第三章 研究方法

本章節係針對本研究所使用之研究方法提出說明。資料包絡分析法(DEA)是由技術效率觀念而發展建立數學規劃模式的效率評估模式，其主要發展出 CCR 及 BCC 兩種基本模式，但各種研究方法均有其應用條件與限制，因此，資料包絡分析法在基本模式外亦有許多改善或延伸模式，其中模糊多目標規劃資料包絡分析法即以一組共同的加權組合方式，使得各決策單位所計算出之效率值為最佳，藉以增加其鑑別力。

3.1 資料包絡分析法(DEA)簡介

DEA 模式計算的效率衡量觀念是所謂的相對效率(relative efficiency)，係利用數學技巧將被評估單位(或決策單位 decision making unit, DMU)區分為有效率(efficiency)與無效率(inefficiency)兩種。

Farrell (1957) 在生產效率衡量(the measurement of productive efficiency)一文提出「非預設生產函數」代替「預設函數」來預估效率值觀念，建立數學規劃模式，評估美國 48 州農業之技術效率。其評估方法主要在於相對概念，即在 48 州資料中找出生產最有效率的樣本，組成最有效率平面(等產量曲面)，其他各州每單位產出投入由最有效率樣本加權平均，找出最佳情況鄰近樣本組合，取其組合係數總和之倒數為效率。Farrell 的研究建立了 DEA 非預設生產函數方式衡量效率的雛形，也奠立 DEA 理論基礎，然而其處理之問題仍僅限於單一產出的情況，其後 Farrell 與 Fieldhouse (1962)又將規模報酬固定的限制放寬至規模報酬可變動之情形，計算方式依然複雜。直到 Charnes, Cooper and Rhodes (1978)依據 Farrell (1957)之效率衡量觀念，建立了一般化之數學模式，使正式定名為 DEA。

它利用了 Farrell and Fieldhouse (1962)的包絡線(envelope)理論及 Farrell (1957)的確定性無參數法，發展出一種用來評估多投入與多產出的相對效率值。根據高強等(2003)研究指出，自 1978 年 Charnes，Cooper 與 Rhodes 三人發表了 DEA 開創性的文章後，此方面之研究如雨後春筍般展開，除了各類模式的提出，實務應用更是不計其數。孫遜(2004)在「資料包絡分析法：理論與應用」內蒐集之以 DEA 中英文應用文獻分析，在中文的 79 篇文獻分析主要應用領域為依次為醫療、銀行、運輸、效率(主要為理論之探討)、教育、農業、政府、保險、環保、證券、合作社、警察、市場等；在英文的 755 篇文獻分析主要應用領域為依次為方法論、金融保險業、醫療保健製藥、服務業、農漁牧業、產業、政府、學術與教育、礦業等。

DEA 是一種數學規劃分析模型，運用觀查而得的資料，代入模型，將獲得一個 DEA 效率邊界，並且可計算出各 DMU 與其他群體的相對效率值的優良效率衡量方法。自從 Farrell (1957)首先提出確定性無母數前緣(Deterministic Non-Parametric Frontier)的觀念，「確定性」是指所有 DMU 之技術水準相同，面對共同的生產前緣，「無母數前緣」指未預設生產函數的型態，此一多項投入下的效

率衡量，奠定了 DEA 理論之基礎，其模式有如下基本假設：

(1) 生產前緣是由最有效率的DMU 所組成，較無效率的DMU 皆位於此前緣之下方；

(2) 固定規模報酬；

(3) 生產前緣凸向原點，因此每點斜率皆小於或等於零。

在 DEA 的理論中，當某一個 DMU 的投入產出組合落在 DEA 的邊界上時，吾人可將其視為相對有效率的 DMU；反之，若 DMU 落在邊界外則稱該 DMU 相對無效率。在 DEA 方法中，包絡線正代表 DEA 理論的基礎。包絡線是從經濟學理論中生產規模與成本二者之間在平面上所對出的關係，形成一條最適生產規模的生產可能線（包絡線）。所謂生產可能曲線是假定生產技術與要素價格固定時，每一個特定的產出水準下，可找出一種最低成本的要素組合，並將不同的組合連結，此即為各種投入下，最大可能產出點的連線。而由這些最高產出或最低投入所形成的連線即稱為包絡線，也稱為效率前緣。這條包絡線是由最佳生產規模與最低成本二者所形成的，因此，其他生產規模與成本組合所產生的生產型態，都必落在此包絡線（效率前緣）曲線之內，凡落在曲線上的點，稱為有效率的生產點，而落在曲線外的點，稱為無效率的生產點。值得注意的是 DEA 方法所分析的效率為相對效率而非絕對效率。

3.2 資料包絡分析法之基本模型

DEA 方法是 Charnes, Cooper, 及 Rhodes (1978)根據 Farrell (1957)之技術效率觀念而發展出來的效率評估模式，其提出 CCR 模式評估各 DMU 的相對效率，其後 Banker, Charnes, 及 Cooper (1984)將 CCR 模式中要求規模報酬為固定之限制取消，提出 BCC 模式，此二模式被學界公認為是 DEA 領域中最具影響者(Seiford,1996)。首先，針對 Farrell 所提出之技術效率衡量提出說明，再針對 CCR 模式與 BCC 模式分別說明。另效率的衡量可從投入與產出兩個角度切入，惟 Charnes, Cooper 及 Rhodes 所發展的模式係基於投入導向，故以下僅以投入導向對 CCR 模式及 BCC 模式提出說明。

3.2.1 Farrell 的效率衡量

Farrell 可稱為相對效率衡量的先驅者，他首先提出衡量一家廠商的效率應包含兩個要件：技術效率(Technical Efficiency,TE)及配置效率(Allocative efficiency，AE)。技術效率係一家廠商從一給定的投入組合中去獲得最大產出的能力，而配置效率則是一家廠商在給定相對價格及生產效率之下，能將投入的組合做出最適分配的能力。這兩種效率的乘積即是經濟效率(Economic Efficiency)或是總效率(Overall Efficiency)。

Farrell 用簡單的圖形來表示以上的概念（見圖 3-1），其假設有一家廠商在固定規模報酬之下使用兩個投入組合 X_1 及 X_2 來生產一個產出 Y。在等產量曲線(Isoquant) SS'上的任一點代表每一單位產出所需投入的最小可能組合。因此，在固定規模報酬的假設下，將 SS'定義為生產可能曲線(Production possibility curve)亦即

