找回原本對應的 x 值，即可得到一個新的數列$x'_1,x'_2,\ldots,x'_{200}$。

步驟 5. 從新的數列$x'_1,x'_2,\ldots,x'_{200}$，計算出

$$\overline{x}'_{n,j} = \frac{1}{n}(\text{取中間}n\text{個}x'_i)$$。(其中 n=2,3,…,10)

步驟 6. 回到步驟 1 至步驟 5 計算 $10^7$ 次，即 $j=1,2,\cdots,10^7$。

步驟 7. 從步驟 6 可以得到 $10^7$ 個$\overline{x}'_{n,j}$值，利用此 $10^7$ 個值計算出

$$S^2_{n,\sigma^2} = \frac{1}{10^7-1}\sum_{j=1}^{10^7}\left(\overline{x}'_{n,j} - w\right)^2 \text{，其中 } w = \frac{1}{10^7}\sum_{j=1}^{10^7}\overline{x}'_{n,j}$$ 。

步驟 8. $\sigma$從 0.1 至 10 為間隔 0.1 的值，$\sigma=0.1,0.2,\cdots,9.9,10$，回到步驟 1 至步驟 7。

步驟 9. 給一個 n(n=2,3,⋯,10)，計算出 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$，讓此 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$

值為最大的那個 $\sigma^2$，即為最佳化的 $\sigma^{*2}$；也就是說，

$$\frac{\frac{\sigma^{*2}}{n} - S^2_{n,\sigma^{*2}}}{\frac{\sigma^{*2}}{n}} = \max_{\sigma^2}\left\{\frac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}\right\}。$$

備註：模擬的 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$ 值及圖請參考附錄 A 及 B。

## 2-2 圖表說明

由 2-1 節的模擬步驟計算 $10^7$ 迴圈後，可由大數法則及中央極限定理(CLT)得到 $S^2_{n,\sigma^2} \to \mathrm{Var}(\overline{X}'_n)$ 及 $w \to E(\overline{X}'_n)$，原始資料的變異數(variance)為 $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$，比較原始資料的變異數和經過重排方法後得到資料的變異數，也就是比較 $S^2_{n,\sigma^2}$ 和 $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$，經由上述模擬步驟可以模擬出資料並計算出 $\mathrm{ratio} = \dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$，可經由附錄 A 表中的值可以發現 ratio 的值都為正的，可以從中得到 $S^2_{n,\sigma^2}$ 和 $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$ 的關係為 $S^2_{n,\sigma^2} < \mathrm{Var}(\overline{X}_n)$，也就是說在資料經過重排方法後所得到的資料，可以將變異數降低。再對於每個 n 值作 $\sigma$=0.1 ,0.2 , ⋯ , 9.9,10，求出其

對應的 $\text{ratio} = \dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$ 並繪出其狀況如附錄 B。以下舉例說明，如圖 2.1：

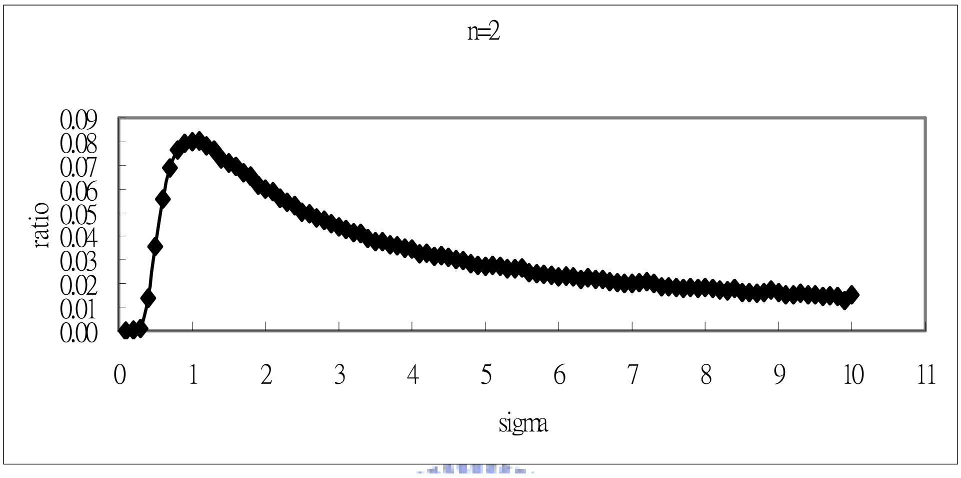



圖 2.1 (附錄 B 圖 B-1)

可以從圖 2.1，當 n=2 時得到，$\text{ratio} = \dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.080385$ 為最大值表示此處的 $\sigma = 1.1$ 為最佳值 $\sigma^*$，也就是說此時 $\sigma^* = 1.1$ 在 n=2 的狀況中可以將資料的變異數降低且降低幅度最多。

由 2-1 節的模擬步驟找出對每個 n 的最佳值 $\sigma^*$，再取其前後各 5 個 $\sigma$ 值，從原本的 $10^7$ 迴圈改成 $10^9$ 迴圈，再做一次 2-1 節的模擬的步驟，得到的值及圖如附錄 C，從附錄 C 中發現圖形會更圓滑也會更準確。並將對於每個 n，$10^7$ 迴圈和 $10^9$ 迴圈所求得的最佳化 $\sigma^*$ 值整理於附錄 D。

## 2-3 負相關

如果有一對隨機變數$X_i'$及$X_{i+1}'$的關係呈負相關(negative correlation)，則代表它們的變化方向相反，所以共變異(covariance)為負值。以下我們就要探討當資料$x_i$加上 i 後，再作排序，得到一排序的數列，再從這排序的數列找回原對應的$x_i$值，即可得到一組新的數列$x_i'$，而數列$x_i'$中相鄰的兩項都會呈現負相關(negative correlation)的關係，所以才會降低變異數(variance)，而提高檢定力。

由模擬出的資料結果(附錄 A、B)中可以得到 $\text{ratio} = \dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ 皆為大於 0 的數，所以由模擬的結果可得到$S^2_{n,\sigma^2}$和$\text{Var}(\overline{X}_n)$間的關係為

$S^2_{n,\sigma^2} < \text{Var}(\overline{X}_n)$，

其中

$$S^2_{n,\sigma^2} = \text{Var}[\frac{1}{n}(X_1' + X_2' + X_3' + \cdots + X_n')] = \frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i') + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n}\text{Cov}(X_i', X_j')]$$

及 $$\text{Var}(\overline{X}_n) = \text{Var}[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

例：n=2 下，

$$S^2_{2,\sigma^2} = \text{Var}(\frac{X_1' + X_2'}{2}) = \frac{1}{4}[\text{Var}(X_1') + \text{Var}(X_2') + 2\text{Cov}(X_1', X_2')] \quad (2.1)$$

$$\text{Var}(\overline{X_2}) = \text{Var}(\frac{X_1 + X_2}{2}) = \frac{1}{4}[\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)] \quad (2.2)$$

由於$\text{Var}(X_1') + \text{Var}(X_2') = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)$且由 2-2 節的模擬結果可以得到$S^2_{n,\sigma^2}$和$\text{Var}(\overline{X}_n)$的關係為$S^2_{n,\sigma^2} < \text{Var}(\overline{X}_n)$，所以 (2.1)< (2.2) $\therefore \text{Cov}(X_1', X_2') < 0$，也就是當經過排列後，找回原對應的 X

值後，得到的$X_1^{'}$及$X_2^{'}$會呈現負相關。

再次利用電腦模擬來驗證負相關，由於

$\mathrm{Cov}(X_i^{'},X_{i+1}^{'})=EX_i^{'}X_{i+1}^{'}-EX_i^{'}EX_{i+1}^{'}$且$EX_i^{'}EX_{i+1}^{'}=0$($\because X_i^{'}$和$X_{i+1}^{'}\sim N(0,\sigma^2)$)，先模擬出 200 筆資料$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{200}$為獨立且服從$N(0,\sigma^2)$，經由 2-1 節的模擬步驟 1 至 4 可以得到一組新的資料$x_1^{'},x_2^{'},x_3^{'},\ldots,x_{200}^{'}$取其中$x_{100}^{'}$及$x_{101}^{'}$的值(或$x_{101}^{'}$及$x_{102}^{'}$、$x_{99}^{'}$及$x_{100}^{'}$)重複 $10^7$ 次，可以得到 $10^7$ 組$x_{100}^{'}$及$x_{101}^{'}$的值，所以

$\mathrm{Cov}(X_{100}^{'},X_{101}^{'})=EX_{100}^{'}X_{101}^{'}=\frac{1}{10^7}\sum x_{100}^{'}x_{101}^{'}$由附錄 E 的值可以看出在$\sigma$=0.1,0.2,…,9.9,10 下$x_{100}^{'}$及$x_{101}^{'}$都呈現負相關。

我們可以得到在新的數列$x_i^{'}$中相鄰的兩項會呈現負相關。

## 2-4 由數值計算得到的佐證

$X_1,X_2,X_3,\ldots\overset{iid}{\sim}N(0,\sigma^2)$，令$Y_i=X_i+i$，$Y_i$經由排序後，找回原對應的$X_i$值，即可得到一個新的數列$X_1^{'},X_2^{'},X_3^{'},\ldots$。在穩定狀態(steady state)下，先令 $W\sim N(0,\sigma^2)$，則$X_{i-1}^{'}=y\,|\,X_i^{'}=x$的條件機率密度函數為

$$f(y|x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{\infty}[P(W+i>x)+P(W+i<y-n)]\times\prod_{j=1,j\neq n}^{\infty}[P(W-j>x)+P(W-j<y-n)]\}\times f(y)\times I_{(y-n<x)}(y)\ +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{\prod_{i=1,i\neq m}^{\infty}[P(W+i>x)+P(W+i<y+m)]\times\prod_{j=1}^{\infty}[P(W-j>x)+P(W-j<y+m)]\}\times f(y)\times I_{(y+m<x)}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x-i}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n-i}{\sigma})]\times\prod_{j=1,j\neq n}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x+j}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n+j}{\sigma})]\}\times\phi(y/\sigma)\times 1/\sigma\times I_{(-\infty,n+x)}(y)\ +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{\prod_{i=1,i\neq m}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x-i}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m-i}{\sigma})]\times\prod_{j=1}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x+j}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m+j}{\sigma})]\}\times\phi({}^{y}\!/_{\sigma})\times{}^{1}\!/_{\sigma}\times I_{(-\infty,x-m)}(y)$$

$$=\sum_{n=1+[y-x]}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x-i}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n-i}{\sigma})]\times[1-\Phi(\frac{x+i}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n+i}{\sigma})]\}/[1-\Phi(\frac{x+n}{\sigma})+\Phi(\frac{y}{\sigma})]\times\phi({}^{y}\!/_{\sigma})\times{}^{1}\!/_{\sigma}$$

$$+\sum_{m=1}^{[x-y]}\{\prod_{j=1}^{\infty}[1-\Phi(\frac{x-j}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m-j}{\sigma})]\times[1-\Phi(\frac{x+j}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m+j}{\sigma})]\}/[1-\Phi(\frac{x-m}{\sigma})+\Phi(\frac{y}{\sigma})]\times\phi({}^{y}\!/_{\sigma})\times{}^{1}\!/_{\sigma}$$

…(2.3)

(2.3)為條件密度函數，再利用附錄 F 的流程圖，可以計算出在$\sigma$跟 x 固定，y 在範圍[-3σ,3σ]的條件密度函數的變化，利用此圖的變化可以看出$X_i'$和$X_{i-1}'$的關係，如附錄 G。

例：(1)在$\sigma=2$及 x=-2 時

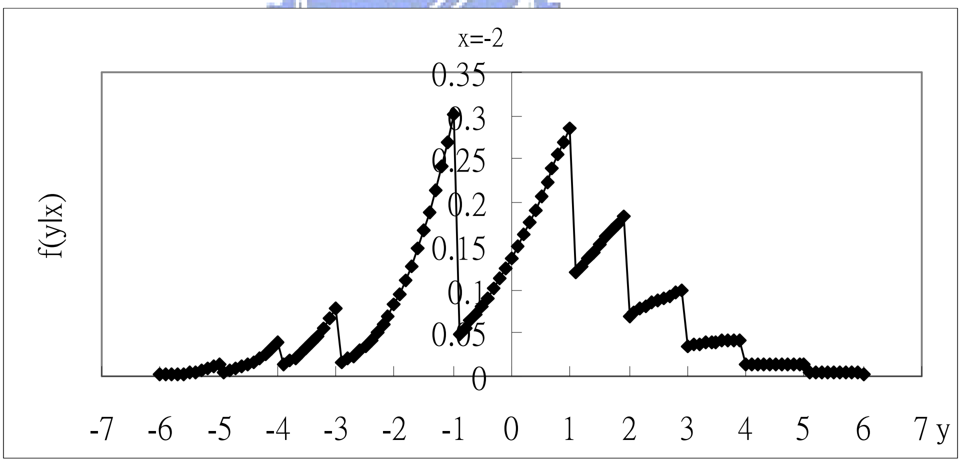



圖 2.2 (附錄 G 圖 G-2-1)

可以從圖 2.2 看出 y>0 的面積比 y<0 的面積大，即當$X_i'$為負時，$X_{i-1}'$較傾向於正的。

(2)在 $\sigma=2$，x=-2 時

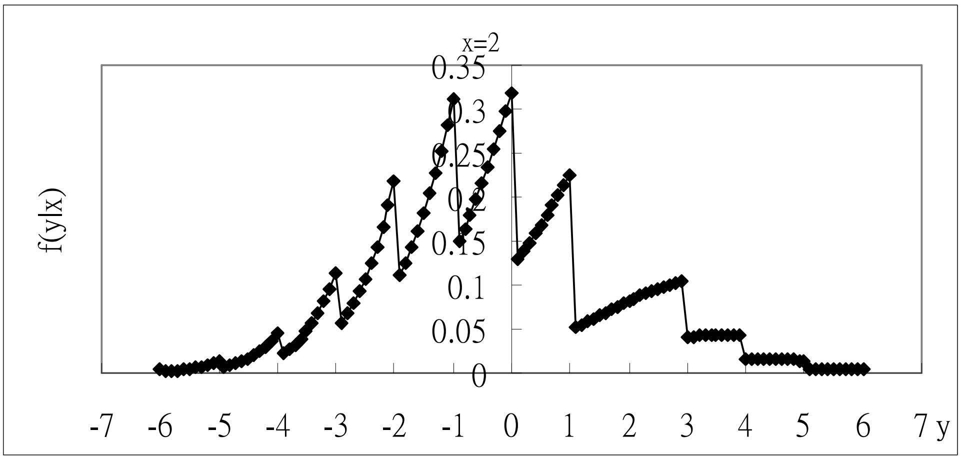



圖 2.3 (附錄 G 圖 G-2-5)

從圖 2.3 看出 y<0 的面積比 y>0 的面積大，即當 $X_i^{'}$ 為正時，$X_{i-1}^{'}$ 較傾向於負的。

由(1)和(2)可以得到 $X_i^{'}$ 和 $X_{i-1}^{'}$ 為負相關。

## 2-5 新排列對原資料位置的影響性

$X_1,X_2,X_3,....\overset{iid}{\sim}N(0,\sigma^2)$，令 $Y_i=X_i+i$，排序 $Y_i$ 後，找回原對應的 $X_i$ 值，即可得到一個新的數列 $X_1^{'},X_2^{'},X_3^{'},....$。令 $J_i$=$X_i$ 的新位置，即 $X_{J_i}^{'}=X_i$。令

$$I_i=J_i-i=\text{移動位置的量}$$

則 $I_i=N_i-M_i$ 其中 $N_i=\{n\geq i+1 \text{且} Y_n<Y_i\}$ 的個數，$N_i$ 也就是代表在 $Y_i$ 的右方且比 $Y_i$ 值小的個數，在作排序時，這些比 $Y_i$ 小的 $Y_n$ 將排在 $Y_i$ 的左邊；$M_i=\{n\leq i-1 \text{且} Y_n>Y_i\}$ 的個數，$M_i$ 也就是代表在 $Y_i$ 的左方且比 $Y_i$ 值大的個數，在作排序時，這些比 $Y_i$ 大的 $Y_n$ 將排在 $Y_i$ 的右邊。

