

國立交通大學
工業工程與管理學系

碩士論文

反應六標準差之多品質特性
混合實驗最佳化演算法

Optimization of Multi-Response Mixture Experiments
to Achieve Six-Sigma Quality Level

研 究 生：王柏齡

指導教授：唐麗英 博士

王春和 博士

中華民國九十四年六月

反應六標準差之多品質特性混合實驗最佳化演算法

Optimization of Multi-Response Mixture Experiments to Achieve
Six-Sigma Quality Level

研 究 生：王柏齡

Student : Bo-Ling Wang

指導教授：唐麗英 博士

Advisor : Lee-Ing Tong

王春和 博士

Chung-Ho Wang

國立交通大學

工業工程與管理學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Industrial Engineering and Management

College of Management

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master of Science

In

Industrial Engineering

June 2005

Hsin-Chu, Taiwan

Republic of China

中華民國九十四年六月

反應六標準差之多品質特性混合實驗最佳化演算法

研究生：王柏齡

指導教授：唐麗英、王春和

國立交通大學工業工程與管理學系碩士班

摘要

利用實驗設計法(Design of Experiments, DOE)有效率地找出最佳實驗參數組合以降低生產成本或改善品質，為增加產業競爭力的重要手法之一。然而在材料、化工、或食品等產業中，有許多屬於混合實驗(Mixture Experiments)範疇之最佳化設計問題，卻常誤以傳統因子實驗設計之。在混合實驗中，直接影響反應變數的是各混合成分(component)，即各因子(即成分)佔實驗組合總量之比例，而混合實驗之性質與傳統因子實驗差別很大。此外，在科技不斷精進與消費者需求持續提升的情況下，實驗設計之目標往往需要考慮多個品質特性的同時最佳化，但目前僅有文獻提出應用望想函數(desirability function)來處理混合實驗之多品質特性同時最佳化的問題。本研究以 Ribardo 與 Allen[14]所提出改善舊有望想函數未考慮製程平均與變異之缺點的六標準差望想函數(desirability function for achieving six-sigma quality)為依據，提出另一套混合實驗之多個品質特性最佳化的演算法，此六標準差望想函數值並能夠反應六標準差之品質水準。本研究最後以分析新竹某公司所提供之汽車橡膠皮碗之實例，驗證所提演算法之可行性與有效性。

【關鍵詞】混合實驗、混合成分、多品質特性、六標準差望想函數

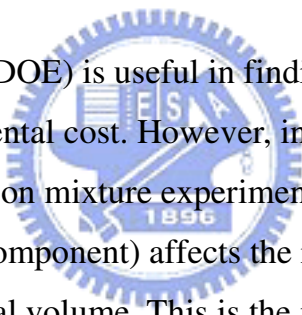
Optimization of Multi-Response Mixture Experiments To Achieve Six-Sigma Quality Level

Student : Bo-Ling Wang

Adviser : Lee-Ing Tong,
Chung-Ho Wang

Department of Industrial Engineering and Management
National Chiao Tung University

Abstract



Design of experiments (DOE) is useful in finding the optimal parameter-setting efficiently with low experimental cost. However, in some specific areas, engineers often misuse factorial design on mixture experiments. In mixture experiments, the factor (which is also called component) affects the response by its proportion in all components, but not the actual volume. This is the main difference between factorial design and mixture experiments. In addition, simultaneously optimization of multiple responses is increasingly essential. Therefore, this study proposes a procedure to optimize multi-response in mixture experiments. The desirability function of six-sigma quality introduced by Ribardo and Allen [14] is employed in the proposed procedure. The desirability function considers the estimated mean and variance of response variable and estimate the response under assumptions required in the six-sigma quality. A rubber bowl's experiment with four components and eleven response variables are utilized to demonstrate the effectiveness of the proposed procedure.

Key Words: Mixture Experiments, component, multi-response, desirability function
for achieving six-sigma quality

誌謝

在許多人的幫助之下，這本論文才能夠順利誕生，其中最要感謝的就是我的指導教授唐麗英博士與王春和博士，兩位不辭辛勞地給予我指導與建議，使我能夠順利完成論文，並從中學習到許多寶貴的經驗與知識，相當感謝兩位老師。此外，感謝兩位口試委員張永佳博士與黎正中博士針對本篇論文給予相當多的建議，使本篇論文更加完善。

新竹兩年的時光中，大半都在實驗室度過，感謝實驗室的戰友家爸、洸忠、阿土、博欽、猛宏、哇哈哈、把狗、鬼斯特和歐大以及半個實驗室的成員夾緊、鬆鬆和金門王，在這兩年共同度過苦悶的研究生活，大家一起打混、打屁、打作業和打論文，留下了許多難忘的回憶。還要感謝實驗室的學長姊千慧、新恩和志偉也提供我許多生活和學業上的支持與幫助，以及學弟妹們在我們需要的時候給予我們的助力，還有可愛的大個、Lucky、三筒、四筒、梧桐、Red Rain和hipple不論我的心情好壞都忠心地陪伴著我，謝謝大家。

除此之外，如果沒有林美汝小姐不遺餘力地幫助我取得寶貴的實驗數據，本篇論文也無法順利完成，特別在此感謝林小姐的幫忙。

能夠順利在兩年內攻讀碩士學位，而完成我十八年的求學生涯，父母親的養育及照顧之恩，實在無以回報，在此僅以本篇論文的一切貢獻歸於我的父母親與家人們，來表達我的感激。

本文中實在沒有辦法一一提及所有幫助過我的人，在此僅對我所有的師長、家人以及朋友們，不論在學業和生活各方面所給予我的支持與鼓勵，由衷地表達感謝之意。

王柏齡 謹誌於
交通大學工業工程與管理研究所
2005 年 7 月 4 日

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究方法.....	2
1.4 研究架構.....	2
第二章 文獻探討.....	3
2.1 混合實驗設計之介紹[9].....	3
2.2 混合實驗設計之相關文獻.....	9
2.3 多品質特性演算法之相關文獻[2][13].....	10
2.4 六標準差望想函數之介紹[7][14].....	10
2.5 多品質特性混合實驗設計之相關研究.....	12
第三章 研究方法.....	14
3.1 混合實驗設計之規劃.....	14
3.1.1 準備工作.....	14
3.1.2 選用模型並規劃實驗.....	14
3.2.1 計算各反應變數在各實驗組合下之平均數及變異數.....	15
3.2.2 計算各反應變數在各實驗組合下之望想值.....	15
3.2.3 計算各實驗組合之總望想值.....	16
3.2.4 以總望想值適配出反應曲面.....	16
3.2.5 找出最佳配方.....	16
3.3 進行模型正確性檢定及驗證再現性.....	17
3.3.1 模型正確性檢定.....	17
3.3.2 確認實驗.....	17
第四章 實例驗證.....	19
4.1 實例說明.....	19
4.2 實驗規劃.....	20
4.3 實驗數據分析.....	21
4.3.1 計算各反應變數在各實驗組合下之平均數及變異數.....	21
4.3.2 計算各反應變數在各實驗組合下之望想值.....	22

4.3.3 計算各實驗組合之總望想值	24
4.3.4 適配總望想值之反應曲面	24
4.3.5 找出最佳配方	28
4.3.6 模型正確性檢定	28
4.3.7 確認實驗	29
4.3.8 實例驗證結論	30
第五章 結論.....	31
5.1 結論與貢獻.....	31
5.2 未來研究.....	32
參考文獻.....	33
附錄.....	35



圖目錄

圖2-1	三成分混合實驗與三因子實驗設計解空間.....	4
圖2-2	三成分混合實驗解空間.....	4
圖2-3	{3,3}單體晶格設計.....	5
圖2-4	3-成分單體質心設計.....	5
圖2-5	有下限成分之線性轉換.....	6
圖2-6	不規則之可行解空間.....	6
圖2-7	($q=3, n=2$)含流程變數之混合實驗(單體質心設計).....	8
圖2-8	六標準差望想函數圖形.....	12
圖3-1	多品質特性混合實驗設計流程圖.....	18
圖4-1	固定老化劑之反應曲面等高線圖.....	26
圖4-2	固定流動助劑A之反應曲面等高線圖.....	26
圖4-3	固定流動助劑B之反應曲面等高線圖.....	27
圖4-4	固定架橋劑之反應曲面等高線圖.....	27
圖4-5	殘差之常態機率圖.....	29
圖4-6	預測值對殘差之散佈圖.....	29

表目錄

表2-1	2×2全因子設計.....	3
表2-2	各因子水準之比例.....	3
表2-3	六標準差望想函數值之代表意義.....	12
表4-1	汽車橡膠皮碗之規格標準.....	20
表4-2	橡膠皮碗之混合實驗規劃表.....	20
表4-3	反應變數H2與H3之實驗結果.....	21
表4-4	反應變數H1之平均數與變異數估計值.....	22
表4-5	反應變數H1在各實驗組合下之望想值.....	23
表4-6	其他反應變數在各實驗組合下之望想值.....	23
表4-7	各實驗組合下之總望想值.....	24
表4-8	總望想值完整二次反應曲面模型之ANOVA表.....	25
表4-9	總望想值簡化二次反應曲面模型之ANOVA表.....	25
表4-10	最佳配方預測表.....	28
表4-11	最佳配方確認實驗結果.....	30
表4-12	最佳配方確認實驗與預測值比較表.....	30

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

在競爭激烈的產業中，降低成本與改善品質為提升產業競爭力之重要手法。此外，在科技不斷精進與消費者需求持續提升的情況下，產品品質之複雜程度也隨之提高，為同時使多個品質特性符合消費者之需求，考慮多品質之最佳化，才能有效控制成本與改善品質，以增加產業競爭力。

線外品質管制(off-line quality control)主張以產品設計或生產線改善設計來提升品質水準，因此，有效率地進行實驗以找出最佳生產配方或程序，即為線外品質管制之重要課題。以統計為基礎的實驗設計法(Design of Experiments, DOE)與反應曲面法(Response Surface Method, RSM)均可幫助工程人員在複雜的製程參數中，快速地找出最佳參數設定值，以增加產業競爭力。近年來業界廣泛應用實驗設計與反應曲面來改善品質，其功效亦被各界所肯定。

然而，在許多材料、化工或食品等產業中，常誤用傳統因子實驗設計來規劃實驗並求出最佳配方，但卻無法得到預期之成效，其原因為這類產業其製程參數之本質與傳統因子實驗設計之參數不同，實為混合實驗(Mixture Experiments)之範疇。所謂混合實驗，是指實驗之反應變數(response variables, 即品質特性)並非直接被因子之含量多寡所影響，而是與各因子佔該實驗組合總含量之比例有關。在混合實驗中，以找出適當之因子比例為目的，該因子在混合實驗中稱為成分(component)，而相對於傳統實驗所探討之因子水準設定，在混合實驗中所探討的是各成分佔實驗組合總量之成分比例。混合實驗之性質與傳統因子實驗差別相當大，本論文特別針對混合實驗進行研究。

