

第三章 微中子在物質中的振盪

本章為討論物質效應對微中子振盪的影響，此部分為目前微中子物理中討論頗為廣泛的部分，同時也是下一章我們研究微中子穿透地球的基礎。當然這部分也有許多不同說法的文獻可供參考，例如[16, 18, 21, 26]等。

3.1 物質對微中子傳播的效應

承接我們上一章的討論，當微中子穿越物質與真空的最大不同，便是物質會對微中子有弱作用力。也就是說在我們之前討論微中子的傳播的薛丁格爾方程式中，務必要加入考慮這項效應。

誠如量子力學所討論的，當一個粒子處在自由運動的過程中時，其描述的薛丁格爾方程式本質上便是：總能量 $E = \text{動能 } K$ 。可是情況往往並非如此簡單。最常碰到的情形是粒子處於某一外加影響力中運動。由於能量是由"力"作功而來，而這部分的能量通常被稱作"位能"(若位能為保守力構成，有時也稱為"場")。這時方程式便變化為：總能量 $E = \text{動能 } K + \text{位能 } V$ 。簡單的例子例如粒子在"位能階(potential barrier)"或"位能井(potential well)"中運動，這些都是在一般量子力學的書本上可以找到解薛丁格爾方程式的方法。

對微中子而言，情形大致也是如此。我們可以預期在(2-2)式中，等號右邊應該還要加入位能項。但這個位能有一些特殊的地方：

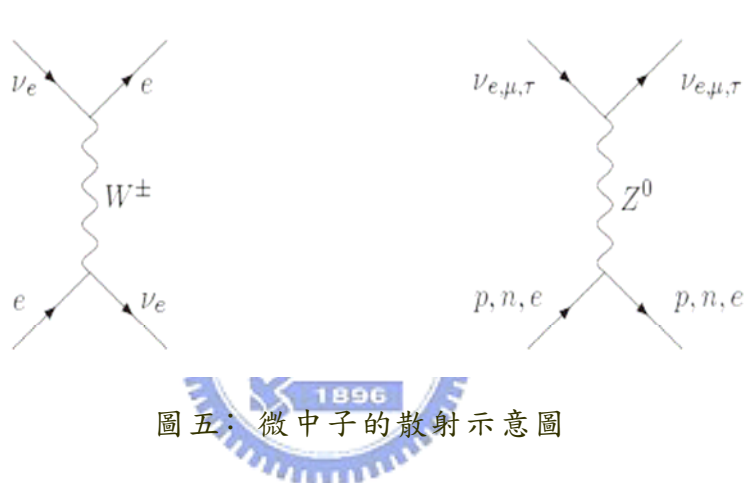
<i>微中子穿過物質時遭受到的力屬於"弱作用力(weak interaction force)"，非屬於一般的吸引力或排斥力。微觀地說，它的來源是物質中每個原子內的電子(e)、中子(n)及質子(p)對它產生一種散射。這種散射力是屬於同調(coherent)且為完全彈性(elastic)的，方向是朝向微中子前進的方向—顧名思義便是不改變微中子本身的能量，動量及相互間的相位¹。表面上它似乎對微中子的運動沒有任何的影響，但卻會改變不同微中子類型間混合的情形，包括混合角，混合矩陣及混合時的振盪相位²。於是，當我們要計算它們之間的振盪機率時，情形便與在真空中時有很大的不同。

<ii>因為每一種作用力都有其交換介子(exchanging mediator)，例如強作用力

¹其實也有非彈性的散射力，只是量值非常小(正比於 G_F 的平方)，故不予考慮。

²振盪相位是指整體相對於真空中的相位，非指之前說的微中子束中各別粒子間的相位。

爲"膠子(gluon)"，電磁力爲"光子(photon)"，重力爲"重力子(graviton)"，而弱作用力的名字較特殊爲"向量玻色子(intermediate vector boson)"[6]。向量波色子共有三種，第一種是中性不帶電的 Z^0 ，另外兩種其實是同一粒子，只是分別帶有正負不同電性的 W^+ ， W^- 。而也因爲有不同的交換介子，造成不同的散射力：其一是原子內的電子、中子及質子對三種類型的微中子產生的中性弱作用力(neutral current interaction)，是由 Z^0 作爲交換介子所產生，其所貢獻的位能記爲 V_n^m 。另外的則是e微中子在面對電子的散射時特有的電性弱作用力(charge current interaction)，是由 W^+ 和 W^- 作爲交換介子所產生。因爲它們基本上是同一粒子，所以產生的作用力是相同的(差別只是傳送者與接收者角色的互換)，所貢獻的位能記爲 V_e^m 。它們散射的費曼圖(Feynman diagram)如圖五。



圖五：微中子的散射示意圖

接下來所要了解的重點便是這些位能分別是多大。不過由於這部分牽涉到較高等的量子場論與粒子物理的理論，我們在此僅引用其結果[16，21]：

$$V_n^m = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F \frac{Y_n^m}{m_n} \rho^m$$

$$V_e^m = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e = \sqrt{2} G_F N_e = \sqrt{2} G_F \frac{Y_e^m}{m_n} \rho^m \tag{3-1}$$

其中 G_F 是費米常數(Fermi Constant)， m_n 是核子的質量， Y_e^m 及 Y_n^m 則分別爲每一個核子所包含的電子及中子數， N_e 及 N_n 則爲電子與中子的數目密度(number density)， ρ^m 則是物質的質量密度。嚴格說來 N_n 這一項的位置，依照我們先前的討論，應該爲電子，中子及質子數目密度的總和。但由於電子與質子的數目在一般中性物質中是相等的，所以互相抵消(因傳送的 Z^0 數目相同且方向相反)，最後僅剩下中子的貢獻。

既然有了位能的表示式，我們便要將它們加入薛丁格爾方程式中。但務必要注意：我們不能直接將位能項加在(2-3)式的右方。原因是我們之前在討論散射的作用時，都是對微中子的"類型"作討論;也就是說，整個架構是建立在弱作用本徵態的基礎之上，而非質量本徵態。所以我們必須先將(2-3)式轉變為弱作用本徵態的表示式後，再加入位能項。另外爲了便於計算，我們再次定義以下參數，稱爲"位能參數(potential parameter)":

$$A_n^m \equiv 2EV_n^m = -\sqrt{2}G_F \frac{Y_n^m}{m_n} \rho^m E = -(0.76 \times 10^{-4}) Y_n^m \rho^m (\text{g/cm}^3) E (\text{GeV})$$

$$A_e^m \equiv 2EV_e^m = 2\sqrt{2}G_F \frac{Y_e^m}{m_n} \rho^m E = (1.52 \times 10^{-4}) Y_e^m \rho^m (\text{g/cm}^3) E (\text{GeV})$$
(3-2)

我們直接將數值列出[24, 29, 30, 31]。但需注意的是位能V本身單位爲eV，A的單位爲(eV)²，但(3-2)式內的數值卻是將能量E的單位規定爲GeV的結果(這是爲了符合高能物理的度量)。於是我們便得到：

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2E} U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} V_e^m + V_n^m & 0 & 0 \\ 0 & V_n^m & 0 \\ 0 & 0 & V_n^m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2E} \left[U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} A_e^m + A_n^m & 0 & 0 \\ 0 & A_n^m & 0 \\ 0 & 0 & A_n^m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left[U_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U_{12}^{-1} + \begin{pmatrix} A_e^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta_{21} \sin^2 \theta_{12} + A_e^m & \Delta_{21} \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} & 0 \\ \Delta_{21} \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} & \Delta_{21} \cos^2 \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

後半段的處理過程類似前一章，一開始先不考慮U₁₃的混合，並且減去矩陣中的共同因子A_n^m。由上可知其實真正對我們計算機率有影響的只有A_e^m這一項。很明顯地，當A_e^m摻雜入混合矩陣的元素中時，整個在真空中原有的對稱性都被破壞。但這並不代表它就不能夠照前面的方法分析：從數學上的觀點，我們