因為 $N_i$ 及 $M_i$ 皆是不大的正整數，所以 $I_i=N_i-M_i$ 會很小，代表

移動位置的量很小；也就是說，當在非傳統的$\overline{X}$管制圖中$X_i'$這點偵測出問題，我們只要回到原本資料的$X_i$附近的值去作檢驗即可找出發生異常的地方。

# 第三章、改善製程管制圖

## 3-1 統計製程管制概論

統計製程管制(statistical process control)簡稱 SPC，就是利用抽樣的樣本資料，來監控整個製程的狀態，遇到發生問題時就會採取調整製程的參數的行動，來降低產品品質特性的變異。而在統計製程管制中，目前最常使用的的工具為管制圖(control chart)，當由管制圖中的點看出有發生異常，接下來就會做診斷的工作來找出造成此異常的原因，以使得變異消失，也會使相同的問題不會再產生。統計製程管制最主要目的，即是可以盡快的偵測出製程發生跳動的原因，以便能在產生更多的不良品前，能夠發現變異而進行改善的工作，而使損失能夠降到最低。

## 3-2 管制圖之介紹

典型的管制圖包含三個部份，其中包含中心線(center line，CL)、上管制界線(upper control limit，UCL)及下管制界線(lower control limit，LCL)，其中中心線(CL)代表的是製程處於統計管制內品質特性的平均值。圖 3.1 為典型管制圖的範例。

管制圖與統計檢定假設間有密切的關係，在使用管制圖時可視為就是在利用假設檢定以判定製程是否為統計管制內。在管制圖中若一點樣本值在管制界線內，相當於不能拒絕製程是在管制內的虛無假設(null hypothesis)；另一方面，當在管制圖內一點樣本值落在管制界線外，相當於拒絕接受製程為管制內的假設，也就是製程發生異常。

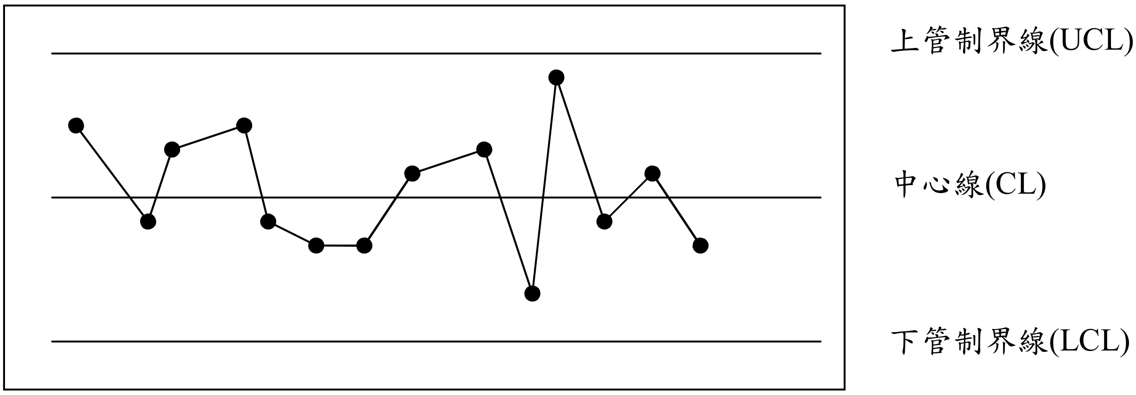



圖 3.1 典型管制圖

管制圖中的型 I 誤差即型 II 誤差和統計假設檢定有相同意義，管制圖的型 I 誤差就是當製程實際為管制內時卻誤判為管制外，而型 II 誤差即為製程實際為管制外卻誤判為管制內的錯誤，所以管制圖可以視為在不同時間點重複做統計假設檢定。

[例]某產品抽樣，我們得到樣本平均數為$\overline{X}_n$，已知產品規格須滿足常態分配 $N(\mu,\sigma^2)$，其中$\sigma^2$為已知，且目標值$\mu=\mu_0$，即檢定

$H_0$ ： $\mu=\mu_0$ vs. $H_1$ ： $\mu\neq\mu_0$

[解](1)由管制圖來看，在型 I 誤差$\alpha$下，CL 為$\mu_0$、UCL 為$c_1$及 LCL 為$c_2$，若管制圖中的點超出 UCL 或 LCL 時，則拒絕$H_0$，也就是此製程在管制外。

(2)以臨界值檢定法來看，在型 I 誤差$\alpha$下，臨界值為

$c_1=\mu_0+Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $c_2=\mu_0-Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，則$\overline{X}_n>c_1$或$\overline{X}_n<c_2$，我們就拒絕$H_0$，即是此製程在管制外。

在管制圖的使用上，管制界線的決定被視為一重要的決策，若將管制界線移離中心線將會減少型 I 誤差之發生(型 I 誤差指製程實際為正常，但由於點超出管制界線，而誤判製程為管制外的機率)。但若將管制界線加寬也將會使型 II 誤差增加(型 II 誤差指當製程是管制

外，但由於點落於管制界線內，而誤認為製程為管制內的機率)。而通常在品質特性為常態分配時，會使用三個標準差的管制界線，型 I 誤差為 0.0027，則在 $\overline{X}$ 管制圖中會定管制界線為：$UCL=\mu+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$、$CL=\mu$、$LCL=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

而此篇論文最主要的就是在每單位時間所得到的樣本資料經由特殊的方法，利用其排序後產生的負相關，在將固定數個(4、5 或 6…等)樣本相加取平均值，再利用轉換來製成有別於典型管制圖，則可得到在與典型管制圖有相同的型 I 誤差下，但卻因樣本資料經過重新排列而產生的負相關會降低變異，而使得型 II 誤差 $\beta$ 也變小，使用此法所做出的管制圖能夠更有效的監控整個產品的製造過程。

## 3-3 負相關運用於改善製程管制

因為負相關可以降低變異數，我們將這樣的結果運用於管制圖上，即可繪出新的管制圖，且由於負相關降低變異數後，會降低型 II 誤差 $\beta$，也會讓新的管制圖的檢定力提高。應用於管制圖上步驟如下：

(a) $x_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$ i=1,2,⋯，$x_i$ 為實際產品數據。

(b)令 $w_i=\frac{\sigma^*}{\sigma}x_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^{*2})$，其中 $\sigma^*$ 為最佳化的 $\sigma$ 值。

(c)再令 $y_i=w_i+i$。

(d)將 $y_i$ 作排序後，再找出原對應的 $w_i$ 值，則可以得到新的資料 $w_1^{'},w_2^{'},w_3^{'},....$。

(e)再令 $x_i^{'}=w_i^{'}\frac{\sigma}{\sigma^*}$ 則可以得到變異數降幅最大的結果。

(1)在管制圖(control chart)方面：

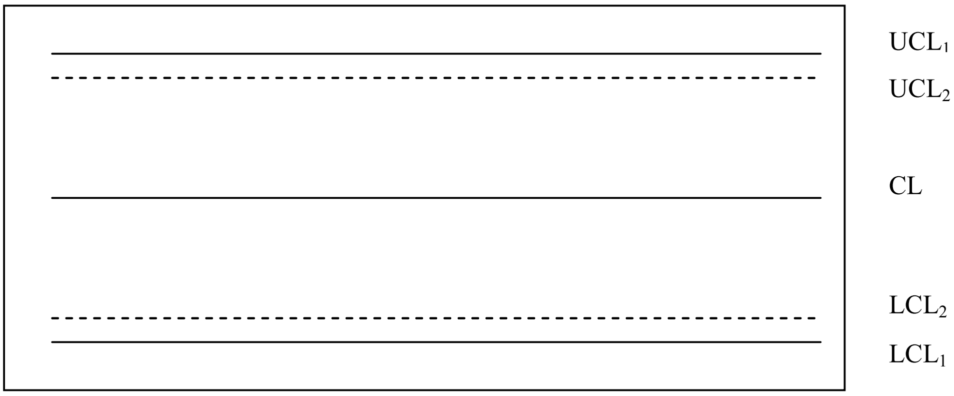



圖 3.2 管制圖的變化

圖 3.2 中實線為 X 的上下管制界線($UCL_1$、$LCL_1$)，虛線為前述應用至管制圖步驟所得 $X'$ 的上下管制界線($UCL_2$、$LCL_2$)，也就是當資料加入負相關後會降低變異(variance)，即管制界線會往中心線(CL)移動，且增加檢定力(power)。

(2)型 II 誤差 $\beta$ 方面：

當資料加入負相關後降低變異，且增加其檢定力，因為 $\beta$=1-檢定力(power)，所以在檢定力(power)增加下，型 II 誤差 $\beta$ 會降低。

將此方法運用在製程管制上，當知道 $X_1, X_2, X_3, \ldots \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$，且 $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$，經過 2.1 節介紹的方法可以找出最佳化的 $\sigma^*$，令 $W_i = \frac{\sigma^*}{\sigma} X_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^{*2})$，且 $Var(\bar{W}) = \frac{1}{n}\sigma^{*2}$，經過重排後可以得到一新數列 $W_i'$，且 $W_i'$ 和 $W_{i+1}'$ 會具有負相關而降低變異數，所以 $Var(\bar{W}') < \frac{1}{n}\sigma^{*2}$，再令 $X_i' = \frac{\sigma}{\sigma^*} W_i'$，則 $Var(\bar{X}_i') = (\frac{\sigma}{\sigma^*})^2 Var(\bar{W}_i') < \frac{\sigma^2}{n}$，所以變異數降低。應用於管制圖上，可以在同一型 I 誤差 $\alpha$ 下，提高

檢定力(power)也降低了型 II 誤差 $\beta$ 的風險，也能使品質管制人員可以更快偵測出錯誤，以便在不良品生產前能夠有效的改善製程。

# 第四章、結論

在競爭力提升下及生產技術的提升下，一個公司想要永續經營，必須要製造出符合顧客需求的產品，品質管制成為影響公司生產能力的最主要原因，所以近年來各個公司都發覺到有需要去監視和改善整個系統來提供品質優良的產品或服務，因為提供不正確的服務，顧客接受了此服務，可能會導致客戶選擇退貨，且需要另外花時間及金錢來矯正有問題的系統，如果已經生產了大量的不良品而沒人處理，這樣報廢或重修的成本一定會提高，所以品質已經成為各個企業最關心的問題。

而此篇論文就是利用 $x_1, x_2, x_3, \ldots \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$，$x_i$ 為實際產品數據，利用 2-1 節的方法找出最佳 $\sigma^{*2}$，由 3-3 節的方法利用負相關求得一組新的數列 $x_i'$，製成非傳統 $\overline{X}$ 管制圖，我們可以得到在和傳統 $\overline{X}$ 管制圖有相同的型 I 誤差 $\alpha$ 下，但我們降低了變異數，因為降低了變異數所以型 II 誤差 $\beta$ 風險降低，且檢定力(power)=1-$\beta$，所以檢定力也會提高，這樣能夠讓品質管制人員更能盡快偵測出發生錯誤的原因，使得在更多不良品出產前，能夠更有效的監控製程。

每個公司都應在經濟與利潤中取得平衡，來達成顧客的需求，對於每件公司的產品或服務，都必須設計、建立與保持品質，才能夠讓公司成功的打進市場及維持市場，所以追求持續改善的品質經營才是確保公司成功的關鍵。

附錄 A：

模擬出 200 個 X 值服從 N(0,$\sigma^2$)且跑$10^7$迴圈(於第二章討論)，計算出 $S^2_{n,\sigma^2}$ 的結果，再計算出 ratio$=\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$ 結果。

(表 A-1) n=2

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.000084 | 2.6 | 0.049479 | 5.1 | 0.027533 | 7.6 | 0.018252 |
| 0.2 | 0.000247 | 2.7 | 0.047714 | 5.2 | 0.027494 | 7.7 | 0.017948 |
| 0.3 | 0.001192 | 2.8 | 0.046631 | 5.3 | 0.026246 | 7.8 | 0.018291 |
| 0.4 | 0.013847 | 2.9 | 0.045181 | 5.4 | 0.026349 | 7.9 | 0.017839 |
| 0.5 | 0.035790 | 3 | 0.043909 | 5.5 | 0.026742 | 8 | 0.018401 |
| 0.6 | 0.055686 | 3.1 | 0.043088 | 5.6 | 0.024566 | 8.1 | 0.017875 |
| 0.7 | 0.068856 | 3.2 | 0.041638 | 5.7 | 0.024199 | 8.2 | 0.017178 |
| 0.8 | 0.076549 | 3.3 | 0.041119 | 5.8 | 0.023934 | 8.3 | 0.016833 |
| 0.9 | 0.079113 | 3.4 | 0.039131 | 5.9 | 0.023405 | 8.4 | 0.018028 |
| 1 | 0.080133 | 3.5 | 0.037688 | 6 | 0.022730 | 8.5 | 0.016238 |
| ***1.1*** | ***0.080385*** | 3.6 | 0.037590 | 6.1 | 0.023063 | 8.6 | 0.016325 |
| 1.2 | 0.078340 | 3.7 | 0.036359 | 6.2 | 0.022782 | 8.7 | 0.016046 |
| 1.3 | 0.076549 | 3.8 | 0.035936 | 6.3 | 0.021815 | 8.8 | 0.016194 |
| 1.4 | 0.072809 | 3.9 | 0.034879 | 6.4 | 0.022507 | 8.9 | 0.017383 |
| 1.5 | 0.071080 | 4 | 0.034757 | 6.5 | 0.021810 | 9 | 0.016411 |
| 1.6 | 0.069426 | 4.1 | 0.032683 | 6.6 | 0.021729 | 9.1 | 0.015205 |
| 1.7 | 0.066872 | 4.2 | 0.032816 | 6.7 | 0.020912 | 9.2 | 0.015150 |
| 1.8 | 0.065330 | 4.3 | 0.031341 | 6.8 | 0.020457 | 9.3 | 0.015751 |
| 1.9 | 0.061634 | 4.4 | 0.031946 | 6.9 | 0.020050 | 9.4 | 0.015072 |
| 2 | 0.059793 | 4.5 | 0.031277 | 7 | 0.020148 | 9.5 | 0.015272 |
| 2.1 | 0.058906 | 4.6 | 0.030009 | 7.1 | 0.020528 | 9.6 | 0.014527 |
| 2.2 | 0.056205 | 4.7 | 0.029729 | 7.2 | 0.020920 | 9.7 | 0.015021 |
| 2.3 | 0.054204 | 4.8 | 0.028233 | 7.3 | 0.020073 | 9.8 | 0.014572 |
| 2.4 | 0.052845 | 4.9 | 0.027603 | 7.4 | 0.018695 | 9.9 | 0.012799 |
| 2.5 | 0.050312 | 5 | 0.027501 | 7.5 | 0.018773 | 10 | 0.015371 |

備註：在 n=2 中 $\sigma=1.1$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}=0.080385$ 為最大值。