此外，由於解決多品質特性問題的需求大為增加，近年來雖然發展出許多處理多品質特性問題之演算法，但在混合實驗設計的文獻中，仍多是討論單一品質特性之問題，僅 Dabbas 等人[10]在討論具混合實驗性質之半導體廠派工法則的最佳化研究上，應用望想函數(desirability function)來處理多品質特性之問題，但望想函數為相對指標而非絕對指標，無法直接作為業界在品質改善上之依據，故本論文對此提出改進方法。

自從六標準差(six-sigma)系統在美國摩托羅拉(Motorola)成功推行以來，許多企業即以追求六標準差之品質水準為標竿，來提升產業競爭力；此外，在與航太、軍事或生技等產業中，在安全等因素考量之下，生產良率比一般產業要求高出許多，而六標準差系統在此類產業中亦更顯重要。因此，本論文將 Ribardo 與 Allen[14] 所提出之六標準差望想函數演算法(desirability function for achieving six-sigma quality)應用於多品質特性混合實驗最佳化之問題上，並配合反應曲面法來求出最佳成分比例，以提供具六標準差性質絕對指標之最佳配方。

1.2 研究目的

有鑑於目前尚無完整之多品質特性混合實驗設計最佳化演算法，故本論文之主要目的為針對混合實驗問題，發展一套多品質特性之最佳化演算法。該演算法為具六標準差品質水準之多品質特性反應曲面預測模型，而該演算法求出之混合實驗最佳配方可計算一具六標準差性之絕對指標，可提供製程工程師作為其提昇產品品質之參考。

1.3 研究方法

本論文以六標準差望想函數演算法，將各實驗組合下的多個品質特性觀測值，合成具有六標準差品質水準之總望想值，再將各實驗組合之六標準差總望想值，適配原混合實驗模型之反應曲面。最後以反應曲面法找出最佳配方，且該最佳配方將具有一個六標準差之總望想值，可以套用於六標準差之品質水準。

1.4 研究架構

本論文共分五章，第一章為緒論，說明本論文之研究動機與目的；第二章介紹本論文之相關文獻，包括混合實驗設計、多品質特性問題及六標準差望想函數之相關文獻；第三章介紹本論文所建構之多品質特性混合實驗設計最佳化流程；第四章為實例驗證，以汽車煞車用橡膠皮碗之實際案例，來驗證本論文提出之方法有效可行；第五章則為本論文之結論與建議。

第二章 文獻探討

本章首先介紹混合實驗設計及其國內外相關文獻，接下來是介紹多品質特性演算法之相關文獻及本研究所使用之六標準差望想函數，最後則是多品質特性混合實驗設計之相關文獻探討。

2.1 混合實驗設計之介紹[9]

如同第一章研究背景與動機所示，實驗設計中某些因子符合混合實驗之特性時，意即這些變數所代表的是成分「比例」，則應使用混合實驗設計而非傳統之因子實驗設計。

以表 2-1 及表 2-2 為例[9]，假設 A、B 兩變數為具有混合成分特性之變數，若研究者使用全因子設計來規劃實驗如表 2-1 所示，並將表 2-1 轉成兩變數之比例，如表 2-2 所示。則其中全因子設計中之處理(A=25；B=225)和(A=30；B=270)之成分比例實際上是相同的，若其具有混合成分之特性，不同比例之兩變數成分組合才是影響反應變數值的原因，則應使用混合實驗設計而非全因子實驗設計。

表 2-1 2×2 全因子設計

B \ A	25	30
	225	270
225		
270		

⇒

表 2-2 各因子水準之比例

B \ A	25	30
	225	270
225	1.0: 9.0	1.2: 8.8
270	0.85: 9.15	1.0: 9.0

假設自變數具混合成分特性，則定義 $x_i (i=1, 2, \dots, q)$ 為該成分佔混合物總量之比例， x_i 具以下特性：

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^q x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_q = 1.0 \quad (2.2)$$

由於(2.2)式之限制，會使自變數之可行解空間降低一個維度。以三成分之混合實驗($q=3$)為例，圖 2-1 的立方體是傳統三因子實驗設計的解空間，而混合實驗設

計在增加限制式 $x_1 + x_2 + x_3 = 1.0$ 的情況下，解空間轉換成圖中立方體中的斜三角平面，如圖 2-2 所示。

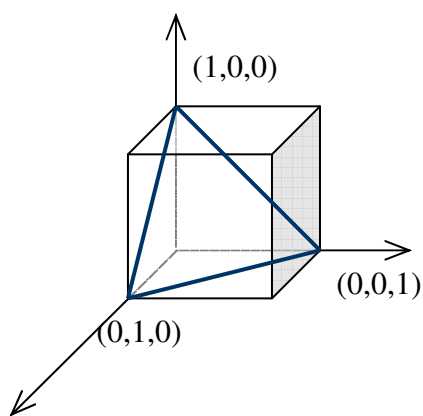


圖 2-1 三成分混合實驗與三因子實驗設計解空間[9]

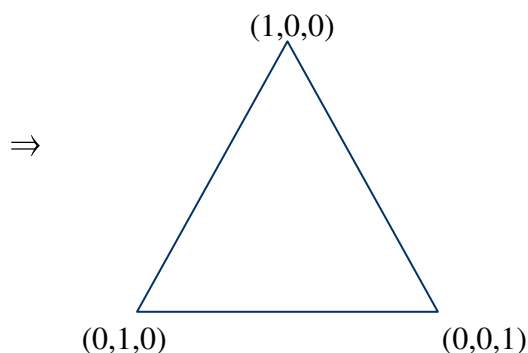


圖 2-2 三成分混合實驗解空間[9]

在混合實驗設計中，通常是以建構各成分於反應變數之反應曲面，作為找尋最佳配方之方式。則針對上述定義之成分變數所建構的反應曲面，有下列三件要項：(1)先要尋找適當之反應曲面模型；(2)再去檢定該選定模型之正確性；(3)其後根據所收集之資料找出適當之模型，並適配該模型及檢定其適配之正確性[9]。在此定義反應曲面模型如下列反應式：

$$\eta = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

在反應曲面中，使用之模型為 x_i 的線性多項式之型式，如(2.4)式及(2.5)式：

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \quad (2.4)$$

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i \leq j}^q \sum_j^q \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.5)$$

由於(2.2)式之限制，可將上述迴歸式中截距項化為 0，如：

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i \leq j}^q \sum_j^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i \leq j \leq k}^q \sum_{j \leq k}^q \sum_k^q \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (2.6)$$

此外，其亦可能存在含 $x_i - x_j$ ($i \neq j$) 項的變相模型。總而言之，(2.3)式可以依實驗需求採用適當之模型。

以下依可行解區域之完整與否，分成兩種情形說明如何選用適當之反應曲面模型。若實驗有完整之可行解區域，則使用常見之 $\{q, m\}$ 單體晶格設計[16](Simplex Lattice Design； m 指 x_i 成分比例之分母)或 q -成分單體質心設計[17](Simplex Centroid Design)來規劃實驗。圖 2-3 是將實驗點均勻分佈於成分之可行解區域的範圍內；圖 2-4 則是在成分之可行解區域的端點與質心上放置實驗點，其均有相對應之反應曲面模式。在選定適當模型，並適配資料以求出各 β 係數後，即可得到一混合成分之反應曲面模型。

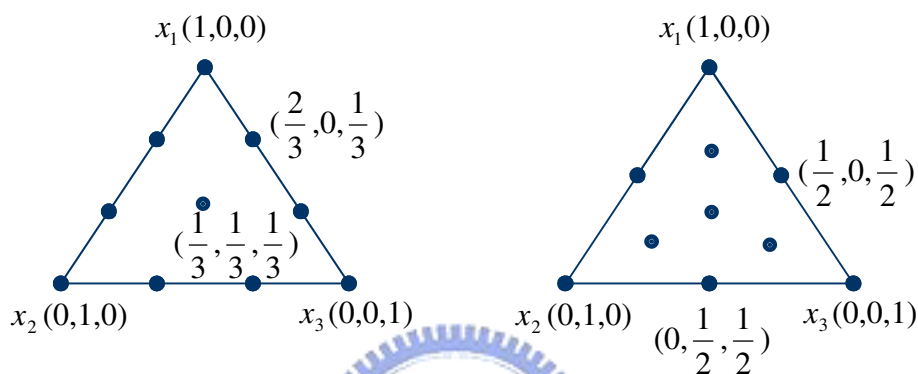


圖 2-3 $\{3,3\}$ 單體晶格設計[8] 圖 2-4 3-成分單體質心設計[8]

此外， x_i 之範圍在某些特殊條件下並非從 0 到 1，而是呈(2.7)式之型式：

$$0 \leq L_i \leq x_i \leq U_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.7)$$

(2.7)式中之 L_i 和 U_i 分別為 x_i 之下限與上限，其值通常是研究者根據專業知識或經驗所決定的，當某成分比例 x_i 落在 $0 \sim L_i$ 或 $U_i \sim 1$ 之間時有不合理或無法進行實驗等情況，就必須使用(2.7)式作為 x_i 的可行解範圍。

此時，可以令 x_i^* 、 $x_i^\#$ 為 x_i 線性轉換後之新變數。若 $0 \leq L_i \leq x_i \leq 1$ ，即成分比例僅有下限之限制，則令 $x_i^* = \frac{x_i - L_i}{1 - L_i}$ 可使 $0 \leq x_i^* \leq 1$ ，其中 $L = \sum_{i=1}^q L_i$ ，如圖 2-5 所示；若 $0 \leq x_i \leq U_i \leq 1$ ，即成分比例僅有上限之限制，且 $\sum_{i=1}^q U_i - \min_i U_i \leq 1$ ，則令 $x_i^\# = \frac{U_i - x_i}{U - 1}$ 可使 $0 \leq x_i^\# \leq 1$ ，其中 $U = \sum_{i=1}^q U_i$ 。

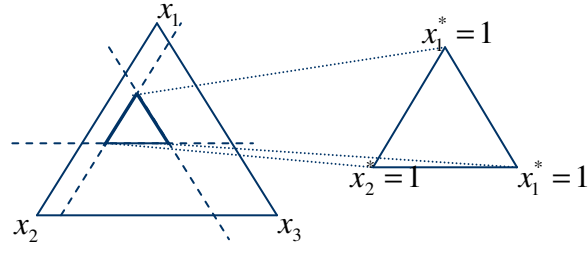


圖 2-5 有下限成分之線性轉換

然而，在無法進行線性轉換而使其新成分之範圍均為 0 到 1 時，會使可行解空間呈不規則狀，而非完整解空間，如圖 2-6 所示；或是存在其他限制式如

$\sum_{i=1}^q \mathbf{H}_i x_i \geq 0$ 時，其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^q$ 。則此時單體晶格設計或單體質心設計均無法使用，必須以電腦輔助設計(Computer-Aided Design)來規劃實驗。