可以將這個矩陣重新做一次對角化，這樣便能恢復到原來的型態，只是所有的參數及公式都得換成不同的型式。我們根據數學上將一個方陣做對角化的方法（可參閱附錄一），重新定義所有的參數，並在此將所有新參數列出如下：

$$\begin{pmatrix} \Delta_{21} \sin^2 \theta_{12} + A_e^m & \Delta_{21} \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} & 0 \\ \Delta_{21} \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} & \Delta_{21} \cos^2 \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} = U_{12}^m \begin{pmatrix} (m_{12})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (M_{12})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} (U_{12}^m)^{-1}$$

$$(m_{12})^2 = \frac{\Delta_{21} + A_e^m - \Delta_{21}^m}{2} \quad (M_{12})^2 = \frac{\Delta_{21} + A_e^m + \Delta_{21}^m}{2}$$

$$\Delta_{21}^m = \sqrt{(\Delta_{21} \sin 2\theta_{12})^2 + (A_e^m - \Delta_{21} \cos 2\theta_{12})^2} = (M_{12})^2 - (m_{12})^2$$

$$U_{12}^m = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}^m & \sin \theta_{12}^m & 0 \\ -\sin \theta_{12}^m & \cos \theta_{12}^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cos 2\theta_{12}^m = \frac{-A_e^m + \Delta_{21} \cos 2\theta_{12}}{\Delta_{21}^m}$$

$$\sin 2\theta_{12}^m = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{\Delta_{21}^m}$$

(3-4)

於是狀況又與之前真空中的狀況類似（第三列稍有不同，但由於其沒有實質參與振盪故無影響）。將(3-4)式代回(3-3)式同減去 $(m_{12})^2$ 的單位方陣，並解方程式可得：

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{12}^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{12}^m & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} - (m_{12})^2 \end{pmatrix} (U_{12}^m)^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_r = U_{12}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \frac{\Delta_{31} - (m_{12})^2}{2E} r} \end{pmatrix} (U_{12}^m)^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{12}^m) + (\sin^2 \theta_{12}^m) e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r} & -\cos \theta_{12}^m \sin \theta_{12}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r}) & 0 \\ -\cos \theta_{12}^m \sin \theta_{12}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r}) & (\sin^2 \theta_{12}^m) + (\cos^2 \theta_{12}^m) e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \frac{\Delta_{31} - (m_{12})^2}{2E} r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0}$$

(3-5)

3.2 二態傳播的振盪機率

接續上式，並仿照前一章的做法，我們可以算出 e 微中子的振盪機率：

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= \langle \nu_e(r) | \nu_e(r=0) \rangle \\
 &= 1 - \sin^2 2\theta_{12}^m \frac{1 - \cos\left(\frac{\Delta_{21}^m}{2E} r\right)}{2} = 1 - \sin^2 2\theta_{12}^m \sin^2\left(1.27 \frac{\Delta_{21}^m}{E} r\right)
 \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中振盪波長則為：

$$\lambda_{12}^m \equiv \frac{4\pi E}{\Delta_{21}^m} = 2.48(\text{Km}) \times \frac{E}{\text{GeV}} \times \frac{(\text{eV})^2}{\Delta_{21}^m} \quad (3-7)$$

我們一樣舉例計算振盪波長的大小：同先前取 $E=1\text{GeV}$ ，而以微中子穿越地球內部來說，若不接觸地核(Earth core)，僅穿越地幔(Earth mantle)的部分的話，則其資料為： $\rho^m=5 \text{ g/cm}^3$ ， $Y_e^m=0.49$ [32, 33]，代入(3-2)式可得 $A_e^m \sim 3.72 \times 10^{-4} (\text{eV})^2$ ；若同前章取 $\Delta_{21}=7.40 \times 10^{-5} (\text{eV})^2$ ，進一步代回(3-4)式，並且在此適當取 $\theta_{12}=30^\circ$ ，便可算得 $\Delta_{21}^m \sim 3.40 \times 10^{-4} (\text{eV})^2$ 。最後將所有相關數值代入(3-7)式便可算出 $\lambda_{12}^m \sim 7273 \text{ Km}$ ——當然這個距離仍然不能說短(因為它還是超過了地球半徑長)，不過它已經比真空中的情況下短很多了！而且在地球上若要做這個實驗卻是有可能的：基準線長跨越洲際的實驗目前是有在計畫的，例如從美國費米國家實驗室穿透地球內部直通到位於日本的Kamioka實驗室，其總長大約為 9300 Km ，詳細資料可參考[20, 23, 25]；通常距離這麼長的實驗也有別名叫做"非常長基準線實驗(Very Long Baseline Experiment)"。

不過，也許您會認為是否如同在真空的情況一樣，由於 Δ_{31} 比較小， U_{13} 的效應在物質中也比 U_{12} 明顯呢？由於現在的情況比較複雜，我們還無法輕率地就下這個結論。因為振盪波長的表示式與真空中的並不一樣。所以為了比較，我們在此先取 $\Delta_{21} \rightarrow 0$ 的極限，就是僅考慮 U_{13} 的混合，加上物質效應 A_e^m 後再重新做對角化。從(3-3)式出發：

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left[U_{13} U_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U_{12}^{-1} U_{13}^{-1} + \begin{pmatrix} A_e^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta_{31} \sin^2 \theta_{13} + A_e^m & 0 & \Delta_{31} \sin \theta_{13} \cos \theta_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta_{31} \sin \theta_{13} \cos \theta_{13} & 0 & \Delta_{31} \cos^2 \theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} \\
 &= U_{13}^m \begin{pmatrix} (m_{13})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_{13})^2 \end{pmatrix} (U_{13}^m)^{-1} \\
 (m_{13})^2 &= \frac{\Delta_{31} + A_e^m - \Delta_{31}^m}{2} & (M_{13})^2 &= \frac{\Delta_{31} + A_e^m + \Delta_{31}^m}{2} \\
 \Delta_{31}^m &= \sqrt{(\Delta_{31} \sin 2\theta_{13})^2 + (A_e^m - \Delta_{31} \cos 2\theta_{13})^2} = (M_{13})^2 - (m_{13})^2 \\
 U_{13}^m &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^m & 0 & \sin \theta_{13}^m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^m & 0 & \cos \theta_{13}^m \end{pmatrix} & \cos 2\theta_{13}^m &= \frac{-A_e^m + \Delta_{31} \cos 2\theta_{13}}{\Delta_{31}^m} \\
 & & \sin 2\theta_{13}^m &= \frac{\Delta_{31} \sin 2\theta_{13}}{\Delta_{31}^m}
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

同減去 $(m_{13})^2$ 的單位方陣，並解方程式後得：

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_r &= U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0} \\
 &= \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{13}^m) + (\sin^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} & 0 & -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r}) \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}r} & 0 \\ -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{12}^m}{2E}r}) & 0 & (\sin^2 \theta_{13}^m) + (\cos^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0}
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

情況與之前的並沒有差別多少，唯第二列的中間項稍有不同。此時同樣計算 e 微中子的振盪機率，則可得到：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13}^m \frac{1 - \cos\left(\frac{\Delta_{31}^m}{2E}r\right)}{2} = 1 - \sin^2 2\theta_{13}^m \sin^2\left(1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E}r\right) \tag{3-10}$$

振盪波長則變為：

$$\lambda_{13}^m \equiv \frac{4\pi E}{\Delta_{31}^m} = 2.48(\text{Km}) \times \frac{E}{\text{GeV}} \times \frac{(\text{eV})^2}{\Delta_{31}^m} \quad (3-11)$$

在此取 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (\text{eV})^2$ 及 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.10$ ，並配合之前算出的地幔 $A_e^m \sim 3.72 \times 10^{-4} (\text{eV})^2$ ，可算出 $\lambda_{13}^m \sim 1210 \text{ Km}$ —的確大約短了約 1/6 左右，表面上看來似乎符合我們之前的預料！

不過事實上並非如此。若我們將能量進一步調高，就可以更加認清此點了。如下面表二的數據，我們分別列舉出了地幔與地核的 $\lambda_{12}^{m(c)}$ 與 $\lambda_{13}^{m(c)}$ 的值。表中計算所用的參數值基本上取的和上面的一樣，並且能量範圍定為 1~10 GeV。它們之間的差距非常的明顯。

表二：地幔與地核的振盪波長值

$\Delta_{21} = 7.40 \times 10^{-5} (\text{eV})^2, \sin^2 2\theta_{12} = 0.75; \Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (\text{eV})^2, \sin^2 2\theta_{13} = 0.10$										
介質位能參數值 $(\text{eV})^2$	對應能量 E=1~10 GeV 的波長值(Km)									
地幔 $A_e^m \sim 3.72 \times 10^{-4}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_{12}^m	7273	6987	6884	6830	6798	6776	6761	6749	6740	6733
λ_{13}^m	1210	2900	5363	9060	14322	19584	21025	19243	17014	15218
地核 $A_e^c \sim 8.52 \times 10^{-4}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_{12}^c	3033	2974	2953	2942	2936	2932	2929	2926	2925	2923
λ_{13}^c	1536	5216	9209	7287	5842	5071	4612	4312	4100	3944

