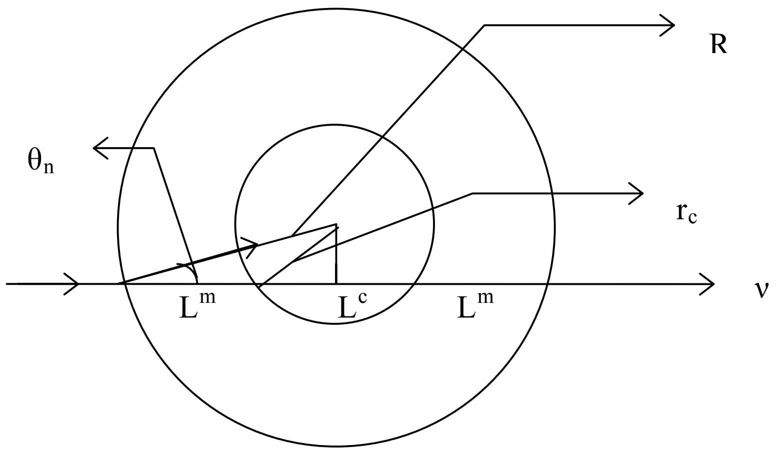
第四章 微中子穿透地球內部之機率討論

有別於目前微中子的兩大研究領域(太陽微中子及大氣微中子)，微中子穿透地球的研究爲比較新興的領域，但它的應用卻相對地比較廣泛，主要是可以用來探測地球內部物質的密度。本章的內容基本上延續前章，主要的不同是研究微中子的穿透路徑中含有多層密度的情形。我們在此一樣只研究最簡單的方式，即所算出的機率只對應單一個變數能量 E 的函數。但有許多文獻卻不以能量 E 爲變數，反以路徑長(基準線長)L 爲變數，或甚至是雙變數(如地幔與地核的路徑長各爲一項非完全獨立的假想變數，或是能量與路徑長各爲一個變數)。這樣的函數分析的方式與我們的非常不同，有興趣者可參考[2，32~39]。

4.1 地球內部的組成與穿透路徑

要研究微中子穿透地球的情形，首先要瞭解地球內部的構造。其實地球內部本身也是非常複雜的由化學週期表上不同的元素，各自分布在某特定的層面及深度。基本上它大致可分爲三部分：地殼(Earth crust)，地幔(Earth mantle)與地核(Earth core)。不過由於地殼的僅是地球外部薄薄的一層"皮"，其厚度小於其餘兩者很多(約僅 70~100 Km，而其餘兩者一般都爲數千Km左右)，所以我們計算時不去考慮它的影響。地核屬於地球的核心部分，其密度較大，理想上我們將它視爲球型，半徑爲r_c=3480 Km，與整個地球構成完整的同心圓，地球半徑爲R=6371 Km。而地幔密度較小，位於外圈的環狀部分。於是整個微中子從地球表面入射的路徑示意圖如下圖十二所示：



圖十二：微中子穿透地球之路徑及圖解

圖中我們定義了一個新符號，稱爲"Nadir角 θ_n(Nadir angle)"，它是微中子的入射線與入射點至地心連線的夾角(它具有方向性，圖中有箭頭標示)。而在這整段過程中總路徑長 $L=2L^m+L^c$，其中 L^m 與 L^c 分別爲在地幔與地核中的路徑長。由圖形可看出若改變 θ_n 則整條入射的路徑也相應改變，所以它們其實是屬於同一個變因；根據圖形中簡單的數學幾何便可以導出以下的換算公式：

$$
\begin{aligned}
L^m &= R(\cos\theta_n - \sqrt{(\frac{r_c}{R})^2 - \sin^2\theta_n}\,) \\
L^c &= 2R\sqrt{(\frac{r_c}{R})^2 - \sin^2\theta_n}
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

我們可以根據此公式將第三章的表三中的 3 個 θ_n 所對應的 L^m 與 L^c 分別算出。不過我們必須注意的是，由上圖十五可觀察出當 θ_n 增加時，所有的路徑包括L，L^m 與 L^c 都會相應減少;當 θ_n 超過某一臨界值時，路徑便不通過地核—當然這是不允許的，因爲我們本章討論的路徑是必需同時涵蓋到地幔與地核，因此我們所選的 θ_n 一定要小於這個臨界值。而這個臨界值就是代表路徑恰好切過地核表面的時候(即切線)。根據公式，此時將 $L^c=0$ 代入可得：

$$
\sin^2\theta_n = (\frac{r_c}{R})^2 \Rightarrow \theta_n = \sin^{-1}(\frac{r_c}{R})^2 = 33.1^0 \tag{4-2}
$$

下面表四我們列出了表三中的 3 個 θ_n 及 θ_n 爲臨界值時所對應的各段路徑長L，L^m 與 L^c 的長度。

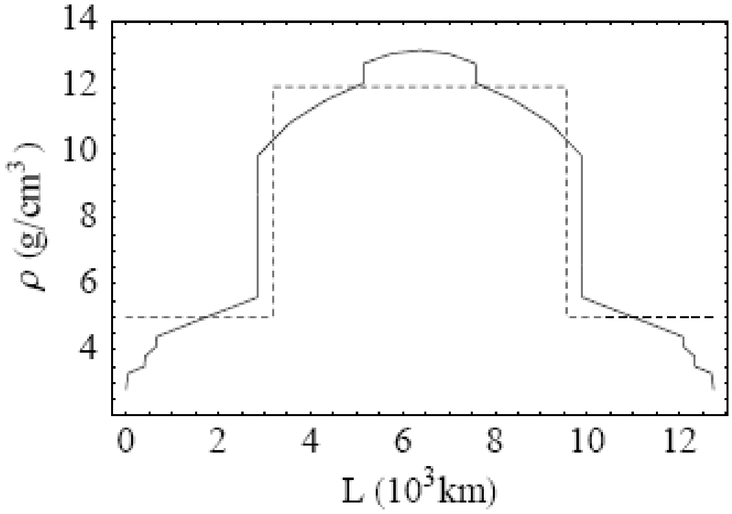
表四： Nadir角 θ_n 與所對應的路徑長

Nadir角 θ_n 與各段路徑的對應值			
Nadir角 θ_n	總路徑長 L(Km)	地幔路徑長 L^m(Km)	地核路徑長 L^c(Km)
$\theta_n=0^0$	12742	2891	6960
$\theta_n=21^0$	11895	3233	5429
$\theta_n=30^0$	11035	4120	2795
$\theta_n=33.1^0$(臨界)	10674	5337	0