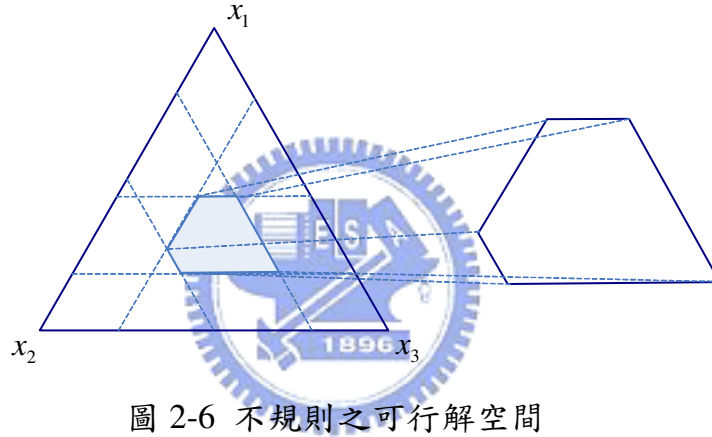


圖 2-6 不規則之可行解空間

幾乎所有的電腦輔助設計是在選定反應曲面模型後，在可行解空間根據某些原則挑選出適當之實驗點。假設某混合實驗反應曲面模型為 $y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ，其中若

$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ ，則由最小平方法計算之迴歸係數 $\boldsymbol{\beta}$ 之估計值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 亦服從常態

$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1})$ ($p \geq q$)，而 $\hat{y} = \mathbf{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{x}'(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}))$ ，若常態假設不成

立，則 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{y}$ 之共變異數矩陣仍為 $\sigma^2 (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}$ 和 $\sigma^2 \mathbf{x}'(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}$ 。常見之電腦輔助設計有四種：

1. 以最小化 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 共變異矩陣 $\sigma^2 (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}$ 之行列式為目的之 D-最佳化設計，亦即最

小化 $\det(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}$ 。若殘差項 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 符合常態假設，則此設計亦可最小化迴歸係數 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

之聯合信賴區間的體積。

2. 以最小化 $\hat{\beta}$ 共變異矩陣 $\sigma^2(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}$ 之對角線和為目的之 A-最佳化設計，亦即

最小化 $tr((\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1})$ 。其目的在於最小化迴歸係數 $\mathbf{b} = \hat{\beta}_0$ 之平均變異數。

3. 以最小化 $\hat{y}$ 之最大變異數為目的之 G-最佳化設計，若令

$$\sigma^2 \mathbf{x}'(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \mathbf{x} = C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0p} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p0} & \cdots & \cdots & c_{pp} \end{pmatrix} \quad c_{ii} \in \mathbb{R} \quad i = 0 \sim p$$

則即為最小化 $\max_i(c_{ii} | i = 0, \dots, p)$ 。

4. 以最小化 $\bar{c}_{ii}$ 為目的之 V-最佳化設計。

上述四種設計以 D-最佳化設計最常被使用。但實際上在同一反應曲面模型下，其中一種設計所產生之結果套用在其他三種設計中，亦均近似於該三種最佳設計之結果[9]。

混合實驗設計之重點在於混合成分之處理，但不表示所有變數均具有混合成分特性。在混合實驗中，亦可能存在一些不是混合成分而在其不同水準下仍會對反應變數造成影響之變數，此類變數稱之為流程變數(Process Variables)。

遇到此類問題時，可直接對原混合實驗模型進行改造，成為一個新模型，意即在原有之 q 成分混合模型中加入 n 個流程變數。以 $q = 3$ 、 $n = 2$ 為例，其中：

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

$$z_l = \pm 1 \quad l = 1, 2 \quad (2.9)$$

若以單體質心設計為例，可得(2.10)式之模型：

$$\eta_{SC} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (2.10)$$

而僅考慮兩流程變數則可得(2.11)式之模型：

$$\eta_{PV} = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_{12} z_1 z_2 \quad (2.11)$$

要混合兩個模型，首先假設新的迴歸係數 $\gamma_\tau^\lambda = \alpha_\lambda \beta_\tau$ ，其中 $\lambda \in \{1, 2, 12\}$ 和

$\tau \in \{1, 2, 3, 12, 13, 23, 123\}$ 分別對應流程變數模型 η_{pv} 和單體質心設計模型 η_{sc} 之係數。則該新模型如下：

$$\begin{aligned}
 \eta(x, z) &= \sum_{i=1}^3 \beta_i(z) x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \beta_{ij}(z) x_i x_j + \beta_{123}(z) x_1 x_2 x_3 \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left[\gamma_i^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_i^l z_l + \gamma_i^{12} z_1 z_2 \right] x_i \\
 &\quad + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \left[\gamma_{ij}^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_{ij}^l z_l + \gamma_{ij}^{12} z_1 z_2 \right] x_i x_j \\
 &\quad + \left[\gamma_{123}^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_{123}^l z_l + \gamma_{123}^{12} z_1 z_2 \right] x_1 x_2 x_3
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

其可行解空間如圖 2-7：

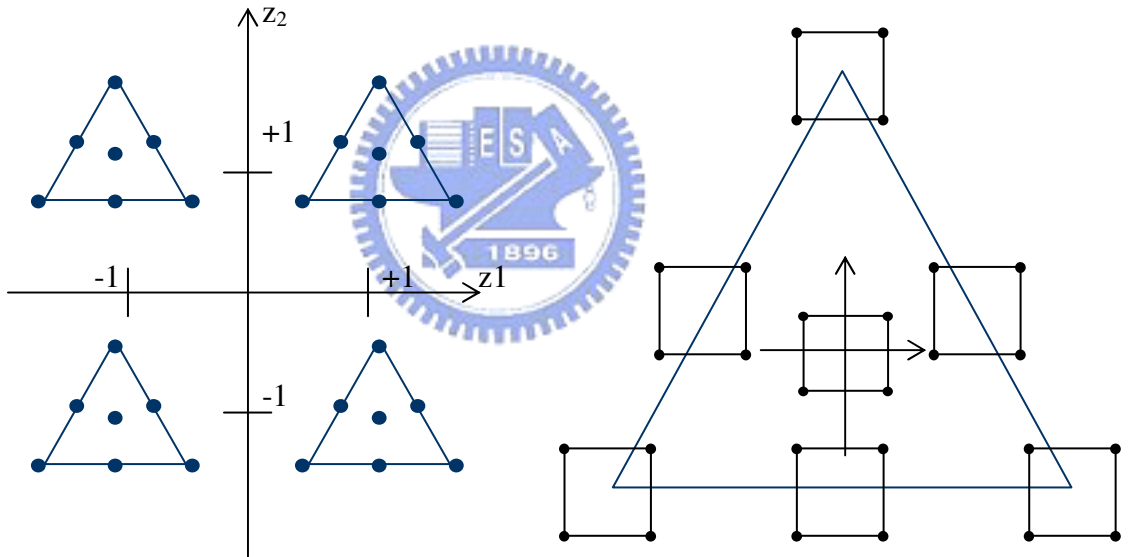


圖 2-7 ($q=3, n=2$)含流程變數之混合實驗(單體質心設計)

在(2.12)式中之整合模型亦可以下列型式表示：

$$\begin{aligned}
 \eta(x, z) &= \alpha_0(x) + \alpha_1(x) z_1 + \alpha_2(x) z_2 + \alpha_{12}(x) z_1 z_2 \\
 &= \sum_{i=1}^3 \gamma_i^0 x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^0 x_i x_j + \gamma_{123}^0 x_1 x_2 x_3 \\
 &\quad + \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{i=1}^3 \gamma_i^l x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^l x_i x_j + \gamma_{123}^l x_1 x_2 x_3 \right] z_l \\
 &\quad + \left[\sum_{i=1}^3 \gamma_i^{12} x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^{12} x_i x_j + \gamma_{123}^{12} x_1 x_2 x_3 \right] z_1 z_2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中(2.12)式即對應圖 2-7 之左圖，而(2.13)式對應圖 2-7 之右圖，兩者的意義皆相同。倘若可行解區域不規則，亦可用電腦輔助設計於含流程變數之混合實驗。

2.2 混合實驗設計之相關文獻

王俊超[1]探討對流層中臭氧濃度與其前驅物(VOCs 與 NO_x)間之關係，以進行臭氧減量控制策略之研究，其使用混合物之總量會影響反應變數值之 Cornell[9] 的混合物-總量模式。其反應變數為臭氧濃度，為單一品質特性之混合實驗問題。

陳盈助[5]探討三種有機溶劑對電池充電與放電速率之影響，由於這三種有機溶劑之比例為影響充電與放電速率之因素，故其採用混合實驗設計以找出最佳配方。其亦屬單一品質特性之混合實驗問題。

林修吉[4]探討如何將具混合特性之變數填入(2^k)田口直交表，其使用 XVERT 演算法產生有限個數之最佳設計實驗點，從中以 A-最佳設計、D-最佳設計、及 SN 比-距離法挑選放入直交表之實驗點，並擇優成為最後之直交表設計。其目的在將具混合成分之變數放入田口直交表，並未進行後續分析。

許湘伶[6]探討如何在具不確定性之 Scheffé 線性、二次及無交互作用之三次模型中，進行穩健之 D-最佳設計。周昭景[3]探討如何在具不確定性之 Scheffé 線性及二次模型中，進行穩健之 A-最佳設計。其均在探討如何增加電腦輔助設計之穩健性。

Guo 等人[12]探討利用生石灰等混合成分來降低磷石膏毒性之效果，其模型包含流程變數「溶濾與否」及「乾濕處理」，其雖然同時探討五個反應變數之最佳化，但僅是以互償(Trade-Off)之方式進行討論，所找出來的並不一定是實際之最佳配方。

Sandoval-Castro 等人[15]以混合實驗設計研究三種草料及飼料之不同比例餵養牛畜時，如何影響消化的效果及所產生的氣體量。其反應變數亦不唯一，但其目的並非依此找出最佳配方，而是由各反應變數產生之反應曲面來探討各草料及飼料所造成之混合效果。

國外仍有許多混合實驗設計相關之文獻，但多數不是探討多品質特性之問題，在此不再贅述。

2.3 多品質特性演算法之相關文獻[2][13]

在處理多品質特性之問題上，最常見是以專業意見為準，在無法直接判斷優劣之控制因子水準中，以互償之方式選出最佳配方。然而，在反應變數眾多且和控制因子間之關係複雜時，互償之方式並不容易，且雖然是專業意見，人在做決策時，仍然會產生許多不確定性，導致每次所選出之最佳配方均不同。當反應變數愈多，人所能同時處理之資訊亦有限，所選出之配方與真正之最佳配方之差距通常很大。

因此，處理多品質特性問題之演算法隨之衍生。較直觀之方法為給予每個變數一個權重，再依此權重計算出一個總反應值。在計算這個總反應值時，使用適合原本問題之公式，並以給定之權重計算反應值，然而，在較複雜的問題上，給定適當之權重並不是容易的事。

在許多多變量方法被發展後，就廣泛被應用在多品質特性之問題上。如：主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)、資料包絡法(Data Envelopment Analysis, DEA)、模糊邏輯推論(Fuzzy Logic)、灰關聯分析(Grey Relational Analysis)、理想解類似度順序偏好法(TOPSIS)、類神經網路(Neural Networks)、及望想函數等，其原理多為在給予權重值或計算出權重值後，以適當之演算法求出可直接判斷優劣之總反應值。