為效率前緣(Efficiency frontier)，線上每點皆為技術上可達到且具有相同的技術效率，即 Q 與 Q'點的技術效率值皆等於 1。假設一家廠商運用一投入組合 P 點來生產一單位的產出，其技術無效率(Technical Inefficiency)就可以 QP 來表示，也就是說不需減少產出的情況之下，投入組合可以成一定比例的減少來到達具技術效率的 Q 點。為達到技術效率所減少的投入組合的比例，以 $\frac{QP}{OP}$ 表示。所以，P 點的技術效率就可定義為 $\frac{OQ}{OP}$ (即 $1-\frac{QP}{OP}$)，為介於 1 和 0 之間的值。

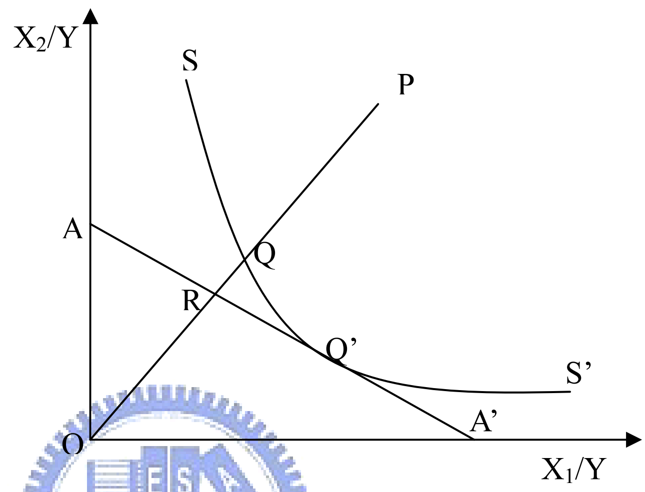

圖 3-1 技術效率與配置效率

然而，如何運用相同的成本以求取最大的產出，則引申出配置效率。圖中 Q 點雖在等產量曲線上，但並非使用最低的成本到達效率前緣。最低成本出現在等成本線(Isocost)AA'與等產量曲線 SS'的切點 Q'上。因此，Q 與 Q'點雖然都具有相同的技術效率，但 Q'點的生產成本卻僅為 Q 點的 $\frac{OR}{OQ}$，故將 Q 點的配置效率定義為 $\frac{OR}{OQ}$。

所以，P 點若要同時達到技術效率及配置效率，則其投入的使用量僅需目前的 $\frac{OR}{OP}$，此定義為 P 點的經濟效率，算式如下：

$$OE = TE \times AE = \frac{OQ}{OP} \times \frac{OR}{OQ} = \frac{OR}{OP}$$

以上三種效率的衡量都假定生產函數是已知的，但現實上這卻不是如此，有效率的同產量曲線是必須從實例資料中來評估的。Farrell 建議兩種方法可以使用，一種為無參數斷續線性凸型同產量曲線(non-parametric piece-wise linear convex isoquant)，所有觀測的點皆位於同產量曲線的左上

方。另一種為參數法，例如可採取 Cobb-Douglas 函數配合實例資料來建立同產量曲線。

Farrell 最後建立數學規劃模式，則利用第一種無參數法來評估美國 48 州農業的技術效率。Farrell 的研究可說是奠定了 DEA 無參數方法衡量效率的雛形，然而其處理的問題仍僅限於單一產出的情況。直至 Charnes, Cooper & Rhodes 始依據 Farrell 之效率衡量的觀念，建立一般化之數學規劃模式，衡量在固定規模報酬下的多項投入、多項產出之技術效率，並將其方法定名為資料包絡分析法(Data Envelopment Analysis, DEA)。這項突破奠立了無參數衡量效率的理論地位。

3.2.2 CCR 模式

假設單位 j (j=1,…,n)使用第 I (i=1,…,m)項投入量為 x_{ij} ，其第 r (r=1,…,s)項產出量為 y_{rj}，則單位 k 之效率如下：

$$Max \quad h_k \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} \tag{3-1}$$

$s.t.$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j=1,\cdots,n$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0, \; r=1,\cdots,s, \; i=1,\cdots,m$$

h_k = DMU_k之效率值

y_{rj} =第 j 個 DMU 之第 r 個產出項數量

x_{ij} =第 j 個 DMU 之第 i 個投入項數量

n =決策單位之個數

s =產出項之個數

m =投入項之個數

u_r =第 r 個產出項之權重

v_i =第 i 個投入項之權重

ε =非阿基米德常數(non-Archimedean constant)

(3-1)式之效率值是在相同產出水準下，比較投入資源之使用效率，因而稱為投入導向效率(input-based efficiency)。(3-1)式為分數線性規劃(fractional linear programming)型式，為簡易求解，可將之轉換為下列線性規劃(linear programming)模式：

$$Max \quad h_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \tag{3-2}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\cdots,n$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0,\ r=1,\cdots,s,\ i=1,\cdots,m$$

(3-2)式是使資源投入的加權和為 1 的情況下，盡量使產出加權總和為最大。此外，上述線性規劃模式之對偶問題(dual problem)可寫為下列型式：

$$Min \quad h_k = \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \tag{3-3}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \theta x_{ik} + s_i^- = 0,\ i=1,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{rk} - s_r^+ = 0;\ r=1,\cdots,s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \ge 0,\ \ j=1,\cdots,n, \quad \theta \text{ 無正負限制}$$

(3-3)式中，s_i^-, s_r^+ 為差額變數(slack variable)。本式可瞭解投入與產出尚有多少改善空間。若決策單位 k 為相對有效率，則 h_k*=1 且 $s_i^{-*} = s_r^{+*} = 0$ (“*”表示最適解)；若決策單位 k 為相對無效率，若欲達到最適境界之效率目標，需做以下的調整：

以決策單位 k 之參考對象(或學習標竿) $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_{rj}\right)$ 為修正點，由(3-3)限制式顯示，$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij} = \theta^* x_{ik} - s_i^{-*}$ ，及 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_{rj} = y_{rk} + s_r^{+*}$ 則：

$$\Delta x_{ik} = x_{ik} - \left(\theta^* x_{ik} - s_i^{-*}\right),\ i=1,\cdots,m \tag{3-4}$$

$$\Delta y_{rk} = \left(y_{rk} + s_r^{+*}\right) - y_{rk},\ r=1,\cdots,s$$

即減少投入 Δx_{ik} 及增加產出 $\Delta y_{rk} = s_r^{+*}$ 可以達到有效率。由(3-4)式可知，決策單位求得的目標值若為 1 且其差額變數為 0，則為相對有效率；若效率值小於 1，則 $\left(\theta x_{ik} - s_i^-, y_{rk} + s_r^+\right)$ 可作為決策單位改進效率之參考。

