

國立交通大學
工業工程與管理學系

博士論文

多次投料問題在中斷式幾何分配下之研究

Multiple Lot Sizing Decisions with
Interrupted Geometric Yield

The logo of National Tsing Hua University is a circular emblem with a blue border. Inside the circle, there is a stylized representation of a traditional Chinese building or structure. The year '1896' is inscribed at the bottom of the inner circle.

研究生：蘇泰盛

指導教授：許錫美 博士

中華民國九十八年三月

多次投料問題在中斷式幾何分配下之研究

Multiple Lot Sizing Decisions with Interrupted Geometric Yield

研究生：蘇泰盛

Student：Tai-Sheng Su

指導教授：許錫美

Advisor：Dr. Hsi-Mei Hsu

國立交通大學

工業工程與管理學系

博士論文



Submitted to Department of Industrial Engineering and Management

College of Management

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

in

Industrial Engineering and Management

March 2009

Hsin-Chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年三月

多次投料問題在中斷式幾何分配下之研究

學生：蘇泰盛

指導教授：許錫美 博士

國立交通大學工業工程與管理學系 博士班

摘要

本論文探討有交期限制的多次投料問題：首先探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統的多次投料問題；隨之探討二階段生產系統的多次投料問題。二階段生產系統在每個生產階段之後，皆設有檢驗站，在每個投料時點，藉由每個階段的良品在製品數量與未滿足的需求量，須同時決定各階段的投料量。本研究假設各階段產出的良品個數服從中斷式幾何分配，成本函數考慮設置成本、變動成本、成品存貨持有成本及缺貨成本四項。以最小生產成本為目標，提出最佳投料量的特性，基於此特性，來設計動態規劃演算法，以求解各階段的最佳投料量。針對二階段生產系統的多次投料問題，在需求量較大時，我們提出一個啟發式演算法，可以有效地求得滿意解。最後，藉由數值範例來觀察決策參數的特性與最佳投料量的特性。

關鍵詞：批量、中斷式幾何分配、動態規劃、生產/存貨系統

Multiple Lot Sizing Decisions with Interrupted Geometric Yield

Student : Tai-Sheng Su

Advisor : Dr. Hsi-Mei Hsu

Department of Industrial Engineering and Management

National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this study, we examine two issues of multiple lot-sizing problem with interrupted geometric yield and non-rigid demand. Firstly, we investigate a single-stage multiple lot-sizing problem with variable production lead-time. Secondly, we investigate a two-stage multiple lot-sizing problem with *simultaneously* determining the optimal lot sizes for the two production stages in each period. The following cost items are considered in these problems: setup cost, variable production cost, inventory holding cost, and shortage cost. These problems are formulated as a dynamic program (DP), respectively, and some lemmas are proposed to confine their solution spaces. We propose a heuristic solution method to solve the two-stage multiple lot-sizing problem for reducing the computational time. Finally, numerical examples are illustrated to show the efficiencies of the proposed heuristic method.

Keywords: Lot-sizing; Interrupted geometric distribution; Dynamic programming; Production/Inventory system

致 謝

本論文能夠順利完成，首先感謝我的兩位恩師 許錫美教授和 巫木誠教授悉心指導。在這六年的研究訓練過程中，承蒙兩位恩師不斷地給予教導，使我在學術研究及論文寫作方面獲益良多，培養我具備獨立研究的能力。從兩位恩師的身上學習到，如何做研究、研究的嚴謹、做事的信念及做人的誠信，在此致上衷心的感謝。

論文口試期間，感謝 王貳瑞教授、 彭德保教授及 陳振東教授等三位委員提供寶貴的意見，使本論文得以更臻完善。在等待 paper 審查期間，非常感謝 王貳瑞教授提供一個工作機會，讓我回到南部工作就近照顧家庭。

做研究期間，感謝學弟亮銓、政翰和振富，在撰寫程式的幫忙，尤其是亮銓在研究的後期，投入相當多的時間，使得研究得以順利進行。感謝楊康學長、志文兄，適時提供寶貴的意見。感謝昌甫在生活和研究中，陪伴我一起成長和相互扶持。感謝學弟英森、廷勳、景閔和智偉，在研究有困惑時，可以一起討論，在英文寫作不懂的地方，很感謝廷勳的教導。

修課期間，感謝同窗好友敬森兄、屏國、建和、俊穎、誠佑、景如、姍娟和明輝等人的協助，得以順利完成修課。在空閒時，很感謝屏國開車帶我出去走走，減少一些壓力。

最後要感謝我的母親和家人，對我的照顧和關心，由於你們的支持才能讓我專心於研究，特別要感謝我的老婆靖純，有她的鼓勵、支持和體恤，才能堅持到最後。僅以本論文感謝大家。

目 錄

摘 要.....	i
ABSTRACT.....	ii
致 謝.....	iii
目 錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與目的.....	1
1.2 研究假設與限制.....	2
1.3 研究流程與論文章節.....	3
第二章 文獻探討.....	5
2.1 單階段生產系統.....	5
2.1.1 訂單需求量與交貨要求.....	5
2.1.2 生產特性.....	5
2.1.3 成本項目.....	7
2.1.4 求解方法.....	8
2.2 多階段生產系統.....	10
2.2.1 交貨要求.....	10
2.2.2 生產特性.....	10
2.2.3 成本項目.....	11
2.2.4 決策變數.....	11
2.2.5 求解方法.....	11
第三章 生產週期時間具不確定性的多次投料問題.....	19
符號定義.....	19
3.1 問題描述.....	20
3.2 建構動態規劃問題.....	22
3.2.1 研究假設.....	22

3.2.2 動態規劃問題的決策結果.....	23
3.2.3 成本遞迴式.....	24
3.2.4 邊界條件.....	25
3.3 求解動態規劃問題.....	27
3.3.1 縮小求解空間.....	27
3.3.2 動態規劃問題的演算法.....	31
3.3.3 數值範例.....	34
3.4 本章結論.....	39
第四章 二階段生產系統的多次投料問題.....	40
符號定義.....	40
4.1 問題描述.....	41
4.2 建構動態規劃問題.....	45
4.2.1 研究假設.....	45
4.2.2 動態規劃問題的決策結果.....	45
4.2.3 成本遞迴式.....	46
4.2.4 邊界條件.....	48
4.3 求解動態規劃問題.....	49
4.3.1 縮小求解空間.....	49
4.3.2 動態規劃問題的演算法(OPS 演算法).....	53
4.3.3 啟發式演算法(Huristic Method).....	57
4.3.4 數值範例.....	60
4.4 本章結論.....	72
第五章 結論與建議.....	73
5.1 結論.....	73
5.2 未來研究建議.....	74
參考文獻.....	75
附錄 A.....	79
附錄 B.....	83

表目錄

表 2.1 單階段多次投料問題的相關文獻整理	16
表 2.2 多階段多次投料問題的相關文獻整理	17
表 4.1 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.6, 0.6)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效	61
表 4.2 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.6, 0.8)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效	61
表 4.3 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.8, 0.6)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效	62
表 4.4 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.8, 0.8)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效	62
表 4.5 在不同的 (T, D) 情境下 R_c 的結果	64
表 4.6 在不同的 (T, D) 情境下，OPS 演算法所需的計算時間	64
表 4.7 $t=1$ 的最佳投料量	66
表 4.8 $t=2$ 的最佳投料量	67
表 4.9 $t=3$ 的最佳投料量	68
表 4.10 $t=4$ 的最佳投料量	69
表 4.11 $t=5$ 的最佳投料量	69



圖目錄

圖 1.1 研究流程.....	4
圖 3.1 生產週期時間為一期產或二期產出的多次投料決策.....	21
圖 3.2 第 t 期與 $t-1$ 期的關係.....	23
圖 3.3 根據二個邊界條件，設定各種狀態的最佳成本與投料量.....	32
圖 3.4 當 $D_t = 1$ 時，設定各種狀態的最佳成本與投料量.....	32
圖 3.5 $D_t = 2, 3, \dots, D$ ，計算各期、各種狀態的最佳成本與投料量.....	33
圖 3.6 p 和期望總生產成本的關係.....	35
圖 3.7 T 和期望總生產成本的關係.....	36
圖 3.8 D 和期望總生產成本的關係.....	36
圖 3.9 在不同的 p 下，最佳投料量不會隨著 D 增加而嚴格遞增.....	37
圖 3.10 IG 分配($\theta = 0.7$)的平均良率.....	38
圖 4.1 二階段生產系統.....	42
圖 4.2 二階段生產系統的投料情境.....	42
圖 4.3 二階段生產系統的多次投料決策.....	43
圖 4.4 第 t 期與 $t-1$ 期的關係.....	46
圖 4.5 根據二個邊界條件，設定各種狀態的最佳成本與最佳投料量.....	54
圖 4.6 當 $t = 1$ 時，計算最佳成本與最佳投料量.....	55
圖 4.7 當 $2 \leq t \leq T - 2$ 時，計算最佳成本與最佳投料量.....	55
圖 4.8 當 $t = T - 1$ 時，計算最佳成本與最佳投料量.....	56
圖 4.9 當 $t = T$ 時，計算最佳成本與最佳投料量.....	56
圖 4.10 OPS 演算法和啟發式演算法的比較.....	58
圖 4.11 IG 分配投料量和期望產出良品個數的關係.....	70
圖 4.12 最佳投料量的特性.....	71

第一章 緒論

1.1 研究背景與目的

客製化產品的需求，與日遽增，廠商接到訂單後，一般皆有多個或無限多個投料時點可以投料，如何決定每個投料時點的投料量，以最小化生產成本，滿足訂單的需求，是一個非常重要的課題。此種決定每個投料時點最佳投料量的問題稱為『多次投料問題』[14]。

多次投料問題可分為無交期限限制及有交期限限制兩類。無交期限限制的多次投料問題，是指訂單數量須全數滿足(rigid demand)，不容許缺貨。因此投料時點有無限多次，直到產出的良品個數，大於或等於需求量時才停止投料。有交期限限制的多次投料問題，是指接到訂單後，已知需求量为 D ，從接單後到交期前有 T 個投料時點，分別為 T 、 $T-1$ 、 \dots 、 1 ，到交期日時，若產出的良品個數少於訂單需求量(non-rigid demand)，則須付出缺貨成本。多次投料問題一般皆假設在某個投料時點 t ，投料 k 個單位，在第 k 個單位產出後，才整批檢驗，此時才得知產出的良品個數，該良品數為一隨機變數， Y_k ，服從某一機率分配。

探討單階段生產系統有交期限限制的多次投料問題，相關研究有 Guu 和 Zhang[20]、Pentico[25]、Sepehri 等學者[27]，及 Wang 和 Gerchak[28]。其中 Wang 和 Gerchak [28]假設生產週期時間大於一個週期且為已知常數。然而，在現實的生產情境中，因為供應商的供貨不可靠、搬運時間的不穩定、等候加工、機器故障及重工等不可預期因素，使得生產週期時間常具有不確定性[31]。當生產週期時間具不確定性，該如何決定最佳投料量，以最小化生產成本，是一值得研究的課題。因此，本論文的主題一是探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限限制的多次投料問題。

探討多階段生產系統有交期限限制的多次投料問題，相關研究有 Barad 和 Braha[3] 及 Braha[7]。他們是探討多階段流線型的生產系統，並考慮容許外購或重工在製品的生產情境，每個生產階段之後，皆設有檢驗站，上一階段的良品產出，為下一階段的

投料來源。若上一階段的良品產出短缺時，可藉由外購或重工來補足，因此每個投料時點，僅決定下一階段的最佳投料量。然而，這樣的生產模式，僅有單一階段在生產，而其他各階段都在閒置。為了改善此生產模式，本論文的主題二是探討多階段流線型生產系統的多次投料問題，每個投料時點須同時決定各階段的投料量。

探討多階段流線型生產系統的多次投料問題，過去相關研究大都是利用動態規劃的手法來求解，但是當面對訂單需求量很大的情況下，動態規劃的網路規模變得相當的龐大，需耗費很長的計算時間才能求得最佳解。為了縮短計算時間，本論文提出一個啟發式演算法，可以有效地求得滿意解。

上述二研究主題是假設各階段產出的良品個數服從中斷式幾何分配，成本函數含設置成本、變動成本、成品存貨持有成本及缺貨成本四項。以最小生產成本為目標，分別探討上述兩個研究問題最佳投料量的特性，基於這些特性，利用動態規劃的手法，發展求解演算法，求解每個投料時點各階段的最佳投料量。對二階段生產系統的多次投料問題，為了解決需求量較大時，求解時間很長的缺點，我們提出一個啟發式演算法，以便於實務上的應用。



1.2 研究假設與限制

本論文的基本假設如下：

1. 訂單的需求量及交期為已知
2. 每一階段產出的良品個數服從中斷式幾何分配
3. 投料時點已知

在交期前可投料的時點為 T 、 $T-1$ 、 \dots 、 1 ，共有 T 個投料時點，每個投料時點只允許一次投料

4. 生產成本為設置成本、變動成本、成品存貨持有成本及缺貨成本
5. 完成品有存貨持有成本，在製品沒有存貨持有成本
6. 每個生產階段整批產出後，隨即整批檢驗

7. 超過需求的良品與不良品都沒有殘值
8. 產能足夠

1.3 研究流程與論文章節

本論文的研究流程(參見圖 1.1)，首先針對多次投料問題的相關文獻，進行文獻回顧與整理，我們發現兩個研究主題，再將這兩個研究主題，分別建構成動態規劃問題。由於動態規劃搜尋解的範圍很大，為了縮小搜尋解的範圍，我們證明最佳投料量有上界。根據最佳投料量的特性，發展動態規劃問題的演算法，也利用數值範例觀察決策參數的特性和最佳投料量的特性。最後，提出具體的結論和未來研究的建議。



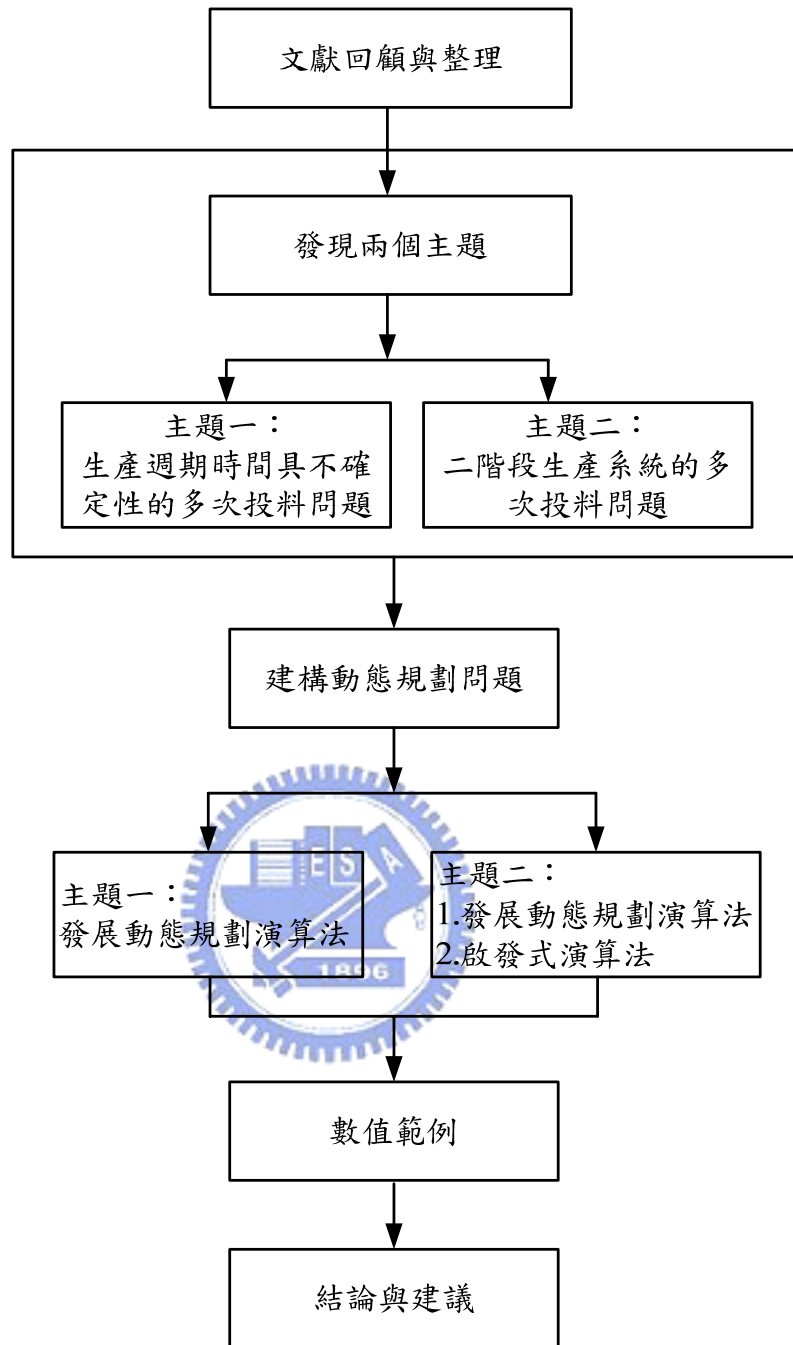


圖 1.1 研究流程

本論文其他章節的安排如下。第二章為多次投料問題相關的文獻探討；第三章是探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題；第四章是探討二階段生產系統有交期限制的多次投料問題，並提出二個求解方法；第五章則是結論與建議。

第二章 文獻探討

已有二篇論文針對多次投料問題做系統性的回顧[16, 30]，本章是根據這二篇論文的分類方式，分別探討單階段生產系統及多階段生產系統的相關文獻。

2.1 單階段生產系統

單階段生產系統的多次投料問題之相關文獻，我們從訂單需求量與交貨要求、生產特性、成本項目及求解方法等四個觀點來探討。

2.1.1 訂單需求量與交貨要求

在訂單需求量方面，除 Gerchak 和 Grosfeld-Nir[9]探討訂單需求量具不確定性外，其餘都是探討訂單需求為確定性[1, 2, 4, 8, 12, 14, 19-22, 25, 27, 28, 32, 33]。在交貨要求方面，可分為無交期限限制及有交期限限制。無交期限限制是指投料時點有無限多次，直到產出的良品個數大於或等於需求量後，才停止生產活動，也就是訂單數量須全數滿足(rigid demand)，不容許缺貨，因此不考慮缺貨成本，探討無交期限限制的相關文獻有[1, 2, 4, 8, 12, 14, 19, 21, 22, 27, 32, 33]。有交期限限制是指投料時點為有限多次，直到交期日，若產出的良品個數無法滿足訂單需求量(non-rigid demand)，則須付出缺貨成本，探討有交期限限制的相關文獻包括[20, 25, 27, 28]。

2.1.2 生產特性

在生產特性方面，我們將從良品個數的分配、生產週期時間及多種等級產品等角度來探討。

1. 良品個數的分配

在良品個數的分配方面，過去文獻假設產出的良品個數，可歸類為以下六種良率分配。

(1)中斷式幾何(Interrupted Geometric, IG)分配，以下簡稱 IG 分配，如[2, 9, 14, 19-22, 32, 33]。生產製造系統的作業程序是一個接著一個加工，製程可能會產生二種狀態：一種是控制狀態(in-control)；另一種是失控狀態(out-of-control)。當製程發生失控狀態後，所生產的產品都是不良品，失控狀態前的產出皆為良品，此種良品個數的分配適用 IG 分配來表示，其數學式如下。

$$P(Y_k = y) = \begin{cases} (1-\theta)\theta^y & y = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ \theta^k & y = k \end{cases}$$

其中， θ 是 IG 分配的參數。在實際的生產情況中，許多的生產系統都是利用模具加工成型，該系統產出的良品個數是服從 IG 分配，例如：軋延線材、抽線、沖壓成型等，這些生產系統因為模具使用一段時間會磨耗或損壞，一旦模具磨耗的程度超出標準，或是模具損壞，後續產出的產品都是不良品。

(2)離散型均等(Discrete Uniform, DU)分配，如[1, 9, 14, 19, 32]。離散型均等分配的數學式如下。

$$P(Y_k = y) = \frac{1}{k+1}, \quad y = 0, 1, \dots, k$$

$P(Y_k = y)$ 表示投料 k 個，產出 y 個良品的機率。

(3)二項(Binomail)分配，如[4, 9, 14, 19, 25, 27, 32]。二項分配的數學式如下。

$$P(Y_k = y) = \binom{k}{y} \theta^y (1-\theta)^{k-y}$$

其中， θ 是二項分配的參數。

(4)全為良品或全無良品(All-or-Nothing)分配，如[9, 32]。全為良品或全無良品分配的數學式如下。

$$P(Y_k = y) = \begin{cases} (1-\theta) & y = 0 \\ \theta & y = k \end{cases}$$

其中， θ 是全為良品或全無良品分配的參數。

(5)三項式(Trinomial)分配，如[8]。三項式分配的數學式如下。

$$P(Y_k = y_1, y_2) = \frac{k!}{y_1! y_2! (k - y_1 - y_2)!} \theta_1^{y_1} \theta_2^{y_2} (1 - \theta_1 - \theta_2)^{k - y_1 - y_2}$$

$P(Y_k = y_1, y_2)$ 表示投料 k 個，分別產出 y_1 個高級品與 y_2 個低級品的機率，其中 θ_1 與 θ_2 是三項分配的參數。

- (6) 隨機比例模式，如[12, 14, 28]。所謂隨機比例(Stochastically Proportional)模式是指假設投料 k 個，產出良品個數為 Y_k ， $Y_k = k \cdot X$ ，其中 X 服從某一連續型機率分配的隨機變數， X 與 k 互相獨立。

2. 生產週期時間

在生產週期時間方面，多數的研究是假設生產週期時間為一個週期，也就是說，期初投入生產，期末就全部產出。過去研究只有 Wang 和 Gerchak[28] 是探討生產週期時間大於一個週期，且生產週期時間大於投料間隔時間的多次投料問題。舉例來說，從投料到產出的生產週期時間是 3 天，兩個投料時點的間隔時間是 1 天，因此從投料到產出之間還有 2 次的投料機會。



3. 多種等級產品

在多種等級產品方面，多數的研究是假設產出的良品只有二種可能性，不是良品就是不良品。Gerchak 和 Grosfeld-Nir[8] 探討一張訂單有多種等級產品的多次投料問題。他們假設產出的良品個數服從三項式分配，產品等級分為高級品、低級品及不良品三種，高級品可供低級品使用，低級品不能供高級品使用，每一種等級的數量須全部滿足訂單需求。

2.1.3 成本項目

從成本項目的角度來看，大部分的研究考慮設置成本、變動成本、成品存貨持有成本及缺貨成本[1, 2, 4, 8, 9, 12, 14, 19-22, 25, 27, 28, 32, 33]，只有少數研究除考慮設置成本和變動成本外，另考慮檢驗成本[19]及生產過剩的處置成本和缺貨成本[28]。除

Gerchak 和 Grosfeld-Nir[9]以總利潤最大化為目標外，其餘都以最小生產成本為目標。此外，Grosfeld-Nir 和 Gerchak [14]提出計算成本變異的方法，來評估投料決策風險。

2.1.4 求解方法

單階段生產系統的多次投料問題，其求解方法可分為二大類：(1)動態規劃求解；(2)非動態規劃求解。利用動態規劃求解的文獻有[1, 2, 4, 8, 9, 12, 14, 19-22, 28, 32, 33]；利用非動態規劃求解的文獻有[2, 25, 27]。

1. 動態規劃求解

大部分的研究是利用動態規劃的手法求解，然而當需求量很大時，利用動態規劃求解相當耗時，因此一些學者證明最佳投料量的特性，來縮小搜尋解空間[1, 2, 4, 9, 12, 14, 19, 20, 22, 28, 32, 33]。

Anily[1]和 Beja[4]探討當產出的良品個數分別服從離散型均等分與二項分配時，Grosfeld-Nir 和 Gerchak[12]及 Wang 和 Gerchak[28]探討產出的良品個數服從隨機比例模式，Grosfeld-Nir 和 Gerchak 假設產出的良率是服從 Beta 分配，Wang 和 Gerchak 假設產出的良率是服從某一連續型的機率分配。他們都證明最佳投料量須大於或等於未滿足的需求量。

Grosfeld-Nir 和 Gerchak[14]探討產出的良品個數服從 IG 分配，證明最佳投料量不會超過未滿足的需求量。Zhang 和 Guu[32, 33]、Guu 和 Zhang[20] 及 Guu[22]探討產出的良品個數服從 IG 分配，證明當需求量为 D 及 $D-1$ 的最佳投料量，分別為 N_D 及 N_{D-1} 時， N_D 及 N_{D-1} 滿足以下的關係式， $N_D \leq N_{D-1} + 1$ 。此外，並定義兩條線性函數以決定任一需求量 D 的最佳投料量的上下界。該研究基於上述特性，設計求解動態規劃問題的演算法，求得最佳投料量。Guu 和 Liou[21]改良 Zhang 和 Guu[33]的演算法，簡述如下：當需求量小於或等於 4 時，提出最佳投料量的判別準則；當需求量 D 大於 4 時，投料量 N 從 $N = 1$ 開始，提出每增加一個投料量的邊際成本的計算公式，該公式利用 D 的遞迴關係式，可以簡單的算出邊際成本，並利用生產成本差額的正負號來判

別是否為最佳投料量，此演算法的求解時間優於 Zhang 和 Guu[33]的演算法。

Gerchak 和 Grosfeld-Nir[9]建構訂單需求量為不確定時的期望總成本遞迴式。在給定需求量的機率分配下，證明成品存貨量存在一個上界值。若當產出的成品庫存量超過上界值時，則即停止生產活動，否則就繼續投料生產。

