附錄一 如何對角化推演算符矩陣

在第三章中我們提過要將(3-8)式的矩陣做對角化，在此將其詳細的過程交待如下。

首先於(3-8)式的矩陣中，去除爲零的無關元素，即第二行與第二列後，令剩餘的二階矩陣爲 P_e^m：

$$P_e^m = \begin{pmatrix} \Delta_{31}\sin^2\theta_{13} + A_e^m & \Delta_{31}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13} \\ \Delta_{31}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13} & \Delta_{31}\cos^2\theta_{13} \end{pmatrix} \tag{A-1}$$

由於 P_e^m 本身是實對稱的方形矩陣，依數學上線性代數的理論它必定可以被對角化，而且爲歸一對等，意即其對角化的過渡矩陣爲一正交矩陣。故我們可以直接假設它被對角化後的情形如下：

$$P_e^m = U_{13}^m \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (U_{13}^m)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13}^m & \sin\theta_{13}^m \\ -\sin\theta_{13}^m & \cos\theta_{13}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{13}^m & -\sin\theta_{13}^m \\ \sin\theta_{13}^m & \cos\theta_{13}^m \end{pmatrix} \tag{A-2}$$

其中的 U_{13}^m 即爲正交的過渡矩陣，而 λ_{12} 爲以下本徵方程式的本徵值：

$$\left| P_e^m - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} \Delta_{31}\sin^2\theta_{13} + A_e^m - \lambda & \Delta_{31}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13} \\ \Delta_{31}\sin\theta_{13}\cos\theta_{13} & \Delta_{31}\cos^2\theta_{13} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{A-3}$$

根據此式可解出：

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_{31} + A_e^m - \Delta_{31}^m}{2} \equiv (m_{13})^2 \qquad \Delta_{31}^m \equiv \sqrt{(\Delta_{31}\sin 2\theta_{13})^2 + (A_e^m - \Delta_{31}\cos 2\theta_{13})^2} = (M_{13})^2 - (m_{13})^2$$

$$\lambda_2 = \frac{\Delta_{31} + A_e^m + \Delta_{31}^m}{2} \equiv (M_{13})^2$$

(A-4)

本徵值求出之後，剩下的重點就是求出過渡矩陣。我們利用 λ_1 的本徵方程式：

$$P_e^m \begin{bmatrix} \cos\theta_{13}^m \\ -\sin\theta_{13}^m \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \cos\theta_{13}^m \\ -\sin\theta_{13}^m \end{bmatrix} \Rightarrow (P - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} \cos\theta_{13}^m \\ -\sin\theta_{13}^m \end{bmatrix} = 0 \tag{A-5}$$

代入相關的數值後可得到以下的聯立方程式：

$$\begin{bmatrix} -\Delta_{31}\cos 2\theta_{13} + A_e^m + \Delta_{31}^m & \Delta_{31}\sin 2\theta_{13} \\ \Delta_{31}\sin 2\theta_{13} & \Delta_{31}\cos 2\theta_{13} - A_e^m + \Delta_{31}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{13}^m \\ -\sin\theta_{13}^m \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(A-6)}$$

不過其實我們只需要解其中一條方程式即，因爲本徵方程式的兩式是非獨立的。我們可以先定義以下符號以簡化後面的計算：

$$\begin{cases} x \equiv A_e^m - \Delta_{31}\cos 2\theta_{13} \\ y \equiv \Delta_{31}\sin 2\theta_{13} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{31}^m = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(A-7)}$$

在此 y＞0，將(A-7)代入(A-6)的第一式可解得：

$$\begin{aligned} \cos^2\theta_{13}^m &= \frac{y^2}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2 + y^2} \\ \sin^2\theta_{13}^m &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2 + y^2} \end{aligned} \qquad \text{(A-8)}$$

注意(A-8)式的分母可再化簡爲：

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \qquad \text{(A-9)}$$

最後由(A-8)式可得以下結果：

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_{13}^m &= \cos^2\theta_{13}^m - \sin^2\theta_{13}^m = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-A_e^m + \Delta_{31}\cos 2\theta_{13}}{\Delta_{31}^m} \\ \sin 2\theta_{13}^m &= 2\cos\theta_{13}^m \sin\theta_{13}^m = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\Delta_{31}\sin 2\theta_{13}}{\Delta_{31}^m} \end{aligned} \qquad \text{(A-10)}$$

其中我們取 $\sin 2\theta_{13}^m > 0$，而以上全部就是(3-8)式的結果。

假如於(A-4)式中，λ_{12}兩者的命名對調，則在(A-8)式您會得到不一樣的參數定義，而且所算出來的 $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ 的尾數項也相應不同，但(A-10)式仍然不變。可是您若將所有參數的定義都代回，其實最後也會發現 $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ 無論用哪種定義結果都相同。所以您無需去擔心太多關於定義不同的問題。