其中 $\theta_n=0^0$ 便是路徑穿透地心的時候，此時的路徑是最長的。

接著我們必須瞭解地球內部的密度組成，因爲計算機率時必須知道這個資訊。但這卻不是一件簡單的事情：因爲地球內部不管是哪個部分，密度都不是常數，它是連續分佈且一直在變化的。當然我們必須要取平均密度做計算。不過是要如何取呢？我們首先必須曉得地球內部密度的分佈變化，但不在此做太理論性的數值計算，僅是適度對它做些簡化，以求不過於失真爲原則。

地球物理學家 Stacey [41]所採取的模擬模型，非常適合我們以下的計算。其做法如下圖十三表示。



圖十三：地球內部的密度隨距離的分佈(實線)與理想模型(虛線)

由圖可知實線代表實際的密度雖然是連續的變化，但基本上也大致可看出地核區比地幔區大，它們接觸的地方有個密度不連續面(在地球物理學上稱爲"古氏不連續面")，而在本身的區域內其實變化並不算太大。於是我們便有充分的理由在各區分別取平均值，以簡化我們的計算。如圖中的虛線部分，構成了一個理想的階梯形密度函數模型：地幔區 ρ^{m}=5 g/cm^3，地核區 ρ^{c}=12 g/cm^3。也就是說兩區的密度基本上都近似成常數。

也許您會認爲這樣的近似法有些粗糙，而擔心會使得與實際誤差過大。其實真正的方法應該是將地球切割爲非常多微小段，然後計算每一段的效果後加總，類似積分的計算。但那總是脫離不了需要電腦才能做如此大量的工作，當然也的確有人做過，我們最後會引用他們所得到的圖形來和我們的結果做比較。只不過，根據我們前面第三章所知，由於機率最重要的部分便是共振點附近的"能量帶"，所以若我們的近似模型不會差別過大，只要"能量帶"接近，所得到的結果照理來說也應該不會差距太多。

4.2 推演算符

目前的情況就是微中子需穿透過 3 個密度層：地幔，地核，地幔。表面上來看，這個問題似乎很容易：我們可以當做一般的機率問題，也就是利用第三章的結果，分別計算各段中的機率後，三者再相乘便是最後的總機率。

但事實上這是錯誤的算法，情況並不是如此的簡單，因爲每一段的狀態並非獨立的。如果您是用上述的方式計算，主要的錯誤就在於那樣的算法是將 3 段的初末態是互相獨立，也就是當成不相關的 3 個事件來處理。但實際上我們偵測微中子是都在地表，也就是說我們僅知道最末狀態，中間的過程是一個有互相關聯的狀態轉換。我們將它畫成一個示意圖來說明：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} & \rightarrow & \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=L^m} & \rightarrow & \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=L^m+L^c} & \rightarrow & \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=2L^m+L^c=L} \\
\text{最初態} & & \text{第一段末態} & & \text{第二段末態} & & \text{最末態} \\
 & & \text{第二段初態} & & \text{第三段初態} & &
\end{array}
$$

上圖很明顯表示每一段的末態便是下一段的初態，也就是下一段的初始狀況(initial condition)必須視上一段來決定。這是很重要的，因爲我們在數學上的微分方程式的解法中，初始狀況會決定一個方程式的解與解的行爲。假如我們草率地用上面所說的錯誤算法，則是表示每一段的初始狀況都是與最初態一樣，而這就是造成錯誤的原因(當然這也就表示我們在第二章末尾所提的計算機率的快捷公式無法適用)。

其實要計算機率，最重要的是知道最末態;而要知道最末態又得知道前面的狀態，所以一切都是互相關聯的。所以我們正確的算法，就是按步就班，一段一段地計算。也就是說，利用(3-9)式算出第一段末態後，再將它當成第二段初態再代一次(3-9)式(當然第二段的參數就得代入地核的密度)，然後再重覆一次即可得最末態。這是最正統的算法。不過如果這樣計算的確也是蠻費時的(尤其以後若要應用到更多密度層的時候更是如此)。因此我們可以適當地將其做些簡化，並運用數學上處理的技巧，來加快我們的計算效率。

首先，我們在計算時，其實可以略過中間的狀態，直接將(3-9)式的矩陣，依地幔，地核，地幔的順序，一層層地運算到最初態上，便直接可得到最末態。之後利用量子力學的內積定義便可算出我們所要求的機率。我們因此給予這個矩陣定義一個新名詞稱爲"演進算符(Evolution Operator)"：

$$U_e^{m(c)} \equiv U_{13}^{m(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^{m(c)})^2}{2E}L^{m(c)}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}^{m(c)}}{2E}L^{m(c)}} \end{pmatrix} (U_{13}^{m(c)})^{-1} \tag{4-3}$$

請記住從這裡開始，上標"m"均代表地幔的參數，而"c"則代表地核的參數。上面式子內的參數定義都與第三章相同，上標的差別僅只於所代的密度不一樣。若要區分清楚可分別稱U_e^m爲"地幔演進算符"，U_e^c爲"地核演進算符"。接著我們便將最初與最末態用這些算符表示出來：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=L} = U_{23}(U_e^m U_e^c U_e^m)(U_{23})^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} \equiv U_{23} U_e^t (U_{23})^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} \tag{4-4}$$

式中我們定義U_e^t爲"總演進算符(Total Evolution Operator)"，它是各個演進算符依作用順序的乘積(也可以推廣至更多層密度)。

現在的情況已經很清楚了，我們只要算出總演進算符，代入初始態便很容易可以得到最末態。而要計算總演進算符，您也許會將 3 個演進算符實際相乘，但那的確是一件很巨大的工作。當密度層更多，這樣要用一般的計算根本是不可能的。如此的話也許您會想到利用電腦程式計算—我們不否認在計算更多層密度時的確需要電腦幫忙。可是目前的狀況只有 3 個演進算符，所以在此建議您可以依照附錄二的數學簡化方法實際做計算，如此也許較能讓您掌握裡面各參數的物理意義。我們在此僅列出其結果：

$$U_e^t = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \tag{4-5}$$

其中的一些參數的定義我們將其列出如下：

$$\alpha = \cos(2\varphi^{m})\cos(\varphi^{c}) - \cos(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m})\sin(2\varphi^{m})\sin(\varphi^{c})$$

$$\beta = -\cos(2\theta_{13}^{m})[\sin(\varphi^{c})\cos(2\varphi^{m})\cos(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m}) + \cos(\varphi^{c})\sin(2\varphi^{m})] + \sin(2\theta_{13}^{m})\sin(\varphi^{c})\sin(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m})$$

$$\delta = \frac{(M_{13}^{m})^2 + (m_{13}^{m})^2}{4E} \times 2L^{m} + \frac{(M_{13}^{c})^2 + (m_{13}^{c})^2}{4E} \times L^{c}$$

