

國立交通大學

物理研究所

碩 士 論 文

高能微中子簇射模擬



Simulations of showers arising from high energy neutrinos.

研 究 生：洪瑜隆

指 導 教 授：林貴林 教授

中 華 民 國 九 十 五 年 六 月

高能微中子簇射模擬

Simulations of showers arising from high energy neutrinos.

研究生：洪瑜隆

Student : Yu-Lung Hung

指導教授：林貴林

Advisor : Dr. Guey-Lin Lin



A Thesis
Submitted to Institute of Physics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Institute of Physics

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

高能微中子簇射模擬

學生：洪瑜隆

指導教授：林貴林

國立交通大學物理研究所碩士班

摘 要

本文主要探討由三種高能微中子，GZK 微中子 (Greisen-Zatsepin-Kuzmin neutrinos)，AGN 活躍星系核微中子 (Active Galactic Nuclei neutrinos) 以及 GRB 微中子 (Gamma Ray Burst neutrinos) 來源的微中子所引發簇射(Shower)現象，討論偵測器主要測量能量區域以及主要偵測的方位，還有如何區分不同的微中子訊號來源。本文也對蒙地卡羅方法在高能微中子的運用有所研究，這裡模擬的偵測區域 DSR(Detector Sensitivity Region)，其幾何形狀為一球形，球心設置在地底下半徑六公里深處，球半徑為一公里，DSR 內介質分岩鹽(rock-salt)，和水這兩種不同介質，進行高能微中子引發簇射的模擬，DSR 外部的仍依照地球標準模型決定密度。

Simulations of showers arising from high energy neutrinos.

student : Yu-Lung Hung

Advisors : Dr. **Guey-Lin Lin**

Institute of Physics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This essay is about the Shower phenomenon caused by Greisen-Zatsepin-Kuzmin neutrinos, Active Galactic Nuclei neutrinos and Gamma Ray Burst neutrinos. It presents the main energy area measured and directions detected by the detector and tell different message sources apart. Also, the application of Monte-carlo method to high-energy neutrinos is researched. The simulated DSR(Detector Sensitivity Region) is sphere-shaped, the center of which is located 6 kilometers under the ground. Its radius is one kilometer and gets rock-salt and water as two mediums for simulation of Shower phenomenon caused by high energy neutrinos. Also, outside of the DSR is based on standard density of the earth.

誌 謝

首先，我要感謝我的指導教授林貴林老師以及黃明輝老師，在碩士班研究生涯中，不厭其煩地指導我，不論是專業知識的培養，或是做研究的態度和處理問題的方法，都讓我獲益良多。其次，也要感謝容震軒學長長期指導與協助，還有高文芳教授撥冗擔任我的口試委員，給我許多寶貴的意見。

接下來要感謝我的父母，各方面的支柱我，讓我沒有後顧之憂，才能夠讓我實現我的目標和理想。

論文能夠完成，要感謝交大物理所的學長姊時常的幫助，感謝宗哲，鳳吟，昆憲，邦杰的指導協助，更要感謝交大物理 92 級的所有朋友，讓我能夠在平淡的研究生活中添加許多色彩與樂趣，以及學弟妹的歡樂，讓我總是在歡樂中度過，還有長腿美女佳利英文的協助，孟霏的支持，要感謝的人太多的，在這裡一併感謝。



洪瑜隆

國立交通大學

中華民國九十五年八月

目 錄

中文提要		i
英文提要		ii
誌謝		iii
目錄		iv
圖表目錄		v
第一章	微中子物理簡介	1
1.1	認識微中子	1
1.2	高能微中子來源	3
1.2.1	GZK 微中子 (Greisen-Zatsepin-Kuzmin neutrinos)	3
1.2.2	AGN 活躍星系核微中子(Active Galactic Nuclei neutrinos)	4
1.2.3	GRB 微中子 (Gamma Ray Burst neutrinos)	5
1.3	關於模擬	5
第二章	模擬方法	7
2.1	蒙地卡羅法(Monte-carlo method)概念	7
2.2	亂數變數與機率對應	7
2.3	截面積(cross section) σ 與機率(probability) P	8
2.4	由亂數映射(mapping)到機率	8
2.5	期望值(Expectation value)	9
2.6	Poisson 過程	9
2.7	衰變機率	11
2.8	製造三維微中子流量	12
第三章	τ 的產生與能量損失	17
3.1	微中子 CC 與 NC 反應過程	17
3.2	τ Decay	17
3.3	τ 能量損失	19
3.4	數值積分小技巧	20
第四章	結果與討論	22
4.1	τ 射程(Range)的比較與結果	22
4.2	簇射(Shower)	23
4.2.1	角度能量分布	24
4.2.2	角度分布	27
4.2.2.1	角度分布討論	28
4.2.3	能量分布	29
4.2.4	簇射比率分布	31
4.2.4.1	簇射比率分布討論	32
4.2.5	不同來源簇射比例	32
參考文獻		39

圖表目錄

圖 1-1 : β 衰變示意圖	1
圖 1-2: β 衰變電子動能分布圖	2
圖 1-3 : GZK 能譜分布圖	4
圖 1-4 : AGN 能譜分布圖	4
圖 1-5 : GRB 能譜分布圖	5
圖 1-6: 地球密度分布圖與 DSR(Detector Sensitivity Region)位置示意圖	6
圖 2-1 : 微中子 ν 入射 DSR 的示意圖, \bar{N} 爲此切面的法向量	12
圖 2-2 : $x-y$ 平面上與 x 軸夾角數量分佈關係	13
圖 2-3 : 與 DSR 中心最近距離分佈	15
表 3-1: y 範圍與 τ 衰變比例分配	18
圖 3-1 : τ 衰變過程分配圖	18
圖 4-1 : Rock 中 τ 射程(Range)與Reno ^[13] 比較	22
圖 4-2: 四種介質 τ 射程(Range)與能量關係圖	22
表 4-1: 圖的加強說明	23
圖 4-3 : 粒子入射方向與 DSR 示意圖, θ_z 就是入射方向與 z 軸(天頂)的夾角	23
圖 4-4 角度能量與簇射數量的分佈圖 From GZK ν_τ , In Salt DSR	24
圖 4-5 角度能量與簇射數量的分佈圖 From GZK ν_τ , In Water DSR	24
圖 4-6 角度能量與簇射機率的分布圖 From AGN ν_τ , In Salt DSR	25
圖 4-7 角度能量與簇射機率的分布圖 From AGN ν_τ , In Water DSR	25
圖 4-8 角度能量與簇射機率的分布圖 From GRB ν_τ , In Salt DSR	26
圖 4-9 角度能量與簇射機率的分布圖 From GRB ν_τ , In Water DSR	26
圖 4-10 : Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From GZK ν_τ In DSR	27

圖 4-11 : Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From AGN ν_τ In DSR	27
圖 4-12 : Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From GRB ν_τ In DSR	28
圖 4-13 : 總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from GZK ν_τ	29
圖 4-14 : 總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from AGN ν_τ	29
圖 4-15 : 總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from GRB ν_τ	30
圖 4-16 : $\frac{F_\tau^{salt}}{F_\tau^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From GZK ν_τ	31
圖 4-17 : $\frac{F_\tau^{salt}}{F_\tau^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From AGN ν_τ	31
圖 4-18 : $\frac{F_\tau^{salt}}{F_\tau^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From GRB ν_τ	31
圖 4-19 : 由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ	32
圖 4-20 : 由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ	33
圖 4-21 : 由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ	33
圖 4-22 : 由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ	34
圖 4-23 : 由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_τ	34
圖 4-24 : 由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_τ	35
圖 4-25 : 由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_τ	35
圖 4-26 : 由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_τ	36
圖 4-27 : 由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_τ	36
圖 4-28 : 由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_τ	37
圖 4-29 : 由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_τ	37
圖 4-30 : 由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_τ	38

第一章 微中子物理簡介

前言

這浩瀚令人敬畏的宇宙，大約在一百五十億年前由一次大爆炸誕生，在大爆炸後 10^{-43} 時，宇宙的密度高達每立方公分 10^{94} 克，溫度是 10^{32} K。當時原本世界上頃刻出現了大量我們今日知道性質但尚未發現它們有什麼結構的粒子。其中有一類是微中子 (neutrino)，它不帶電，質量極小，與其他粒子的相互作用力極弱。在大爆炸遺留下來的中微子至今充滿整個宇宙，平均每立方公分有三百個左右，就是因為微中子與其他粒子的相互作用力極弱，所以能暢行無阻的將宇宙原始信息帶給我們，而許多激烈的粒子碰撞也都會產生微中子，爲了瞭解內部的情形以及宇宙的秘密，首先就該好好了解微中子，所以測量微中子流量便成爲不可或缺的步驟，而再架設實驗儀器之前，一定要準備周詳，因此模擬測量結果便成爲很重要的事前準備，運用模擬結果，可以架設出有效率的實驗，進而得到微中子最經濟的寶貴信息。如果讀者有興趣多了解高能宇宙射線可以參考文獻^[1, 2, 3]。

1.1 認識微中子

西元 1930 年，奧地利物理學家包力(Pauli)，爲了解釋 β 衰變 (Beta Decay) 結果，提出了微中子的概念，當時物理學家認爲 β 衰變的反應過程爲：

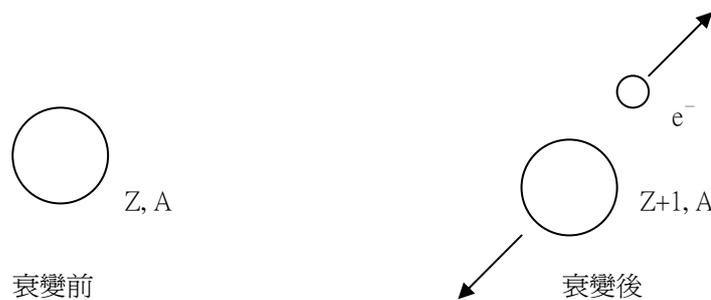


圖 1-1： β 衰變示意圖

圖 1-1 爲 β 衰變示意圖，原本原子序爲 Z ，而原子量爲 A 的核子，轉換成原子序爲 $Z+1$ ，以及原子量爲 A 的核子，並且放出一個電子。如果 β 衰變後有兩個粒子，依據能量守恆、以及動量守恆，衰變後粒子與電子的能量只有一種可能的解，物理學家發現電子的極大動能 T_e^{\max} 正好等於核子的能量差 $(M_{Z+1,A} - M_{Z,A}) c^2$ ，可是實驗上，測量到電子動能不是固定的值，卻是呈現連續分佈的現象(圖 1-2)，於是無法解釋之前所說能量與動量的守恆關係，這個問題在當時成爲一個謎，科

學家甚至還一度想要放棄能量守恆，這個大家早就認定的事實，那麼科學家如何解釋這種現象呢？

爲了解釋這種現象，於是Pauli猜想粒子衰變後不只有兩個粒子，因該有三個或三個以上的粒子產生，這樣電子的動能不用是一個定值，可以解釋電子動能分部關係，因此提出了微中子假設，微中子不帶電，所以不容易與其他物質發生反應，因此測量上沒有直接測量出來，這樣可以很完美的解釋能量、線動量和角動量守恆的問題。如果微中子有質量 M_ν ，則微中子至少可以帶走 $M_\nu c^2$ 的能量，自旋 1/2 的假定是爲了保證角動量守恆。Pauli 認爲 β 衰變中有一個稱爲微中子的粒子產生並放射出來，這粒子的靜止質量近乎零、不帶電荷、自旋爲 1/2，這個學說使得核反應 β 衰變過程中能量的分配和衰變後動量等守恆得以解決。

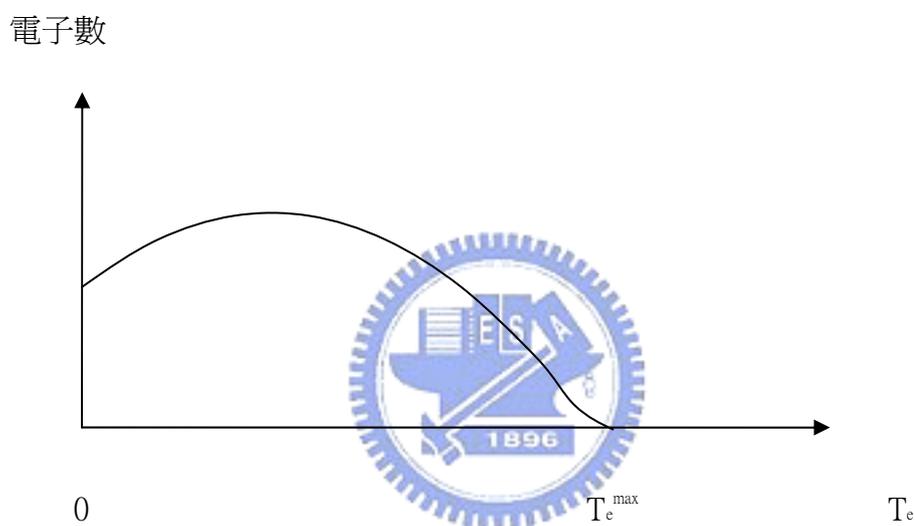


圖 1-2： β 衰變電子動能分布圖

1934 年，費米 (E. Fermi) 建立了 β 衰變理論，並正式將這種中性粒子命名爲微中子。

1956 年，柯溫(C.L.Cowan)和萊茵斯(F.Reines)利用核反應爐產物的 β 衰變產生反中微子，觀測到了微中子誘發的反應^[4]：



利用質子與微中子反應而產生中子以及正子。其中微中子係由核子反應爐裡的 β 衰變所產生，但是微中子－質子的反應截面積在目前能量範圍僅有 10^{-44} cm^2 ，所以實驗上用了大量質子來捕捉微中子。

1962 年，L. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger 及他們的合作者發現了第二類微中子^[5]，這類微中子被命名為渺子微中子 ν_μ (muon neutrino)，是跟著 μ 介子衰變出來的，是有別於 β 衰變中的微中子 ν_e 。

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu & \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

2000 年，美國費米國家實驗室第一次直接觀測到第三類微中子 ν_τ ^[6]。

1968 年，美國物理學家戴維斯(R.Davis)等人在美國南達科他州的Homestake地下金礦中建造了一個大型微中子探測器，通過探測發現，來自太陽的微中子比理論預言減少了 1/3，這就是著名的太陽微中子問題^[7]。

1998 年 6 月 5 日，日本超級神岡探測器^[8](Super-Kamiokande Collaboration)的科學家們宣佈找到了微中子振盪的證據，即微中子在不同「味」(Flavor)之間發生了轉換，這表明微中子的靜止質量不為零。

目前粒子物理學認為自然界中有三種不同的微中子，其自旋為 $\frac{1}{2}$ ，都不帶電荷，分別對應於輕子家族中的三個成員，分別是電子微中子(ν_e)，渺子微中子(ν_μ)和濤子微中子(ν_τ)，並且存在著與微中子對應的反粒子，稱為反微中子，而微中子只有左旋，反微中子只有右旋。微中子僅參與弱相互作用 (weak interaction)，不參與電磁相互作用和強相互作用，因此與普通物質的相互作用非常弱，幾乎可以毫無阻礙地穿過地球，使探測它的存在變得極其困難。

1.2 高能微中子來源

1.2.1 GZK 微中子 (Greisen-Zatsepin-Kuzmin neutrinos)

GZK微中子的來源是由於高能量的原子核或是質子，在宇宙中傳播時與背景輻射產生碰撞損失能量。如果質子能量高於 4×10^{10} GeV 就特別容易與宇宙背景輻射的光子，其能量約 10^{-4} eV，產生 Δ 共振子，然而 Δ 半衰期短，很快就衰變成 π 介子，接著衰變成微中子，能量大約在 10^8 - 10^9 GeV 左右。