本研究採用 Ribardo 與 Allen[14]提出之六標準差望想函數演算法，此法改進望想函數之指標僅能互相比較之缺點，提供一符合六標準差品質水準之指標，使製程改善技術能與製程能力相結合，以找出具六標準差水準之多品質特性之最佳成分比例。下節為該演算法之詳細說明。

2.4 六標準差望想函數之介紹[7][14]

望想函數是以品質特性反應值對其目標值的渴望程度所建構之函數，是指反應值在可接受之範圍內接近目標值之程度[7]。而六標準差為近年來品管之重要概念，套用在望想函數上，是將反應值之平均及變異數納入考量，使其總望想函數值具有六標準差之品質水準，可以直接由六標準差總望想值看出該實驗多次重複執行後之穩健性。其方法介紹如下：

Ribardo 與 Allen[14]所提出之六標準差望想函數依品質特性變數之性質可分為有規格界限與無規格界限兩種，以下分別對其進行說明：

1. 品質特性變數存在明確之規格界限：

若品質特性變數存在明確之規格上下限，首先估計該變數反應曲面模型之平均數 μ 與變異數 σ 後，則在製程偏移平均數 $\tau = s\sigma$ 的情況下，定義六標準差望想函數 $d(\mu, \sigma, \tau)$ 如下：

$$d(\mu, \sigma, \tau) = \min[Y(\mu, \sigma, +\tau), Y(\mu, \sigma, -\tau)] \quad (2.14)$$

其中 $Y(\bullet)$ 表示在製程長期穩定生產之情況下，製程允許平均偏移量 τ 時之良率，其公式如下：

$$Y(\mu, \sigma, \tau) = \begin{cases} \Phi\left[\frac{U - (\mu + s\sigma)}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{L - (\mu + s\sigma)}{\sigma}\right] & , U、L \text{ 存在} \\ 1 - \Phi\left[\frac{L - (\mu + s\sigma)}{\sigma}\right] & , U \text{ 不存在} \\ \Phi\left[\frac{U - (\mu + s\sigma)}{\sigma}\right] & , L \text{ 不存在} \end{cases} \quad (2.15)$$

(2.15)式中之 $\Phi(\bullet)$ 為標準常態分配之累積機率函數， U 與 L 則分別為品質特性變數之規格上、下限。若要計算可反應六標準差之品質水準，其意義即為在製程穩定時，計算偏移製程平均數 1.5 倍標準差為可以接受之誤差下的生產良率。

2. 品質特性變數無明確之規格界限：

當品質特性變數不存在明確之規格上下限，而以目標值與最差可接受值為評量反應值好壞標準時，定義六標準差望想函數如下：

$$d(Y) = \Phi(z_{eff} - 1.5) \quad (2.16)$$

(2.16)式之 $\Phi(\bullet)$ 為標準常態分配之累積機率函數，而 $z_{eff} = 1.5 + 3\left(\frac{Y - M}{T - M}\right)$ ，其中 Y 為品質特性變數之反應值、 M 為品質特性變數之最差可接受值、 T 為品質特性變數之目標值。

則依據上述公式計算之各品質特性變數的望想函數值，則總望想函數值 $D(\mathbf{x})$ 為：

$$D(\mathbf{x}) = \left\{ [d_1(\mathbf{Y}_1(\mathbf{x})) \cdots d_r(\mathbf{Y}_r(\mathbf{x}))]^{w_r} [d_{r+1}(\mathbf{Y}_{r+1}(\mathbf{x}))^{w_{r+1}} \cdots d_m(\mathbf{Y}_m(\mathbf{x}))^{w_m}] \right\}^{1/s} \quad (2.17)$$

其中 w_i 為權重。在 $D(\mathbf{x})$ 中 1 到 r 項為存在明確規格界限之品質特性變數， $r+1$ 到第 m 項為主觀給定目標值之品質特性變數。在六標準差品質水準假設 $\tau=1.5$ 的情況下，其望想函數之圖形如圖 2-8 所示。

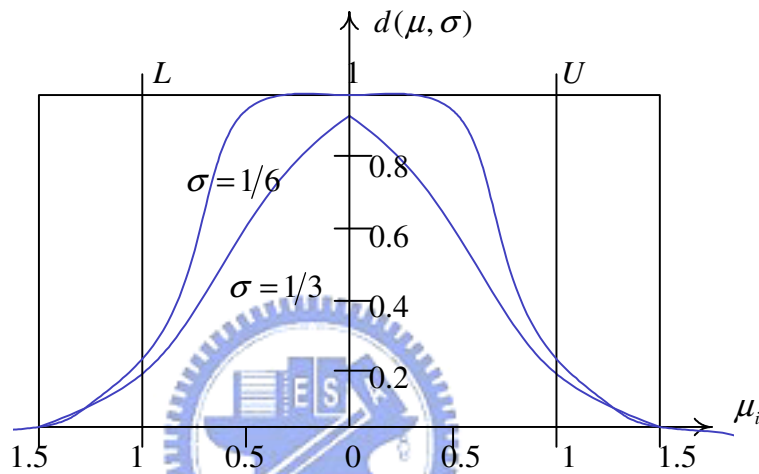


圖 2-8 六標準差望想函數圖形

此外，Ribardo 與 Allen 所提出之六標準差望想函數之代表意義如表 2-3 所示。

表 2-3 六標準差望想函數值之代表意義[14]

望想值	意義解釋
0.9999966~1.00	達到六標準差之品質水準，無須再進行改善
0.9938~0.9999966	達到四到六標準差之品質水準，優良但非傑出之品質水準
0.9332~0.9938	達到三到四標準差之品質水準，可接受但仍有改善空間
0.69~0.9332	達到兩到三標準差之品質水準，不可接受之品質水準
0.00~0.69	兩標準差以下之品質水準，完全不可接受

2.5 多品質特性混合實驗設計之相關研究

至今關於多品質特性混合實驗設計之相關研究相當少，Dabbas 等人[10]應用混合實驗設計於半導體廠之派工法則最佳化研究，其目的在於找出最適當比例之綜合派工法則。該研究使用望想函數法將多個反應變數合成單一指標，再以反應

曲面模型找出最佳配方。該研究並未考慮流程變數，且其使用之指標為相對指標，不如六標準差望想函數之絕對指標。

Smith 與 Cornell[18]使用二維圖(Biplot)來同時表示所有反應變數與混合成分變數之關係。二維圖僅是用來展示品質特性間之相關性及各因子對各反應變數之影響效果，它可以用來幫助研究人員清楚瞭解各自變數與應變數間的關係，但並沒有用來做最佳配方之求解。



第三章 研究方法

到目前為止，處理混合實驗設計之問題並無文獻建構出一套完整之處理多品質特性問題的演算法，且因應六標準差品質管理之必要性，本論提出一套可以反應六標準差水準之多品質特性混合實驗的最佳化演算法。本研究建構之多品質特性混合實驗最佳化流程共包含三個階段。本章各小節將依序介紹各階段之執行步驟。首先進行混合實驗之設計規劃；再以六標準差望想函數分析實驗所收集之數據，並找出最佳配方；最後進行模型正確性檢定及驗證再現性，以確認最佳配方之可行性。

3.1 混合實驗設計之規劃

本小節將從確定所有必要之變數資訊開始，到選用適當之混合實驗模型，並規劃實驗。

3.1.1 準備工作

依據專業人員之經驗決定各混合成分之可行解區域及流程變數之水準，反應變數之目標值或目標區域、上下限及可接受範圍、與相對權重值，及其他相關資訊。

3.1.2 選用模型並規劃實驗

根據自變數之性質，套用適當之混合實驗模型：

1. 若成分變數具有完整之可行解區域，則根據實驗可接受之最多實驗次數使用單體晶格設計或單體質心設計，選出適當之模型 $\eta = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，並規劃實驗。
2. 若成分變數無法經過變數轉換至完整可行解區域，則根據實驗可接受之最多實驗次數及信心水準使用 D-最佳化設計，選出適當之模型

$\eta = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，並規劃實驗。

3.2 以六標準差望想函數分析數據

本小節說明本研究如何以六標準差望想函數來分析所收集之實驗數據，以求出最佳配方及其總望想值。

3.2.1 計算各反應變數在各實驗組合下之平均數及變異數

根據 3.1.2 節所選定之模型，計算具明確規格界限之品質特性變數的平均數及變異數，其估計式如下：

$$\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i) = E(\eta_{ij}) \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2(\mathbf{x}_i) = \text{Var}(\eta_{ij}) \quad (3.2)$$

其中 $\eta_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i)$ ， $\mathbf{x}_i$ 為第 i 次實驗之配方， η_{ij} 為第 i 次實驗之配方對應於第 j 個反應變數觀測值。

3.2.2 計算各反應變數在各實驗組合下之望想值

若反應變數存在明確之規格界限，且假設在偏移製程平均值 s_j 倍標準差的情況下，根據 3.2.1 節計算之 $\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i)$ 及 $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}_i) = \sqrt{\hat{\sigma}_{ij}^2(\mathbf{x}_i)}$ ，可計算各反應變數在各實驗組合下之望想值 $d_{ij}(\mathbf{x}_i)$ ：

$$d_{ij}(\mathbf{x}_i) = \min[Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i), \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}_i), +s_j), Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i), \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}_i), -s_j)] \quad (3.3)$$

若令 $\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i)$ 及 $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}_i)$ ，則其中

$$Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, s_j) = \begin{cases} \Phi\left[\frac{U_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}}\right] - \Phi\left[\frac{L_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}}\right], & U_i, L_i \text{ 存在} \\ 1 - \Phi\left[\frac{L_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}}\right], & U_i \text{ 不存在} \\ \Phi\left[\frac{U_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}}\right], & L_i \text{ 不存在} \end{cases} \quad (3.4)$$

(3.4)式中之 $\Phi(\bullet)$ 為標準常態分配之累積機率函數， U_j 、 L_j 分別為第 j 個品質特性變數之上、下限。

當反應變數不具有明確之規格界限，僅存在目標值 T_j 與最差可接受值 M_j ，則各反應變數在各實驗組合下之望想值 $d_{ij}(\mathbf{x}_i)$ 為：

$$d_{ij}(Y_{ij}) = \Phi(z_{eff,i,j} - 1.5) \quad (3.5)$$

(3.5)式之 $\Phi(\bullet)$ 為標準常態分配之累積機率函數，而 $z_{eff,i,j} = 1.5 + 3 \left(\frac{Y_{ij} - M_j}{T_j - M_j} \right)$ 。