(4-6)

式中另外定義的符號爲:

$$\varphi^{m(c)} = \frac{(M_{13}^{m(c)})^2 - (m_{13}^{m(c)})^2}{4E} L^{m(c)} = \frac{\Delta_{31}^{m(c)}}{4E} L^{m(c)} = 1.27 \frac{\Delta_{31}^{m(c)}}{E} L^{m(c)} \tag{4-7}$$

您也許認爲我們漏掉了 γ 的值，但其實根據歸一化矩陣的性質(注意所有的演進算符都是單式矩陣)，可以得到下面的結果:

$$|\alpha - i\beta|^2 + |i\gamma|^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 \tag{4-8}$$

因此我們只需要知道 α 跟 β 便可以解決所有問題[1]，意即真正獨立的參數只有 α 跟 β，而他們的值都可以直接代入相關參數便可以容易求出。至於 $\varphi^{m(c)}$ 其實就是我們前面所定義過的參數。

4.3 微中子穿透地球的振盪機率

我們接下來的工作便是利用前章的方法將所有的機率全部算出來。基本上，由於所用到的都是歸一化矩陣，所以第二章的(2-17)和(2-19)式在這裡都是成立的，我們下面就直接利用它們來簡化計算。

首先是 e 微中子的振盪機率:

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = P(\nu_\mu \to \nu_e)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \sin^2\theta_{23}(1 - \alpha^2 - \beta^2) \tag{4-9}$$

---

[1] 因爲機率是絕對值平方，所以只需要求 γ^2 即可，至於 γ 本身是實數或虛數，正數或負數，在此都不重要。

$$P(\nu_e \to \nu_\tau) = P(\nu_\tau \to \nu_e)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \cos^2\theta_{23}(1-\alpha^2-\beta^2) \qquad (4\text{-}10)$$

因此由(2-17)式我們可得:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_e) &= 1 - P(\nu_e \to \nu_\mu) - P(\nu_e \to \nu_\tau) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \qquad (4\text{-}11)$$

接著是 μ 微中子的振盪機率:

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \qquad (4\text{-}12)$$

$$= \cos^4\theta_{23} + (\alpha^2+\beta^2)\sin^4\theta_{23} + 2\cos^2\theta_{23}\sin^2\theta_{23}(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)$$

$$P(\nu_\mu \to \nu_\tau)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \qquad (4\text{-}13)$$

$$= \sin^2\theta_{23}\cos^2\theta_{23}[\alpha^2+\beta^2+1-2(\alpha\cos\delta+\beta\sin\delta)]$$

您可以自行驗證它們的總和也為 1。注意這兩類的機率都含有 $\alpha^2+\beta^2$，但它們其實有一些差異存在: e微中子的主要就是($\alpha^2+\beta^2$)組成，三者間的差別只是所乘項的比例或正負不同而已；但 μ 微中子就比較複雜，主要除了沒有e微中子那樣的規律性外，主要是還含有 $(\alpha\cos\delta+\beta\sin\delta)$ 這一尾數項。

不過，如果將上面的性質與第三章的機率比較，其實您會發現那邊的機率似乎也有類似的性質: 也就是e微中子的機率似乎有某種規律性，而 μ 微中子也有類似的尾數項。於是我們開始懷疑，兩者應該有某種對應關係；也就是說，多層密度與單層密度的差別只包含於參數的形式內，其整體的表徵應該都一樣的。在稍後的圖形內就可以見到，多層密度的圖形一樣具有共振現象，且 μ 微中子也一樣在低能量時具有大幅振盪的能量帶。有鑒於此，我們可以做一件簡

單的驗證：根據我們前面所提過的，如果我們將這裡的機率表示式中的 ρ^{m} 與 ρ^{c}，都趨近於某一密度，假設叫做 ρ^{a}，並將此替代回所有的參數及表示式，則最後應該可以回到原來第三章的結果。首先這個步驟中所有參數的變化如下：

$$
\begin{aligned}
&\rho^{m}=\rho^{c}\rightarrow\rho^{a}\quad Y_e^{m}=Y_e^{c}\rightarrow Y_e^{a}\quad A_e^{m}=A_e^{c}\rightarrow A_e^{a}\\
&\theta_{13}^{m}=\theta_{13}^{c}\rightarrow\theta_{13}^{a}\quad M_{13}^{m}=M_{13}^{c}\rightarrow M_{13}^{a}\quad m_{13}^{m}=m_{13}^{c}\rightarrow m_{13}^{a}\\
&\Delta_{31}^{m}=\Delta_{31}^{c}\rightarrow\Delta_{31}^{a}=\frac{(M_{13}^{a})^2-(m_{13}^{a})^2}{2E}
\end{aligned}
\tag{4-14}
$$

之後我們重新定義以下符號：

$$
\begin{aligned}
&L^{a}\equiv 2L^{m}+L^{c}\\
&\varphi^{a}\equiv\frac{\Delta_{31}^{a}}{4E}L^{a}=\frac{\Delta_{31}^{a}}{4E}(2L^{m}+L^{c})=2\varphi^{m}+\varphi^{c}=\frac{(M_{13}^{a})^2-(m_{13}^{a})^2}{4E}L^{a}
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

而將(4-14)與(4-15)全部代回(4-6)式可得到：

$$
\begin{aligned}
&\alpha\rightarrow\cos(\varphi^{a})\\
&\beta\rightarrow-\cos(2\theta_{13}^{a})\sin(\varphi^{a})\\
&\delta\rightarrow\frac{(M_{13}^{a})^2+(m_{13}^{a})^2}{4E}L^{a}
\end{aligned}
\tag{4-16}
$$

最後把(4-16)式代入各機率表示式後，得到所有的結果如下：

$$
\begin{aligned}
&P(v_e\rightarrow v_\mu)\rightarrow\sin^2\theta_{23}\sin^2 2\theta_{13}^{a}\sin^2\varphi^{a}\\
&P(v_e\rightarrow v_\tau)\rightarrow\cos^2\theta_{23}\sin^2 2\theta_{13}^{a}\sin^2\varphi^{a}\\
&P(v_\mu\rightarrow v_\mu)\rightarrow 1-\sin^4\theta_{23}\sin^2 2\theta_{13}^{a}\sin^2\varphi^{a}-\sin^2 2\theta_{23}[\cos^2\theta_{13}^{a}\sin^2(1.27\frac{(M_{13}^{a})^2}{E}L^{a})\\
&\qquad\qquad+\sin^2\theta_{13}^{a}\sin^2(1.27\frac{(m_{13}^{a})^2}{E}L^{a})]\\
&P(v_\mu\rightarrow v_\tau)\rightarrow-\sin^2\theta_{23}\cos^2\theta_{23}\sin^2 2\theta_{13}^{a}\sin^2\varphi^{a}+\sin^2 2\theta_{23}[\cos^2\theta_{13}^{a}\sin^2(1.27\frac{(M_{13}^{a})^2}{E}L^{a})\\
&\qquad\qquad+\sin^2\theta_{13}^{a}\sin^2(1.27\frac{(m_{13}^{a})^2}{E}L^{a})]
\end{aligned}
\tag{4-17}
$$

