附錄二 如何計算推演算符矩陣的乘積

在(4-4)式我們定義了總演進算符，其為 3 個演進算符依"地幔演進算符、地核演進算符、地幔演進算符"的乘積，並在(4-5)式列出了它的計算結果。當然您最基本的可以直接將它們 3 者相乘，然後整理而出(4-5)與(4-6)式的結果。不過若是那樣的話，您最好有電腦來幫忙，否則將是工程浩大的工作。但是，對於這類單式矩陣的乘積，數學上有個處理技巧，我們將它詳細的處理過程列舉如下。這一部分的內容主要是從[40]獲得的相關資訊，然後自行加入並整理出較明確的計算過程。

由於直接相乘不好計算，所以我們得將單一個演進算符做點變型。在(4-3)式中，以地幔演進算符為例，首先將所有的角度化成二倍角:

$$
\begin{aligned}
U_e^m &\equiv U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos^2\theta_{13}^m) + (\sin^2\theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} & 0 & -\cos\theta_{13}^m \sin\theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\ -\cos\theta_{13}^m \sin\theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) & 0 & (\sin^2\theta_{13}^m) + (\cos^2\theta_{13}^m) e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2\theta_{13}^m}{2} + \frac{1-\cos 2\theta_{13}^m}{2} e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) & 0 & \frac{1-\cos 2\theta_{13}^m}{2} + \frac{1+\cos 2\theta_{13}^m}{2} e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

接著利用以下公式，並將共同的相位提出來。但是由於我們先前一再重覆地強調過，提到矩陣以外的相位由於不會影響到機率的計算，所以我們在算式中就乾脆也不把它們寫出來，而直接令提出相位前後的兩個矩陣相等，在此請各位

讀者務必要注意一下。

$$
\begin{aligned}
1+e^{-ix} &= 2\cos(\frac{x}{2})e^{-i\frac{x}{2}} \\
1-e^{-ix} &= 2i\sin(\frac{x}{2})e^{-i\frac{x}{2}}
\end{aligned}
\qquad x=\frac{\Delta_{31}^{m}}{2E}L^{m} \tag{B-1}
$$

之後的情勢便形成:

$$
U_e^m=\begin{pmatrix}
\frac{1+\cos 2\theta_{13}^m}{2}+\frac{1-\cos 2\theta_{13}^m}{2}e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m} & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m(1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) \\
0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\
-\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m(1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) & 0 & \frac{1-\cos 2\theta_{13}^m}{2}+\frac{1+\cos 2\theta_{13}^m}{2}e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\frac{1+e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}}{2}+\frac{1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}}{2}\cos 2\theta_{13}^m & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m(1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) \\
0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\
-\frac{1}{2}\sin 2\theta_{13}^m(1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}) & 0 & \frac{1+e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}}{2}-\frac{1-e^{-i\frac{\Delta_{31}^m}{2E}L^m}}{2}\cos 2\theta_{13}^m
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\cos(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m)+i(\cos 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) & 0 & -i(\sin 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) \\
0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2+(M_{13}^m)^2}{4E}L^m} & 0 \\
-i(\sin 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) & 0 & \cos(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m)-i(\cos 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m)
\end{pmatrix}
$$

您可以很容易觀察到，第二列的非零相位是獨立運算的，它在相乘時並不會與其他的元素混合，意即在總演進算符中這一項只是簡單的純數乘積。所以 3 個演進算符乘起來時，就有 2 個地幔項(係數爲 2)，及 1 個地核項(係數爲 1)，彼此的相位相加，最後所得到的也就是(4-5)與(4-6)式所列出來的結果。

然後我們要計算其他有牽涉到混合的項時，先去除無關混合的第二行第二列的元素，令剩餘的二階矩陣爲 Q_e^m。而根據複變函數及線性代數的理論(讀者請自行查詢相關書籍)，Q_e^m 可用二階 Pauli 矩陣作展開:

$$Q_e^m = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) + i(\cos 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) & -i(\sin 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) \\ -i(\sin 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) & \cos(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) - i(\cos 2\theta_{13}^m)\sin(\frac{\Delta_{31}^m}{4E}L^m) \end{pmatrix}$$

$$= \exp[-i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\varphi^m] = \cos(\varphi^m) - i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\sin(\varphi^m)$$

(B-2)

其中的 $\hat{n}_{13}^m = (\sin 2\theta_{13}^m, 0, -\cos 2\theta_{13}^m)$，為一單位向量，而 φ^m 已在(4-7)式定義。至於 Pauli 矩陣的定義相信您在很多量子力學的書籍都可以查的到：

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \hat{i} + \sigma_2 \hat{j} + \sigma_3 \hat{k}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B-3}$$

(B-2)式末尾的指數函數展開過程只需依其泰勒展開式一項項展開便可整理出此結果，在此不再贅述，或者您也可以參考量子場論的書籍，其內容有很多用到這類的計算。

剩下的過程大致明朗，您只要耐心地把 3 個二階矩陣乘出來即可：

$$\begin{pmatrix} \alpha - i\beta & -i\gamma \\ -i\gamma & a + i\beta \end{pmatrix} = Q_e^m Q_e^c Q_e^m$$

$$= \exp[-i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\varphi^m]\exp[-i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^c)\varphi^c]\exp[-i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\varphi^m]$$

$$= [\cos(\varphi^m) - i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\sin(\varphi^m)][\cos(\varphi^c) - i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^c)\sin(\varphi^c)]$$

$$[\cos(\varphi^m) - i(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^m)\sin(\varphi^m)]$$

(B-4)

雖然算起來還是有點麻煩，但已經是比一開始簡化許多。在計算時，提供您一個好用的 Pauli 矩陣展開公式：

$$(\vec{\sigma} \bullet \hat{a})(\vec{\sigma} \bullet \hat{b}) = \hat{a} \bullet \hat{b} + i\vec{\sigma} \bullet (\hat{a} \times \hat{b}) \tag{B-5}$$

其中 $\hat{a}$ 與 $\hat{b}$ 為兩單位向量。而且由下面的表示式：

$$\hat{n}_{13}^{m} \bullet \hat{n}_{13}^{c} = \sin 2\theta_{13}^{m} \sin 2\theta_{13}^{c} + \cos 2\theta_{13}^{m} \cos 2\theta_{13}^{c} = \cos(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m}) \qquad \text{(B-6)}$$

配合(B-5)與(B-6)我們可得：

$$(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^{m})(\vec{\sigma} \bullet \hat{n}_{13}^{c}) = \cos(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m}) + i\,\vec{\sigma} \bullet (\hat{n}_{13}^{m} \times \hat{n}_{13}^{c}) \qquad \text{(B-7)}$$

當您在計算(B-4)式時，只會留下前面的 $\cos(2\theta_{13}^{c} - 2\theta_{13}^{m})$ 項，後面的外積項無需再作展開，因爲最後它們都會互相抵消。