若要計算具六標準差品質水準之望想值，令 $s_j=1.5$ ，則該望想值可適用六標準差之品質水準，如表 2-3 所示。

3.2.3 計算各實驗組合之總望想值

根據 3.1.1 節設定之第 j 個反應變數相對權重值 w_j 及 3.2.2 節之望想值，可計算各實驗組合之總望想值 $D_i(\mathbf{x}_i)$ ：

$$D_i(\mathbf{x}_i) = \left[d_{i1}(\mathbf{x}_i) \cdots d_{ir}(\mathbf{x}_i) \right]^{w_r} \left[d_{i(r+1)}(Y_{ij}(\mathbf{x}_i))^{w_{r+1}} \cdots d_{im}(Y_{ij}(\mathbf{x}_i))^{w_m} \right]^{1/S} \quad (3.6)$$

其中 $S = \sum_{j=1}^m w_j$ ，用來正規化總望想值。

3.2.4 以總望想值適配出反應曲面

將 3.2.3 節計算所得之各實驗組合之總望想值 $D_i(\mathbf{x}_i)$ 套用於 3.1.2 節選定之模型 $\eta = \phi(\mathbf{x})$ ，適配出該模型之反應曲面。

3.2.5 找出最佳配方

由 3.2.4 節適配之反應曲面選出多品質特性混合實驗之最佳配方，並可計算得一個適用六標準差品質水準之絕對指標。

3.3 進行模型正確性檢定及驗證再現性

本小節對實驗分析結果進行模型正確性檢定並驗證再現性，以確定實驗是否成功。

3.3.1 模型正確性檢定

根據 3.1.2 節所規劃之實驗，進行模型適配之正確性檢定。正確性檢定又可分為兩個部分：檢定模型之妥當性及模型之適缺性。前者包含反應曲面模型殘差項之常態假設、等變異數及獨立性檢定，以觀察殘差之常態機率圖與預測值對殘差之散佈圖是否出現異常狀態來進行檢定。後者則是在實驗規劃階段就必須設計幾組用來檢定適缺性之實驗組合，再依其實驗結果進行適缺度檢定(lack-of-fit test)。若未通過模型正確性檢定，則需進行資料轉換或重新規劃實驗；若反之，則進行下一步驟。

3.3.2 確認實驗

為了確認本演算法所得之最佳配方在實際運作時具有再現性，必須進行確認實驗。確認實驗之進行次數將依成本等因素決定，若確認實驗之結果與預測值相差太多，則應重新設定適當之自變數與反應變數，並設計實驗；反之，則該最佳配方具有再現性，則該最佳配方有效可行。

本研究之研究方法流程如圖 3-1 所示。

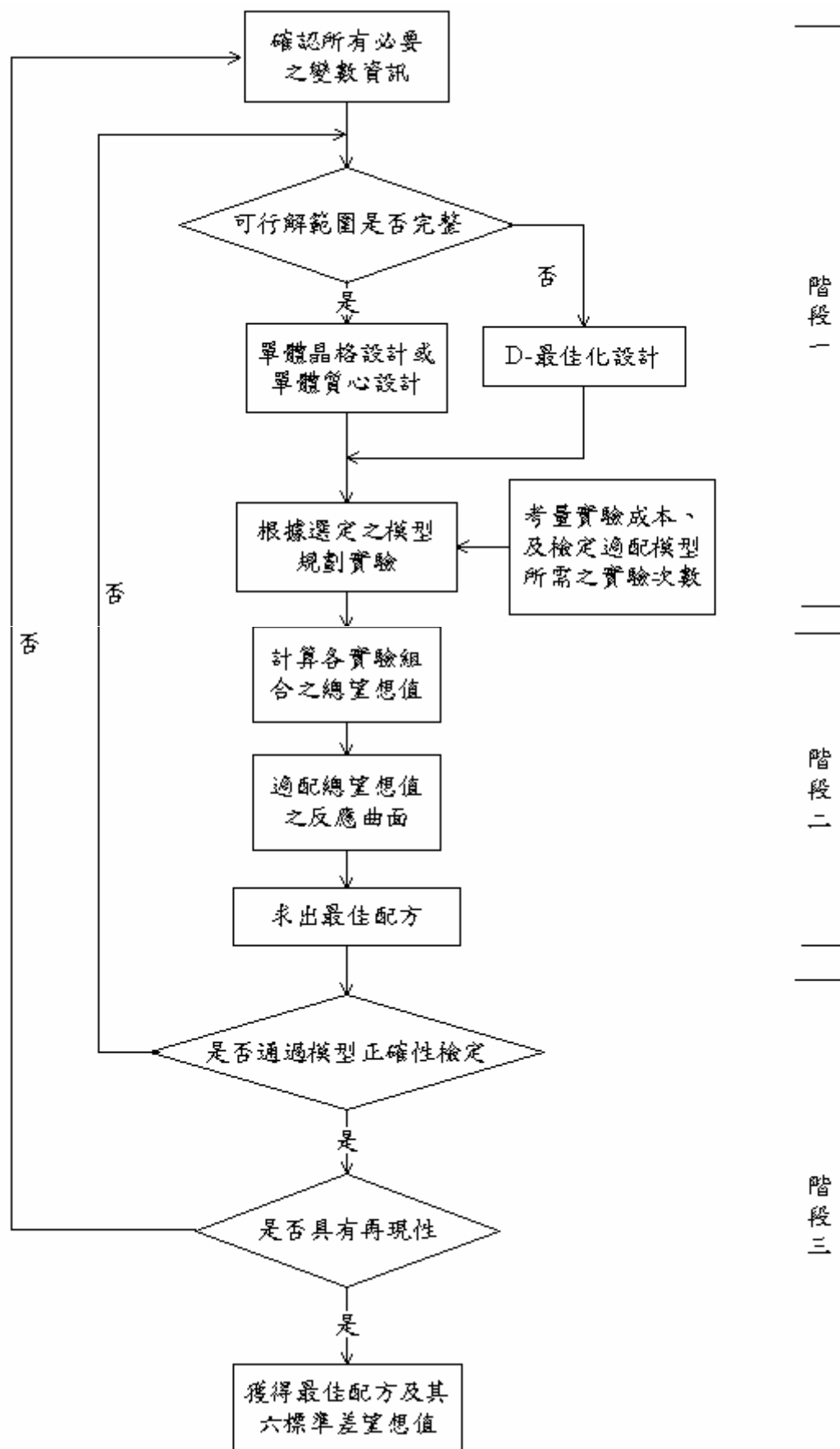


圖 3-1 多品質特性混合實驗設計流程圖

第四章 實例驗證

本章以分析新竹某公司提供之汽車煞車皮碗的混合實驗案例，說明本研究第三章所提出之多品質特性混合實驗最佳化演算法的演算流程，並驗證其有效性。

4.1 實例說明

橡膠皮碗是汽車煞車系統中的重要元件，由於在使用過程中，經常受到拉扯與壓縮等外力影響，且長期與煞車系統中之潤滑液等油料接觸，使其耐用性大幅降低。本研究希望找出橡膠皮碗之最佳配方，使其在上述惡劣環境中能夠長時間正常地發揮功效。根據專家經驗，影響橡膠皮碗之強度與耐用性等性能之主要因素為製作過程中加入的老防劑、流動助劑與架橋劑等化學配料種類與份量。由於事先已經找出適當的化學配料種類，故本例之目的在於找出橡膠皮碗生產過程中，各化學配料的最佳投量比例。

橡膠皮碗之製作，一開始必須先將適當比例之橡膠原料與化學配方投入橡膠生成機(如附錄圖一)，即可生成特定配方之橡膠在製品(如附錄圖二)，再用特定機台壓模成型後，製成橡膠皮碗之成品。成品製成後，要了解該配方之橡膠皮碗是否能在煞車系統中長時間正常地運作，必須經過一系列的測試。本例以萬能試驗機(如附錄圖三)進行橡膠在製品之各種檢測，此外，為了模擬長時間使在煞車系統中使用後的環境，分別以老化爐(如附錄圖四)與耐液爐(如附錄圖五)進行加速老化程序與耐液加速老化程序，再以萬能試驗機檢測該橡膠皮碗在長時間處於惡劣工作環境中，是否仍能正常地運作。

根據經濟部標準檢驗局規定之汽車用液壓煞車缸之橡膠皮碗檢測標準，本例之品質特性共有：硬度、抗拉強度、伸長率、壓縮永久變形率及體積變化率等五項，依據常態、老化性及耐液性等不同情況，上述五項品質特性共可分為十一個反應變數，各反應變數及規格界限與目標值如表 4-1 所示。

表 4-1 汽車橡膠皮碗之規格標準

反應變數項目		變數名稱	規格下限	目標值	規格上限	最差可接受值
常態	硬度(Hs)	H1	65	70	75	—
	抗拉強度(kgf/cm ²)	T1	—	望大	—	100
	伸長率(%)	E1	—	望大	—	200
老化性	硬度變化(Hs)	H2	-5	0	5	—
	抗拉強度變化率(%)	T2	—	0	—	40
	伸長變化率(%)	E2	—	0	—	40
壓縮永久變形率	壓縮永久變形率(%)	C	—	0	—	30
耐液性	硬度變化(Hs)	H3	-15	0	0	—
	抗拉強度變化率(%)	T3	—	0	—	40
	伸長變化率(%)	E3	—	0	—	40
	體積變化率(%)	V	—	0	—	20

本例希望能找出各化學配料之最佳投量，由於影響橡膠皮碗品質特性的是各化學配料之投量比例，而非各化學配料之投入量，因此本實驗符合混合實驗之特性，應該以混合實驗來規劃，以下為本例實驗規劃之說明。

4.2 實驗規劃

本節可對應至研究方法之階段一。首先根據專家經驗，選擇混合實驗之成分，包括老防劑(x_1)、流動助劑 A(x_2)、流動助劑 B(x_3)及架橋劑(x_4)，該四種化學配料佔橡膠皮碗總重量的 16.7%。此外，專家依實務經驗判斷上述四種成分之比例限制分別為：6.7%~16.7%、13.3%~25%、13.3%~25%、33.3%~66.7%，由於成分變數之可行解區域不完整，本例採用 D-最佳化設計進行實驗規劃，實驗規劃如表 4-2 所示。

表 4-2 橡膠皮碗之混合實驗規劃

RUN	老防劑	流動助劑 A	流動助劑 B	架橋劑
1	0.167	0.133	0.133	0.567
2	0.1135	0.25	0.1915	0.445
3	0.06	0.1915	0.25	0.4985
4	0.06	0.133	0.195	0.612
5	0.167	0.25	0.133	0.45

6	0.167	0.25	0.25	0.333
7	0.167	0.1915	0.1915	0.45
8	0.167	0.133	0.25	0.45
9	0.06	0.25	0.133	0.557
10	0.167	0.133	0.1915	0.5085
11	0.067	0.133	0.133	0.667
12	0.1042	0.1812	0.133	0.5816
13	0.06	0.25	0.133	0.557
14	0.167	0.25	0.133	0.45
15	0.06	0.1915	0.25	0.4985

上表之十五次實驗中，其中有兩次是為了進行後續之適缺度檢定，而有三次重複實驗則是用來估計模型之純誤差，其餘十次為以 D-最佳化設計原則找出來的實驗點。在此假設各反應曲面模型 $\eta_j = \phi_j(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 。