Grosfeld-Nir 等學者[19]將檢驗成本加入成本函數，建構需求量 D 時的期望總成本遞迴式，期望總成本遞迴式包括期望生產成本與期望檢驗成本二項加總。作者提出如何找到最佳投料量的條件式。在給定一個投料量下，代回成本遞迴式即可求得期望總成本。投料量在一個有限的範圍內搜尋，滿足條件式的投料量可能不只一個，在從中選擇最小的為最佳投料量。

Gerchak 和 Grosfeld-Nir[8]建構一張訂單須滿足多種等級產品的成本遞迴式，以動態規劃的手法，求得最佳投料量。另外，作者也提出一張訂單須滿足二種等級產品時，求期望檢驗個數的關係式。



2.非動態規劃求解

在非動態規劃求解方面，Pentico[25]與 Sepehri 等學者[27]探討產出的良品個數服從二項分配，發展啟發式演算法，取代動態規劃求解，求得近似最佳投料量。Sepehri 等學者[27]提出每增加一單位投料的邊際成本公式，利用二項分配轉換成常態分配的近似表示法，發展啟發式演算法，求得近似最佳投料量。Pentico[25]以 360 個案例驗證 Sepehri 等學者[27]的演算法發現，當訂單需求量很大及產出良品的機率值很低時，近似解與最佳解之間誤差較大。誤差的主因是 Sepehri 等學者[27]將二項分配轉換成標準常態分配時，不論 z 值為正數或負數，都用同一演算公式求解。因此，Pentico 修正 Sepehri 的演算法，依 z 值為正數或負數給予不同的演算公式求解。Pentico 驗證修正後的演算法優於 Sepehri 的演算法。

Anily 等學者[2]探討產出的良品個數服從 IG 分配，證明當需求量小於某一值時，最佳投料量等於需求量；當需求量很大時，可將原來動態規劃問題，轉換成簡單的非動態規劃問題，來求得近似解。

本研究將上述單階段生產系統多次投料問題的相關文獻，分類整理在表 2.1。

2.2 多階段生產系統

多階段生產系統的多次投料問題之相關文獻，我們從交貨要求、生產特性、成本項目、決策變數及求解方法等，這五個觀點來探討。

2.2.1 交貨要求

在交貨要求方面，交貨要求可分為無交期限限制及有交期限限制兩大類。探討無交期限限制的相關文獻有[5, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 26, 29]；探討有交期限限制的相關文獻有[3, 7, 23]。

2.2.2 生產特性

在生產特性方面，我們將從生產系統與良品個數的分配等角度來探討。



1. 生產系統

從生產系統的角度來看，除 Grosfeld-Nir 等學者[18]探討二階層生產系統外，其餘的研究都是探討多階段流線型(序列式)生產系統。Barad 和 Braha[3]、Braha[7]及 Lee 和 Yano[23]探討多階段流線型生產系統，Grosfeld-Nir 和 Robinson[11]探討二階段流線型生產系統，Grosfeld-Nir 和 Ronen[10]及 Grosfeld-Nir[17]探討單一瓶頸機台流線型生產系統，Grosfeld-Nir[15]探討兩個瓶頸機台流線型生產系統，Wein[29]及 Grosfeld-Nir 和 Gerchak[13]探討可重工流線型生產系統。Grosfeld-Nir 等學者[18]探討二階層生產系統，第一階層有 S 部($M_i, i = 1, 2, \dots, S$)不同的機台，生產不同的零件，第二階層僅有一部組裝機台(M_{S+1})。

2. 良品個數的分配

在良品個數的分配方面，過去文獻假設產出的良品個數，可歸類為以下五種良率

分配。

- (1) IG 分配，如[5, 11, 13, 18]。
- (2)離散型均等分配，如[11, 13, 17, 18]。
- (3)二項分配，如[3, 7, 5, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 26]。
- (4)全為良品或全無良品分配，如[5, 11, 13, 17, 18]。
- (5)隨機比例模式，如[17, 23, 29]。

2.2.3 成本項目

在成本項目方面，多數的文獻僅考慮設置成本及變動成本[5, 10, 11, 15, 17, 18, 26]。只有少數的研究除考慮設置成本及變動成本外，另考慮重工成本[13]。Wein[29]僅考慮變動成本及重工成本。Lee 和 Yano[23]考慮變動成本、缺貨成本及生產過剩的處置成本。Barad 和 Braha[3]及 Braha[7]考慮變動成本、缺貨成本、生產過剩的處置成本及外購成本(重工成本)。除 Pentico[26]、Lee 和 Yano[23]、Barad 和 Braha[3]及 Braha[7]有考慮成品殘值外，其餘則不考慮成品殘值。

2.2.4 決策變數

在決策變數方面，大多數的研究僅選定某一生產階段並決定投料量，未被選定的其他各階段，則閒置不投料生產。Ben-Zvi 和 Grosfeld-Nir[5]及 Pentico[26]僅決定初始階段的投料量，Grosfeld-Nir 和 Ronen[10]決定瓶頸機台的投料量。Barad 和 Braha[3]、Braha[7]、Lee 和 Yano[23]及 Wein[29]決定下一階段的投料量。Grosfeld-Nir 和 Robinson[11]、Grosfeld-Nir 和 Gerchak[13]、Grosfeld-Nir[15]、Grosfeld-Nir[17]及 Grosfeld-Nir 等學者[18]是從所有階段中選定某一生產階段並決定投料量。

2.2.5 求解方法

多階段生產系統的多次投料問題，其求解方法可分為二大類：(1)動態規劃求解；(2)非動態規劃求解。利用動態規劃求解的文獻有[5, 10, 13]；利用非動態規劃求解的文獻

有[3, 7, 11, 15, 17, 18, 23, 26, 29]。

1. 動態規劃求解

Grosfeld-Nir 和 Ronen[10]將多階段單一瓶頸機台系統合併成單一階段求解。首先計算從起始階段投一單位到瓶頸機台，瓶頸機台(含)前的合併變動成本為 $\hat{\beta}_1$ ，合併良率為 $\hat{\theta}_1$ ($\hat{\theta}_1$ 等於瓶頸機台的良率)，再計算投一單位到瓶頸機台的下一階段，瓶頸機台後的合併變動成本為 $\hat{\beta}_2$ ，合併良率為 $\hat{\theta}_2$ ($\hat{\theta}_2$ 等於瓶頸機台後的每個非瓶頸機台良率相乘)。其次利用 $\hat{\beta}_1$ 、 $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\beta}_2$ 及 $\hat{\theta}_2$ ，導出期望總變動成本的函數，再將期望總變動成本函數代入成本遞迴式。求解瓶頸機台的最佳投料量， N_D ，是從需求量 D 開始搜尋，每次增加一單位投料量，直到增加一單位投料量無法降低成本。在瓶頸機台後產出的良品在製品，每次僅投料一個到非瓶頸機台，直到產出達到需求量 D ，才停止投料。

Ben-Zvi 和 Grosfeld-Nir[5]建立需求量為 D ，起始階段投入 N 個的期望總成本遞迴式，各階段的期望總成本分為設置成本及變動成本，以產出大於零的機率設為設置成本發生的機率，變動成本以上一階段的期望產出為下一階段投入的數量計算，由此構建需求量為 D 的成本遞迴式，以該總成本函數最小為目標，搜尋起始階段的最佳投料量 N 。為了求得需求量 D 的最佳成本，必須利用成本遞迴式，先求得需求量等於1到 $D-1$ 的最佳成本。

Grosfeld-Nir 和 Gerchak[13]將不良品可重工加入單階段系統、多階段單一瓶頸機台系統及多瓶頸機台系統，修改原本的期望總成本遞迴式。

2. 非動態規劃求解

Wein[29]建立各階段的期望總成本遞迴式，作者證明各階段的成本函數為凸函數(convex function)，各階段要決定投料量的控制水準上下界(L, U)，作為下一階段的投料量依據。決定上下界的作法為：(1)在低良率下，找到該階段的最佳投料量，與需求量

D 比較，二者取較大者，再與上一階段的投料量比較，取較小者為下界(L)。(2)在高良率下，找到該階段的最佳投料量，與需求量 D 比較，二者取較大者為上界(U)。利用各階段投料量的上下界，作為下一階段投料決策判斷的準則，令各階段的良品在製品以 WIP 表示。當 $WIP < L$ 時，投 L 個到下一階段去生產， L 個是包括所有的 WIP ，不足的部分由不良品加以重工來補足；當 $L \leq WIP < U$ 時，將所有的 WIP 投到下一階段去生產；當 $WIP \geq U$ 時，僅投 U 個到下一階段去生產，並移除多餘的在製品。

Pentico[26]建立各階段的期望總成本遞迴式，共有 M_N, \dots, M_1 個階段，其中 M_N 是初始階段，各階段的良率分別為 $\theta_N, \dots, \theta_1$ ，作者提出二個啟發式解法，來取代動態規劃求解：(1)將需求量 D 逐一往前一階段回推，計算初始階段的需求量 D_N ，可表示成 $D_N = \frac{D}{\theta_{N-1}\theta_{N-2}\dots\theta_1}$ 。因此，多階段系統可簡化成決定起始階段，在需求量 D_N 下的

最佳投料量問題；(2)將多階段合併成單一階段求解，合併後的良率為 $\hat{\theta} = \theta_N\theta_{N-1}\dots\theta_1$ ，合併後的設置成本為 $\hat{\alpha} = \alpha_N + \alpha_{N-1} + \dots + \alpha_1$ ，合併後的變動成本為 $\hat{\beta} = \beta_N + \beta_{N-1} + \dots + \beta_1$ 。



Grosfeld-Nir[17]將瓶頸機台(含)前合併成單一約當機台，捨棄瓶頸機台後的非瓶頸機台進行求解。針對產出的良品個數服從 A-N 分配時，提出二種投料決策：(1)非瓶頸機台每次投需求量 D ，瓶頸機台投 D 的倍數；(2)當 $WIP = 0$ ，投料量至少須大於 D ，且投到瓶頸機台去生產；當 $WIP > 0$ ，須決定一個投料量的控制水準(CLT)。若 $WIP > CLT$ 或 WIP 不是需求量 D 的倍數時，則每次只投一個到非瓶頸機台去生產，否則每次投 D 個到非瓶頸機台去生產。

Grosfeld-Nir 和 Robinson[11]首先建構一系列的線性規劃模式，來求解二階段生產系統，目標式是使二階段的期望總成本最小，其次將原始問題轉換成對偶問題來求解，最後針對產出的良品個數服從二項分配，發展一啟發式演算法，求得一個近似解。

Grosfeld-Nir[15]建構二瓶頸機台的期望總成本遞迴式。期望總成本遞迴式包括投到第一階段的期望總成本與第二階段的期望總成本，比較這兩個階段的期望總成本，取成本最低者作為投料階段，並決定最佳投料量。作者提出三種啟發式演算法：(1)固

定的投料策略(Fixed policy)：根據在製品庫存水準，給定一個固定的投料策略，該投料策略已事先決定要投到那一部機台及其投料量，並估算此投料策略的近似期望總成本；(2)改進固定投料策略(Policy improvement)：在給定一個固定的投料策略後，隨後從 $WIP = 0, 1, 2, \dots$ ，逐一對每一種情況的在製品庫存，改善其對應的投料量。改善的方法是，其他在製品庫存對應的投料決策不變，僅改變一種在製品庫存對應的投料決策，每次增加一個投料量，直到多增加一個投料量，近似期望總成本也無法降低為止。(3)綜合投料策略(1)和(2)，得到一個混合投料策略(Fixed policy improvement)。

Grosfeld-Nir 等學者 [18] 探討二階層的生產系統，提出 IDA (Intermediate-Demand-Algorithm)演算法。IDA 的基本概念是，在需求量 D 時，搜尋第一階層的中間需求量， K_D ，即第一階層的各機台(M_i)可視為單獨面對需求量 K_D 的單階段生產系統，最佳投料量為 $N_{K_D - WIP_i}^{M_i}$ ，各零件的庫存分別為 WIP_i ， $WIP \equiv \min\{WIP_1, \dots, WIP_S\}$ ，而第二階層的機台的最佳投料量為 $N_D^{M_{S+1}}$ 。因此給定一個 K_D ，可求出一組對應的投料策略，投料策略的產生是根據，當 $WIP \geq N_D^{M_{S+1}}$ ，則投 $N_D^{M_{S+1}}$ 個到第二階層的機台 M_{S+1} ；當 $WIP \geq K_D$ 且 $WIP < N_D^{M_{S+1}}$ ，則投 WIP 個到第二階層的機台 M_{S+1} ；當 $WIP < K_D$ 且 $WIP < N_D^{M_{S+1}}$ ，則投 $N_{K_D - WIP_i}^{M_i}$ 個到第一階層中庫存量最小的機台。

Lee 和 Yano[23]在不容許外購(重工)在製品的情況下，建立各階段的期望總成本遞迴式。各階段的期望總成本遞迴式包括：變動成本、生產過剩的處置成本及下一階段期望的最佳成本。作者證明各階段的期望總成本遞迴式為嚴格凸(Strict convexity)函數，利用一階微分等於生產過剩的單位處置成本，求得各階段的控制水準(CLT)。若 $WIP < CLT$ ，則投 WIP 個到下一階段去生產；否則投 CLT 個到下一階段去生產。

Barad 和 Braha[3]及 Braha[7]建構各階段的期望總成本遞迴式，和 Lee 及 Yano[23]的概念相同，但不同的是 Barad 和 Braha[3]及 Braha[7]容許外購(重工)在製品。因此期望總成本函數考慮三種投料策略的成本，分別是：(1)上一階段產出全部投入下一階段的成本；(2)移除部分在製品後的成本；(3)補充在製品後的成本，比較這三種投料策略

的成本，取成本最小者為最佳投料決策。他們在二階段間決定二個控制水準，求控制水準是先計算多投一單位與少投一單位的生產成本，得到邊際生產成本。先利用邊際生產成本與單位外購或重工成本作比較，直到找到第一個邊際生產成本的絕對值小於外購或重工成本的投料量，設定為投料量的下界(L)；再利用邊際生產成本與生產過剩的單位處置成本作比較，直到找到第一個邊際生產成本大於生產過剩的單位處置成本的投料量，設定為投料量的上界(U)，利用各階段投料量的上下界來決定投料量。(1)若 $L \leq WIP \leq U$ ，則投 WIP 個到下一階段去生產；(2)若 $WIP > U$ ，則投 U 個到下一階段去生產，並移除多餘的在製品；(3)若 $WIP < L$ ，則投 L 個到下一階段去生產，不足的部分可透過對外採購在製品，或將庫存的不良品加以重工來補足。

本研究將上述多階段生產系統多次投料問題的相關文獻，分類整理在表 2.2。



表 2.1 單階段多次投料問題的相關文獻整理

文獻	問題											求解				
	需求			良率分配				成本項目				DP		non-DP		
	不確定	確定		DU	B	IG	其他	設置成本	變動成本	成品貨持有成本	缺貨成本	其他	證明投料量有上下界，用 DP 解	其他	Heuristic 求解，取代 DP 解	其他
無交期限制 (rigid demand)		有交期限制 (non-rigid demand)														
Anily[1]		●		●				●	●				●			
Beja[4]		●			●			●	●				●			
Sepehri et al.[27]		●	●		●			●	●	●	●				●	
Pentico[25]			●		●			●	●	●	●				●	
Zhang & Guu[33]		●				●		●	●				●			
Guu & Liou[21]		●				●		●	●					●		
Guu[22]		●				●		●	●				●			
Anily et al.[2]		●				●		●	●				●			●
Guu & Zhang [20]			●			●		●	●		●		●			
Grosfeld-Nir & Gerchak[14]		●		●	●	●	SP	●	●				●			
Zhang & Guu[32]		●		●	●	●	A-N	●	●				●			
Gerchak & Grosfeld-Nir[9]	●			●	●	●	A-N	●	●				●			
Grosfeld-Nir & Gerchak[12]		●					SP	●	●				●			
Wang & Gerchak[28]			●				SP	●	●		●	處置	●			
Grosfeld-Nir et al.[19]		●		●	●	●		●	●			檢驗	●			
Gerchak & Grosfeld-Nir [8]		●					T	●	●					●		
本論文主題一			●			●		●	●	●	●		●			

備註：DU: Discrete Uniform; B: Binomial; IG: Interrupted Geometric; SP: Stochastically Proportional; A-N: All-or-Nothing; T: Trinomial

DP: Dynamic Programming

表 2.2 多階段多次投料問題的相關文獻整理

文獻	問題		決策				參數										求解		
	無交期限制 (rigid demand)	有交期限制 (non-rigid demand)	選定某一階段及其投料量			同時決定 各階段的 投料量	良率分配					成本項目					DP	non-DP	
			僅求第一階段(瓶頸機台)的投料量	設各階段的控制水準			DU	B	IG	A-N	SP	設置成本	變動成本	成品存貨持有成本	缺貨成本	重工成本或外購成本			處置成本
				求下一階段的投料量	求某一階段的投料量														
Pentico[26]	●		●				●				●	●						●	
Ben-Zvi & Grosfeld-Nir[5]	●		●				●	●	●		●	●						●	
Grosfeld-Nir & Ronen[10]	●		●				●				●	●						●	
Grosfeld-Nir[17]	●					●	●		●	●	●	●						●	
Grosfeld-Nir & Robinson[11]	●					●	●	●	●		●	●						●	
Grosfeld-Nir[15]	●					●	●				●	●						●	
Grosfeld-Nir et al.[18]	●					●	●	●	●		●	●						●	
Wein[29]	●			●						●	●				●			●	
Grosfeld-Nir & Gerchak[13]	●				●		●	●	●		●	●			●			●	
Lee & Yano[23]		●		●						●	●		●		●			●	
Barad & Braha[3]		●		●			●				●		●	●	●	●		●	
Braha[7]		●		●			●				●		●	●	●	●		●	
本論文主題二		●				●		●			●	●	●	●				●	

備註：DU: Discrete Uniform; B: Binomial; IG: Interrupted Geometric; SP: Stochastically Proportional; A-N: All-or-Nothing; DP: Dynamic Programming

本論文與過去相關研究不同之處：

1. 以上文獻，除 Wang 和 Gerchak[28]探討生產週期時間大於一個週期且為已知常數外，其餘皆不涉及生產週期時間。然而，現實的生產情境中，因為供應商的供貨不可靠、搬運時間不穩定、等候加工、機器故障及重工等不可預期的因素，使得生產週期時間具不確定性。因此，本論文主題一是探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題。
2. 對於多階段多次投料問題的相關文獻，大多數的研究是在每個投料時點，僅選定某一生產階段並決定投料量，未被選定的各階段皆閒置，不投料生產。為了在短時間內提高總產出量，滿足訂單需求，各階段的機台須同時決定其投料量。因此，本論文主題二是探討多階段流線型生產系統的多次投料問題，在每個投料時點上，須同時決定各階段的投料量。
3. 探討多階段流線型生產系統的多次投料問題，過去相關研究大都是利用動態規劃的手法來求解，但是在需求量很大時，動態規劃的網路規模變得相當的龐大，需耗費很長的計算時間才能求得最佳解，在實務上並不可行。因此，本論文也針對主題二的問題，提出一個啟發式演算法，來滿足實務上的需要。

第三章 生產週期時間具不確定性的多次投料問題

本章探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題。我們首先定義符號；其次描述問題，舉例說明其決策過程，及將該問題建構成動態規劃問題；接著證明最佳投料量不會超過未滿足的需求量，基於此特性，設計求解動態規劃問題的演算法；隨之以二個數值範例說明決策參數與最佳投料量的特性；最後則是本章結論。

符號定義

D ：初始需求量(在 $t = T$ 時訂單的需求量)

T ：總剩餘期數，亦即可投料的總次數

t ：距離交期日剩下的期數， $t = T, T-1, \dots, 1, 0$ ， $t = T$ 為期初， $t = 0$ 為交期日

α ：每次投料的設置成本

β ：單位變動成本

k_t ：第 t 期的投料量

W_t ：為二元輔助變數。若有投料，則為 $W_t = 1$ ；若沒有投料，則 $W_t = 0$

$$W_t = \begin{cases} 0 & \text{if } k_t = 0 \\ 1 & \text{if } k_t > 0 \end{cases}$$

D_t ：第 t 期末滿足的需求量

h ：每一單位成品，在每一期間的存貨持有成本

m ：每一單位的缺貨成本

p ：一期產出的機率

$1-p$ ：二期產出的機率

θ ：製程在可控制的狀態下，生產一個良品的機率，是 IG 分配的參數

Y_{k_t} ：為一隨機變數，第 t 期投料 k_t 個，產出 y_{k_t} 個良品，良品個數服從 IG 分配，

良品個數的範圍是 $y_{k_t} = 0, 1, \dots, k_t$

$R_t(k_{t+1})$ ：第 t 期的在途量。在途量有二種可能性：

$$R_t(k_{t+1}) = \begin{cases} 0 & \text{若 } k_{t+1} \text{ 個是一期產出} \\ k_{t+1} & \text{若 } k_{t+1} \text{ 個是二期產出} \end{cases}$$

$s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ ：第 t 期生產系統的狀態

$C_t(s_t, k_t)$ ：第 t 期狀態 s_t 投料 k_t 個，從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本

$C_t^*(s_t) = \underset{0 \leq k_t \leq \infty}{\text{Min}} \{C_t(s_t, k_t)\}$ ：第 t 期狀態 s_t 投料 k_t 個，從第 t 期到第 0 期最小的期望

總生產成本

$N_t(s_t)$ ：第 t 期狀態 s_t ，決定一個最佳投料量，使得第 t 期到第 0 期的期望總生產成

本最小，亦即 $\underset{0 \leq k_t \leq \infty}{\text{Min}} \{C_t(s_t, k_t)\} = C_t(s_t, N_t(s_t))$



3.1 問題描述

在現實的生產情境中，酸洗和抽線製程正符合生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題。酸洗和抽線製程在實務上應用相當廣泛，最常見的產品包括：螺絲、螺帽及墊圈等。酸洗是抽線製程的前置作業，由於每批特殊鋼線材表面鏽蝕的情形不一，每批料投入酸洗槽所需的時間常具有變異性。特殊鋼線材經過酸洗後，再送到抽線機去抽成更小尺寸的線材，由於抽線的速度相當快，通常是整批產出後再一起檢驗，且抽線機的模具會磨耗，因此抽線製程中產出的良品個數是服從 IG 分配。

我們將酸洗和抽線製程合併視為單階段生產系統來看，該生產系統滿足二個特性：(1) 生產週期時間具不確定性；(2) 產出的良品個數是服從 IG 分配。在實際的生產情況中，投入酸洗槽的線材經過二次酸洗通常都可以清洗乾淨。因此，我們將生產週期時間予以簡化，簡化成只有二種產出的可能性，不是一期產出，就是二期產出。所謂一期產出是指投一批料到機台去加工，整批料全部是一期產

出；所謂二期產出是指投一批料到機台去加工，整批料全部是二期產出，其機率值分別為 p 和 $1-p$ 。

以下我們舉一個簡例來說明其決策過程。已知顧客訂單需求量 D ，現在時點到交期日剩下 3 期($T=3$)。 $t=3$ 是現在的時點， $t=0$ 是交期日，共有 3 個投料時點，分別是 $t=3$ 、 2 及 1 ，如圖 3.1 所示。

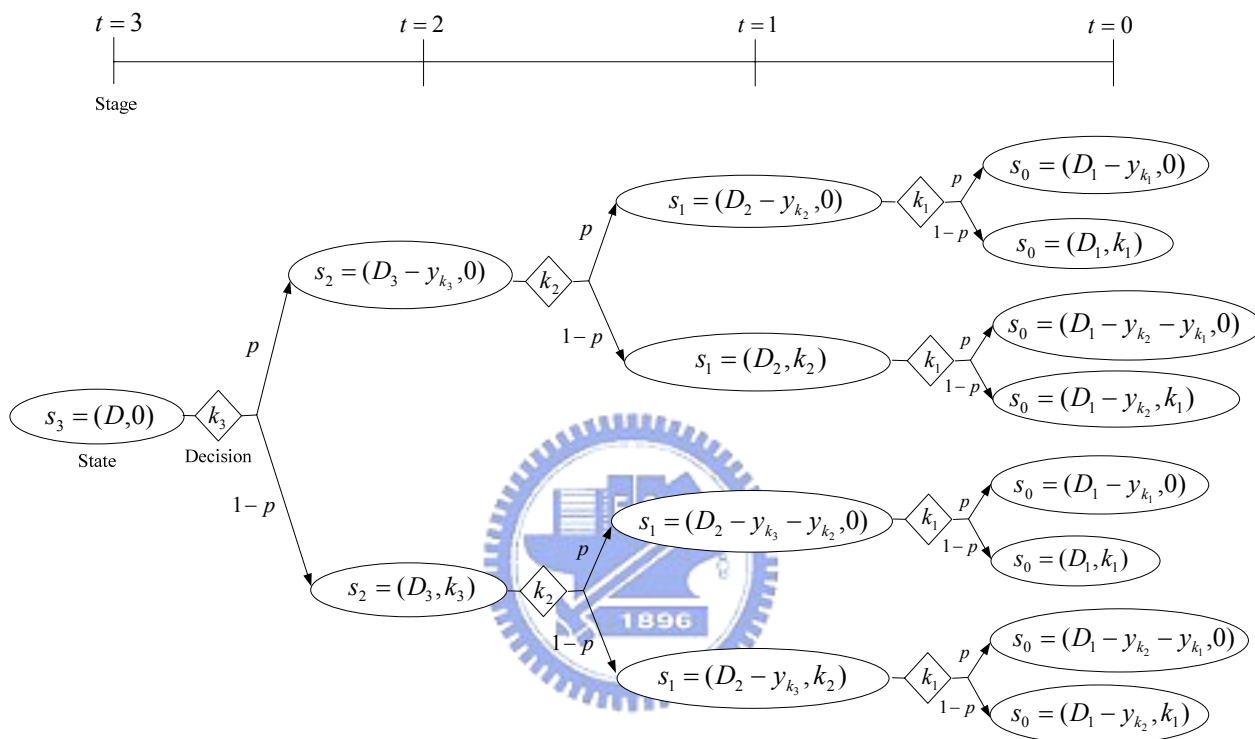


圖 3.1 生產週期時間為一期產或二期產出的多次投料決策

令 k_t 表示第 t 期的投料量。令 $s_t = (D_t, R_t)$ 表示第 t 期生產系統的狀態，其中 D_t 是第 t 期未滿足的需求量， $R_t(k_{t+1})$ 是第 t 期的在途量。 $R_t(k_{t+1})$ 是第 $t+1$ 期投料 k_{t+1} 個，其狀態只有二種可能性：(1) 若 k_{t+1} 個是一期產出，則 $R_t(k_{t+1})=0$ ；(2) 若 k_{t+1} 個是二期產出，則 $R_t(k_{t+1})=k_{t+1}$ 。