3.2.3 BCC 模式

BCC 模式假設變動規模報酬(variable returns to scale, VRS)，即部分投入增加，不會使產出項有相對一部分的增加。Banker，Charnes 與 Cooper (1984)引用 Shephard (1970)距離函數觀念，導出能夠衡量純技術效率(pure technical efficiency)、規模效率(scale efficiency)及規模報酬(returns to scale)之模式。

$$Max \quad h_k = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} - u_o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} \tag{3-5}$$

$s.t.$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - u_o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = 1, \ldots n$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0, \quad r = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, m$$

u_o 無正負限制

將分數規劃式轉換為線性規劃模式以利求解，

$$Max \quad h_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} - u_o \tag{3-6}$$

$s.t.$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_o \le 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, m$$

u_o 無正負限制

為計算上的簡便並增加解釋上的資訊，將(3-6)式轉換成對偶問題如下：

$$Min \quad h_k = \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right) \tag{3-7}$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \theta x_{ik} + s_i^- = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, \ldots, s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^- s_r^+ \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

θ 無正負限制

此式與 3-3 式之差別在於多了一個限制式 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$。因此，BCC 模式可以衡量技術效率，由 CCR 模式求得之效率為生產效率。由 BCC 之對偶模式，亦可瞭解各決策單位之目標評比對象 $\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* y_{rj}\right)$，其欲達有效率所應改善之數量則是投入減少 Δx_{ik}，產出增加 Δy_{rk}：

$$\Delta x_{ik} = x_{ik} - \left(\theta^* x_{ik} - s_i^{-*}\right), i=1,\cdots,m \tag{3-8}$$

$$\Delta y_{rk} = \left(y_{rk} + s_r^{+*}\right) - y_{rk}, r=1,\cdots,s$$

3.3 資料包絡分析法之改良模式—模糊多目標規劃資料包絡分析法

CCR 模式與 BCC 模式是 DEA 最基本的模式，後續有許多學者針對 DEA 理論提出改善研究。本研究僅針對模糊多目標規劃 DEA 提出詳細說明。

傳統的 DEA 分析模式都是將個別 DMU 單獨考量，找出一組使本身效率值最大的虛擬乘數，雖然這些乘數是在相同限制條件之下求得的，但可能造成多個具有不同虛擬乘數的 DMU 都是有效率的情況，尤其，當相對於總投入產出項數的 DMU 個數不夠大時，更容易出現這種弱判別力(Weak Discriminating Power)的情形，即傳統 DEA 模式會在這種狀況下產生過多有效率的 DMU。對此，江勁毅、曾國雄(2000)提出一個同時考量所有 DMU 的多目標規劃模式，可以找出一組共同的虛擬乘數，其基本觀念為使所有 DMU 根據此組共同乘數算出的效率值愈大愈好。作為一種判別有效率 DMU 的準則，使用相同加權組合方式的嚴格(Restrictive)程度更甚於傳統 DEA 模式，故可使判別力提高。換言之，在多目標的限制下，所有 DMU 的效率值都會小於或等於本來的 CCR 效率，其間之差異可視為個別 DMU 在需要同時兼顧其它 DMU 的情形下，作出犧牲效率值的讓步，讓步愈多表示相較於全體極大化的虛擬乘數值，由傳統 DEA 模式算出，具個別特色之乘數值對本身愈有利，故改用全體極大化的乘數值來評量效率時，其獨特的優勢無法顯現，效率值因而降低。

以兩投入單一產出為例，從幾何觀點來看，傳統上 DEA 分析模式中，落在效率前緣之 DMU 其效率值為 1（如圖 3-2 中 A、B、C、D），而沒有落在效率前緣之 DMU（如圖 3-2 中 E、F、G）的效率值則為：從原點至該 DMU 在空間中之位置的射線長度，與原點至射線和效率前緣之交點的線段長度的比率。以圖 3-2 中之 F 點為例，其效率值為 $\frac{\overline{OP}}{\overline{OF}}$。因此，一般稱之為射線效率衡量（radial efficiency measure）。然而，Chang and Guh (1995)在研究具有 loglinear 生產函數之 DMU 的

效率值時，發現以傳統的 DEA 之射線效率衡量方式並不具有單位不變性（unit invariant），也就是當投入與產出項目的資料單位尺度不同時，可能會使計算出來之效率值不同，因此提出以 DMU 至距其最近之效率前緣的垂直距離（如圖 3-2 中 E 點至 $\overline{BC}$ 的垂直距離 $\overline{EQ}$ ）來衡量其率值的方法，稱之為距離效率度量（distance efficiency measure）。

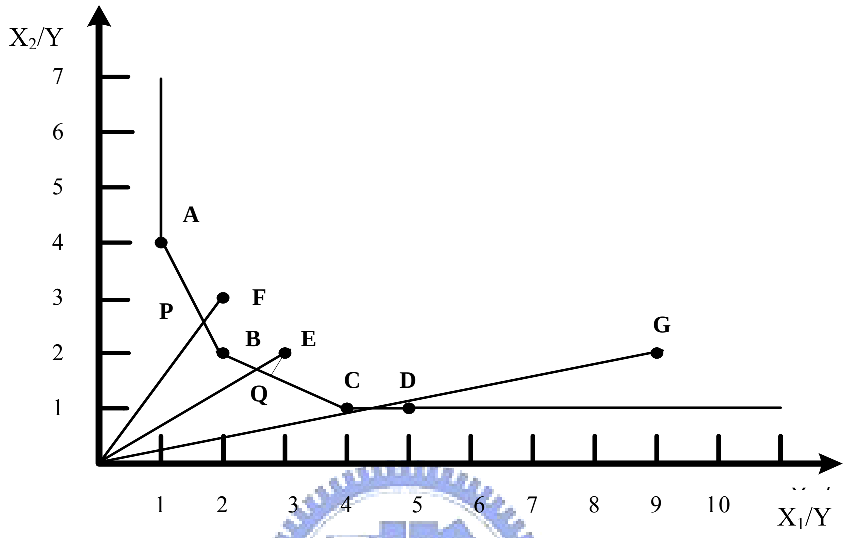

圖 3-2 兩投入單一產出之資料包絡圖

然而不管是傳統射線效率衡量或距離效率衡量，在衡量 DMU 效率值時，須對每一個 DMU_k 求解一組$(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ ，其中$U=(u_1,u_2,\ldots,u_S)$，$V=(v_1,v_2,\ldots,v_m)$，從另一個角度來看，每次求解乃是在尋找一組對 DMU_k 本身最有利之加權組合方式 $\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk}$, $\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}$，使得對 DMU_k 而言其效率值 $\dfrac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}}$ 為最大。換言之，一般 DEA 在衡量效率值的方式並不是以一固定的（$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$）對不同之 DMU_k 作加權組合，來決定 DMU_k 之效率值。所以基本上傳統 DEA 的衡量方式乃是以最寬容的方式對各個 DMU_k 做衡量。