(表 A-2) n=3

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.000128 | 2.6 | 0.089386 | 5.1 | 0.052552 | 7.6 | 0.037076 |
| 0.2 | 0.000149 | 2.7 | 0.086852 | 5.2 | 0.051391 | 7.7 | 0.036032 |
| 0.3 | 0.000733 | 2.8 | 0.085111 | 5.3 | 0.051322 | 7.8 | 0.035365 |
| 0.4 | 0.009120 | 2.9 | 0.083249 | 5.4 | 0.049540 | 7.9 | 0.035427 |
| 0.5 | 0.025107 | 3 | 0.080453 | 5.5 | 0.048983 | 8 | 0.035275 |
| 0.6 | 0.043654 | 3.1 | 0.079164 | 5.6 | 0.048578 | 8.1 | 0.034537 |
| 0.7 | 0.061521 | 3.2 | 0.077518 | 5.7 | 0.047602 | 8.2 | 0.033763 |
| 0.8 | 0.076337 | 3.3 | 0.075470 | 5.8 | 0.047710 | 8.3 | 0.033387 |
| 0.9 | 0.087247 | 3.4 | 0.073853 | 5.9 | 0.046007 | 8.4 | 0.033708 |
| 1 | 0.097179 | 3.5 | 0.072460 | 6 | 0.044741 | 8.5 | 0.033243 |
| 1.1 | 0.103616 | 3.6 | 0.070899 | 6.1 | 0.044493 | 8.6 | 0.032053 |
| 1.2 | 0.107632 | 3.7 | 0.069635 | 6.2 | 0.044196 | 8.7 | 0.031937 |
| 1.3 | 0.109640 | 3.8 | 0.067381 | 6.3 | 0.043253 | 8.8 | 0.031618 |
| ***1.4*** | ***0.110481*** | 3.9 | 0.066475 | 6.4 | 0.043259 | 8.9 | 0.030901 |
| 1.5 | 0.110228 | 4 | 0.065382 | 6.5 | 0.041852 | 9 | 0.031127 |
| 1.6 | 0.108457 | 4.1 | 0.063211 | 6.6 | 0.041875 | 9.1 | 0.030937 |
| 1.7 | 0.109375 | 4.2 | 0.062131 | 6.7 | 0.040550 | 9.2 | 0.030317 |
| 1.8 | 0.106829 | 4.3 | 0.061745 | 6.8 | 0.040734 | 9.3 | 0.029858 |
| 1.9 | 0.103996 | 4.4 | 0.059589 | 6.9 | 0.040789 | 9.4 | 0.030145 |
| 2 | 0.102666 | 4.5 | 0.059450 | 7 | 0.040125 | 9.5 | 0.028942 |
| 2.1 | 0.100409 | 4.6 | 0.057387 | 7.1 | 0.039021 | 9.6 | 0.029181 |
| 2.2 | 0.098590 | 4.7 | 0.055918 | 7.2 | 0.038325 | 9.7 | 0.029150 |
| 2.3 | 0.095497 | 4.8 | 0.056083 | 7.3 | 0.037421 | 9.8 | 0.029358 |
| 2.4 | 0.093602 | 4.9 | 0.054595 | 7.4 | 0.037384 | 9.9 | 0.027501 |
| 2.5 | 0.091585 | 5 | 0.053869 | 7.5 | 0.036758 | 10 | 0.027657 |

備註：在 n=3 中 $\sigma=1.4$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}}=0.110481$ 為最大值。

(表 A-3) n=4

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.000348 | 2.6 | 0.117318 | 5.1 | 0.076606 | 7.6 | 0.053218 |
| 0.2 | 0.000243 | 2.7 | 0.115301 | 5.2 | 0.074314 | 7.7 | 0.053096 |
| 0.3 | 0.001133 | 2.8 | 0.114132 | 5.3 | 0.073309 | 7.8 | 0.052364 |
| 0.4 | 0.006621 | 2.9 | 0.111664 | 5.4 | 0.071942 | 7.9 | 0.052122 |
| 0.5 | 0.018584 | 3 | 0.110631 | 5.5 | 0.071874 | 8 | 0.051470 |
| 0.6 | 0.031861 | 3.1 | 0.108860 | 5.6 | 0.069961 | 8.1 | 0.050563 |
| 0.7 | 0.047095 | 3.2 | 0.106376 | 5.7 | 0.068986 | 8.2 | 0.050321 |
| 0.8 | 0.060117 | 3.3 | 0.104042 | 5.8 | 0.068217 | 8.3 | 0.049520 |
| 0.9 | 0.073966 | 3.4 | 0.102541 | 5.9 | 0.067724 | 8.4 | 0.048777 |
| 1 | 0.085923 | 3.5 | 0.100812 | 6 | 0.066192 | 8.5 | 0.048573 |
| 1.1 | 0.096492 | 3.6 | 0.098276 | 6.1 | 0.065745 | 8.6 | 0.048085 |
| 1.2 | 0.104905 | 3.7 | 0.096757 | 6.2 | 0.064237 | 8.7 | 0.047564 |
| 1.3 | 0.112193 | 3.8 | 0.095692 | 6.3 | 0.063263 | 8.8 | 0.047165 |
| 1.4 | 0.117733 | 3.9 | 0.093210 | 6.4 | 0.063177 | 8.9 | 0.046613 |
| 1.5 | 0.120625 | 4 | 0.090972 | 6.5 | 0.061753 | 9 | 0.046751 |
| 1.6 | 0.124544 | 4.1 | 0.090529 | 6.6 | 0.061355 | 9.1 | 0.045836 |
| 1.7 | 0.124716 | 4.2 | 0.088203 | 6.7 | 0.059969 | 9.2 | 0.045146 |
| ***1.8*** | ***0.126970*** | 4.3 | 0.086923 | 6.8 | 0.059491 | 9.3 | 0.044323 |
| 1.9 | 0.126237 | 4.4 | 0.085541 | 6.9 | 0.058916 | 9.4 | 0.044396 |
| 2 | 0.126910 | 4.5 | 0.083611 | 7 | 0.057938 | 9.5 | 0.044521 |
| 2.1 | 0.125786 | 4.6 | 0.083053 | 7.1 | 0.057488 | 9.6 | 0.043001 |
| 2.2 | 0.124492 | 4.7 | 0.081702 | 7.2 | 0.057114 | 9.7 | 0.042331 |
| 2.3 | 0.123392 | 4.8 | 0.079479 | 7.3 | 0.055305 | 9.8 | 0.042013 |
| 2.4 | 0.120895 | 4.9 | 0.078199 | 7.4 | 0.055120 | 9.9 | 0.041400 |
| 2.5 | 0.119825 | 5 | 0.077511 | 7.5 | 0.054543 | 10 | 0.041459 |

備註：在 n=4 中 $\sigma = 1.8$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.126970$ 為最大值。

(表 A-4) n=5

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 9.02182e-005 | 2.6 | 0.135848 | 5.1 | 0.0973295 | 7.6 | 0.0703496 |
| 0.2 | -0.000135496 | 2.7 | 0.135061 | 5.2 | 0.0956377 | 7.7 | 0.0690333 |
| 0.3 | 9.49286e-005 | 2.8 | 0.133051 | 5.3 | 0.0946266 | 7.8 | 0.0687503 |
| 0.4 | 0.00533675 | 2.9 | 0.132077 | 5.4 | 0.0927966 | 7.9 | 0.0680358 |
| 0.5 | 0.0149097 | 3 | 0.130505 | 5.5 | 0.0912219 | 8 | 0.0668797 |
| 0.6 | 0.0261345 | 3.1 | 0.12919 | 5.6 | 0.0904196 | 8.1 | 0.0662737 |
| 0.7 | 0.0383857 | 3.2 | 0.127266 | 5.7 | 0.0891316 | 8.2 | 0.0649541 |
| 0.8 | 0.0490259 | 3.3 | 0.126135 | 5.8 | 0.0882387 | 8.3 | 0.0649842 |
| 0.9 | 0.0599031 | 3.4 | 0.123401 | 5.9 | 0.0863416 | 8.4 | 0.0647623 |
| 1 | 0.0703323 | 3.5 | 0.122462 | 6 | 0.0863344 | 8.5 | 0.063387 |
| 1.1 | 0.0814659 | 3.6 | 0.119933 | 6.1 | 0.0839528 | 8.6 | 0.0627998 |
| 1.2 | 0.0911459 | 3.7 | 0.119351 | 6.2 | 0.0834446 | 8.7 | 0.0615573 |
| 1.3 | 0.100908 | 3.8 | 0.118062 | 6.3 | 0.0819966 | 8.8 | 0.0614552 |
| 1.4 | 0.108362 | 3.9 | 0.115487 | 6.4 | 0.0806498 | 8.9 | 0.0607499 |
| 1.5 | 0.115402 | 4 | 0.114543 | 6.5 | 0.079438 | 9 | 0.0600508 |
| 1.6 | 0.12064 | 4.1 | 0.112071 | 6.6 | 0.0790535 | 9.1 | 0.0590462 |
| 1.7 | 0.125554 | 4.2 | 0.110872 | 6.7 | 0.0784599 | 9.2 | 0.0591778 |
| 1.8 | 0.129791 | 4.3 | 0.108727 | 6.8 | 0.0769483 | 9.3 | 0.0585638 |
| 1.9 | 0.132125 | 4.4 | 0.10737 | 6.9 | 0.0765269 | 9.4 | 0.0577419 |
| 2 | 0.135149 | 4.5 | 0.105229 | 7 | 0.0747191 | 9.5 | 0.0578374 |
| 2.1 | 0.135626 | 4.6 | 0.104241 | 7.1 | 0.0750253 | 9.6 | 0.0565532 |
| ***2.2*** | ***0.13687*** | 4.7 | 0.102988 | 7.2 | 0.0738701 | 9.7 | 0.0561864 |
| 2.3 | 0.136617 | 4.8 | 0.1008 | 7.3 | 0.072743 | 9.8 | 0.0562381 |
| 2.4 | 0.136549 | 4.9 | 0.0998267 | 7.4 | 0.0718776 | 9.9 | 0.0547183 |
| 2.5 | 0.136210 | 5 | 0.097874 | 7.5 | 0.0714882 | 10 | 0.0550407 |

備註：在 n=5 中 $\sigma=2.2$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}=0.13687$ 為最大值。

(表 A-5) n=6

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.000164 | 2.6 | 0.143077 | 5.1 | 0.115108 | 7.6 | 0.085925 |
| 0.2 | -0.000298 | 2.7 | 0.143611 | 5.2 | 0.113288 | 7.7 | 0.084235 |
| 0.3 | 0.000664 | ***2.8*** | ***0.143954*** | 5.3 | 0.112381 | 7.8 | 0.083800 |
| 0.4 | 0.005312 | 2.9 | 0.143155 | 5.4 | 0.110676 | 7.9 | 0.082704 |
| 0.5 | 0.012262 | 3 | 0.142864 | 5.5 | 0.109024 | 8 | 0.082234 |
| 0.6 | 0.021997 | 3.1 | 0.142215 | 5.6 | 0.107961 | 8.1 | 0.081324 |
| 0.7 | 0.031403 | 3.2 | 0.141098 | 5.7 | 0.106585 | 8.2 | 0.079937 |
| 0.8 | 0.040277 | 3.3 | 0.140103 | 5.8 | 0.105115 | 8.3 | 0.079173 |
| 0.9 | 0.050116 | 3.4 | 0.139887 | 5.9 | 0.103133 | 8.4 | 0.078488 |
| 1 | 0.059203 | 3.5 | 0.138104 | 6 | 0.102020 | 8.5 | 0.077700 |
| 1.1 | 0.068222 | 3.6 | 0.137040 | 6.1 | 0.101809 | 8.6 | 0.076495 |
| 1.2 | 0.077743 | 3.7 | 0.135461 | 6.2 | 0.100301 | 8.7 | 0.076218 |
| 1.3 | 0.086755 | 3.8 | 0.133910 | 6.3 | 0.099088 | 8.8 | 0.075353 |
| 1.4 | 0.095054 | 3.9 | 0.132666 | 6.4 | 0.098182 | 8.9 | 0.074474 |
| 1.5 | 0.103374 | 4 | 0.130804 | 6.5 | 0.097082 | 9 | 0.073581 |
| 1.6 | 0.110627 | 4.1 | 0.129754 | 6.6 | 0.095290 | 9.1 | 0.072986 |
| 1.7 | 0.116773 | 4.2 | 0.127925 | 6.7 | 0.095231 | 9.2 | 0.073330 |
| 1.8 | 0.122322 | 4.3 | 0.126338 | 6.8 | 0.093464 | 9.3 | 0.071900 |
| 1.9 | 0.127103 | 4.4 | 0.125237 | 6.9 | 0.091940 | 9.4 | 0.070972 |
| 2 | 0.131611 | 4.5 | 0.123198 | 7 | 0.091217 | 9.5 | 0.070803 |
| 2.1 | 0.135373 | 4.6 | 0.121994 | 7.1 | 0.090245 | 9.6 | 0.069724 |
| 2.2 | 0.137967 | 4.7 | 0.121289 | 7.2 | 0.088530 | 9.7 | 0.068930 |
| 2.3 | 0.139906 | 4.8 | 0.118580 | 7.3 | 0.087340 | 9.8 | 0.069469 |
| 2.4 | 0.141117 | 4.9 | 0.117488 | 7.4 | 0.086867 | 9.9 | 0.067329 |
| 2.5 | 0.142655 | 5 | 0.116218 | 7.5 | 0.086732 | 10 | 0.067228 |

備註：在 n=6 中 $\sigma = 2.8$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.143954$ 為最大值。

(表 A-6) n=7

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | -0.000052 | 2.6 | 0.143526 | 5.1 | 0.129673 | 7.6 | 0.099235 |
| 0.2 | -0.000021 | 2.7 | 0.145508 | 5.2 | 0.128738 | 7.7 | 0.098355 |
| 0.3 | 0.000518 | 2.8 | 0.146410 | 5.3 | 0.126830 | 7.8 | 0.098383 |
| 0.4 | 0.003535 | 2.9 | 0.147297 | 5.4 | 0.125761 | 7.9 | 0.097404 |
| 0.5 | 0.011363 | 3 | 0.147639 | 5.5 | 0.124035 | 8 | 0.095418 |
| 0.6 | 0.018952 | 3.1 | 0.148030 | 5.6 | 0.122252 | 8.1 | 0.094776 |
| 0.7 | 0.027497 | ***3.2*** | ***0.149252*** | 5.7 | 0.121043 | 8.2 | 0.093532 |
| 0.8 | 0.034420 | 3.3 | 0.148777 | 5.8 | 0.120660 | 8.3 | 0.092983 |
| 0.9 | 0.041957 | 3.4 | 0.148300 | 5.9 | 0.119274 | 8.4 | 0.091231 |
| 1 | 0.051085 | 3.5 | 0.147180 | 6 | 0.117769 | 8.5 | 0.090500 |
| 1.1 | 0.059164 | 3.6 | 0.147408 | 6.1 | 0.116326 | 8.6 | 0.090453 |
| 1.2 | 0.067046 | 3.7 | 0.146606 | 6.2 | 0.115054 | 8.7 | 0.089494 |
| 1.3 | 0.074874 | 3.8 | 0.145759 | 6.3 | 0.113978 | 8.8 | 0.088028 |
| 1.4 | 0.082889 | 3.9 | 0.145095 | 6.4 | 0.112689 | 8.9 | 0.087192 |
| 1.5 | 0.090671 | 4 | 0.143270 | 6.5 | 0.112233 | 9 | 0.087282 |
| 1.6 | 0.097366 | 4.1 | 0.142410 | 6.6 | 0.110496 | 9.1 | 0.086537 |
| 1.7 | 0.104654 | 4.2 | 0.140841 | 6.7 | 0.108483 | 9.2 | 0.085852 |
| 1.8 | 0.111096 | 4.3 | 0.139660 | 6.8 | 0.108049 | 9.3 | 0.084711 |
| 1.9 | 0.117202 | 4.4 | 0.138316 | 6.9 | 0.106235 | 9.4 | 0.084086 |
| 2 | 0.122664 | 4.5 | 0.137766 | 7 | 0.105856 | 9.5 | 0.083036 |
| 2.1 | 0.127441 | 4.6 | 0.136672 | 7.1 | 0.103589 | 9.6 | 0.082803 |
| 2.2 | 0.131169 | 4.7 | 0.135133 | 7.2 | 0.104025 | 9.7 | 0.080813 |
| 2.3 | 0.136235 | 4.8 | 0.133301 | 7.3 | 0.102987 | 9.8 | 0.080795 |
| 2.4 | 0.138317 | 4.9 | 0.132058 | 7.4 | 0.102083 | 9.9 | 0.079688 |
| 2.5 | 0.141543 | 5 | 0.131185 | 7.5 | 0.100035 | 10 | 0.080084 |