果然這些結果和第三章是一樣的，表示我們的計算是正確的。

話雖如此，多層密度畢竟和單層密度還是有某些差別，原因就包含於 α 跟 β 的參數內。首先，在我們的情況中由於微中子通過兩層密度，所以機率的圖形中應該可以看到兩個共振點。其次，由於兩個共振區的狀態是相互影響的，因此我們可以合理的懷疑，兩者間應該有波動力學上所謂的"干涉現象(interference)"。這個干涉現象可能會使得機率變得很大，或者很小，端視兩干涉者的相位來決定。也就是說，我們在稍後的圖形中，應該有可能看到第三個波峰，位置就在兩共振點之間。也許您會問有何證據證明此一現象呢？在 α 跟 β 的表示式(4-6)式中，我們會發現都有 $\cos(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m)$ 或 $\sin(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m)$ 這兩項—其實它們就是干涉所造成的。雖然我們無法用直接的理由來解釋其成因，但卻可以舉個旁證來說明此點：在量子力學中，代表不同方向的Pauli算符本徵態，其干涉的效應爲正比於兩者夾角的餘弦值(本徵態的內積，參閱[9])；而從附錄二也可以曉得，$\cos(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m)$ 這一項基本上是由推演算符中，代表地幔與地核的兩個不同方向的單位向量內積而產生，而內積在量子力學就是兩本徵態的機率。所以我們可以如此認爲，這樣產生的機率就是兩層密度共同組合產生的，或者說互相"干涉"造成的。不過由於它是與餘弦值有關，所以這一項不見得一直存在，有時明顯，有時消失，因爲裡面的參數與能量，本徵值或路徑長都與它有關，必須在適當的條件下才能看到最大。這是單層密度所不具有的特殊現象[2]。

4.4 機率函數圖形與參數分析

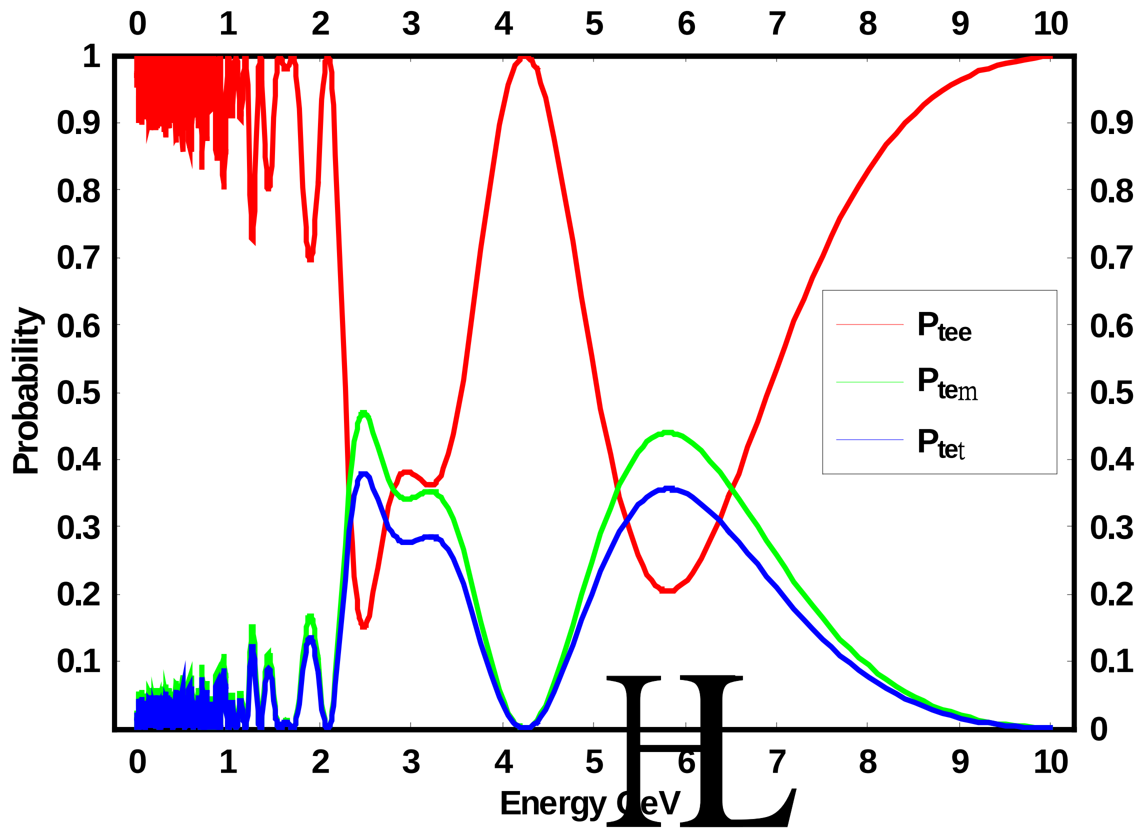
我們本節的目的便是仿照第三章，將多層密度的機率對能量的函數圖形繪出，並比較它們之間的差異，之後一樣改變不同的參數作分析。方便比較起見，此處我們仍然沿用表三和表四的參數值與預設值，而相關的符號也都已經於第三章定義過了。

圖十四是e微中子的函數圖形。我們的確見到了兩個極值點(3 條曲線皆有)，而且它們基本上都位於各自的共振點(地幔 E_{res}^m =6。12 GeV，地核 E_{res}^c =2。67 GeV)的附近。不過，它倒是不能像圖七一樣，可以簡單地用基準線長的關係來解釋極值點的偏移;更何況，右側的極值點位於地幔的共振點左邊，不像圖七那

[2] 因爲我們是以能量爲單一變數，所以干涉的現象比較難用定量交待;而若您是以路徑長爲分析變數，就比較好掌握這類問題。我們一開始提及的參考資料，就有詳細描述這一方面。