此種衡量方式的缺點乃在於沒有使用共同一致的比較方式（即加權組合方式），進行效率值的衡量，造成由於 DMU_k 本身最有利之加權組合方式（$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$）來決定其效率值，使得評估結果有可能為多數之 DMU_k 都為有效率。因此，本研究將另根據 DMU 對其本身效率值的達成程度為基本想法，利用多目標線性規劃之觀念，以模糊規劃法找出一組共同一致的加權組合方式，使得各 DMU_k 透過此種加權組合所計算出之效率值為最佳。

以下針對本衡量方式提出詳細說明：

一、模糊多目標

自然環境中因各種因素的相互影響，以致系統狀況存在著變異性（不確定性），而在決策者方面在面臨多目標決策問題時，其思考方向及偏好也難以確切的加以描述，而造成傳統的系統分析難以用確定性的數學模式來加以模擬真實的狀況。因此利用模糊集合理論（Fuzzy Sets Theory），可以將真實狀況所產生的不確定性融入數學模式中，克服以往確定性數學模式的缺點，而使其更具說服力。

模糊集合理論強調人類之主觀性、態度、目標等模糊性因素，是無法以古典數學之二分法的邏輯系統來加以描述及區分的，必須以隸屬函數來表達事物之屬性與特徵。模糊集合之特徵在於描述對某一事物感受的隸屬程度，而模糊規劃則是考慮系統參數、目標、限制式之模糊特性的數學規劃方法。

1965 年由 Zadeh 提出模糊集合理論後，Zimmermann 首先將模糊線性規劃與多目標結合，提出模糊多目標規劃的模型。

二、建立效率指標

以往 DEA 的分析模式都是各個 DMU 分別單獨考量，而這種方法將有可能造成多數 DMU 皆為有效率之情況。因此，本研究在同時考量所有 DMU 之效率比值的計算下，希望找到一組共同的權數，使得所有 DMU 在根據此組共同之權數所計算出來的效率比值愈大愈好，而要達到此目的便可利用多目標規劃之觀念，以下即說明如何應用多目標規劃之觀念來找出一組共同一致的加權組合方式，使得各 DMU_k 透過此種加權組合所計算出之效率值為最佳。

若同時考量所有 DMU，則根據多目標規劃之觀念可以表示成如下：

$$Max\quad z_1=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{r1}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{i1}}\ ;\ Max\quad z_2=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{r2}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{i2}}\ ;\ \cdots\ ;\ Max\quad z_n=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rn}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{in}} \tag{3.9}$$

$s.t.$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}}\le 1,\quad j=1,\cdots,n$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0,\ r=1,\cdots,s;\ i=1,\cdots,m$$

y_{rj} =第 j 個 DMU 之第 r 個產出項數量

x_{ij} =第 j 個 DMU 之第 i 個投入項數量

u_r =第 r 個產出項之權重

v_i =第 i 個投入項之權重

ε =非阿基米德常數(non-Archimedean constant)

3-9 式為一多目標線性分數規劃模式（Multiple Objective Linear Fractional Programming, MOLFP），其含意為希望找到一組（**U**,**V**），使得利用此組（**U**,**V**）所計算出之各 DMU 的效率值愈大愈好。根據 Sakawa and Yumine、Sakawa and Yano 及 Ohta and Yamaguchi 對 MOLFP 之問題做過相關研究，解決 MOLFP 此類問題可利用 Zimmermann 提出之多目標模糊規劃方法加以求解。

模糊規劃方法（Fuzzy approach）乃是一種隸屬度的觀念，將多目標規劃問題轉換成單目標規劃問題而加以求解的方法。我們可利用圖 3-3 簡單說明如何利用模糊隸屬函數之手法，將 3-9 式之多目標規劃轉成單目標的觀念。假設在線性隸屬函數之情形下，圖 3-3 中 $Z_j^L=0$ 、$Z_j^R=1$ 分別表示第 j 個目標函數值 Z_j 的左、右邊界值，由於 3-9 式之目標式為效率比值，因此其數值介於 0 到 1 之間，即 $Z_j^L=0$，$Z_j^R=1$。而 Z_j 的隸屬度為 $\mu(Z_j)$，此 $\mu(Z_j)$ 可視為 DMU 對此計算出來之效率比值 Z_j 的達成度，當然達成度的值也是介於 0 到 1 之間。像這類的函數稱之為 indentity function 。因此，原先 3-9 式的問題即可轉換成：希望找到一組（**U**,**V**）使得計算出來之各 DMU 的效率值 Z_j 的達成度 $\mu(Z_j)$ 超過某個水準值 α 值（效率達成度）愈大愈好。所以 3-9 式便可改寫為 3-10 式

$$\underset{u,v}{Max}\,\underset{j}{Min}\quad u(Z_j), j=1,\cdots,n \tag{3-10}$$

$$s.t.\ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1,\quad j=1,\cdots,n$$

$$u(Z_j) \ge \alpha, j=1,\cdots,n$$

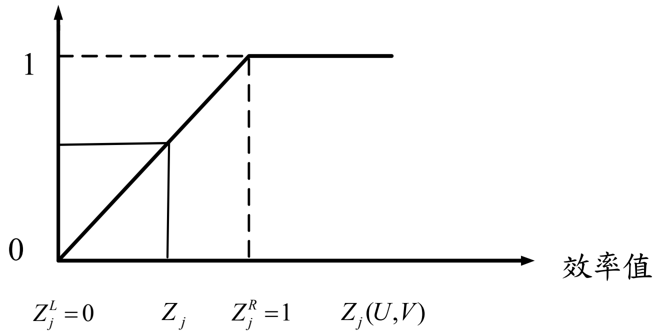

圖 3-3　效率達成度之線性隸屬函數

若假設為線性隸屬函數，則在某一$u(Z_j)=\alpha$值下，Z_j可視為Z_j^L、Z_j^R的線性組合$Z_j=\alpha\cdot Z_j^R+(1-\alpha)\cdot Z_j^L$，因此 3-9 式可再改寫成 3-10 式。

$$\max_{u,v}\ \min_{j}\quad Z_j=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{s}v_i x_{ij}},\ j=1,\cdots,n \tag{3-11}$$