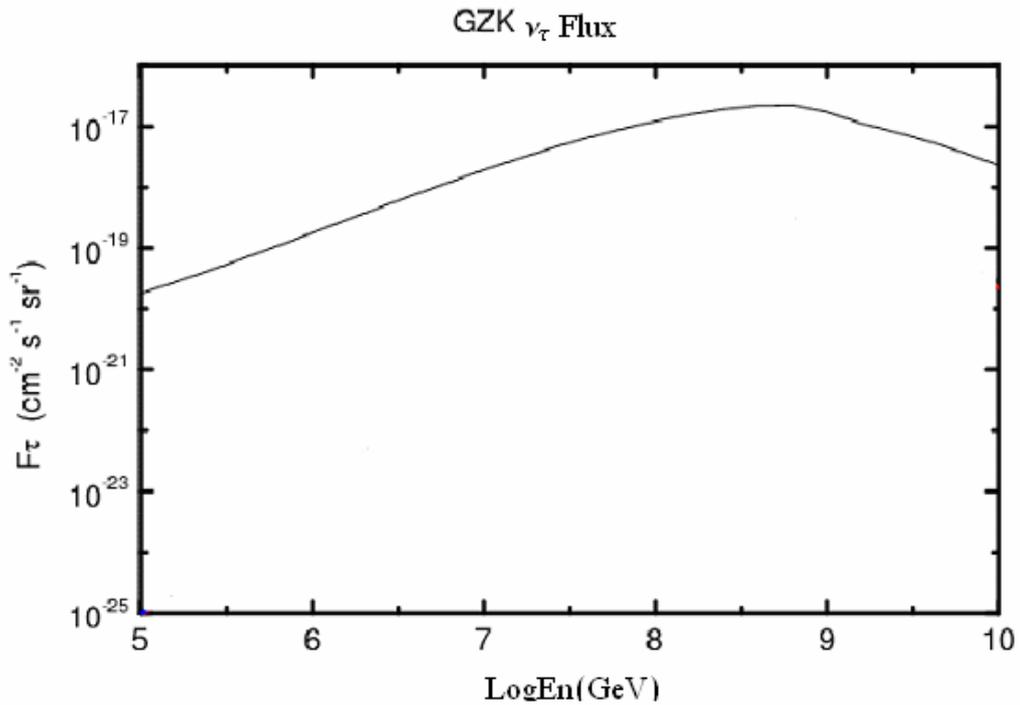


圖 1-3：GZK能譜分布圖，可參考^[15]

1.2.2 AGN 活躍星系核微中子(Active Galactic Nuclei neutrinos)

AGN 活躍星系核微中子來源是由於黑洞擁有極強的重力，捲入附近的物質並且吞嚥。噴流含有高能量的粒子，像是質子、光子和電子，這些粒子在噴流之中相互撞擊反應，製造出高能量的微中子，這些微中子順著噴流飛出。

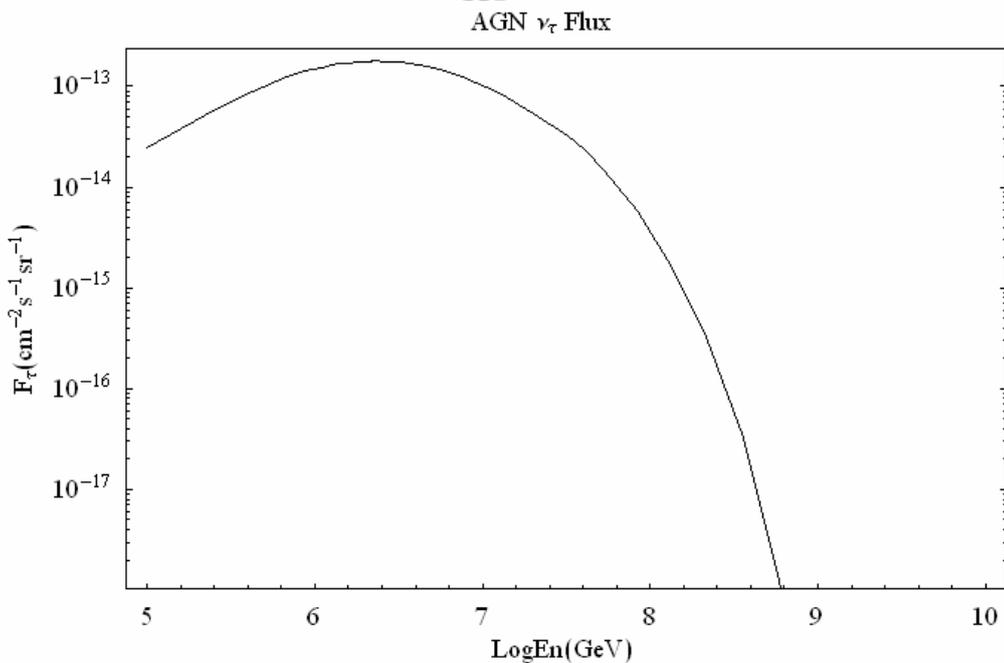


圖 1-4：AGN能譜分布圖，可參考^[16]

1.2.3 GRB 微中子 (Gamma Ray Burst neutrinos)

GRB 微中子成因至今仍未有確定的答案，根據一些觀測結果 GRB 030329 — 這個由NAS的高能瞬間爆發源探測衛星 2 號^[14]所捕獲的GRB事例，天文學家已開始將GRB與巨型恆星的滅亡和超新星的爆發關聯起來^[9]。伴隨著高能 γ 射線的產生，接著也會產生微中子。

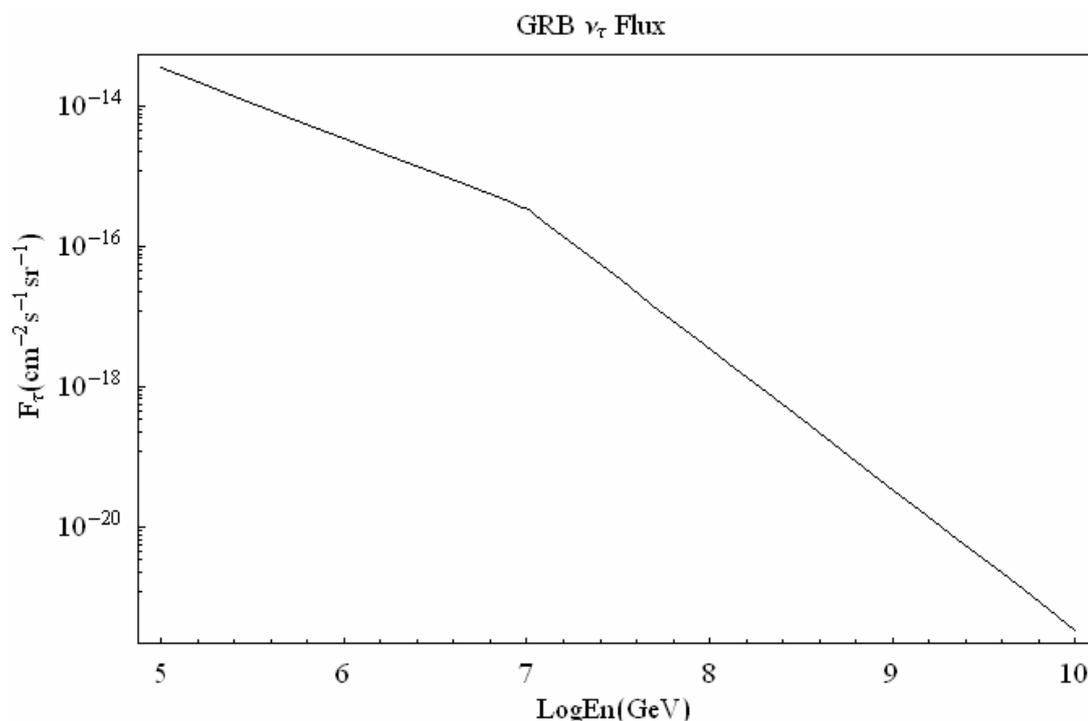


圖 1-5：GRB能譜分布圖，可參考^[17]

1.3 關於模擬

我們模擬這三種微中子來源，配合地球密度成分模型(圖 1-6)，地底下六公里處，半徑一公里內介質相同，其餘地方是以地球標準模型密度區分，而 DSR(Detector Sensitivity Region)中心設置在地底下半徑六公里半徑一公里的圓形區域，介質分分鹽岩(rocksalt, $Z=13.5, A=29.2447$)與水(Water, $Z=6.6, A=11.89$)模擬進行討論。主要我們是藉由這三種不同來源的微中子在 DSR 區域內引發簇發(Shower)進行分析，分析粒子進行方向與天頂角的數量分布，還有能量分布，藉由這個資訊可以安排實際上 DSR 的幾何形狀建議參考數據。以及簇發事件產生的速率在不同介質中比例關係與能量的分布，藉由此可以區分不同來源的微中子。這裡亦舉出不同來源，Charge-Current、Neutral-Current、Energy Lose、Tau Decay、引發的簇射，供給大家參考。

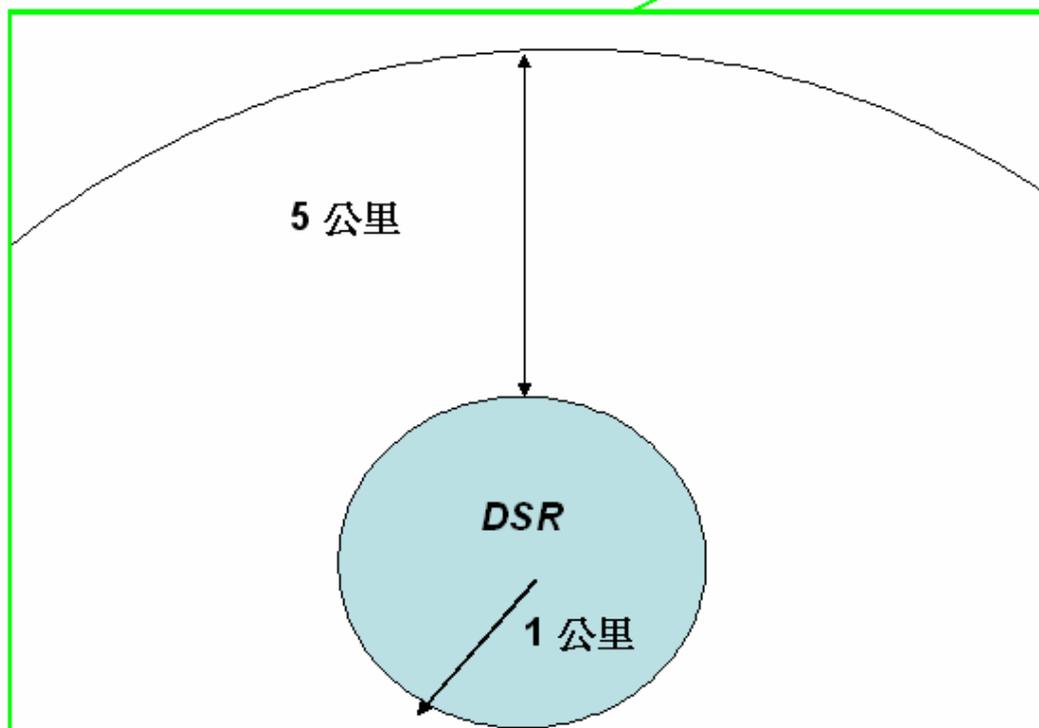
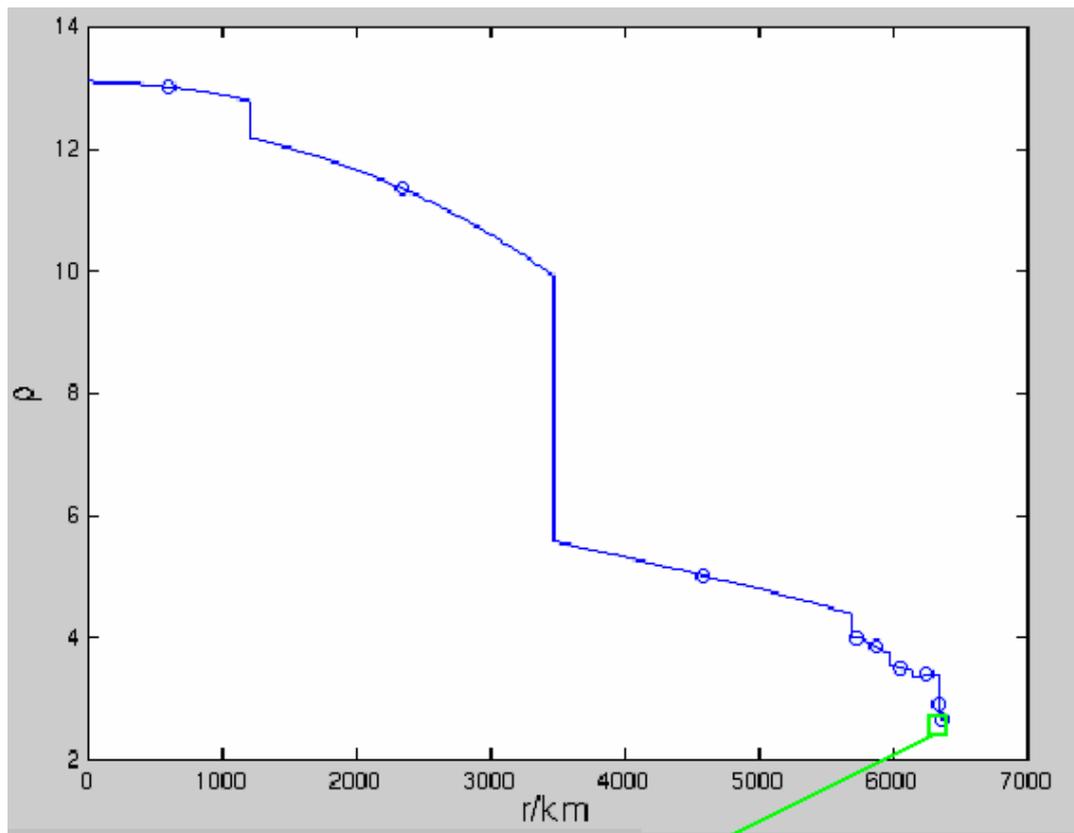


圖 1-6：地球密度分布圖與 DSR(Detector Sensitivity Region)位置示意圖

第二章 模擬方法

2.1 蒙地卡羅法(Monte-carlo method)概念

自然界中，許多事件(event)的發生與否，無法事先確定，為了解釋這樣的現象，機率就是一個很好的概念，我們用機率的大小來表示一事件發生或不發生的可能性高低，如果機率是零就說事件不可能發生，而機率是一就說事件一定會發生，機率是二分之一就說事件有一半可能性會發生，有一半可能性不會發生。經過許多資料統計或理論計算可以歸納出一事件發生次數與總事件次數之比值，如果總事件次數夠多或說樣本夠大，那我們預期這個比值將變動不大而接近一個固定數，而這個比值就是機率，機率可以由統計得到，如果理論正確，也可由理論得到正確的機率。

而模擬一事件的行為，首先要先知道一事件發生的機率函數，為了得到自然界中不確定的因素所使用的一個方法，就是產生一個隨機變數，界於(0,1)之間，如果此變數大於事件發生的機率，電腦模擬的選擇結果就是讓這事件發生，反之，就不發生。利用電腦的模擬，我們可以預見自然界中，由於不確定因素造成最後的結果概況，這一章就是探討電腦模擬的方法，換句話說就是由物理公式中找出機率函數，那麼模擬的問題就迎刃而解了。

2.2 亂數變數與機率對應

蒙地卡羅法(Monte-carlo method)最大的特徵就是使用亂數(random number)，為了讓電腦決定一件隨機事件的下個步驟，首先產生一個亂數 $r \in [0,1]$ ，以及一個與機率有關係的變數 $y(r)$ ，使得 $y(0)$ 、 $y(1)$ 分別為函數 y 值域的最小值 y_{\min} 與最大值 y_{\max} 。

$$y(0) = y_{\min} \quad (2.2-1)$$

$$y(1) = y_{\max} \quad (2.2-2)$$

變數 $y(r)$ 和 r 為一對一且映成函數，即 $r \in [0,1] \rightarrow [y_{\min}, y_{\max}]$ 。

2.3 截面積(cross section) σ 與機率(probability) P

粒子在物質裡面發生交互作用的機率可以用微分截面積(differential cross section) $\frac{d\sigma}{dy}$ 、 y 與 σ 來描述，之間的關係如下^[18]

$$\sigma = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d\sigma}{dy} dy \quad (2.3-1)$$

σ 愈大，粒子交互作用的可能性就愈大， σ 愈小，則粒子交互作用的可能性就愈小，而 σ 與機率是成正比的關係，因此可以利用 σ 函數得到機率函數。爲了得到機率，可以將截面積歸一化(normalized)：

$$\frac{1}{\sigma} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d\sigma}{dy} dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d\sigma}{\sigma dy} dy = \frac{\sigma}{\sigma} = 1 \quad (2.3-2)$$

因此定義了一個機率微量概念，定義如下：

$$dP = \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (2.3-4)$$

這樣可以將(2.3-2)寫成如下

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d\sigma}{\sigma dy} dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{dP}{dy} dy = \int dP = 1 \quad (2.3-5)$$

因此可以將這裡的函數 dP 視爲變數的微分機率函數，而 $\frac{dP}{dy} dy \Big|_{y=y_0}$ 是事件

(event)在 $y \in [y_0, y_0 + dy]$ 所發生的機率。

2.4 由亂數映射(mapping)到機率

我們可以由亂數產生 $r \in [0,1]$ ，現在需要設計一種映射由亂數 r 到變數 y ，而一個散射發生的機率是正比亂數範圍 dr ，現在考慮一種映射如下。

$$dr = dP = \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\sigma}{\sigma dy} dy \quad (2.4-1)$$

因此得到

$$r = \int_0^r dr' = \frac{1}{\sigma} \int_{y_{\min}}^y \frac{d\sigma}{dy'} dy' = \int_{y_{\min}}^y \frac{dP}{dy'} dy' \quad (2.4-2)$$