4.3 實驗數據分析

本節可對應至研究方法之階段二與階段三。4.3.1 至 4.3.5 各小節說明本實驗之分析程序並求出最佳成分組合，屬於階段二之流程；4.3.6 與 4.3.7 小節則為模型正確性檢定與再現性驗證之結果，則屬於階段三之流程。

4.3.1 計算各反應變數在各實驗組合下之平均數及變異數

由表 4-1 可知，反應變數之中僅 H1、H2 與 H3 有明確之規格界限，依本研究 3.2.1 節所述，必須估計其在各實驗配方下反應值之平均與變異數。又觀察實驗結果可發現，H2 與 H3 之反應值均無顯著差異，且皆在規格界限內，如表 4-3 所示。

表 4-3 反應變數 H2 與 H3 之實驗結果

Run	H2	H3
1	2	-8
2	0	-9
3	0	-7
4	0	-7
5	0	-8
6	1	-8
7	0	-10
8	0	-8

9	2	-7
10	1	-9
11	0	-8
12	1	-6
13	0	-7
14	2	-8
15	2	-8

由表 4-3 可見經過專家經驗判斷所規劃之實驗組合，在反應變數 H2 與 H3 的表現已趨於穩定，故在本例之數據分析中，不會針對這兩個變數進行分析。在此，僅需估計反應變數 H1 在各實驗組合下之平均數與變異數。

本研究使用 Design Expert 找尋反應變數 H1 之最佳反應曲面模型，結果如下：

$$\hat{\eta}_{H1} = 34.38715x_1 + 71.42458x_2 + 65.94636x_3 + 80.12975x_4 \quad (4.1)$$

$$(R^2 = 0.8706)$$

(4.1)式顯示，由於所有交互作用項對反應變數之影響均不顯著，故以 Design Expert 選擇之最佳反應曲面模型為線性模型，則根據(4.1)式可估計各實驗組合之平均數與變異數如下：

表 4-4 反應變數 H1 之平均數與變異數估計值

Run	$\hat{\mu}_{H1}(\hat{\eta}_{H1})$	$\hat{\sigma}_{H1}(\hat{\eta}_{H1})$
1	69.44656	0.877965
2	70.04555	0.982610
3	72.17231	0.898376
⋮	⋮	⋮
14	68.42805	0.920586
15	72.17231	0.898376

4.3.2 計算各反應變數在各實驗組合下之望想值

在 4.3.1 節中估計出具明確規格界限之反應變數的平均數與變異數後，再進行 3.2.2 節之步驟，分別計算各實驗組合下之望想值。

1. 首先計算 H1 之望想值，由於 H1 存在規格上、下限，故代入(3.4)式：

$$Y_{i,H1} = \Phi \left[\frac{75 - (\hat{\mu}_{i,H1} + s_{H1} \times \hat{\sigma}_{i,H1})}{\hat{\sigma}_{i,H1}} \right] - \Phi \left[\frac{65 - (\hat{\mu}_{i,H1} + s_{H1} \times \hat{\sigma}_{i,H1})}{\hat{\sigma}_{i,H1}} \right] \quad (4.2)$$

由於本研究希望計算出具六標準差品質水準之望想值，故令 $s_{H1}=1.5$ ，分別計算 $Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, 1.5)$ 與 $Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, -1.5)$ ，則可得到反應變數 H1 在各實驗組合下之理想值 $d_{i,H1}(\mathbf{x}_i)$ ，如表 4-5 所示。

表 4-5 反應變數 H1 在各實驗組合下之望想值

Run	$Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, 1.5)$	$Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, -1.5)$	$d_{i,H1}(\mathbf{x}_i)$
1	0.999999301	0.999817806	0.999817806
2	0.999801547	0.999860928	0.999801547
3	0.950278792	0.999998321	0.950278792
⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.999999904	0.986918080	0.986918080
15	0.950278792	0.999998321	0.950278792

2. 除 H1、H2 與 H3 外，其餘八個反應變數均不具明確之規格界限，僅存在目標值 T_j 與最差可接受值 M_j ，因此以(3.5)式計算其在各實驗組合下之望想值 $d_{ij}(\mathbf{x}_i)$ ，結果如表 4-6 所示。

表 4-6 其他反應變數在各實驗組合下之望想值

Run	$d_{i,E1}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T1}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,E2}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T2}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,C}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,E3}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T3}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,V}(\mathbf{x}_i)$
1	0.539431	0.960626	0.997495	0.998005	0.820341	0.919648	0.99214	0.868643
2	0.705401	0.962134	0.686472	0.991388	0.935325	0.947124	0.985286	0.830211
3	0.266314	0.633825	0.620349	0.536477	0.954486	0.910332	0.54425	0.758036
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.815141	0.976483	0.990825	0.975851	0.938625	0.948317	0.994466	0.932543
15	0.266314	0.81273	0.950855	0.99441	0.959941	0.977555	0.950855	0.525913

4.3.3 計算各實驗組合之總望想值

由 4.3.2 小節計算之各反應變數在各實驗組合下之望想值，代入(3.6)式計算各實驗組合之總望想值 $D_i(\mathbf{x}_i)$ ，結果如表 4-7 所示。

表 4-7 各實驗組合下之總望想值

Run	$D_i(\mathbf{x}_i)$
1	0.885679
2	0.885472
3	0.644311
4	0.655295
5	0.935072
6	0.862478
7	0.955683
8	0.955507
9	0.749178
10	0.922825
11	0.608523
12	0.681324
13	0.698211
14	0.949453
15	0.766436

4.3.4 適配總望想值之反應曲面

以 4.3.3 小節之總望想值，當作該混合實驗之唯一反應變數，利用 Design Expert 進行反應曲面之分析，其完整二次模型之 ANOVA 表如表 4-8 所示。

表 4-8 總望想值完整二次反應曲面模型之 ANOVA 表

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prob > F	
Model	0.22	9	0.024	6.54	0.0147	significant
Linear Mixture	0.19	3	0.065	22.94	0.0024	
AB	2.429E-003	1	2.429E-003	0.86	0.3960	
AC	1.174E-004	1	1.174E-004	0.042	0.8464	
AD	4.846E-005	1	4.846E-005	0.017	0.9008	
BC	8.787E-005	1	8.787E-005	0.031	0.8668	
BD	9.858E-004	1	9.858E-004	0.35	0.5801	
CD	4.397E-003	1	4.397E-003	1.56	0.2671	
Residual	0.014	5	2.821E-003			
Lack of Fit	5.244E-003	2	2.622E-003	0.89	0.4979	not significant
Pure Error	8.860E-003	3	2.953E-003			
Cor Total	0.23	14				

此完整二次模型之 $R^2=0.9390$ 、調整之 $R^2=0.8291$ ，觀察 ANOVA 表可發現，某些二次交互作用項並無顯著影響，去除這些交互作用項之後，可得簡化之二次反應曲面模型，如表 4-9 所示。

表 4-9 總望想值簡化二次反應曲面模型之 ANOVA 表

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prob > F	
Model	0.21	5	0.043	22.90	< 0.0001	significant
Linear Mixture	0.19	3	0.065	34.58	< 0.0001	
AB	7.539E-003	1	7.539E-003	4.03	0.0756	
CD	0.012	1	0.012	6.55	0.0307	
Residual	0.017	9	1.871E-003			
Lack of Fit	7.978E-003	6	1.330E-003	0.45	0.8136	not significant
Pure Error	8.860E-003	3	2.953E-003			
Cor Total	0.23	14				

此簡化模型留下較顯著之 x_1x_2 與 x_3x_4 交互作用項，將其他高次項與不顯著之二次交互作用項均併入誤差項中，該模型之 R^2 值與調整之 R^2 值分別為 0.9271 與 0.8866，雖然 R^2 值略微降低，但調整之 R^2 值增加 5.5%，故本例採用簡化後之反應曲面模型，其反應曲面方程式如下：

$$\eta(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4.90092x_1 + 2.49026x_2 - 2.65374x_3 - 0.52044x_4 - 9.09111x_1x_2 + 7.83808x_3x_4 \quad (4.3)$$

圖 4-1、圖 4-2、圖 4-3 及圖 4-4 分別為固定老化劑=16.70%、流動助劑 A =25.00%、流動助劑 B=18.68%及架橋劑=48.65%之反應曲面等高線圖。