備註：在 n=7 中 $\sigma = 3.2$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.149252$ 為最大值。

(表 A-7) n=8

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.000174 | 2.6 | 0.138670 | 5.1 | 0.141755 | 7.6 | 0.111910 |
| 0.2 | -0.000061 | 2.7 | 0.140967 | 5.2 | 0.139637 | 7.7 | 0.111024 |
| 0.3 | -0.000167 | 2.8 | 0.143971 | 5.3 | 0.138602 | 7.8 | 0.109783 |
| 0.4 | 0.003473 | 2.9 | 0.145346 | 5.4 | 0.138605 | 7.9 | 0.108117 |
| 0.5 | 0.009948 | 3 | 0.148366 | 5.5 | 0.136277 | 8 | 0.107933 |
| 0.6 | 0.016256 | 3.1 | 0.149445 | 5.6 | 0.135620 | 8.1 | 0.107087 |
| 0.7 | 0.023209 | 3.2 | 0.150390 | 5.7 | 0.134579 | 8.2 | 0.106606 |
| 0.8 | 0.030626 | 3.3 | 0.151352 | 5.8 | 0.133114 | 8.3 | 0.105300 |
| 0.9 | 0.037783 | 3.4 | 0.151585 | 5.9 | 0.131824 | 8.4 | 0.103731 |
| 1 | 0.044566 | 3.5 | 0.152507 | 6 | 0.130857 | 8.5 | 0.103954 |
| 1.1 | 0.051258 | 3.6 | 0.152115 | 6.1 | 0.129113 | 8.6 | 0.102256 |
| 1.2 | 0.059093 | 3.7 | 0.151259 | 6.2 | 0.128636 | 8.7 | 0.101901 |
| 1.3 | 0.066176 | 3.8 | 0.151889 | 6.3 | 0.127112 | 8.8 | 0.100060 |
| 1.4 | 0.073053 | ***3.9*** | ***0.152885*** | 6.4 | 0.125761 | 8.9 | 0.099981 |
| 1.5 | 0.079292 | 4 | 0.151679 | 6.5 | 0.123867 | 9 | 0.099058 |
| 1.6 | 0.086369 | 4.1 | 0.151250 | 6.6 | 0.122814 | 9.1 | 0.098102 |
| 1.7 | 0.093424 | 4.2 | 0.150731 | 6.7 | 0.121781 | 9.2 | 0.096702 |
| 1.8 | 0.099999 | 4.3 | 0.149515 | 6.8 | 0.121099 | 9.3 | 0.096148 |
| 1.9 | 0.106401 | 4.4 | 0.148403 | 6.9 | 0.120099 | 9.4 | 0.095266 |
| 2 | 0.111617 | 4.5 | 0.147997 | 7 | 0.118808 | 9.5 | 0.094262 |
| 2.1 | 0.117450 | 4.6 | 0.146771 | 7.1 | 0.117727 | 9.6 | 0.093732 |
| 2.2 | 0.122579 | 4.7 | 0.145338 | 7.2 | 0.116109 | 9.7 | 0.092553 |
| 2.3 | 0.126813 | 4.8 | 0.144740 | 7.3 | 0.116030 | 9.8 | 0.092089 |
| 2.4 | 0.131143 | 4.9 | 0.143911 | 7.4 | 0.114495 | 9.9 | 0.091561 |
| 2.5 | 0.135025 | 5 | 0.142168 | 7.5 | 0.112990 | 10 | 0.090472 |

備註：在 n=8 中 $\sigma = 3.9$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.152885$ 為最大值。

(表 A-8) n=9

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0003748 | 2.6 | 0.1304973 | 5.1 | 0.1497587 | 7.6 | 0.1234978 |
| 0.2 | -0.0001287 | 2.7 | 0.1345586 | 5.2 | 0.1491138 | 7.7 | 0.1223911 |
| 0.3 | -0.0002749 | 2.8 | 0.1377762 | 5.3 | 0.1481503 | 7.8 | 0.1216963 |
| 0.4 | 0.0031250 | 2.9 | 0.1402957 | 5.4 | 0.1479003 | 7.9 | 0.1205471 |
| 0.5 | 0.0083965 | 3 | 0.1432526 | 5.5 | 0.1465829 | 8 | 0.1200652 |
| 0.6 | 0.0148184 | 3.1 | 0.1455689 | 5.6 | 0.1453965 | 8.1 | 0.1185090 |
| 0.7 | 0.0212413 | 3.2 | 0.1480157 | 5.7 | 0.1444694 | 8.2 | 0.1179843 |
| 0.8 | 0.0271940 | 3.3 | 0.1497025 | 5.8 | 0.1434107 | 8.3 | 0.1162674 |
| 0.9 | 0.0331915 | 3.4 | 0.1517834 | 5.9 | 0.1428105 | 8.4 | 0.1158845 |
| 1 | 0.0394015 | 3.5 | 0.1528642 | 6 | 0.1415653 | 8.5 | 0.1147906 |
| 1.1 | 0.0462599 | 3.6 | 0.1535446 | 6.1 | 0.1391146 | 8.6 | 0.1129599 |
| 1.2 | 0.0521835 | 3.7 | 0.1538841 | 6.2 | 0.1381445 | 8.7 | 0.1125603 |
| 1.3 | 0.0589044 | 3.8 | 0.1547941 | 6.3 | 0.1373104 | 8.8 | 0.1121378 |
| 1.4 | 0.0650154 | 3.9 | 0.1553263 | 6.4 | 0.1368372 | 8.9 | 0.1116663 |
| 1.5 | 0.0710736 | ***4*** | ***0.1556433*** | 6.5 | 0.1359701 | 9 | 0.1101446 |
| 1.6 | 0.0768012 | 4.1 | 0.1552095 | 6.6 | 0.1343481 | 9.1 | 0.1086961 |
| 1.7 | 0.0831919 | 4.2 | 0.1553889 | 6.7 | 0.1335150 | 9.2 | 0.1074936 |
| 1.8 | 0.0895049 | 4.3 | 0.1543553 | 6.8 | 0.1328367 | 9.3 | 0.1072056 |
| 1.9 | 0.0961022 | 4.4 | 0.1553143 | 6.9 | 0.1306742 | 9.4 | 0.1059487 |
| 2 | 0.1011502 | 4.5 | 0.1541053 | 7 | 0.1299775 | 9.5 | 0.1056262 |
| 2.1 | 0.1074150 | 4.6 | 0.1545063 | 7.1 | 0.1291625 | 9.6 | 0.1050590 |
| 2.2 | 0.1122338 | 4.7 | 0.1531521 | 7.2 | 0.1283304 | 9.7 | 0.1035201 |
| 2.3 | 0.1175137 | 4.8 | 0.1516502 | 7.3 | 0.1269454 | 9.8 | 0.1030222 |
| 2.4 | 0.1215833 | 4.9 | 0.1520619 | 7.4 | 0.1250252 | 9.9 | 0.1022772 |
| 2.5 | 0.1262685 | 5 | 0.1507597 | 7.5 | 0.1252683 | 10 | 0.1015413 |

備註：在 n=9 中 $\sigma=4$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}}=0.1556433$ 為最大值。

(表 A-9) n=10

| σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio | σ | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0004934 | 2.6 | 0.1220798 | 5.1 | 0.1564505 | 7.6 | 0.1335619 |
| 0.2 | -0.0000407 | 2.7 | 0.1264412 | 5.2 | 0.1560589 | 7.7 | 0.1323793 |
| 0.3 | 0.0004219 | 2.8 | 0.1301751 | 5.3 | 0.1559047 | 7.8 | 0.1322916 |
| 0.4 | 0.0027935 | 2.9 | 0.1342219 | 5.4 | 0.1546966 | 7.9 | 0.1308120 |
| 0.5 | 0.0074417 | 3 | 0.1368692 | 5.5 | 0.1534549 | 8 | 0.1295349 |
| 0.6 | 0.0130225 | 3.1 | 0.1392336 | 5.6 | 0.1526858 | 8.1 | 0.1287638 |
| 0.7 | 0.0193859 | 3.2 | 0.142434 | 5.7 | 0.1513176 | 8.2 | 0.1280215 |
| 0.8 | 0.0242411 | 3.3 | 0.1452050 | 5.8 | 0.1518143 | 8.3 | 0.1269617 |
| 0.9 | 0.0304849 | 3.4 | 0.1478339 | 5.9 | 0.1503632 | 8.4 | 0.1257927 |
| 1 | 0.0352588 | 3.5 | 0.1489594 | 6 | 0.1496076 | 8.5 | 0.1248308 |
| 1.1 | 0.0407955 | 3.6 | 0.1513535 | 6.1 | 0.1491681 | 8.6 | 0.1233977 |
| 1.2 | 0.0472197 | 3.7 | 0.1518409 | 6.2 | 0.1477558 | 8.7 | 0.1231586 |
| 1.3 | 0.0531623 | 3.8 | 0.1545091 | 6.3 | 0.1459920 | 8.8 | 0.1218737 |
| 1.4 | 0.0581001 | 3.9 | 0.1544325 | 6.4 | 0.1456999 | 8.9 | 0.1206820 |
| 1.5 | 0.0646322 | 4 | 0.1561771 | 6.5 | 0.1455090 | 9 | 0.1201463 |
| 1.6 | 0.0694560 | 4.1 | 0.1563993 | 6.6 | 0.1444783 | 9.1 | 0.1191084 |
| 1.7 | 0.0748438 | 4.2 | 0.1570221 | 6.7 | 0.1429750 | 9.2 | 0.1182827 |
| 1.8 | 0.0803191 | 4.3 | 0.1577193 | 6.8 | 0.1413114 | 9.3 | 0.1170775 |
| 1.9 | 0.0857977 | 4.4 | 0.1571963 | 6.9 | 0.1408296 | 9.4 | 0.1171337 |
| 2 | 0.0919419 | 4.5 | 0.1577807 | 7 | 0.1393895 | 9.5 | 0.1154466 |
| 2.1 | 0.0970337 | ***4.6*** | ***0.1581309*** | 7.1 | 0.1387640 | 9.6 | 0.1151111 |
| 2.2 | 0.1025721 | 4.7 | 0.1578424 | 7.2 | 0.1376103 | 9.7 | 0.1138894 |
| 2.3 | 0.1071492 | 4.8 | 0.1576377 | 7.3 | 0.1364342 | 9.8 | 0.1132200 |
| 2.4 | 0.1123311 | 4.9 | 0.1568758 | 7.4 | 0.1361093 | 9.9 | 0.1115501 |
| 2.5 | 0.1170983 | 5 | 0.1565305 | 7.5 | 0.1349964 | 10 | 0.1111034 |

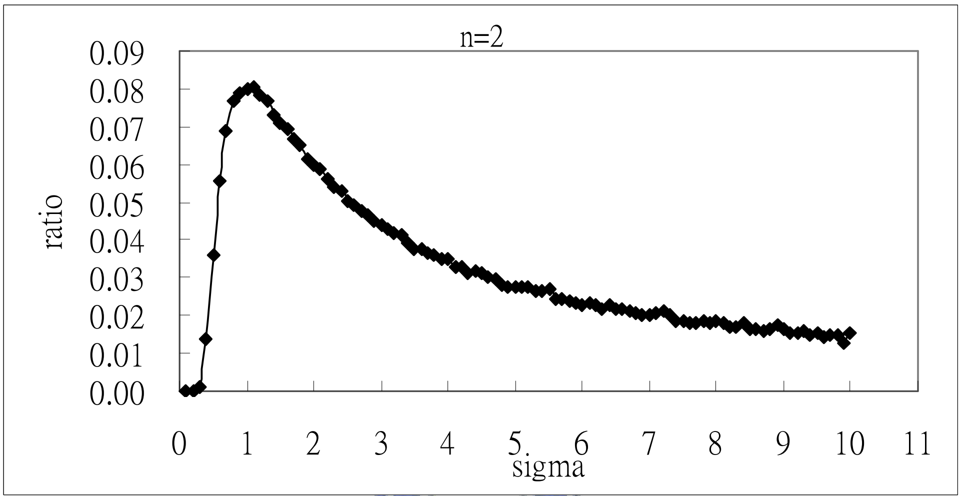
備註：在 n=10 中 $\sigma = 4.6$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.1581309$ 為最大值。

附錄 B：

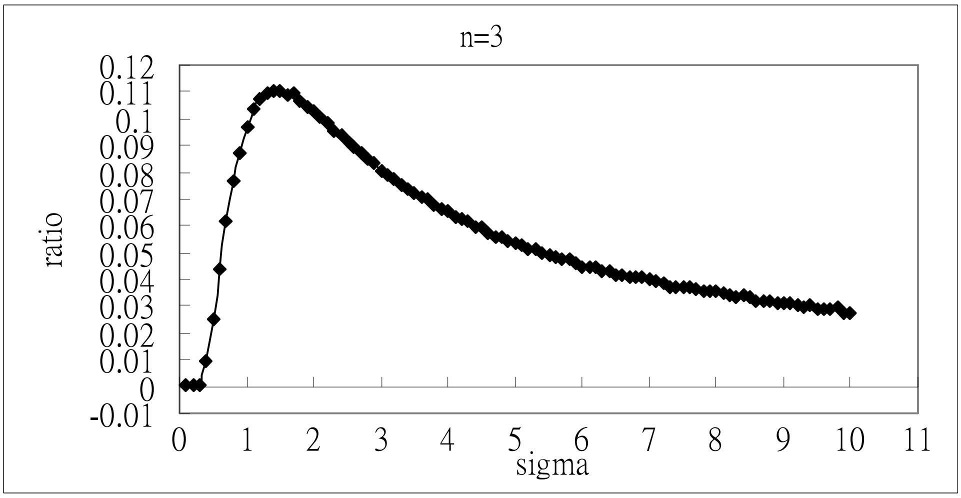
圖為模擬出 200 個 X 值服從 $N(0,\sigma^2)$且跑$10^7$迴圈(於第二章討論)，計

算出$S^2_{n,\sigma^2}$的結果，再計算出$\text{ratio}=\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$結果。

