

第二章 微中子在真空中的振盪

本章我們開始討論微中子的振盪，以量子力學為基礎，做詳細的推導。一開始我們先討論在真空的情況，下一章則會加入物質效應。有關這部分較深入的理論，建議也可以參考[16]或[17]。

2.1 微中子傳播的本徵態與薛丁格爾方程式

首先承繼我們前一章的說明，先定義出微中子的兩種本徵態，以及它們的轉換關係：

$$\text{質量本徵態: } \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad \text{弱作用本徵態: } \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

兩態間的歸一化(Unitary)轉換關係為：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = U_{23} U_{13} U_{12} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$


$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \quad U_{13} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \quad U_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2-1)

在此 U_{23} ， U_{13} 及 U_{12} 是分別屬於本徵態內不同元素間的轉換，這種關係猶如數學上三度空間的旋轉；而 $U=U_{23}U_{13}U_{12}$ ¹則是考慮各種方向的總轉換(旋轉)。 U_{ij} 一般稱為"混合矩陣(mixing matrix)"， θ_{ij} 則稱為"混合角(mixing angle)"。

接著我們導入量子力學的計算。前一章說過，薛丁格爾方程式(Schrödinger Equation)必須作用在質量本徵態上。但在此我們得加入相對論的背景。這是由於微中子的質量非常微小，所以根據相對論的原理，其運動速度是非常快速的；或者說，非常接近於光速。因此由愛因斯坦(Einstein)的質能轉換式，其能量(E)，動量(P)與質量(m)三者的關係在此前提下可進一步地將其化簡成爲：

¹在正式的物理模型中理論上應該還要考慮CP Violation的因子 δ ，它會被摻入U的元素內，並形成另一個參數。這項因子尤其在考慮反微中子的振盪時特別重要。但我們在此皆不討論。

$$E^2 = P^2 + m^2 \Rightarrow E = P \left(1 + \frac{m^2}{P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx P + \frac{m^2}{2P} \quad (2-2)$$

在此我們採用高能物理的慣用單位(即 $c=1$)，因此在高速運動下能量與動量可約略相等，即 $E \approx P$ 。接著我們將量子力學中，能量的算符(operator)代入左式，並注意在高能物理的單位下，運動距離和時間是同樣單位的，因為速度本身沒有被規定單位;也就是說， $r \approx ct = t$ 。因此我們便得到微中子運行的薛丁格爾方程式：

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \approx i \frac{\partial}{\partial r} \quad E \approx P$$

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \left[E + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

$$\Rightarrow i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_{21} &\equiv m_2^2 - m_1^2 \\ \Delta_{31} &\equiv m_3^2 - m_1^2 \end{aligned}$$

最後這個式子是我們在前一式中同減去 E 及 m_1^2 的單位方陣的結果²。利用這個表示式，我們便可以用來計算不同態間的轉換機率。

有一點需要強調的是：目前為止的計算我們都只考慮到自由運動下的微中子。也就是說其薛丁格爾方程式中並沒有任何位能項，這是只有當微中子在真空中運動時才能成立。可是當在物質中時，週邊的粒子會對穿越而過的微中子產生交互作用(特別是物質的密度很大的時候)，此時其位能項便不能忽略。這將是我們下一章的重點。

最後要說的是，到目前為止的計算我們總共看到了 5 個參數： Δ_{21} 、 Δ_{31} 、 θ_{12} 、 θ_{13} 及 θ_{23} 。雖然它們基本上都是常數，但比較實際的問題是，以現代的實驗方法，一般都是利用理論預測的結果，先測量出這些結果的實際數值後，倒過來推算這些參數的值。例如本文的目的是計算微中子的振盪機率，實驗上便可以利用所實測出來的機率，代回本文所推導出來的機率表示式，倒推出符合的參數值。當然在此只是舉例，實際上用這種方式來測量參數最多的是太陽及

