以最折衷的一組權重來排序 DEA 的高效點

學生：張宏偉　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：劉復華

國立交通大學工業工程與管理學系碩士班

摘　要

在多指標的績效評比中，可以使用資料包絡分析法 (Data Envelopment Analysis; DEA) 來將決策單位 (Decision-Making Units; DMUs) 區分為高效 (Efficient) 以及低效 (Inefficient) 的兩個群體。在本篇論文中假設有一位高層的決策者 (Decision Maker; DM) “擁有” 或者是 “管理” 所有的 DMUs。在這種屬於內部組織評比的情況下，決策者就會想要將高效的決策單位 (Efficient DMUs; *e*DMUs) 來加以排序。因此本篇論文提出了一個新的方法，可以針對各個指標 (Index) 來計算出一組最折衷的指標權重 (The Most Compromising Indices' Weight)。使用這組共同權重所算出來的新的績效值將會跟基準線 (Datum Line) 產生最小的總落差 (Gaps)。由於本模式會產生多重解，故本篇論文採用二階段選取法來求解，先於第一階段計算出總落差，再於第二階段求得所需之共同權重。位於基準線上的 *e*DMUs，其績效值會等於一，而其它的 *e*DMUs 則可能位於基準線的上方或者是下方。本方法的概念和統計學在迴歸分析 (Regression Analysis) 中的最小平方法 (Ordinary Least-Square Method; OLS) 有點類似，因此我們提出了一個多輸入和單一輸出的例子來比較本篇論文所提出的方法和迴歸分析。

關鍵字：資料包絡分析法、共同權重、排序、迴歸分析、折衷基準

Ranking DEA Efficient Units With the Most Compromising Set of Indices’ Weights

Student: Hong-Wei Chang Advisor: Fuh-Hwa F. Liu

Department of Industrial Engineering & Management
National Chiao Tung University

ABSTRACT

One may employ data envelopment analysis (DEA) to discriminate decision-making units (DMUs) into efficient and inefficient ones based upon the multiple inputs and outputs performance indices. In this paper we consider a centralized decision maker (DM) who ‘owns’ or ‘supervises’ all the DMUs. In such intraorganizational scenario the DM has an interest in discriminating the efficient DMUs (*e*DMUs). This paper presents a new method that determines the most compromising set of indices’ weights. The total of the new efficiency scores of *e*DMUs with the most compromising set of indices’ weights has the least total gaps to the compromising datum. We use a two-phase procedure to calculate the total gaps in phase one and determine common weights in phase two. The *e*DMUs have efficiency score equal to one are located on the datum. The other *e*DMUs are either located above or below the datum. The approach is an analog to the ordinary least-square method (OLS) of the residuals in statistical regression analysis. We compare the results of an example with multiple inputs and a single output under the proposed approach and regression analysis.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Common Weight, Ranking, Regression Analysis, Compromising Datum

誌謝

首先要感謝的是指導教授 劉復華教授，在劉教授悉心的指導及豐富的學養薰陶下，給予本人極大的協助和指引，使我能克服研究的瓶頸。口試期間，更承蒙清華大學計量財務金融學系張國平教授、本系梁馨科副教授及經營管理研究所胡均立副教授提供寶貴的意見，使本論文得以更嚴謹周詳的面貌呈現。

其次要感謝的是諸位同窗給予求學資源的協助，也要感謝我的父母親張文周與陳每不時的教誨。最後願將這份論文完成的喜悅，與所有幫助過我的人一起分享。

學生張宏偉 謹誌

于交通大學工業工程與管理學系

民國九十四年六月

目錄

表目錄

圖目錄

第一章　前言

Charns, Cooper 和 Rhodes (1978) 提出了可以用來評估比較 (Comparative) 或相對 (Relative) 效率的資料包絡分析法 (Data Envelopment Analysis; DEA)，此方法可以用來評估學校、醫院或零售店……等的同質性 DMUs。此 DMU 的評估是基於一組資源 (輸入指標) 會轉換成一組產出 (輸出指標) 的前題下。DEA 是用加權後的輸出總和除以加權後的輸入總和來計算績效值。同時 DEA 會將 DMUs 區分成兩個群體：高效率的 DMUs (Efficient DMUs; *e*DMUs) 和低效率的 DMUs (Inefficient DMUs; *i*DMUs)。對於 *i*DMU 而言，它的績效值是跟某些其它的 DMU 比較之後所得到的。一般而言，我們不能使用 DEA 來做絕對的效率衡量，除非在被評比的 DMUs 中存在一定數量的 DMUs 可以稱為絕對的高效率。屬於高效率的 DMU 得到一組權重使得它擁有最大的相對績效值 1。對於績效值為 1 的 DMUs 而言，DEA 沒有足夠的能力加以排序。如果有人想要知道哪個 DMU 最好的話，就必須要使用另外一個方法來區分這群 *e*DMUs。

在近幾年來，關於共同權重和排序的研究逐漸的被發表出來。Cook et al. (1990) 首先的提出了在 DEA 中使用共同權重的想法。Andersen 和 Petersen (1993) 則提出了一個方法來針對 *e*DMUs 進行排序。Doyle 和 Green (1994) 使用交叉效率矩陣 (Cross-Efficiency Matrix) 中每個 DMU 的平均效率值來進行排序。Tofallis et al. (2001) 結合資料包絡分析法和迴歸分析來進行效率

的評估。Liu 和 Peng (2003) 提出了共同權重分析法 (Common Weights Analysis; CWA) 來針對 *e*DMUs 進行排序。CWA 在所有 *e*DMUs 的最大績效值為 1 的假設下，找出了一條基準線，因此用這個方法所找出來的每一個 DMU 的績效值就可能等於 1 或小於 1。Liu 和 Peng (2004) 又提出了超高效共同權重分析法 (Super Common Weights Analysis; SCWA) 來針對 *e*DMUs 進行排序。SCWA 在所有 *e*DMUs 的最小績效值為 1 的假設下，找出了一條基準線，而用這個方法所找出來的每一個 DMU 的績效值就可能等於 1 或大於 1。

然而有些情況是所有的 DMUs 都由同一個上層的 DM 來管理。這種情況即發生在所有的 DMUs 都由相同的組織 (不論是公立的或私立的) 來提供必要的資源時。在應用傳統 DEA 來評量像：銀行分行、大學系所、消防局和警察局……等單位的時候，就很有可能會碰到這樣的問題。在這種狀況之下，就會需要一組比較折衷的指標權重來評比 *e*DMUs。

在這篇論文中我們提出了一個方法來為 *e*DMUs 找出一組最折衷的指標權重並進行排序。我們將此“絕對的”效率基準設為一，而使用這組最折衷的權重所算出來的絕對績效值則可能高於基準線、等於基準線或低於基準線，同時這些效率值將會跟基準線產生最小的總落差。由於迴歸分析的原理和最折衷權重分析法 (The Most Compromising Weights Analysis; MCWA) 是相似的，因此在本篇論文中亦將迴歸分析和 MCWA 加以比較，

以便了解其異同。第二章我們回顧 DEA、複迴歸分析、CWA 和 SCWA 的基本概念。第三章我們先說明 MCWA 的理論基礎，接著解釋 MCWA 的排序規則，同時提出二階段選取法來解決線性規劃中的多重解問題。第四章提出了一個例子來對 MCWA、迴歸分析、CWA 和 SCWA 進行分析比較。最後我們提出了結論跟未來可能的研究方向。

第二章　文獻回顧

第一節 資料包絡分析法

Banker et al. (1984) 提出在m個輸入和s個輸出指標的n個決策單位 (Decision-Making Units; DMUs) 的情形下，對DMU_j而言，假定其輸入和輸出指標的符號分別為 $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})$ 和 $(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{sj})$，則可以對每個DMU分別評量其變動規模報酬下的效率值。若我們稱每次在被評比的DMU為DMU_o $(o = 1, 2, \ldots, n)$，則可解以下的分式線性規劃問題 (P1) 來得到輸入的相對權重 v_{io} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 和輸出的相對權重u_{ro} $(r = 1, 2, \ldots, s)$。ε 是一個正的阿基米得數 (Archimedean Infinitesimal Constant)。