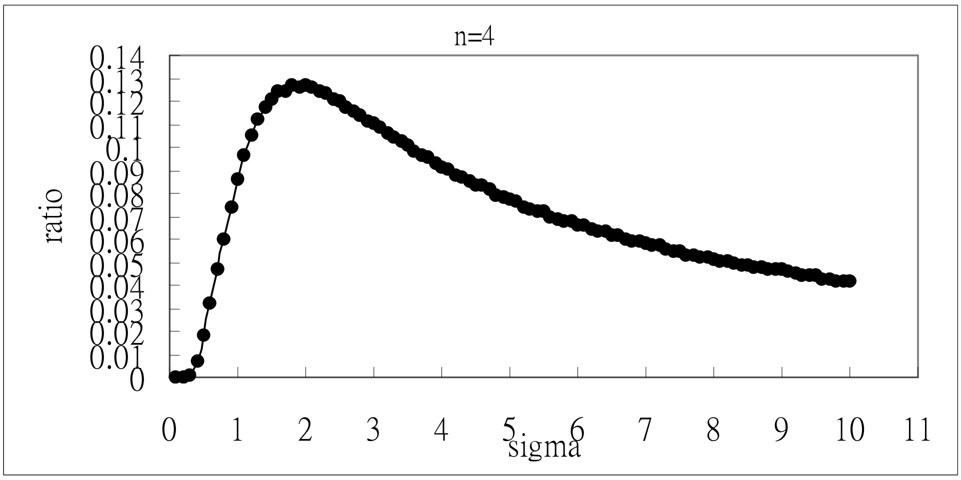
(圖 B-1) n=2



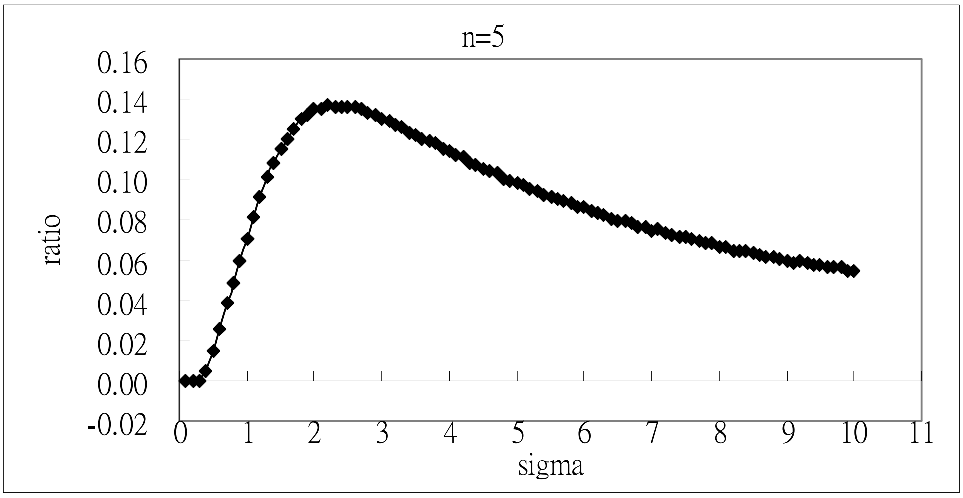

(圖 B-2) n=3



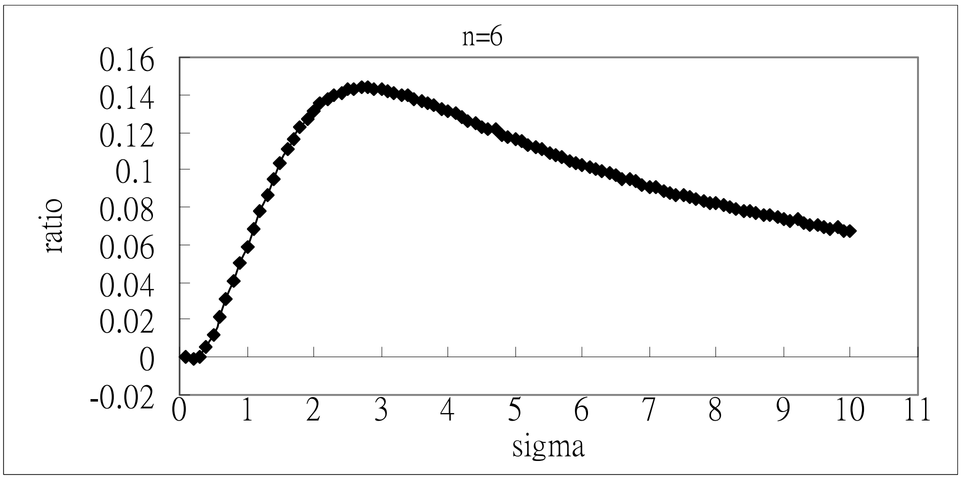
(圖 B-3) n=4



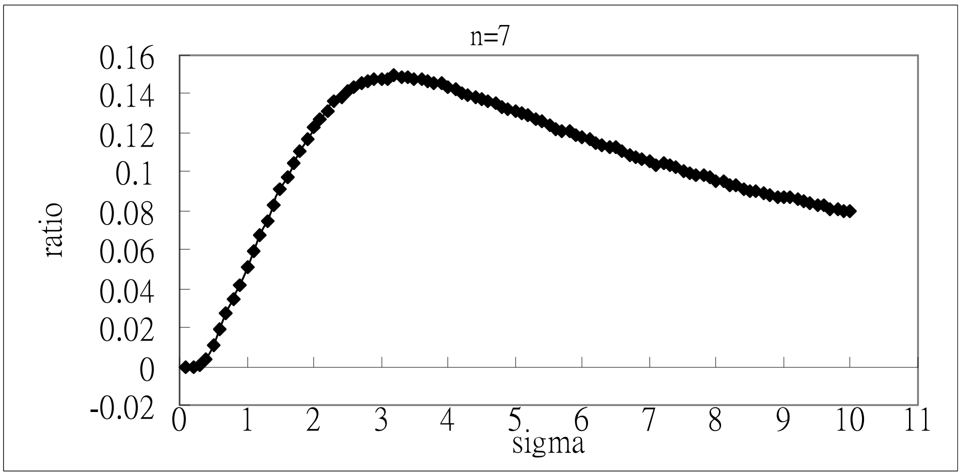

(圖 B-4) n=5



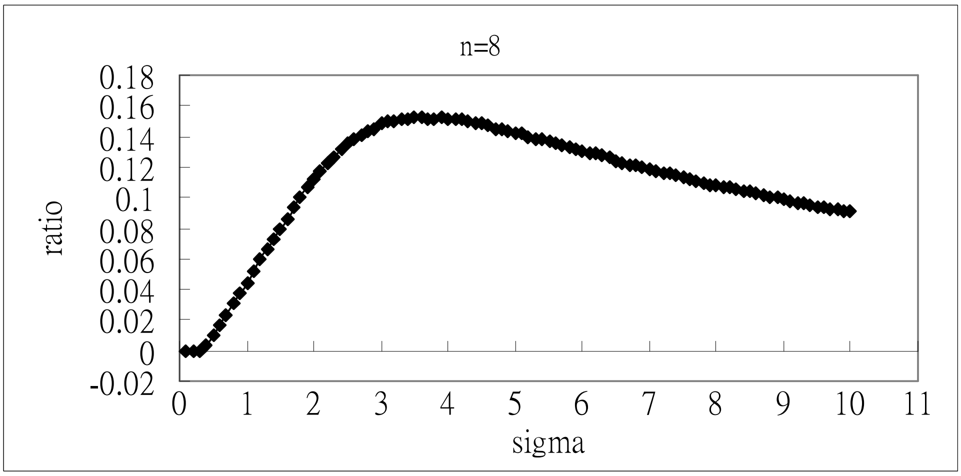

(圖 B-5) n=6



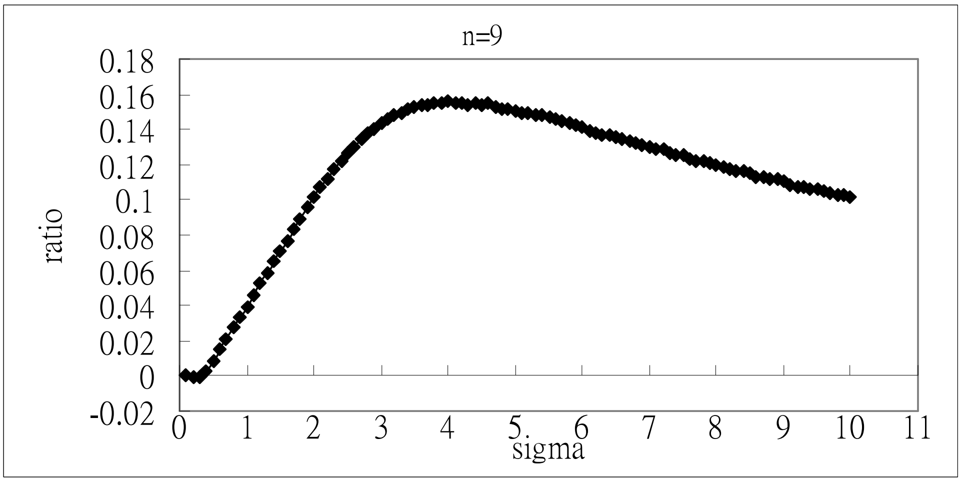
(圖 B-6) n=7



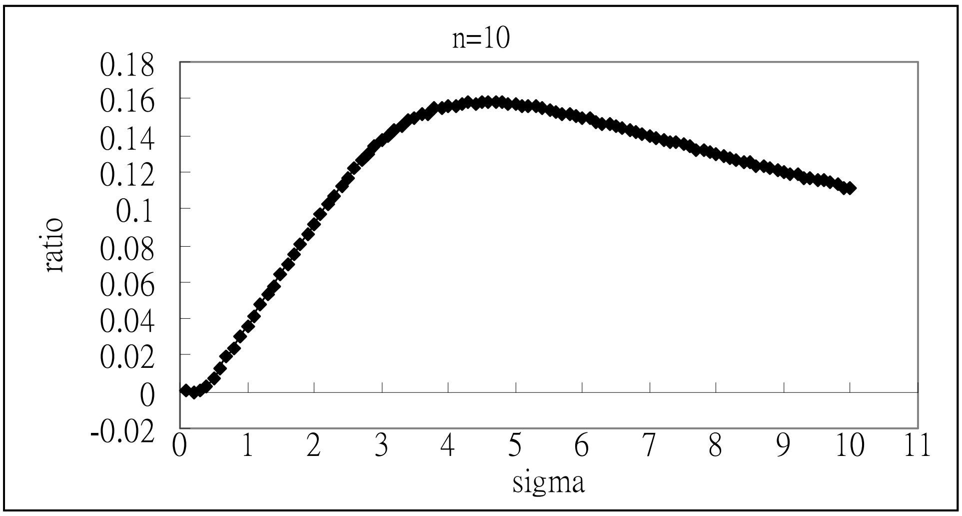

(圖 B-7) n=8




(圖 B-8) n=9



(圖 B-9) n=10


n=10
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
ratio
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
sigma

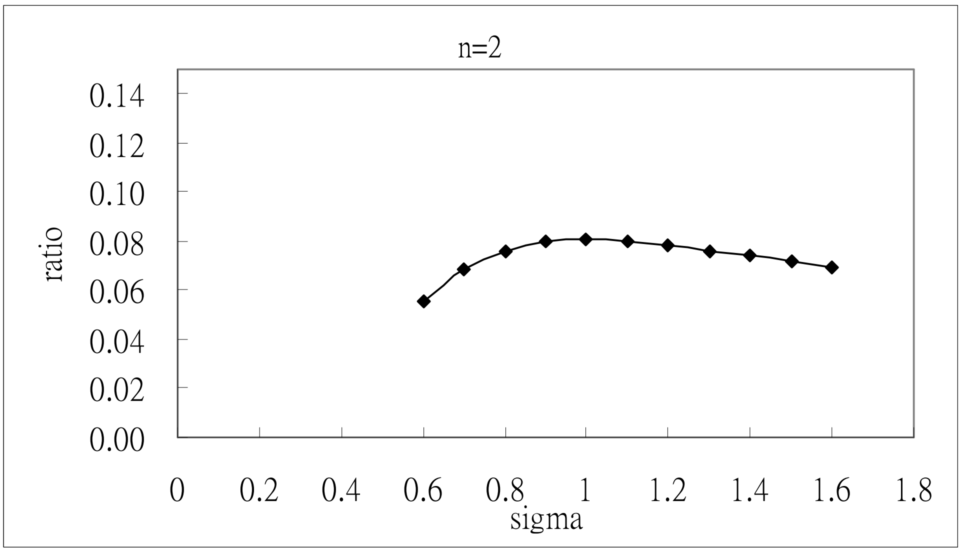
附錄 C：

模擬出 50 個 X 值服從 $N(0,\sigma^2)$，針對附錄 A 所得到的最佳化 $\sigma^*$ 取其前後各 5 個 $\sigma$ 值跑 $10^9$ 迴圈(於第二章討論)，計算出 $S^2_{n,\sigma^2}$ 的結果，再計算出 $\text{ratio}=\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}$ 結果。

(表 C-1-1) n=2

| σ | ratio |
|---|---|
| 0.6 | 0.0555110350 |
| 0.7 | 0.0688722118 |
| 0.8 | 0.0761865770 |
| 0.9 | 0.0795598404 |
| ***1.0*** | ***0.0803934465*** |
| 1.1 | 0.0797161973 |
| 1.2 | 0.0781974069 |
| 1.3 | 0.0761872487 |
| 1.4 | 0.0738989929 |
| 1.5 | 0.0715842192 |
| 1.6 | 0.0690937816 |

(圖 C-2-1) n=2

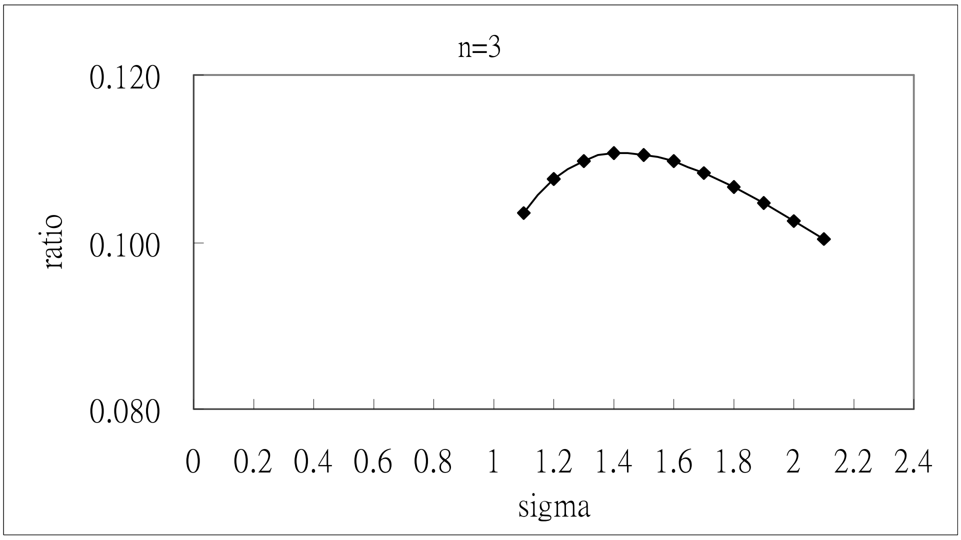


備註：在 n=2 中 $\sigma = 1.0$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.0803934465$ 為最大值。

(表 C-1-2) n=3

| σ | ratio |
|---|---|
| 1.1 | 0.1035437015 |
| 1.2 | 0.1075843658 |
| 1.3 | 0.1097700804 |
| ***1.4*** | ***0.1106102484*** |
| 1.5 | 0.1104342251 |
| 1.6 | 0.1096202497 |
| 1.7 | 0.1082725585 |
| 1.8 | 0.1065565567 |
| 1.9 | 0.1045931703 |
| 2.0 | 0.1024910769 |
| 2.1 | 0.1003200511 |

(圖 C-2-2) n=3

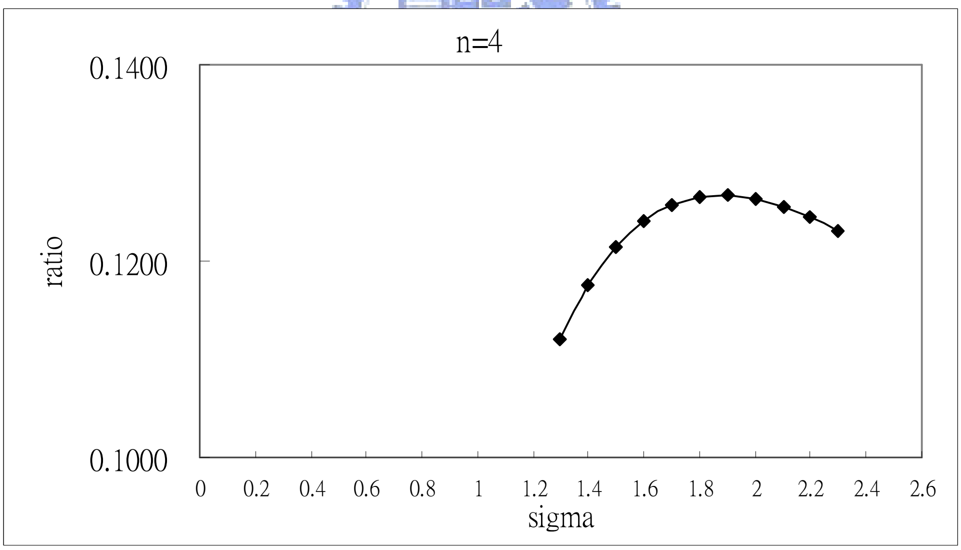



備註：在 n=3 中 $\sigma = 1.4$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.1106102484$ 為最大值。