樣是在右邊。這就表示兩者的性質有些根本上的不同，但其實這也可以認爲是受到干涉現象的影響，或者說因爲相位的關係—意思是每個正弦的相位由相關參數來決定，包括能量，本徵值，混合角或甚至是路徑長本身。您可以回想之前我們曾經強調過，要計算機率時每一個中間狀態都是互相關聯的。當相位達到某特定的值時，可能使干涉完全消失，而極值點偏移至共振點另外一邊；或者當干涉最大時，極值點反而變得似乎不存在(因爲此時干涉點的機率值最大)。圖十四的干涉點並不是非常明顯(約位於 3~4 GeV之間)，但是待會在觀察改變Nadir角θ_n的圖形時便可以明顯觀察到這些現象。

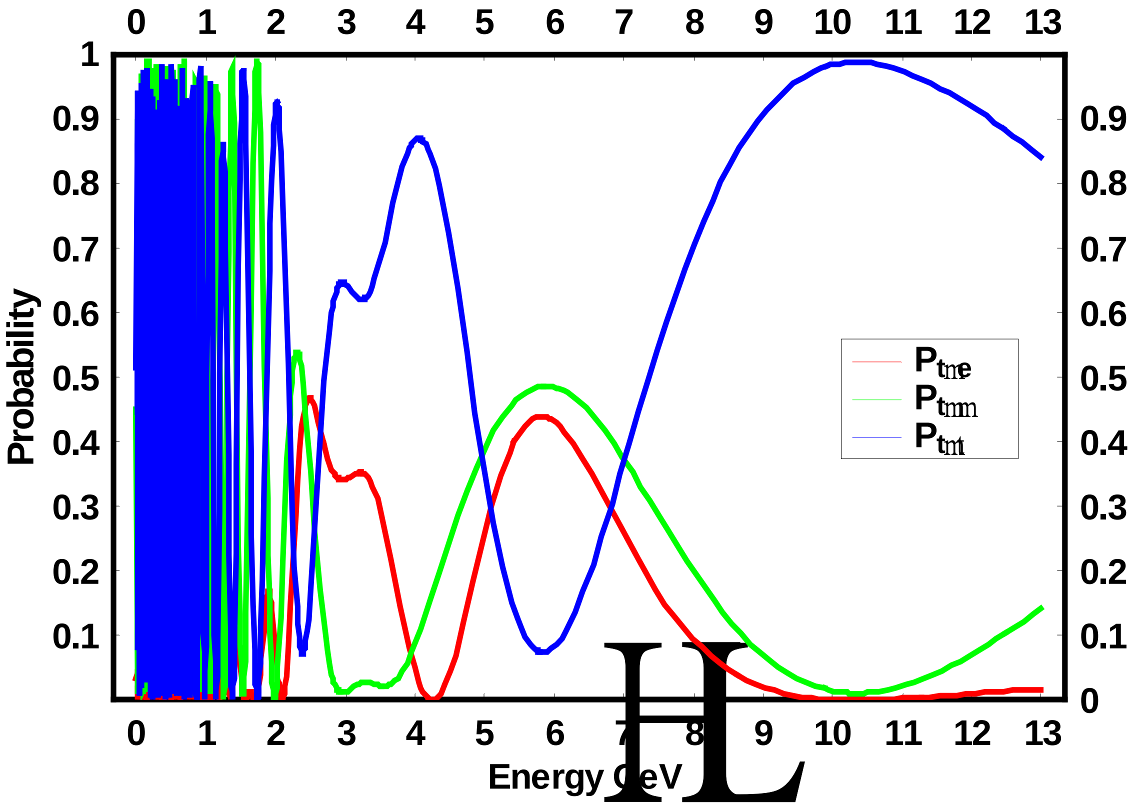
圖十五是μ微中子的函數圖形。因爲它本身就沒有共振點，所以干涉點也很難分辨，畢竟它並沒有像 e 微中子的機率一樣有完整的$\sin^2 2\theta_{13}^{m(c)}$正比關係。不過它跟圖九一樣有大幅振盪的低能量帶，成因也是大同小異。而這個低能量



圖十四：e 微中子的函數圖形。圖中右側的極值點約落在 5.82 GeV 左右，左側的約在 2.48 GeV。

帶大約只到 2 GeV 左右，符合地核的能量帶。我們可以合理地推斷，能量超過了 2 GeV 以後，便開始受到干涉的影響;所以即便地幔的大幅振盪帶原本較寬，但一旦超過了 2 GeV 也隨即消失。

接著圖十六是改變 3 個不同的Nadir角 θ_n所得的e微中子機率曲線。您可以很明顯地觀察到我們上面所預測的圖形變化，主要是干涉現象與極值點的偏移。尤其在 $\theta_n=0^0$時(紅線)干涉現象爲最明顯，位於兩極值波峰間。圖形的曲線變化是隨著Nadir角增加時，例如從 0^0開始增加，原本的右側極值點會更向右偏移，並且越過共振點，惟其振幅一路減少，而且寬度越趨於平緩，直到 30^0時，其實已經不算是極值了；反之，干涉的波峰從原來極低值，一路攀升且向右偏移，最後脫離左側極值波峰而獨立成爲新的極值。假設今天地核半徑夠大，即Nadir角 θ_n可以一直增加時，這個過程也會一直循環下去[3]。只不過以現在的狀況來說，由於目前的 θ_n在數值上為了切到地核，最大只有差不多到大約



圖十五：μ微中子的函數圖形。除 Pμe 外其他兩曲線均無共振效應。大幅振盪的範圍也限於 2 GeV 內。在此將繪圖範圍延伸至 13 Gev 是為了檢視 Pμτ 的右側極大值點。