(P1)【BCC-FP】

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{ro} u_{ro} - u_0}{\sum_{i=1}^{m} x_{io} v_{io}} \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} u_{ro} - u_0}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{io}} \le 1, \quad j = 1, \cdots, n, \\
& u_{ro} \ge \varepsilon > 0, \quad r = 1, \cdots, s, \\
& v_{io} \ge \varepsilon > 0, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& u_0 \text{ free.}
\end{aligned}
$$

當 θ_o^* = 1 時，我們就稱此DMU_o為高效率的 (Efficient)。同時我們定義 E =

$\{ j \mid \theta_j^* = 1, j = 1,\ldots, n\}$ 來代表這群高效率的DMU (爾後用eDMUs來表示)之集合。DEA強調的是追求個別DMU$_o$的最佳績效。然而我們常常會發現有一些DMUs會有相同的績效值，例如：在DEA高效前緣上的那些DMUs。

第二節 複迴歸分析

迴歸模式中包含兩個以上的自變數 (Independent Variable) 時，就稱其為複迴歸模式 (Multiple Regression Model)。若考慮以下資料集合時：

表 1 複迴歸的資料集合

DMU	自變數				應變數
	X_1	X_2	…	X_m	Y
1	x_{11}	x_{21}	…	x_{m1}	y_1
2	x_{12}	⋱		x_{m2}	y_2
⋮	⋮			⋮	⋮
n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{mn}	y_n

我們可以考慮m個自變數$X_1, X_2, \ldots, X_m$跟應變數Y的關係式如下：

$$y_j = \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \ldots + \beta_m x_{mj} + e_j$$

以上的方程式即為複迴歸分析中的無截距模式 (Without-Intercept Model)，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 為迴歸係數 (Regression Coefficients) 而e_j 則稱為觀察值j的殘差 (Residual) 或誤差項 (Error Term)。

接著用極小化下列殘差平方和的方法來導出$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$

$$Q = \Sigma_{(j=1,..,n)}(y_j - (\beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \ldots + \beta_m x_{mj}))^2$$

而所找出的最小值$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_m$就稱為$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$的最小平方估計值 (Least Squares Estimates) 或最小平方迴歸系數 (Least Squares Regression Coefficients)。若將 Q 分別對$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$做微分並令其等於零可得以下的正規方程式 (Normal Equation)：

$$\Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}y = \beta_1 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}^2 + \beta_2 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}x_{2j} + \ldots + \beta_m \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}x_{mj}$$

$$\Sigma_{(j=1,..,n)} x_{2j}y = \beta_1 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}\, x_{2j} + \beta_2 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{2j}^2 + \ldots + \beta_m \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{2j}x_{mj}$$

$$\vdots$$

$$\Sigma_{(j=1,..,n)} x_{mj}y = \beta_1 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{1j}\, x_{mj} + \beta_2 \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{2j}\, x_{mj} + \ldots + \beta_m \Sigma_{(j=1,..,n)} x_{mj}^2$$

求解以上的方程式可以得到最小平方估計值$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_m$，最後，我們就可以使用以下的迴歸模式

$$Y = \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \ldots + \hat{\beta}_m X_m$$

來對特定值 x 估計 Y。

第三節 共同權重分析法

Liu和Peng (2004a) 提出了共同權重分析法 (Common Weight Analysis; CWA) 來計算指標的共同權重 ($U_1, \ldots, U_s, V_1, \ldots, V_m$)。這組共同權重是在所有的$e$DMUs都在相同的基準的情況下所決定出來的。我們將明確的效率基準設為一。當我們使用這組共同權重來計算績效值時，這些eDMU絕對的績

效值可能會等於或小於一。而績效值的總和是極大化的，或我們可以說所有eDMUs到基準線上的落差總和是極小化的。

(P2) 【CWA-FP】

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j\in E}\left(\Delta_j^O+\Delta_j^I\right) \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r+\Delta_j^O}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i-\Delta_j^I}=1, \quad j\in E, \\
& \Delta_j^O, \Delta_j^I \ge 0, \qquad j\in E, \\
& U_r \ge \varepsilon > 0, \qquad r=1,\cdots,s, \\
& V_i \ge \varepsilon > 0, \qquad i=1,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

Liu和Peng (2004b) 提出了超高效共同權重分析法 (Super Common Weight Analysis; SCWA) 來計算指標的共同權重（$U_1,\ldots, U_s, V_1,\ldots, V_m$）。這組共同權重是在所有的$e$DMUs都在相同的基準的情況下所決定出來的。我們將明確的效率基準設為一。當我們使用這組共同權重來計算績效值時，這些eDMUs絕對的績效值可能會等於或大於一。而績效值的總和是極小化的，或我們可以說所有eDMUs到基準線上的落差總和是極小化的。

(P3) 【SCWA-FP】

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in E} \left(\Delta_j^O + \Delta_j^I \right) \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r - \Delta_j^O}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i + \Delta_j^I} = 1, \quad j \in E, \\
& \Delta_j^O, \Delta_j^I \geq 0, \qquad j \in E, \\
& U_r \geq \varepsilon > 0, \qquad r = 1, \cdots, s, \\
& V_i \geq \varepsilon > 0, \qquad i = 1, \cdots, m.
\end{aligned}
$$

第三章　方法論

第一節　最折衷的指標權重分析法

本篇論文提出了一個方法來計算最折衷的指標權重。此方法是在所有的 *e*DMUs 都在相同的基準下所決定的。我們將絕對的效率基準設為一。當我們使用這組共同權重來計算各 *e*DMU 的績效值時，其績效值可能會大於、等於或小於一。而這些 *e*DMUs 到基準線上的落差 (Gaps) 總和是最小化的。由於此方法主要是可以產生最小的總落差，換言之即使得每個 *e*DMU 彼此之間的落差能夠最小，因此如果當某個中央管理者想要使得他所管理的組織能夠有一個較平均的績效表現的時候，則可採用本篇論文所提出的方法來做評比。