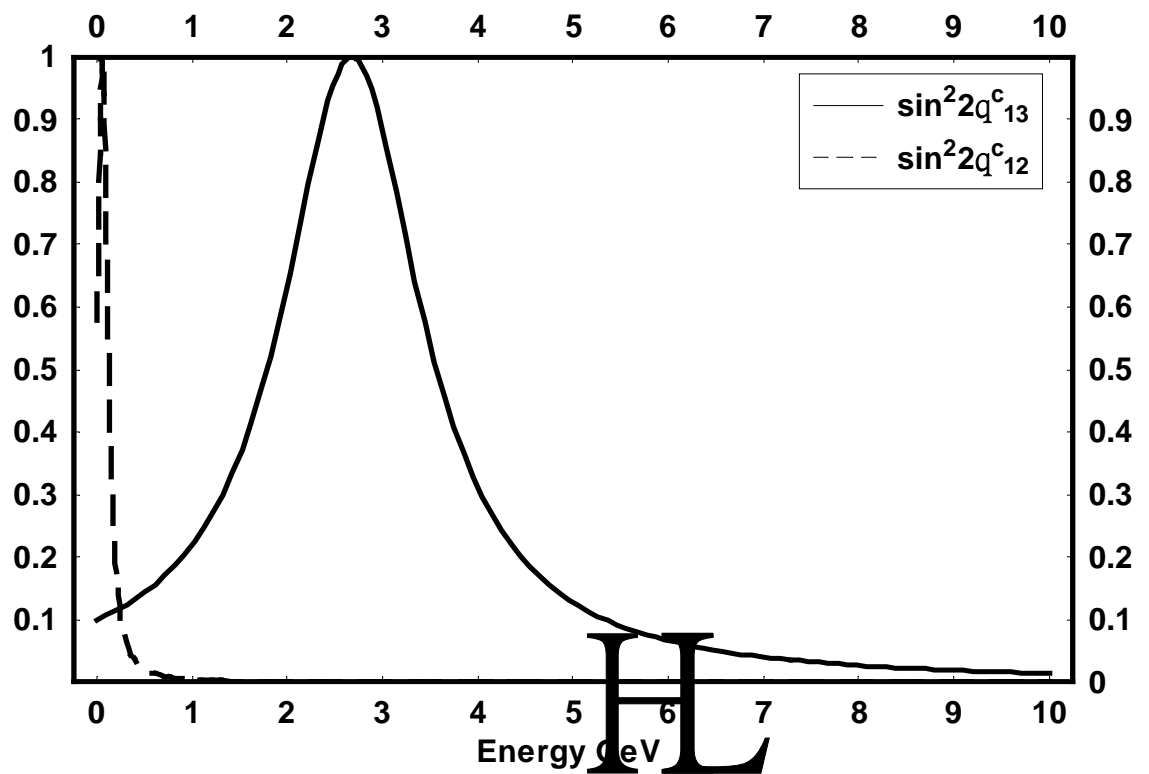
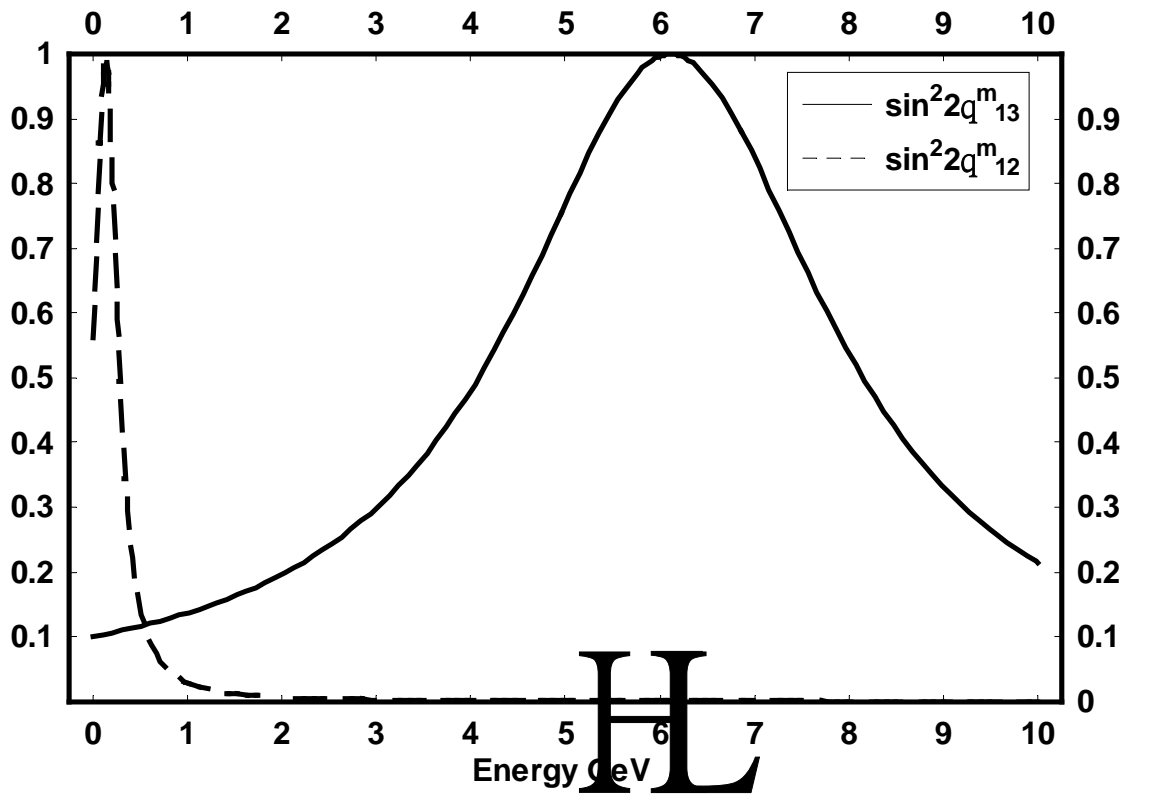
顯然在能量約高於 3~4 GeV 時 λ_{13}^m 便超過了 λ_{12}^m ，更高的能量甚至達上萬；而 λ_{13}^c 雖然沒有那麼高的數值，但卻從 2 GeV 開始便超過了 λ_{12}^c 。而且您可以發現，即使在 1 GeV 的時候， λ_{13}^m 也超過了本身在真空中的值 λ_{13} ，能量越高越離譜；

而 λ_{12}^m 卻似乎始終保持一定的常數，並不太會隨著能量的增加而波動。這兩者的行為似乎截然不同，所以從根本上來說，以振盪波長而言，並沒有任何理由可以輕易地忽略 U_{12} 的效應！

會造成這樣的結果原因在於在物質中振盪波長的公式並不同於在真空中。根據(3-7)與(3-11)由於在物質中振盪波長和 Δ_{31}^m 或 Δ_{21}^m 成反比，而非直接與 Δ_{31} 或 Δ_{21} ；根據(3-4)與(3-8)， Δ_{31}^m 或 Δ_{21}^m 之中都有能量 E 的因子存在，所以振盪波長與能量 E 的關係是比較複雜的。最主要的是 $A_e^{m(c)}$ 與 Δ_{21} 的差距大，所以 $\Delta_{21}^m \sim A_e^{m(c)}$ ，因此 $\lambda_{12}^{m(c)}$ 便趨近於常數；而 $A_e^{m(c)}$ 與 Δ_{31} 的差距隨著能量的升高由接近而遠離，這也就是為何 $\lambda_{13}^{m(c)}$ 隨著能量增加而波長值會有長短的起伏。

可是話雖如此，我們最後依舊是可以略去 U_{12} 的效應。原因在於要判別振盪現象，不是只有考慮振盪波長一項而已。振盪本身振幅的大小也很重要；若振幅過小則振盪也不能說是明顯。我們可以做以下考量：根據(3-6)與(3-10)式， e 微中子的振盪機率都與 $\sin^2 2\theta_{12}^{m(c)}$ 或 $\sin^2 2\theta_{13}^{m(c)}$ 有關；然而根據(3-4)與(3-8)式，它們又同時與能量有著複雜的關係。有鑒於此，我們畫了兩個圖來比較。如圖六，我們很明顯地發現，無論是在地幔或地核中，在能量範圍 1~10 GeV 內， $\sin^2 2\theta_{13}^{m(c)}$ 都佔了優勢。 $\sin^2 2\theta_{12}^{m(c)}$ 僅存在於約不到 0.5 GeV 內，之後便急速消沈；而 $\sin^2 2\theta_{13}^{m(c)}$ 則是約 10 GeV 以上才開始衰退。這也就說明了在考慮振盪機率時，除非能量小於 1 GeV，否則一般僅需顧慮 U_{13} 的混合效應便可。於是從今以後，在本文的計算便不再考慮 U_{12} 的混合！