²這樣的運算並不會影響到我們後面計算機率，因為它只是改變本徵態的共同相位(phase)，但因為機率是根據絕對值的平方來衡量—而共同相位的絕對值平方必為 1。

大氣微中子的實驗[17, 27]。可是由於實驗本身有不可忽略的誤差，所以一般只能量出它們的範圍值(即允許的誤差範圍)，而且這些範圍值隨著實驗方法及年代的不同，常常有很大的出入。所以讀者在取這些數據時，務必要以最新出版且公認的數值為準。不過，自從Super-K證實了微中子的質量及振盪現象以後，陸續有不少團體投入了這方面的研究，實驗的方法也不斷改良。到現在為止， Δ_{21} ， θ_{12} 及 θ_{23} 的範圍是已經比較確定的了，而 Δ_{31} 跟 θ_{13} 仍屬較難掌握，甚至現在還較難證實 Δ_{31} 是否恆為正數。為了往後的計算有一個標準，我們採用了[17, 25, 47~54]等文章的數據，互相比較後，取出一個比較合理的範圍，並統一將結果整理成下表(大致上同[18]所採用的)。

表一：各項參數的範圍值

項目	範圍值
$\Delta_{21}=m_2^2-m_1^2$	$7.40\times 10^{-5} < \Delta_{21}/(\text{eV})^2 < 9.20\times 10^{-5}$
$\Delta_{31}=m_3^2-m_1^2$	$1.90\times 10^{-3} < \Delta_{31}/(\text{eV})^2 < 3.00\times 10^{-3}$
θ_{12}	$0.28 < \tan^2 \theta_{12} < 0.58$
θ_{13}	$0 < \sin^2 2\theta_{13} < 0.10$
θ_{23}	$\sin^2 2\theta_{23} > 0.92$

讀者可以約略記這樣的範圍： θ_{12} 介於 $27^\circ\sim 37^\circ$ 間， θ_{23} 則介於 $37^\circ\sim 53^\circ$ 間，另外 θ_{13} 則不超過 10° 。在高能單位下， Δ_{31} 約是 $10^{-3}(\text{eV})^2$ 左右， Δ_{21} 則接近 $10^{-4}(\text{eV})^2$ ，兩者約差距20~40倍左右。表中的 Δ_{31} 僅列出其絕對值，因為它的值可能是負的。

2.2 二態傳播的振盪機率

(2-3)式是一個簡單的對角化方陣方程式，故我們可以直接將其解出，並且將弱作用本徵態導入式中：

$$U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} \quad (2-4)$$

這是一般薛丁格爾方程式微分型式的解，現在假設我們先不考慮 U_{13} 的效應，並且將 U_{23} 合併乘入原來的本徵態中，從而定義出一個新的本徵態(我們暫時先不

對它命名)³：

$$U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \nu_- &= \cos \theta_{23} \nu_\mu - \sin \theta_{23} \nu_\tau \\ \nu_+ &= \sin \theta_{23} \nu_\mu + \cos \theta_{23} \nu_\tau \end{aligned} \quad (2-5)$$

這樣的作法是將 μ 跟 τ 微中子重新混合，但保持 e 微中子不變。由此我們可得：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_r = U_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} U_{12}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{12} + \sin^2 \theta_{12} e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & -\cos \theta_{12} \sin \theta_{12} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r}) & 0 \\ -\cos \theta_{12} \sin \theta_{12} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r}) & \sin^2 \theta_{12} + \cos^2 \theta_{12} e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0} \quad (2-6)$$

到了這裡我們便可以開始計算機率，而且在此式中 ν_+ 並未實際參與振盪，主要是 ν_e 和 ν_- 間的互相混合。首先我們考慮，當一個 e 微中子從 $r=0$ 處運動至 r 處時，它被偵測到的機率。根據量子力學可得：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \langle \nu_e(r) | \nu_e(r=0) \rangle$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{12} + \sin^2 \theta_{12} e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & -\cos \theta_{12} \sin \theta_{12} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r}) & 0 \\ -\cos \theta_{12} \sin \theta_{12} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r}) & \sin^2 \theta_{12} + \cos^2 \theta_{12} e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \cos^2 \theta_{12} + \sin^2 \theta_{12} e^{-i\frac{\Delta_{21}}{2E}r} \right|^2 = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \frac{1 - \cos(\frac{\Delta_{21}}{2E}r)}{2} = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{21}}{4E}r \right)$$

³這樣的定義通常是在只計算 ν_e 的機率時所用，某些作者只計算 ν_e 跟非 ν_e 的互相轉換。這樣的計算通常是用在研究太陽微中子時，因為此時以 e 微中子為主(可參考[12]中的太陽內部核熔合的pp循環圖)。而討論到大氣微中子時，由於宇宙射線與大氣層的作用會產生許多 μ 跟 τ 微中子，所以此時便會將 U_{23} 還原到原本微態作計算。