這個方法跟統計迴歸分析裡面的最小平方法 (Ordinary Least-Square Method; OLS) 是相似的，其原理如下圖所示：

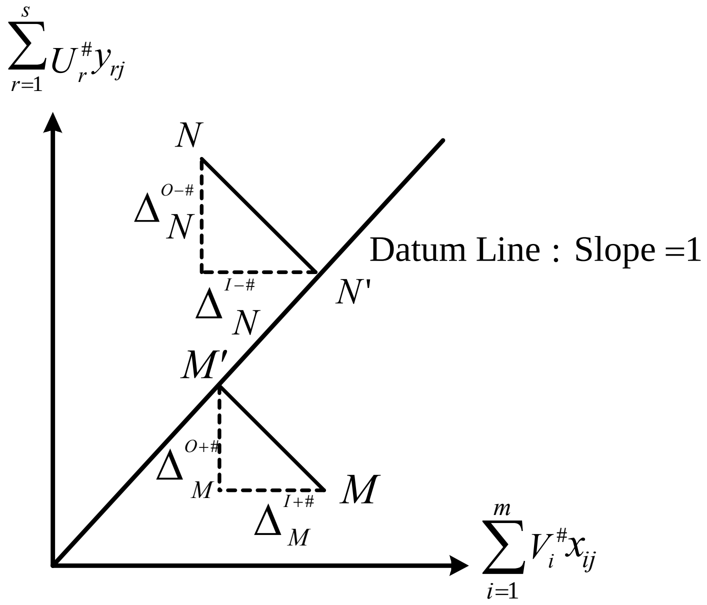

圖 1　MCWA 中的落差分析

本文中之上標符號 # 表示任一給定之常數。如果給定了$U_r^{\#}$ 和 $V_i^{\#}$，每個DMU, 暫且稱為j, 在此二維平面上的座標即為 $(\Sigma_{(i=1,\ldots,m)}x_{ij}V_i^{\#}, \Sigma_{(r=1,\ldots,s)}y_{rj}U_r^{\#})$。如果有一DMU其$\Sigma_{(i=1,\ldots,m)}x_{ij}V_i^{\#} = \Sigma_{(r=1,\ldots,s)}y_{rj}U_r^{\#}$，在座標平面上，通過其與原點的連線就是所謂的基準線，如圖 1 所示。例如，給定了$U_r^{\#}$ 和 $V_i^{\#}$之後，DMU M和DMU N的位置可以被決定，而他們的投影點 M’和 N’ 也將會被確認。對於在基準線上方的DMU N而言，他的投影點座標為$(\Sigma_{(i=1,\ldots,m)}x_{i\mathrm{N}}V_i^{\#} + \Delta_{\mathrm{N}}^{I-\#}, \Sigma_{(r=1,\ldots,s)}y_{r\mathrm{N}}U_r^{\#} - \Delta_{\mathrm{N}}^{O-\#})$。另一方面，對於在基準線下方的DMU M而言，他的投影點座標為 $(\Sigma_{(i=1,\ldots,m)}x_{i\mathrm{M}}V_i^{\#} - \Delta_{\mathrm{M}}^{I+\#}, \Sigma_{(r=1,\ldots,s)}y_{r\mathrm{M}}U_r^{\#} + \Delta_{\mathrm{M}}^{I+\#})$。舉例而言，DMU M位於基準線的下方，他的落差就是M點到N點的距離，用L_1-norm的觀點來看，就是將$\Delta_{\mathrm{M}}^{O+\#}$和$\Delta_{\mathrm{M}}^{I+\#}$相加。同理而言，DMU N是位於基準線的下方，其落差就是$\Delta_{\mathrm{N}}^{O-\#}$和$\Delta_{\mathrm{N}}^{I-\#}$。因為在基準線

上的$\Sigma_{(r=1,\ldots,s)} y_{rj} U_r^{\#}$ 等於$\Sigma_{(i=1,\ldots,m)} x_{ij} V_i^{\#}$ 所以基準線的斜率為一。對任意的DMU$_j$而言，不論他位於基準線的上方或下方，皆可以將他的投影點座標用($\Sigma_{(i=1,\ldots,m)} x_{ij} V_i^{\#}$ － $\Delta_j^{I\#}$, $\Sigma_{(r=1,\ldots,s)} y_{rj} U_r^{\#}$ ＋ $\Delta_j^{O\#}$) 來表示，而其中$\Delta_j^{I\#}$ 和 $\Delta_j^{O\#}$是自由的 (Free) 變數。

若已知n個DMU在各指標$X_1, X_2, \ldots, X_m$ 及$Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ 的數據，且其代表符號為x_{ij}, y_{rj} (i=1,...,m, r=1,...,s, j=1,...,n)，如表 2 所示，則可用模式 (P4)求出最佳的U_r^*, V_i^*使得總落差為最少。

表 2 MCWA 的資料集合

DMU	輸入				輸出			
	X_1	X_2	$\cdots$	X_m	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_s
1	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{m1}	y_{11}	y_{21}	$\cdots$	y_{s1}
2	x_{12}	$\ddots$		x_{m2}	y_{12}	$\ddots$		y_{s2}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
n	x_{1n}	x_{2n}	$\cdots$	x_{mn}	y_{1n}	y_{2n}	$\cdots$	y_{sn}

(P4) 【MCWA-FP 1】

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in E} \left(|\Delta_j^O| + |\Delta_j^I| \right) \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r + \Delta_j^O}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i - \Delta_j^I} = 1, \quad j \in E, \\
& U_r \geq \varepsilon > 0, \qquad r = 1, \cdots, s, \\
& V_i \geq \varepsilon > 0, \qquad i = 1, \cdots, m, \\
& \Delta_j^O, \Delta_j^I \text{ free}, \qquad j \in E.
\end{aligned}
$$

在此我們分別用大寫字母V_i 和 U_r來表示第i 個輸入和第r 個輸出的最折衷共同權重。這和傳統DEA所定義的相對權重是不同的。ε 仍然為一個正的阿基米得數，我們使用此常數來避免得到 0 的權重值。E代表eDMUs所形成的集合。如果我們將Δ_j^O 和 Δ_j^I 用不為一的常數加權的話，等式右手邊的績效值則會改變。我們可以將模式 (P4) 轉換為以下的模式(P5)。

(P5) 【MCWA-FP 2】

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in E}\left[\left(\Delta_j^{O+}+\Delta_j^{O-}\right)+\left(\Delta_j^{I+}+\Delta_j^{I-}\right)\right] \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r+\left(\Delta_j^{O+}-\Delta_j^{O-}\right)}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i-\left(\Delta_j^{I+}-\Delta_j^{I-}\right)}=1, \quad j \in E, \\
& U_r \geq \varepsilon>0, \qquad r=1,\cdots,s, \\
& V_i \geq \varepsilon>0, \qquad i=1,\cdots,m, \\
& \Delta_j^{O+}, \Delta_j^{O-}, \Delta_j^{I+}, \Delta_j^{I-} \geq 0, \qquad j \in E.
\end{aligned}
$$

接著我們可以將分式型模式（P5）轉換為線性規劃模式 (P6)。

(P6) 【MCWA-LP 1】

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in E}\left[\left(\Delta_j^{O+}+\Delta_j^{O-}\right)+\left(\Delta_j^{I+}+\Delta_j^{I-}\right)\right] \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} y_{rj} U_r-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i+\left(\Delta_j^{O+}-\Delta_j^{O-}\right)+\left(\Delta_j^{I+}-\Delta_j^{I-}\right)=0, \qquad j \in E, \\
& U_r \geq \varepsilon>0, \qquad r=1,\cdots,s, \\
& V_i \geq \varepsilon>0, \qquad i=1,\cdots,m, \\
& \Delta_j^{O+}, \Delta_j^{O-}, \Delta_j^{I+}, \Delta_j^{I-} \geq 0, \qquad j \in E.
\end{aligned}
$$

為了減少模式 (P6) 的複雜度，我們用 $\Delta_j^{+}=\Delta_j^{O+}+\Delta_j^{I+}$ 和 $\Delta_j^{-}=\Delta_j^{O-}+\Delta_j^{I-}$ 來減

少變數的數目，並將模式 (P6) 簡化為模式 (P7)。

(P7)【MCWA-LP 2】

$$
\begin{aligned}
&\Delta^* = \min\ \Delta = \sum_{j\in E}(\Delta_j^+ + \Delta_j^-) \\
&s.t. \quad \sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \Delta_j^+ - \Delta_j^- = 0, \quad j \in E, \\
&\qquad U_r \ge \varepsilon > 0, \qquad r = 1,\cdots,s, \\
&\qquad V_i \ge \varepsilon > 0, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
&\qquad \Delta_j^+, \Delta_j^- \ge 0, \qquad j \in E.
\end{aligned}
$$

然後再將以上的線性規劃模式轉換為對偶模式 (P8)。

(P8) 【MCWA-DLP 1】

$$
\begin{aligned}
&\max\ \ \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} P_r + \sum_{i=1}^{m} Q_i\right) \\
&s.t. \quad \sum_{j\in E} y_{rj}\pi_j + P_r = 0, \qquad r = 1,\cdots,s, \\
&\qquad \sum_{j\in E} x_{ij}\pi_j - Q_i = 0, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
&\qquad \sum_{j\in E} \pi_j \le 1, \\
&\qquad -\sum_{j\in E} \pi_j \le 1, \\
&\qquad P_r \ge 0, \qquad r = 1,\cdots,s, \\
&\qquad Q_i \ge 0, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
&\qquad \pi_j \text{ free}, \qquad j \in E.
\end{aligned}
$$