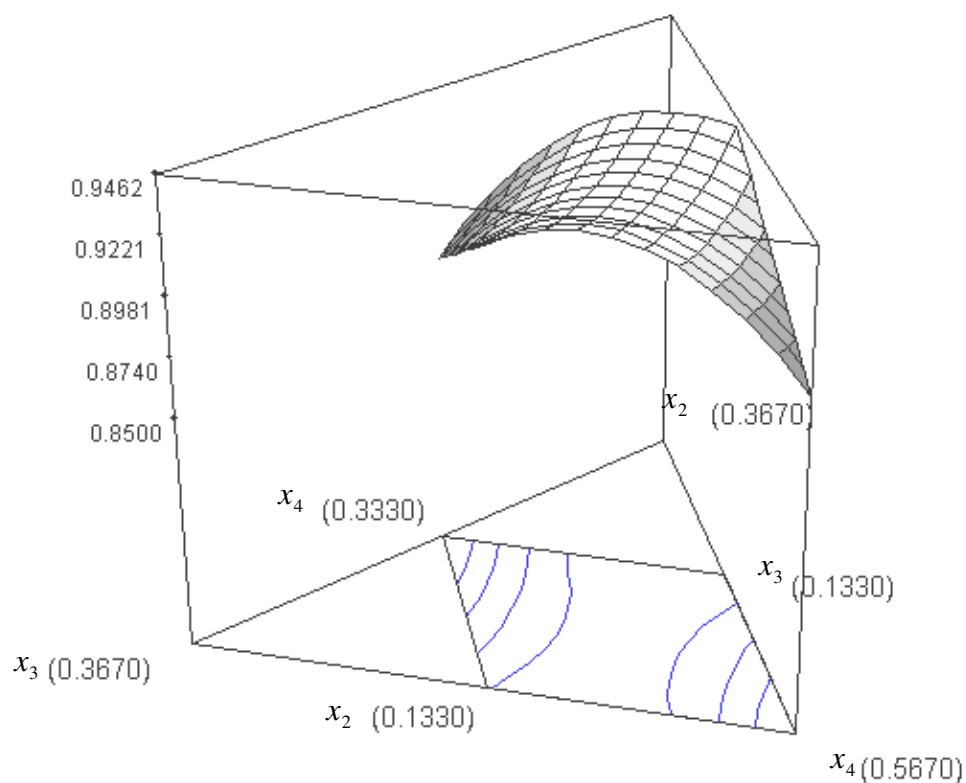


圖 4-1 固定老化劑之反應曲面等高線圖

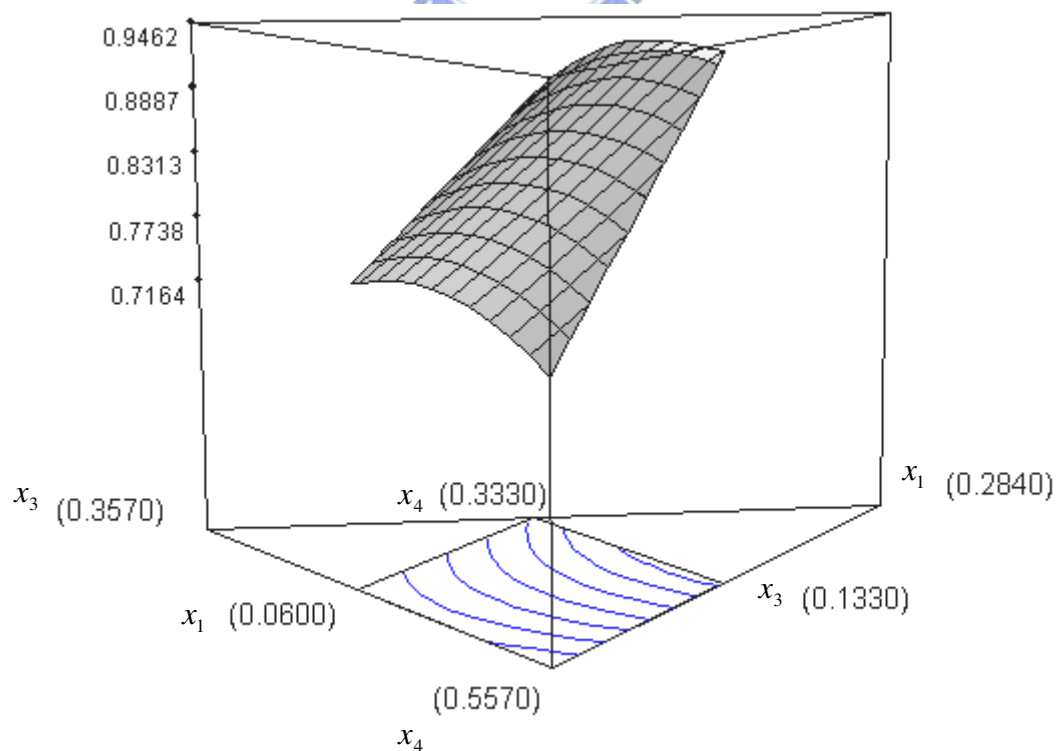


圖 4-2 固定流動助劑 A 之反應曲面等高線圖

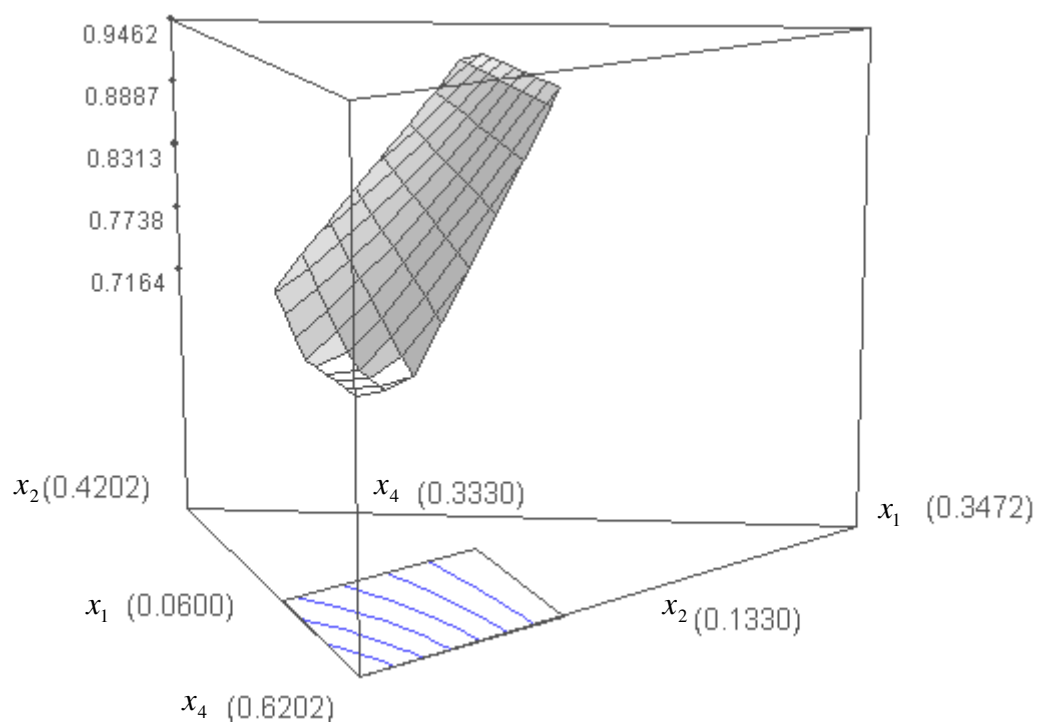


圖 4-3 固定流動助劑 B 之反應曲面等高線圖

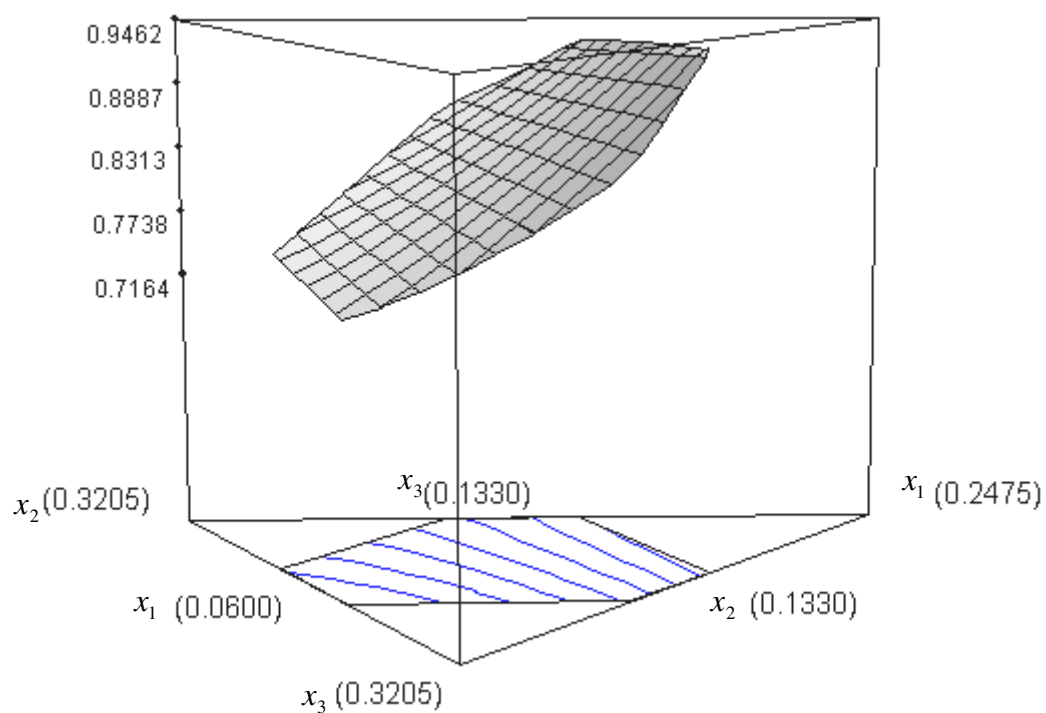


圖 4-4 固定架橋劑之反應曲面等高線圖

4.3.5 找出最佳配方

利用 Design Expert 預估 4.3.4 節中適配之反應曲面模型的最佳配方，結果如表 4-10 所示。

表 4-10 最佳配方預測表

老防劑	流動助劑 A	流動助劑 B	架橋劑	預測之望想值
0.1670	0.2500	0.1554	0.4276	0.9474
0.1670	0.1332	0.2147	0.4851	0.9420
0.1670	0.2257	0.1719	0.4355	0.9417
0.1670	0.1330	0.2233	0.4767	0.9414
0.1670	0.2453	0.1330	0.4547	0.9413
0.1670	0.2500	0.1844	0.3986	0.9408
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.1670	0.1630	0.1993	0.4707	0.9383

由表 4-10 可知以 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.167, 0.25, 0.1554, 0.4276)$ 所預測之望想值 0.9474 為最高，為本例之最佳配方，其餘各組配方之望想值亦均在 0.9332 以上。由於在 4.3.2 節中設定偏移平均量 1.5 倍的標準差，故表 4-10 之望想值為適用六標準差品質水準之絕對指標，以 Ribardo 與 Allen[14]所提出之六標準差望想函數之代表意義來看，此最佳配方與其他幾組配方均達到三至四標準差之品質水準。

4.3.6 模型正確性檢定

由(4.3)式所得反應曲面模型之殘差的常態機率圖(圖 4-5)與預測值對殘差之散佈圖(圖 4-6)如下所示，此二圖並沒有明顯違反常態性、等變異數及獨立性等假設。而表 4-9 中顯示此模型之適缺度檢定的 p 值=0.8136，因此沒有證據顯示該模型不適。由於模型正確性檢定結果正常，進行下一步驟之再現性驗證。

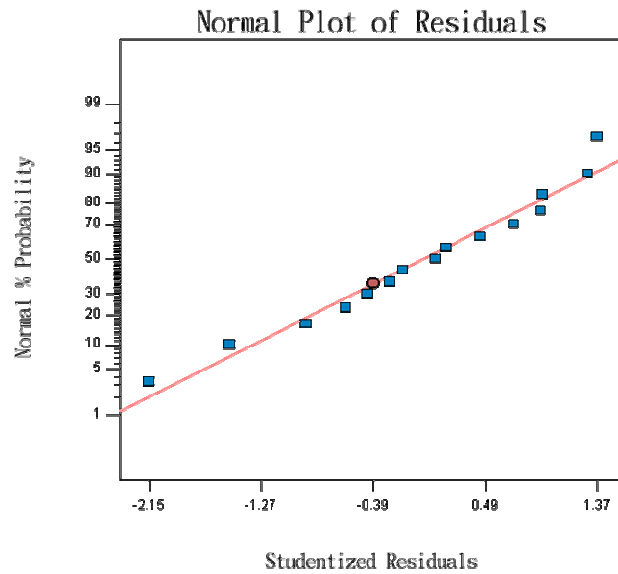


圖 4-5 殘差之常態機率圖

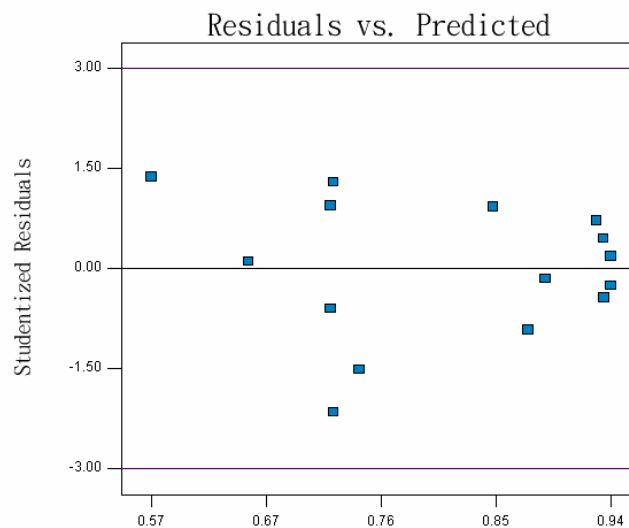


圖 4-6 預測值對殘差之散佈圖

4.3.7 確認實驗

依照 4.3.5 節選定之最佳配方 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.167, 0.25, 0.1554, 0.4276)$ 進行確認實驗，實驗結果如表 4-11 所示。對照表 4-1 中各反應變數之規格界限，該配方之反應值均落在規格界限內，顯示該配方於所有反應變數，符合經濟部標準檢驗局規定之檢測標準。接下來依 4.3 節之模型計算該配方的實際總望想值