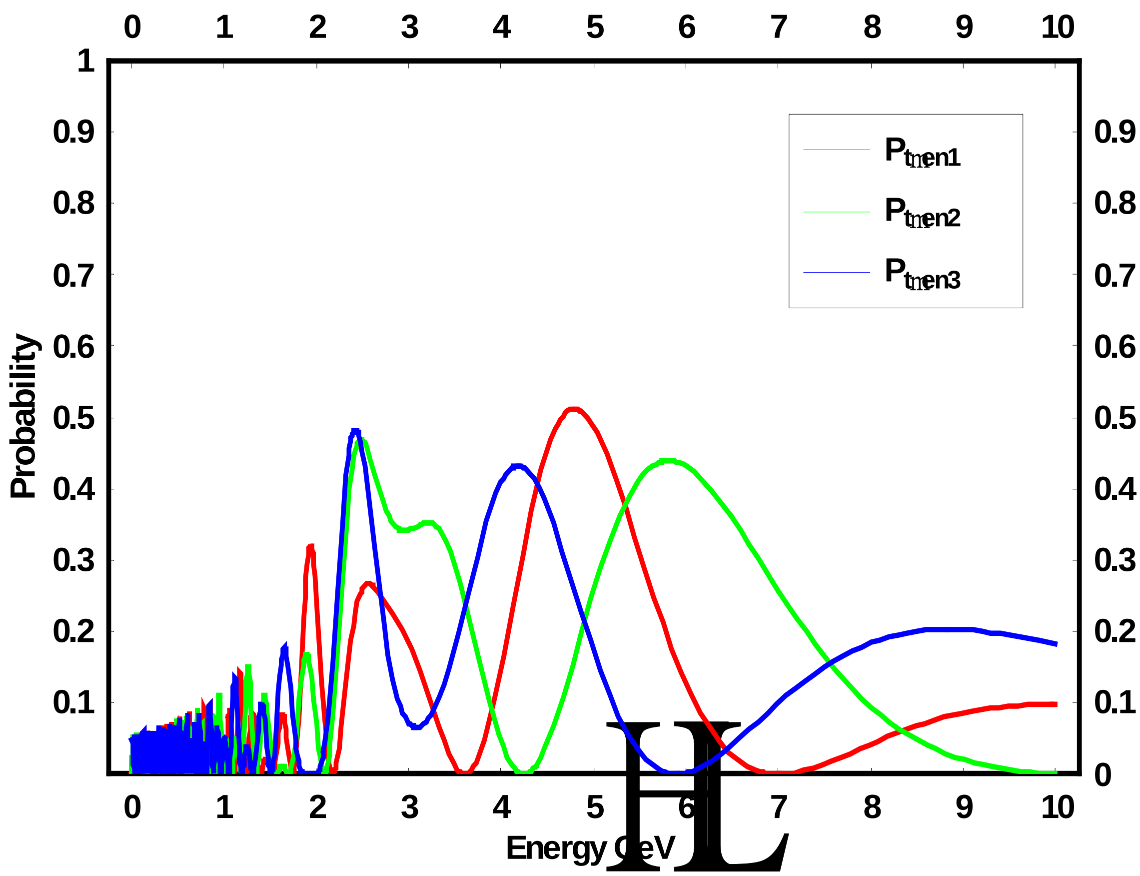
30^0，故圖形也只能到如此的範圍。簡單地描述它的動態，就好像那些位於低能

[3]也許您會認爲這個說法有點勉強且蹩腳，但事實上這是我們認爲最好的解釋，盡管我們的確沒有百分之百的把握。您可以多畫幾條曲線，取值更密集些，以觀察它的變動趨向。

量的密集振盪波一個個向高能量區域移動，並且振幅增大爲極值波或干涉波[4]。

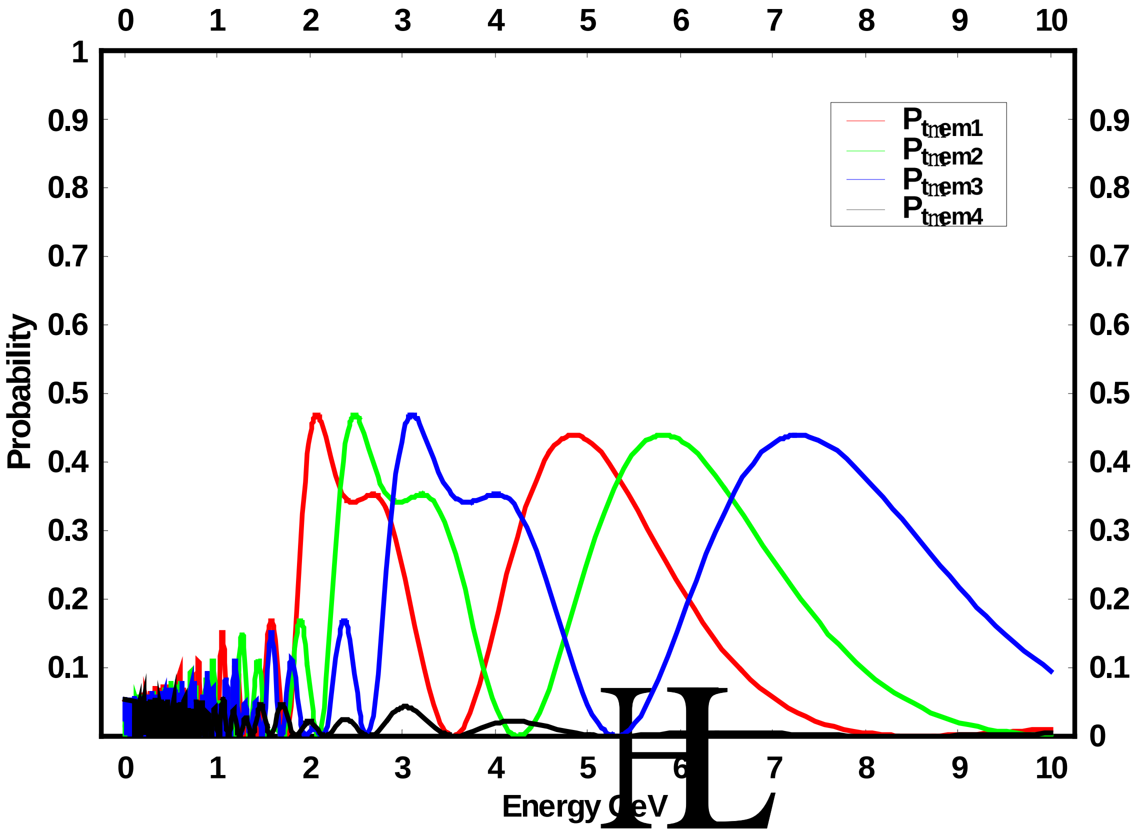
由於多層密度的函數圖形對 Nadir 角是如此敏感，相反的，在第三章的圖形卻是對 Nadir 角反應不太靈敏。由此您就可以感覺到，我們總不能將多層密度的情況，單純地當成不同密度的圖形來合成;講得更學理化一點，就是我們無法尋找到某單一密度的圖形，去模擬多層密度的變化。其實追根究底，就是因爲多層密度的擁有單一密度所沒有的干涉現象，這是無論如何也不會在單一密度的圖形上出現的。

圖十七則是改變 3 個不同的本徵值的 e 微中子機率曲線。基本上它就如同我們第三章所解釋過的，因爲共振點的向右平移，導致整個圖形也向右平移。我們也依照第三章一樣繪出了負本徵值的曲線(黑色)，但它一樣沒有起到什麼作用。所以這個圖形的結果基本上對我們來說並沒有感覺到太大的意外。