(2-7)

由此可知機率跟混合角 θ_{12} ，距離 r 及微中子的能量 E 有關。在 高能實驗的度量尺寸下，通常微中子的能量是以 GeV 為計算基準⁴，而距離則是以 Km 為基本單位。為了使整個物理振盪的模型有一個清楚的表象，我們定義所謂的"振盪波長 (Oscillation Length)"為[12, 16]:

$$\lambda_{12} \frac{\Delta_{21}}{2E} = 2\pi \Rightarrow \lambda_{12} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta_{21}} = 2.48(\text{Km}) \times \frac{E}{(\text{GeV})} \times \frac{(\text{eV})^2}{\Delta_{21}} \quad (2-8)$$

下標"12"代表現在只考慮 Δ_{21} 及 θ_{12} 的振盪效應。而右邊則是實際將數值代入後所算出的值(能量是 GeV ， Δ_{21} 是 $(\text{eV})^2$ 的單位)⁵。將它代回(2-7)式可得到:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{21}}{4E} r \right) = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_{12}} r \right) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta_{21}}{E} r \right) \end{aligned} \quad (2-9)$$

依一般波動的觀點來看 λ_{12} 便是振盪一週期的長度。實驗上若我們所採取的適當距離約為這個波長的相當尺寸時，便能夠測量到明顯的振盪現象，我們一般通稱這段裝置的適當距離為"基準線長(baseline length)"。換言之，基準線長需至少等於振盪波長，則此實驗才會有效；也就是說，可以測量到機率從小到大的明顯的起伏現象。為了估計其大小，我們將微中子的能量代表性地以 1 GeV 來算， Δ_{21} 則採用上限值 $7.40 \times 10^{-5} (\text{eV})^2$ ，代入(2-8)式便得到 λ_{12} 約為 33513 Km —這已經超過了兩倍的地球直徑(地球半徑= 6371 Km)，更不用說能量更高的情況(λ_{12} 和能量成正比)。換句話說要在陸地上測量 ν_e 微中子的振盪現象是不可能的，因為根本無法設計出如此長距離的裝置!

不過別忘記，我們一開始是忽略了 U_{13} 及 θ_{13} 的效應。如果加入這項考慮的話，由於先前提過 Δ_{31} 約比 Δ_{21} 大 $20 \sim 40$ 倍左右，而振盪波長本身和 Δ_{31} 成反比；因為振盪波長的大幅縮短，故我們可以預期 U_{13} 的振盪效應一定比較明顯，實驗也應該是可以測量到的(當然前題是 θ_{13} 也不能太小)—於是在此情形下， U_{12} 的效應已經顯得不這麼重要。換句話說，我們可以從根本上直接忽略掉 U_{12} 的效應，只要考慮 U_{13} 的混合即可。故在這樣的前提下，我們可以在(2-3)式中

⁴ GeV 為一般粒子加速器可產生的能量，同時 Super-K 的實驗可以測到的大氣微中子的能量也差不多屬於這一能級。至於如何偵測 TeV 或更高能量的大氣微中子可參閱[19]。

⁵ 特別注意當您要計算這個值時，必需還原到原來的一般單位去計算(即 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)，包括薛丁格爾方程式內算符的單位 \hbar 。

取 $\Delta_{21} \rightarrow 0$ 的極限，也就是略過 U_{12} 的部分，並重新考慮 U_{13} 及 θ_{13} 加入方程式中，然後使用之前解方程式完全一樣的方法，再次得到以下類似的結果：

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} &= U_{13} U_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U_{12}^{-1} U_{13}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} \\
 &= U_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U_{13}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_r &= U_{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \frac{\Delta_{31}}{2E} r} \end{pmatrix} U_{13}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_- \\ \nu_+ \end{pmatrix}_{r=0}
 \end{aligned} \tag{2-10}$$

這樣的結果與先前類似，只不過原先有的下標"12"的部分都被"13"取代了，而這次則變成 ν_- 被孤立而未實際參與振盪。這樣所算出來的機率型式基本上與先前的一樣：