當 $t=3$ 時，系統的初始狀態是 $s_3 = (D, 0)$ 。假設一開始投 k_3 個，若 k_3 個為一期產出，檢驗後得知有 y_{k_3} 個良品，到 $t=2$ 時，未滿足的需求量變成 $D_2 = D_3 - y_{k_3}$ ，在途量變成 $R_2(k_3)=0$ ，此時的狀態為 $s_2 = (D_3 - y_{k_3}, 0)$ 。若 k_3 個為二期產出，到 $t=2$ 時，未滿足的需求量是 $D_2 = D_3$ ，在途量變成 $R_2(k_3)=k_3$ ，

此時的狀態為 $s_2 = (D_3, k_3)$ 。

當 $t = 2$ 時，系統的狀態是 $s_2 = (D_3 - y_{k_3}, 0)$ 。在此狀態下，假設投 k_2 個，若 k_2 個為一期產出，檢驗後得知有 y_{k_2} 個良品，到 $t = 1$ 時，未滿足的需求量變成 $D_1 = D_2 - y_{k_2}$ ，在途量變成 $R_1(k_2) = 0$ ，此時的狀態為 $s_1 = (D_2 - y_{k_2}, 0)$ 。若 k_2 個為二期產出，到 $t = 1$ 時，未滿足的需求量是 $D_1 = D_2$ ，在途量變成 $R_1(k_2) = k_2$ ，此時的狀態為 $s_1 = (D_2, k_2)$ 。

當 $t = 2$ 時，系統的狀態是 $s_2 = (D_3, k_3)$ 。在此狀態下，假設投 k_2 個，若 k_2 個為一期產出， k_3 個在途量為二期產出，檢驗後得知有 y_{k_2} 和 y_{k_3} 個良品，到 $t = 1$ 時，未滿足的需求量變成 $D_1 = D_2 - y_{k_3} - y_{k_2}$ ，在途量變成 $R_1(k_2) = 0$ ，此時的狀態為 $s_1 = (D_2 - y_{k_3} - y_{k_2}, 0)$ 。若 k_2 個與 k_3 個在途量都是二期產出，檢驗後得知 y_{k_3} 個良品，到 $t = 1$ 時，未滿足的需求量變成 $D_1 = D_2 - y_{k_3}$ ，在途量變成 $R_1(k_2) = k_2$ ，此時的狀態為 $s_1 = (D_2 - y_{k_3}, k_2)$ 。其餘的狀態與上述的決策相同。

3.2 建構動態規劃問題

本節探討生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題，將該問題建構成動態規劃問題。我們首先定義研究假設，其次說明動態規劃問題的決策結果，隨之建構成本遞迴式，最後設定二個邊界條件，便於計算成本遞迴式。

3.2.1 研究假設

除了 1.2 節的研究假設之外，本章另加入一個假設：

生產週期時間只有二種可能性，不是一期產出，就是二期產出，一期產出

的機率是 p ；二期產出的機率是 $1-p$ 。

3.2.2 動態規劃問題的決策結果

本研究是利用動態規劃的手法求解，以下定義階段、狀態和決策變數。階段以期數(t)表示， t 是距離交期日剩餘的期數， $t = T, T-1, \dots, 1, 0$ ， $t = T$ 為期初， $t = 0$ 為交期日。狀態以 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 表示， s_t 是第 t 期的生產狀態，其中 D_t 是第 t 期末滿足的需求量； $R_t(k_{t+1})$ 是第 t 期的在途量。決策變數以投料量 (k_t) 表示， k_t 是第 t 期的投料量。

已知第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 。假設投 k_t 個，到 $t-1$ 期時， k_t 個產出的可能性只有二種情況，不是一期產出，就是二期產出，其機率分別為 p 和 $1-p$ ，如圖 3.2 所示。一期產出和二期產出，分別以 Case 1 和 Case 2 作說明。

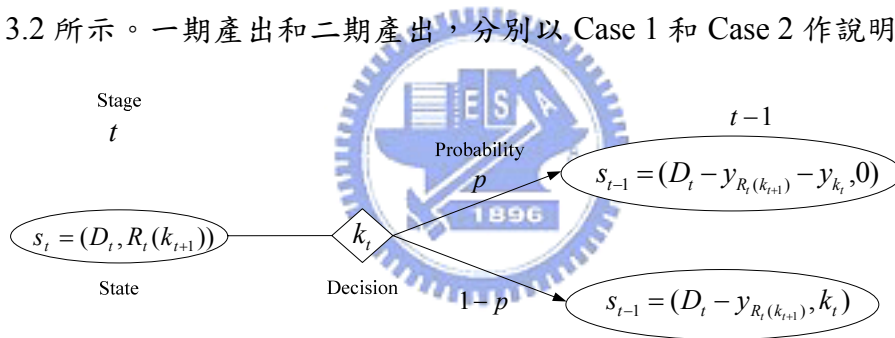


圖 3.2 第 t 期與 $t-1$ 期的關係

Case 1: 投 k_t 個為一期產出，機率為 p ，到 $t-1$ 期的狀態變為

$s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})} - y_{k_t}, 0)$ 。其中 $D_t - y_{R_t(k_{t+1})} - y_{k_t}$ 是 $t-1$ 期末滿足的需求

量， $y_{R_t(k_{t+1})}$ 和 y_{k_t} 是第 t 期產出的良品個數； $R_{t-1}(k_t) = 0$ 是 $t-1$ 期的在途量

為零。

Case 2: 投 k_t 個為二期產出，機率為 $1-p$ ，到 $t-1$ 期的狀態變為

$s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})}, k_t)$ 。其中 $D_t - y_{R_t(k_{t+1})}$ 是 $t-1$ 期末滿足的需求量， $y_{R_t(k_{t+1})}$

是第 t 期產出的良品個數； $R_{t-1}(k_t) = k_t$ 是 $t-1$ 期的在途量有 k_t 個。

3.2.3 成本遞迴式

已知第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 。假設投料 k_t 個，從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本以 $C_t(s_t, k_t)$ 表示，其中 $t \geq 1$ 。成本遞迴式如下：

$$C_t(s_t, k_t) = H_1 + p \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} \sum_{y_{k_t}=0}^{k_t} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot p(y_{k_t}) \cdot (H_2 + H_3) \\ + (1-p) \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot (H_4 + H_5) \quad (3-1)$$

其中，

$$H_1 = \alpha W_t + \beta k_t$$

$$H_2 = h(t-1)(y_{R_t(k_{t+1})} + y_{k_t})$$

$$H_3 = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})} - y_{k_t}, 0))$$

$$H_4 = h \cdot (t-1) \cdot y_{R_t(k_{t+1})}$$

$$H_5 = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})}, k_t))$$

公式(3-1)， H_1 表示投 k_t 個的生產成本，包括設置成本 (αW_t) 和變動成本

(βk_t)。 $p \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} \sum_{y_{k_t}=0}^{k_t} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot p(y_{k_t}) \cdot (H_2 + H_3)$ 表示投 k_t 個為一期產出，從 $t-1$ 期

到第 0 期的成品存貨持有成本及最小期望總生產成本的總合。其中

$p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot p(y_{k_t})$ 表示投 $R_t(k_{t+1})$ 個與 k_t 個，分別產出 $y_{R_t(k_{t+1})}$ 個和 y_{k_t} 個良品的聯合

機率； H_2 表示產出 $y_{R_t(k_{t+1})}$ 個和 y_{k_t} 個良品，從 $t-1$ 期到第 0 期的成品存貨持有成

本； $H_3 = C_{t-1}^*$ 表示產出 $y_{R_t(k_{t+1})}$ 個和 y_{k_t} 個良品， $t-1$ 期的狀態變成

$s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})} - y_{k_t}, 0)$ ，從 $t-1$ 期到第 0 期的最小期望總生產成本。

$$(1-p) \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot (H_4 + H_5)$$

表示投 k_t 個為二期產出， $t-1$ 期到第 0 期的成品存貨持有成本及最小期望總生產成本的總合。其中 $p(y_{R_t(k_{t+1})})$ 表示產出

$y_{R_t(k_{t+1})}$ 個良品的機率； H_4 表示產出 $y_{R_t(k_{t+1})}$ 個良品，從 $t-1$ 期到第 0 期的成品存貨

持有成本； $H_5 = C_{t-1}^*$ 表示產出 $y_{R_t(k_{t+1})}$ 個良品， $t-1$ 期的狀態變成

$s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})}, k_t)$ ，從 $t-1$ 期到第 0 期的最小期望總生產成本。

公式(3-1)是一個遞迴式，因為它包含 $t-1$ 期的最佳成本 $C_{t-1}^*(s_{t-1})$ ，也就是說，在狀態 s_t 時，為了求得最佳投料量，必須事先知道狀態 s_{t-1} 的最佳投料量。因此，在期初狀態 s_T 時，為了求得最佳投料量，必須事先知道狀態 s_{T-1} 、 s_{T-2} 、 \dots 、 s_1 ，且在第 0 期的狀態 s_0 也要事先知道。經由這樣的遞迴特性得知，我們探討的多次投料問題是一個動態規劃問題。

由於動態規劃問題具有遞迴的特性，所以我們可以推估到第 t 期整個動態規劃的網路規模，而影響動態規劃的網路規模是由投料量 k_t 的上界所決定，也就是說，若能限定 k_t 的上界，即可縮小態規劃的網路規模，以縮短計算時間。

3.2.4 邊界條件

為了計算成本遞迴式(3-1)，我們設定二個邊界條件。第一個邊界條件是定義第 t 期狀態為 $s_t = (0, R_t(k_{t+1}))$ ，該狀態是表示顧客的訂單需求量已經滿足，生產線還有 $R_t(k_{t+1})$ 個在途量，不再投料。因此，從第 t 期到第 0 期的期望最佳成本是零。

$$C_t^*(s_t = (0, R_t(k_{t+1}))) = 0 \quad (3-2)$$

第二個邊界條件是定義第 0 期狀態為 $s_0 = (D_0, R_0(k_1))$ 。當 $D_0 > 0$ 時，表示到了交期日，產出的良品個數比訂單需求量少 D_0 個，缺貨成本為 mD_0 ，生產線還剩下 $R_0(k_1)$ 個在途量，則不再投料；當 $D_0 = 0$ 時，表示已滿足訂單需求，不再投料。因此，第 0 期的缺貨成本為

$$C_0^*(s_0 = (D_0, R_0(k_1))) = \begin{cases} mD_0 & \text{if } D_0 > 0 \\ 0 & \text{if } D_0 = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

綜合上述，公式(3-1)是計算從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本；公式(3-2)是設定提早完成訂單需求量的邊界條件；公式(3-3)是設定到了交期日，計算缺貨成本的邊界條件。本研究利用上述三個公式，決定投料量 k_t ，將 k_t 代入公式(3-1)，可算出期望總生產成本。全域搜尋 k_t 的範圍，可求得最小的期望總生產成本所對應的投料量，即是最佳投料量 $N_t(s_t)$ ，亦即

$$\underset{0 \leq k_t \leq \infty}{\text{Min}} \{C_t(s_t, k_t)\} = C_t(s_t, N_t(s_t))。$$



3.3 求解動態規劃問題

利用動態規劃的手法求解時，因為動態規劃的網路規模是由投料量 k_t 的上界所決定，若能限定 k_t 的上界，即可縮小動態規劃的網路規模，以縮短計算時間。因此本節證明最佳投料量不會超過需求量，來縮小搜尋空間，基於此特性，設計求解動態規劃問題的演算法，求得最佳投料量。再以二個數值範例說明決策參數與最佳投料量的特性。

3.3.1 縮小求解空間

我們證明四個定理，來縮小求解空間，找到最佳投料量 $N_t(s_t)$ 。定理 3.1 是定理 3.2 的預備定理；定理 3.2 是證明最佳投料量不會超過需求量，亦即 $N_t(s_t) \leq D_t$ ；定理 3.3 和 3.4 是證明 $D=1, t \geq 1$ ，每個投料時點是否投料的判別式。



定理 3.1： 已知 $t \geq 1$ ， $D_t \geq 1$ ，第 t 期的狀態分別為 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 和 $s'_t = (D_t, R_t(k_{t+1})+1)$ ，其中 $R_t(k_{t+1}) \geq D_t$ ，當在途量超過需求量時，在途量數量愈多，最佳期望總生產成本愈大，亦即 $C_t^*(s_t) < C_t^*(s'_t)$ 。

[證明]

$$\begin{aligned} \forall k_t, C_t(s'_t, k_t) - C_t(s_t, k_t) &= h(t-1)(E[Y_{R_t(k_{t+1})+1}] - E[Y_{R_t(k_{t+1})}]) \\ &= h(t-1)(\theta^{R_t(k_{t+1})+1}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

亦即， $C_t(s'_t, k_t) > C_t(s_t, k_t)$ ， $\forall k_t$

令 $k_t = N_t(s'_t)$ ，可得 $C_t(s'_t, N_t(s'_t)) > C_t(s_t, N_t(s'_t))$

根據定義

$$C_t^*(s'_t) = \underset{k_t}{\text{Min}}\{C_t(s'_t, k_t)\} = C_t(s'_t, N_t(s'_t))$$

$$C_t^*(s_t) = \underset{k_t}{\text{Min}}\{C_t(s_t, k_t)\} = C_t(s_t, N_t(s_t))$$

因此

$$C_t^*(s_t) = C_t(s_t, N_t(s_t)) \leq C_t(s_t, N_t(s'_t)) < C_t(s'_t, N_t(s'_t)) = C_t^*(s'_t)$$

即 $C_t^*(s_t) < C_t^*(s'_t)$ \square

定理 3.2： 已知 $t \geq 1$ ， $D_t \geq 1$ ，第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ ，證明最佳投料量不

會超過需求量，亦即 $N_t(s_t) \leq D_t$ 。

[證明]

若不投料，即 $N_t(s_t) = 0$ ，得到 $N_t(s_t) = 0 < 1 \leq D_t$

若投料，即 $N_t(s_t) \geq 1$ ， $\forall k_t > D_t$

$$C_t(s_t, k_t) - C_t(s_t, D_t)$$

$$= \beta(k_t - D_t) + ph(t-1)(E[Y_{k_t}] - E[Y_{D_t}])$$

$$+ (1-p) \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})}, k_t)) - C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{R_t(k_{t+1})}, D_t))]$$

$$\geq \beta(k_t - D_t) + ph(t-1)(E[Y_{k_t}] - E[Y_{D_t}]) \text{ (根據定理 3.1)}$$

> 0

因此， $C_t(s_t, k_t) > C_t(s_t, D_t)$ ，即 $N_t(s_t) \leq D_t$ \square

定理 3.3： 已知 $D_t = 1$ ， $t \geq 1$ ，第 t 期的狀態為 $s_t = (1, 0)$ ，其中 $R_t(k_{t+1}) = 0$ ，證明

每個投料時點是否投料的判別式。

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq a$ ，則 $N_t(s_t) = 0$ ，由此可得

$$C_t^*(s_t) = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$$

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) > a$ ，則 $N_t(s_t) = 1$ ，由此可得

$$C_t^*(s_t) = \alpha + \beta + ph(t-1)\theta + p(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$$

其中， $a = [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / [1 - p(1-\theta)]$

[證明]

若不投料，即 $k_t = 0$ ，由此得知

$$C_t(s_t, 0) = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$$

若投一個，即 $k_t = 1$ ，由此得知

$$C_t(s_t, 1) = \alpha + \beta + ph(t-1)\theta + p(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$$

則 $C_t(s_t, 0) - C_t(s_t, 1)$

$$= C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) - [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + p(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))]$$

$$= C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \cdot [1 - p(1-\theta)] - [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))]$$

令 $a = [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / [1 - p(1-\theta)]$

則 $C_t(s_t, 0) - C_t(s_t, 1) = [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) - a] \cdot [1 - p(1-\theta)]$

因此，得到是否投料的判別式：

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq a$ ，則 $N_t(s_t) = 0$

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) > a$ ，則 $N_t(s_t) = 1$

在給定最佳投料量後，也可以計算出最佳期望總生產成本 $C_t^*(s_t)$ □

定理 3.4： 已知 $D_t = 1$ ， $t \geq 1$ ，第 t 期的狀態為 $s_t = (1, R_t(k_{t+1}))$ ，其中 $R_t(k_{t+1}) > 0$ ，

證明每個投料時點是否投料的判別式。

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq b$ ，則 $N_t(s_t) = 0$ ，由此可得

$$C_t^*(s_t) = h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + (1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$$

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) > b$ ，則 $N_t(s_t) = 1$ ，由此可得

$$C_t^*(s_t) = \alpha + \beta + h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + ph(t-1)\theta \\ + p(1-\theta)^2 C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$$

其中，

$$b = [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / \{(1-\theta)[1-p(1-\theta)]\}$$

[證明]

若不投料，即 $k_t = 0$ ，由此得知

$$C_t(s_t, 0) = h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + (1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$$

若投一個，即 $k_t = 1$ ，由此得知

$$C_t(s_t, 1) = \alpha + \beta + h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + ph(t-1)\theta + p(1-\theta)^2 C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \\ + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$$

令 $b = [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / \{(1-\theta)[1-p(1-\theta)]\}$

則 $C_t(s_t, 0) - C_t(s_t, 1) = [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) - b] \cdot \{(1-\theta)[1-p(1-\theta)]\}$

因此，得到是否投料的判別式：

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq b$ ，則 $N_t(s_t) = 0$

若 $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) > b$ ，則 $N_t(s_t) = 1$

在給定最佳投料量後，也可以計算出最佳期望總生產成本 $C_t^*(s_t)$ □

3.3.2 動態規劃問題的演算法

根據前一小節證明的定理，我們設計求解動態規劃問題的演算法。已知訂單需求量 D 和總剩餘期數 T ，期初狀態為 $s_T = (D, 0)$ ，求解期初的最佳投料量 $N_T(s_T)$ 。在附錄 A 我們詳細地說明演算法每個步驟的運算過程，在此我們簡介演算法的基本概念，求解的步驟如下：

步驟 3.1：根據 3.2.4 節第一個邊界條件。當 $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (0, R_t(k_{t+1}))$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

步驟 3.2：根據 3.2.4 節第二個邊界條件。當 $t = 0$ ，狀態為 $s_0 = (D_0, R_0(k_1))$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

步驟 3.3：根據定理 3.3。當 $D_t = 1, 1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (1, R_t(k_{t+1}) = 0)$ ，計算最佳成本與最佳投料量。

步驟 3.4：根據定理 3.4。當 $D_t = 1, 1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (1, R_t(k_{t+1}) > 0)$ ，計算最佳成本與最佳投料量。

步驟 3.5：根據公式 (3-1) 和定理 3.2。當 $1 \leq t \leq T-1$ ，狀態為 $s_t = (D_t \geq 2, R_t(k_{t+1}) \geq 0)$ ，計算最佳成本與最佳投料量。

步驟 3.6：根據公式(3-1)和定理 3.2。在期初 (T)，狀態為 $s_T = (D \geq 2, 0)$ ，計算最佳成本與最佳投料量。

接著我們利用圖形來展示演算法各個步驟的主要概念。圖形是以三個維度來表示：(1) t ：距離交期日剩下的期數；(2) D_t ：第 t 期未滿足的訂單需求量；(3) $R_t(k_{t+1})$ ：第 t 期的在途量。

步驟 3.1 是顧客的訂單需求量已經滿足，即 $D_t = 0$ 。根據 3.2.4 節第一個邊界條件，設定最佳成本與最佳投料量，如圖 3.3 所示；步驟 3.2 是到了交期日，即 $t = 0$ ，產出的良品個數比訂單需求量少 D_0 個。根據 3.2.4 節第二個邊界條件，設

定最佳成本與最佳投料量，如圖 3.3 所示。

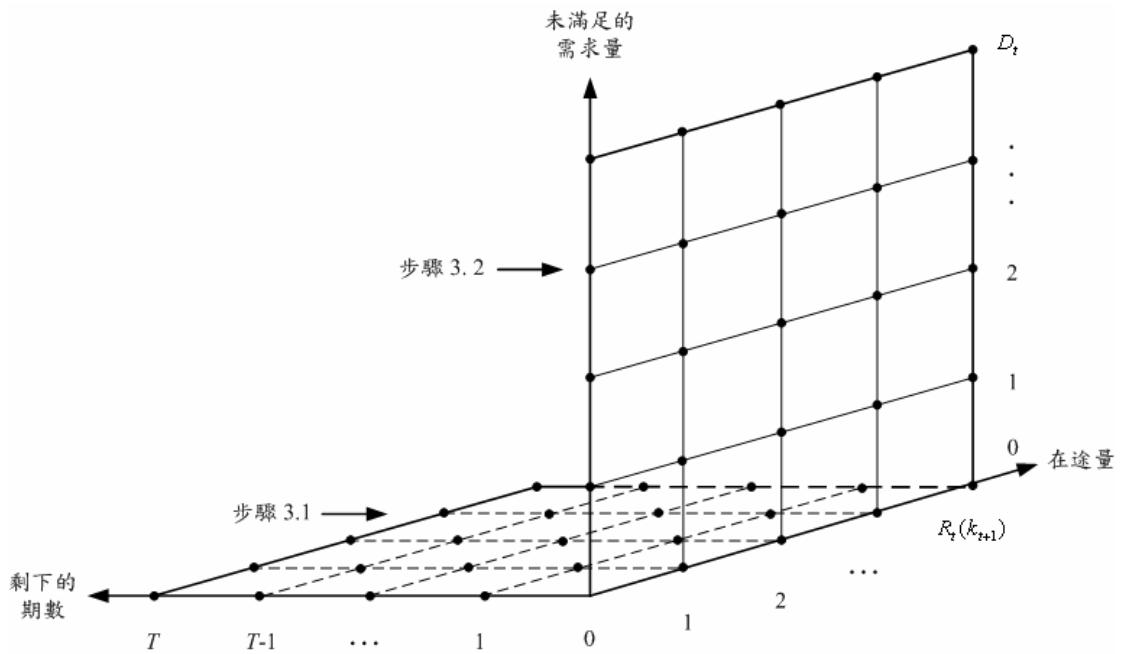


圖 3.3 根據二個邊界條件，設定各種狀態的最佳成本與投料量

步驟 3.3 和 3.4 是根據定理 3.3 和 3.4。當 $D_t = 1$ 時，計算各期、各種狀態的最佳成本與最佳投料量，得到 $D_t = 1$ 的平面，如圖 3.4 所示。

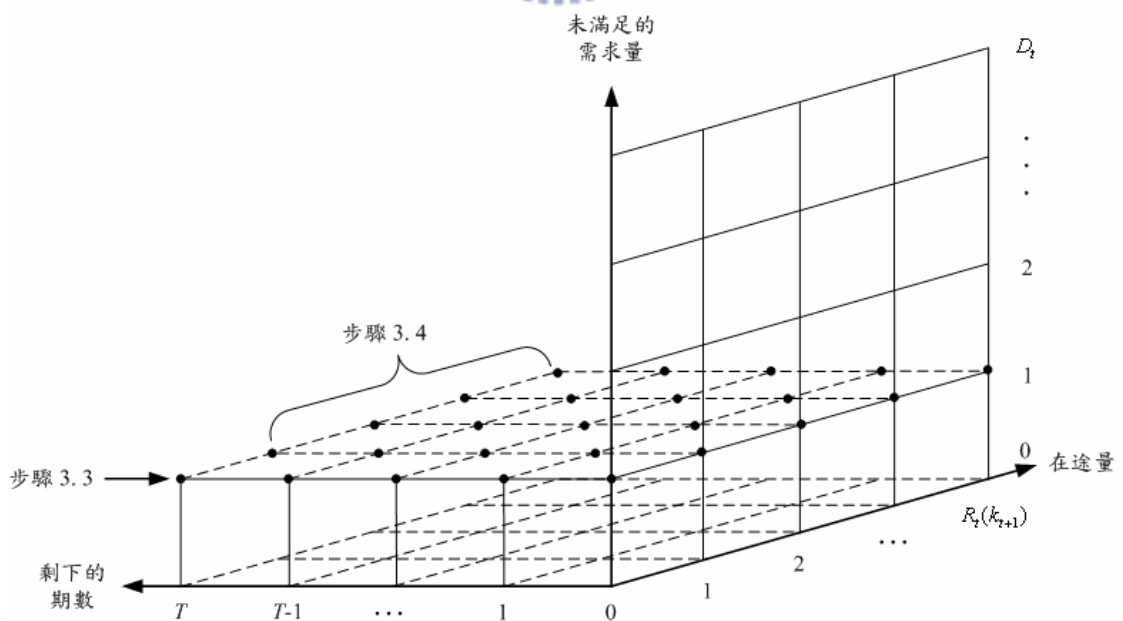


圖 3.4 當 $D_t = 1$ 時，設定各種狀態的最佳成本與投料量

步驟 3.5 是根據公式(3-1)和定理 3.2。當 $D_t = 2, 3, \dots, D$ 時，計算各期、各種狀態的最佳成本與最佳投料量，得到 $D_t = 2, 3, \dots, D$ 的平面；步驟 3.6 是計算 $s_T = (D, 0)$ 這一個狀態的最佳成本與最佳投料量，如圖 3.5 所示。