(表 C-1-3) n=4

| σ | ratio |
|---|---|
| 1.3 | 0.1121070258 |
| 1.4 | 0.1175065367 |
| 1.5 | 0.1214048116 |
| 1.6 | 0.1241265202 |
| 1.7 | 0.1258039093 |
| 1.8 | 0.1265964395 |
| ***1.9*** | ***0.1267564835*** |
| 2.0 | 0.1263342052 |
| 2.1 | 0.1255628158 |
| 2.2 | 0.1244023119 |
| 2.3 | 0.1230265362 |

(圖 C-2-3) n=4

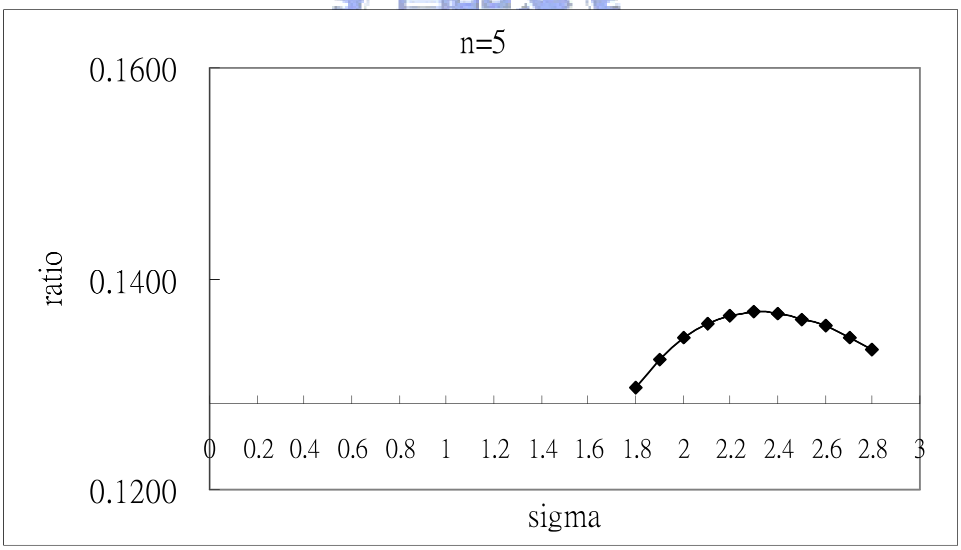



備註：在 n=4 中 $\sigma=1.9$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}=0.1267564835$ 為最大值。

(表 C-1-4) n=5

| σ | ratio |
|---|---|
| 1.8 | 0.1295933986 |
| 1.9 | 0.1323955711 |
| 2 | 0.1344205039 |
| 2.1 | 0.1358161759 |
| 2.2 | 0.1365574960 |
| ***2.3*** | ***0.1368145668*** |
| 2.4 | 0.1367044886 |
| 2.5 | 0.1362046195 |
| 2.6 | 0.1354529150 |
| 2.7 | 0.1344756997 |
| 2.8 | 0.1333207864 |

(圖 C-2-4) n=5

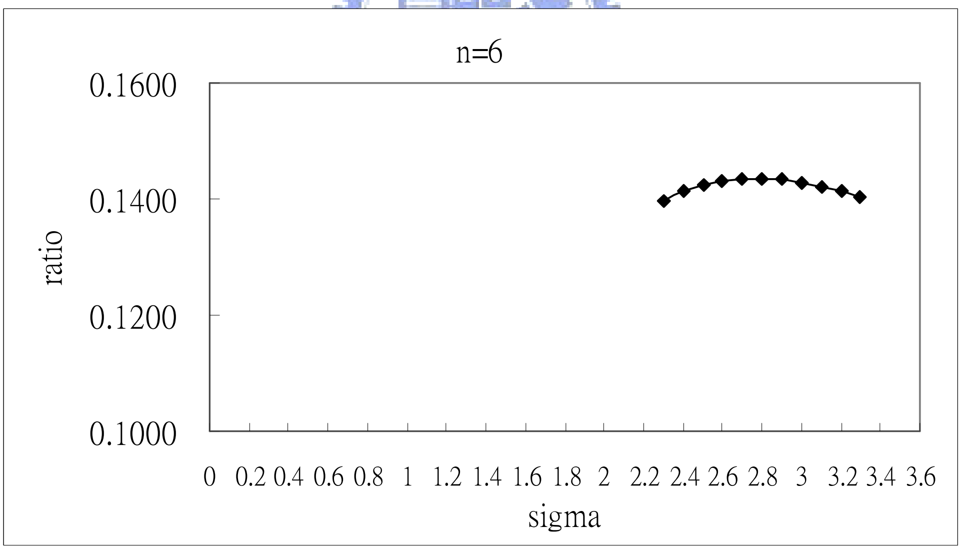



備註：在 n=5 中 $\sigma = 2.3$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.1368145668$ 為最大值。

(表 C-1-5) n=6

| σ | ratio |
|---|---|
| 2.3 | 0.1398217252 |
| 2.4 | 0.1414509337 |
| 2.5 | 0.1425765847 |
| 2.6 | 0.1432713906 |
| ***2.7*** | ***0.1436118609*** |
| 2.8 | 0.1435825484 |
| 2.9 | 0.1433433676 |
| 3.0 | 0.1428771777 |
| 3.1 | 0.1422029811 |
| 3.2 | 0.1414173311 |
| 3.3 | 0.1403999587 |

(圖 C-2-5) n=6

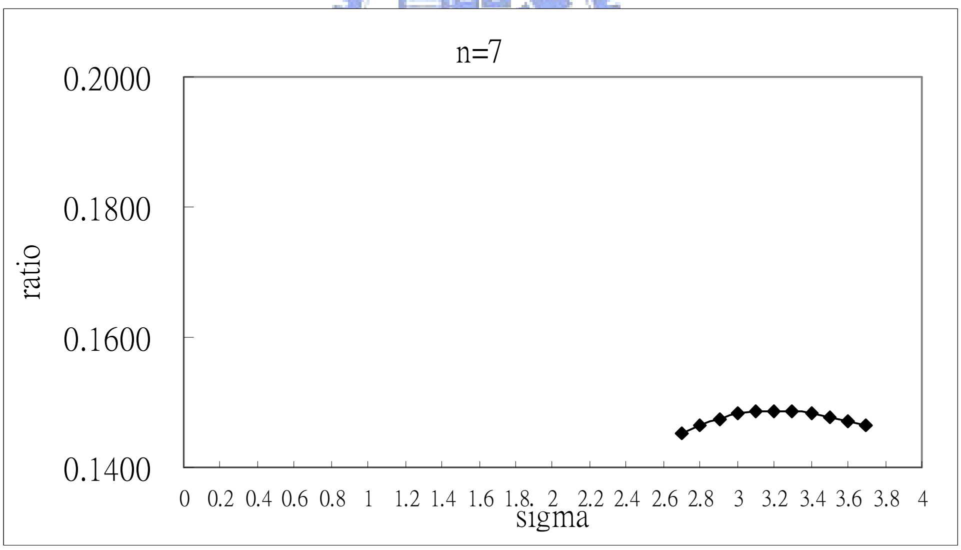



備註：在 n=6 中 $\sigma = 2.7$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.1436118609$ 為最大值。

(表 C-1-6) n=7

| σ | ratio |
|---|---|
| 2.7 | 0.1452064842 |
| 2.8 | 0.1465667366 |
| 2.9 | 0.1475254576 |
| 3.0 | 0.1481646185 |
| 3.1 | 0.1485396521 |
| ***3.2*** | ***0.1486495027*** |
| 3.3 | 0.1485174178 |
| 3.4 | 0.1482397822 |
| 3.5 | 0.1477742610 |
| 3.6 | 0.1472082809 |
| 3.7 | 0.1464367071 |

(圖 C-2-6) n=7

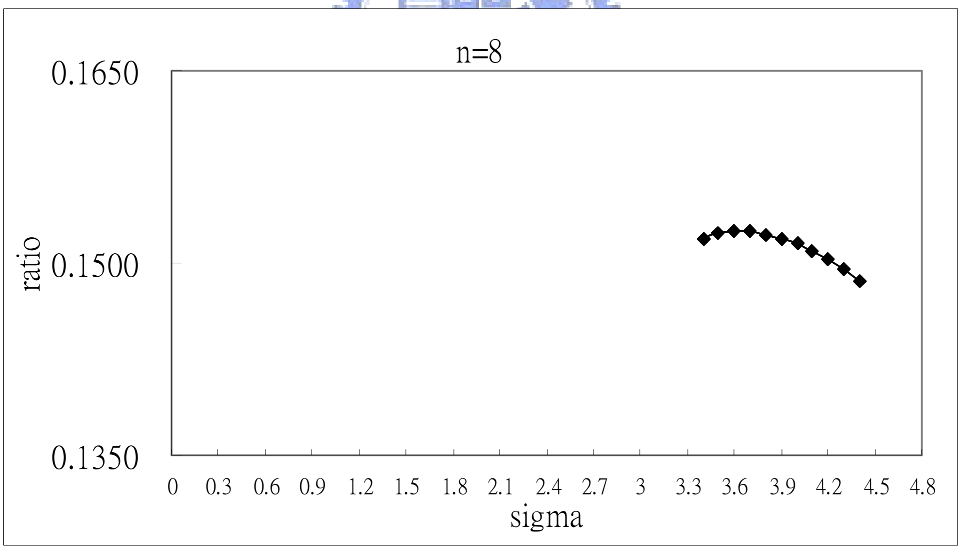



備註：在 n=7 中 $\sigma = 3.2$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.1486495027$ 為最大值。

(表 C-1-7) n=8

| σ | ratio |
|---|---|
| 3.4 | 0.1518635571 |
| 3.5 | 0.1522791556 |
| 3.6 | 0.1524388476 |
| ***3.7*** | ***0.1524477081*** |
| 3.8 | 0.1521962930 |
| 3.9 | 0.1519287672 |
| 4.0 | 0.1515236369 |
| 4.1 | 0.1509245104 |
| 4.2 | 0.1502392314 |
| 4.3 | 0.1494664476 |
| 4.4 | 0.1486629676 |

(圖 C-2-7) n=8

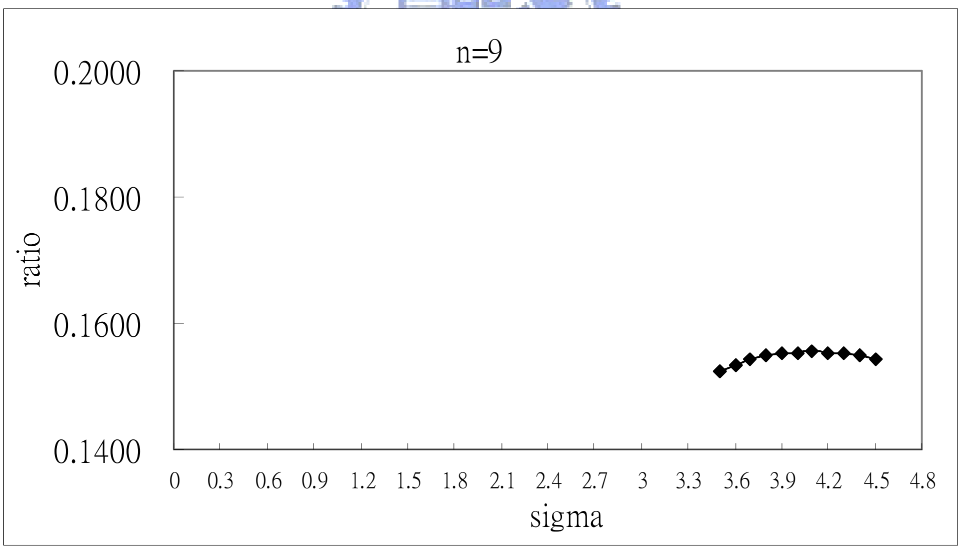



備註：在 n=8 中 $\sigma = 3.7$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.1524477081$ 為最大值。

(表 C-1-8) n=9

| σ | ratio |
| --- | --- |
| 3.5 | 0.1524194580 |
| 3.6 | 0.1533986173 |
| 3.7 | 0.1541587136 |
| 3.8 | 0.1547718799 |
| 3.9 | 0.1551414109 |
| 4.0 | 0.1553590668 |
| ***4.1*** | ***0.1554051192*** |
| 4.2 | 0.1553083689 |
| 4.3 | 0.1550980688 |
| 4.4 | 0.1547962912 |
| 4.5 | 0.1543329010 |

(圖 C-2-8) n=9

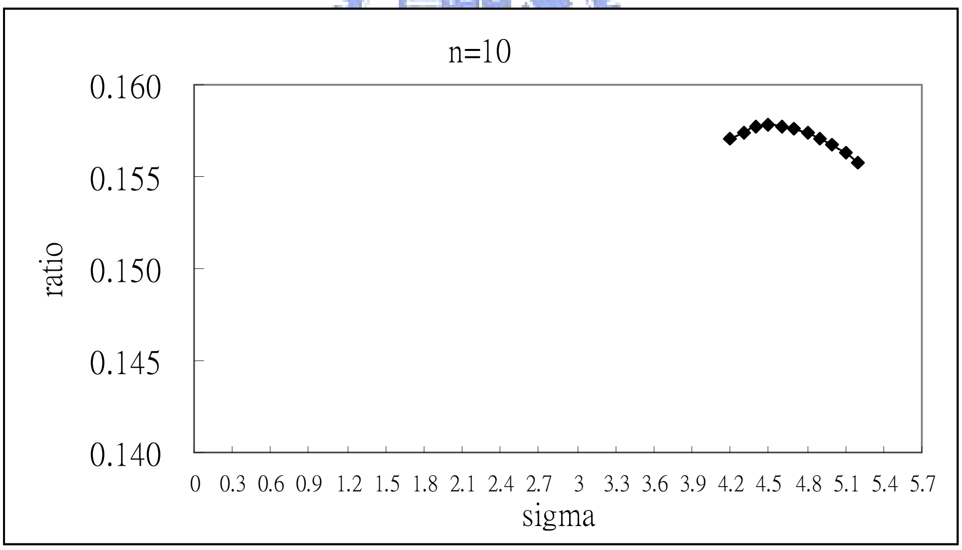



備註：在 n=9 中 $\sigma = 4.1$ 時 $\dfrac{\dfrac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = 0.1554051192$ 為最大值。

(表 C-1-9) n=10

| σ | ratio |
|---|---|
| 4.2 | 0.1570398964 |
| 4.3 | 0.1574418235 |
| 4.4 | 0.1576644245 |
| ***4.5*** | ***0.1577808460*** |
| 4.6 | 0.1577616953 |
| 4.7 | 0.1576457382 |
| 4.8 | 0.1574176014 |
| 4.9 | 0.1571159737 |
| 5.0 | 0.1567273263 |
| 5.1 | 0.1562897764 |
| 5.2 | 0.1557948041 |

(圖 C-2-9) n=10




備註：在 n=10 中 $\sigma = 4.5$ 時 $\dfrac{\frac{\sigma^2}{n} - S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}} = 0.157780846\,0$ 為最大值。