這樣就得到了亂數 $r \in [0,1]$ 與 y ，和機率 P 的對應關係，即事件發生在 $y \in [y_1, y_2]$ 的機率

$$P = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dP}{dy} dy \quad (2.4-3)$$

2.5 期望值(Expectation value)

一個事件什麼情況下會發生是由機率支配著，事前並不能夠知道。若是需要一個物理量來代表這事件的變化，或估計一個物理量的值，可用期望值來代表最有意義，期望值也就是在眾多的事件中取其物理量平均。

我們定義 y 的期望值

$$\langle y \rangle = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y \frac{dP}{dy} dy \quad (2.5-1)$$

這裡我們利用蒙地卡羅來產生 N 個事件，其物理量 y 分別為 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ ，只要 N 夠大，這些物理量平均值可以說就是物理量 y 的期望值。

$$\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N} \cong \langle y \rangle = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y \frac{dP}{dy} dy \quad (2-14)$$

這就是利用蒙地卡羅得到期望值的方法，只需要嘗試幾次不同的 N ，會發現平均值很快的收斂到一個定值。

2.6 Poisson 過程

因為這裡主要探討微中子衰變後產生帶電 τ 粒子而產生的簇射，因此在這裡特別討論 τ 粒子的運動，能量損失以及衰變在電腦裡面是怎麼模擬。

首先探討在特定能量情況下，直到衰變(Decay)前，運動中的 τ 粒子，衰變前總共位移距離 x 是呈現如何的分佈？是呈現指數函數遞減，若用函數來敘述成功位移 x 的機率 $P(x)$ ，可以把成功位移距離 x 的機率 $P(x)$ 關係寫下：

$$P(x) = e^{-\frac{x}{D}} \quad (2.6-1)$$

或

$$x = -D \ln P(x) \quad (2.6-2)$$

這裡的 D 就是衰變長度(decay length)，也就是位移距離的期望值，這個值是能量的函數。由於 $P(x) \in [0,1]$ 而且 $r \in [0,1]$ ，因此在電腦的模擬裡面可以產生一個亂數 r 來決特定能量 τ 粒子運動的位移距離 x ，關係如下：

$$x = -D \ln r \quad (2.6-3)$$

上面這個例子是對於單一能量的情況，在真實的情況下， τ 通常是伴隨著快速能量的損失(Energe loss)，每經過一次能量損失後， τ 能量降低，因此衰變前總共位移 x 的機率也跟著變小了，也就是衰變長度 D 下降， D 是能量的函數，關係如下：

$$D = C_d \cdot \frac{E(\text{GeV})}{10^6} \quad (2.6-4)$$

$C_d = 48.9 \text{ m}$ ，也就是 τ 粒子在能量 10^6 GeV 的位移期望值， E 為 τ 粒子的能量，單位是 GeV 。

τ 粒子衰變之前有可能經過能量的損失^[附錄A]，因此衰變長度也隨之減少了，粒子能量由 E 下降變成 E' ， E' 的大小當然也是屬於一種隨機的事件，為了處理這樣子的事件，定義了新物理量 y ，利用 y 可以決定這個隨機結果， y 的定義就是能量損失與原本能量的比值，定義如下：

$$y = \frac{E - E'}{E} \quad (2.6-5)$$

該怎麼由亂數決定 y 的大小呢?其實在模擬前就必須作好準備工作，模擬前的工作就是需要先算好不同能量中，每個特定 τ 能量 E_j ，其 $\sigma_i = \int_{y_{\min}}^{y_i} \frac{d\sigma}{\sigma dy} dy$ 與 y_i 的對應關係，組成一張表 $(\frac{\sigma_i}{\sigma}, y_i)_{E_j}$ ，這裡用的表每個能量 E_j 都差 0.1 個數量級，當然差值越小越好， (σ_i, y_i) 之間也是越密集越好，當然必須犧牲的代價就是

電腦的記憶體需求量也就越大。接下來由電腦產生亂數 r ，令 $r = \int_{y_{\min}}^y \frac{d\sigma}{\sigma} dy$ ，

就可以決定 y 的大小，由於先前的對應關係表 $(\frac{\sigma_i}{\sigma}, y_i)_{E_j}$ ，不見得剛好有與隨機產生 r 相同的資料，因此這裡我們會用運用到內插法計算合理的 y ，可以得到能量損失的比例，能量也是使用內插法，所以當初的 $(\frac{\sigma_i}{\sigma}, y_i)_{E_j}$ 表中，這些對應關係越密集，其誤差就會越少，因此用這方法得到 y ，就可以讓電腦決定每一部 τ 粒子剩餘的能量大小。

2.7 衰變機率

因為 τ 粒子行徑的過程中，由於能量不停損失，所以在模擬的過程中，我們是一小步一小步的讓 τ 粒子位移，因此要決定 τ 粒子再行徑的每一步中，會不會衰變成一個需要討論的問題，因為衰變的機率 $P_d(x)$ 和位移機率 $P(x)$ 和為 1，所以 $P_d(x)$ 表示如下：

$$P_d(x) = 1 - P(x) \quad (2.7-1)$$

在模擬過程中，由於每一步能量不一樣，因此衰變長度也不一樣，由(2.6-1) (2.7-1) 可知道微分衰變機率長度為

$$dP_d(x) = -dP(x) = \frac{dx}{D} \quad (2.7-2)$$

τ 粒子每一步和總共損失的能量可以由(2.6-5)容易得到 $E' = E(1 - y)$ ，只要 dx 比 D 小許多，那麼結果其實都差不多， dx 太小電腦所需要的時間就很長，所以只要夠小就好了， dx 是個經驗值，嘗試幾次不同的 dx ，可以找到很不錯理想值。

2.8 製造三維微中子流量

在三維空間上由亂數產生合理微中子的方法要滿足下面幾個條件。

第一個條件：所有經由蒙地卡羅產生微中子，其分佈的能譜必須滿足微中子通量與能量的關係函數[15,16,17]。

第二個條件：經過地球上的微中子，每個方向都是均等，沒有特別喜好哪個方位，沒有特別喜好哪個區域，沒有特別偏好在哪個時間發生，即每個方向，時間，地點所發生的微中子都視為同仁，具有均向性，這裡用的方法是，任意地球橫切面微中子是均勻通過，如下圖 2-1，也就是要滿足下式：

$$n(r) \propto r^2 \quad \text{or} \quad dn(r) \propto r dr \quad (2.8-1)$$

$n(r)$ ：與橫切面的圓心距離 r 內所有經過微中子的總數量。

$dn(r)$ ：與橫切面的圓心距離 r 與 $r + dr$ 內所有經過微中子的總數量。

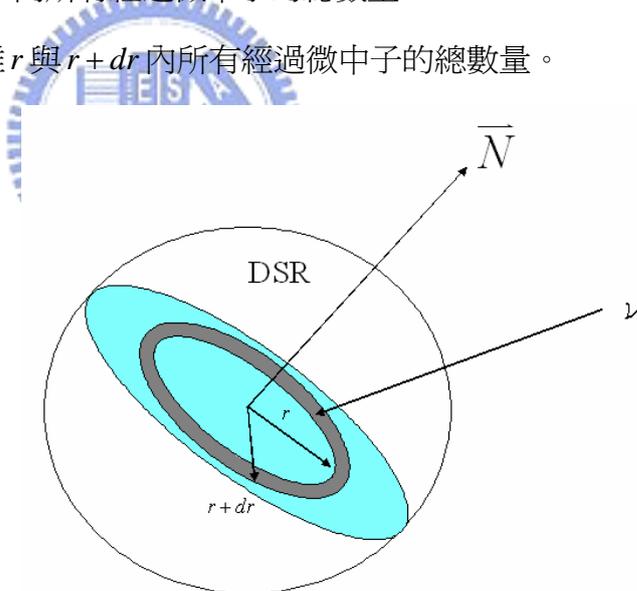


圖 2-1：微中子 ν 入射 DSR 的示意圖， \bar{N} 為此切面的法向量。

爲了滿足這種性質，用數學表示比較容易寫出這種亂數

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{dn}{\sin \theta d\theta d\phi} = \frac{dn}{d \cos \theta d\phi} = \text{常數} \quad (2.8-2)$$

由(2.8-2)知道，微中子入射地方的亂數選擇，如果讓 $\cos \theta$ 均勻分佈的，也就是 $\cos \theta = -1 + 2r_1$ ，由亂數 $r_1 \in [0,1]$ 產生，而 $\phi = 2\pi r_2$ ，由亂數 $r_2 \in [0,1]$ 產生，這樣

子很輕易的可以完成(2.8-1)的要求，也就說明微中子沒有特別喜歡集中在某些特定的方向，也沒有特別討厭某些方向，是均勻的分布在空間中。

接下來還有微中子方向，速度單位向量直角座標 (V_x, V_y, V_z) 與極座標 $(1, \theta_v, \phi_v)$ 的關係如下

$$V_x = \sin \theta_v \cos \phi_v \quad (2.8-3)$$

$$V_y = \sin \theta_v \sin \phi_v \quad (2.8-4)$$

$$V_z = \cos \theta_v \quad (2.8-5)$$

相同地 ϕ_v 是均勻的分布在 $[0, 2\pi]$ ， $\cos \theta_v$ 是均勻的分布在 $[-1, 1]$ ，這和(2.8-2)中的 θ 是一樣的，再由 (2.8-3) (2.8-4) (2.8-5) 可以決定產生微中子的方向，圖 2-2 說明了速度 \vec{V} 在 $x-y$ 平面上與 x 軸夾的角度關係，沒有特別偏愛哪個特定角度。

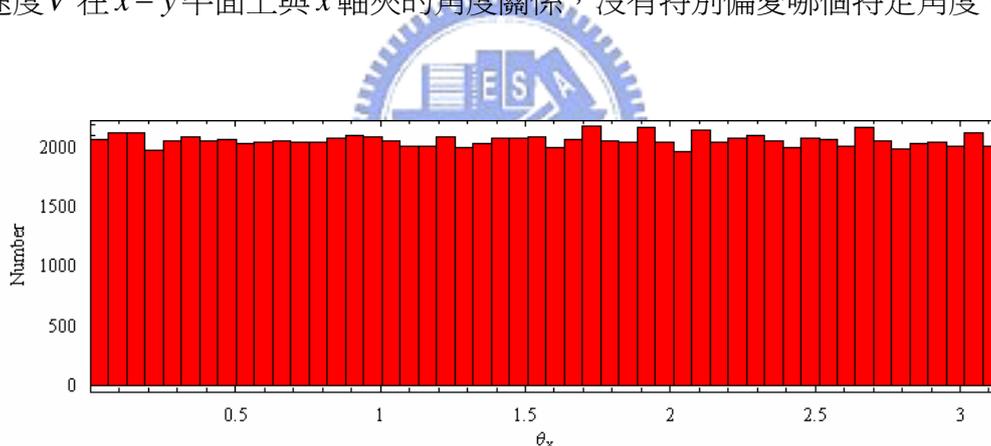


圖 2-2： $x-y$ 平面上與 x 軸夾角數量分佈關係。

(5 百萬 GZK 微中子，共有 103199 個產生 τ)

有了位置均勻分布，與速度均勻分佈的概念後，最重要的就是如何把這種觀念用在電腦的模擬上面，微中子進入測量區域(DSR，Detector Sensitive Region，這裡測量區域以圓為例子，半徑為 R)的位子也是由隨機變數決定。微中子的方向當做(2.8-1)式子中，此區域大圓的法線單位向量，為了使微中子通過此大圓每個地方機會相等也就是滿足(2.8-1)，微中子與此大圓中心距離 r 的機率密度 $p(r)$

有下列關係

$$p(r)dr \propto dn(r) \propto r dr \quad (2.8-6)$$

讓產生的微中子通過此測量區域，所以 $r \in [0, R]$ ，也就是

$$\frac{p(r)}{r} = \frac{\int_0^R p(r)dr}{\int_0^R r dr} = \frac{1}{\int_0^R r dr} = \frac{1}{\frac{1}{2}R^2} = 2R^{-2} \quad (2.8-7)$$

得到

$$p(r) = 2R^{-2}r \quad (2.8-8)$$

有了機率密度的函數，就可輕易由隨機變數產生滿足此機率分佈的事件，首先產生隨機變數 $r_3 \in [0, 1]$ ，利用(2.8-8)得到

$$r = Rr_3 \Rightarrow p(r) = \frac{2r_3}{R} \quad (2.8-9)$$

產生隨機 r ，就是微中子與此大圓的中心距離，接下來要看這樣的事件是否會發生，於是再一次產生隨機變數 $r_4 \in [0, 1]$ ，

$$p(Rr_4) = \frac{2r_4}{R} \quad (2.8-10)$$

如果

$$p(Rr_4) = \frac{2r_4}{R} \leq p(Rr_3) = \frac{2r_3}{R} \quad (2.8-11)$$

也就是決定微中子距離中心

$$r = Rr_3 \quad (2.8-12)$$

圖 2-3 說明半徑與 DSR 中心距離最近成正比。

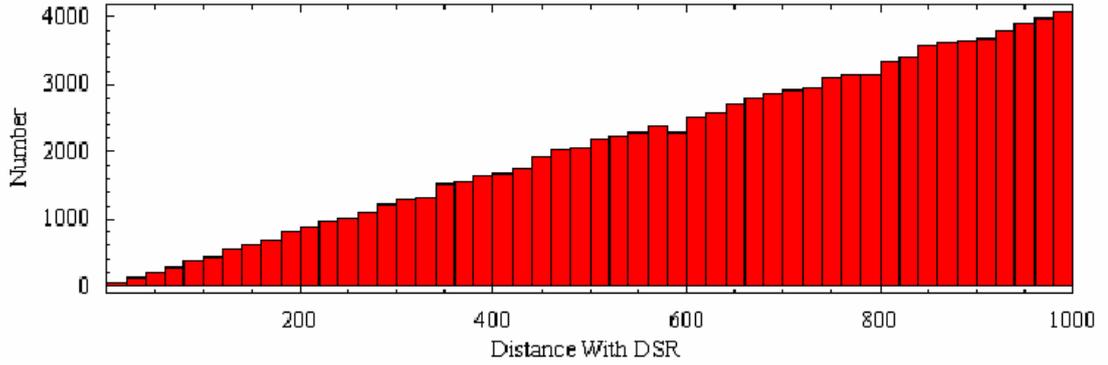


圖 2-3：與 DSR 中心最近距離分佈。

(5 百萬個 GZK 微中子，共有 103199 產生 τ)

這是要特別注意一下，因為這裡著座標並不是對於原始 DSR 的座標，而是對於將速度的座標，也就是先將速度方向 $(0,0,1)$ 視為圖 2-1 中 \bar{N} 的方向，因此為了得到原本對於 DSR 座標，必須要有座標轉換的動作，這裡寫出座標轉換之間的關係。

將原本對於 DSR 標系 (x, y, z) 繞 z 軸逆時針轉 ϕ ，得到旋轉矩陣 T_1 ，之後繞 y 軸順時針轉 θ ，得到旋轉矩陣 T_2 ，所以旋轉矩陣就是 $T = T_2 T_1$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi_v & \sin \phi_v & 0 \\ -\sin \phi_v & \cos \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8-13)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_v & 0 & -\sin \theta_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_v & 0 & \cos \theta_v \end{pmatrix} \quad (2.8-14)$$

$$T = T_2 T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_v \cos \phi_v & \cos \theta_v \sin \phi_v & -\sin \theta_v \\ -\sin \theta_v \cos \phi_v & \sin \theta_v \sin \phi_v & \cos \theta_v \\ \sin \theta_v \cos \phi_v & \sin \theta_v \sin \phi_v & \cos \theta_v \end{pmatrix} \quad (2.8-15)$$

所以對於速度而言，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_v \cos \phi_v & \cos \theta_v \sin \phi_v & -\sin \theta_v \\ -\sin \phi_v & \cos \phi_v & 0 \\ \sin \theta_v \cos \phi_v & \sin \theta_v \sin \phi_v & \cos \theta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_v \cos \phi_v \\ \sin \theta_v \sin \phi_v \\ \cos \theta_v \end{pmatrix} \quad (2.8-16)$$

對於定速度方向為(0,0,1)，對應的位置座標為 (x', y', z') ，產生隨機變數

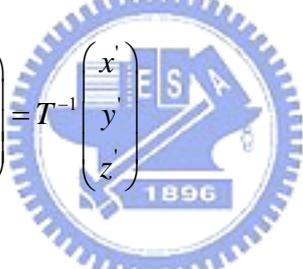
$r_5 \in [0,1]$ ，得到新極座標系 $\phi' = 2\pi r_5$ ，得到對於新座標系的位置

$$(x', y', z') = (r \cos \phi', \sin \phi', 0) \quad (2.8-17)$$

其中 r 是由(2.8-13)得到的，比較(2.8-16)，得到下列關係

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_v \cos \phi_v & \cos \theta_v \sin \phi_v & -\sin \theta_v \\ -\sin \phi_v & \cos \phi_v & 0 \\ \sin \theta_v \cos \phi_v & \sin \theta_v \sin \phi_v & \cos \theta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8-18)$$