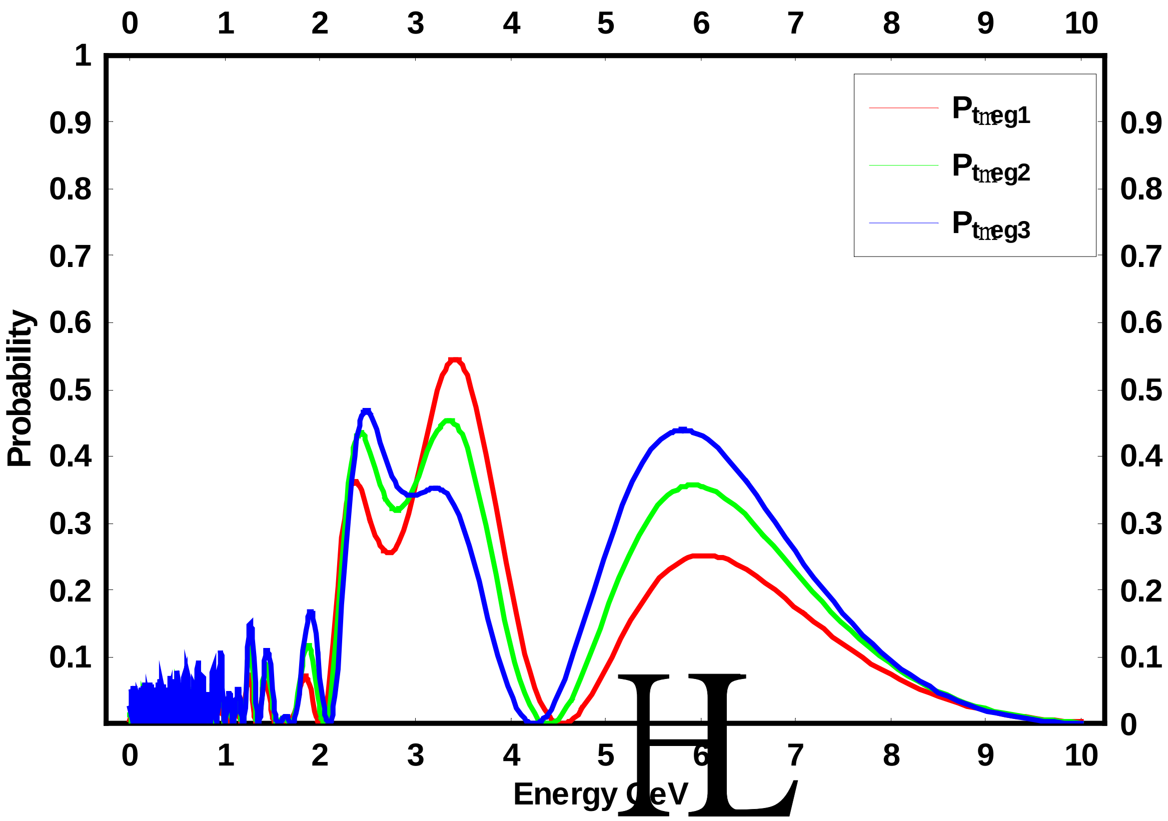


圖十六：e微中子的機率函數分佈圖形，圖中含有不同的Nadir角 θ_n 曲線。

[4] $\theta_n=0^0$的圖形裡，中央波峰最高的現象並非永遠存在，您只要以不同的混合角畫圖便不會有這個現象，反而可能變成干涉波峰最高。



圖十七：e 微中子的機率函數分佈圖形，圖中含有不同的本徵值曲線。



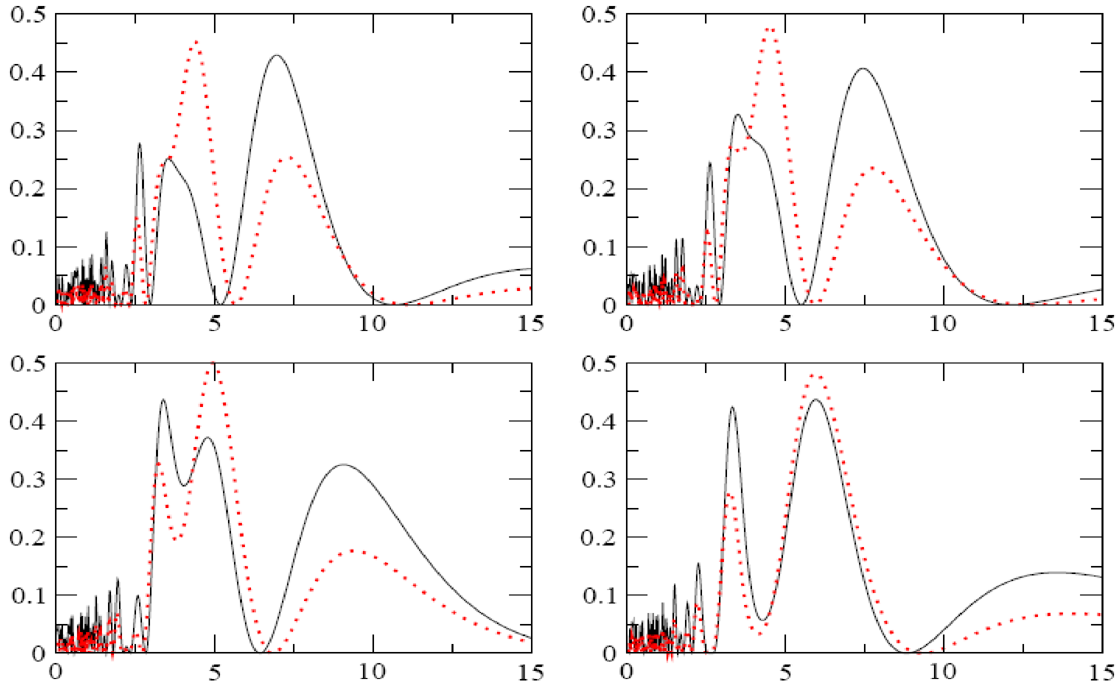
圖十八：e 微中子的機率函數分佈圖形，圖中含有不同的混合角曲線

圖十八則是改變 3 個不同的混合角的e微中子機率曲線。基本上這個圖形我們沒有比較好的解釋，唯一的想法就是相位上的變化而已，因爲它的波形似乎類似駐波，有些固定點(節點)完全未動，只有中間的波形上下起伏變化而已。雖然θ_{13}的值域不大，不過您依然可以從圖形中清楚地見到相位的改變對波形的影響，尤其是在 2~4 GeV內干涉波峰與極值波峰的消長情形。隨著θ_{13}的值從 0^0增加到 30^0時干涉的效應似乎一直在變小。而且我們預測如果θ_{13}的值域範圍能夠再大一些，也許這個現象會一直循環也說不定，因爲那就是三角函數的週期行爲。另外,比較圖十一也可以發現,多層密度的圖形也對此參數的變化較敏感些.