$D(\mathbf{x}_i) = 0.9682$ ，亦達到三至四標準差之品質水準。而對應該配方預測之總望想值

及其 95%信賴區間，如表 4-12 所示。

表 4-11 最佳配方確認實驗結果

反應變數	反應值
H1	68
T1	271.80
E1	165.20
H2	0
T2	0.07%
E2	5.08%
C	3.23%
H3	-8
T3	0.15%
E3	5.21%
V	2.34%

表 4-12 最佳配方確認實驗與預測值比較表

	預測	驗證實驗	95%信賴 區間下限	95%信賴 區間上限
總望想值	0.9474	0.9682	0.8884	1.0000

表 4-12 顯示驗證實驗與預測之總望想值差異不大，且落在預測之 95%信賴區間內，顯示此最佳成分組合之再現性良好，建議依此配方製造該汽車煞車用之橡膠皮碗。

4.3.8 實例驗證結論

經本研究第三章提出之多品質特性混合實驗最佳化演算流程分析本例，最佳成分組合為 16.7%的老防劑、25%的流動助劑 A、15.54%的流動助劑 B 與 42.76%的架橋劑。其驗證實驗之再現性良好，若依此配方長期穩定生產，應達三至四標準差之品質水準。

第五章 結論

5.1 結論與貢獻

在材料、化工或食品等產業，存在許多屬於混合實驗範疇之參數設定最佳化問題。實務上常見誤用傳統之因子實驗設計方法來規劃實驗並求出最佳配方的現象，因此常無法得到預期之成效，其原因為混合實驗之參數本質與傳統因子實驗設計之參數不盡相同，在規劃實驗之初若無法釐清，要收到預期之成效會很困難。

雖然國內外均有探討混合實驗設計之文獻，但多限於單品質特性變數之問題。在科技不斷精進與消費者需求持續提升的情況下，產品研發者或製造商往往希望同時在多個品質特性上能同時滿足消費者的需求。近來雖然發展出許多多變量演算法，但在解決多品質特性最佳化之混合實驗問題上，當無法同時最佳化多個品質特性時，國內外文獻是以互償方式進行最佳配方之探討，而很少有系統地使用混合實驗多品質特性同時最佳化的演算法，僅 Dabbas 等人[10]曾應用望想函數來處理多品質特性之問題。

然而，望想函數為相對性指標，僅能用於比較而無實際物理意義。而 Ribardo 與 Allen[14]所提出之以六標準差望想函數演算法所計算之望想值，為具有六標準差品質水準之絕對性指標。故本研究將其套用於混合實驗上，建構一套完整可行之混合實驗多品質特性最佳化演算法。本研究以分析新竹某公司汽車煞車用橡膠皮碗之實際案例，來說明本研究之規劃流程與分析步驟，並驗證其有效性。

現將本研究之貢獻彙整如下：

1. 本研究建構之混合實驗設計流程，可以處理具不規則可行解區域之混合實驗問題，亦可以對同時存在成分變數與流程變數之混合實驗問題進行實驗規劃，因此在實務上，能處理絕大多數之混合實驗設計問題。
2. 本研究採用反應曲面法，即使在實驗成本昂貴或實驗時間急迫等實驗次數有限的情況下，亦能運用特殊之設計原則建構模型並找出最佳配方。
3. 本研究使用六標準差望想函數演算法所計算之最佳配方，能反應六標準差品質水準，即反應當製程穩定生產時之生產良率。

5.2 未來研究

本研究所提出之混合實驗多品質特性最佳化演算法仍有以下改善空間：

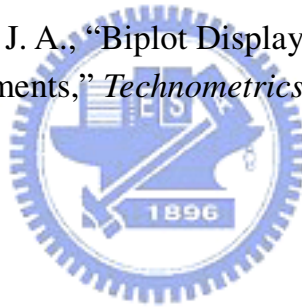
1. 本研究採用 Ribardo 與 Allen[14]提出之六標準差望想函數演算法，在計算無明確規格界限之望想函數方面，當反應變數僅存在目標值而無最差可接受值時，他們並沒有提出望想函數之算法；而當反應變數目標式為區間而非定值時，亦無法計算具六標準差品質水準之望想函數。因此本研究建議未來可以針對各種不同形式之目標式發展不同之六標準差望想函數。
2. 當各實驗配方均接近六標準差水準(即望想值極接近 1)時，其望想值之差異相對較小，會導致反應曲面模型中之各實驗組合間沒有顯著的差異，便難以進行分析。在規格界限很寬裕或最差可接受值距離目標值很遠時，就有可能發生上述情況。因此本研究建議未來研究可改良六標準差望想值之演算公式，使得望想值接近六標準差水準時，仍然可以正常地使用反應曲面模型來進行分析。



參考文獻

- [1] 王俊超，2001，「分析臭氧與前驅物關係之混合物總量模式」，國立臺灣大學流行病學研究所，碩士論文。
- [2] 周柏宏，2003，「多目標超模式法解參數設計問題之研究－以半導體封裝印字製程為例」，國立成功大學製造工程研究所，碩士論文。
- [3] 周昭景，2002，「混合實驗在 Scheffé 模型之穩健 A－最適設計」，國立中山大學應用數學系研究所，碩士論文。
- [4] 林修吉，2002，「含有混合因子之直交表實驗設計問題研究」，義守大學工業工程與管理學系，碩士論文。
- [5] 陳盈助，2002，「電解液配方對鋰電子電池性能之研究」，國立成功大學化學工程學系，碩士論文。
- [6] 許湘伶，2002，「混合實驗在 Scheffé 模型之穩健 D－最適設計」，國立中山大學應用數學系研究所，碩士論文。
- [7] 劉政勳，2004，「反應六標準差水準之多品質特性同時最佳化演算法」，國立交通大學工業工程學系，碩士論文。
- [8] Cornell J. A., “A Comparison between Two Ten-Point Designs for Studying Three-Component Mixture Systems,” *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 1-15, 1986.
- [9] Cornell J. A., *Experiments with Mixtures: Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [10] Dabbas R. M., Fowler J. W., Rollier D. A., and McCarville D., “Multiple Response Optimization Using Mixture-Designed Experiments and Desirability Functions in Semiconductor Scheduling,” *International Journal of Production Research*, Vol. 41, No. 5, pp. 939-961, 2003.
- [11] Derringer G. C. and Suich R., “Simultaneous Optimization of Several Response Variables,” *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, No. 4, pp. 214-219, 1980.
- [12] Guo T., Geaghan J. P., and Rusch K. A., “Determination of Optimum Ingredients for Phosphogypsum Composite Stability under Marine Conditions-Response Surface Analysis with Process Variables,” *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 129, No. 4, pp. 358-365, April 2003.

- [13] Jeyapaul R., Shahabudeen P., Krishnaiah K., “Quality Management Research by Considering Multi-Response Problems in the Taguchi Method – A Review,” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jan, 2005.
- [14] Ribardo C. and Allen T., “An Alternative Desirability Function for Achieving 'Six Sigma' Quality,” *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, pp. 227-240, 2003.
- [15] Sandoval-Castro C. Capetillo-Leal A., Cetina-Góngora C., Ramirez-Avilés R., L., “A Mixture Simplex Design to Study Associative Effects with An in Vitro Gas Production Technique,” *Animal Feed Science and Technology*, Vol. 101, pp. 191-200, Oct. 2002.
- [16] Scheffé H., “Experiments with Mixtures,” *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. 20, No. 2, pp. 344-360, 1958.
- [17] Scheffé H., “Simplex-Centroid Design for Experiments with Mixtures,” *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. 25, No. 2, pp. 235-263, 1963.
- [18] Smith W. F. and Cornell J. A., “Biplot Display for Looking at Multiple Response Data in Mixture Experiments,” *Technometrics*, Vol. 35, No. 4, pp. 337-350, 1993.



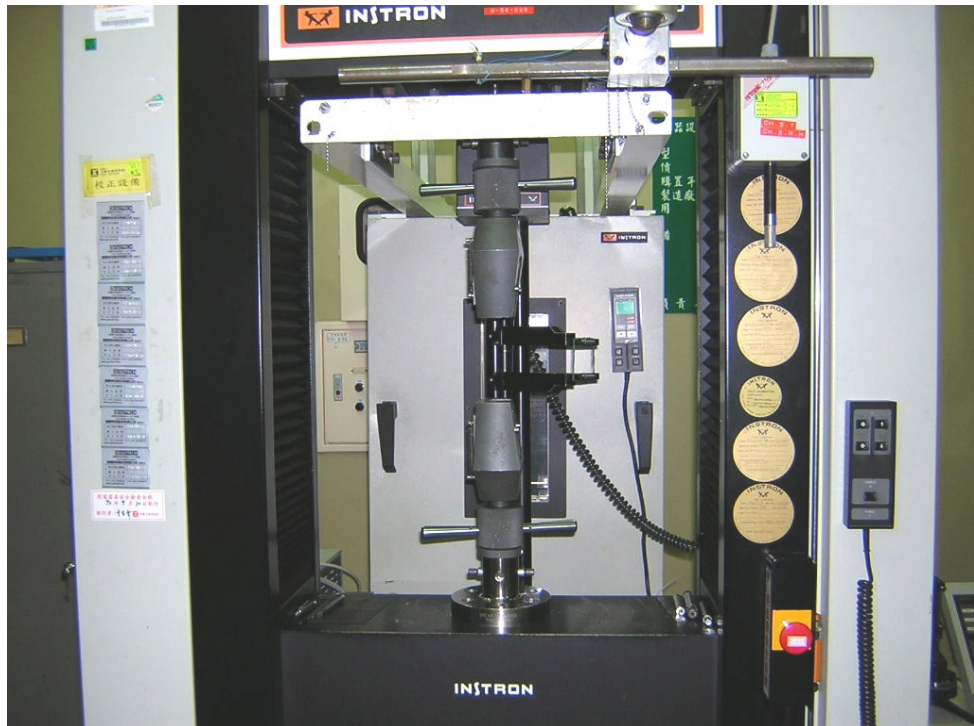
附錄



圖一、橡膠生成機



圖二、橡膠在製品



圖三、萬能試驗機



圖四、老化爐



圖五、耐液爐