$s.t.$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}}\le 1,\quad j=1,\cdots,n$$

$$u(Z_j)\ge\alpha\cdot Z_j^R+(1-\alpha)\cdot Z_j^L,\ j=1,\cdots,n$$

將 3-11 式再整理，即寫成如 3-12 式。

$$\max_{u,v}\quad \alpha \tag{3-12}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\le 0,\quad j=1,\cdots,n\\
& \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\left[\alpha\cdot Z_j^R+(1-\alpha)\cdot Z_j^L\right]\cdot\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\ge 0,\quad j=1,\cdots,n\\
& 0\le\alpha\le 1\\
& u_r\ge\varepsilon>0;\ \ v_i\ge\varepsilon>0,\ \ r=1,\cdots,s;\ \ i=1,\cdots,m
\end{aligned}$$

由於我們定義所計算出的效率值Z_j的值介於 0 與 1 之間，即$Z_j^L=0$、$Z_j^R=1$，所以 3-12 式最後可整理成 3-13 式。雖然 3-13 式為非線性規劃(nonlinear programming)，不過我們可利用 Sakawa and Yumine (1983)所提出之 bisection method 加以求解。

$$\max_{u,v}\quad \alpha \tag{3-13}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\le 0,\quad j=1,\cdots,n\\
& \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\alpha\cdot\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\ge 0,\quad j=1,\cdots,n\\
& 0\le\alpha\le 1
\end{aligned}$$

$$u_r \geq \varepsilon > 0;\ \ v_i \geq \varepsilon > 0,\ \ r = 1,\cdots,s;\ \ i = 1,\cdots,m$$

根據 3-13 式的運算可求出一組 (U^*,V^*) 值，利用此組 (U^*,V^*) 便可計算出各 DMU 的效率值 Z_j。由於各 DMU 的效率值 Z_j 實際上等於其效率值 Z_j 的達成度(因為假設滿意度隸屬函數為 identity function)，因此我們可定義效率達成衡量為：

$$\alpha_k = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij}} \tag{3-14}$$

很顯然地，α 值便為所有 DMU 中，效率值最低的 DMU 之效率達成度。

三、兩種方法之比較

Charnes et al.所提出用射線效率衡量的資料包絡分析法，與江勁毅學者所提出採用模糊多目標規劃建立新的資料包絡分析法效率衡量方式其差異如下表 3-1：

表 3-1 傳統 DEA 與模糊多目標規劃之 DEA 比較表

類型 比較	傳統 DEA	模糊多目標規劃之 DEA
差異	使用不同的權數	使用共同的權數
方法	**射線效率衡量** 不是以一組固定的$(\boldsymbol{U,V})$對不同的 DMU_k 作加權組合，來決定 DMU_{kK} 的之效率值。所以基本上傳統 DEA 的衡量乃是以最寬容的方式對各個 DMU_k 做衡量。	**效率達成衡量** 利用多目標線性規劃的觀念，以模糊規劃法找出共同一致的加權組合方式。
結果	在於沒有使用共同一致的比較方式（即加權組合方式），進行效率值的衡量，使得評估結果可能為多數之 DMU_k 都為有效率。	使用共同權數，評估結果較為精確。
使用工具	DEA 軟體	撰寫 EXECL 或 LINGO 程式

資料來源：游雯娟整理(2003)

3.4 資料包絡分析法之使用程序

3.4.1 決策單位之界定與選取

資料包絡分析法係比較各單位之相對效率，故決策單位必須有比較上的意

義，其特性如下：

1.決策單位有相同目標並執行相似工作；

2.決策單位在相同市場條件下運作；

3.影響決策單位績效之投入、產出項目相同。

例如，營利事業與非營利事業之組織目標不同，市場條件不同，組織的運作方式不同，因而影響組織績效之投入、產出項目也不相同，若將營利事業與非營利事業視為受評估群，則有失允當。又例如警察局與交通局對於違規停車之取締，雖有相似的目標，但是其執法手段不盡相同，組織運作方式更是大不相同，若將之視為績效評估群，實不適當。

其次考量決策單位之個數，一般而言決策單位之個數愈多愈好，因為決策單位越多，由高效率決策單位形成效率前緣之機會較大，同時投入產出間之關係較易確認。依經驗法則，決策單位之個數至少應為投入、產出項個數和之二倍。然而決策單位之個數愈多，決策單位之相似性愈低，從而增加外生因素干擾評估結果的機會。

3.4.2 投入、產出項之選取

以資料包絡分析法評估效率係建立在各單位之投入、產出項目資料上，若選擇了不適當的投入、產出項，將扭曲效率評估之結果，因而如何選取投入、產出項，實為此方法成敗之關鍵。投入與產出項之選取至少需考慮組織目標、資料性質、投入因子與產出項目之關係，以及投入、產出項之個數等。

一、組織目標

效率評估為管理控制之機制，因而投入、產出項之選取導源於管理控制之評估目標，而評估目標則導源於組織之管理目標。以系統的觀念而言，組織活動將投入之資源轉換成產出，即投入是對產出具有貢獻之各項資源，而產出則為達成組織目標之具體化衡量項目，因而只要確立組織目標即能構建評估準則，進而選取投入、產出項。然而準則之確立深受組織特性的影響，尤質對於非營利組織而言，其產出因評估觀點不同而有所差異。

二、資料性質

經由組織目標界定投入、產出項後，必須設定投入、產出變數之衡量方式並蒐集資料。由於描述生產技術之投入向量與產出向量均為非負數，且至少有一項投入產出大於 0，因此，投入、產出資料必須為非負數。然而，實務上產出項卻有負數出現的情況，此時，除可以一極小的正數取代負數之產出項，亦可對該項產出以加值轉換方式處理。

三、投入、產出項目之關係

資料包絡分析法雖然無須預設生產函數之型態，但所選取之投入、產出項在邏輯上必須能解釋各因子對效率的影響；另為符合投入、產出項目同向性(isotonicity)之條件，亦即投入數量增加時，產出數量不得減少，須對投入、產出項資料以統計上之相關分析進行驗證。一般而言，投入項之間應相互獨立或相關性薄弱，與產出項之間則相關性較強，當一項因子未符