我們可以再將限制式合併來得到對偶模式 (P9)。

(P9) 【MCWA-DLP 2】

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} P_r + \sum_{i=1}^{m} Q_i\right) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in E} y_{rj}\pi_j + P_r = 0, && r = 1,\cdots,s, \\
& \sum_{j \in E} x_{ij}\pi_j - Q_i = 0, && i = 1,\cdots,m, \\
& -1 \le \sum_{j \in E} \pi_j \le 1, \\
& P_r \ge 0, && r = 1,\cdots,s, \\
& Q_i \ge 0, && i = 1,\cdots,m, \\
& \pi_j \text{ free}, && j \in E.
\end{aligned}
$$

觀察模式 (P9)，我們發現將 ε 設為任意常數皆不會影響線性規劃的結果。換句話說，不論 ε 設定為多少我們皆會得到相同的結果。因此我們可以將 ε 設為一來簡化模式。除此之外，我們可以利用 (P9) 來對低排名DMUs的改進方向做一些說明。P_r 和 Q_i 分別是所有DMUs在第 r 個輸出和第 i 個輸入上到基準線的差距總和。此外，P_r 和 Q_i 可以被分解為 $P_r = \sum_{(j \in E)} p_{rj}$ 和 $Q_i = \sum_{(j \in E)} q_{ij}$ 而將模式 (P9) 轉換成模式 (P10)。在模式 (P10) 中，p_{rj} 和 q_{ij} 分別為 DMU_j 在第 r 個輸出和第 i 個輸入上到基準線的差距。

(P10) 【MCWA-DLP 2】

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j\in E}\left(\sum_{r=1}^{s} p_{rj} + \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\right) \\
s.t. \quad & \sum_{j\in E} y_{rj}\pi_j = -\sum_{j\in E} p_{rj}, \quad r=1,\cdots,s, \\
& \sum_{j\in E} x_{ij}\pi_j = \sum_{j\in E} q_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \\
& -1 \le \sum_{j\in E} \pi_j \le 1, \\
& p_{rj} \ge 0, \quad r=1,\cdots,s, \quad j\in E, \\
& q_{ij} \ge 0, \quad i=1,\cdots,m, \quad j\in E, \\
& \pi_j \text{ free}, \quad j\in E.
\end{aligned}
$$

本文中上標符號 * 表示為線性規劃模式中決策變數所求得的最佳值。而我們可以用以下的定理來求得模式 (P10) 的解。

【定理 1】

情況 1：對於位於基準線下方的DMUs而言（其 Δ_j^{-*} 為 0），DMU$_j$在輸出指標r和輸入指標i上到基準線的差距 p_{rj}^* 和 q_{ij}^* 為 $[P_r^*\Delta_j^{+*} / \Delta^*]$ 和 $[Q_i^*\Delta_j^{+*} / \Delta^*]$。

證明：我們假設

$$
\sum_{r=1}^{s} U_r^*\left(y_{rj} + P_r^*\frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*}\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} V_i^*\left(x_{ij} - Q_i^*\frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*}\right) = 1 \tag{4}
$$

則我們能夠將其分成分子和分母兩個部份來分析。首先我們將分子

$$
\sum_{r=1}^{s} U_r^*\left(y_{rj} + P_r^*\frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*}\right) \tag{5}
$$

化簡成

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} + \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \text{，} \tag{6}$$

再將分母

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* \left(x_{ij} - Q_i^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \right) \tag{7}$$

化簡成

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \text{。} \tag{8}$$

因為

$$\Delta^* = \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \text{，} \tag{9}$$

所以

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} + \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \tag{10}$$

$$= \sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} + \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \left(\sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \right) \tag{11}$$

$$= \sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} + \Delta_j^{+*} = 0 \text{。} \tag{12}$$

這條限制式符合模式 (P7) 的限制式。因此得證：

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* \left(y_{rj} + P_r^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} V_i^* \left(x_{ij} - Q_i^* \frac{\Delta_j^{+*}}{\Delta^*} \right) = 1 \text{。} \tag{13}$$

情況 2：對於位於基準線上方的DMUs而言（其 Δ_j^{+*} 為 0），DMU$_j$在輸出指標r和輸入指標i上到基準線的差距 p_{rj}^* 和 q_{ij}^* 為 $[P_r^* \Delta_j^{-*} \ / \ \Delta^*]$ 和 $[Q_i^* \Delta_j^{-*} \ / \ \Delta^*]$。

證明：我們假設

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* \left(y_{rj} - P_r^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} V_i^* \left(x_{ij} + Q_i^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) = 1 \tag{14}$$

則我們能夠將其分成分子和分母兩個部份來分析。首先我們將分子

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* \left(y_{rj} - P_r^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) \tag{15}$$

化簡成

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \text{，} \tag{16}$$

再將分母

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* \left(x_{ij} + Q_i^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) \tag{17}$$

化簡成

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \text{。} \tag{18}$$

因為

$$\Delta^* = \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \text{，} \tag{19}$$

所以

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \tag{20}$$

$$= \sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} - \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \left(\sum_{r=1}^{s} U_r^* P_r^* + \sum_{i=1}^{m} V_i^* Q_i^* \right) \tag{21}$$

$$= \sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij} - \Delta_j^{-*} = 0 \text{ 。} \tag{22}$$

這條限制式符合模式 (P7) 的限制式。因此得證：

$$\sum_{r=1}^{s} U_r^* \left(y_{rj} - P_r^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} V_i^* \left(x_{ij} + Q_i^* \frac{\Delta_j^{-*}}{\Delta^*} \right) = 1 \text{ 。} \tag{23}$$

第二節　MCWA 的排序規則

這一節我們會說明MCWA的排序規則。首先，我們將DMU$_j$ 的MCWA績效值定義如方程式 (24)：

$$\theta_j^{M*} = \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^* x_{ij}}, \quad j \in E \tag{24}$$

在定義排序規則之前，我們首先將 DMUs 區分為三個群體。

【定義 1】

當 $\Delta_j^{+*} + \Delta_j^{-*} = 0$ 或 $\theta_j^{M*} = 1$ 時，此DMU$_j$位於基準線上。當 $\theta_j^{M*} > 1$ 時，此DMU$_j$位於基準線上方。其他情況DMU$_j$則位於基準線下方。

為了要排序 DMUs 我們必須先建立以上的分類規則。接著我們即可用以下的定義來排序 DMUs。

【定義 2】

當 $\theta_{j1}^{M*} > \theta_{j2}^{M*}$ 時，表示DMU$_{j1}$優於DMU$_{j2}$。

【定義 3】

在 $\theta_{j1}^{M*} = \theta_{j2}^{M*} < 1$ 的情況下，如果 $\Delta_{j1}^{+*} + \Delta_{j1}^{-*} < \Delta_{j2}^{+*} + \Delta_{j2}^{-*}$，則DMU$_{j1}$ 優於 DMU$_{j2}$ 。

在 $\theta_{j1}^{M*} = \theta_{j2}^{M*} > 1$ 的情況下，如果 $\Delta_{j1}^{+*} + \Delta_{j1}^{-*} > \Delta_{j2}^{+*} + \Delta_{j2}^{-*}$，則 DMU$_{j1}$ 優於 DMU$_{j2}$ 。