利用下面關係還原得到原本座標 (x, y, z) 。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.8-19)$$


第三章 τ 的產生與能量損失

3.1 微中子 CC 與 NC 反應過程

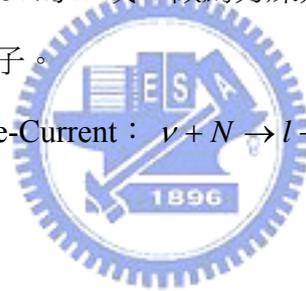
高能微中子的作用截面積增加，增加與原子核散射的機會，微中子 ν 與原子核散射主要是以弱交互作用，反應方式分兩種，有中性流 (NC : Neutral-Current) 與帶電流 (CC : Charge-Current) 兩種。

中性流是以質量為 91 GeV 的 Z^0 玻色子為力媒介粒子，經過中性流 (Neutral-Current) 反應將帶走一些能量，剩下較低能量的微中子。

$$\text{Neutral-Current : } \nu + N \rightarrow \nu + N' \quad (3.1-1)$$

帶電流是以質量為 80 GeV 的 W^+ 或 W^- 做為力媒介粒子，經過帶電流 (Charge-Current) 反應產生輕子。

$$\text{Charge-Current : } \nu + N \rightarrow l + N' \quad (3.1-2)$$



3.2 τ Decay

現實情況下，實驗上無法直接測量微中子，能夠測量到的資訊，都是一些間接訊息，這裡主要探討簇射(Shower)產生的訊號，簇射主要藉由NC或CC產生，或經過帶電流產生的輕子 τ ，其 τ 能量損失或衰變(Decay)產生的簇射。然而 τ 主要由對生(Pair Production)^[10]和光核子反應(Photonuclear)^[11]失去能量產生簇射，也可能經過下面的過程衰變成 ν_τ ^[12]。

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + \mu + \nu_\mu$$

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + e + \nu_e$$

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + \rho$$

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + \pi$$

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + a_1$$

ν_τ 的能量 E_{ν_τ} 與 τ 的能量 E_τ 有如下之關係決定，其中 y 就是由(2-11)式子定義，利用隨機變數產生而得到。

$$E_{\nu_\tau} = yE_\tau \quad (3.2-1)$$

表 3-1：y 範圍與 τ 衰變比例分配

衰變過程	y_{\min}	y_{\max}	比例
$\tau \rightarrow \nu_\tau + \mu + \nu_\mu$	0	1	18%
$\tau \rightarrow \nu_\tau + e + \nu_e$	0	1	18%
$\tau \rightarrow \nu_\tau + \rho$	0	0.9938	12%
$\tau \rightarrow \nu_\tau + \pi$	0	0.8310	26%
$\tau \rightarrow \nu_\tau + a_1$	0	0.5209	13%

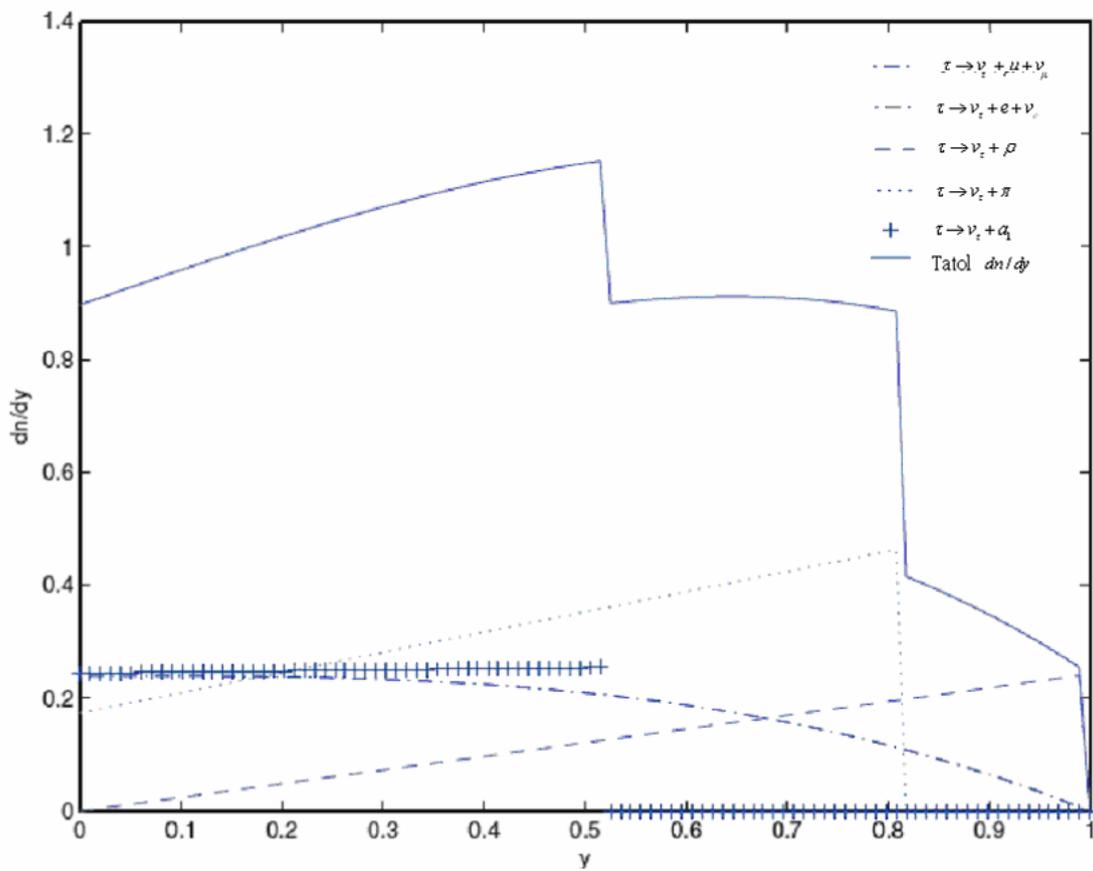


圖 3-1： τ 衰變過程分配圖

3.3 τ 能量損失

一般用兩種方法模擬 τ 能量損失，一種是算平均能量損失，另一種是隨機能量損失。

平均能量損失的算法在這裡先簡單介紹一下。

如果能量 E 的 τ 有發生能量損失，損失的能量為：

$$E - E' = -\frac{E' - E}{E} \cdot E = -y \cdot E$$

E' 是能量損失後 τ 的能量，所以在這情況下，我們做平均上的能量損失：

$$E - \langle E' \rangle = -\frac{\langle E' \rangle - E}{E} \cdot E = -\langle y \rangle \cdot E$$

這是 τ 能量損失的平均算法，如果考慮發生機會，那麼可以寫出能量損失微分關係如下：

$$-dE = \langle y \rangle E dP_\sigma \quad (3.3-1)$$

dP_σ : τ 反應的機率

$$dP_\sigma = \frac{dx}{L} \quad (3.3-2)$$

L : 反應厚度也就是平均走了 L 將會有一次能量損失發生，而 dx 是前進距離。

$$L = \frac{1}{n\sigma} \quad (3.3-3)$$

n : 介質原子核數目密度， σ : 作用截面積

$$n = \frac{\rho N_A}{A} \quad (3.3-4)$$

N_A : 亞佛加厥常數(Avogadro's number)， A : 質量數(mass number)

前面 (3.3-1)，(3.3-2)，(3.3-3)，(3.3-4) 可以得到

$$-dE = \frac{N_A}{A} E dX \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y \frac{d\sigma}{dy} dy \quad (3.3-5)$$

其中

$$dX = \rho dx \quad (3.3-6)$$

$$\frac{-dE}{dX} = \sum_i \beta_i E \quad (3.3-7)$$

$$\beta_i = \frac{N_A}{A} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y \frac{d\sigma_i}{dy} dy \quad (3.3-8)$$

ρ 的單位是每立方公分多少克， x 的單位是公分， X 的單位是每平方公分多少克。對於能量的損失考慮光核子反應以及對生反應，所以這裡有 i 出現用以代表。

由於 $\frac{d\sigma}{dy}$ 在 $y \rightarrow 0$ 的時候是發散的，所以蒙地卡羅在這種條件下並不適合使用，因此在 y 很小的時候，我們使用平均能量損失代替蒙地卡羅的隨機能量損失，這裡特別考慮了 y_{cut} ，將能量損失分成硬式能量損失(Hard-term energy loss)與軟式能量損失(Soft-term energy loss)兩個部分來處理。

$y \in [y_{\min}, y_{cut}]$ ，定義為軟式能量損失部分，這部分使用平均能量損失：

$$-\left(\frac{dE}{dX}\right)_{Soft} = \sum_i \frac{N_A}{A} E \int_{y_{\min}}^{y_{cut}} y \frac{d\sigma_i}{dy} dy \quad (3.3-9)$$

$y \in [y_{cut}, y_{\max}]$ ，定義為硬式能量損失部分，這部分使用蒙地卡羅：

$$-\left(\frac{dE}{dX}\right)_{Hard} = \sum_i \frac{N_A}{A} E \int_{y_{cut}}^{y_{\max}} y \frac{d\sigma_i}{dy} dy \quad (3.3-10)$$

處理硬式能量損失部分，使用蒙地卡羅，於是把(2-11)改成

$$r = \frac{1}{\sigma} \int_{y_{cut}}^y \frac{d\sigma}{dy} dy' = \int_{y_{cut}}^y \frac{dp}{dy} dy' \quad (3.3-11)$$

所以總共的能量損失可以由(3.3-10)與(3.3-11)兩式相加，得到：

$$-\left(\frac{dE}{dX}\right) = -\left(\frac{dE}{dX}\right)_{Soft} - \left(\frac{dE}{dX}\right)_{Hard} \quad (3.3-12)$$

3.4 數值積分小技巧

在處理一些積分問題時，特別要說明的是在處理軟式能量損失部分的時候， $\frac{d\sigma}{dy}$ 在 $y \rightarrow 0$ 是發散的，而且 $y \frac{d\sigma}{dy}$ 在 $y \rightarrow y_{\min}$ 對於數值積分也不是很好處理，所以在(3-12)處理數值積分當中，收斂效果不是很好，為了將數值積分結果的可靠程度提升，可以使用變數變換的方式，使得這類函數平滑化再進行數值積分，舉個簡單例子說明處理數值運算上面的變數變換：

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (3.4-1)$$

其中 $x_1 \rightarrow 0$ ， $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 時變化很快，數值積分不容易收斂，可做以下變換

$$x = e^u \quad (3.4-2)$$

$$dx = e^u du \quad (3.4-3)$$

$$u = \log x \quad (3.4-4)$$

將(3.4-2)，(3.4-3)，(3.4-4)帶入(3.4-1)

可以得到

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{\log x_1}^{\log x_2} f(e^u)e^u du \quad (3.4-5)$$

如果原本數值積分函數，這裡舉的例子是在特定的地方 $x = 0$ ，函數變化很劇烈的地方，利用變數變換，可以將自變數在 $x = 0$ 處，轉換自變數，將轉換後的自變數放大範圍，使得原本函數變的平滑多，接著再作數值積分，可以收斂比較快，並且也提高積分的準確度。這只是一個例子，但是提醒了我們，做數值積分時，如果遇到不容易收斂的積分，可以變換積分得到更好的結果，當然還有許多變換積分的好方法就不一一舉例說明，相信讀者遇到這問題可以依曲線特性作更好的變換積分。

第四章 結果與討論

4.1 τ 射程(Range)的比較與結果

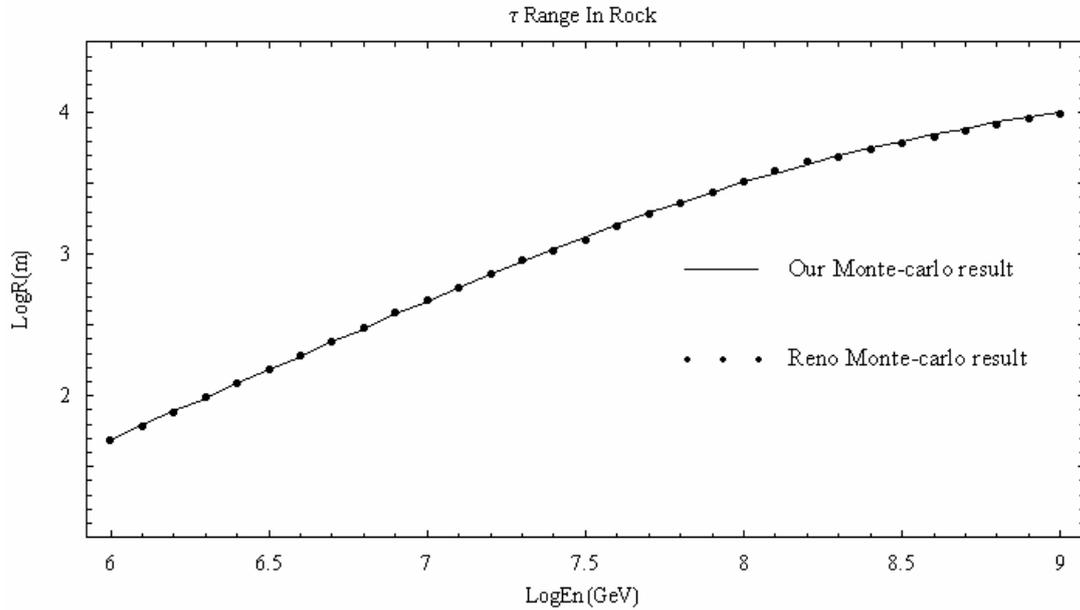


圖 4-1：Rock中 τ 射程(Range)與Reno^[13]比較。

這是我們使用蒙地卡羅計算出 τ 在Std. Rock的射程與Reno^[13]的比較結果，顯示我們數據是可靠的。Water Salt Rock Iron

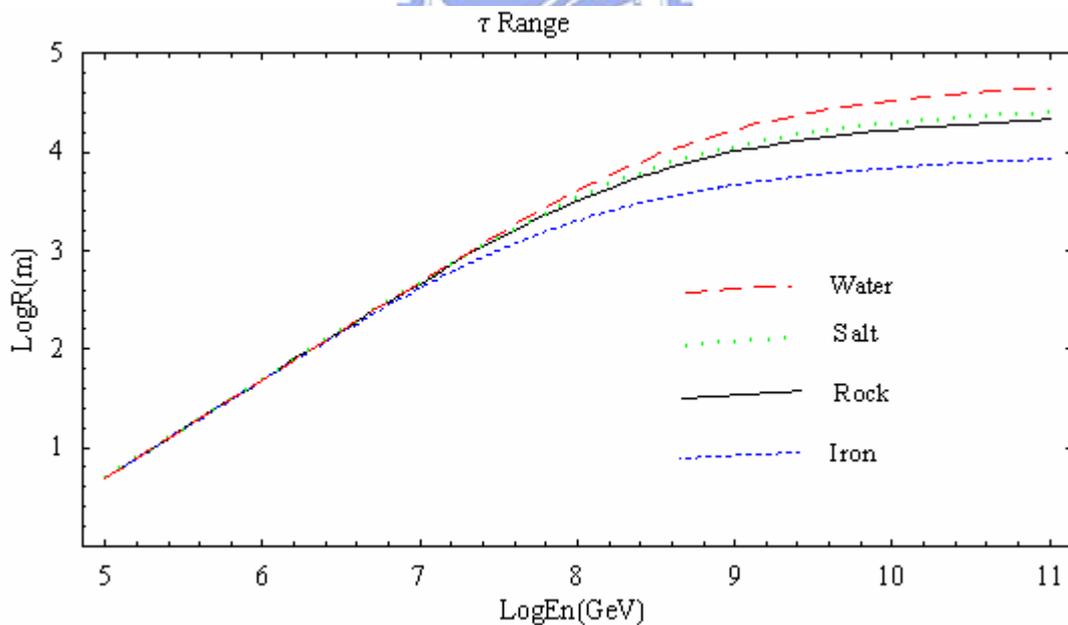


圖 4-2：四種介質 τ 射程(Range)與能量關係圖。

四種介質水(Water $Z=6.6, A=11.89$)、鹽岩(Salt $Z=13.5, A=29.2447$)、標準岩石(Rock $Z=11, A=22$)、鐵(Iron $Z=26, A=55.84$)中， τ 射程都隨的能量增加而漸漸緩慢增加，能量在 10^7 GeV 前約與 τ 本身衰變長度相同，之後與衰變長度不同主要是因為高能區($E_\tau > 10^7$ GeV)，介質使得 τ 衰變機率增加。

4.2 簇射(Shower)