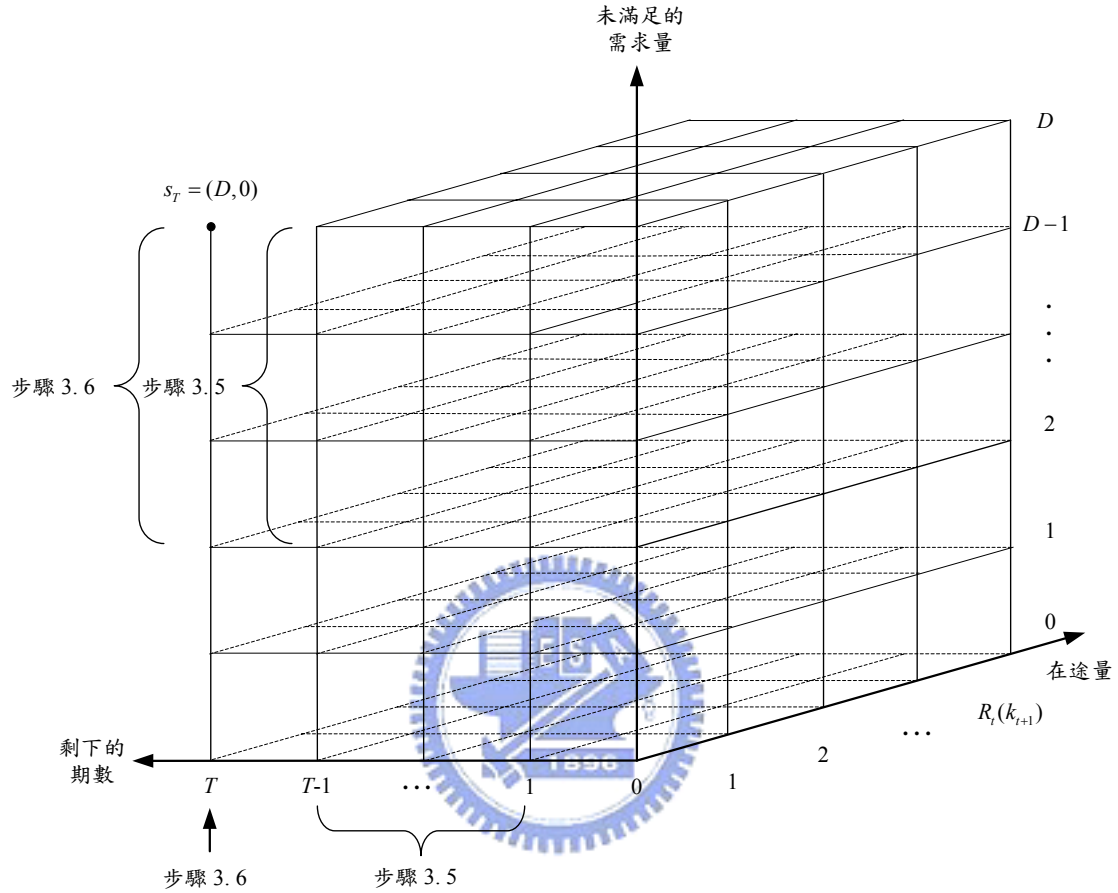


圖 3.5 $D_t = 2, 3, \dots, D$ ，計算各期、各種狀態的最佳成本與投料量

上述演算法的複雜度是 $O(T^3 D^5)$ ，原因是狀態 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 由三個變數： t 、 D_t 及 $R_t(k_{t+1})$ 所限制，而 t 、 D_t 及 $R_t(k_{t+1})$ 的上界分別是 T 、 D 及 TD ，在最差的情況下，所有可能的狀態個數是 $T \cdot D \cdot TD = T^2 D^2$ 。因為 $k_t \leq D_t$ ，所以投料決策最多是 D 。在每一個狀態 $s_t = (D_t, R_t(k_{t+1}))$ 下，採取一個投料決策 k_t ，投料量的最大範圍是 $k_t \leq D_t \leq D$ ，在途量的最大範圍是 $R_t(k_{t+1}) \leq (T-t) \cdot D_t \leq TD$ ，所有可能產生的狀態個數最多是 $D \cdot TD$ 。因此，演算法的複雜度是 $O(T^3 D^5 = T^2 D^2 \cdot D \cdot TD^2)$ 。

3.3.3 數值範例

我們以二個數值範例來探討決策參數與最佳投料量的特性。範例 1 是分析決策參數 T 、 D 、 p 、 θ 、 α 、 β 、 h 及 m ，對期望總生產成本的影響；範例 2 是觀察最佳投料量是否會隨著需求量的增加而嚴格遞增。

範例 1：決策參數的特性

範例 1 共有 8 個決策參數，分別為 T 、 D 、 p 、 θ 、 α 、 β 、 h 及 m ，其中成本參數 α 、 β 、 h 及 m 愈小，期望總生產成本愈小；良率參數 θ 愈大，期望總生產成本愈小。然而，其他的決策參數 p 、 T 和 D 無法明確判別，必須藉由數值分析來了解其特性。

為了探討 p 和期望總生產成本的關係，我們執行 700 個例子，每個例子是由 4 個變動的參數 (T, p, θ, h) 所組合，其中 $T \in \{3, 4, 6, 10\}$ 、 $p \in \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0\}$ 、 $\theta \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ 及 $h \in \{0, 1, 3, 5, 10\}$ ，其他 4 個固定的參數值設定為 $D = 30$ 、 $\alpha = 100$ 、 $\beta = 1$ 及 $m = 200$ 。

實驗結果發現，當 p 夠大時， p 值愈高，期望總生產成本愈低，如圖 3.6 所示。 p 值愈高表示投料後一期產出的機率愈高，在下一期決策時已有上一期產出的資訊，資訊越明確，成本愈低。因此本研究提出的模式，可提供供應商擬訂績效獎金制度，舉例來說，可將節省的成本提撥 20% 作為績效獎金，激勵供應商提高一期交貨的機率。

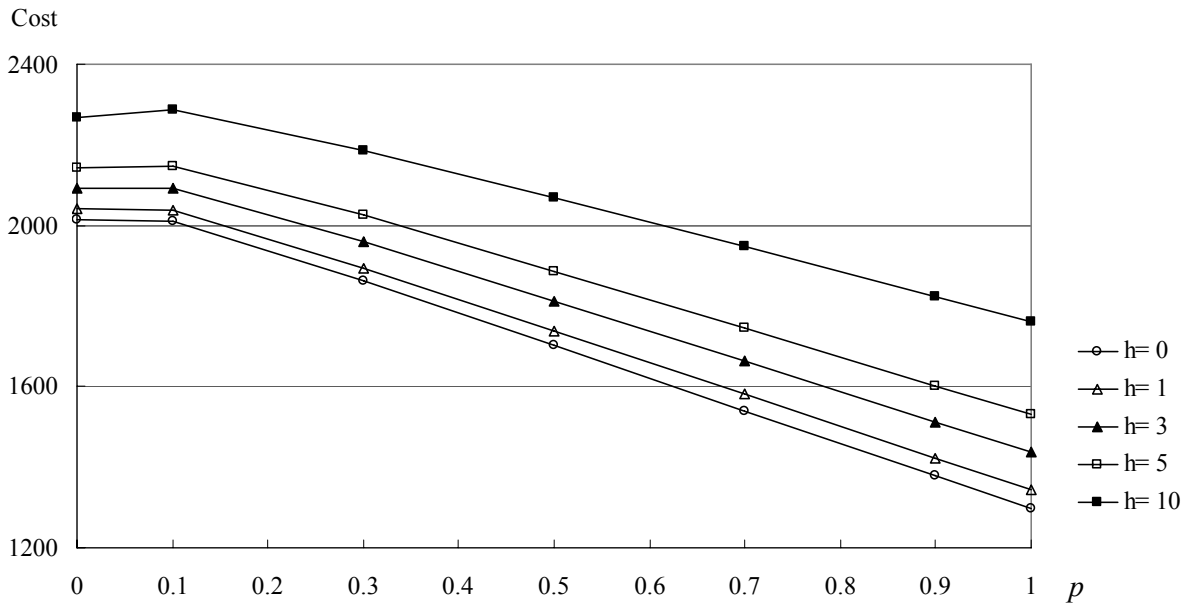


圖 3.6 p 和期望總生產成本的關係

($T = 4, D = 30, \theta = 0.9, \alpha = 100, \beta = 1$ 及 $m = 200$)

為了探討 T 、 D 和期望總生產成本的關係，我們也執行 700 個例子，每個例子是由 5 個變動的參數 (T, D, p, θ, h) 所組合，其中 $T \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 、 $D \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 、 $p \in \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0\}$ 、 $\theta \in \{0.6, 0.9\}$ 及 $h \in \{0.025, 2.5\}$ ，其他 3 個固定的參數值設定為 $\alpha = 100$ 、 $\beta = 1$ 及 $m = 200$ 。

實驗結果發現， T 值愈大，期望總生產成本愈低，如圖 3.7 所示。 T 值小表示是緊急訂單，緊急訂單的生產成本高於正常訂單的生產成本。因此，接到緊急訂單時，為了能確保獲得一定的利潤(例如 30%的利潤)，接單時應該採取不同的訂價策略，即緊急訂單的價格應高於正常訂單的價格。本研究所提出的模式，可針對顧客交期的長短，提供不同的訂價策略。

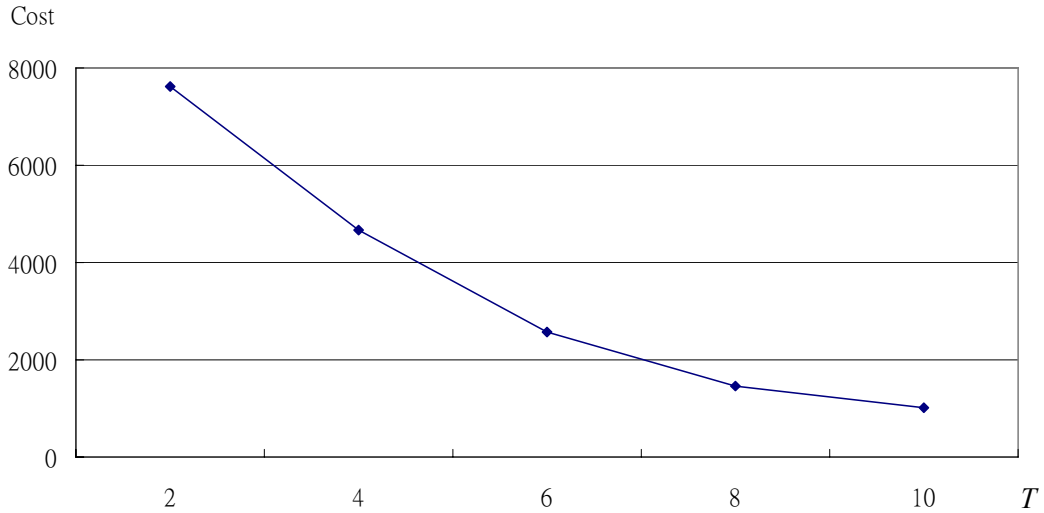


圖 3.7 T 和期望總生產成本的關係

($T = 2, 4, 6, 8, 10, D = 50, p = 0.5, \theta = 0.9, \alpha = 100, \beta = 1, h = 0.025$ 及 $m = 200$)

圖 3.8 假設單位價格是固定，不受訂單數量所影響，我們可以繪製隨著 D 增加收入也跟著遞增的收入線，同理可繪製期望總生產成本線，成本線是呈凸 (convex) 狀。比較收入線和成本線可得知各個 D 值的利潤，我們發現利潤不會隨著 D 增加而遞增。因此本研究所提出的模式，可用來計算最佳接單量。

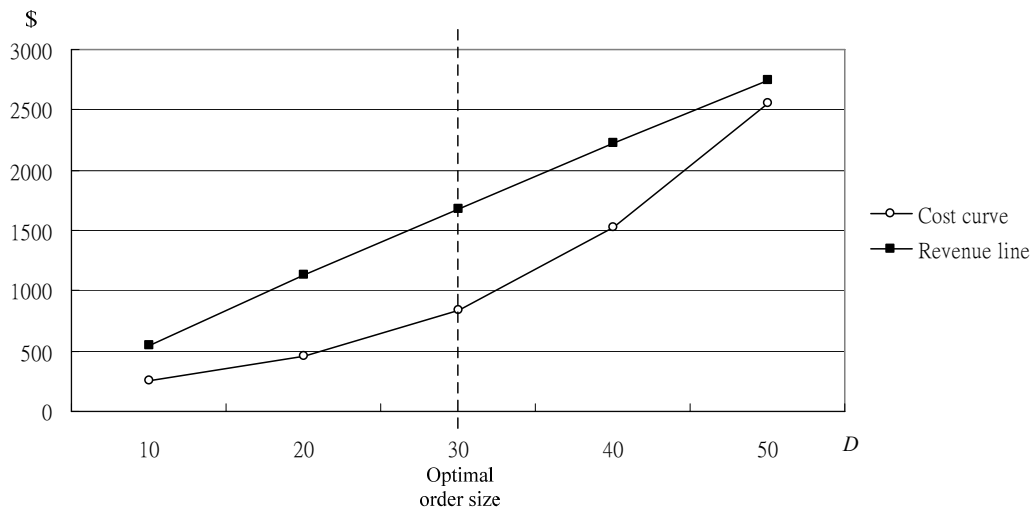


圖 3.8 D 和期望總生產成本的關係

($T = 6, D = 10, 20, 30, 40, 50, p = 0.5, \theta = 0.9, \alpha = 100, \beta = 1, h = 0.025$ 及 $m = 200$)

範例 2：最佳投料量具有非單調性

為了探討最佳投料量是否會隨著需求量 D 增加而遞增，我們針對一期產出的機率 p ，設定五種不同的機率值如下： $p = 0.1$ 、 0.3 、 0.5 、 0.7 及 1.0 ，其餘各參數值的設定為 $T = 6$ 、 $\theta = 0.95$ 、 $\alpha = 50$ 、 $\beta = 1$ 、 $h = 1$ 及 $m = 200$ 。期初狀態為 $s_T = (D_T, 0)$ ，需求量從 1 到 100，執行 100 個例子，求得各個需求量下的最佳投料量 $N_T(s_T)$ ，將結果繪製在圖 3.9。

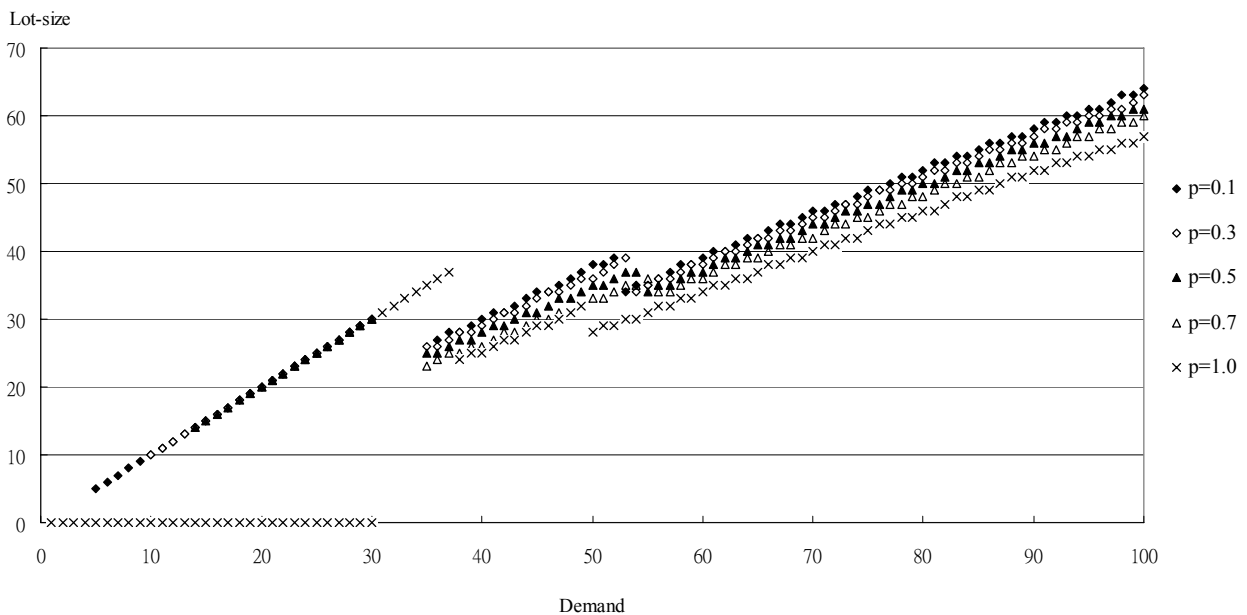


圖 3.9 在不同的 p 下，最佳投料量不會隨著 D 增加而嚴格遞增

由圖 3.9 得知，最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增。我們分析為何最佳投料量具有非單調性的原因，根據 IG 分配的數學式，我們得知 IG 分配的平均良率跟投料量有關，亦即 $\bar{\theta}(N) = \frac{\theta(1-\theta^N)}{(1-\theta)N}$ ，其中 $\bar{\theta}$ 是平均良率， N 是投料量， θ 是 IG 分配的參數。從平均良率的觀點來看，當投料量 N 愈大平均良率會愈小，也就是說，IG 分配的平均良率會隨著投料量增加而變小，如圖 3.10 所示；從單位設置成本的觀點來看，當投料量 N 愈大，單位設置成本會愈小。因為平均良率和單位設置成本兩者會對投料量產生相互制衡的效果，所以最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增。

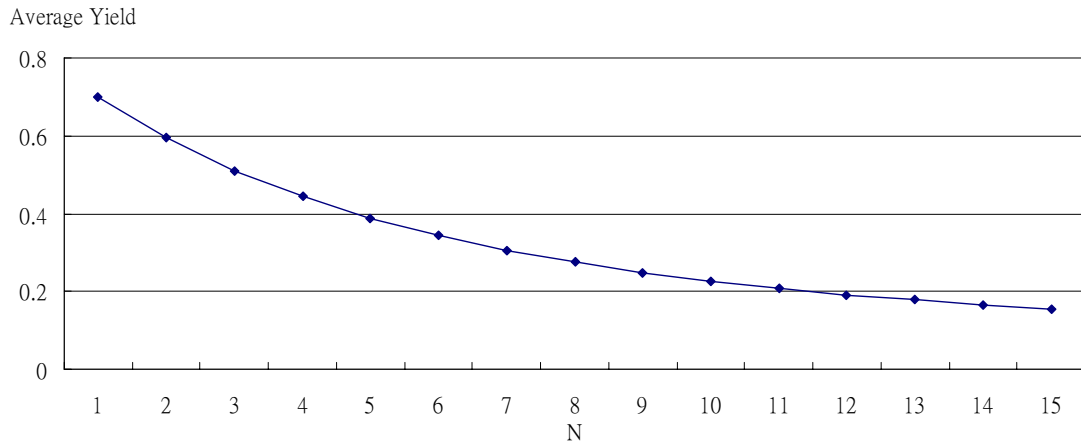


圖 3.10 IG 分配($\theta = 0.7$)的平均良率

由圖 3.9，我們也發現在相同的需求量下，當 p 愈低時，大多數的最佳投料量會愈大，舉例來說，當 $D = 50$ 時， $p = 0.1$ ， $N_6(s_6) = 38$ ； $p = 0.3$ ， $N_6(s_6) = 36$ ； $p = 0.5$ ， $N_6(s_6) = 35$ ； $p = 0.7$ ， $N_6(s_6) = 33$ ； $p = 1.0$ ， $N_6(s_6) = 28$ ，也就是說，一期產出的不確定性愈高，投料量愈大，這個投料規則有助於實務上的應用。舉例來說，當 p 提高時，為了更快速求得最佳投料量，我們可利用過去在 p 較低時，所求出的最佳投料量設定為投料的上界，來縮小求解範圍。

3.4 本章結論

在現實的生產情境中，生產週期時間常具有不確定性的現象，本研究將該現象納入單階段生產系統有交期限制的多次投料問題，將該問題建構成動態規劃問題。利用動態規劃的手法求解時，因為動態規劃的網路規模是由投料量的上界所決定，若能找到投料量的上界，即可縮小態規劃的網路規模，以縮短計算時間。因此，本研究證明最佳投料量不會超過需求量，基於此特性，設計求解動態規劃問題的演算法，求得每個投料時點的最佳投料量。

由數值範例分析我們得知最佳投料量的特性如下：(1)最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增；(2)生產週期時間是不確定的最佳投料量比生產週期時間是確定的最佳投料量較高，只有少數是例外。另外，我們也探討決策參數 T 和 p 的特性如下：(1) T 愈大期望總生產成本愈低，這表示顧客的訂單交期時間愈長，向顧客索取的成本要更低；(2)當 p 夠大時， p 愈高期望總生產成本愈低，這表示一期產出的機率愈高，在下一期決策時已有上一期產出的資訊，資訊愈明確成本愈低，生產系統更具有成本的競爭優勢。本研究提出的模式可計算最小的期望總生產成本，作為營業人員報價時的參考。

第四章 二階段生產系統的多次投料問題

本章探討二階段生產系統有交期限制的多次投料問題。首先我們定義符號；其次描述二階段生產系統，並舉例說明該系統的決策過程，將該問題建構成動態規劃問題；隨之證明二階段的最佳投料量有上界，基於此特性，設計求解動態規劃問題的演算法；為了改善在需求量較大的情況下，動態規劃演算法求解時間太久，我們提出一個啟發式演算法。以三個數值範例來比較啟發式演算法和動態規劃問題演算法的績效，也觀察 IG 分配的參數對最佳投料量的影響及最佳投料量的特性。

符號定義

D ：初始需求量(在 $t = T$ 時的需求量)

T ：總剩餘期數，亦即可投料的總次數

t ：距離交期日剩下的期數， $t = T, T-1, \dots, 1, 0$ ， $t = T$ 為期初， $t = 0$ 為交期日

i ：第 i 個生產階段(M_i)， $i = 1, 2$

$\alpha^{(i)}$ ：第 i 階段的設置成本， $i = 1, 2$

$\beta^{(i)}$ ：第 i 階段的單位變動成本， $i = 1, 2$

D_t ：第 t 期末滿足的需求量

h ：每一單位完成品，在每一期間的儲存成本

m ：每一單位的缺貨成本

$\theta^{(i)}$ ：第 i 階段的製程在可控制的狀態下，生產一個良品的機率，是 IG 分配的參數， $i = 1, 2$

$k_t^{(i)}$ ：第 t 期投到第 i 階段的投料量， $i = 1, 2$

$W^{(i)}$ ：二元輔助變數，表示第 i 階段的設置成本。若有投料，則設置成本為 1；

若沒有投料，則設置成本為 0，表示如下：

$$W^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{if } k_t^{(i)} = 0 \\ 1 & \text{if } k_t^{(i)} > 0 \end{cases}, i = 1, 2$$

$Y_{k_t^{(i)}}$ ：為一隨機變數，第 t 期投料 $k_t^{(i)}$ 個，產出 $y_{k_t^{(i)}}$ 個良品，良品個數服從 IG 分

配，良品個數的範圍是 $y_{k_t^{(i)}} = 0, 1, \dots, k_t^{(i)}$ ， $i = 1, 2$

$p(y_{k_t^{(i)}})$ ：第 t 期投料 $k_t^{(i)}$ 個，產出 $y_{k_t^{(i)}}$ 個良品的機率，其中 $\sum_{y_{k_t^{(i)}}=0}^{k_t^{(i)}} p(y_{k_t^{(i)}}) = 1$ ， $i = 1, 2$

B_t ：第 t 期在製品庫存量，其中 $B_t = B_{t+1} - k_{t+1}^{(2)} + Y_{k_{t+1}^{(1)}}$

$s_t = (D_t, B_t)$ ：第 t 期生產系統的狀態

$N_t(s_t) = (k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ ：第 t 期狀態為 s_t 的投料決策，也就是投 $k_t^{(1)}$ 個到 M_1 ，投 $k_t^{(2)}$ 個到 M_2

$C_t(N_t(s_t))$ ：第 t 期狀態為 s_t 採取某一個投料決策 $N_t(s_t)$ ，從第 t 期到第 0 期的期

望總生產成本

$C_t^*(s_t) = \underset{(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})}{\text{Min}} \{C_t(N_t(s_t))\}$ ：第 t 期狀態為 s_t 採取所有可能的投料決策，從第 t

期到第 0 期的最小期望總生產成本

$N_t^*(s_t) = (k_t^{(1)*}, k_t^{(2)*})$ ：第 t 期狀態為 s_t ，決定一個最佳投料決策，使得第 t 期到第 0

期的期望總生產成本最小，亦即 $C_t(N_t^*(s_t)) = \underset{(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})}{\text{Min}} \{C_t(N_t(s_t))\} = C_t^*(s_t)$

4.1 問題描述

我們首先描述二階段生產系統的多次投料問題，該系統包含：(1)第一個生產階段 M_1 ；(2)在製品庫存站 R ；(3)第二個生產階段 M_2 ，如圖 4.1 所示。在各生產階段之後皆設有一個檢驗站，整批完成後整批檢驗，檢驗為不良品，則予以報廢。各階段的生產週期時間(含檢驗)是一期。