最後我們要提的一點是，從前面的計算結果，也許會給您一個錯覺：在物質效應下所計算出來的機率，其與真空下的差異僅是把 Δ_{31} 和 θ_{13} 改為物質中的 Δ_{31}^m 與 θ_{13}^m 即可。當然這是絕對錯誤的。一方面是因為就我們剛提過的， Δ_{31}^m 與 θ_{13}^m 本身都與能量有關，並非單純地與物質的參數相關而已，其對於能量增減的反應比真空中的敏銳得多，故它們的行為基本上並不相同。另一方面則是混合時型式上的不同。您可以比較(3-9)式與(2-13)式，它們的矩陣在第二列的中間項並不同。誠然這不會影響 e 微中子的振盪機率，但當我們以後算到非 e 微中子的振盪機率時，它們之間的差異就顯現出來了！這一項將會在機率的表示式中扮演另類的角色，我們等會兒會說明此點。



圖六：物質效應下四種不同的 $\sin^2 2\theta$ 對應能量的分布圖。此處所選的參數

同表二。

3.3 三態傳播的振盪機率

現在我們回到(3-9)式，並將原本的弱作用本徵態還原。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_r &= U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^{-1} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} \\
 &= U_{23} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{13}^m) + (\sin^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} & 0 & -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r}) \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}r} & 0 \\ -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{12}^m}{2E}r}) & 0 & (\sin^2 \theta_{13}^m) + (\cos^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0}
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

$P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ 的機率前面已計算過。我們接著計算其餘的機率，同時一邊利用(2-19)式來簡化計算。當然，步驟基本上和之前的都是一樣的。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 1 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{13}^m) + (\sin^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} & 0 & -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r}) \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}r} & 0 \\ -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{12}^m}{2E}r}) & 0 & (\sin^2 \theta_{13}^m) + (\cos^2 \theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}r} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{12}^m}{2E}r}) \right|^2 = \sin^2 2\theta_{13}^m \sin^2 \theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E} r)
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

同理我們可得：

$$\begin{aligned}
& P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) \\
&= \left| (0 \ 0 \ 1) U_{23} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{13}^m) + (\sin^2 \theta_{13}^m) e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} r} & 0 & -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} r}) \\ 0 & e^{i \frac{(m_{13})^2}{2E} r} & 0 \\ -\cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r}) & 0 & (\sin^2 \theta_{13}^m) + (\cos^2 \theta_{13}^m) e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} r} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left| -\cos \theta_{23} \cos \theta_{13}^m \sin \theta_{13}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{12}^m}{2E} r}) \right|^2 = \sin^2 2\theta_{13}^m \cos^2 \theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E} r)
\end{aligned} \tag{3-14}$$

配合前面的結果您也可以驗證(2-17)式是成立的。接著我們直接寫下剩餘的機率：

$$\begin{aligned}
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) &= 1 - \sin^2 2\theta_{13}^m \sin^4 \theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E} r) - \cos^2 \theta_{13}^m \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{M_{31}^2}{E} r) \\
&\quad - \sin^2 \theta_{13}^m \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{m_{31}^2}{E} r)
\end{aligned} \tag{3-15}$$

$$\begin{aligned}
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= -\sin^2 2\theta_{13}^m \sin^2 \theta_{23} \cos \theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E} r) + \sin^2 \theta_{13}^m \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{m_{31}^2}{E} r) \\
&\quad + \cos^2 \theta_{13}^m \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{M_{31}^2}{E} r)
\end{aligned} \tag{3-16}$$

上兩式的結果很明顯與(2-20)和(2-21)不同，證明了我們前面所說，物質的效應並非僅是單純地改變其混合參數罷了。只不過它們的型式變為較複雜；尤其是，含有 m_{13} 及 M_{13} 的這兩項，在低能量的時候會造成很大的振盪，我們稍後會在圖形裡面看到這個現象。

但也許您有注意到(參看附錄一)，其實在(3-8)式內我們可以選擇不同型式的對角化；譬如說， m_{13} 及 M_{13} 的順序對調。則所定義出來的參數就不太一樣，得到的機率表示式也就相應不同。但是當您將所有參數代入式內(這是需要很龐大的計算)，便會發現所有的結果其實都會相同的！

3.4 轉換機率、殘存機率與共振點

我們至今已經計算了幾種不同的機率，其型式上只是差別在於計算時所取的本徵態有所不同，而計算方法原則上都一樣。有鑒於此，我們大致上可以把它歸納為以下兩種類型：

設 \mathbf{a} ， \mathbf{b} 為某二類別的微中子，則：

$P(\nu_a \rightarrow \nu_b)$ 稱為"轉換機率(Transition Probability)"

$P(\nu_a \rightarrow \nu_a)$ 稱為"殘存機率(Survival Probability)" (3-17)

兩者通稱為"振盪機率(Oscillation Probability)"

當然從字面上便可以很清楚地解讀出前兩者的意義³。它們的總和理所當然地應該等於 1，如同我們前面所提過的。

也許您已經可以觀察到，以上我們所計算的不論何種機率的值，它們似乎都與 $\sin^2 2\theta_{13}^m$ 有關，而它本身的值又決定於 A_e^m 和 Δ_{31}^m 的相對大小。換句話說，我們可以調整這些參數值來控制所有機率值的變化情形。其中一個最簡單的情況就是當 $A_e^m \rightarrow 0$ 時，此時 $\rho \rightarrow 0$ ⁴，意即沒有任何物質存在的時候；將其代入(3-8)式後便可得 $\theta_{13}^m \rightarrow \theta_{13}$ 且 $\Delta_{31}^m \rightarrow \Delta_{31}$ 。您會發現所有的物理量都回歸到真空中的情形(當然一開始計算機率的過程也必須改變)，這樣的結果應該是很容易預期的，可是若我們要研究機率的大小，比較重要的乃是討論它們在極端值的時候，因為如此我們才能曉得這些機率值的值域範圍大小。首先因為我們知道 $\sin^2 2\theta_{13}^m$ 的上下限值是 0 與 1，而當 $\sin^2 2\theta_{13}^m \rightarrow 0$ 時， $\theta_{13}^m \rightarrow \pi/2$ ，將其代入(3-10)式後便可得到 $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rightarrow 1$ ，這相當於沒有任何本徵態的轉換現象；若要滿足這樣的條件，我們可以令 $A_e^m \rightarrow \infty$ ，此時 $\Delta_{31}^m \sim A_e^m$ ；我們可以將其解釋成當物質密度 ρ 非常大時，微中子的混合效應就不那麼明顯，當然便沒有振盪明顯的表象。另外當 $\sin^2 2\theta_{13}^m \rightarrow 1$ 時， $\theta_{13}^m \rightarrow \pi/4$ ，在此時 $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ 相對地為最小；於此般條件下由(3-8)式可得 $A_e^m \rightarrow \Delta_{31} \cos 2\theta_{13}$ 以及 $\Delta_{31}^m \rightarrow \Delta_{31} \sin 2\theta_{13}$ 。因為在這個時候是表示其本徵態轉換現象達到最大值時⁵，所以我們一般將此特殊的點通稱為"共振點(Resonance Point)"。

³這是作者的習慣分類，只是為了方便稱呼，實際上並未有任何文獻作此清楚地命名。但是殘存機率在某些地方的確有這樣的名稱。

⁴此處不能解釋為能量 $E \rightarrow 0$ ，否則會違反愛因斯坦相對性的原則，即(2-2)式。

⁵共振點是以 e 微中子的機率為討論基礎， μ 微中子的機率因為有大幅振盪項所以在共振點時並非最大。

不過話說回來，因為我們之前對 A_e^m 和 Δ_{31}^m 的討論，所控制的變因(變數)是指物質的密度 ρ ；意思就是說我們必須控制密度的大小使 $A_e^m \rightarrow \Delta_{31} \cos 2\theta_{13}$ 來達到共振條件。可是這是非常不切實際的，因為微中子穿入某種物質時，密度便已經固定，根本就無法變化。但是這並非代表微中子只有在穿透特定的物質時才會達到共振—因為 A_e^m 還含有一個我們可以自由調整的變數：能量 E 。可是如果真的調整能量 E 的值的話，這樣一來情況就複雜的多。由(3-10)式可知，後面兩個正弦項都含有能量 E 的因子，所以必須整體來作討論。也就是說即使調整 E 的值使 A_e^m 到達共振，但此時的 E 值不一定使後項達到極值，所以整體來說也不一定是最大。至於真正達到最大值的能量是何值，就得要從正式的數學微分計算去作討論。