表 4-1：圖的加強說明

	能量區(GeV)	Flux($cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}$)	介質	Showers	ν_τ 總數
GZK	$10^5 \sim 10^{10}$	3.28307×10^{-17}	Water	112133	28000000
			Salt	286862	30000000
AGN	$10^5 \sim 10^{7.5}$	2.64004×10^{-13}	Water	2513	102000000
			Salt	7878	104801382
	$10^{7.5} \sim 10^{10}$	7.99804×10^{-15}	Water	35283	90000000
			Salt	80296	59922115
GRB	$10^5 \sim 10^7$	1.48500×10^{-14}	Water	2193	168000000
			Salt	3556	130000000
	$10^7 \sim 10^{8.5}$	7.49250×10^{-17}	Water	7433	60000000
			Salt	47422	120000000
	$10^{8.5} \sim 10^{10}$	7.49250×10^{-20}	Water	155716	90000000
			Salt	1694977	180000000

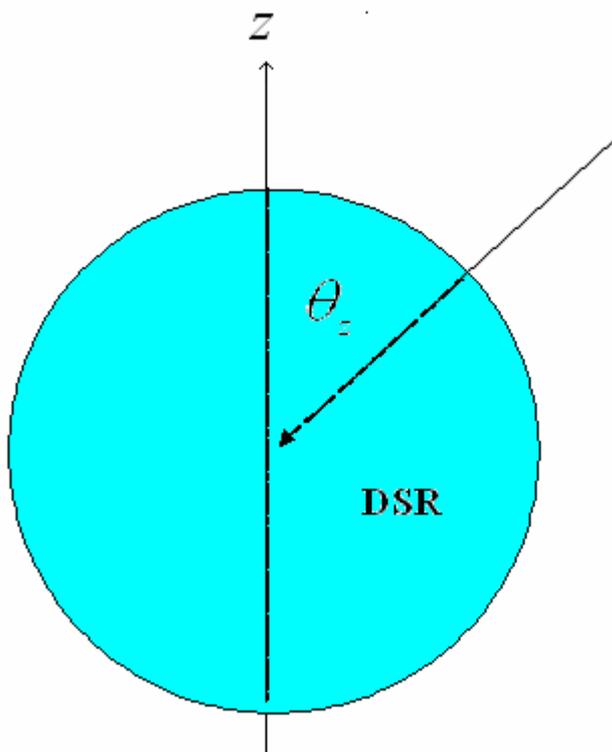


圖 4-3：粒子入射方向與 DSR 示意圖， θ_z 就是入射方向與 z 軸(天頂)的夾角。

$\text{Cos}\theta_z$ ：粒子速度方向與天頂角夾角的餘弦值。

4.2.1 角度能量分布

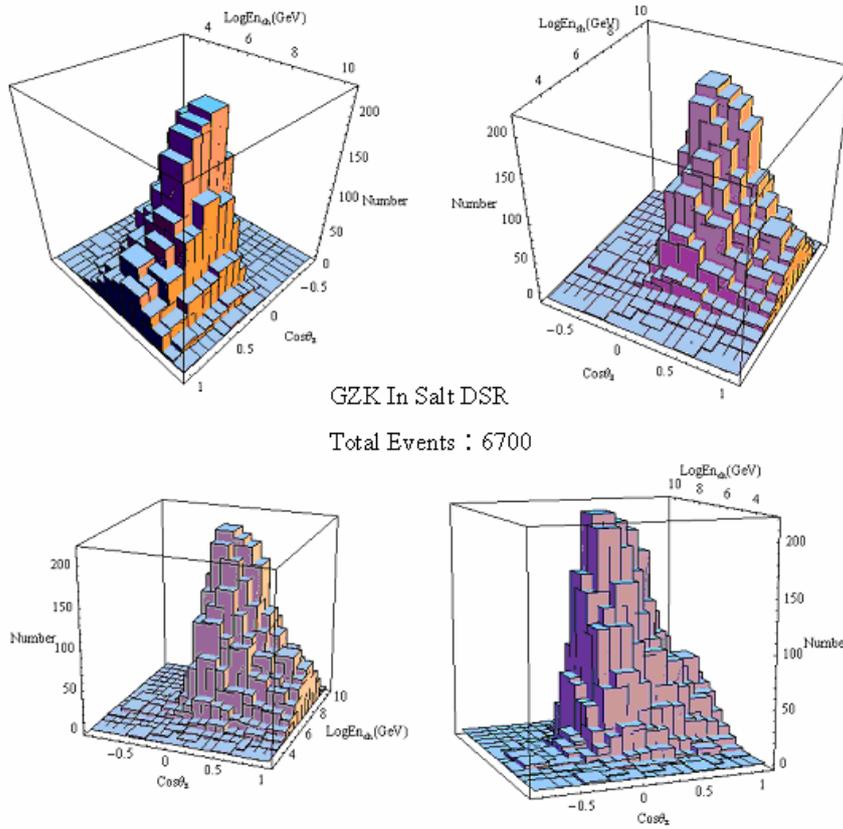


圖 4-4 角度能量與簇射數量的分佈圖 From GZK ν_τ , In Salt DSR

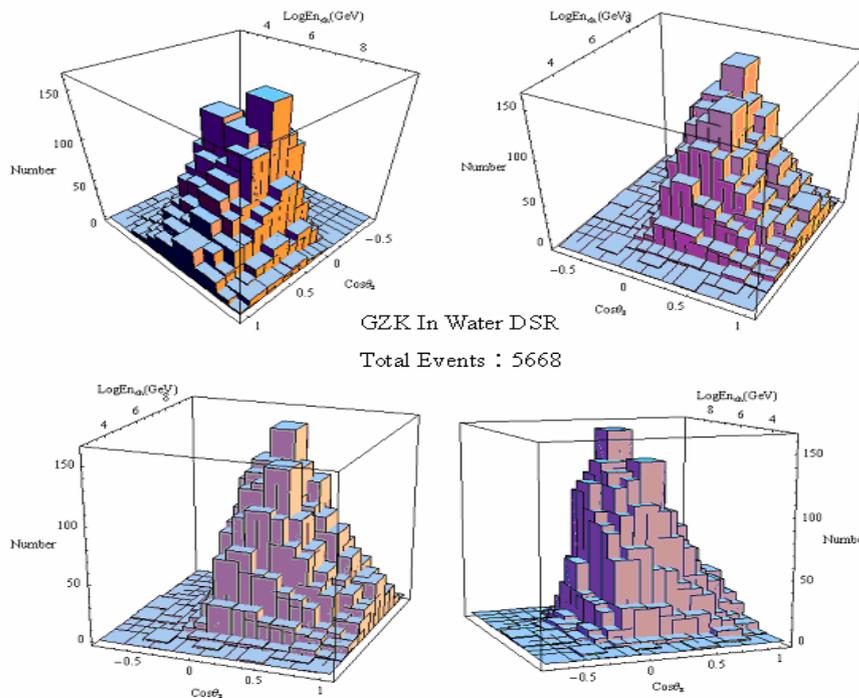


圖 4-5 角度能量與簇射數量的分佈圖 From GZK ν_τ , In Water DSR

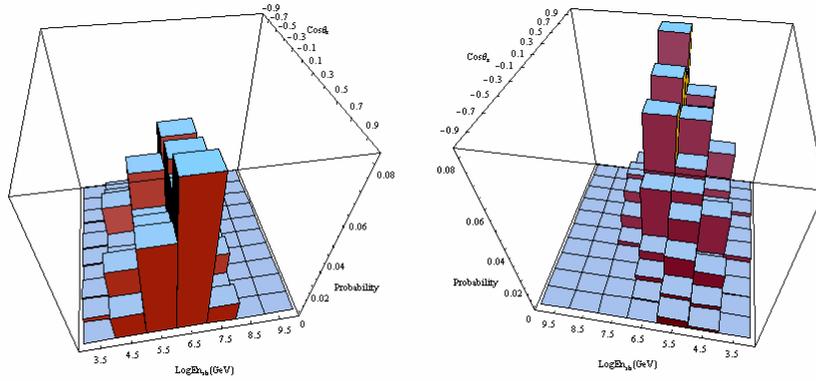
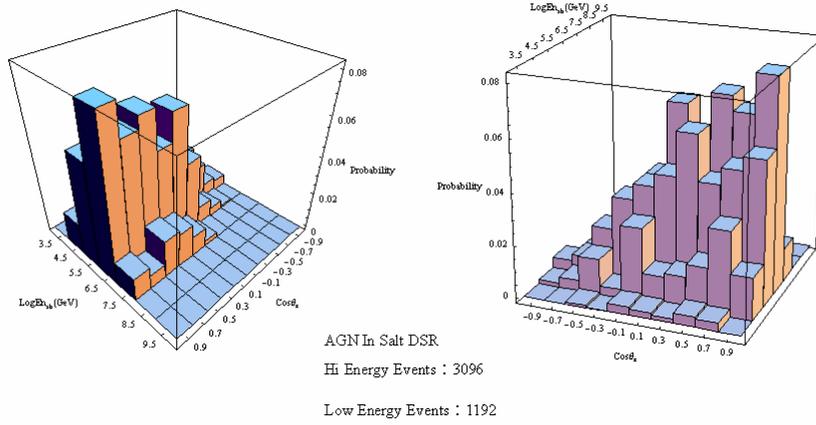


圖 4-6 角度能量與簇射機率的分布圖 From AGN ν_τ , In Salt DSR

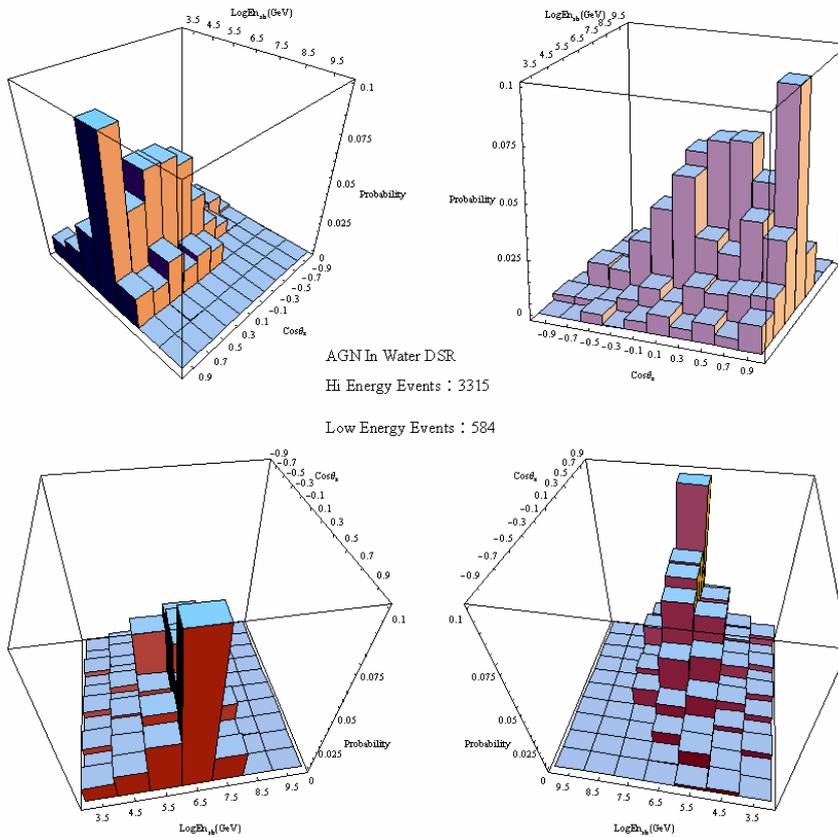


圖 4-7 角度能量與簇射機率的分布圖 From AGN ν_τ , In Water DSR

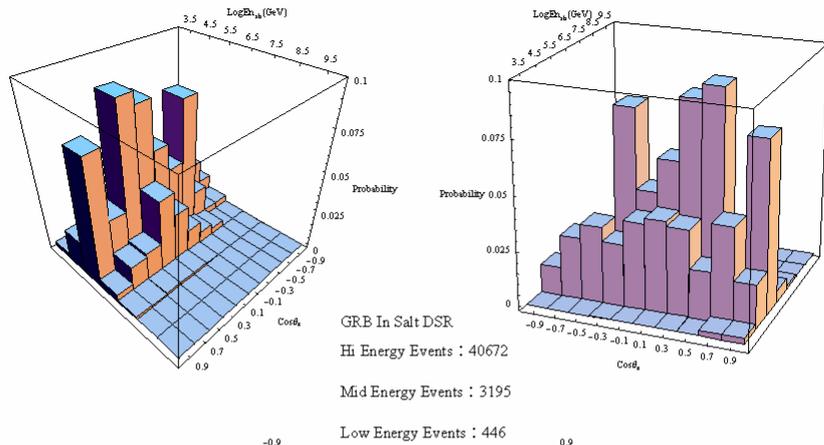


圖 4-8 角度能量與簇射機率的分佈圖 From GRB ν_τ , In Salt DSR

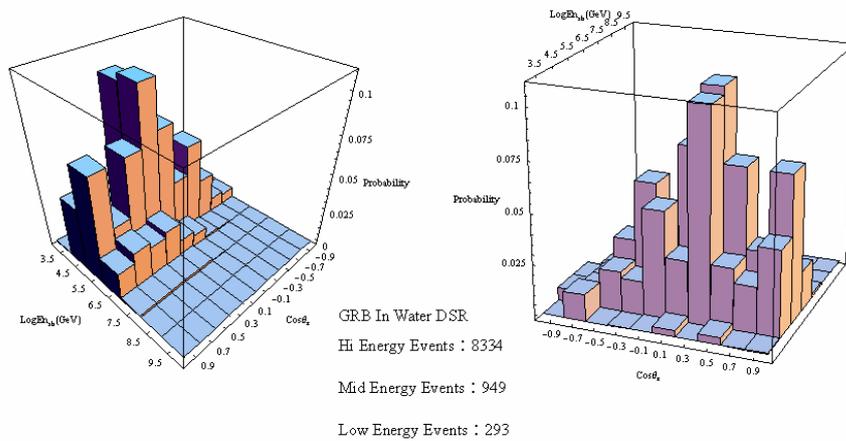


圖 4-9 角度能量與簇射機率的分佈圖 From GRB ν_τ , In Water DSR

4.2.2 角度分布

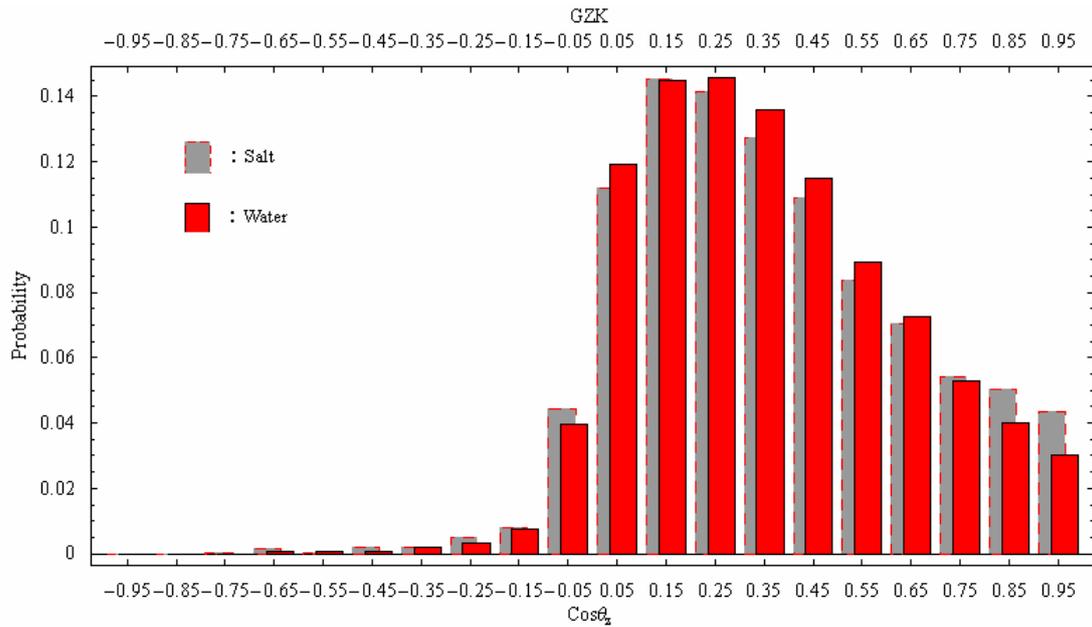


圖 4-10：Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From GZK ν_τ In DSR

θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$ 發生的事件約佔有 94%， θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$ 發生的事件約佔有 5%。