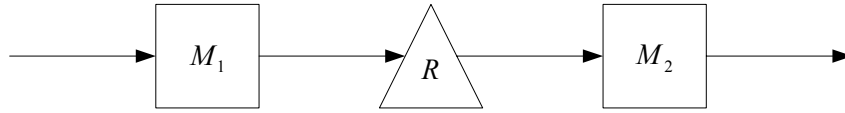


圖 4.1 二階段生產系統

在二階段的生產情境下，為了滿足顧客的訂單需求量 D ，每個投料時點根據良品的產出結果，須同時決定投一個批料到 M_1 去生產，且投另一個批料到 M_2 去生產，在決定 M_2 的投料量時要注意，不可超過可用的在製品庫存量。在每個投料時點重複決定 M_1 和 M_2 的投料量，直到產出的良品個數滿足訂單需求量，或是到了交期日，才停止生產。由於期初階段($t=T$)沒有在製品庫存量，所以只能投到 M_1 去生產，且在最後一期($t=1$)， M_1 的投料無法在交期前產出完成品，除這二個投料時點只投一個階段外，其餘的每個投料時點，皆可同時決定二個階段的投料量，如圖 4.2 所示。

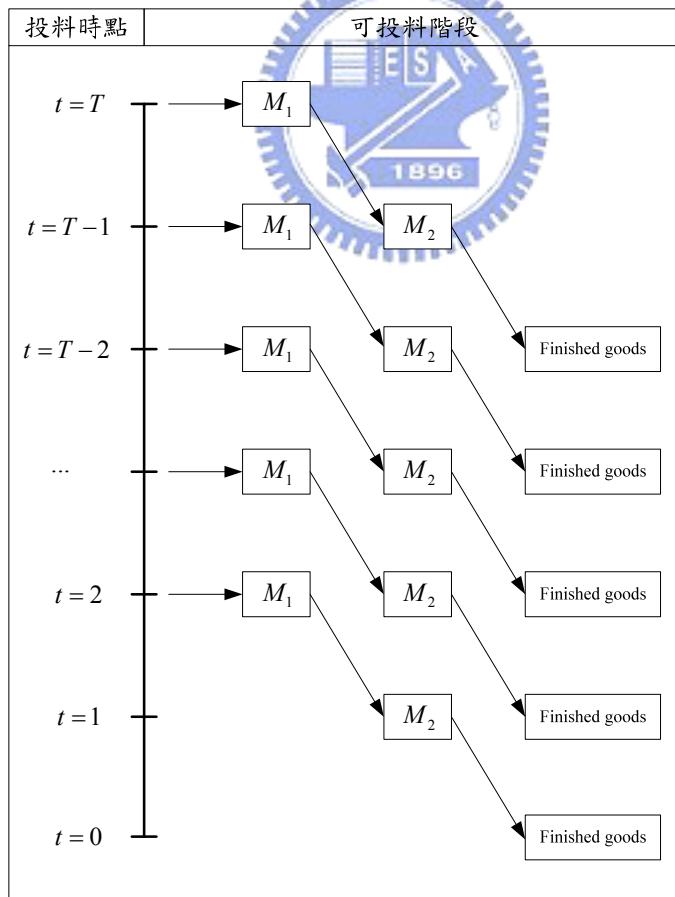


圖 4.2 二階段生產系統的投料情境

我們舉例說明二階段生產系統有交期限制的多次投料問題。假設每個階段的生產週期時間為一期。已知顧客的訂單需求量 $D=1$ ，現在時點到交期日剩下 3 期， $t=3$ 是現在的時點， $t=0$ 是交期日，共有 3 個投料時點，分別是 $t=3$ 、2 及 1，如圖 4.3 所示。

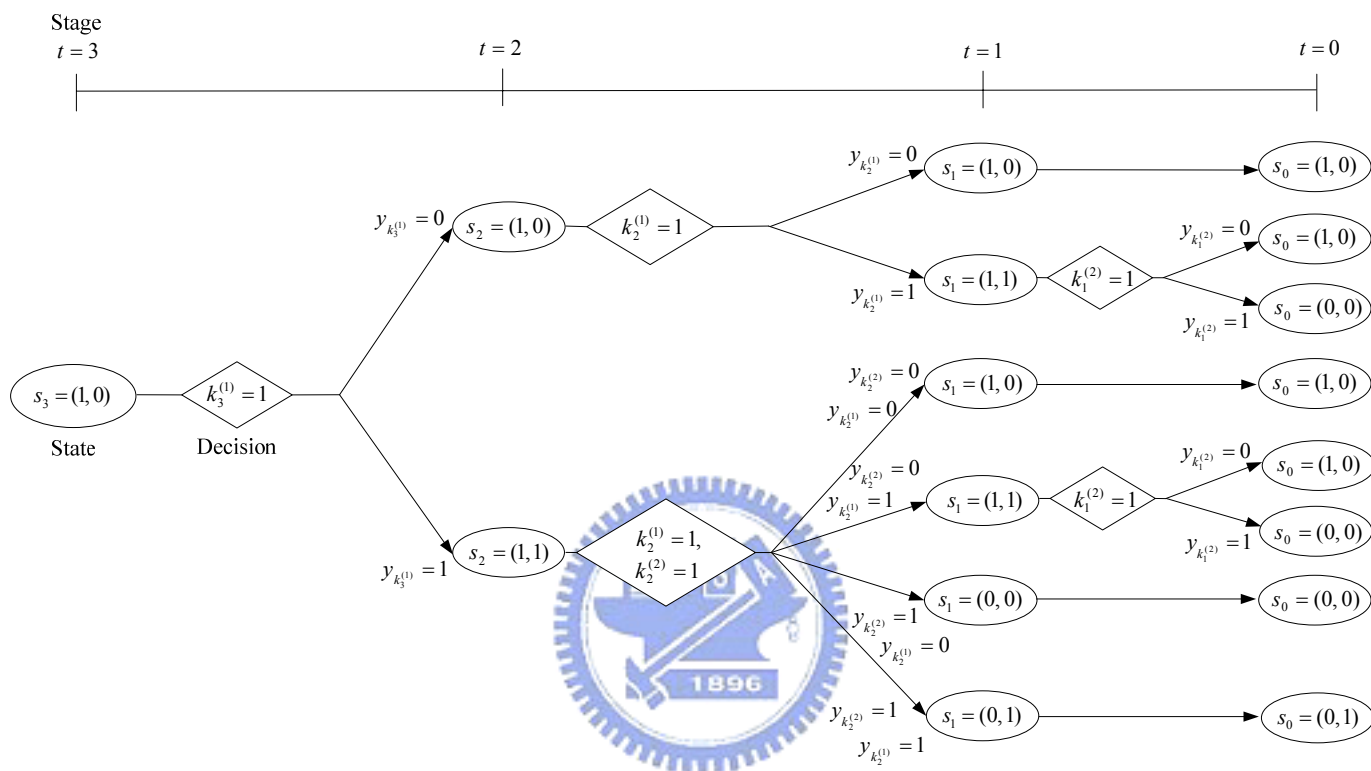


圖 4.3 二階段生產系統的多次投料決策

當 $t=3$ 時，因為期初沒有在製品庫存，僅決定一個投料量投到 M_1 。當 $t=2$ 時，根據 M_1 的檢驗結果，須決定二個投料量：一個投到 M_1 ；另一個投到 M_2 。當 $t=1$ 時，根據 M_1 和 M_2 的檢驗結果，僅決定一個投料量投到 M_2 ，因為再投一個新的投料量到 M_1 ，在交期日前無法產出成品，所以當 $t=1$ 時， M_1 不再投料。

上例中，令 $k_t^{(i)}$ 表示第 t 期投到第 i 階段的投料量， $i=1$ 和 2 ， $t=1,2,3$ ，因 $k_3^{(2)}=0$ 及 $k_1^{(1)}=0$ ，尚有四個決策變數，分別為： $k_3^{(1)}$ 、 $k_2^{(1)}$ 、 $k_2^{(2)}$ 及 $k_1^{(2)}$ 。假設每

個生產階段服從 IG 分配，以 $y_{k_t^{(i)}}$ 表示投料 $k_t^{(i)}$ 個產出的良品個數，也以 $p(y_{k_t^{(i)}})$ 表示投料 $k_t^{(i)}$ 個產出 $y_{k_t^{(i)}}$ 個良品的機率，其中 $y_{k_t^{(i)}}$ 是一個隨機變數，良品個數的範圍

$$\text{是 } 0 \leq y_{k_t^{(i)}} \leq k_t^{(i)}, \quad \sum_{y_{k_t^{(i)}}=0}^{k_t^{(i)}} p(y_{k_t^{(i)}}) = 1。$$

令 $s_t = (D_t, B_t)$ 表示第 t 期生產系統的狀態，其中 D_t 是第 t 期末滿足的需求量， B_t 是第 t 期在製品的庫存量。圖 4.3 中，當 $t=3$ 時，系統的初始狀態是 $s_3 = (1, 0)$ 。假設期初投 $k_3^{(1)} = 1$ 到 M_1 去生產，當 $t=2$ 時，根據 M_1 的檢驗結果得知有二種可能： $y_{k_3^{(1)}} = 0$ 或 1 。

當 $t=2$ 時，若 $y_{k_3^{(1)}} = 0$ ，則系統狀態是 $s_2 = (1, 0)$ 。假設投 $k_2^{(1)} = 1$ 到 M_1 去生產，根據 M_1 的檢驗結果得知有二種可能： $y_{k_2^{(1)}} = 0$ 或 1 。相對的，若 $y_{k_3^{(1)}} = 1$ ，則系統狀態是 $s_2 = (1, 1)$ 。假設投 $k_2^{(1)} = 1$ 到 M_1 去生產及投 $k_2^{(2)} = 1$ 到 M_2 去生產，當 $t=1$ 時，根據 M_1 和 M_2 的檢驗結果得知有四種可能： $(y_{k_2^{(1)}}, y_{k_2^{(2)}}) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 或 $(1, 1)$ 。

當 $t=1$ 時，若系統狀態是 $s_1 = (1, 0)$ 。 $B_1 = 0$ 表示在 R 站沒有在製品，無法再投料到 M_2 去生產，也不能再投一個新的批量到 M_1 去生產，因為在交期日前無法產出成品。因此， $t=0$ 和 $t=1$ 的系統狀態相同，即 $s_0 = s_1 = (1, 0)$ 。

當 $t=1$ 時，若系統狀態是 $s_1 = (1, 1)$ 。 $B_1 = 1$ 表示在 R 站還有 1 個在製品，可投 $k_1^{(2)} = 1$ 到 M_2 去生產，當 $t=0$ 時，根據 M_2 的檢驗結果得知有二種可能： $y_{k_1^{(2)}} = 1$ 或 0 ，系統可能的狀態為 $s_0 = (0, 0)$ 或 $s_0 = (1, 0)$ 。

當 $t=0$ 時，系統可能的狀態有三種： $s_0 = (1, 0)$ 、 $s_0 = (0, 0)$ 及 $s_0 = (0, 1)$ 。若

$D_0 = 0$ ，表示訂單需求量已經滿足；若 $D_0 = 1$ ，表示還缺貨 1 單位，須付出 1 單位缺貨成本。 $B_0 = 1$ ，表示還有 1 單位的在製品，這 1 單位的在製品無法在交期日前產出成品，予以報廢。

4.2 建構動態規劃問題

本節探討二階段生產系統有交期限制的多次投料問題，將該問題建構成動態規劃問題。我們首先定義研究假設，其次說明動態規劃問題的決策結果，隨之建構成本遞迴式，最後設定二個邊界條件，便於計算成本遞迴式。

4.2.1 研究假設

除了 1.2 節的研究假設之外，本研究另加入二個假設：

- (1) 二個生產階段均服從 IG 分配，每個階段的良率不一定相同
- (2) 每個生產階段的生產週期時間為一期

4.2.2 動態規劃問題的決策結果

令 $s_t = (D_t, B_t)$ 是第 t 期的生產狀態，其中 D_t 是第 t 期的未滿足需求量； B_t 是第 t 期的在製品庫存量。決策變數是以投料量 $k_t^{(i)}$ 表示， $k_t^{(i)}$ 是第 t 期投到第 i 階段的投料量， $i = 1$ 和 2 。

已知第 t 期狀態是 $s_t = (D_t, B_t)$ ，在第 t 期決定第一階段投 $k_t^{(1)}$ 個，第二階段投 $k_t^{(2)}$ 個，該投料決策以 $N_t(s_t) = (k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 表示，到了 $t-1$ 期所有可能的產出結果，如圖 4.4 所示。我們得知 $t-1$ 期所有可能的狀態為 $s_{t-1} = (D_t - y_{k_t^{(2)}}^{(2)}, B_t - k_t^{(2)} + y_{k_t^{(1)}}^{(1)})$ ，其中 $y_{k_t^{(1)}}^{(1)}$ 和 $y_{k_t^{(2)}}^{(2)}$ 分別是投到 M_1 和 M_2 所產出的良品個數， $p(y_{k_t^{(1)}}^{(1)})$ 和 $p(y_{k_t^{(2)}}^{(2)})$ 分別是產出良品個數為 $y_{k_t^{(1)}}^{(1)}$ 個和 $y_{k_t^{(2)}}^{(2)}$ 個的機率。 $D_t - y_{k_t^{(2)}}^{(2)}$ 表示是 $t-1$ 期末滿足的需求量， $B_t - k_t^{(2)} + y_{k_t^{(1)}}^{(1)}$ 表示是 $t-1$ 期在製品的庫

存量。由於 M_1 和 M_2 產出的良品個數範圍分別為 $0 \leq y_{k_t^{(1)}} \leq k_t^{(1)}$ 和 $0 \leq y_{k_t^{(2)}} \leq k_t^{(2)}$ ，

因此我們得知所有可能產出的良品狀態共有 $(k_t^{(1)}+1) \cdot (k_t^{(2)}+1)$ 個，每一個可能產

出的良品狀態之聯合機率是 $p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}})$ ，所有可能產出的良品狀態之全機率

是 1，亦即 $\sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}}) = 1$ 。

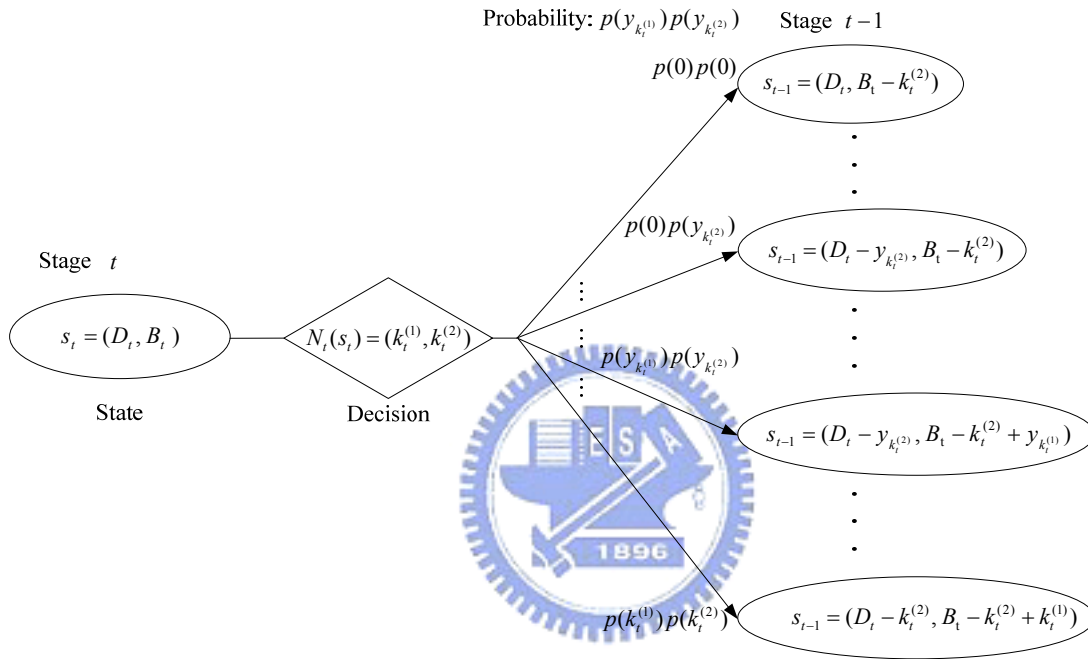


圖 4.4 第 t 期與 $t-1$ 期的關係

4.2.3 成本遞迴式

已知第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, B_t)$ 。假設採取某一個投料決策

$N_t(s_t) = (k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ ，從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本，如下：

$$C_t(N_t(s_t)) = H_1 + H_2 + \sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot H_3 + \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot H_4 \quad (4-1)$$

其中，

$$H_1 = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k_t^{(1)}$$

$$H_2 = \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k_t^{(2)}$$

$$H_3 = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{k_t^{(1)}}), B_t - k_t^{(2)} + y_{k_t^{(1)}}))$$

$$H_4 = h \cdot (t-1) \cdot y_{k_t^{(2)}}$$

公式(4-1)， H_1 表示是投 $k_t^{(1)}$ 個到 M_1 的生產成本，包括設置成本($\alpha^{(1)}W^{(1)}$)和變動成本($\beta^{(1)}k_t^{(1)}$)；相同地， H_2 表示是投 $k_t^{(2)}$ 個到 M_2 的生產成本為 $\alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k_t^{(2)}$ 。 $p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}})$ 是分別投 $k_t^{(1)}$ 個到 M_1 去生產和投 $k_t^{(2)}$ 個到 M_2 去生產，剛好產出 $y_{k_t^{(1)}}$ 個與 $y_{k_t^{(2)}}$ 個良品的聯合機率。 $H_3 = C_{t-1}^*(s_{t-1})$ 表示是 $t-1$ 期狀態

為 s_{t-1} ，從 $t-1$ 期到第0期的最小期望總生產成本。 $\sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot H_3$ 表

示是 $t-1$ 期考慮所有可能的狀態 s_{t-1} ，從 $t-1$ 期到第0期的最小期望總生產成本。

H_4 表示是投 $k_t^{(2)}$ 個到 M_2 去生產，剛好產出 $y_{k_t^{(2)}}$ 個良品，從 $t-1$ 期到第0期的存貨

持有成本。 $\sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot H_4$ 表示是投 $k_t^{(2)}$ 個到 M_2 去生產，考慮所有可能產出 $y_{k_t^{(2)}}$ 個

良品的情況，從 $t-1$ 期到第0期的存貨持有成本。

公式(4-1)是一個遞迴式，因為它包含 $t-1$ 期的最佳成本 $H_3 = C_{t-1}^*(s_{t-1})$ ，也就是說，在狀態 s_t 時，為了求得最佳投料量，必須事先知道狀態 s_{t-1} 的最佳投料量。因此，在期初狀態 s_T 時，為了求得最佳投料量，必須事先知道狀態 s_{T-1} 、 s_{T-2} 、 \dots 、 s_1 ，且在第0期的狀態 s_0 也要事先知道。經由這樣的遞迴特性得知，我們探討的多次投料問題是一個動態規劃問題。

由於動態規劃問題具有遞迴的特性，所以我們可以推估到第 t 期整個動態規劃的網路規模，而影響動態規劃的網路規模是由二階段投料量 $k_t^{(1)}$ 和 $k_t^{(2)}$ 的上界所

決定，也就是說，若能限定 $k_t^{(1)}$ 和 $k_t^{(2)}$ 的上界，即可縮小態規劃的網路規模，以縮短計算時間。

4.2.4 邊界條件

為了計算成本遞迴式(4-1)，我們設定二個邊界條件。第一個邊界條件是定義第 t 期狀態為 $s_t = (0, B_t)$ ，表示顧客的訂單需求量已經滿足，生產線還有 B_t 個在製品，不再投料。因此，從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本是零，見公式(4-2)；二階段的最佳投料量是零，見公式(4-3)。

$$C_t^*(s_t = (0, B_t)) = 0 \quad (4-2)$$

$$N_t^*(s_t = (0, B_t)) = (0, 0) \quad (4-3)$$

第二個邊界條件是定義第 0 期狀態為 $s_0 = (D_0, B_0)$ 。當 $D_0 > 0$ ，表示到了交期日，產出的良品個數比訂單需求量少 D_0 個，缺貨成本為 mD_0 ，見公式(4-4)，生產線還剩下 B_0 個在製品，則不再投料。

$$C_0^*(s_0 = (D_0, B_0)) = mD_0 \quad (4-4)$$

綜合上述，公式(4-1)是計算從第 t 期到第 0 期的期望總生產成本；公式(4-2)是設定提早完成訂單需求量的邊界條件；公式(4-4)是設定到了交期日，計算缺貨成本的邊界條件。本研究利用上述三個公式，決定一組投料決策 $N_t(s_t) = (k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 代入公式(4-1)，可算出期望總生產成本。全域搜尋 $k_t^{(1)}$ 和 $k_t^{(2)}$ 的範圍，可求得最小的期望總生產成本所對應的投料量，即是最佳投料量 $N_t^*(s_t) = (k_t^{(1)*}, k_t^{(2)*})$ ，亦即

$$C_t(N_t^*(s_t)) = C_t^*(s_t) = \underset{(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})}{\text{Min}} \{C_t(N_t(s_t))\}。$$

4.3 求解動態規劃問題

利用動態規劃的手法求解時，因為動態規劃的網路規模是由二階段投料量 $k_i^{(1)}$ 和 $k_i^{(2)}$ 的上界所決定，若能限定 $k_i^{(1)}$ 和 $k_i^{(2)}$ 的上界，即可縮小動態規劃的網路規模，以縮短計算時間。因此本節證明二階段的投料量有上界，基於此特性，設計求解動態規劃問題的演算法，求得最佳投料量。在需求量較大的情況下，我們提出一個啟發式演算法，可以有效地求得滿意解。藉由以三個數值範例來比較啟發式演算法和動態規劃問題演算法的績效，也觀察 IG 分配的參數對最佳投料量的影響及最佳投料量的特性。

4.3.1 縮小求解空間

我們證明四個定理，來縮小求解空間，找到最佳投料決策 $N_i^*(s_i)$ 。定理 4.1 是定義剩下最後一期，第一階段不能再投料，亦即 $k_1^{(1)*} = 0$ ；定理 4.2 是定理 4.3 的預備定理；定理 4.3 是證明第二階段的最佳投料量不會超過需求量，亦即 $k_i^{(2)*} \leq D_i$ 。定理 4.4 是證明第一階段的最佳投料量，若滿足 $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_i+1} \cdot m$ ，則第一階段的最佳投料量不會超過需求量， $k_i^{(1)*} \leq D_i$ ；否則第一階段的最佳投料量上界是 $D_i \cdot (t-1)$ 。

定理 4.1：剩下最後一期 $t=1$ ，第一階段不再投料，亦即 $k_1^{(1)*} = 0$ 。

[證明]

完成品的生產週期時間至少需要二個週期以上。當剩下最後一期時，已無法在交期日產出成品，投料只會徒增生產成本的浪費。因此， $N_1^*(s_1) = (0, k_1^{(2)*})$ □

定理 4.2：第 t 期的在製品庫存量較多，投料決策的選擇性愈大，最佳期望總生產

成本較低，即 $C_t^*(s_t = (D_t, B_t - n)) \geq C_t^*(s_t = (D_t, B_t))$ ，其中 n 屬於正整數

且 $B_t \geq n \geq 1$ 。

[證明]

由於在製品不考慮存貨持有成本，所以 $s_t = (D_t, B_t)$ 的決策空間包含了 $s_t = (D_t, B_t - n)$ 的決策空間。 $s_t = (D_t, B_t - n)$ 的最佳解是 $s_t = (D_t, B_t)$ 的一個可行解。因此， $C_t^*(s_t = (D_t, B_t - n)) \geq C_t^*(s_t = (D_t, B_t))$ □

定理 4.3：已知 $t \geq 1$ ， $D_t \geq 1$ ，第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, B_t)$ ，證明第二階段的最佳投

料量不會超過未滿足的需求量 ($k_t^{(2)*} \leq D_t$)，及 $k_t^{(2)*} \leq B_t$ 。

[證明]

第二階段的最佳投料量不能超過可用的在製品庫存量，亦即 $k_t^{(2)*} \leq B_t$ 。若 $B_t \leq D_t$ ，則我們能夠確保 $k_t^{(2)*} \leq D_t$ ，因為 $k_t^{(2)*}$ 的投料上界是 B_t 。

若 $B_t > D_t$ ，令 $N_t'(s_t) = (k, D_t)$ 和 $N_t''(s_t) = (k, D_t + n)$ ，其中 $n \geq 1$ 且 n 屬於正整數。我們可得

$$C_t(N_t'(s_t)) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}D_t + h(t-1)E[Y_{D_t}]$$

$$+ \sum_{y_k=0}^k \sum_{y_{D_t}=0}^{D_t} p(y_k) \cdot p(y_{D_t}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{D_t}, B_t - D_t + y_k))$$

和

$$C_t(N_t''(s_t)) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}(D_t + n) + h(t-1)E[Y_{D_t+n}]$$

$$+ \sum_{y_k=0}^k \sum_{y_{D_t+n}=0}^{D_t+n} p(y_k) \cdot p(y_{D_t+n}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{D_t+n}, B_t - (D_t + n) + y_k))$$

$$C_t(N_t''(s_t)) - C_t(N_t'(s_t))$$

$$= n\beta^{(2)} + h(t-1)(E[Y_{D_t+n}] - E[Y_{D_t}]) + A - B$$

其中

$$A = \sum_{y_k=0}^k \sum_{y_{D_t+n}=0}^{D_t-1} p(y_k) \cdot p(y_{D_t+n}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{D_t+n}, B_t - (D_t + n) + y_k))$$