然而，事情並非如此複雜：我們注意到(3-10)式後項還含有一個基準線的長度 L 。其實我們不能真正把 L 當作變數(假性變數)，因為被穿透的物體尺寸一般來說是固定的(除非是做實驗，可以刻意調整)。但我們可以問一個有趣的問題：假設基準線長 L 是可以調整的，那我們是否可以同時找到一個 L 值，使得能量達到共振時， e 微中子的殘存機率為零？換句話說，(3-10)式的後兩項正弦值均為 1，此時的轉換機率，在任何情況下必為最大值。我們可以做以下的分析計算：

<i>當能量達到共振點時，設此時 $E \equiv E_{res}^m$ ，且 $\sin^2 2\theta_{13}^m = 1$ 為最大值，反之 $\Delta_{31}^m = \Delta_{31} \sin 2\theta_{13}$ 為最小值。根據共振條件及 A_e^m 的定義，我們可得：

$$A_e^m \equiv (A_e^m)_{res} = (1.52 \times 10^{-4}) Y_e^m \rho^m E_{res}^m = \Delta_{31} \cos 2\theta_{13}$$

$$\Rightarrow E_{res}^m = \frac{\Delta_{31} \cos 2\theta_{13}}{(1.52 \times 10^{-4}) Y_e^m \rho^m} \quad (3-18)$$

<ii>當能量達到頂峰值時，即 $E \equiv E_{peak}^m$ 時使得 $\sin^2(1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E_{peak}^m} L) = 1$ 。

因此我們可以得到：

$$1.27 \frac{\Delta_{31}^m}{E_{peak}^m} L = \frac{2p+1}{2} \pi \Rightarrow E_{peak}^m = \frac{2.54}{(2p+1)\pi} \Delta_{31}^m L \quad (3-19)$$

注意此時我們仍然將 L 當成一個普通的常數。接下來我們的目的是尋找上兩式同時成立的條件，於是將(3-18)與(3-19)兩式所表示的 E 值令為相等，並正式賦

予 L 為真正的變數後，解出滿足於此條件的 $L \equiv L_{\max}^m$ ：

$$E_{res}^m = \frac{\Delta_{31} \cos 2\theta_{13}}{(1.52 \times 10^{-4}) Y_e^m \rho^m} = E_{peak}^m = \frac{2.54}{(2p+1)\pi} (\Delta_{31} \sin 2\theta_{13}) L_{\max}^m \quad (3-20)$$

$$\Rightarrow L_{\max}^m = \frac{(2p+1)\pi}{3.86(\tan 2\theta_{13}) Y_e^m \rho^m} \times 10^4 \text{ (Km)}$$

其中 p 為一正整數或 0，它的值愈大則所算出的長度愈長。我們就以地幔與地核的參數為例，取 $p=0$ 與 1 來估計它的大約值。

對地幔而言：

$$Y_e^m = 0.49 \quad \rho^m = 5$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.1 \Rightarrow p=0, L_{\max}^m = 9968 \text{ (Km)}; p=1, L_{\max}^m = 29904 \text{ (Km)}$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.05 \Rightarrow p=0, L_{\max}^m = 14509 \text{ (Km)}; p=1, L_{\max}^m = 43527 \text{ (Km)} \quad (3-21)$$

對地核而言：

$$Y_e^c = 0.467 \quad \rho^c = 12$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.1 \Rightarrow p=0, L_{\max}^c = 4353 \text{ (Km)}; p=1, L_{\max}^c = 13058 \text{ (Km)}$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.05 \Rightarrow p=0, L_{\max}^c = 6336 \text{ (Km)}; p=1, L_{\max}^c = 19007 \text{ (Km)} \quad (3-22)$$

當然若以微中子穿透地球內部的狀況來討論，以地球半徑 $R=6371$ Km，地核半徑 $r_c=3480$ Km 來做計算，穿透純地幔的基準線長應該小於 10000 Km (基準線恰好切到地核邊緣時，參閱第四章的圖形)，而穿透純地核的基準線長應該不超過大約 7000 Km (當然這是以微中子從接觸至地核算起，假設可以做到的話)。所以上述的(3-21)與(3-22)式只有某些值符合實際範圍。

但是就我們之前所提的，上面所算的值只是一個理論上的結果，實際上您不太可能控制基準線的長度恰好等於這些值，因為這需要微中子從特定的角度與方向入射。所以大部分的實驗都是單純調整能量 E 的情況。不過有一點可以預期的是，如果基準線長本身已經很長(大約超過 10000 Km)，且與上(3-21)與(3-22)式中的值相差不是很大(約 2000 或甚至 3000 Km 以下)，則機率在最大值時所對應的能量 E 其實與共振點相去不遠。這個現象可從我們下一節所繪的圖形中看到。

3.5 機率函數圖形與參數分析

我們所計算的機率到目前為止其實就只有一個真正的變數，就是能量 E ；因此我們可以如同數學上的處理，把機率 P 視為 E 的函數，即 $P(E)$ ，並且對這個函數作出其圖形。然後根據這些圖形，來分析不同的參數值對波形的影響。

首先我們必須決定繪圖的座標範圍，我們以一般的實驗能量範圍由 $E=1\sim 10$ GeV 來繪圖。再者因為機率本身含有的一些參數，若沒有特別強調，則規定將採用以下的預設值： $\Delta_{31}=2.40\times 10^{-3}$ (eV)²， $\sin^2 2\theta_{13}=0.10$ ， $\theta_{23}=48^\circ$ ，至於基準線長 $L=11895$ Km(這個值相當於在我們第四章定義的符號中Nadir角 $\theta_n=21^\circ$)。我們前一節提過，這樣的長度對地球來說是不可能只通過單一層密度(此長度屬於我們第四章要討論的微中子穿過多層密度)，可是我們仍然採取這樣的基準線長。理由是因為我們現在所作的圖形未來要用於和第四章的圖形來做比較，所以目前的情況是假設在這個長度所通過的密度是均勻的，而所用的密度就是地幔與地核的值，我們將分別對它們來作圖。

表三：各項參數值(含預設值)及其在圖形中的代表符號

參數值類型及代表符號			
密度 ρ (g/cm ³)及對應核電子數 Y_e	Nadir角 θ_n 及對應基準線長 L (Km)	本徵值 Δ_{31} (eV) ²	混合角 θ_{13}
地幔 $\rho^m(d_1)=5$ $Y_e^m=0.49$	$\theta_n(n_1)=0^\circ$ $L^1=12742$	$\Delta_{31}(m_1)=2.00\times 10^{-3}$	$\sin^2 2\theta_{13}(g_1)=0.05$
	$\theta_n(n_2)=21^\circ$ $L^2=11895$	$\Delta_{31}(m_2)=2.40\times 10^{-3}$	$\sin^2 2\theta_{13}(g_2)=0.075$
地核 $\rho^c(d_2)=12$ $Y_e^c=0.467$	$\theta_n(n_3)=30^\circ$ $L^3=11035$	$\Delta_{31}(m_3)=3.00\times 10^{-3}$	$\sin^2 2\theta_{13}(g_3)=0.10$

再來因為我們要繪製不同類型的圖形以及分析不同的參數，所以要決定所有會用到的參數值與圖形類型。而這些不同的參數與類型在圖形中所代表的符號是這樣規定的：機率 P 的下標中以字母 "o" 代表 "單一密度(one layer density)"，這是與第四章的機率所用的下標 "t" 代表 "兩層密度(two layer density)" 作區分。而本徵態的轉換則是用兩個字母代表，例如 $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ 則下標就記為 "ee"，而 $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ 則下標為 "μe"，依此類推(我們不列出 τ 微中子的圖形)。 d_1 、 d_2 則是代表不同的密度值(分別為地幔與地核的密度值)，對應不同的核電子數 Y_e ；