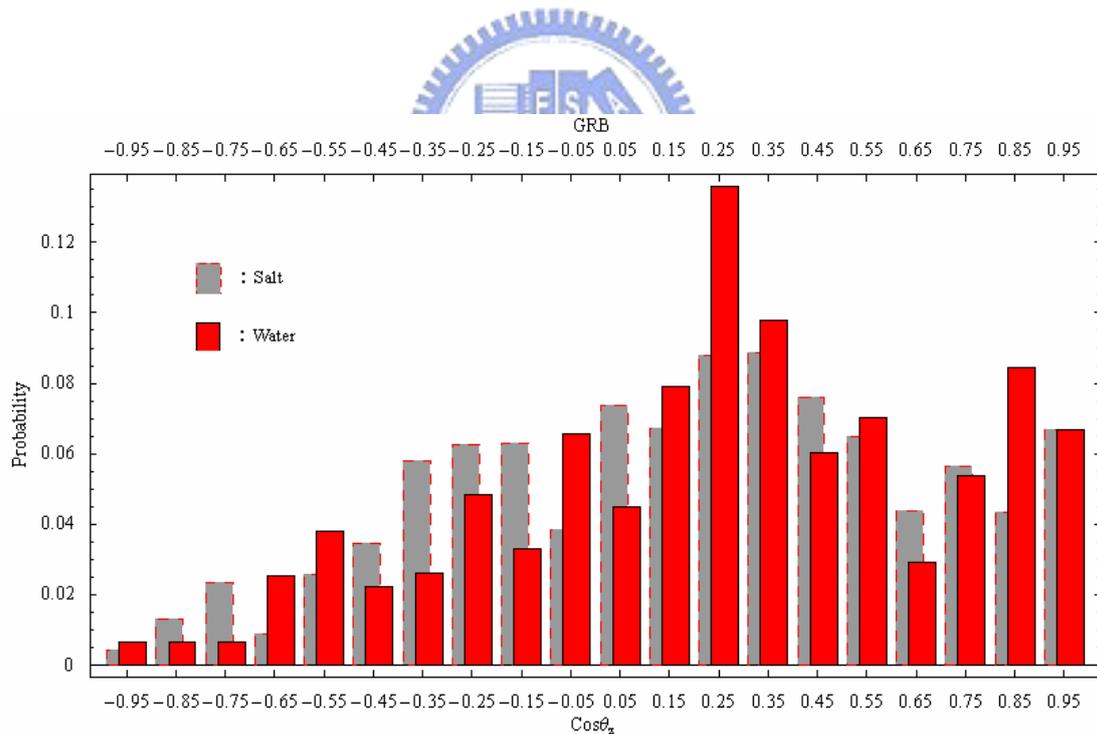


圖 4-11：Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From AGN ν_τ In DSR

對Salt， θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$ 發生的事件約佔有 78%， θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$ 發生的事件約佔有 12%。

對Water θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$ 發生的事件約佔有 78%， θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$ 發生的事件約佔有 16%。

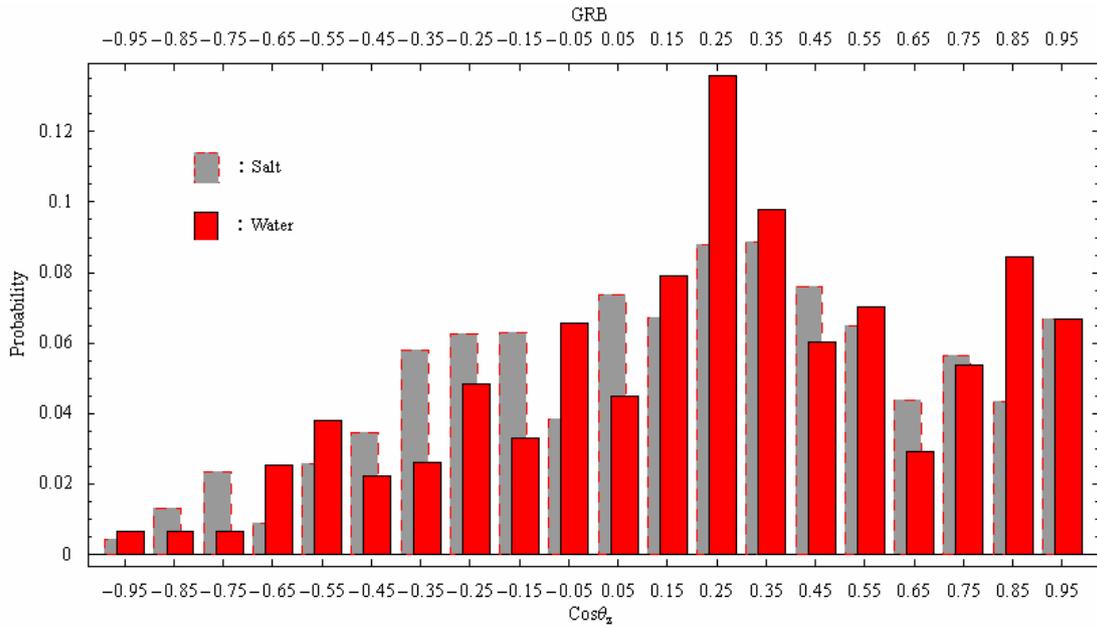


圖 4-12：Salt 與 Water 簇射角度與機率分佈 From GRB ν_τ In DSR

對Salt， θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$ 發生的事件約佔有 67%， θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$ 發生的事件約佔有 22%。

對Water θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$ 發生的事件約佔有 72%， θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$ 發生的事件約佔有 17%。

4.2.2.1 角度分布討論

上面這些圖，可以知道大部分的簇射方向都是由水平面上方來的(θ_z 由 $0^0 \sim 90^0$)，水平面以下(θ_z 由 $90^0 \sim 114^0$)的簇射還佔有一小部分，大約在 $\theta_z = 70^0 \sim 80^0$ 附近的時候，可偵測到Showers的通量是比較大的，所以偵測器放置可對這些重點方位多留意。建議可以選擇對水平面上方訊號敏感的方向放置偵測器，增加有效面積可以接收到比較多簇發訊號。

4.2.3 能量分布

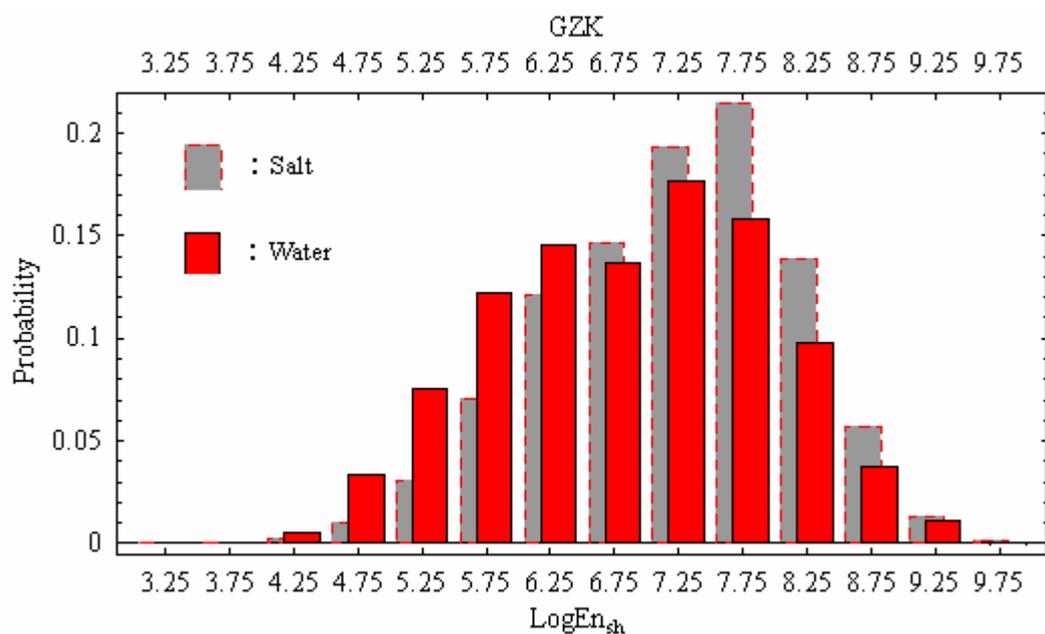


圖 4-13：總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from GZK ν_τ
 由上圖可知能量大約在在 $10^{7.5}$ GeV 處，可看到較多簇射事件。

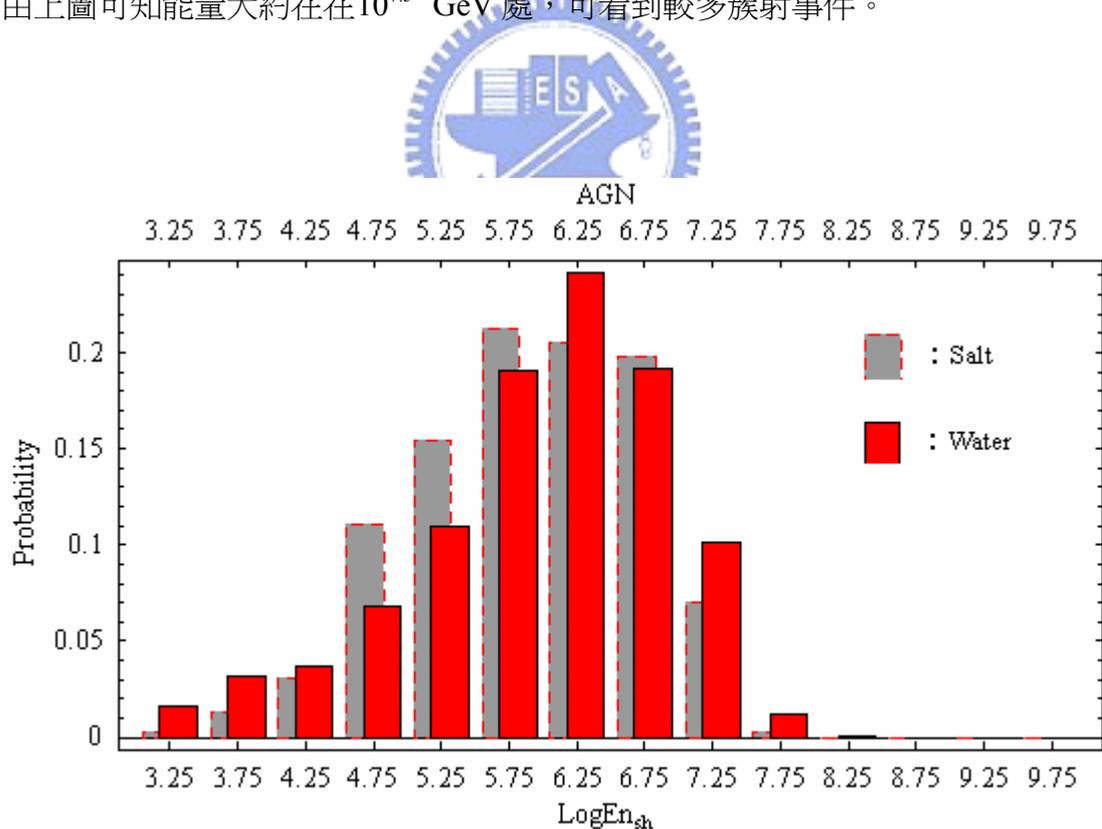


圖 4-14：總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from AGN ν_τ
 由上圖可知能量大約在在 $10^{6.25}$ GeV 處，可看到較多簇射事件。

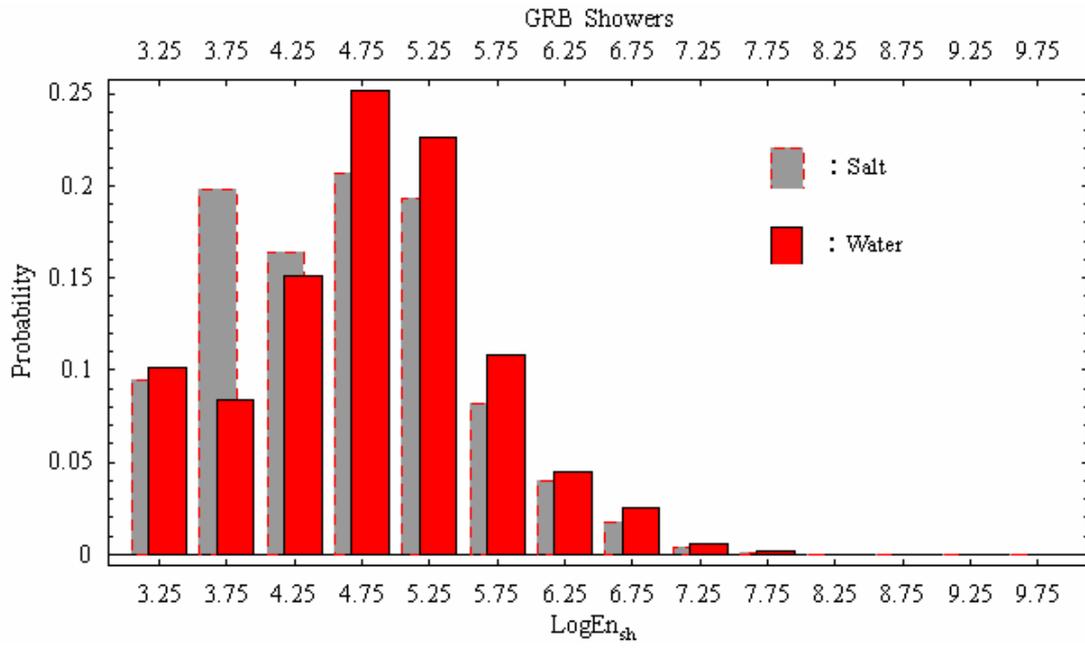


圖 4-15：總簇射與能量分佈圖 In Std. Salt and Water from GRB ν_τ
 由上圖可知能量大約在在 10^5 GeV 處，可看到較多簇射事件。



4.2.4 簇射比率分布

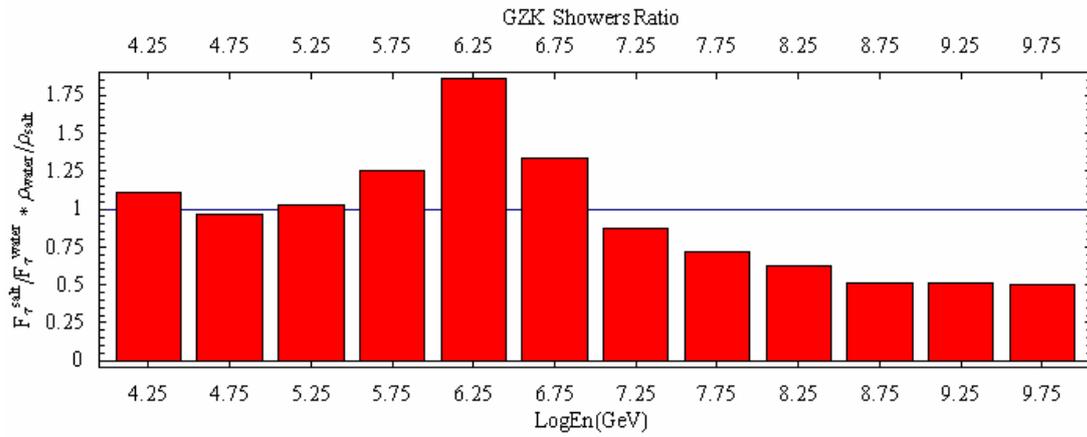


圖 4-16 : $\frac{F_{\tau}^{salt}}{F_{\tau}^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From GZK ν_{τ}

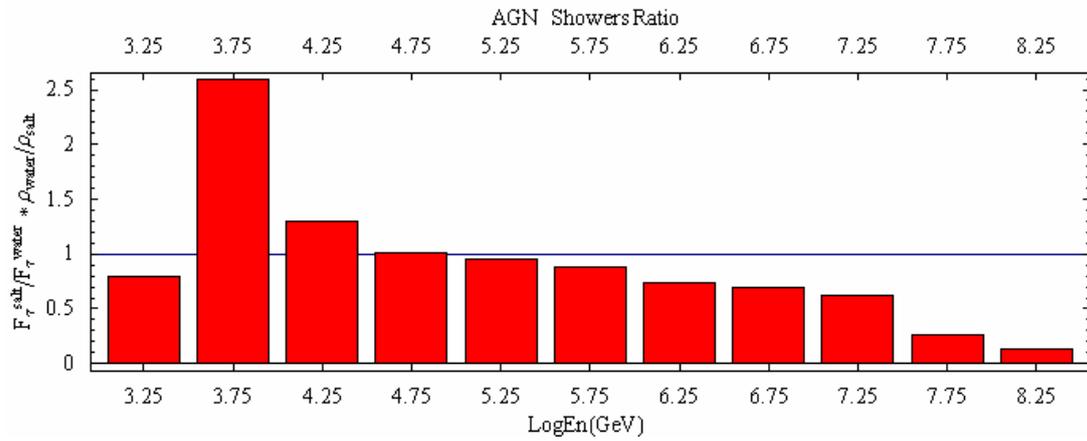


圖 4-17 : $\frac{F_{\tau}^{salt}}{F_{\tau}^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From AGN ν_{τ}