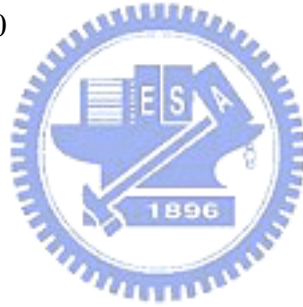
$$B = \sum_{y_k=0}^k \sum_{y_{D_t}=0}^{D_t-1} p(y_k) \cdot p(y_{D_t}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{D_t}, B_t - D_t + y_k))$$

根據定理 4.2，我們得知 $A \geq B$ 。

因此

$$\begin{aligned} C_t(N_t''(s_t)) - C_t(N_t'(s_t)) &\geq n\beta^{(2)} + h(t-1)(E[Y_{D_t+n}] - E[Y_{D_t}]) \\ &= n\beta^{(2)} + h(t-1)(\theta^{(2)})^{D_t+n} \\ &> 0 \end{aligned}$$

，亦即 $k_t^{(2)*} \leq D_t$ □



定理 4.4： 已知 $t \geq 1$ ， $D_t \geq 1$ ，第 t 期狀態為 $s_t = (D_t, B_t)$ ，其中 $B_t \geq 0$ ，若滿足

$$\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot m，則 $k_t^{(1)*} \leq D_t$ 。$$

[證明]

令 $N'_t(s_t) = (D_t, k)$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, \text{Min}\{D_t, B_t\}$

$$C_t(N'_t(s_t)) = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}D_t + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k + h(t-1)E[Y_k]$$

$$+ \sum_{y_{D_t}=0}^{D_t} \sum_{y_k=0}^k p(y_{D_t}) \cdot p(y_k) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + y_{D_t}))$$

令 $N''_t(s_t) = (D_t + 1, k)$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, \text{Min}\{D_t, B_t\}$

$$C_t(N''_t(s_t)) = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}(D_t + 1) + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k + h(t-1)E[Y_k]$$

$$+ \sum_{y_{D_t+1}=0}^{D_t+1} \sum_{y_k=0}^k p(y_{D_t+1}) \cdot p(y_k) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + y_{D_t+1}))$$

$$C_t(N''_t(s_t)) - C_t(N'_t(s_t))$$

$$= \beta^{(1)} - (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot \sum_{y_k=0}^k p(y_k) \cdot$$

$$[C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + D_t)) - C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + (D_t + 1)))]$$

由於

$$\sum_{y_k=0}^k p(y_k) \cdot [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + D_t)) - C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_k, B_t - k + (D_t + 1)))] \leq m$$

我們得知

$$C_t(N''_t(s_t)) - C_t(N'_t(s_t)) \geq \beta^{(1)} - (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot m$$

若 $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot m$ ，則 $C_t(N''_t(s_t)) - C_t(N'_t(s_t)) \geq 0$

因此，我們得到的結論是

若滿足 $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot m$ ，則 $k_t^{(1)*} \leq D_t$ □

4.3.2 動態規劃問題的演算法(OPS 演算法)

根據前一小節證明的定理，我們提出求解動態規劃問題的演算法，這個演算法(Optimum-solution search algorithm)我們簡稱為 OPS 演算法，它可以求得最佳解。已知訂單需求量 D 和總剩餘期數 T ，期初狀態為 $s_T = (D, 0)$ ，求解期初的最佳投料量 $N_T^*(s_T)$ 。在附錄 B 我們詳細地說明 OPS 演算法每個步驟的運算過程，在此我們簡介 OPS 演算法的基本概念，求解的步驟如下：

步驟 4.1：根據 4.2.4 節第一個邊界條件。當 $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (0, B_t)$ ，設定最佳成本與各階段的最佳投料量。

步驟 4.2：根據 4.2.4 節第二個邊界條件。當 $t = 0$ ，狀態為 $s_0 = (D_0, B_0)$ ，設定最佳成本與各階段的最佳投料量。

步驟 4.3：根據定理 4.1。當 $t = 1$ ，狀態為 $s_1 = (D_1 \geq 1, B_1 \geq 0)$ ，計算最佳成本與第二階段的最佳投料量。

步驟 4.4：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $2 \leq t \leq T-2$ ，狀態為 $s_t = (D_t \geq 1, B_t \geq 0)$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量。

步驟 4.5：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t = T-1$ ，狀態為 $s_t = (D_t \geq 1, B_t \geq 0)$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量。

步驟 4.6：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t = T$ ，狀態為 $s_T = (D_T \geq 1, B_T = 0)$ ，計算最佳成本與第一階段的最佳投料量。

綜合上述，步驟 4.1 和 4.2 是根據二個邊界條件，設定最佳成本與各階段的最佳投料量；步驟 4.3 至 4.5 是計算第 1 期到 $T-1$ 期各種狀態的最佳成本與最佳投料量；步驟 4.6 是計算期初狀態的最佳成本與第一階段的最佳投料量。

接著我們利用圖形來展示演算法各個步驟的主要概念。圖形是以三個維度來表示：(1) t ：距離交期日剩下的期數；(2) D_t ：第 t 期末滿足的訂單需求量；(3) B_t ：第 t 期的製品庫存量。

步驟 4.1 是顧客的訂單需求量已經滿足，即 $D_t = 0$ 。根據 4.2.4 節第一個邊界條件，設定最佳成本與最佳投料量，如圖 4.5 所示；步驟 4.2 是到了交期日，即 $t = 0$ ，產出的良品個數比訂單需求量少 D_0 個。根據 4.2.4 節第二個邊界條件，設定最佳成本與最佳投料量，如圖 4.5 所示。

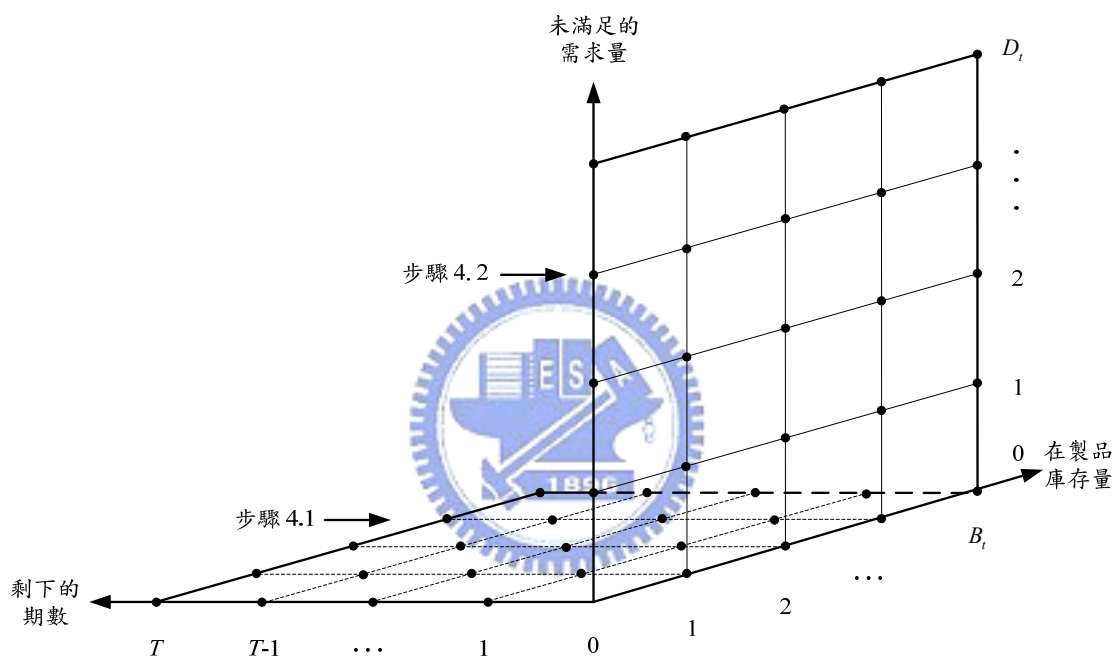


圖 4.5 根據二個邊界條件，設定各種狀態的最佳成本與最佳投料量

步驟 4.3 是根據定理 4.1。當 $t=1$ ，計算最佳成本與第二階段的最佳投料量，得到 $t=1$ 的平面，如圖 4.6 所示。

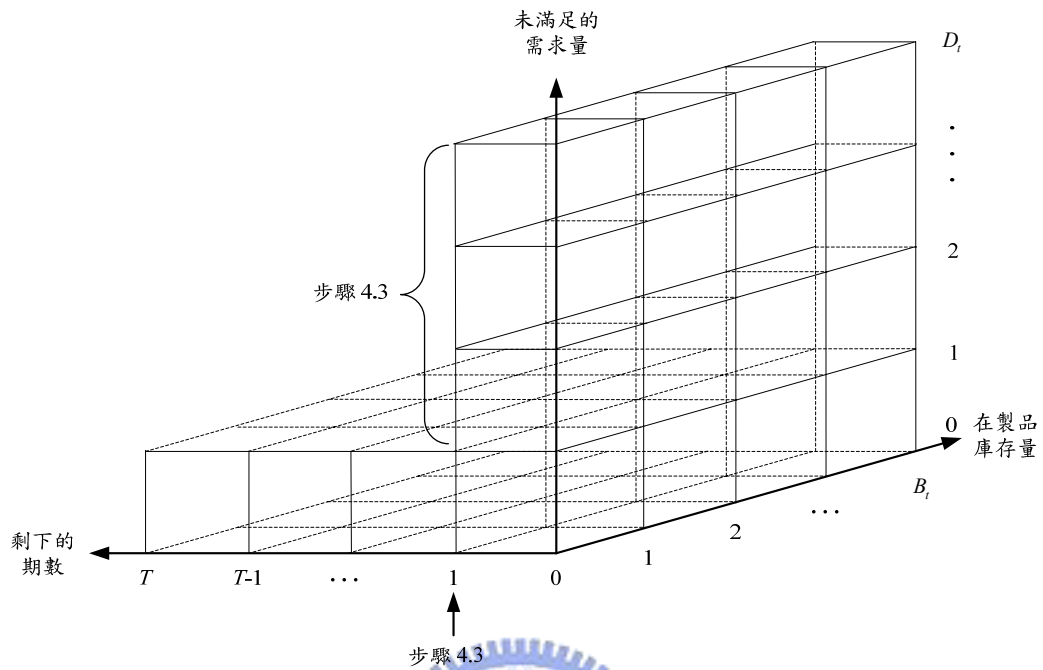


圖 4.6 當 $t=1$ 時，計算最佳成本與最佳投料量

步驟 4.4：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $2 \leq t \leq T-2$ 時，計算最佳成本與各階段的最佳投料量，得到 $t=2,3,\dots,T-2$ 的平面，如圖 4.7 所示。

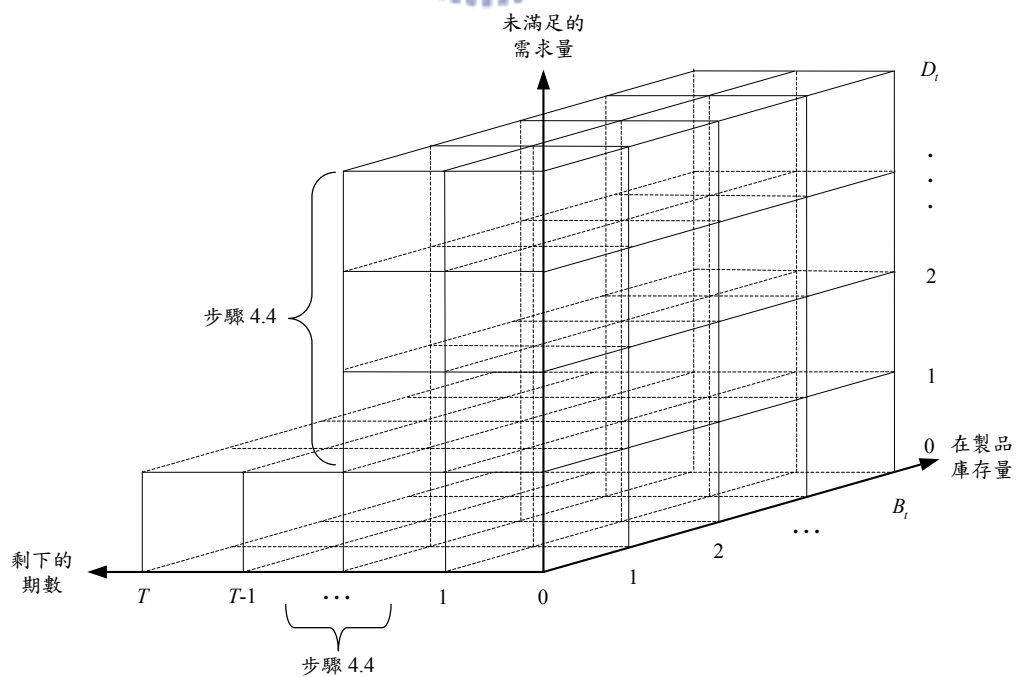


圖 4.7 當 $2 \leq t \leq T-2$ 時，計算最佳成本與最佳投料量

步驟 4.5：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t=T-1$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量，得到 $t=T-1$ 的平面，如圖 4.8 所示。

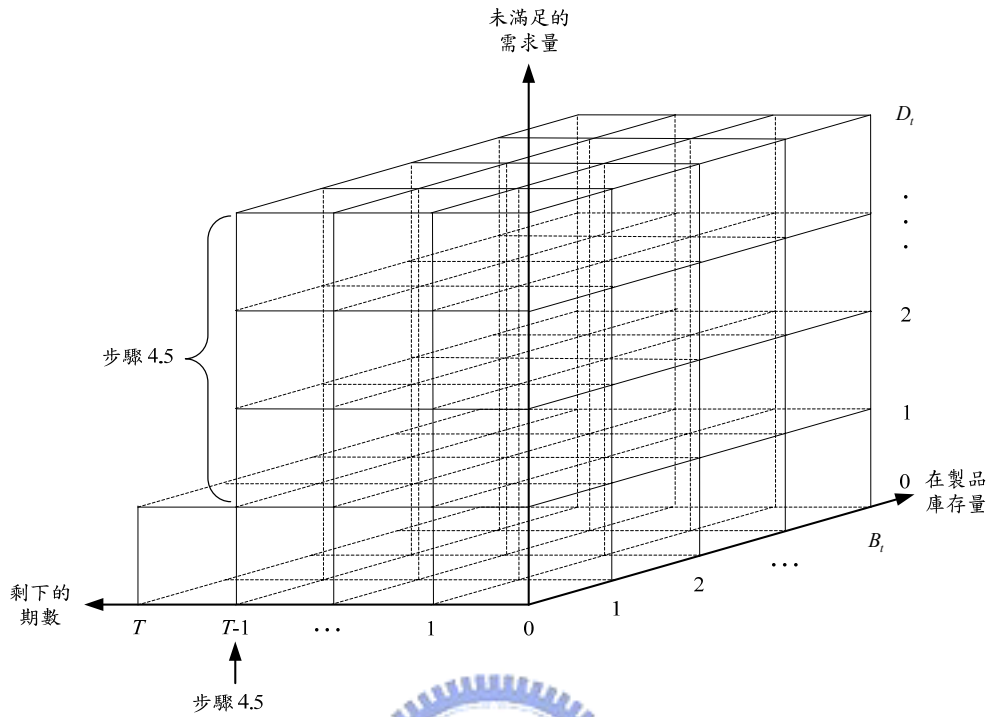


圖 4.8 當 $t=T-1$ 時，計算最佳成本與最佳投料量

步驟 4.6：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t=T$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量，得到 $t=T$ 的平面，如圖 4.9 所示。

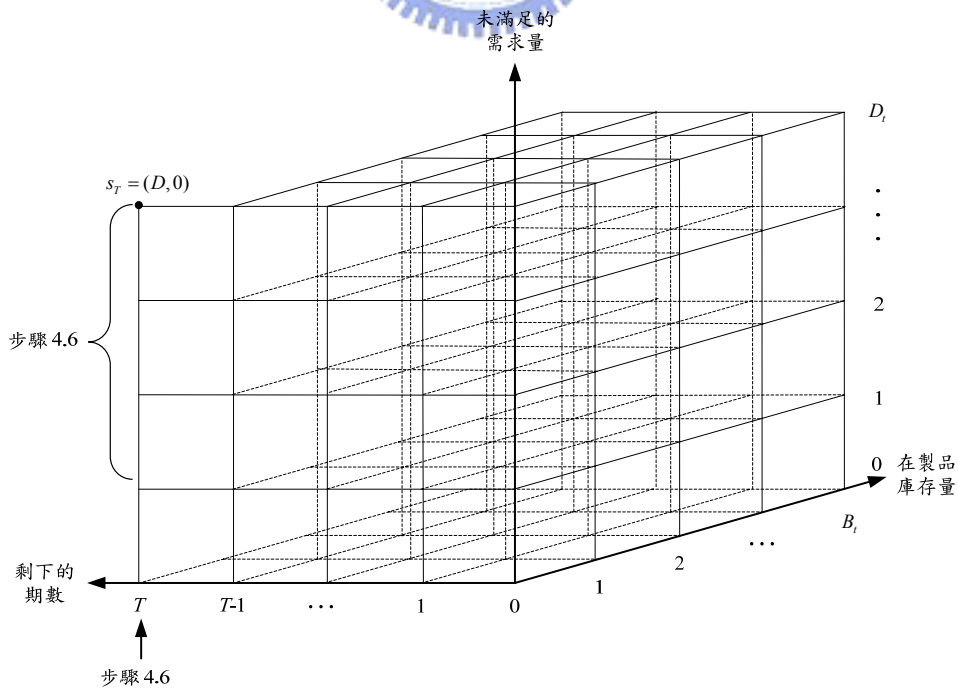


圖 4.9 當 $t=T$ 時，計算最佳成本與最佳投料量

接著我們分析 OPS 演算法的複雜度，它的複雜度是 $O(T^4 D^6)$ ，分為以下三點作說明：

(1) 生產系統狀態 $s_t = (D_t, B_t)$ 的總數是由三個變數： t 、 D_t 及 B_t 所限制，而 t 、 D_t 及 B_t 的上界分別是 T 、 D 及 TD 。在最差的情況下，生產系統狀態的總數是 $T \cdot D \cdot TD = (T^2 D^2)$ 。

(2) 在每一個狀態 $s_t = (D_t, B_t)$ 下，因為第一階段投料量的最大範圍是 $k_t^{(1)} \leq (t-1) \cdot D_t \leq TD$ ，第二階段投料量的最大範圍是 $k_t^{(2)} \leq \min\{D_t, B_t\} \leq D$ ，所以我們最多可採取投料決策 $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 的個數是 $D \cdot TD = (TD^2)$ 。

(3) 每一個投料決策 $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 所有可能產出的狀態個數最多也是 $TD \cdot D = (TD^2)$ 。

綜合以上三點，在最差的情況下，OPS 演算法的複雜度是 $O(T^4 D^6 = T^2 D^2 \cdot TD^2 \cdot TD^2)$ 。

在 T 和 D 很大的情況下，利用動態規劃的手法求解時，因為動態規劃的網路規模是由二階段投料量 $k_t^{(1)}$ 和 $k_t^{(2)}$ 的上界所決定，導致動態規劃的網路規模變得相當龐大，需耗費很長的時間才能求得最佳解。舉例來說，當 $T=10$ 和 $D=50$ 時，就需要耗費大約 4 個小時才能求得最佳解。若能限定 $k_t^{(1)}$ 和 $k_t^{(2)}$ 的上界，即可縮小態規劃的網路規模，以縮短計算時間。因此，我們將提出一個啟發式演算法，來求解二階段生產系統有交期限制的多次投料問題。

4.3.3 啟發式演算法(Huristic Method)

啟發式演算法的基本概念是簡化動態規劃的網路規模，是將二階段投料決策 $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 所有可能的產出狀態，簡化成只有一個產出狀態(見圖 4.10)。簡化的作法是利用期望值的概念，分別計算二階段投料量的期望產出個數，期望產出個數

若是有小數點時，小數點則採取無條件捨去。我們將原問題的成本遞迴式(4-1)，利用簡化後動態規劃的網路規模，改寫二階段多次投料問題的期望總生產成本，如公式(4-5)所示。簡化後的成本遞迴式(4-5)比原來的成本遞迴式(4-1)較簡單。

$$C_t(N_t(s_t)) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k_t^{(1)} + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k_t^{(2)} + h(t-1)E[Y_{k_t^{(2)}}] \\ + C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - E[Y_{k_t^{(2)}}], B_t - k_t^{(2)} + E[Y_{k_t^{(1)}}])) \quad (4-5)$$

由公式(4-5)得知，我們將原本的二階段多次投料問題，建構成一個更簡化的動態規劃問題，這樣的作法可大幅地縮減動態規劃的網路規模，如圖 4.10 所示。

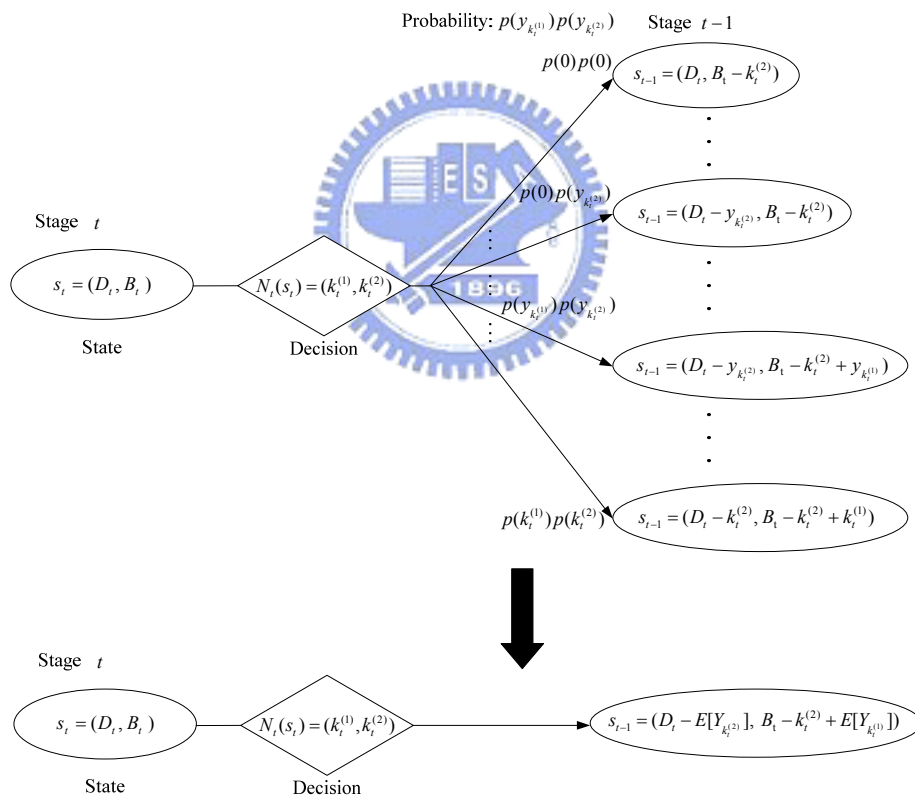


圖 4.10 OPS 演算法和啟發式演算法的比較

接著我們分析啟發式演算法的複雜度，它的複雜度是 $O(T^3D^4)$ ，分為以下三點作說明：

(1) 生產系統狀態 $s_t = (D_t, B_t)$ 的總數是由三個變數： t 、 D_t 及 B_t 所限制，而 t 、 D_t 及 B_t 的上界分別是 T 、 D 及 TD 。在最差的情況下，生產系統狀態的總數是 $T \cdot D \cdot TD = (T^2D^2)$ 。

(2) 在每一個狀態 $s_t = (D_t, B_t)$ 下，因為第一階段投料量的最大範圍是 $k_t^{(1)} \leq (t-1) \cdot D_t \leq TD$ ，第二階段投料量的最大範圍是 $k_t^{(2)} \leq \min\{D_t, B_t\} \leq D$ ，所以我們最多可採取投料決策 $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 的個數是 $TD \cdot D = (TD^2)$ 。

(3) 每一個投料決策 $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ 所有可能產出的狀態個數，只會產生一個結果。

綜合以上三點，在最差的情況下，啟發式演算法的複雜度是 $O(T^3D^4 = T^2D^2 \cdot TD^2 \cdot 1)$ 。



4.3.4 數值範例

為了分析啟發式演算法和 OPS 演算法的績效，進一步瞭解 IG 分配的參數對最佳投料量的影響及最佳投料量的特性，我們做三個數值範例：(1)範例 1 是比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效；(2)範例 2 是觀察 IG 分配的參數 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 對最佳投料量的影響；(3)範例 3 是觀察最佳投料量是否會隨著需求量的增加而嚴格遞增。我們是用 C++來撰寫程式，所使用的個人電腦規格是 3.0GHZ 的 CPU，504 MB 的 RAM，來執行所有的例子。

範例 1：比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效

為了比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效，我們執行 288 個例子，每個例子是由 7 個變動的參數 $(T, D, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, m)$ 所組合，其中 $T \in \{3, 5, 7\}$ 、 $D \in \{10, 20, 50\}$ 、 $\beta^{(1)} \in \{1, 2\}$ 、 $\beta^{(2)} \in \{1, 2\}$ 、 $\theta^{(1)} \in \{0.6, 0.8\}$ 、 $\theta^{(2)} \in \{0.6, 0.8\}$ 及 $m \in \{100, 200\}$ ，其他 3 個固定的參數值設定為 $\alpha^{(1)} = 50$ 、 $\alpha^{(2)} = 50$ 及 $h = 1$ 。