合上述條件時，即須重新檢視該因子是否合適。

四、投入、產出項之個數決定

資料包絡分析法能處理多項投入、多項產出之問題，但其處理個數並非毫無限制，若有一決策單位某一產出與投入之比大於其他決策單位，則此決策單位為相對有效率，因此可知每增加一投入產出項就必須以降低鑑別力(discriminating power)為代價，由使用的經驗法則可知，決策單位之個數至少應為投入項與產出項個數和之二倍。

通常，應儘可能將會影響各 DMU 評估的相關因素（其中可能包含各 DMU 無法操控的環境因素在內）列出，然後經由三個階段的檢驗過程來篩選適當的因素做為投入項及產出項：

（1） 判斷篩選法(Judgemental screening)；

（2） 非 DEA 方法之量化分析(non-DEA quantitative analysis)；

（3） 執行 DEA 基本分析(DEA based analysis)。

第一階段的判斷篩選法可以下列特性檢定：

A、 此因素對組織目標而言是否有關且具貢獻？

B、 此因素所表達的資訊有無包含在其他的因素中？

C、 此因素所包含的要素（如價格等）是否與技術效率相衝突？

D、 此因素的資料是否可獲得且具信賴度？

此外亦可運用德菲法（Delphi technique）及層級分析法（Analytic Hierarchy Process），結合專家的知識與意見，建構一套判斷的流程。

黃旭男則提出專家訪問的程序，以界定及篩選投入產出項目，藉以衡量組織之效率，以下為適當之步驟：

(1) 訪問組織之管理階層，要求其釐定組織目標及管理目標；
(2) 由組織目標及管理目標界定產出項；
(3) 由產出項及組織之資源界定投入項；
(4) 將從文獻及經驗得知之投入產出種類及項目列出以供受訪者參考，進而要求受訪者確認投入產出項目；
(5) 將從文獻及經驗得知之投入產出衡量指標列出以供受訪者參考，進而要求受訪者確認投入產出之衡量指標；
(6) 蒐集並取得投入產出資料；
(7) 確認投入產出項目及衡量指標並完成資料蒐集之後，再進一步與受訪者深談分析其涵義，以便進一步確認。

第二階段非 DEA 方法之量化分析，先將第一階段所篩選過的因素進行量化的分析，即這些因素是否可被量測與數量化，並決定其測量尺度；接下來應考量投入產出項必須符合 Golany&Roll 所稱的“isotonicity”關係，亦即投入量增加產出量不得減少。黃旭男認為 DEA 雖然不需要預設生產函數之型態，但其所篩選之投入產出項在邏輯上必須能解釋各因子對效率的影響，而此關係可經由相關分析予以確認。最後所篩選出的投入產出項就

可轉化為數值以納入分析。

第三階段運用 DEA 執行基本分析，為確保納入 DEA 模式分析之投入產出項均能解釋其對效率之影響，首先應先採用最嚴格的 CCR 模式進行篩選，將對效率影響不大的虛擬乘數所對應的投入或產出項剔除，篩選的方法可使用後退消去法（backward elimination）及前進選擇法（forward selection）等兩種方法。

後退消去法可逐步消去對效率較無影響的因子，其方法以表 3-1 說明之。

表 3-2 後退消去法

		步驟1	步驟2	步驟3	步驟4	步驟5	步驟6
投入	X_1	*	*	*	*	*	*
	X_2	*	*	*	*	*	
	X_3	*	*	*			
產出	Y_1	*	*	*	*	*	*
	Y_2	*	*	*	*		
	Y_3	*	*				
	Y_4	*					

資料來源：黃旭男

步驟一：就所界定投入產出項因素（設為 X_1、X_2、X_3、Y_1、Y_2、Y_3、Y_4 等七項）之資料，以 DEA 模式執行求出各 DMU 之效率並求得投出產出項所對應之虛擬乘數（即 u_r 及 v_i 值）。

步驟二：將步驟一各 DMU 之 u_r、v_i 值趨近於 0 者予以剔除。當 u_r、v_i 值非趨近於 0，則計算 u_r、v_i 值與第一步所求得之效率的相關係數，設相關係數絕對值最小者為 Y_4，則優先考慮剔除 Y_4。再將 X_1、X_2、X_3、Y_1、Y_2、Y_3 之資料以 DEA 模式執行求出各 DMU 之效率。

步驟三：重複步驟二，設退出模式之因素依序為 Y_3、X_3、X_2（如表 3-2 所示）。直到投入產出項之個數達到研究者之要求，並符合對 DMU 個數的條件假設。

另外，亦可以前進選擇法逐步選擇進入 *DEA* 模式之因素，其方法以表 3-2 說明之。

表 3-3 前進選擇法

		步驟1	步驟2	步驟3	步驟4	步驟5	步驟6
投入	*X*1	*	*	*	*	*	*
	*X*2		*	*	*	*	*
	*X*3				*	*	*
產出	*Y*1	*	*	*	*	*	*
	*Y*2			*	*	*	*
	*Y*3					*	*
	*Y*4						*