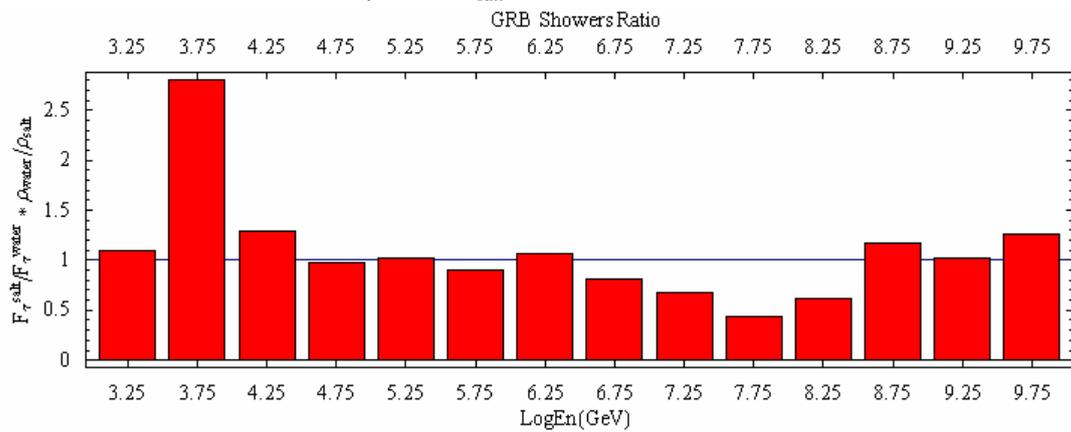


圖 4-18 : $\frac{F_{\tau}^{salt}}{F_{\tau}^{water}} \times \frac{\rho_{water}}{\rho_{salt}}$ 比例分布圖 From GRB ν_{τ}

F_{τ}^{salt} : τ 行進在 salt 裡發生簇射的通量， $\rho_{salt}=2.16 \text{ g/cm}^3$ 是 salt 的密度。

F_{τ}^{water} : τ 行進在 water 裡發生簇射的通量， $\rho_{water}=1 \text{ g/cm}^3$ 是 water 的密度。

4.2.4.1 簇射比率分布討論

圖 4-16，可以看到對於 GZK ν 來源的微中子，在 Salt DSR 與 Water DSR 中，前者與後者產生簇射的通量在簇射能量區 $10^{6.5} \text{ GeV}$ 附近有一非常明顯的比例突出，所以若是以偵測 GZK ν 的來源，就可藉由這兩種不同介質產生的簇射數量分布比例圖更加已確定。

圖 4-17，4-18，可以知道對於 AGN 或 GRB ν 來源的微中子，在 Salt DSR 與 Water DSR 中，前者與後者產生簇射的通量在簇射能量區 $10^{3.75}$ 附近都有一非常明顯的比例突出，然而前者與後者產生簇射的通量在簇射能量區 $10^{7.75}$ 附近都有一非常明顯的比例下降。

這幾張圖的不同特性也呈現出 GZK 與 AGN，GRB Flux 本身特性的不同，而造成簇射明顯差異，可以看到 GZK Flux 在能量 $10^7 \sim 10^8 \text{ GeV}$ 是呈顯增加的走勢，而 AGN，GRB 是呈現減少的走勢，本身 Flux 的差異造成簇射在兩介質中比值的高峰位置不同，對於鑑別微中子的來源是很好的一個方法。

4.2.5 不同來源簇射比例

這裡主要是給讓讀者知道一些不同來源所造成簇射的比例結構，分別由 NC，CC，Energy Loss，Decay 造成的簇射，這裡給大家一些參考，相信對實驗者有莫大的幫助，縱軸是對於該能量區全部簇射的比例值。