我們定義成本誤差比率值和計算時間比率值，利用這二個指標值來評估演算法的績效。這二個指標定義如下：(1)成本誤差比率值：以 $R_c = \frac{C_h - C_o}{C_o}$ 表示；(2)計算時間比率值：以 $R_t = \frac{T_h}{T_o}$ 表示。其中， C_h 是利用啟發式演算法所計算出來的期望總生產成本， T_h 是啟發式演算法的計算時間； C_o 是利用 OPS 演算法計算出來的期望總生產成本， T_o 是 OPS 演算法的計算時間。

我們針對二階段生產系統良率 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 的高低，產生四種情境的配對，將執行結果彙整在表 4.1 至表 4.4。表中每一組 (T, D) 共有 8 個例子，每個例子是由 3 個不同的參數 $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, m)$ 所組成。我們定義 \bar{C}_o 、 \bar{C}_h 、 \bar{T}_o 、 \bar{T}_h 、 \bar{R}_c 及 \bar{R}_t 是這 8 個例子的平均績效，也定義 R_c^{\max} 是這 8 個例子中成本誤差比率的極大值。

表 4.1 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.6, 0.6)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效

T	D	OPS algorithm		Heuristic method		Performance		
		\bar{C}_o	\bar{T}_o	\bar{C}_h	\bar{T}_h	\bar{R}_c	R_c^{\max}	\bar{R}_t
3	10	1473	0.015	1500	≈ 0	1.41%	3.13%	≈ 0
3	20	2973	0.240	3000	≈ 0	0.69%	1.54%	≈ 0
3	50	7473	15.627	7500	≈ 0	0.27%	0.61%	≈ 0
5	10	1438	0.267	1500	≈ 0	3.28%	7.30%	≈ 0
5	20	2938	9.951	3000	0.002	1.59%	3.52%	0.019%
5	50	7438	1778	7500	0.002	0.62%	1.38%	≈ 0
7	10	1404	0.798	1500	≈ 0	5.32%	11.88%	≈ 0
7	20	2904	34.064	3000	≈ 0	2.53%	5.63%	≈ 0
7	50	7404	5603	7500	0.006	0.98%	2.18%	≈ 0
						Avg=1.86%	Max=11.88%	Avg=0.002%

註：“ ≈ 0 ”表示幾乎接近為 0

表 4.2 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.6, 0.8)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效

T	D	OPS algorithm		Heuristic method		Performance		
		\bar{C}_o	\bar{T}_o	\bar{C}_h	\bar{T}_h	\bar{R}_c	R_c^{\max}	\bar{R}_t
3	10	1402	0.013	1464	≈ 0	3.56%	6.78%	≈ 0
3	20	2902	0.254	2964	≈ 0	1.70%	13.62%	≈ 0
3	50	7402	15.955	7464	≈ 0	0.663%	1.249%	≈ 0
5	10	1297	0.277	1424	≈ 0	8.31%	15.47%	≈ 0
5	20	2794	10.027	2924	≈ 0	3.84%	7.04%	≈ 0
5	50	7294	1775	7424	≈ 0	1.451%	2.636%	≈ 0
7	10	1202	0.802	1384	≈ 0	13.19%	24.79%	≈ 0
7	20	2685	34.236	2883	0.002	6.17%	11.36%	0.005%
7	50	7185	5576	7383	0.004	2.259%	4.091%	0.0001%
						Avg=4.57%	Max=24.79%	Avg=0.0006%

註：“ ≈ 0 ”表示幾乎接近為 0

表 4.3 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.8, 0.6)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效

T	D	OPS algorithm		Heuristic method		Performance		
		\bar{C}_o	\bar{T}_o	\bar{C}_h	\bar{T}_h	\bar{R}_c	R_c^{\max}	\bar{R}_t
3	10	1408	0.015	1440	≈ 0	1.82%	3.48%	≈ 0
3	20	2908	0.238	2940	≈ 0	0.87%	1.65%	≈ 0
3	50	7408	15.711	7440	≈ 0	0.339%	0.643%	≈ 0
5	10	1295	0.273	1361	0.002	4.43%	7.79%	0.667%
5	20	2792	9.972	2860	≈ 0	2.07%	3.58%	≈ 0
5	50	7292	1746	7360	0.010	0.785%	1.337%	0.001%
7	10	1193	0.800	1326	0.008	9.83%	18.59%	0.938%
7	20	2675	34.109	2780	0.015	3.39%	5.99%	0.045%
7	50	7175	5586	7280	0.036	1.242%	2.141%	0.001%
						Avg=2.75%	Max=18.59%	Avg=0.18%

註：“ ≈ 0 ”表示幾乎接近為 0

表 4.4 當 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = (0.8, 0.8)$ 時，比較啟發式演算法和 OPS 演算法的績效

T	D	OPS algorithm		Heuristic method		Performance		
		\bar{C}_o	\bar{T}_o	\bar{C}_h	\bar{T}_h	\bar{R}_c	R_c^{\max}	\bar{R}_t
3	10	1183	0.015	1274	≈ 0	7.59%	8.24%	≈ 0
3	20	2674	0.252	2773	≈ 0	3.66%	4.03%	≈ 0
3	50	7174	15.974	7273	≈ 0	1.371%	1.477%	≈ 0
5	10	907	0.281	1072	0.004	17.58%	22.21%	1.335%
5	20	2311	10.103	2513	0.004	8.32%	10.57%	0.037%
5	50	6809	1794	7013	0.012	2.861%	3.489%	0.001%
7	10	756	0.820	932	0.013	22.66%	30.25%	1.603%
7	20	1959	34.639	2268	0.019	14.97%	19.94%	0.056%
7	50	6435	5613	6765	0.047	4.877%	6.094%	0.001%
						Avg=9.32%	Max=30.25%	Avg=0.34%

註：“ ≈ 0 ”表示幾乎接近為 0

由表 4.1 至表 4.4 得知， \bar{R}_c 的範圍是從 0.27% 到 22.66%， R_c^{\max} 的範圍是從 0.61% 到 30.25%，平均成本誤差比率值(\bar{R}_c)的範圍很大，在所有的例子中，有些解的品質是令人不滿意的，因此我們必須確認啟發式演算法的適用情境，也就是說，啟發式演算法應該使用在何種情境下較適當。在這 4 個表中，每個表共有 9 組(T, D)的情境，共可得到 36 組(T, D)的情境。在 36 組(T, D)的情境中，只有 4 組(T, D)的 \bar{R}_c 偏高(超過 10%)，這 4 組是出現在 T 大和 D 小的情境。相對來說，在 T 小(即 $T = 3$)的情境下， \bar{R}_c 的範圍是從 0.27% 到 7.59%；在 D 大(即 $D = 50$)的情境下， \bar{R}_c 的範圍是從 0.27% 到 4.88%。從上述這些現象我們大概觀察出來，啟發式演算法可能較適合用於 D 大和 T 小的情境。

為了更進一步確認我們所觀察的現象是否正確，我們做了更多(T, D)情境的實驗，相關的參數值設定如下： $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 50$ 、 $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = 2$ 、 $\theta^{(1)} = \theta^{(2)} = 0.8$ 、 $m = 200$ 及 $h = 1$ 。我們測試了 54 個例子，其中包括 T 有 6 個選項， D 有 9 個選項，將 R_c 和 T_o 的實驗結果分別呈現在表 4.5 及表 4.6。

假設我們以 OPS 演算法的計算時間，設定 5 分鐘作為門檻值，也就是說，求解二階段的多次投料問題，若是求解時間是在 5 分鐘內，可直接採用 OPS 演算法。因此，我們將表 4.6 以粗線分隔成二個區域，一個是左上角的區域，該區域的求解時間在 5 分鐘內；另一個是右下角的區域，該區域的求解時間是超過 5 分鐘以上。對照表 4.6 所標示的粗線位置，我們也將表 4.5 以粗線分隔成二個區域。

由表 4.5 右下角的區域得知， R_c 的範圍是從 0.65% 到 7.11%，令人驚訝的是利用啟發式演算法求解這些(T, D)的情境，所需的計算時間不超過 0.1 秒。特別是在 $D = 100$ 和 $T = 7$ 的情況下，若是利用 OPS 演算法，則需要的計算時間大約是 3.88 天，然而若是利用啟發式演算法，則需要的計算時間不超過 0.1 秒，且 $R_c = 2.47\%$ 。

綜合以上的論述，我們建議 OPS 演算法和啟發式演算法的使用時機，在左上角的區域建議使用 OPS 演算法，在右下角的區域建議使用啟發式演算法。舉例來說，當 $D=10$ 時，若採用啟發式演算法， R_c 的範圍是從 7.57% 到 27.34%，解的品質誤差較大。然而若採用 OPS 演算法，所需的計算時間不超過 0.84 秒，即可求得最佳解。此外，當 $D=100$ 時，採用啟發式演算法，它所需的計算時間不超過 0.1 秒， R_c 的範圍從 0.65% 到 2.47%，解的品質很好。

表 4.5 在不同的 (T, D) 情境下 R_c 的結果
 $(\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 50, \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = 2, \theta^{(1)} = \theta^{(2)} = 0.8, m = 200, \text{ and } h = 1)$

Demand	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$	$T = 7$
10	13.23%	7.57%	15.69%	20.30%	24.42%	27.34%
20	2.40%	3.61%	7.42%	9.34%	13.66%	17.42%
30	1.19%	2.30%	4.59%	5.63%	8.09%	10.32%
40	0.88%	1.68%	3.32%	4.01%	5.67%	7.11%
50	0.70%	1.33%	2.60%	3.12%	4.36%	5.41%
60	0.58%	1.10%	2.14%	2.55%	3.54%	4.37%
70	0.50%	0.94%	1.82%	2.15%	2.98%	3.66%
80	0.44%	0.82%	1.58%	1.87%	2.58%	3.16%
100	0.35%	0.65%	1.25%	1.47%	2.03%	2.47%

表 4.6 在不同的 (T, D) 情境下，OPS 演算法所需的計算時間
 $(\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 50, \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = 2, \theta^{(1)} = \theta^{(2)} = 0.8, m = 200, \text{ and } h = 1)$

Demand	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$	$T = 7$
10	0 sec	0.02 sec	0.14 sec	0.28 sec	0.52 sec	0.84 sec
20	0 sec	0.25 sec	4.03 sec	10.09 sec	19.34 sec	31.19 sec
30	0.01 sec	1.55 sec	37.08sec	1.58 min	3.06 min	4.97 min
40	0 sec	5.66 sec	3.12 min	9.19 min	17.19 min	25.53 min
50	0.01 sec	15.95 sec	11.20 min	29.14 min	56.78 min	1.54 hr
60	0.03 sec	37.77 sec	32.13 min	1.40 hr	2.73 hr	4.44 hr
70	0.05 sec	1.32 min	1.32 hr	3.44 hr	6.81 hr	10.96 hr
80	0.06 sec	2.49 min	2.86 hr	7.51 hr	14.69 hr	1.17 day
100	0.11 sec	7.37 min	10.66 hr	1.17 day	2.28 day	3.88 day

範例 2：IG 分配的參數對最佳投料量的影響

為了觀察 IG 分配的良好率參數 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 對最佳投料量 $N_t^*(s_t) = (k_t^{(1)*}, k_t^{(2)*})$ 的影響，我們也執行 288 個例子，這 288 個例子的參數值和範例 1 設定值相同。實驗結果我們發現，良好率 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 愈高最佳投料量愈大，只有少數是例外。

為了佐證良好率 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 愈高最佳投料量愈大，只有少數是例外這個發現，我們列舉一個範例，呈現各期的最佳投料量，這個例子各參數值的設定是 $T=5$ ， $D=10$ ， $\alpha^{(1)}=50$ ， $\alpha^{(2)}=50$ ， $\beta^{(1)}=2$ ， $\beta^{(2)}=2$ ， $h=1$ 和 $m=100$ 。我們針對良好率的高低分成二個生產情境，低良好率是 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})=(0.6, 0.6)$ ；高良好率是 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})=(0.8, 0.8)$ 。將第 1 期到第 5 期的最佳投料量分別整理在表 4.7 至表 4.11。由於每一期的狀態個數太多，我們只擇列 $B_t \leq D_t$ 的狀態，以 $s_1 = (10, B_1)$ 為例， B_1 可能的個數是 40 個，亦即 $0 \leq B_1 \leq 40 = (T-t) \cdot D = (5-1) \cdot 10 = 40$ ，我們只擇列 $B_1 = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，這 11 個狀態，其餘的狀態則省略。



表 4.7 $t=1$ 的最佳投料量

s_1	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)		s_1	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)	
	$k_1^{(1)*}$	$k_1^{(2)*}$	$k_1^{(1)*}$	$k_1^{(2)*}$		$k_1^{(1)*}$	$k_1^{(2)*}$	$k_1^{(1)*}$	$k_1^{(2)*}$
(10,0)	0	0	0	0	(7,3)	0	3	0	3
(10,1)	0	1	0	1	(7,4)	0	4	0	4
(10,2)	0	2	0	2	(7,5)	0	5	0	5
(10,3)	0	3	0	3	(7,6)	0	6	0	6
(10,4)	0	4	0	4	(7,7)	0	7	0	7
(10,5)	0	5	0	5	(6,0)	0	0	0	0
(10,6)	0	6	0	6	(6,1)	0	1	0	1
(10,7)	0	7	0	7	(6,2)	0	2	0	2
(10,8)	0	7	0	8	(6,3)	0	3	0	3
(10,9)	0	7	0	9	(6,4)	0	4	0	4
(10,10)	0	7	0	10	(6,5)	0	5	0	5
(9,0)	0	0	0	0	(6,6)	0	6	0	6
(9,1)	0	1	0	1	(5,0)	0	0	0	0
(9,2)	0	2	0	2	(5,1)	0	1	0	1
(9,3)	0	3	0	3	(5,2)	0	2	0	2
(9,4)	0	4	0	4	(5,3)	0	3	0	3
(9,5)	0	5	0	5	(5,4)	0	4	0	4
(9,6)	0	6	0	6	(5,5)	0	5	0	5
(9,7)	0	7	0	7	(4,0)	0	0	0	0
(9,8)	0	7	0	8	(4,1)	0	1	0	1
(9,9)	0	7	0	9	(4,2)	0	2	0	2
(8,0)	0	0	0	0	(4,3)	0	3	0	3
(8,1)	0	1	0	1	(4,4)	0	4	0	4
(8,2)	0	2	0	2	(3,0)	0	0	0	0
(8,3)	0	3	0	3	(3,1)	0	1	0	1
(8,4)	0	4	0	4	(3,2)	0	2	0	2
(8,5)	0	5	0	5	(3,3)	0	3	0	3
(8,6)	0	6	0	6	(2,0)	0	0	0	0
(8,7)	0	7	0	7	(2,1)	0	1	0	1
(8,8)	0	7	0	8	(2,2)	0	2	0	2
(7,0)	0	0	0	0	(1,0)	0	0	0	0
(7,1)	0	1	0	1	(1,1)	0	1	0	1
(7,2)	0	2	0	2					

表 4.8 $t=2$ 的最佳投料量

s_2	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)		s_2	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)	
	$k_2^{(1)*}$	$k_2^{(2)*}$	$k_2^{(1)*}$	$k_2^{(2)*}$		$k_2^{(1)*}$	$k_2^{(2)*}$	$k_2^{(1)*}$	$k_2^{(2)*}$
(10,0)	0	0	8	0	(7,3)	0	0	6	3
(10,1)	0	0	7	0	(7,4)	0	2	6	4
(10,2)	0	0	8	2	(7,5)	0	2	5	4
(10,3)	0	0	7	3	(7,6)	0	3	0	3
(10,4)	0	2	7	4	(7,7)	0	3	0	3
(10,5)	0	2	6	4	(6,0)	0	0	6	0
(10,6)	0	3	5	4	(6,1)	0	0	5	0
(10,7)	0	3	5	5	(6,2)	0	0	5	2
(10,8)	0	4	0	4	(6,3)	0	0	5	3
(10,9)	0	4	0	4	(6,4)	0	2	5	4
(10,10)	0	5	0	5	(6,5)	0	2	3	3
(9,0)	0	0	8	0	(6,6)	0	3	0	3
(9,1)	0	0	7	0	(5,0)	0	0	5	0
(9,2)	0	0	7	2	(5,1)	0	0	4	0
(9,3)	0	0	6	3	(5,2)	0	0	5	2
(9,4)	0	2	6	4	(5,3)	0	0	5	3
(9,5)	0	2	6	4	(5,4)	0	2	4	3
(9,6)	0	3	5	4	(5,5)	0	2	0	2
(9,7)	0	3	5	5	(4,0)	0	0	4	0
(9,8)	0	4	0	4	(4,1)	0	0	3	0
(9,9)	0	4	0	4	(4,2)	0	0	4	2
(8,0)	0	0	8	0	(4,3)	0	0	0	0
(8,1)	0	0	7	0	(4,4)	0	2	0	2
(8,2)	0	0	6	2	(3,0)	0	0	3	0
(8,3)	0	0	6	3	(3,1)	0	0	2	0
(8,4)	0	2	6	4	(3,2)	0	0	0	0
(8,5)	0	2	5	4	(3,3)	0	0	0	0
(8,6)	0	3	5	4	(2,0)	0	0	2	0
(8,7)	0	3	0	3	(2,1)	0	0	0	0
(8,8)	0	4	0	4	(2,2)	0	0	0	0
(7,0)	0	0	7	0	(1,0)	0	0	0	0
(7,1)	0	0	6	0	(1,1)	0	0	0	0
(7,2)	0	0	6	2					

表 4.9 $t=3$ 的最佳投料量

s_3	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)		s_3	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)	
	$k_3^{(1)*}$	$k_3^{(2)*}$	$k_3^{(1)*}$	$k_3^{(2)*}$		$k_3^{(1)*}$	$k_3^{(2)*}$	$k_3^{(1)*}$	$k_3^{(2)*}$
(10,0)	0	0	10	0	(7,3)	0	0	7	3
(10,1)	0	0	9	0	(7,4)	0	0	7	3
(10,2)	0	0	10	2	(7,5)	0	0	6	3
(10,3)	0	0	10	3	(7,6)	0	2	6	4
(10,4)	0	0	9	3	(7,7)	0	2	0	4
(10,5)	0	0	8	3	(6,0)	0	0	6	0
(10,6)	0	2	8	4	(6,1)	0	0	6	0
(10,7)	0	2	8	4	(6,2)	0	0	6	2
(10,8)	0	2	7	4	(6,3)	0	0	6	3
(10,9)	0	3	7	4	(6,4)	0	0	6	3
(10,10)	0	3	0	4	(6,5)	0	0	6	3
(9,0)	0	0	9	0	(6,6)	0	2	0	3
(9,1)	0	0	9	0	(5,0)	0	0	5	0
(9,2)	0	0	9	2	(5,1)	0	0	5	0
(9,3)	0	0	9	3	(5,2)	0	0	5	2
(9,4)	0	0	9	3	(5,3)	0	0	5	3
(9,5)	0	0	8	3	(5,4)	0	0	5	3
(9,6)	0	2	8	4	(5,5)	0	0	0	3
(9,7)	0	2	7	4	(4,0)	0	0	4	0
(9,8)	0	2	6	4	(4,1)	0	0	4	0
(9,9)	0	3	5	4	(4,2)	0	0	4	0
(8,0)	0	0	8	0	(4,3)	0	0	0	3
(8,1)	0	0	8	0	(4,4)	0	0	0	4
(8,2)	0	0	8	2	(3,0)	0	0	3	0
(8,3)	0	0	8	3	(3,1)	0	0	3	0
(8,4)	0	0	8	3	(3,2)	0	0	0	2
(8,5)	0	0	7	3	(3,3)	0	0	0	3
(8,6)	0	2	6	4	(2,0)	0	0	2	0
(8,7)	0	2	6	4	(2,1)	0	0	2	0
(8,8)	0	2	6	4	(2,2)	0	0	0	0
(7,0)	0	0	7	0	(1,0)	0	0	0	0
(7,1)	0	0	7	0	(1,1)	0	0	0	0
(7,2)	0	0	7	2					

表 4.10 $t=4$ 的最佳投料量

s_4	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)	
	$k_4^{(1)*}$	$k_4^{(2)*}$	$k_4^{(1)*}$	$k_4^{(2)*}$
(10,0)	0	0	10	0
(10,1)	0	0	10	0
(10,2)	0	0	10	2
(10,3)	0	0	10	3
(10,4)	0	0	10	3
(10,5)	0	0	9	3
(10,6)	0	0	9	3
(10,7)	0	0	9	4
(10,8)	0	2	8	4
(10,9)	0	2	8	4
(10,10)	0	2	7	4

表 4.11 $t=5$ 的最佳投料量

s_5	低良率 (0.6,0.6)		高良率 (0.8,0.8)	
	$k_5^{(1)*}$	$k_5^{(2)*}$	$k_5^{(1)*}$	$k_5^{(2)*}$
(10,0)	0	0	10	0

我們分析良率 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 愈高，最佳投料量 $N_i^*(s_i) = (k_i^{(1)*}, k_i^{(2)*})$ 愈大的原因，可能是 IG 分配本身的特性所導致。從 IG 分配期望產出的良品個數來看，投 k 個到 IG 分配的生產製程，它的期望產出的良品個數是 $E[Y_k] = \frac{\theta \cdot (1 - \theta^k)}{(1 - \theta)} = \theta(1 + \theta + \dots + \theta^{k-1})$ 。從圖 4.11 看出來， $E[Y_k]$ 剛開始隨著投料量 k 增加而遞增，當投料量 k 增大到某一個值時， $E[Y_k]$ 就會逐漸收斂，最後會收斂到 $\frac{\theta}{(1 - \theta)}$ 才停止。舉例來說，在低良率 $(\theta = 0.75)$ 的情況下， $E[Y_k]$ 一開始隨著投料量 k 增加而遞增，當投料量 k 增加到10或超過10時， $E[Y_k]$ 到3就已經收斂，這表示在低良率的情況下，最佳投料量最多不會超過10。相對來說，在高良率 $(\theta = 0.95)$ 的情況下，當投料量 k 增加到50時， $E[Y_k]$ 還隨著投料量 k 增加持續遞增，這表示在高良率的情況下，最佳投料量將可能會到50或是超過50。從圖 4.11 良率高低的比較，可以讓人很直覺的瞭解，為何 IG 分配的良率 $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 愈高，最佳投料量 $N_i^*(s_i) = (k_i^{(1)*}, k_i^{(2)*})$ 會愈大。

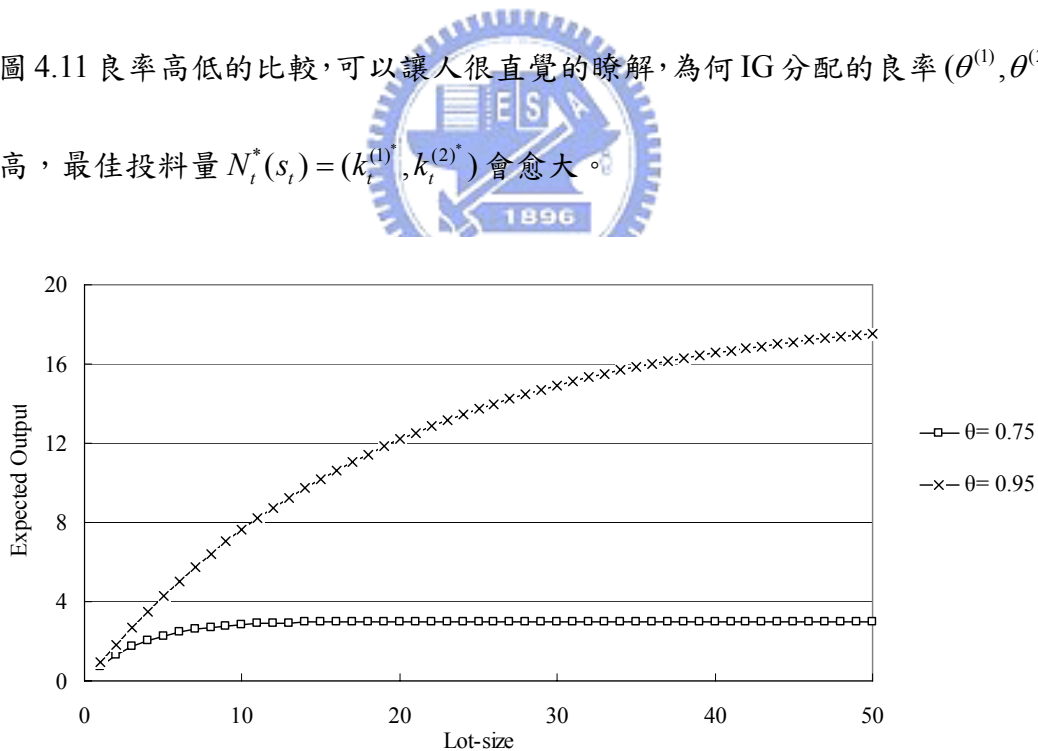


圖 4.11 IG 分配投料量和期望產出良品個數的關係

我們觀察出來，良率愈高最佳投料量愈大，只有少數是例外這個現象，對實務上的投料決策相當有幫助，換句話說，在真實的生產情境下，某一個製程的良

率會隨著時間而逐漸提高，當良率提高到某一個值時，為了有效地求得最佳投料量，我們利用過去求出低良率的最佳投料量作為下界，由這個投料下界開始往上搜尋來求得最佳投料量，即可大幅縮減計算時間。

範例 3：最佳投料量具有非單調性

為了觀察最佳投料量是否會隨著需求量的增加而嚴格遞增，我們設定各參數值為 $T=6$ 、 $\alpha^{(1)}=100$ 、 $\alpha^{(2)}=50$ 、 $\beta^{(1)}=2$ 、 $\beta^{(2)}=1$ 、 $\theta^{(1)}=0.85$ 、 $\theta^{(2)}=0.95$ 、 $h=1$ 及 $m=200$ 。期初狀態為 $s_T=(D_T, 0)$ ，需求量從 1 到 60，執行 60 個例子，求得各個需求量的最佳投料量 $N_T^*(s_T)$ ，將結果繪製在圖 4.12。研究發現，最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增。為何最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增的原因，我們在 3.3.3 節中已作說明，請參見 3.3.3 節，範例 2 中圖 3.9 的說明。