對於事先假定某個目標是我們的基準線是不必要的。事實上，我們可以把位於基準線上的 DMU 當成我們的標準。因此我們必須先確定至少有一個

DMU 會位於基準線上。

【定理 2】

至少有一個 DMU 會位於基準線上。

證明：假定我們求得了模式 P(7)裡的最佳值，而其最佳值為共同權重 U_r^*, V_i^* 和 $\Delta_j^{+*}, \Delta_j^{-*}$ 且 $\Delta_j^{+*}, \Delta_j^{-*} > 0$ $(\forall j \in E)$。這表示沒有 DMUs 位於基準線上，我們將其分為以下三種情況來討論：

情況 1：當位於基準線上方的 DMUs 個數多於位於基準線下方的 DMUs 個數時。

我們設定常數 k_j 使得

$$\sum_{r=1}^{s} k_j y_{rj} U_r^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^* = 1, \forall j \in \text{位於基準線下方的 DMUs 之集合且}$$

$$k_j > 1。 \tag{25}$$

定義 $K = \min\{k_j, j \in \text{位於基準線下方的DMUs之集合}\}$。

此組新的共同權重 KU_r^* 和不變量 V_i^* 將會減少位於基準線下方的 DMUs 的 Δ_j^{+*} 和增加位於基準線上方的 DMUs 的 Δ_j^{-*}。

情況 2：當位於基準線上方的 DMUs 個數少於位於基準線下方的 DMUs 個數時。

我們設定常數 k_j 使得

$$\sum_{r=1}^{s} k_j y_{rj} U_r^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^* = 1, \forall j \in \text{位於基準線上方的 DMUs 之集合且}$$

$$k_j < 1。 \tag{26}$$

定義 $K = \max \{k_j, j \in$ 位於基準線上方的DMUs之集合$\}$。

此組新的共同權重 KU_r^* 和不變量 V_i^* 將會增加位於基準線下方的 DMUs 的 Δ_j^{+*} 和減少位於基準線上方的 DMUs 的 Δ_j^{-*}。

以上情況 1 與情況 2 皆會於第一階段產生較小的目標值，也就是代表此線性規劃沒有被最佳化。

情況 3：當位於基準線上方的 DMUs 個數等於位於基準線下方的 DMUs 個數時。

我們設定常數k_j 使得

$$\sum_{r=1}^{s} k_j y_{rj} U_r^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} V_i^* = 1, \forall j \in \text{位於基準線上方的 DMUs 之集合且} \quad k_j < 1。 \tag{27}$$

定義 $K = \max \{k_j, j \in$ 位於基準線上方的DMUs之集合$\}$。

此組新的共同權重 KU_r^* 和不變量 V_i^* 將會於第二階段產生較小的目標值，也就是代表此線性規劃沒有被最佳化。

於以上三種情況中，我們皆可以設定一組新的共同權重 KU_r^* 和 V_i^* 使得至少有一組 $\Delta_j^{+*} + \Delta_j^{-*} = 0$。因此，我們可以得證至少有一個 DMU 位於基準線上。

【定義 4】

如果 $\theta_{j1}^{M*} = \theta_{j2}^{M*} = 1$ 表示他們皆為 MCWA基準，此時，若影價 $\pi_{j1}^* < \pi_{j2}^*$，表示DMU$_{j1}$ 優於 DMU$_{j2}$。

Dantzig et al. (1997) 提出模式 (P7) 中每個限制式的對偶變數 π_j 為影價 (Shadow Price)。根據影價的定義，如果方程式 (28) 在第 j 個限制式的右手邊增加一單位的話，方程式 (29) 也就是目標式將會得到變量 π_j。

$$\sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \Delta_j^{+} - \Delta_j^{-} = 0 + 1 \tag{28}$$

$$\left(\sum_{j\in E}\left(\Delta_j^{+*} + \Delta_j^{-*}\right)\right) + \pi_j^{*}(0+1) \tag{29}$$

在此情況中，π_j^* 代表第j個MCWA基準DMU想要提高他的績效值的時候，對總落差的影響。因此我們可以得到每個MCWA基準DMU不同的改變量。除此之外，假如產生多重MCWA基準DMUs的話，π_j^* 將會說明那個DMU對總落差有最大的影響，而對DMUs進行排序。根據以上個定義，我們可以將 eDMUs 進行排序。

第三節　實做 MCWA：二階段選取法

模式 (P7) 常常會產生多重解。而指標權重的多重解將會產生不同的排序。為了能夠得到一組適當且唯一的權重，我們必須使用以下的二階段選取法：

【第一階段】

解模式 (P11) 以得到最佳值 Δ^*。

(P11)

$$
\begin{aligned}
&\Delta^* = \min\ \Delta = \sum_{j\in E}(\Delta_j^+ + \Delta_j^-) \\
&s.t.\quad \sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \Delta_j^+ - \Delta_j^- = 0, \quad j\in E, \\
&\qquad U_r \ge \varepsilon, \qquad\qquad r = 1,\cdots,s, \\
&\qquad V_i \ge \varepsilon, \qquad\qquad i = 1,\cdots,m, \\
&\qquad \Delta_j^+, \Delta_j^- \ge 0, \qquad\quad j\in E.
\end{aligned}
$$

在模式 (P9) 中，我們解釋了 ε 並不會影響決策變數的結果。而在我們的例子中，我們檢測 ε 的值，其從 10^{-6} 到 10^{+6} 皆產生相同的結果。

【第二階段】

解以下的線性規劃 (P12) 以得到我們所需的共同權重。

(P12)

$$
\begin{aligned}
&\min\ \sum_{r=1}^{s} U_r - \sum_{i=1}^{m} V_i \\
&s.t.\quad \sum_{r=1}^{s} y_{rj}U_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}V_i + \Delta_j^+ - \Delta_j^- = 0, \quad j\in E, \\
&\qquad \sum_{j\in E}(\Delta_j^+ + \Delta_j^-) = \Delta^* \\
&\qquad U_r \ge \varepsilon, \qquad\qquad r = 1,\cdots,s, \\
&\qquad V_i \ge \varepsilon, \qquad\qquad i = 1,\cdots,m, \\
&\qquad \Delta_j^+, \Delta_j^- \ge 0, \qquad\quad j\in E.
\end{aligned}
$$

在此對第二階段做簡短的解釋，Obata 和 Ishii (2003) 提出在相同的乘積（Product）下，對於輸出資料而言應該採用較小的權重向量。這表示此乘

積的偏好是由資料本身所產生，而不是由權重所影響的。同樣地，我們對於輸入資料而言應該使用較大的權重向量。本篇論文計算權重向量的方式是從 L_1-norm 的觀點。我們無法證明我們得到的權重向量是絕對唯一的，但是我們儘可能的減少的多重解的可能性。

第四節　MCWA 和複迴歸的關連性

對每個 DMU 有兩個輸入和一個輸出的特殊情況而言，在模式 (P7) 的限制式將會變成：

$$y_j U_1 - x_{1j} V_1 - x_{2j} V_2 + \Delta_j^+ - \Delta_j^- = 0,\ j \in E \tag{30}$$

再將他轉換成：

$$y_j = x_{1j}\frac{V_1}{U_1} + x_{2j}\frac{V_2}{U_1} - \frac{\Delta_j^+}{U_1} + \frac{\Delta_j^-}{U_1} = 0,\ j \in E \tag{31}$$

定義 $V_1/U_1=\alpha_1$，$V_2/U_1=\alpha_2$和 $-\Delta_j^+/U_1 + \Delta_j^-/U_1 = e_j^M$ 可再將限制式重寫成：

$$y_j = \alpha_1 x_{1j} + \alpha_2 x_{2j} \tag{32}$$

此方程式和複迴歸方程式 (3) 是相似的。

第四章　實證分析

第一節　資料和計算結果

我們使用微軟公司所出版的 EXCEL 軟體中的規劃求解 (Solver) 來進行線性規劃模式的計算。首先我們使用 CCR 或 BCC 模式來評比 DMUs 並將其分為高效率的和低效率的兩群。接著我們針對 *e*DMUs，使用 MCWA 模式來針計算最折衷的指標權重，在計算 MCWA 的時候我們先解第一階段模式 (P11) 來求得總落差，再使用第二階段模式 (P12) 來求得共同權重，最後我們就將這些 *e*DMUs 排序。