4.2.5.1 不同來源簇射比例 From GZK ν_{τ}

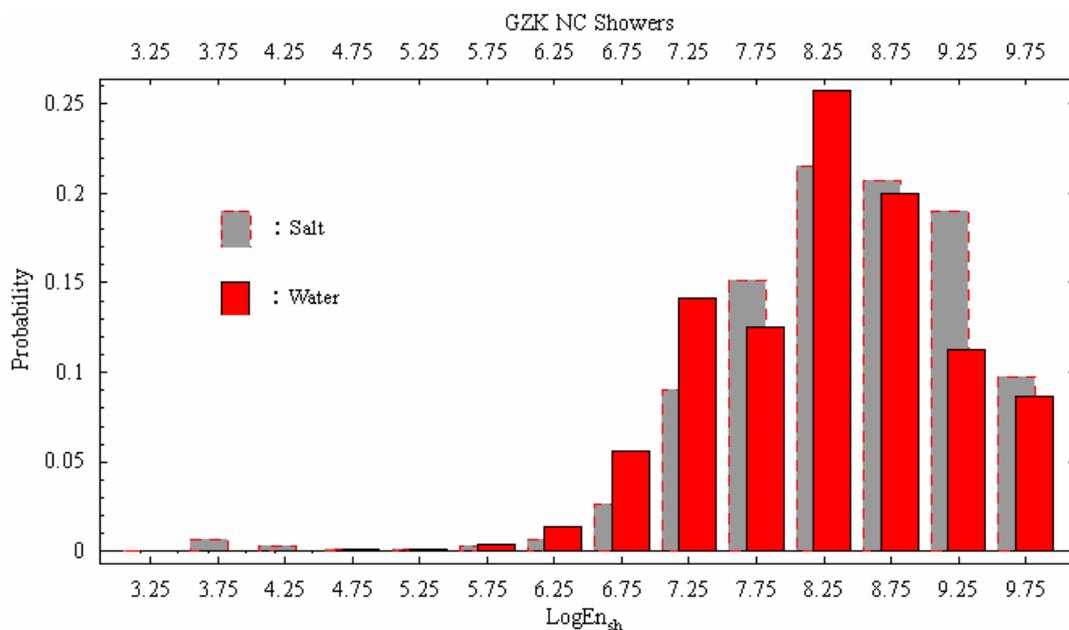


圖 4-19：由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ 。

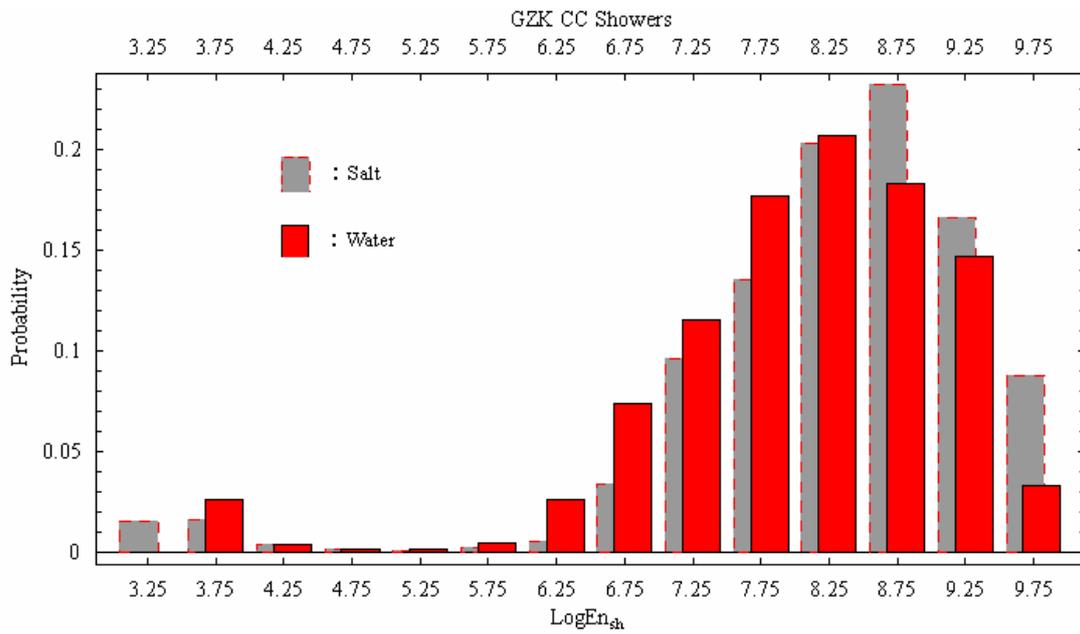


圖 4-20：由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ 。

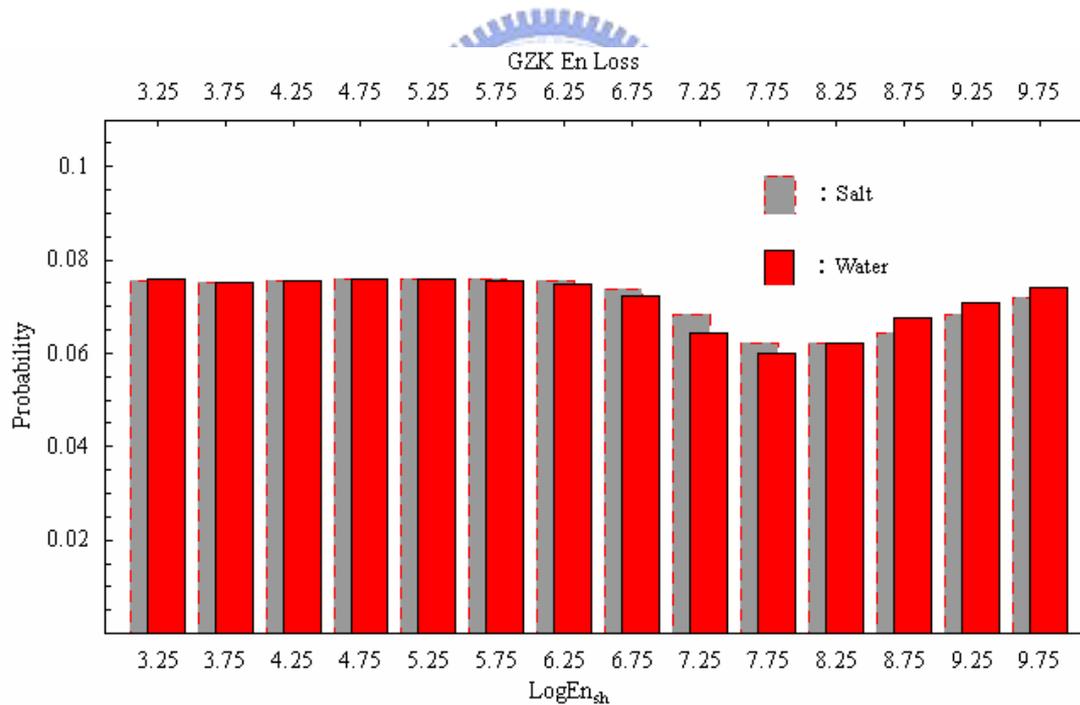


圖 4-21：由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_τ 。

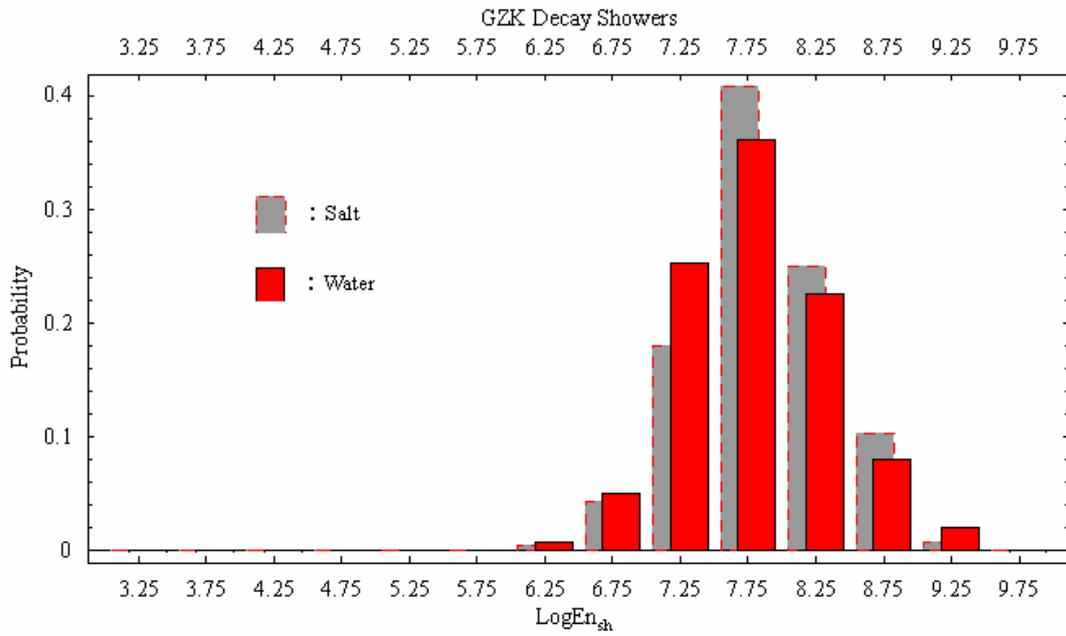


圖 4-22：由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GZK ν_e 。

4.2.5.2 不同來源簇射比例 From AGN ν_e

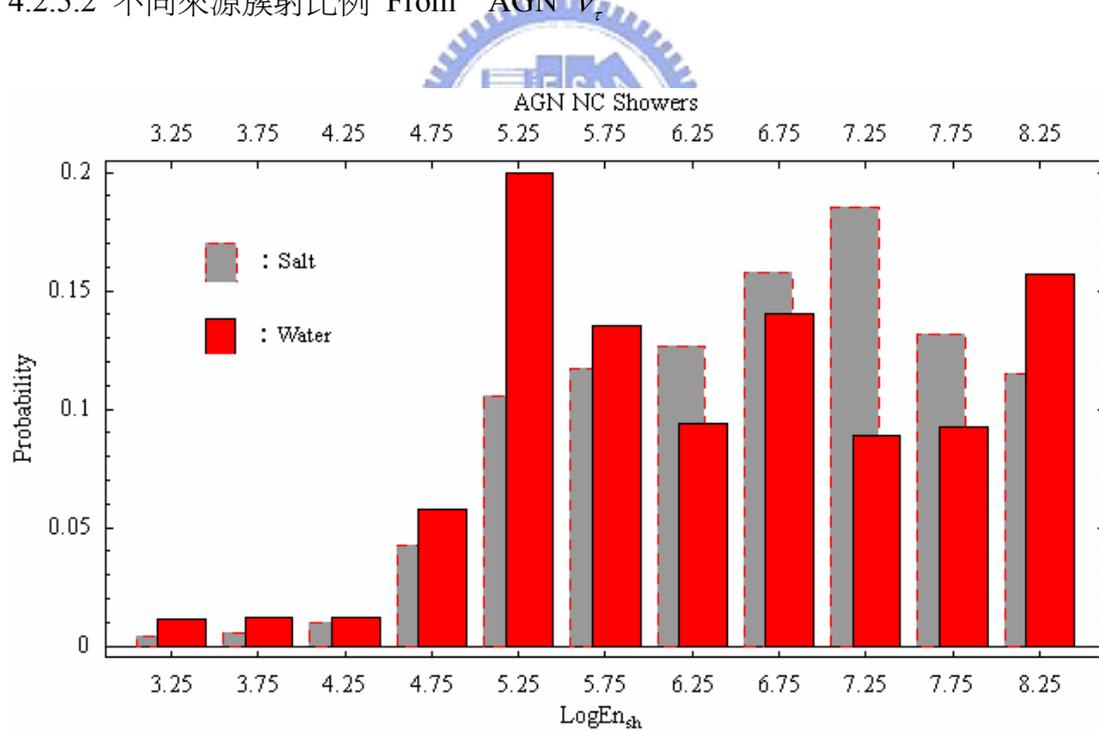


圖 4-23：由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_e 。

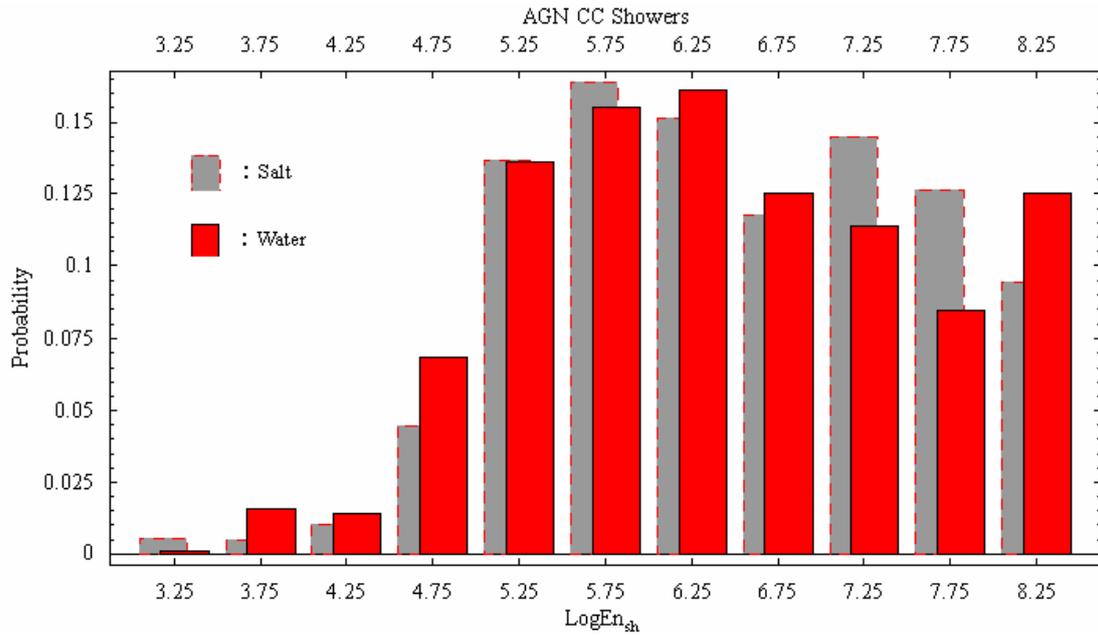


圖 4-24：由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_e 。

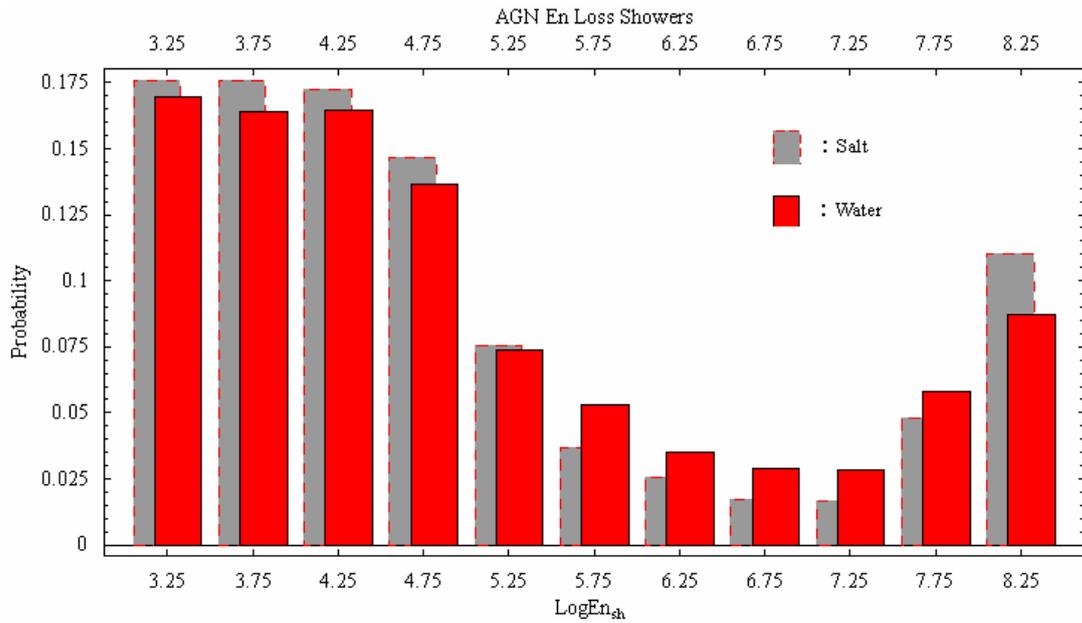


圖 4-25：由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_e 。

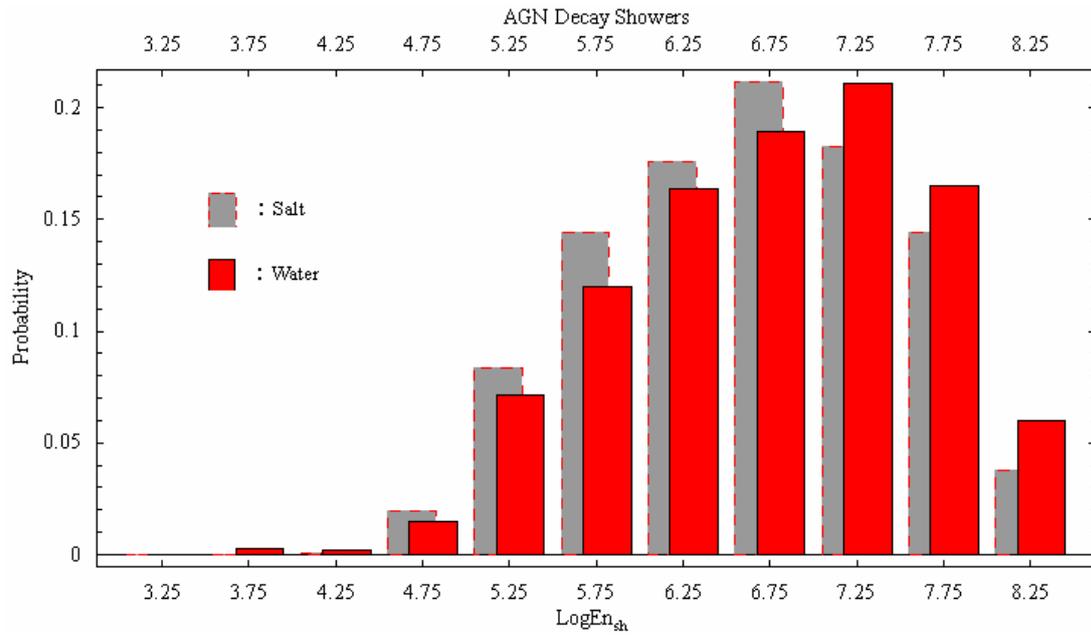


圖 4-26：由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From AGN ν_r 。

4.2.5.3 不同來源簇射比例 From GRB ν_r

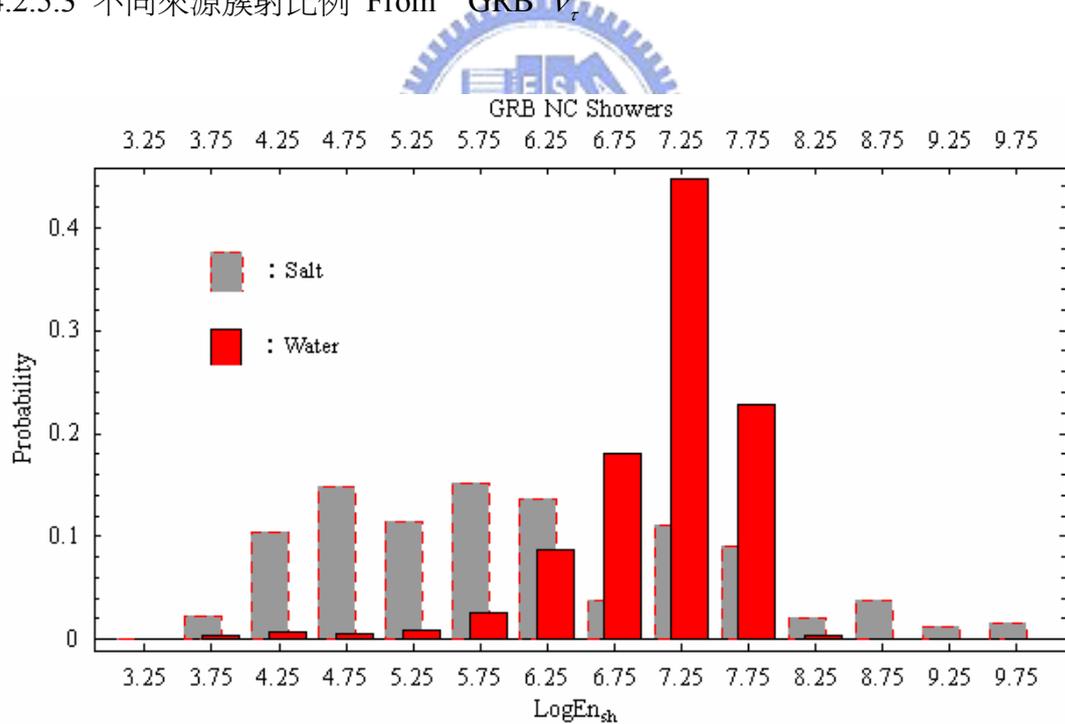


圖 4-27：由 NC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_r 。

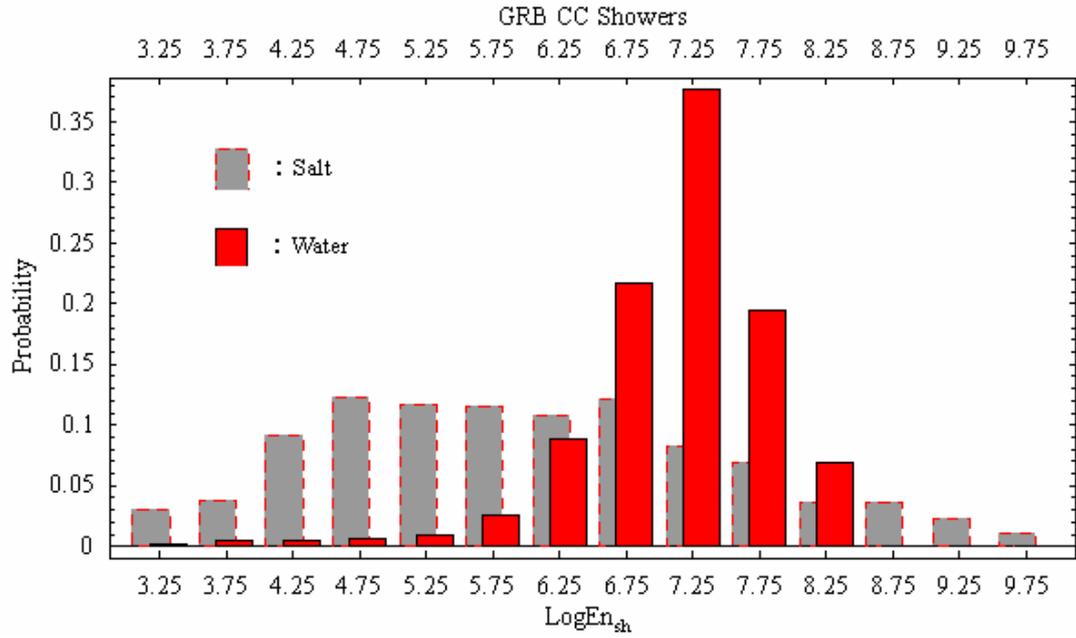


圖 4-28：由 CC 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_r 。

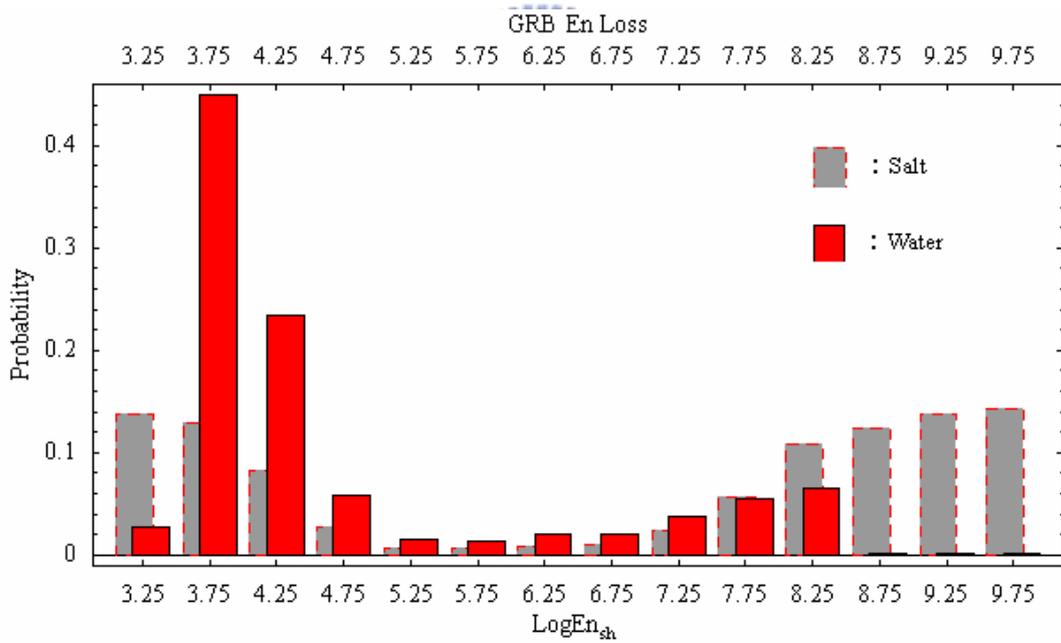


圖 4-29：由 Energy Loss 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_r 。

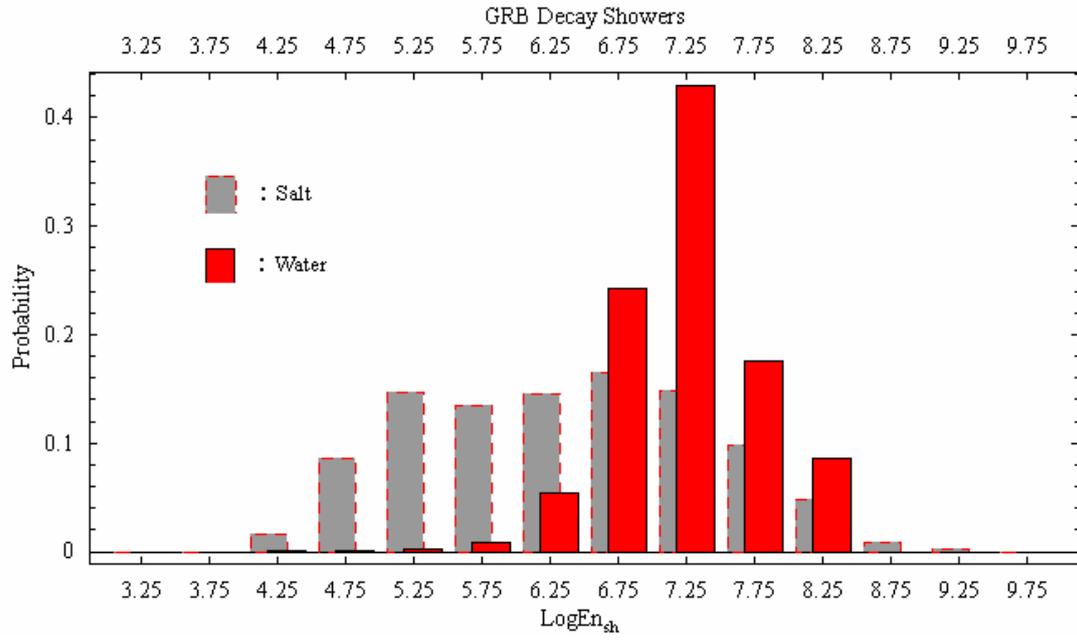


圖 4-30：由 Decay 引起簇射與總簇射比例分配圖 In DSR From GRB ν_τ 。



參考資料：

- [1] : For a recent review article, see, for instance, F. Halzen, astro-ph/0111059.
- [2] : J.N. Matthews, C.C.Jui, Nucl. Phys. Proc. Suppl. B 87 (2000) 411.
- [3] : M. Takeda et al., Astrophys. J. 522 (1999) 225 ; N. Hayshida et al, astro-ph/0008102.
- [4] : C.L. Cowan and J.R.Reines, Phys. Rev. 107 (1957) 528.
- [5] : G. Danny, J-M. Gaillard, K.Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, J. Steinberger, Phys. Rev. Lett. 9 (1962) 36.
- [6] : Donut Collaboration (B. Buller for the Collaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. 98 (2001) 43.
- [7] : 有關太陽微中子難題，請參考 J.N. Bahcall and M. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. 67 (1995) 781. 超級神岡實驗設施及相關物理介紹
- [8] : 超級神岡 Super-K 實驗設施及相關物理介紹：
<http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index1.html>
- [9] : Hjorth et al., Nature 423 (2003) 847.
- [10] : R. P. Kokoulin and A. A. Petrukhin, in Proceedings of the XII International Conference on Cosmic Rays, Vol. 6.
- [11] : L. B. Bezrukov and E. V. Bugaev, Yad. Fiz. 33,1995(1981)
- [12] : L. Pasquali and M.H. Reno,Phys. Rev. D 59,093003(1999).
- [13] : S. Lyer Dutta, M. H. Reno,I. Sarcevic, and D. Seckel, Phys. Rev. D 63,094020 (2001)
- [14] : HETE-2, High-Energy Transient Explorer satellite
- [15] : V.S. Berezinsky and G.T. Zatsepin, Phys. Lett. **28B**, 423(1969). For a recent discussion, see R. Engel, D. Seckel, and T.Stanev, Phys. Rev. D **64**, 093010 (2001).
- [16] : A. Neronov, D. Semikoz, F. Aharonian, and O. Kalashev, Phys.Rev. Lett. **89**, 051101 (2002); O.E. Kalashev, V.A. Kuzmin,D.V. Semikoz, and G. Sigl, Phys. Rev. D **66**, 063004 (2002).
- [17] : E. Waxman and J.N. Bahcall, Phys. Rev. Lett. **78**, 2292 (1997);Phys. Rev. D **59**, 023002 (1999)
- [18] : 容震軒，「A monte-carlo study on earth-skimming tau neutrinos」，國立交通大學，碩士論文，2004年六月