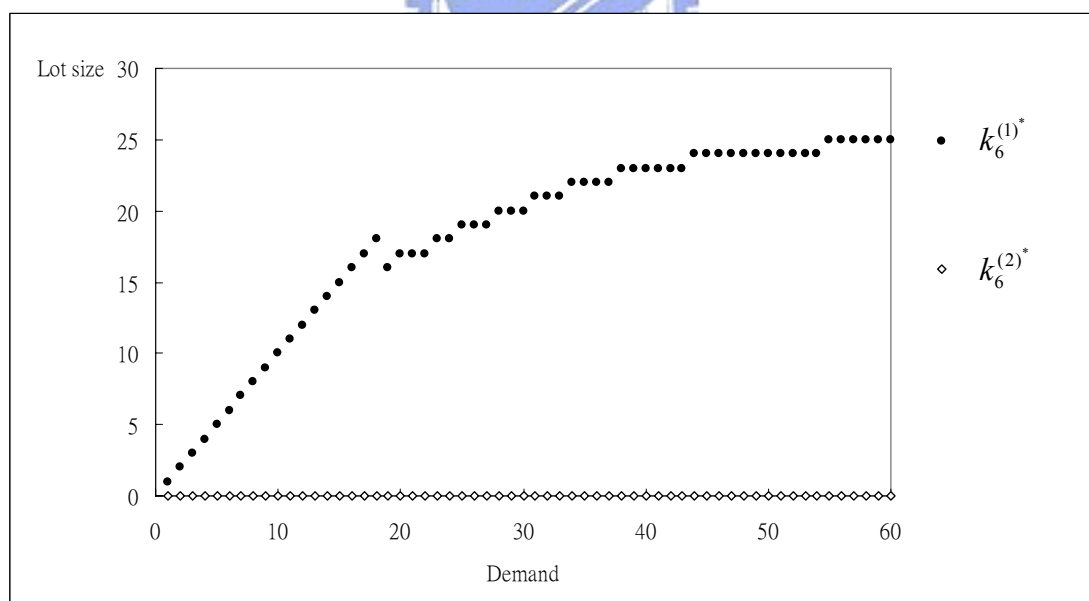


圖 4.12 最佳投料量的特性

4.4 本章結論

本章探討二階段生產系統有交期限制的多次投料問題，各階段產出的良品個數服從 IG 分配。本研究的特点是，在每個投料時點可同時決定各階段的投料量，與過去研究僅決定單一階段的投料量不同。

我們將二階段生產系統有交期限制的多次投料問題，建構成動態規劃問題。利用動態規劃的手法求解時，因為動態規劃的網路規模是由二階段投料量的上界所決定，若能限定二階段投料量的上界，即可縮小動態規劃的網路規模，以縮短計算時間。因此，本研究證明二階段的最佳投料量有上界：(1)第二階段的最佳投料量不會超過需求量；(2)證明第一階段的最佳投料量，若滿足 $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_1+1} \cdot m$ ，則第一階段的最佳投料量不會超過需求量，否則第一階段的最佳投料量上界為 $D_1 \cdot (t-1)$ ，利用最佳投料量的特性，可以縮小解的空間。

針對二階段生產系統有交期限制的多次投料問題，我們提出二個求解方法，一個稱為 OPS 演算法，該方法可以求得最佳解；另一個稱為啟發式演算法，該方法可以有效地求得滿意解。我們比較這二個求解方法的績效，當需求量較大時，建議採用啟發式演算法；當需求量較小時，建議採用 OPS 演算法。

由數值範例我們觀察最佳投料量的特性，有二點重要的發現：(1)IG 分配的良好率愈高，最佳投料量愈大，只有少數是例外；(2)最佳投料量不會隨著需求量增加而嚴格遞增。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本論文探討有交期限制的多次投料問題，產出的良品個數服從 IG 分配，提出二個新的研究主題：(1)主題一是探討單階段生產系統，生產週期時間具不確定性的多次投料問題；(2)主題二是探討二階段生產系統的多次投料問題，在每個投料時點可同時決定各階段的投料量。

為了求解單階段生產系統，生產週期時間具不確定性的多次投料問題，我們提出一個動態規劃演算法，可求得最佳解；為了求解二階段生產系統的多次投料問題，我們提出二個求解方法，(1)OPS 演算法及 (2)啟發式演算法，OPS 演算法可求得最佳解，但當需求量較大時，相當費時。此時，若用啟發式演算法可快速的求得滿意解，且與最佳解相當接近。因此，當需求量較大時，建議採用啟發式演算法；當需求量較小時，建議採用 OPS 演算法。

本論文的貢獻，除了針對多次投料問題提出二個新的研究問題外，利用我們所提出的成本遞迴式，在實務上的應用如下：

- (1)可計算出原本一期產出機率與提高一期產出機率後所節省的成本差異，再將所節省的成本提撥某個比率與供應商分享，作為績效獎金，以激勵供應商提高一期產出的機率。
- (2)可計算出不同的顧客交貨日期成本之間的差異，提供營業人員在接單時，面對顧客交期的長短，擬訂出合理的報價，以提供顧客參考。
- (3)接單時，面對顧客不同的訂單數量，亦可求得一個最適接單量，以獲得最佳的利潤。

5.2 未來研究建議

未來可能的研究方向如下：

- 1.在成本函數可加入在製品的儲存成本及成品的殘值，針對該生產情境重新建構動態規劃問題，提出求解方法。
- 2.針對生產週期時間具有不確定性，本論文假設產出情況只有二種：不是一期產出就是二期產出，未來可擴充為多種產出情況，使模式更具一般化。
- 3.在多階段生產系統方面，未來也可以考量生產週期時間具不確定性，針對該生產情境重新建構動態規劃問題，提出求解方法。



參考文獻

英文部份：

- [1] Anily, S., "Single machine lot sizing with uniform yields and rigid demands: robustness of the optimal solution," *IIE Transactions*, 27, 625-633, 1995.
- [2] Anily, S., A. Beja, and A. Mendel, "Optimal lot sizes with geometric production yield and rigid demand," *Operations Research*, 5(3), 424-432, 2002.
- [3] Barad, M. and D. Braha., "Control limits for multi-stage manufacturing processes with binomial yield (single and multiple production runs)," *Journal of the Operational Research Society*, 47, 98-112, 1996.
- [4] Beja, A., "Optimal Reject Allowance with Constant Marginal Production Efficiency," *Naval Research Logistics Quarterly*, 24, 21-33, 1977.
- [5] Ben-Zvi, T. and A. Grosfeld-Nir, "Serial production systems with random yield and rigid demand: a heuristic," *Operations Research Letters*, 35, 235-244, 2007.
- [6] Bowman, E.H., "Using statistical tools to set a reject allowance," *National Association of Cost Accountants. NACA Bulletin*, 36(10), 1334-1342, 1955.
- [7] Braha, D., "Manufacturing control of a serial system with binomial yields, multiple production runs, and non-rigid demand: a decomposition approach." *IIE Transactions*, 31, 1-9, 1999.
- [8] Gerchak, Y. and A. Grosfeld-Nir., "Lot-sizing for substitutable, production-to-order parts with random functionality yields," *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 11(4), 371-377, 1999.
- [9] Gerchak, Y. and A. Grosfeld-Nir., "Multiple lotsizing and value of probabilistic information in production to order of an uncertain size," *International Journal of Production Economics*, 56-57, 191-197, 1998.
- [10] Grosfeld-Nir, A. and B. Ronen., "A single bottleneck system with binomial yield

- and rigid demand,” *Management Science*, 39(5), 650-653, 1993.
- [11] Grosfeld-Nir, A. and L.W. Robinson., “Production to order on a two machine line with random yields and rigid demand,” *European Journal of Operational Research*, 80, 264-276, 1995.
- [12] Grosfeld-Nir, A. and Y. Gerchak., “Multiple lotsizing with random common-cause yield and rigid demand,” *Operations Research Letters*, 9, 383-388, 1990.
- [13] Grosfeld-Nir, A. and Y. Gerchak., “Multistage production to order with rework capability,” *Management Science*, 48(5), 652–664, 2002.
- [14] Grosfeld-Nir, A. and Y. Gerchak., “Production to order with random yields: single-stage multiple lot-sizing,” *IIE Transactions*, 28, 669-676, 1996.
- [15] Grosfeld-Nir, A., “A two-bottleneck system with binomial yields and rigid demand,” *European Journal of Operational Research*, 165, 231-250, 2005.
- [16] Grosfeld-Nir, A., “Multiple lotsizing in production to order with random yields: review of recent advances,” *Annals of Operations Research*, 126, 43-69, 2004.
- [17] Grosfeld-Nir, A., “Single bottleneck systems with proportional expected yields and rigid demand,” *European Journal of Operational Research*, 80, 297-307, 1995.
- [18] Grosfeld-Nir, A., S. Anily and T. Ben-Zvi., “Lot-sizing two-echelon assembly systems with random yields and rigid demand,” *European Journal of Operational Research*, 173, 600-616, 2006.
- [19] Grosfeld-Nir, A., Y. Gerchak, and Q.M. He., “Manufacturing to order with random yield and costly inspection,” *Operations Research*, 48(5), 761–767, 2000.
- [20] Guu S.M. and A.X. Zhang., “The finite multiple lot sizing problem with interrupted geometric yield and holding costs,” *European Journal of Operational*

Research, 145, 635-644, 2003.

- [21] Guu, S.M. and F.R. Liou., “An algorithm for the multiple lot sizing problem with rigid demand and interrupted geometric yield,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 234, 567-579, 1999.
- [22] Guu, S.M., “Properties of the multiple lot-sizing problem with rigid demand, general cost structures, and interrupted geometric yield,” *Operations Research Letters*, 25, 59-65, 1999.
- [23] Lee, H.L. and C.A. Yano, “Production control in multistage systems with variable yield losses,” *Operations Research*, 36(2), 269-278, 1988.
- [24] Llewellyn, R.W., “Order sizes of job lot manufacturing,” *The Journal of Industrial Engineering*, 10, 176-180, 1959.
- [25] Pentico, D.W., “An evaluation and proposed modification of the Sepheri-Silver-New heuristic for multiple lot sizing under variable yield,” *IIE Transactions*, 20(4), 360-363, 1988.
- [26] Pentico, D.W., “Multistage production systems with random yield: heuristics and optimality,” *International Journal of Production Research*, 32(10), 2455-2462, 1994.
- [27] Sepheri, M., E.A. Silver, and C. New., “A heuristic for multiple lot sizing for an order under variable yield,” *IIE Transactions*, 18, 63-69, 1986.
- [28] Wang, Y. and Y. Gerchak., “Input control in a batch production system with lead times, due dates and random yields,” *European Journal of Operational Research*, 126, 371-385, 2000.
- [29] Wein, A.S., “Random yield, rework and scrap in multistage batch manufacturing environments,” *Operations Research*, 40(3), 551-563, 1992.
- [30] Yano, C.A. and H.L. Lee., “Lot sizing and random yields: a review,” *Operations Research*, 43(2), 311-334, 1995.

- [31] Yano, C.A., "Setting planned leadtimes in serial production systems with tardiness costs," *Management Science*, 33(1), 95-106, 1987.
- [32] Zhang, A.X. and S.M. Guu., "Properties of the multiple lot-sizing problem with rigid demands and general yield distributions," *Computers and Mathematics with Applications*, 33(5), 55-65, 1997.
- [33] Zhang, A.X. and S.M. Guu., "The multiple lot sizing problem with rigid demand and interrupted geometric yield," *IIE Transactions*, 30(5), 427-431, 1998.

中文部份：

- [34] 劉芳如(1997)，『中斷式幾何分配生產模式之最適下料演算法研究』，碩士論文，元智大學工業工程與管理研究所。
- [35] 謝偉志(2000)，『多批量下料問題在中斷式幾何分配且有設置次數及庫存成本下之研究』，碩士論文，元智大學工業工程與管理研究所。



附錄 A

求解生產週期時間具不確定性，單階段生產系統有交期限制的多次投料問題，該問題可建構成動態規劃問題，其演算法如下：

步驟 3.1：根據 3.2.4 節第一個邊界條件。當 $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (0, R_t(k_{t+1}))$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

FOR $t=1, 2, \dots, T$

FOR $R_t(k_{t+1})=0, 1, \dots, D$

SET $s_t = (0, R_t(k_{t+1}))$, $C_t^*(s_t) = 0$, $N_t(s_t) = 0$ /*參見公式(3-2)*/

ENDFOR

ENDFOR

步驟 3.2：根據 3.2.4 節第二個邊界條件。當 $t=0$ ，狀態為 $s_0 = (D_0, R_0(k_1))$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

FOR $d=1, 2, \dots, D$

FOR $R_0(k_1)=0, 1, \dots, D$

SET $s_0 = (d, R_0(k_1))$, $C_0^*(s_0) = md$, $N_0(s_0) = 0$ /*參見公式(3-3)*/

ENDFOR

ENDFOR

步驟 3.3：根據定理 3.3。當 $D_t = 1$ ， $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (1, R_t(k_{t+1}) = 0)$ ，計算
最佳成本與最佳投料量。

FOR $t = 1, 2, \dots, T$

IF $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / [1 - p(1-\theta)]$

THEN $N_t(s_t = (1, 0)) = 0$, and $C_t^*(s_t = (1, 0)) = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$

ELSE

$N_t(s_t = (1, 0)) = 1$, and

$C_t^*(s_t = (1, 0)) = \alpha + \beta + ph(t-1)\theta + p(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$

ENDIF

ENDFOR

步驟 3.4：根據定理 3.4。當 $D_t = 1$ ， $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (1, R_t(k_{t+1}) > 0)$ ，計算
最佳成本與最佳投料量。

FOR $t = 1, 2, \dots, T$

IF $C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) \leq [\alpha + \beta + ph(t-1)\theta + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))] / \{(1-\theta)[1 - p(1-\theta)]\}$

THEN $N_t(s_t = (1, R_t(k_{t+1}))) = 0$,

$C_t^*(s_t = (1, R_t(k_{t+1}))) = h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + (1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0))$

ELSE $N_t(s_t = (1, R_t(k_{t+1}))) = 1$,

$C_t^*(s_t = (1, R_t(k_{t+1}))) = \alpha + \beta + h(t-1)E[Y_{R_t(k_{t+1})}] + ph(t-1)\theta$

$+ p(1-\theta)^2 C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 0)) + (1-p)(1-\theta)C_{t-1}^*(s_{t-1} = (1, 1))$

ENDIF

ENDFOR

步驟 3.5：根據公式 (3-1) 和定理 3.2。當 $1 \leq t \leq T-1$ ，狀態為

$$s_t = (D_t \geq 2, R_t(k_{t+1}) \geq 0)，計算最佳成本與最佳投料量。$$

FOR $t = 1, 2, \dots, T-1$

FOR $d = 2, 3, \dots, D$

FOR $R_t(k_{t+1}) = 0, 1, \dots, (T-t) \cdot D$

/*Compute the total cost while $k_t = 0$. Name it as *temp1**/

$$temp\ 1 = \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} p(y_{R_t(k_{t+1})}) [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d - y_{R_t(k_{t+1})}, 0)) + h \cdot (t-1) \cdot y_{R_t(k_{t+1})}]$$

/*Compute the total cost while $1 \leq k_t \leq d$. Name it as *temp2**/

$$temp\ 2 = \underset{1 \leq k_t \leq d}{Min} \left\{ \alpha + \beta k_t + p \cdot \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} \sum_{y_{k_t}=0}^{k_t} p(y_{R_t(k_{t+1})}) \cdot p(y_{k_t}) \right. \\ \left. [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d - y_{R_t(k_{t+1})} - y_{k_t}, 0)) + h(t-1)(y_{R_t(k_{t+1})} + y_{k_t})] \right. \\ \left. + (1-p) \sum_{y_{R_t(k_{t+1})}=0}^{R_t(k_{t+1})} p(y_{R_t(k_{t+1})}) [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d - y_{R_t(k_{t+1})}, k_t)) + h \cdot (t-1) \cdot y_{R_t(k_{t+1})}] \right\}$$

/*參見定理 3.2*/

$$C_t^*(s_t = (d, R_t(k_{t+1}))) = \underset{0 \leq k_t \leq d}{Min} \{temp\ 1, temp\ 2\}$$

$$k_t^* = \underset{0 \leq k_t \leq d}{Arg\ Min} \{temp\ 1, temp\ 2\}$$

$$N_t(s_t = (d, R_t(k_{t+1}))) = k_t^*$$

(若最佳投料量 k_t^* 有多個解，選擇其中最小的投料量)

ENDFOR

ENDFOR

ENDFOR

步驟 3.6：根據公式(3-1)和定理 3.2。在期初(T)，狀態為 $s_T = (D \geq 2, 0)$ ，計算最佳成本與最佳投料量。

SET $t = T$, $R_t(k_{t+1}) = 0$

FOR $d = 2, 3, \dots, D$

/*Compute the total cost while $k_t = 0$. Name it as *temp3**/*

$$\text{temp 3} = C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d, 0))$$

/*Compute the total cost while $1 \leq k_t \leq d$. Name it as *temp4**/*

$$\text{temp 4} = \text{Min}_{1 \leq k_t \leq d} \left\{ \alpha + \beta k_t + p \cdot \sum_{y_{k_t}=0}^{k_t} p(y_{k_t}) [C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d - y_{k_t}, 0)) + h \cdot (t-1) \cdot y_{k_t}] \right. \\ \left. + (1-p) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (d, k_t)) \right\} \quad /*參見定理 3.2*/$$

$$C_t^*(s_t = (d, 0)) = \text{Min}_{0 \leq k_t \leq d} \{ \text{temp 3}, \text{temp 4} \}$$

$$k_t^* = \text{Arg Min}_{0 \leq k_t \leq d} \{ \text{temp 3}, \text{temp 4} \}$$

$$N_t(s_t = (d, R_t(k_{t+1}))) = k_t^*$$

(若最佳投料量 k_t^* 有多個解，選擇其中最小的投料量)

ENDFOR

附錄 B

OPS 演算法如下：

步驟 4.1：根據 4.2.4 節第一個邊界條件。當 $1 \leq t \leq T$ ，狀態為 $s_t = (0, B_t)$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

FOR $t = 1, 2, \dots, T$

FOR $B_t = 0, 1, \dots, (T-t) \cdot D$

SET $N_t^*(s_t = (0, B_t)) = (0, 0)$, $C_t^*(s_t = (0, B_t)) = 0$ /*參見公式(4-2)和(4-3)*/

ENDFOR

ENDFOR

步驟 4.2：根據 4.2.4 節第二個邊界條件。當 $t = 0$ ，狀態為 $s_0 = (D_0, B_0)$ ，設定最佳成本與最佳投料量。

FOR $D_0 = 1, 2, \dots, D$

FOR $B_0 = 0, 1, \dots, T \cdot D$

SET $C_0^*(s_0 = (D_0, B_0)) = mD_0$, $N_0^*(s_0 = (D_0, B_0)) = (0, 0)$ /*參見公式(4-4)*/

ENDFOR

ENDFOR

步驟 4.3：根據定理 4.1。當 $t=1$ ，狀態為 $s_1 = (D_1 \geq 1, B_1 \geq 0)$ ，計算最佳成本與第二階段的最佳投料量。

FOR $D_1 = 1, 2, \dots, D$

FOR $B_1 = 0, 1, \dots, (T-1) \cdot D$

FOR $k_1^{(2)} = 0, 1, \dots, \min\{D_1, B_1\}$ /*參見定理 4.1*/

$$temp(k_1^{(2)}) = \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}(k_1^{(2)})$$

$$+ \sum_{y_{k_1^{(2)}}=0}^{k_1^{(2)}} p(y_{k_1^{(2)}}) \cdot [C_0^*(s_0 = (D_1 - y_{k_1^{(2)}}, B_1 - k_1^{(2)})) + h \cdot (t-1) \cdot y_{k_1^{(2)}}]$$

ENDFOR

$$C_1^*(s_1 = (D_1, B_1)) = \underset{0 \leq k_1^{(2)} \leq \min\{D_1, B_1\}}{\text{Min}} \{temp(k_1^{(2)})\}$$

$$k_1^{(2)*} = \underset{0 \leq k_1^{(2)} \leq \min\{D_1, B_1\}}{\text{Arg Min}} \{temp(k_1^{(2)})\}$$

$$N_1^*(s_1 = (D_1, B_1)) = (0, k_1^{(2)*})$$

(若第二階段的最佳投料量有多解時，選擇其中最小的投料量)

ENDFOR

ENDFOR

步驟 4.4：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $2 \leq t \leq T-2$ ，狀態為

$s_t = (D_t \geq 1, B_t \geq 0)$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量。

FOR $t = 2, 3, \dots, T-2$

FOR $D_t = 1, 2, \dots, D$

FOR $B_t = 0, 1, \dots, (T-t) \cdot D$

If $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D_t+1} \cdot m$, then $U_{k_t^{(1)}} = D_t$

Else $U_{k_t^{(1)}} = D_t \cdot (t-1)$

*/*參見定理 4.4*/*

FOR $k_t^{(1)} = 0, 1, \dots, U_{k_t^{(1)}}$

FOR $k_t^{(2)} = 0, 1, \dots, \min\{D_t, B_t\}$

*/*參見定理 4.3*/*

$temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)}) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k_t^{(1)} + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k_t^{(2)}$

$+ \sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D_t - y_{k_t^{(2)}}, B_t - k_t^{(2)} + y_{k_t^{(1)}}))$

$+ \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot h(t-1) \cdot y_{k_t^{(2)}}$

ENDFOR

ENDFOR

$C_t^*(s_t) = \underset{\substack{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}} \\ 0 \leq k_t^{(2)} \leq \min\{D_t, B_t\}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})\}$

$N_t^*(s_t) = (k_t^{(1)*}, k_t^{(2)*}) = Arg \underset{\substack{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}} \\ 0 \leq k_t^{(2)} \leq \min\{D_t, B_t\}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})\}$

(若二階段的最佳投料量有多解時，選擇其中最小的投料量)

ENDFOR

ENDFOR

ENDFOR

步驟 4.5：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t=T-1$ ，狀態為

$s_t = (D_t \geq 1, B_t \geq 0)$ ，計算最佳成本與各階段的最佳投料量。

Set $t=T-1$ and $D_t = D$

FOR $B_t = 0, 1, \dots, D$

If $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D+1} \cdot m$, then $U_{k_t^{(1)}} = D$

Else $U_{k_t^{(1)}} = D \cdot (t-1)$ /*參見定理 4.4*/

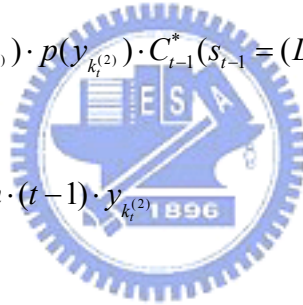
FOR $k_t^{(1)} = 0, 1, \dots, U_{k_t^{(1)}}$

FOR $k_t^{(2)} = 0, 1, \dots, \min\{D, B_t\}$ /*參見定理 4.3*/

$$temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)}) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k_t^{(1)} + \alpha^{(2)}W^{(2)} + \beta^{(2)}k_t^{(2)}$$

$$+ \sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D - y_{k_t^{(2)}}, B_t - k_t^{(2)} + y_{k_t^{(1)}}))$$

$$+ \sum_{y_{k_t^{(2)}}=0}^{k_t^{(2)}} p(y_{k_t^{(2)}}) \cdot h \cdot (t-1) \cdot y_{k_t^{(2)}}$$



ENDFOR

ENDFOR

$$C_t^*(s_t) = \underset{\substack{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}} \\ 0 \leq k_t^{(2)} \leq \min\{D, B_t\}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})\}$$

$$N_t^*(s_t) = (k_t^{(1)*}, k_t^{(2)*}) = Arg \underset{\substack{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}} \\ 0 \leq k_t^{(2)} \leq \min\{D, B_t\}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})\}$$

(若二階段的最佳投料量有多解時，選擇其中最小的投料量)

ENDFOR

步驟 4.6：根據公式(4-1)、定理 4.3 及定理 4.4。當 $t = T$ ，狀態為

$s_T = (D_T \geq 1, B_T = 0)$ ，計算最佳成本與第一階段的最佳投料量。

Set $t = T$ and $D_t = D$

If $\beta^{(1)} \geq (\theta^{(1)})^{D+1} \cdot m$, then $U_{k_t^{(1)}} = D$

Else $U_{k_t^{(1)}} = D \cdot (t - 1)$ /*參見定理 4.4*/

FOR $k_t^{(1)} = 0, 1, \dots, U_{k_t^{(1)}}$

$$temp(k_t^{(1)}) = \alpha^{(1)}W^{(1)} + \beta^{(1)}k_t^{(1)} + \sum_{y_{k_t^{(1)}}=0}^{k_t^{(1)}} p(y_{k_t^{(1)}}) \cdot C_{t-1}^*(s_{t-1} = (D, y_{k_t^{(1)}}))$$

ENDFOR

$$C_t^*(s_t) = \underset{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)})\}$$

$$k_t^{(1)*} = Arg \underset{0 \leq k_t^{(1)} \leq U_{k_t^{(1)}}}{Min} \{temp(k_t^{(1)})\}$$

$$N_t^*(s_T) = (k_t^{(1)*}, 0)$$

(若第一階段的最佳投料量有多解時，選擇其中最小的投料量)