附錄 D：

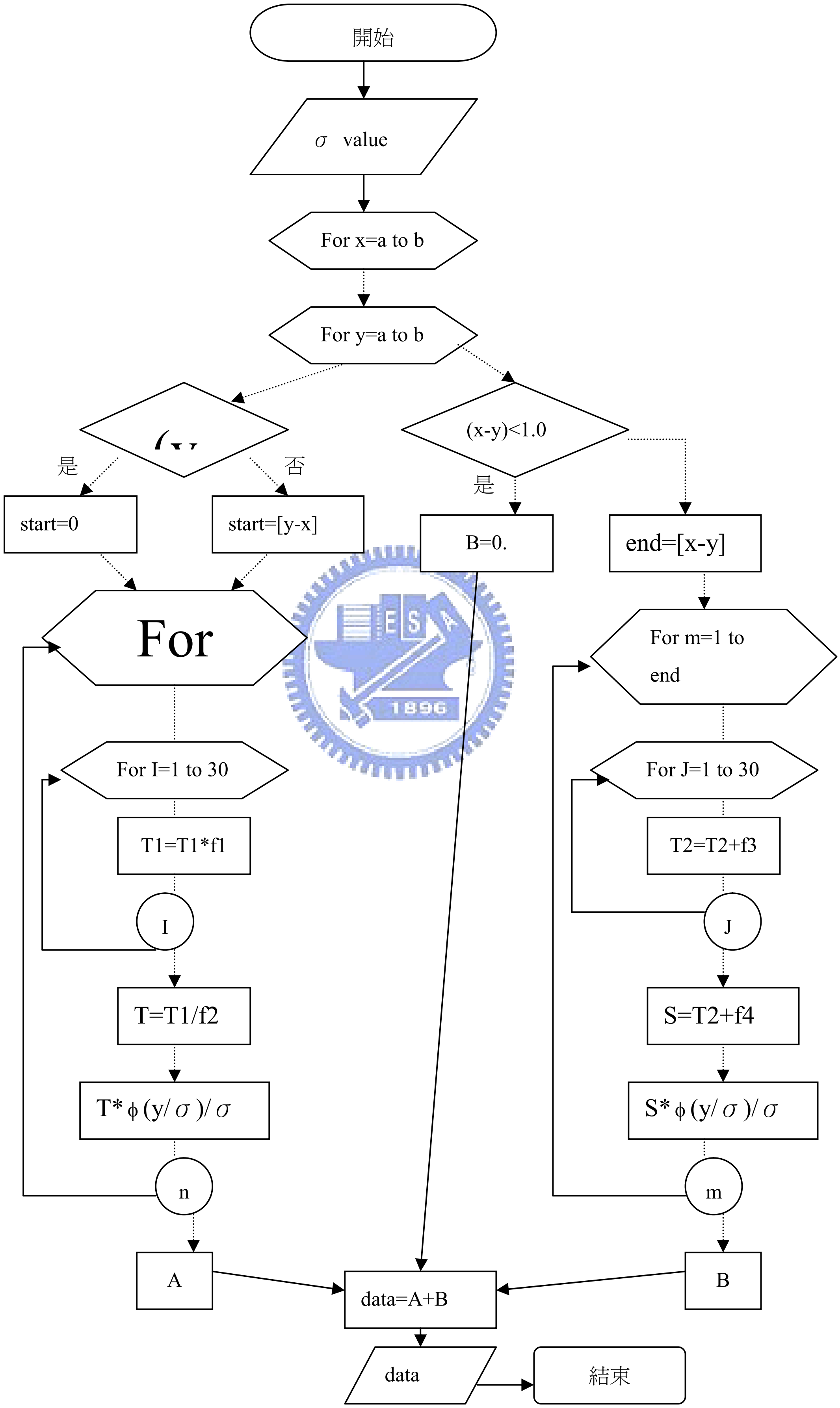
列出附錄 A 及 B 的最佳化$\sigma^*$，也就是$\dfrac{\frac{\sigma^{*2}}{n}-S^2_{n,\sigma^{*2}}}{\frac{\sigma^{*2}}{n}}=\max\limits_{\sigma^2}\{\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}-S^2_{n,\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{n}}\}$

| n | $10^7$迴圈求得的$\sigma^*$ | $10^9$迴圈求得的$\sigma^*$ |
|---|---|---|
| 2 | 1.1 | 1.0 |
| 3 | 1.4 | 1.4 |
| 4 | 1.8 | 1.9 |
| 5 | 2.2 | 2.3 |
| 6 | 2.8 | 2.7 |
| 7 | 3.2 | 3.2 |
| 8 | 3.9 | 3.7 |
| 9 | 4.0 | 4.1 |
| 10 | 4.6 | 4.5 |

附錄 E：共變異值(Covariance)

| σ | Covariance | σ | Covariance | σ | Covariance |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | -0.000002 | 3.5 | -0.462854 | 6.9 | -0.948242 |
| 0.2 | 0.000003 | 3.6 | -0.491525 | 7.0 | -0.974143 |
| 0.3 | -0.000125 | 3.7 | -0.498380 | 7.1 | -0.983012 |
| 0.4 | -0.002052 | 3.8 | -0.513970 | 7.2 | -0.989048 |
| 0.5 | -0.008805 | 3.9 | -0.526043 | 7.3 | -1.04062 |
| 0.6 | -0.020033 | 4.0 | -0.544457 | 7.4 | -1.02188 |
| 0.7 | -0.033658 | 4.1 | -0.552846 | 7.5 | -1.06666 |
| 0.8 | -0.048820 | 4.2 | -0.572655 | 7.6 | -1.10583 |
| 0.9 | -0.064276 | 4.3 | -0.590168 | 7.7 | -1.07816 |
| 1.0 | -0.079928 | 4.4 | -0.612523 | 7.8 | -1.14815 |
| 1.1 | -0.095918 | 4.5 | -0.619312 | 7.9 | -1.11504 |
| 1.2 | -0.112759 | 4.6 | -0.644200 | 8.0 | -1.10454 |
| 1.3 | -0.128253 | 4.7 | -0.650294 | 8.1 | -1.13785 |
| 1.4 | -0.144401 | 4.8 | -0.660258 | 8.2 | -1.15343 |
| 1.5 | -0.161024 | 4.9 | -0.669506 | 8.3 | -1.17398 |
| 1.6 | -0.175437 | 5.0 | -0.682536 | 8.4 | -1.15177 |
| 1.7 | -0.193719 | 5.1 | -0.695557 | 8.5 | -1.21872 |
| 1.8 | -0.208246 | 5.2 | -0.721478 | 8.6 | -1.19551 |
| 1.9 | -0.224390 | 5.3 | -0.754661 | 8.7 | -1.25167 |
| 2.0 | -0.240621 | 5.4 | -0.752966 | 8.8 | -1.26442 |
| 2.1 | -0.256784 | 5.5 | -0.777887 | 8.9 | -1.27962 |
| 2.2 | -0.269968 | 5.6 | -0.773461 | 9.0 | -1.24643 |
| 2.3 | -0.286861 | 5.7 | -0.806739 | 9.1 | -1.30484 |
| 2.4 | -0.300574 | 5.8 | -0.810209 | 9.2 | -1.31878 |
| 2.5 | -0.319392 | 5.9 | -0.840824 | 9.3 | -1.27729 |
| 2.6 | -0.335416 | 6.0 | -0.838106 | 9.4 | -1.33940 |
| 2.7 | -0.344915 | 6.1 | -0.866757 | 9.5 | -1.33849 |
| 2.8 | -0.363226 | 6.2 | -0.865777 | 9.6 | -1.35963 |
| 2.9 | -0.384595 | 6.3 | -0.884482 | 9.7 | -1.37486 |
| 3.0 | -0.396087 | 6.4 | -0.878352 | 9.8 | -1.36517 |
| 3.1 | -0.414203 | 6.5 | -0.916714 | 9.9 | -1.42702 |
| 3.2 | -0.431328 | 6.6 | -0.931894 | 10.0 | -1.45007 |
| 3.3 | -0.439680 | 6.7 | -0.950063 | | |
| 3.4 | -0.454564 | 6.8 | -0.957895 | | |

## 附錄 F：


開始
σ value
For x=a to b
For y=a to b
(x-y)<1.0
是
否
是
start=0
start=[y-x]
B=0.
end=[x-y]
For
For m=1 to end
For I=1 to 30
For J=1 to 30
T1=T1*f1
T2=T2+f3
I
J
T=T1/f2
S=T2+f4
T*φ(y/σ)/σ
S*φ(y/σ)/σ
n
m
A
data=A+B
B
data
結束

備註：

$$f1=[1-\Phi(\frac{x-i}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n+i}{\sigma})]\times[1-\Phi(\frac{x+i}{\sigma})+\Phi(\frac{y-n+i}{\sigma})]$$

$$f2=1-\Phi(\frac{x+n}{\sigma})+\Phi(\frac{y}{\sigma})$$

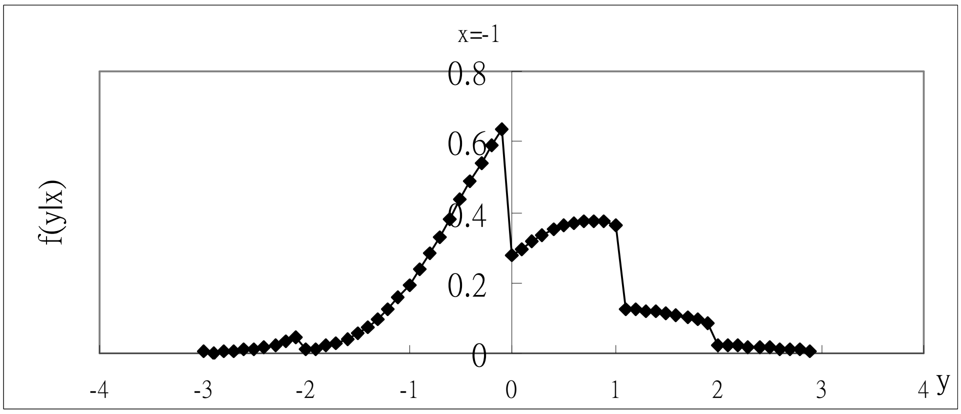
$$f3=[1-\Phi(\frac{x-j}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m-j}{\sigma})]\times[1-\Phi(\frac{x+j}{\sigma})+\Phi(\frac{y+m+j}{\sigma})]$$