資料來源：黃旭男

步驟一：就所界定投入產出項因素由理論及實際上篩選較能解釋效率者 X_1、X_2，並將 X_1、X_2 之資料以 DEA 模式執行求出各 DMU 之效率。

步驟二：尋找其餘各因子與第一步驟所求得之效率相關係數最大者設為 X_2。再將 X_1、X_2、Y_1 之資料以 DEA 模式執行求出各 DMU 之效率。

步驟三：重複步驟二，設進入模式之因素依序為 Y_2、X_3、Y_3、Y_4。直到投入產出項之個數達到研究者之要求，並符合對 DMU 個數的條件假設。

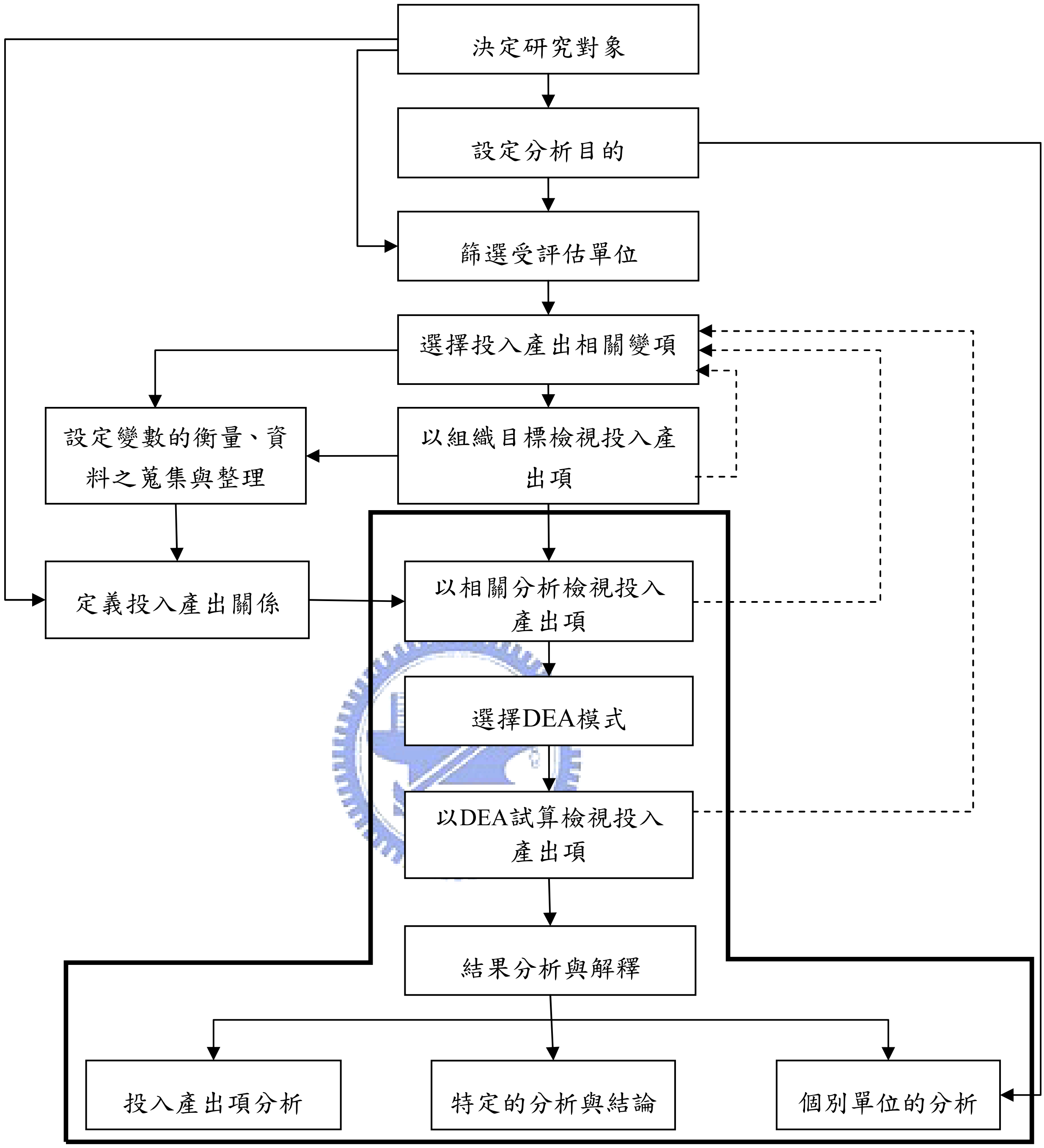

圖 3-4 DEA 應用流程圖

3.4.3 評估模式之選擇

應用 DEA 時，其分析模式的選取，須依研究的分析目的、需求、投入與產出項的屬性等而予以決定，也就是說，並非每一種模式都能適用於任何狀況，必須視實際情形而定。CCR 模式的先決假設為固定規模報酬（constant return to scale; CRS）其所求出之效率值代表整體技術效率，而 BCC 模式則為變動規模報酬（variable return to scale; VRS），其所求出之效率模式代表純技術效率；由此二者效率值得比值可得規模效率。一般而言，為了兼顧決策單位的技術效率與規模效率，通常都將二種模式合併使用。另外，要考慮的是導向模式之選擇，投入導向模式為對投入量可以操控的，亦將現有產出值固定，計算所需投入要素最少的量（投入量可以縮減之部份）。產出導向模式則對產出量可加以操控，亦即以現有固定的投入來計算可獲得最大產出的量。

3.4.4 結果分析與解釋

DEA 之分析一般可由效率分析、參考集合分析、差額變數分析與敏感性分析等面向，對受評的決策位（DMU）來進行分析結果的探討，茲分述如下：

一、效率分析：評估各 DMU 的整體效率、技術效率與規模效率等三種效率值，藉以判斷受測單位是否具有效率，並探討相對無效率 DMU，其無效率的原因是來自技術效率或規模效率。

二、參考集合分析：DEA 的分析方法是藉由相對有效率的單位而建構出效率前緣，而相對無效率的單位則根據此效率前緣計算其相對效率，因此，有些無效率單位必然有其相對的參照對象，也就是說，有效率的單位都有機會成為無效率單位參考的對象，而被參考的次數愈多，即代表該 DMU 越是真正具有效率，所以，透過參考集合分析的次數統計，可對效率值為 1 的有效率單位進一步區分其相對效率。

三、差額變數分析：DEA 是由衡量對象中最有效率的單位形成效率前緣，再以效率前緣作為效率衡量標準，差額變數分析即是以效率前緣為標準，針對被評為相對無效率之 DMU 進行分析，以清楚了解各組織在目前經營情況下資源使用狀態及可改善的方向與幅度。

四、敏感性分析：減少或增加一投入產出項時對原有 DMU 之效率值有何改變，至於當投入產出項之數值改變時，重新檢視 DEA 其對於所有 DMU 之效率值之影響。

3.5 資料包絡分析法之特性與應用限制

3.5.1 資料包絡分析法之特性

1. DEA 是一種相對而非絕對之比較，用於評估各 DMU 之相對效率。
2. DEA 模型中的權數是由模式本身自行決定，不須事先設定各項產出與投入之權重值，亦即不須預設生產函數，故不受評估者主觀因素的影響，能滿足公平、公正原則。

3. DEA 為一種無母數方法，可同時處理多項產出與多項投入之生產行為，而不需事先設定其函數及參數估計，在使用上較為方便。
4. 具有單位無差異性(units invariance)，即只要所有 DMU 使用相同的計量單位，即可進行效率評估，其目標函數不受投入產出計量單位之影響。
5. 可以單一值代表 DMU 之相對效率，類似總要素生產力(TFP)觀念。
6. DEA 在運用上不僅處理比率尺度(Ratio Scale)資料，亦可處理順序尺度(Ordinal Scale)資料，故其在資料處理上較具彈性。
7. 基於 DEA 可同時處理比率資料及非比率資料的特性，因此對於組織外的環境變數亦可處理，亦即 DEA 可同時評估不同環境下 DMU 的效率。
8. 可指出相對無效率的 DMU 應減少多少投入量或增加多少產出量，才能成為相對有效率(差額分析)。
9. 可指出各 DMU 之規模經濟與最適生產規模。