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{31}}{4E} r \right) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_{13}} r \right) \\
 &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r \right)
 \end{aligned} \tag{2-11}$$

振盪波長則變為：

$$\lambda_{13} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta_{31}} = 2.48(\text{Km}) \times \frac{E}{(\text{GeV})} \times \frac{(\text{eV})^2}{\Delta_{31}} \tag{2-12}$$

同樣代入 $E=1 \text{ GeV}$ ，並適當取 $\Delta_{31}=2.4 \times 10^{-3} (\text{eV})^2$ ，可得 λ_{13} 約為 1033 Km —這樣的距離比較起來已經短得多，而且在陸地上的實驗的確是有可能做到的(只是實驗裝置可能需要跨越海洋)。通常對於如此長距離的實驗，我們統稱為"長基準線實驗(Long Baseline Experiment; 簡寫LBL experiment)"[20~25]。

2.3 三態傳播的振盪機率

現在我們接續(2-10)式，並將(2-5)式的弱作用本徵態還原，由此便可以討論關於 μ 跟 τ 微中子的機率問題。將(2-10)式中的 U_{13} 與 U_{13}^{-1} 展開並乘入矩陣中(未來我們會把這個完整的矩陣重新命名並賦予其物理意義)，並把 U_{23} 都移到等號

的右邊，於是可得：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_r = U_{23} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} & 0 & -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) & 0 & \sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{r=0} \quad (2-13)$$

在此計算 $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ 的機率結果與前節相同，因 e 微中子的部分不受影響。我們主要目的是計算 e 微中子轉變到其他類型微中子的機率。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \langle \nu_\mu(r) | \nu_e(r=0) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} & 0 & -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) & 0 & \sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) \right|^2 = \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r \right) \end{aligned} \quad (2-14)$$

同理可得：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) = \langle \nu_\tau(r) | \nu_e(r=0) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{23} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} & 0 & -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) & 0 & \sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}r}{2E}}) \right|^2 = \sin^2 2\theta_{13} \cos^2 \theta_{23} \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r \right) \end{aligned} \quad (2-15)$$

當然，三者的總和必為 1：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) + P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) + P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) = 1 \quad (2-16)$$

這無論您是從量子力學或一般數學上的角度來說都是顯而易見的事實。所以我們可以得到以下的結論：

設 \mathbf{a} 為某一類別的微中子，則

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_e) + P(\nu_a \rightarrow \nu_\mu) + P(\nu_a \rightarrow \nu_\tau) = 1 \quad (2-17)$$

另外我們也寫下 μ 微中子振盪的機率：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= \langle \nu_e(r) | \nu_\mu(r=0) \rangle \\ &= \left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} & 0 & -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r}) & 0 & \sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13} e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r} \end{pmatrix} U_{23}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{13} \sin \theta_{13} (1 - e^{-i\frac{\Delta_{31}}{2E}r}) \right|^2 = \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r) = P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \end{aligned} \quad (2-18)$$

在此我們又得到另一個結論：

設 \mathbf{a} ， \mathbf{b} 為某二類別的微中子，則

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = P(\nu_b \rightarrow \nu_a) \quad (2-19)$$

要證明這個式子也不難，基本上它就是單氏矩陣的性質而已⁶。同樣的方式您可以算出剩餘的兩個表示式：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{13}) \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r) \quad (2-20)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 (1.27 \frac{\Delta_{31}}{E} r) \quad (2-21)$$

您也可以自行驗證：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) + P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) + P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 1 \quad (2-22)$$

至於 τ 微中子的振盪機率我們就不再列出，讀者用同樣的方法均可算出。但其實利用(2-17)與(2-19)式，也可以直接全部推導出來。所以一般我們不太去討論 τ 微中子的機率。

最後，我們要強調一點：因為本文重點就是計算微中子的振盪機率，所以以上我們計算的方法都是出自於正規的量子力學。這些過程其實可以統一地歸納起來，整理成一個比較簡潔的公式，以後您要快速算得這些機率值，只要將物

⁶但若有CP Violation的因子 δ 存在，則此性質就不一定成立了。

理量代入公式即可。在此我們不詳細討論這條公式，您可參閱[21，26](它稍微修正後也可以用於物質內的振盪機率)。不過，當我們在第四章討論微中子穿透地球時，由於有不同的物質密度，這個公式便無法再使用了!