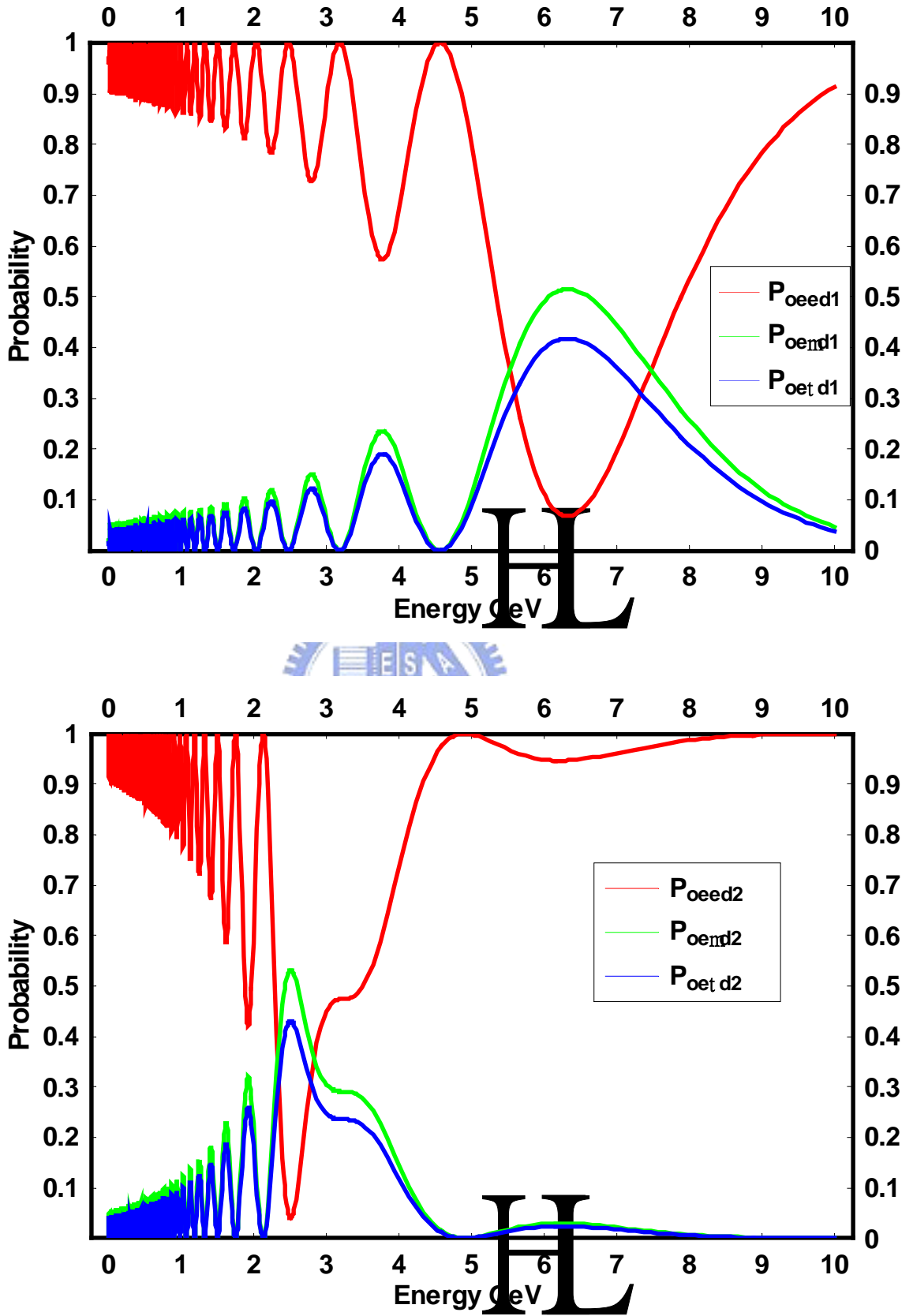
n_1 、 n_2 、 n_3 則是不同的Nadir角，對應不同的基準線長 L ； m_1 、 m_2 、 m_3 則是不同的本徵值； g_1 、 g_2 、 g_3 則是不同的混合角。我們將所有的參數值及所代表的符號(括號內)列出如表三，其中包含預設值的部分用粗體標示。

圖七是 e 微中子的振盪函數圖。我們可以清楚地見到兩個密度的圖形有兩個極值點。我們可以比較它們與共振點的數值差距多大。將相關參數值代回(3-18)式，可分別算出其數值：地幔 $E_{res}^m = 6.12 \text{ GeV}$ ，地核 $E_{res}^c = 2.67 \text{ GeV}$ 。這的確與圖七中的極值點相差不遠，符合我們之前的預期。而造成這個差距的理由，可以從前面我們計算的 L_{max}^m 來解釋：由於預設值是 $L = 11895 \text{ Km}$ ，地幔的情況從(3-21)式可知最接近預設值的 L_{max}^m 是 9968 Km ，比預設的值稍小，所以能量應該稍為增加以平衡。地核的情況則剛好相反，從(3-21)式可知最接近預設值的 L_{max}^c 是 13058 Km ，比預設的值稍大，所以能量應該稍為減少。

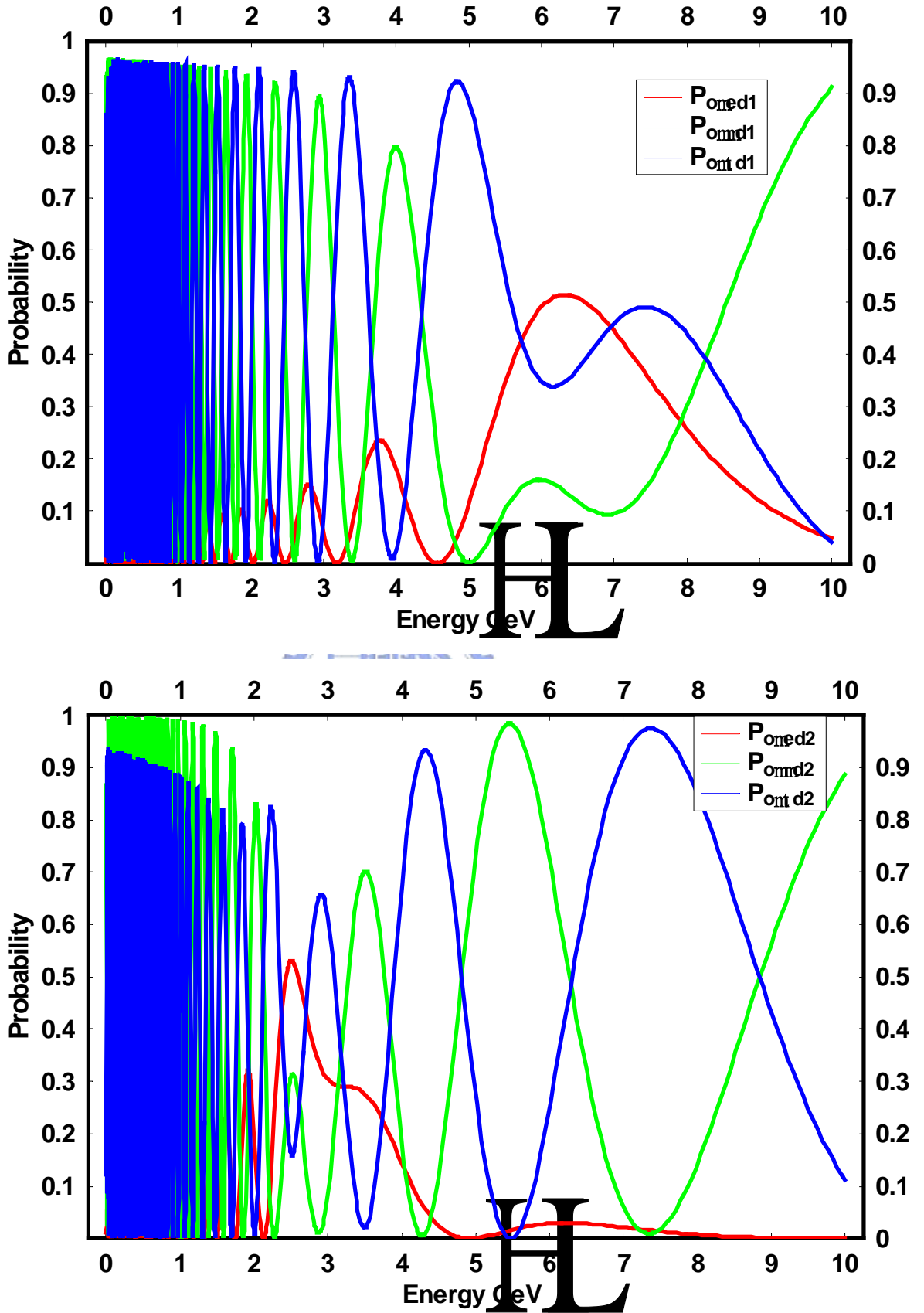
下頁圖八則是 μ 微中子的振盪函數圖。它們與 e 微中子圖形最大的不同乃是共振點不明顯，且在低能量時有極大的振盪現象(當然 $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ 是例外)。會造成這樣的原因可以從(3-15)與(3-16)兩式的結果來解釋：因為基本上它們兩式都含有 $\sin^2 \theta_{13}^m$ 與 $\cos^2 \theta_{13}^m$ 的項，當能量位於所謂的共振點時，即 $\sin^2 2\theta_{13}^m$ 為零時，它們並不會同時為零，故無明顯的共振現象。另外在低能量時，由於 $A_e^m \rightarrow 0$ ，所以我們姑且可以把它視為真空的狀況，即 $\theta_{13}^m \rightarrow \theta_{13}$ 且 $\Delta_{31}^m \rightarrow \Delta_{31}$ 。由於 θ_{13} 本身為極小的角度(大約不到 10° ，參閱第二章所列舉的範圍)，所以 $\sin^2 2\theta_{13}$ 或 $\sin^2 \theta_{13}$ 都極小於 $\cos^2 \theta_{13}$ ，所以 $\cos^2 \theta_{13}^m$ 這項的乘積為主要的貢獻。再者因為 E 極小，其微小的改變會在這一項中的正弦平方的相位就會造成非常大的振盪。