考慮以下五個 DMUs 且有兩個輸入和一個輸出的例子，他們的資料如表 3 所示。注意 DMU E 的規模比其他 DMUs 都大。

表 3　範例資料一

DMU_j	x_{1j}	x_{2j}	y_j
A	5	12	2
B	18	16	5
C	15	9	3
D	10	12	3
E	50	59	15

這五個 DMUs 都是經過 BCC 模式評比後的高效點。再經過 MCWA 的計算，(P11) 與 (P12)，我們發現 DMU E 的績效值等於一。如表 4 所示，

我們可以得知 DMU E 是基準。有此可知，這組最折衷的權重會被大規模 DMUs 強烈的影響，但是他們並不被保證一定為基準。

DMUs 的排序如表 4 所示，除此之外，我們也列出了每個 DMU 在各個指標上到基準線的差距。然而，值得注意的是排序為第一的 DMU 並不保證為所有 DMUs 的最佳參考點。

表 4　BCC-*e*DMUs 績效值的排序

排名	DMU_j	θ_j^{M*}	Δ_j^{+*}	Δ_j^{-*}	影價 π_j^*	p_{1j}^*	q_{1j}^*	q_{2j}^*
1	B	1.069	0	2.333	-0.056	0	0.648	1.685
2	E	1	0	0	0.056	0	0	0
3	D	0.991	0.2	0	0.056	0	0.056	0.144
4	C	0.908	2.2	0	0.056	0	0.611	1.589
5	A	0.855	2.467	0	0.056	0	0.685	1.781

第二節　MCWA 與迴歸分析的比較

在以下的表 5 和表 6，我們可以發現 MCWA 和迴歸分析的結果是相似的，而他們之間的差別應該是由基準線和迴歸線的斜率不同所造成的。

表 5　MCWA 和迴歸分析的結果

DMU$_j$	MCWA			迴歸
	Δ_j^{+*}/U_1^*	Δ_j^{-*}/U_1^*	e_j^M	e_j^R
A	0.339	0	-0.339	-0.117
B	0	0.321	0.321	0.356
C	0.303	0	-0.303	-0.294
D	0.028	0	-0.028	0.105
E	0	0	0	-0.049
總計	$\sum_j \lvert e_j^M \rvert = 0.991$			$\sum_j \lvert e_j^R \rvert = 0.921$

表 6　MCWA 和迴歸分析的參數比較

MCWA		迴歸	
$\alpha_1 = V_1^*/U_1^*$	0.138	$\hat{\beta}_1$	0.156
$\alpha_2 = V_2^*/U_1^*$	0.138	$\hat{\beta}_2$	0.126

MCWA 方程式為

$$y_j = \alpha_1 x_{1j} + \alpha_2 x_{2j} + e_j^M = 0.138x_{1j} + 0.138x_{2j} + e_j^M .$$

迴歸方程式為

$$y_j = \hat{\beta}_1 x_{1j} + \hat{\beta}_2 x_{2j} + e_j^R = 0.156x_{1j} + 0.126x_{2j} + e_j^R .$$

第三節　模式的比較

考慮以下十五個 DMUs 且有兩個輸入和兩個輸出的問題。他們的資料

如表 7 所示。

表 7　範例資料二

DMU_j	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}
A	8	3	20	45
B	33	2	33	52
C	6	2	2	31
D	25	4	63	52
E	2	36	52	1
F	6	38	30	49
G	9	3	40	3
H	35	12	88	44
I	15	133	223	32
J	100	61	15	333
K	33	11	66	99
L	553	111	55	321
M	22	13	95	22
N	51	5	94	11
O	4	7	9	3

如表 8 所示，我們在 CWA, SCWA 和 MCWA 得到了不同的排序。但是我們可以發現在三種模式中，DMU A 皆為第一名而 DMU L 皆為最後一名。

表 8　三種模式結果比較

<table>
<tr><th rowspan="2">排名</th><th colspan="4">CWA</th><th colspan="4">SCWA</th><th colspan="4">MCWA</th></tr>
<tr><th>DMU_j</th><th colspan="2">θ_j^{C*}</th><th>Δ_j^{+*}</th><th colspan="2">DMU_j</th><th>θ_j^{S*}</th><th>Δ_j^{-*}</th><th>DMU_j</th><th>θ_j^{M*}</th><th>Δ_j^{+*}</th><th>Δ_j^{-*}</th></tr>
<tr><td>1</td><td>A</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">A</td><td>9.1</td><td>99.97</td><td>A</td><td>4.85</td><td>0</td><td>51.59</td></tr>
<tr><td>2</td><td>I</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">C</td><td>7.38</td><td>56.7</td><td>D</td><td>3.57</td><td>0</td><td>82.78</td></tr>
<tr><td>3</td><td>E</td><td colspan="2">0.99</td><td>0.09</td><td colspan="2">D</td><td>5.51</td><td>138.89</td><td>C</td><td>3.43</td><td>0</td><td>23.39</td></tr>
<tr><td>4</td><td>F</td><td colspan="2">0.92</td><td>7.11</td><td colspan="2">K</td><td>5.5</td><td>220.18</td><td>K</td><td>3.12</td><td>0</td><td>112.15</td></tr>
<tr><td>5</td><td>C</td><td colspan="2">0.68</td><td>15.49</td><td colspan="2">B</td><td>3.89</td><td>103.78</td><td>G</td><td>2.98</td><td>0</td><td>28.59</td></tr>
<tr><td>6</td><td>M</td><td colspan="2">0.64</td><td>66.71</td><td colspan="2">J</td><td>3.71</td><td>509.91</td><td>M</td><td>2.57</td><td>0</td><td>71.54</td></tr>
<tr><td>7</td><td>K</td><td colspan="2">0.62</td><td>101.69</td><td colspan="2">G</td><td>3.46</td><td>32.82</td><td>H</td><td>2.33</td><td>0</td><td>75.35</td></tr>
<tr><td>8</td><td>G</td><td colspan="2">0.59</td><td>29.73</td><td colspan="2">M</td><td>3.44</td><td>99.33</td><td>B</td><td>2.32</td><td>0</td><td>48.39</td></tr>
<tr><td>9</td><td>D</td><td colspan="2">0.58</td><td>82.51</td><td colspan="2">H</td><td>3.41</td><td>125.91</td><td>N</td><td>1.75</td><td>0</td><td>44.98</td></tr>
<tr><td>10</td><td>H</td><td colspan="2">0.47</td><td>151.2</td><td colspan="2">F</td><td>2.14</td><td>69.57</td><td>J</td><td>1.66</td><td>0</td><td>137.93</td></tr>
<tr><td>11</td><td>J</td><td colspan="2">0.42</td><td>489.06</td><td colspan="2">N</td><td>2</td><td>58.34</td><td>F</td><td>1.06</td><td>0</td><td>4.43</td></tr>
<tr><td>12</td><td>B</td><td colspan="2">0.33</td><td>172.28</td><td colspan="2">I</td><td>1.39</td><td>81.34</td><td>I</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>13</td><td>O</td><td colspan="2">0.31</td><td>26.25</td><td colspan="2">O</td><td>1.07</td><td>1.03</td><td>E</td><td>0.79</td><td>13.96</td><td>0</td></tr>
<tr><td>14</td><td>N</td><td colspan="2">0.26</td><td>294.61</td><td colspan="2">E</td><td>1</td><td>0</td><td>O</td><td>0.72</td><td>4.63</td><td>0</td></tr>
<tr><td>15</td><td>L</td><td colspan="2">0.09</td><td>4016.4</td><td colspan="2">L</td><td>1</td><td>0</td><td>L</td><td>0.5</td><td>377.31</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Δ^* = 5453.04</td><td colspan="4">Δ^* = 1597.77</td><td colspan="4">Δ^* = 1077</td></tr>
<tr><td rowspan="2">權重</td><td>V_1^*=</td><td>V_2^*=</td><td>U_1^*=</td><td>U_2^*=</td><td>V_1^*=</td><td>V_2^*=</td><td>U_1^*=</td><td>U_2^*=</td><td>V_1^*=</td><td>V_2^*=</td><td>U_1^*=</td><td>U_2^*=</td></tr>
<tr><td>7.73</td><td>1.05</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1.45</td><td>1</td><td>2.05</td><td>1</td><td>1.8</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