$$f4=1-\Phi(\frac{x-m}{\sigma})+\Phi(\frac{y}{\sigma})$$

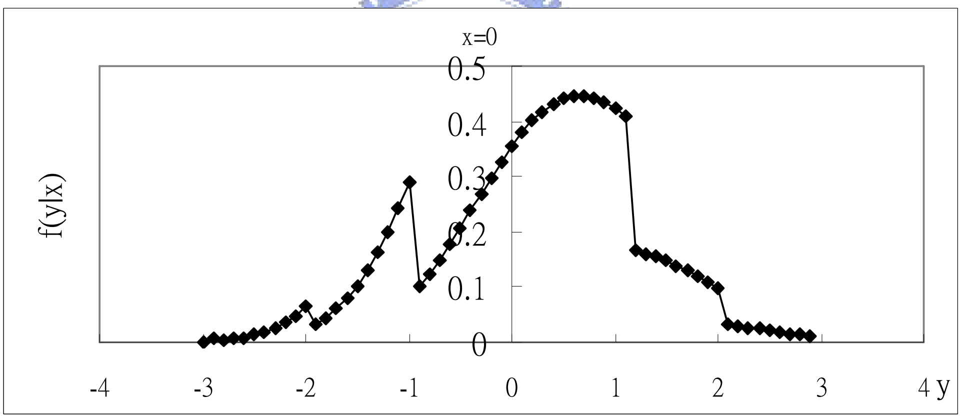
附錄 G： $f_{X'_{i-1}|X'_i}(y\,|\,x)$ 的圖形。

1. $\sigma=1$，$-3\leqq y\leqq 3$

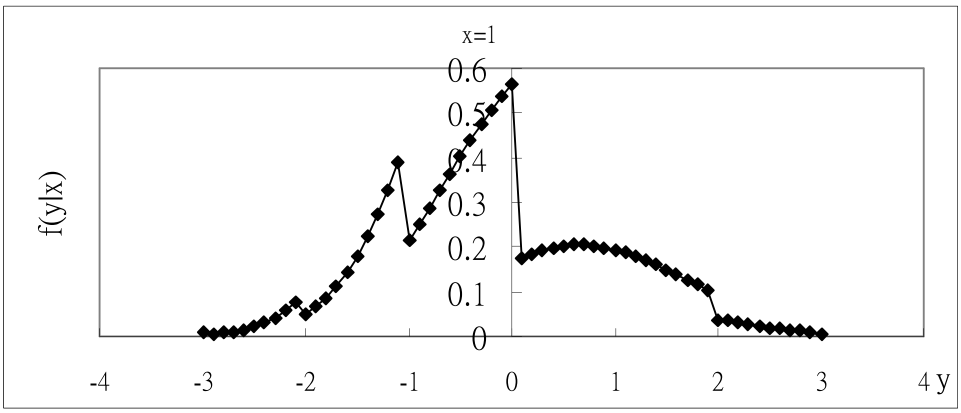
(圖 G-1-1)　x=-1




(圖 G-1-2)　x=0

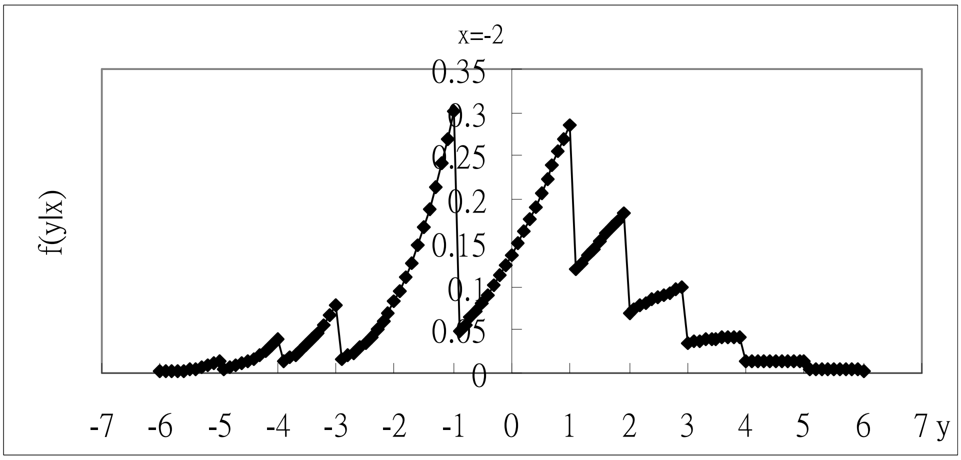



(圖 G-1-3)　x=1

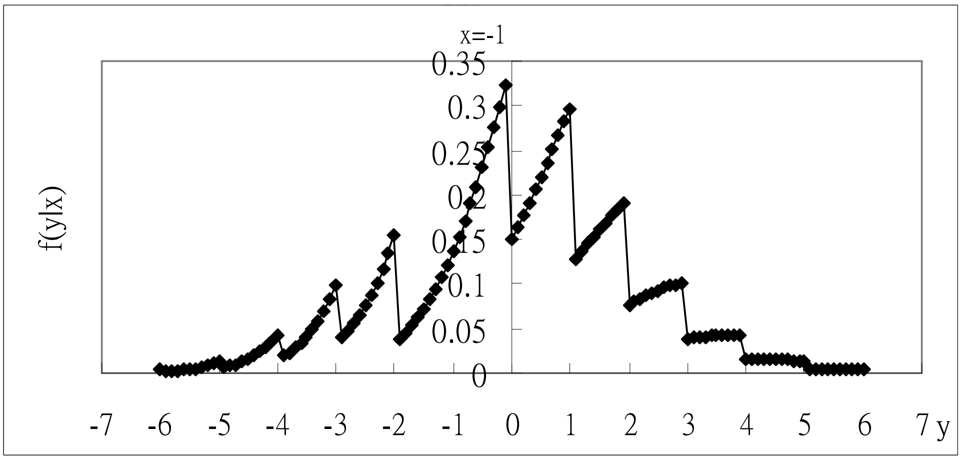


2.$\sigma=2$，$-6 \leqq y \leqq 6$

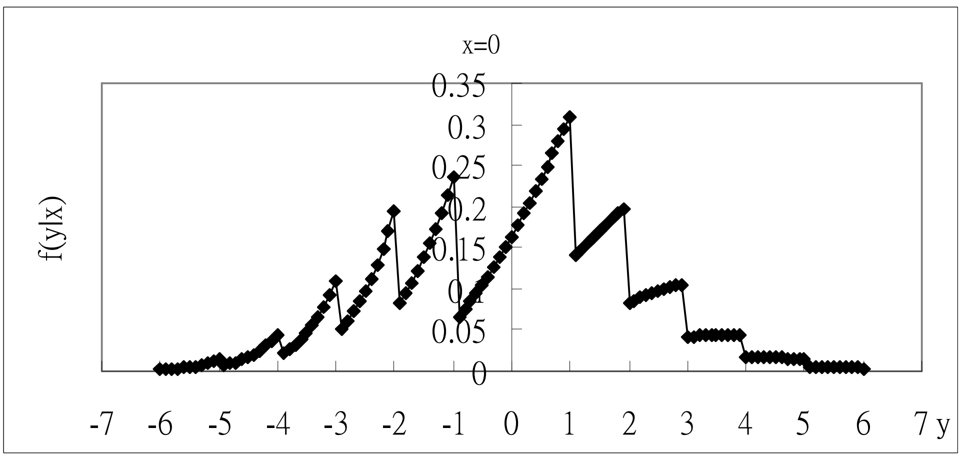
(圖 G-2-1) x=-2



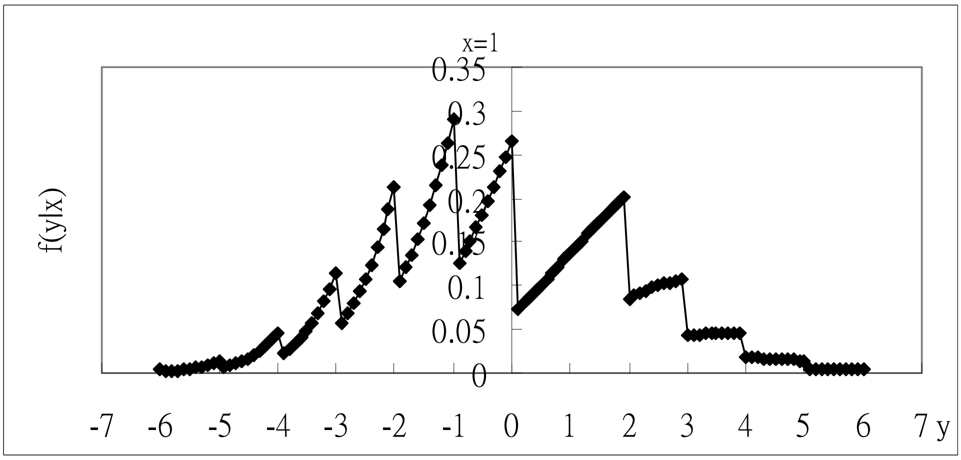

(圖 G-2-2) x=-1



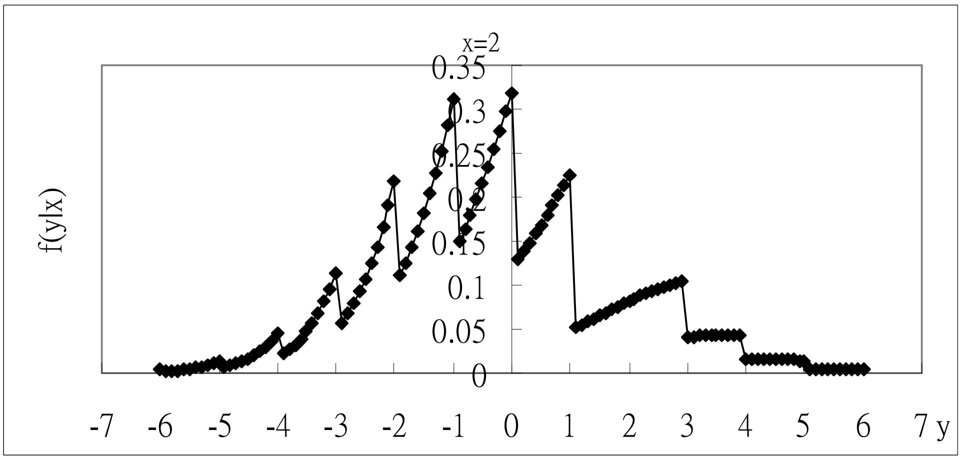

(圖 G-2-3) x=0



(圖 G-2-4)　x=1

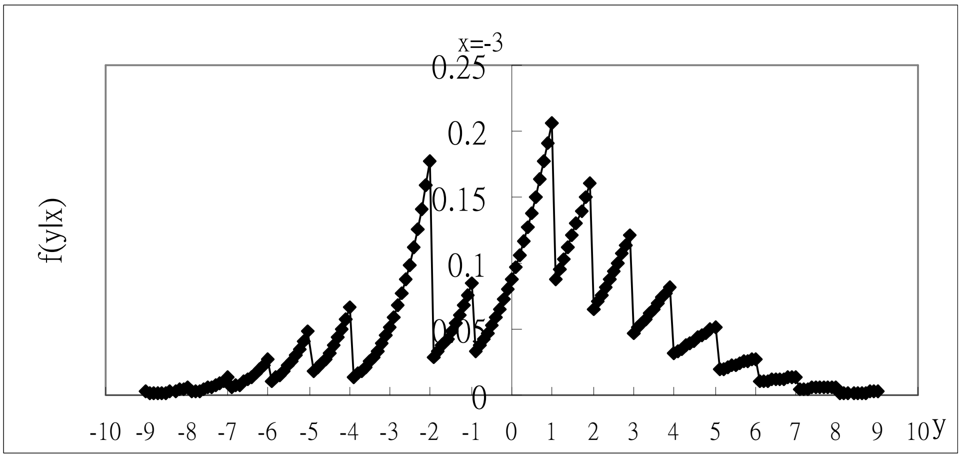



(圖 G-2-5)　x=2

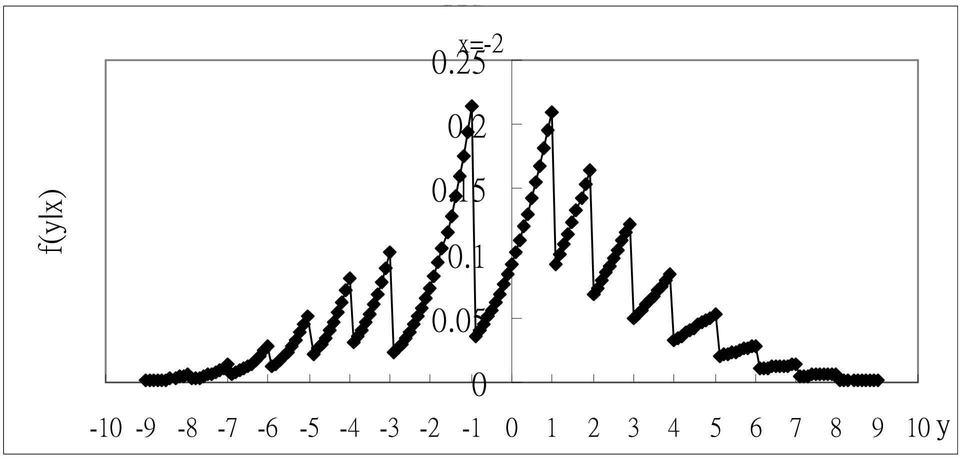


3. σ = 3，-9≦y≦9

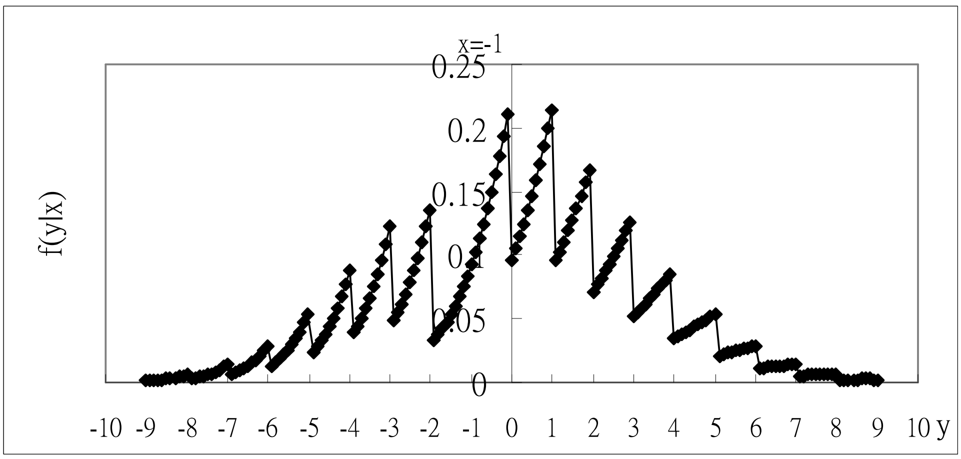
(圖 G-3-1)　x=-3



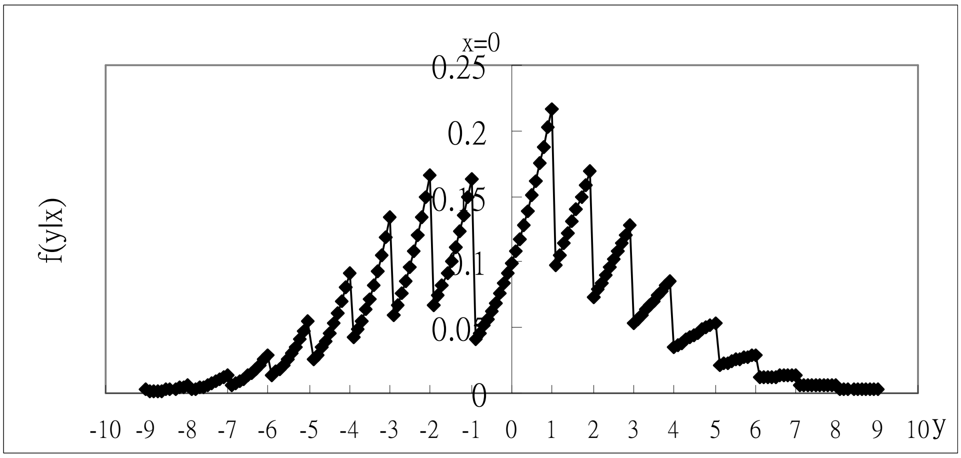

(圖 G-3-2)　x=-2



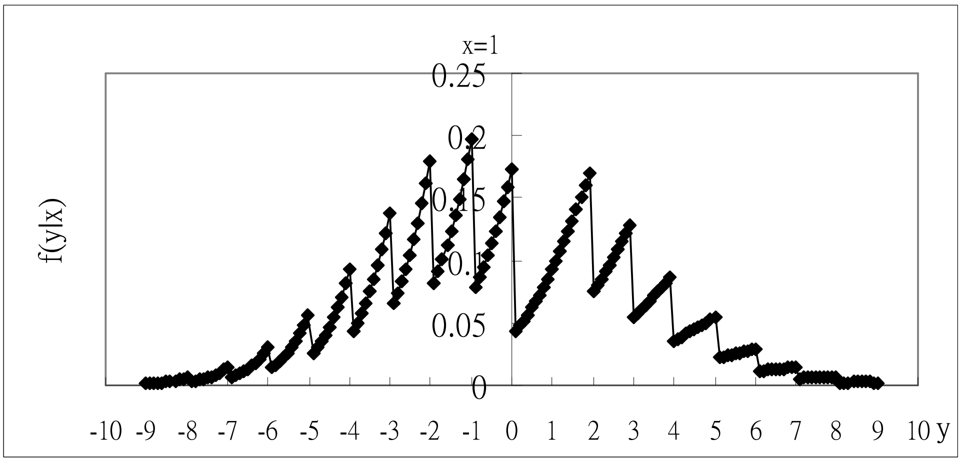

(圖 G-3-3)　x=-1



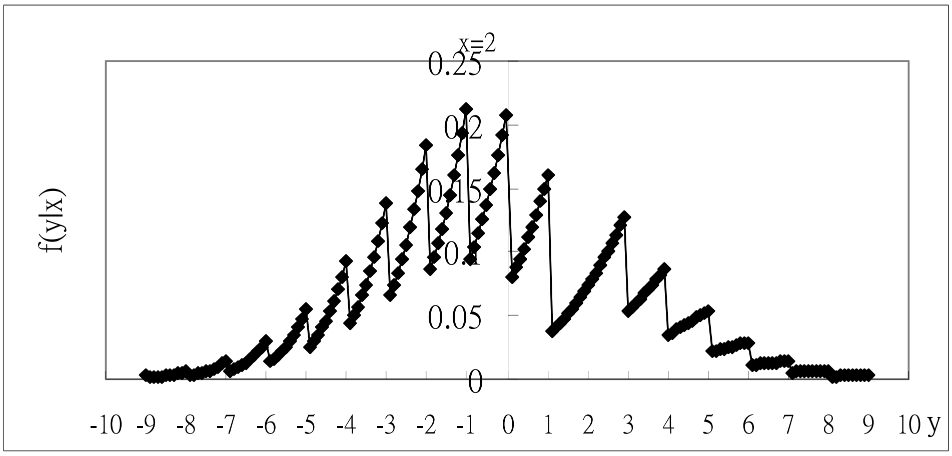
(圖 G-3-4)　x=0



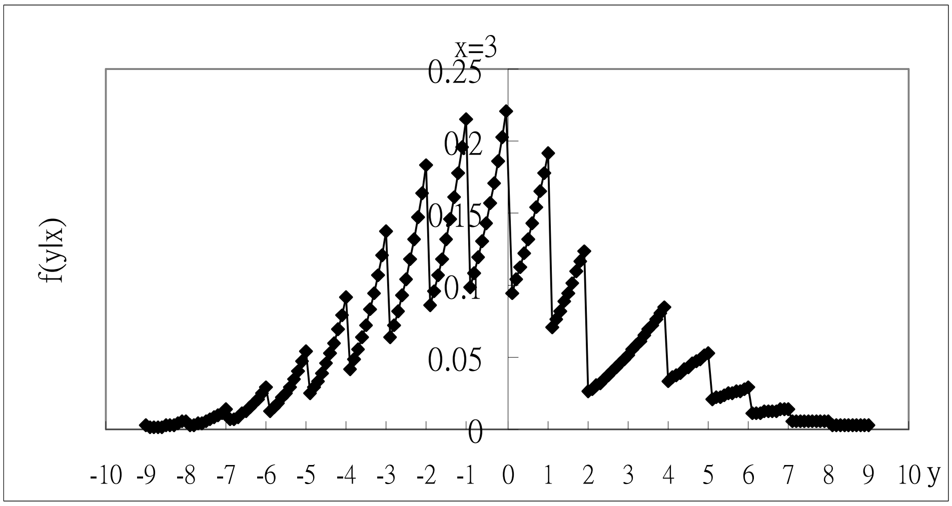

(圖 G-3-5)　x=1




(圖 G-3-6)　x=2



(圖 G-3-7)　x=3



# 參考文獻：


1.鄭春生(1996)。品質管制。台北：三民。

2.林鴻欽、吳復強(2001)。品質管制(第二版)。台北縣：全威。

3.賴文祥(2004)。負相關在管制圖上之應用。交通大學統計學研究所碩士學位論文。