當然所謂的低能量的大幅振盪影響到底是在多低能量的時候呢？這得由共振點來決定，也就是說由 $\sin^2 2\theta_{13}^m$ 的行為來判斷⁶。當 E 開始靠近共振點時，上述的大幅度振盪便不復存在，而變成頻率比較小的振盪，因為此時 $\cos^2 \theta_{13}^m$ 不再具有數值上的優勢，且正弦平方的相位也不再極大。由圖六可知，地核的共振點比地幔的能量要低，所以這種大幅振盪的現象對地核的圖形來說會壓縮在能量更低的時候。由圖八便可明顯看出，地幔圖形中的大幅振盪大約持續到 4 GeV 左右，而地核的僅到 2 GeV 之前。而這個範圍的比例大約就是它們共振能量的比例值。

⁶本文上標"m"有時指"mantle地幔"，有時指"matter物質"，端看是否有比較對象來決定。



圖七：e 微中子在不同密度下的機率函數分佈圖形。上圖中其極值點約落在 6.32 GeV 左右，下圖的約在 2.58 GeV。



圖八： μ 微中子在不同密度下的機率函數分佈圖形。除 $P_{\mu e}$ 外其他兩曲線均無共振效應。大幅振盪的範圍也明顯可見。

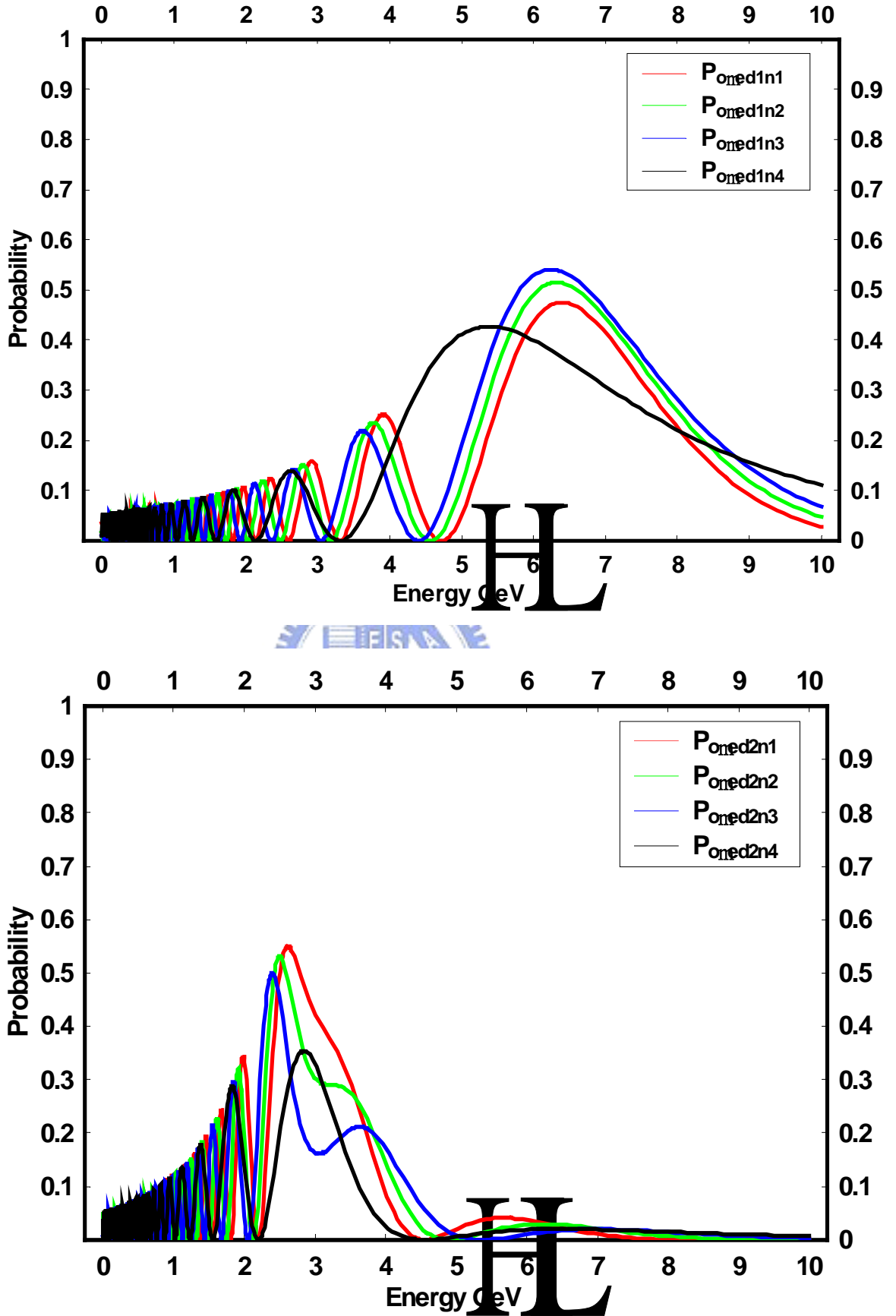
接著我們要看的是改變 3 種不同的參數並分析其與機率圖形的關係。首先圖九是改變不同的Nadir角(即基準線長)的e微中子的機率函數圖形。基本上兩張圖中 3 條彩色曲線的改變都不太大。其實這是符合我們的預期，因為我們所取的 3 種長度都差不多是 10000 Km左右，彼此相差不多。所以這樣的長度變化不太會影響它們的波形太多。不過您可以觀察到，在上圖中路徑越是比 L_{\max}^m 長越往右偏，下圖中路徑越是比 L_{\max}^c 短越往左偏，這也符合我們之前的解釋，即使偏的不多。有鑒於此，我們在圖上還特地多畫了一條黑色曲線：它的參數是Nadir角為 $60^0(n_4)$ ，換算成基準線長 $L^4=6371$ Km，即恰好為地球半徑長。果然不出所料，兩張圖都已經告訴我們黑色曲線的波形和彩色曲線就有明顯的差異。另外下圖的 3 條彩色曲線中有些在 3 GeV左右會有凸起與凹下的差別，這乃是由於正弦函數的相位差別所造成的。

接下來圖十的項目是改變不同的本徵值 Δ_{31} 的e微中子的機率函數圖形。基本上兩張圖中 3 條彩色曲線明顯地呈現向高能量區平移的現象；也就是說，共振點的平移，而且 Δ_{31} 大者在靠右側。這點您很容易從之前我們所說過的共振條件 $A_e^m \rightarrow \Delta_{31} \cos 2\theta_{13}$ 便能解釋(類似數學上極值點的平移現象)。另外由於之前第二章時提過 Δ_{31} 的值其實未必是正數，因此我們特地多畫了一條黑色曲線：它的參數是 $\Delta_{31} = -2.40 \times 10^{-3}(m_4)$ 。您可以見到其實它的振盪現象並不明顯，原因是因為它的 Δ_{31}^m 中， $(A_e^m - \Delta_{31} \cos 2\theta_{13})$ 的這項在能量E為正數時找不到共振點的解(它的共振點應該是位於負能量的地方)，所以 $\sin^2 2\theta_{13}^m$ 這項一直都保持很小的數值，故它的機率值一直不會太大，除非是低能量的時候。