3.5.2 資料包絡分析法之假設前提與應用限制

1. DEA 之投入與產出項目之選擇必須符合下列假設：包含所有使用資源、活動水準與績效衡量、所有 DMU 之投入與產出項目均相同、納入環境差異因素。下列三項為可能違反之狀況與其解決方式。
   (1) 投入與產出項目數過多，將影響鑑別結果。根據一般經驗法則，DMU 的個數必須大於投入項目與產出項目相乘的二倍。解決方法：投入項目間可利用單價與數量予以加權合併，產出部分則可刪除與組織目標無關之項目。
   (2) 項目間具有相關性，亦將影響鑑別結果。解決方法：剔除相關性甚高之項目。
   (3) 指標項目與數量項目混合者，易造成誤判。解決方法：將指標除以投入項目(單一投入項目時)或以相同涵意的數量資料取代之。

2.DEA 必須符合同質性(Homogenous)假設，不論是選擇 DMU 或考量是否具有規模經濟及其外在環境是否相當，均須符合上述假設。

3.產出與投入間應符合同向性(isotonicity)假設，亦即投入增加產出不得減少。下列四項為可能違反之狀況與解決方法。
   (1) 投入或產出為比值或標準化資料時，應注意避免與數量資料混用。解決方法：將指標除以投入項目、另以相同涵意的的數值資料取代或將比值之分母列為投入項目、分子列為產出項目。
   (2) 投入或產出為質化資料(例如：顧客滿意度)，除應避免與數值資料混用外，亦應避免資料之取得基礎不同，例如各 DMU 之資料是來自不同受訪者，或受訪者對各 DMU 之期望水準不同，而影響填答結果。解決方法：詳細規劃問卷調查之過程，避免資料取得之基礎誤差。
   (3) 非期望的投入與產出項目，致違反同向性假設。解決方法：以該值之倒數表之、以一大數減去該值表之，或將原產出項目改為投入項目，反之亦然。

(4) 部分投入與產出項目係外生因素，DMU 無法控制。解決方法：將此類因素均列為投入項目，而以產出面之 DEA 模式解釋結果；或均列為產出項目，以投入面 DEA 模式解釋結果。

4. DEA 是一種相對而非絕對之比較，當 DMU 判定為有效率時，未必真正具有生產效率。而且當 DMU 數量增加或減少，亦有可能改變原 DMU 之效率值。
5. DEA 之投入與產出項目只要採用相同計量單位，原則上可不需作處理。因為所求得之虛擬乘數(或稱為權重)，即具備資料標準化之功能。
6. DEA 模式是一種非隨機線性規劃模式，其所求解之效率前緣為一種確定性(deterministic)結果，極易受界外值干擾，進而影響效率估計值。解決方法可利用摺刀抽樣法(jackknife sampling)，計算每一次少一個 DMU 對其他 DMU 評估效率值之影響，影響數目愈多，程序愈大則愈有可能是界外值，而必須加以剔除。

3.6 軟體之選取

資料包絡分析法模式可轉換為一線性規劃問題，因此，可以求解線性規劃的程式軟體即可執行，LINDO，SAS 中的 OR，乃至 EXCEL 中的線性規劃均可。晚近因資料包絡分析法之廣泛應用，許多軟體因應而生。孫遜(資料包絡分析法—理論與應用，2004)曾對 5 種市售 DEA 軟體(Banxia Frontier Analst、DEA-Solver、IDEAS、OnFront 及 Warwick-DEA)之使用優劣進行分析比較，其以分析階層程序法(Analytic Hierarchy Process, AHP)，從資料管理、模式選擇、視覺功能、解答分析與報告產生 5 個構面，進行比較分析發現，應用軟體以 DEA-Solver 最佳，Banxia Frontier Analst 次之，若以敏感度分析顯示，則沒有任何一個軟體具有絕對優勢，但仍以 DEA-Solver 及 Banxia Frontier Analst 綜合表現較佳，故本研究選用 DEA-Solver 為試算工具，其相關資訊說明如下：

DEA-Solver

版本：DEA-Solver Professional version 4，DMUs 個數最多為 6 萬個。若 DMUs 個數×(投入變數個數+產出變數+2)≥60,000，則無法產出投射工作單。

作業系統：Microsoft Excel 95/98/2000/NT

資料管理：以 Microsoft Excel 97/2000 作為軟體平台，編輯與管理投入、產出資料。

模式選擇：共分 23 大類 68 種 DEA 模式，列舉如下：

1. CCR-I, CCR-O
2. BCC-I, BC-O
3. IRS-I, IRS-O
4. DRS-I, DRS-O
5. GRS-I, GRS-O
6. AR-I-C, AR-I-V, AR-O-C, AR-O-V
7. NCN-I-C, NCN-I-V, NCN-O-C, NCN-O-V

8. NDSC-I-C, NDSC-I-V, NDSC-O-C, NDSC-O-V
9. BND-I-C, BND-I-V, BND-O-C, BND-O-V
10. CAT-I-C, CAT-I-V, CAT-O-C, CAT-O-V
11. SYS-I-C, SYS-I-V, SYS-O-C, SYS-O-V
12. SBM-I-C, SBM-I-V, SBM-O-C, SBM-O-V
13. Super-SBM-I-C, Super-SBM-I-V, Super-SBM-O-C, Super-SBM-O-V, Super-SBM-AR-I-C, Super-SBM-AR-I-V, Super-SBM-AR-O-C, Super-SBM-AR-O-V
14. Cost-C, Cost-V
15. Revenue-C, Revenue-V
16. Profit-C, Profit-V
17. Ratio-C, Ratio-V
18. Bilateral
19. Window-I-C, Window-I-V
20. FDH
21. Adj-CCR-I, Adj-CCR-O, Adj-BCC-I, Adj-BCC-O, Adj-AR-I-C, Adj-AR-I-V, Adj-AR-O-C, Adj-AR-O-V
22. Malmquist Index
23. Super-efficiency

視覺功能：無高品質視覺顯示功能，僅有 DMUs 之效率值分布圖。

解答分析：DEA 分析包括不同模式效率值、潛在改善、參考群體、規模報酬分析與差額變數分玎。

報告產生：經由 DEA 模式運算後，可將分析結果儲存在 Excel 工作表單車，並可將工作表單之分析結果外傳至文書處理檔案中。