CWA, SCWA 和 MCWA可能會產生不同的排序。而我們不能主觀的選擇任何一種模式來做最後的排序。對 DMU_j 而言，我們用 θ_j^{C*}, θ_j^{S*} 和 θ_j^{M*} 分別表示由 CWA, SCWA, 和 MCWA 模式所求得的績效值，則我們可用以下的模式來評比 DMU_o 的相對排序。w^C, w^S 和 w^M 分別為其相關模式的權重。

(P13)

$$
\begin{aligned}
&\Phi_o^* = \max \quad \Phi_o = \theta_o^{C*} w^C + \theta_o^{S*} w^S + \theta_o^{M*} w^M \\
&s.t. \quad \theta_j^{C*} w^C + \theta_j^{S*} w^S + \theta_j^{M*} w^M \le 1, \quad j \in E, \\
&\qquad w^C, w^S, w^M \ge 0.
\end{aligned}
$$

最後我們即可用模式 (P13) 來得到所有 DMUs 的最後排序。

表 9　最後排序

排名	DMU_j	Φ_j^*	w^{C*}	w^{S*}	w^{M*}
1	A	1	1	0	0
2	I	1	0	0	0.43
3	E	0.998	0	0.136	0
4	F	0.917	0	0	0.28
5	C	0.81	1.001	0	0
6	D	0.737	1.09	0	0
7	K	0.644	0	0	0.335
8	M	0.637	0	0	0.429
9	G	0.616	1	0	0
10	H	0.481	2.405	0	0
11	B	0.479	0	0	0.32
12	J	0.416	0	1	0
13	N	0.361	1.57	0	0
14	O	0.314	0	0	0.572
15	L	0.11	3.187	0	0

第四節　實例驗證

廖金環 (2003) 使用資料包絡法評量台灣各縣市2001年資源回收之績

效，本研究所使用的指標，包含輸入項為：「垃圾處理人力」、「垃圾處理車輛」、「平均每人環保經費」及「資源回收機構」等四項；而輸出項為：「平均每日垃圾清運量」及「平均每日資源回收量」等二項。根據模式 (P1) 的定義，績效值的計算是將輸入項置於分母而輸出項置於分子，因此輸入項必須具有望小特性而輸出項則必須具有望大特性。在求得權重之後代入績效值的公式可得到我們需要的績效值。本研究由行政院主計處網站（http://www.dgbas.gov.tw/mp.asp?mp=1）及環保署資源回收基管會網站（http://recycle.epa.gov.tw/）整理2003年之各項分析資料如表10。使用基本BCC模式得到*e*DMUs為：台北縣、宜蘭縣、桃園縣、新竹縣、苗栗縣、台中縣、彰化縣、雲林縣、嘉義縣、花蓮縣、澎湖縣、基隆市、新竹市、台中市、嘉義市、台南市和台北市，共十七個，其計算結果如表11所示。

表 10 台灣各縣市輸入及輸出指標資料

DMU	j	輸入指標				輸出指標	
		垃圾處理人力 (單位：人) X_1	垃圾處理車輛 (單位：輛) X_2	平均每人環保經費 (單位：元) X_3	資源回收機構 (單位：家) X_4	平均每日垃圾清運量 (單位：公噸) Y_1	平均每日資源回收量 (單位：公噸) Y_2
台北縣	1	$x_{1,1}$=2043	$x_{2,1}$=1778	$x_{3,1}$=1860	$x_{4,1}$=39	$y_{1,1}$=2972	$y_{2,1}$=329
宜蘭縣	2	$x_{1,2}$=138	$x_{2,2}$=276	$x_{3,2}$=960	$x_{4,2}$=10	$y_{1,2}$=316	$y_{2,2}$=48
桃園縣	3	$x_{1,3}$=751	$x_{2,3}$=722	$x_{3,3}$=1540	$x_{4,3}$=38	$y_{1,3}$=1396	$y_{2,3}$=167
新竹縣	4	$x_{1,4}$=258	$x_{2,4}$=225	$x_{3,4}$=1070	$x_{4,4}$=15	$y_{1,4}$=357	$y_{2,4}$=32
苗栗縣	5	$x_{1,5}$=147	$x_{2,5}$=355	$x_{3,5}$=970	$x_{4,5}$=15	$y_{1,5}$=422	$y_{2,5}$=43
台中縣	6	$x_{1,6}$=369	$x_{2,6}$=806	$x_{3,6}$=1570	$x_{4,6}$=30	$y_{1,6}$=977	$y_{2,6}$=114
彰化縣	7	$x_{1,7}$=416	$x_{2,7}$=503	$x_{3,7}$=980	$x_{4,7}$=18	$y_{1,7}$=903	$y_{2,7}$=116
南投縣	8	$x_{1,8}$=252	$x_{2,8}$=271	$x_{3,8}$=1090	$x_{4,8}$=13	$y_{1,8}$=341	$y_{2,8}$=42
雲林縣	9	$x_{1,9}$=278	$x_{2,9}$=341	$x_{3,9}$=810	$x_{4,9}$=7	$y_{1,9}$=509	$y_{2,9}$=69
嘉義縣	10	$x_{1,10}$=225	$x_{2,10}$=305	$x_{3,10}$=970	$x_{4,10}$=20	$y_{1,10}$=489	$y_{2,10}$=42
台南縣	11	$x_{1,11}$=425	$x_{2,11}$=498	$x_{3,11}$=1080	$x_{4,11}$=21	$y_{1,11}$=900	$y_{2,11}$=85
高雄縣	12	$x_{1,12}$=474	$x_{2,12}$=518	$x_{3,12}$=1510	$x_{4,12}$=59	$y_{1,12}$=929	$y_{2,12}$=120
屏東縣	13	$x_{1,13}$=521	$x_{2,13}$=433	$x_{3,13}$=1100	$x_{4,13}$=32	$y_{1,13}$=734	$y_{2,13}$=39
台東縣	14	$x_{1,14}$=108	$x_{2,14}$=191	$x_{3,14}$=1370	$x_{4,14}$=6	$y_{1,14}$=202	$y_{2,14}$=35
花蓮縣	15	$x_{1,15}$=110	$x_{2,15}$=248	$x_{3,15}$=1410	$x_{4,15}$=24	$y_{1,15}$=317	$y_{2,15}$=40
澎湖縣	16	$x_{1,16}$=69	$x_{2,16}$=87	$x_{3,16}$=1350	$x_{4,16}$=20	$y_{1,16}$=72	$y_{2,16}$=13
基隆市	17	$x_{1,17}$=197	$x_{2,17}$=200	$x_{3,17}$=1360	$x_{4,17}$=3	$y_{1,17}$=303	$y_{2,17}$=51
新竹市	18	$x_{1,18}$=114	$x_{2,18}$=178	$x_{3,18}$=1880	$x_{4,18}$=4	$y_{1,18}$=337	$y_{2,18}$=44
台中市	19	$x_{1,19}$=486	$x_{2,19}$=287	$x_{3,19}$=1130	$x_{4,19}$=15	$y_{1,19}$=474	$y_{2,19}$=109
嘉義市	20	$x_{1,20}$=80	$x_{2,20}$=80	$x_{3,21}$=1470	$x_{4,20}$=1	$y_{1,20}$=245	$y_{2,20}$=19
台南市	21	$x_{1,21}$=429	$x_{2,21}$=256	$x_{3,21}$=1260	$x_{4,21}$=15	$y_{1,21}$=618	$y_{2,21}$=107
台北市	22	$x_{1,22}$=2995	$x_{2,22}$=1726	$x_{3,22}$=2500	$x_{4,22}$=12	$y_{1,22}$=1812	$y_{2,22}$=467
高雄市	23	$x_{1,23}$=1625	$x_{2,23}$=1255	$x_{3,23}$=2030	$x_{4,23}$=26	$y_{1,23}$=1195	$y_{2,23}$=207