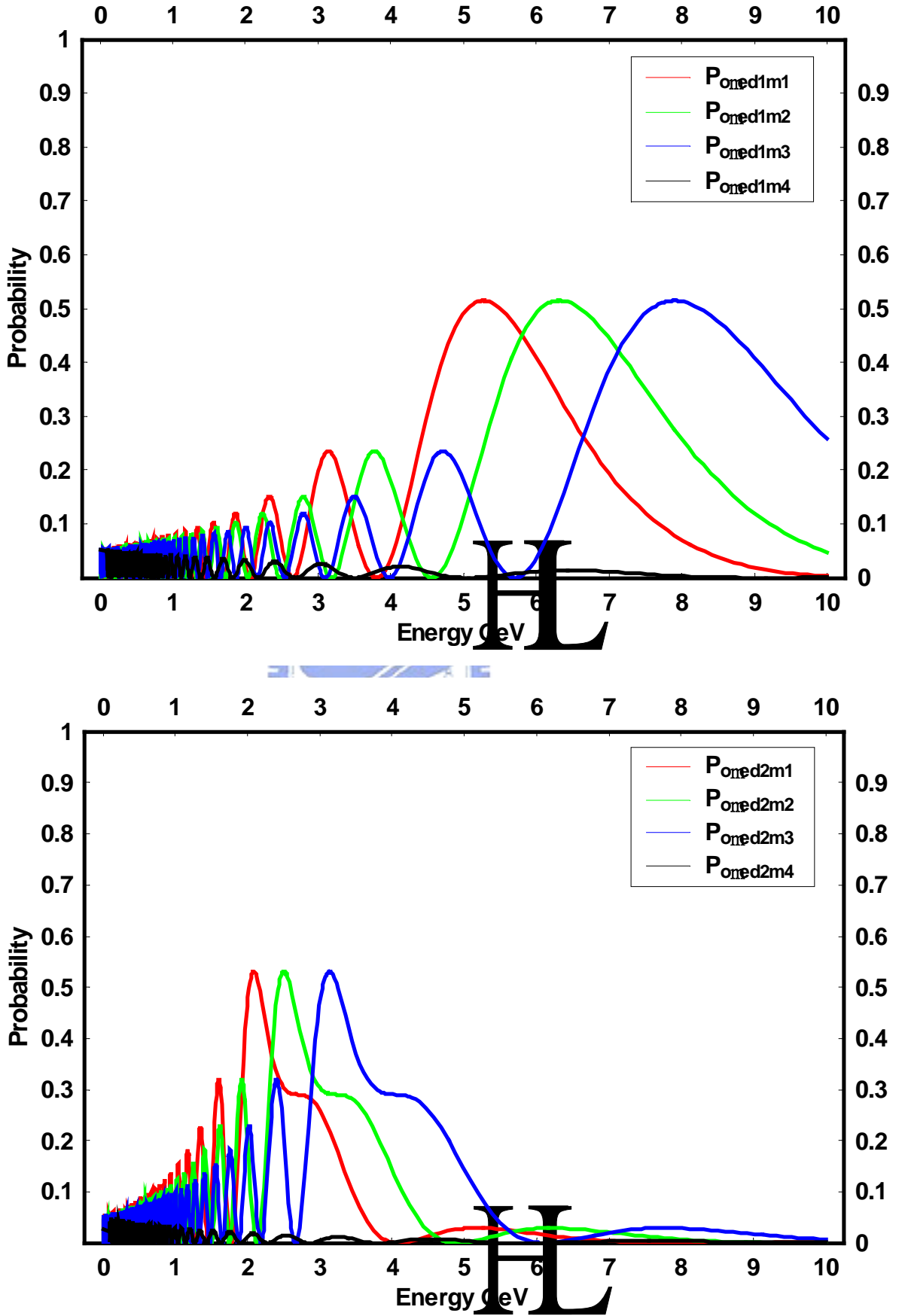
最後我們要討論的圖十一是改變不同的混合角 θ_{13} 的e微中子的機率函數圖形。很遺憾的是，我們無法從這樣的圖形中找出任何比較可靠的規律，唯一只能猜測它是因為正弦函數的相位不同所造成波形上的一些差異⁷。您也可以自行取另外的角度值來繪圖作比較。只不過別忘記，由於 θ_{13} 本身為極小的角度，於是所能改變的範圍也就有限。估計在這部分您不會有太大的發現。

我們這一章的討論基本上到此告一段落，最後要提的是，雖然我們在比較參數的圖形時並沒有列出 μ 微中子的函數圖形，但您也可以自行作圖比較後會發現它對這些參數的行爲基本上跟e微中子的圖形是相同的。沒有將它們列出主要是因為它有大幅振盪的能量帶(energy band)視覺上比較不好比較。

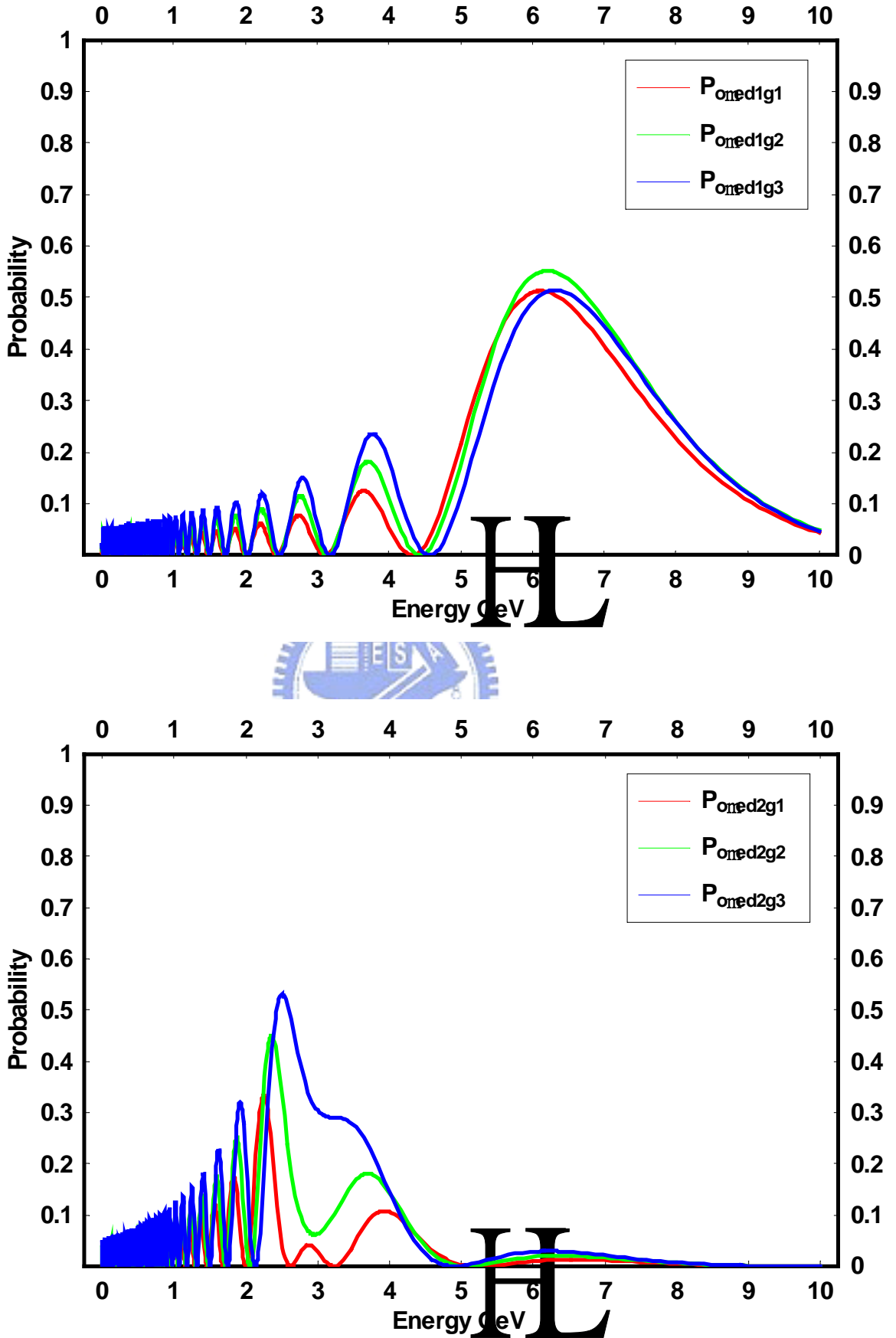
⁷雖然下圖的落差非常大，但我們認為那是因為基準線夠長，導致混合角上的些微變化，相乘後卻使sin的相位改變到一定程度的關係。本章末頁圖十四也有相同的情形。



圖九：e 微中子的機率函數分佈圖形，其中每圖均含有不同的基準線長曲線。



圖十：e 微中子的機率函數分佈圖形，其中每圖均含有不同的本徵值曲線。



圖十一：e 微中子的機率函數分佈圖形，其中每圖均含有不同的混合角曲線。