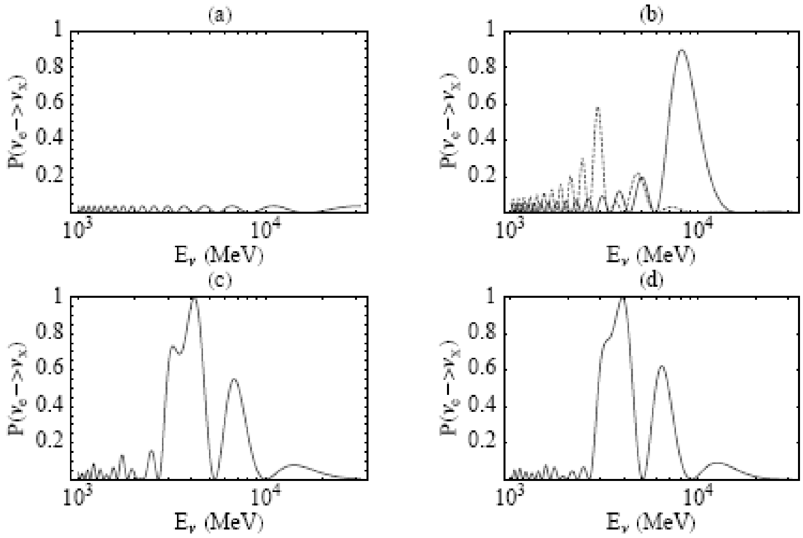
本章最後我們截取相關文獻的圖形，與我們的結果作比較。下頁圖十九爲 4 種不同的 Nadir 角的比較圖形，每張圖中並列出不同的比較對象。圖中的比較對象爲 $P(v_e \to v_\mu)$ 的圖形，其結果大致上符合於我們之前對 Nadir 角及混合角的分析(比較之前的圖形)。

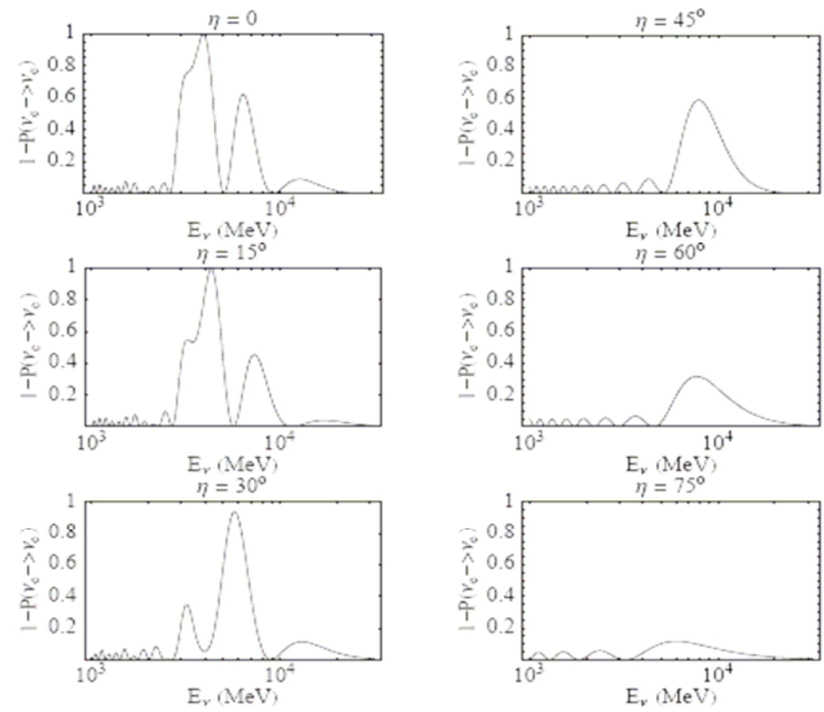
圖二十中其上圖爲以不同的密度的方法來計算 $P(v_e \to v_x)$，其中x爲 μ 和 τ 的總和。我們比較注意的是(c)與(d)分別爲以前面所說的Stacey的模型與真實的地球密度比較，可以從圖中發現其實兩者的差別並不大。這表示其實我們不需要太去擔心這樣的密度模擬模型的誤差問題，也就是說我們前面所算的結果是可靠的。另外下圖則是不同的Nadir角下的$1-P(v_e \to v_e)$的圖形，左邊的圖形θ_n小於 33.1^0，表示同時穿越地幔與地核，所以圖形明顯見到 2 個或 3 個波峰。θ_n增加時圖形的變化也符合我們前面的解釋。右邊的圖形θ_n則大於 33.1^0，也就是說僅穿越地幔，所以圖形僅有單一個波峰，另外其峰值也隨著基準線變短而逐漸減小。

本章的討論就到此爲止,當然這樣的分析以最專業的角度來說也許稍嫌簡單了一點，因爲只討論單一變數。可是我們配合了不同參數的變化，瞭解圖形的趨向，也多少能預測到一些可能發生的情況，以及它們在物理意義上的角色。



圖十九: 取自[40].此為在不同Nadir角下的機率圖形。每張圖的上左，上右至下左，下右依序為$\theta_n=0^0$，13^0，23^0，30^0的圖形，且Δ_{31}均為3.2×10^{-3} $(eV)^2$，θ_{23}則均為45^0。每張圖中所繪的兩條曲線為$P_{\mu e}$的圖形，其中實線為$\sin^2 2\theta_{13}=0.1$，虛線為$\sin^2 2\theta_{13}=0.05$的圖形。





圖二十： 取自[41]. (上圖)為$P_{\mu x}$在不同的密度模型下的圖形，其中x=μ 或 τ 。(a)是真空中，(b)是在純地幔與地核中，(c)是Stacey的近似模型，(d)是以數值計算後的真實地球密度的圖形。

(下圖)為 1-P_{ee}在不同Nadir角下的機率圖形。η 即Nadir角 θ_n，其值標示於圖的上方。左邊 3 張圖的 θ_n值為同時穿越地幔與地核，右邊 3 張圖則僅穿越地幔。

預設參數為： $\Delta_{31}=3.2\times10^{-3}\,(eV)^2$， $\theta_{23}=45^0$， $\theta_{13}=5.73^0$