表 11　BCC 模式的計算結果

DMU	j	績效值	被參考次數	參考集合
台北縣	1	1	1	台北縣
宜蘭縣	2	1	1	宜蘭縣
桃園縣	3	1	2	桃園縣
新竹縣	4	1	0	新竹縣
苗栗縣	5	1	0	苗栗縣
台中縣	6	1	0	台中縣
彰化縣	7	1	4	彰化縣
南投縣	8	0.9212911	2	雲林縣、澎湖縣
雲林縣	9	1	0	雲林縣
嘉義縣	10	1	1	嘉義縣
台南縣	11	0.9913381	1	桃園縣、彰化縣、嘉義市
高雄縣	12	0.9640475	0	桃園縣、彰化縣、嘉義市、台南市
屏東縣	13	0.9217311	1	彰化縣、雲林縣、台南市
台東縣	14	0.9985651	0	宜蘭縣、花蓮縣、新竹市、嘉義市
花蓮縣	15	1	3	花蓮縣
澎湖縣	16	1	2	澎湖縣
基隆市	17	1	1	基隆市
新竹市	18	1	1	新竹市
台中市	19	1	1	台中市
嘉義市	20	1	2	嘉義市
台南市	21	1	0	台南市
台北市	22	1	0	台北市
高雄市	23	0.6749746	0	台北縣、彰化縣、台北市

接著使用 MCWA 模式得到計算結果如表 12、表 13 所示。

表 12　各縣市績效值的排序

排名	DMU_j	θ_j^{M*}	Δ_j^{+*}	Δ_j^{-*}	影價 π_j^*
1	彰化縣	1.271	0	616.399	-0.024
2	桃園縣	1.152	0	560.301	-0.024
3	台北縣	1.151	0	1129.322	-0.024
4	台南市	1.05	0	117.325	-0.024
5	雲林縣	1.013	0	22.603	-0.024
6	台北市	1	0	0	0.014
7	台中市	1	0	0	0.024
8	台中縣	0.946	165.988	0	0.024
9	宜蘭縣	0.752	372.577	0	0.024
10	苗栗縣	0.717	457.03	0	0.024
11	嘉義縣	0.705	504.519	0	0.024
12	基隆市	0.613	747.131	0	0.024
13	花蓮縣	0.53	885.316	0	0.024
14	新竹縣	0.507	882.036	0	0.024
15	新竹市	0.476	1191.22	0	0.024
16	嘉義市	0.336	1127.954	0	0.024
17	澎湖縣	0.189	1286.019	0	0.024

在表 12 中我們可以看到台北市和台中市的績效值為 1，也就是說這次評比是以這兩個 DMUs 為基準，這一點對 MCWA 來講是合理的因為台北市所有資料的總和是最大的（亦即其規模最大）。而評比出來的結果彰化縣是第一名，這亦符合我們 MCWA 要計算一組最折衷的共同權重的要求，因為我們從他的資料可以發現其所有指標的資料皆屬於中高水準，桃園縣跟台北縣分別為第二、三名，澎湖縣則為最後一名，而澎湖縣為最後一名亦是合理的因為其兩個輸出指標在所有的 DMUS 中皆為最小的。

表 13　各縣市與基準線的差距

排名	DMU_j	q_{1j}^*	q_{2j}^*	q_{3j}^*	q_{4j}^*	p_{1j}^*	p_{2j}^*
1	彰化縣	18.691	213.853	9861.206	149.526	164.674	0
2	桃園縣	16.99	194.39	8963.741	135.917	149.687	0
3	台北縣	34.245	391.806	18066.998	273.95	301.704	0
4	台南市	3.558	40.705	1876.978	28.461	31.344	0
5	雲林縣	0.685	7.842	361.611	5.483	6.039	0
6	台北市	0	0	0	0	0	0
7	台中市	0	0	0	0	0	0
8	台中縣	5.033	57.588	2655.482	40.265	44.344	0
9	宜蘭縣	11.298	129.262	5960.516	90.379	99.536	0
10	苗栗縣	13.859	158.562	7311.61	110.866	122.098	0
11	嘉義縣	15.299	175.037	8071.335	122.386	134.785	0
12	基隆市	22.656	259.209	11952.67	181.239	199.6	0
13	花蓮縣	26.846	307.151	14163.36	214.759	236.516	0
14	新竹縣	26.746	306.013	14110.891	213.964	235.64	0
15	新竹市	36.122	413.281	19057.241	288.966	318.24	0
16	嘉義市	34.204	391.331	18045.103	273.618	301.338	0
17	澎湖縣	38.997	446.17	20573.841	311.962	343.566	0

在表 13 中我們計算出了所有不在基準線上的DMUs在各個指標上到基準線上的差距，以彰化縣來講如果他將他的每個輸入指標皆增加q_{ij}^*值且將每個輸出指標皆減少p_{rj}^*值，他就會到達基準線，而對於基準線下方的澎湖縣而言如果他將他的每個輸入指標皆減少q_{ij}^*值且將每個輸出指標皆增加p_{rj}^*值，他就會到達基準線。

第五章　結論

本篇論文提出了一個模式可以排序 DEA 模式的高效 DMUs。這個新的排序方法在 DEA 的觀點下幫助決策者來做評比的工作。我們提出了排序規則來幫助決策者可以很方便的判斷那個 DMU 績效最高。在相同個別績效表現的情況下，我們用每個 DMU 對總落差的貢獻來排序。在此同時，我們針對不在基準線上的 DMUs，提供了他們在各個輸入和輸出指標上到基準線的差距。

還有很多的後續研究議題可以進行。其中一個是如何將此排序方法擴展到 DEA-*i*DMUs 上來做全排序。因為我們無法確認 *e*DMUs 在 MCWA 上的排名一定會比 *i*DMUs 好，這是由於 MCWA 所強調的重點並不是個別績效。因此，未來如何同時最佳化個別績效和整體績效是一個關鍵的議題。

中文參考文獻

1. 廖金環，「結合灰色關聯與資料包絡法分析台灣各縣市資源回收績效之研究」，國防大學，碩士論文，民國 92 年。

英文參考文獻

1. Andersen, P., Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science 39, 1261-1264.
2. Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis. Management Science 9, 1078-1092.
3. Cook, W.D., Kress, M., 1990. Data envelopment model for aggregating preference ranking. Management Science 36, 1302-1310.
4. Dantzig, G.B., Thapa, M.N., 1997. Linear Programming 1: Introduction. Springer, New York.
5. Doyle, J.R., Green, R.H., 1994. Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivatives, meanings and uses. Journal of the Operational Research Society 45, 567-578.
6. Liu, F.H. Peng, H.H. 2004. DEA and common weight analysis for ranking DMUs. Working Paper.
7. Liu, F.H. Peng, H.H. 2004. Ranking of units on the DEA efficient frontier with common weight. Working Paper.
8. Obata, T. Ishii, H. 2003. A method of discriminating efficient candidates with

ranked voting data. European Journal of Operational Research 151, 233-237.

9. Tofallis, C., 2001. Combining two approaches to efficiency assessment. Journal of the Operational Research Society 52, 1225-1231.