國 立 交 通 大 學

財務金融所

碩 士 論 文

信用評等轉移矩陣相關模型研究

--台灣資料實証

The Credit Transition Matrix Related Model

：Evidence from Taiwan Market

研 究 生：徐元良

指導教授：王克陸　教授

中 華 民 國 九 十 四 年 六 月

信用評等轉移矩陣相關模型研究--台灣資料實証

The Credit Transition Matrix Related Model：Evidence from Taiwan Market

研　究　生：徐元良　　　　Student：Yuan-Liang Hsu

指導教授：王克陸　　　　Advisor：Ke-Lu Wang

國立交通大學
財務金融研究所
碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Computer and Information Science

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Finance

June 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年六月

信用評等轉移矩陣相關模型研究--台灣資料實証

研究生:徐元良 指導教授:王克陸教授

國立交通大學財務金融研究所碩士班

摘要

隨著信用風險管理與衡量的重要性逐漸被重視，相關理論模型在近年也有相當快速的發展，其中以下幾個關鍵的風險成因(risk components)，更是這些研究的焦點，例如違約率(probability of default, PD)、回覆率(recovery rate)、信用價差及曝險額(exposure at default, EAD)等等。更進一步，除了討論公司發生違約時價值的變化之外，評等改變時造成相對應的價值變動也是一個相當重要的主題，其中的核心在於信用評等轉移矩陣(transition matrix)的建置及應用，這也是本文所著重的要點。本篇論文將進行信用評等轉移矩陣相關模型探討，並利用台灣資料去驗證各模型的可行性及分析結果的合理性，達到了解台灣資料特性的目的，並由這個過程探討信用風險理論模型在實証研究上會遇到的問題，進而找出一個合理的調整方法，讓信用風險與其衍生性商品的評價在實際運用上更加完備。

目錄

圖次

表次

第一章 緒論

第一節 研究動機及目的

近年來，國內外頻傳重大的企業違約事件，例如 1995 年的霸菱銀行、1998 年的 LTCM 資產管理公司以及國內接二連三爆發地雷股公司等等。當這些公司發生財務危機時，相關的投資者或借款者，會無法執行交易契約中所規定的權利與義務，而發生違約的情況，導致難以估計的損失，這稱爲交易對手風險或信用風險。由此可知，信用風險程度的衡量對銀行、債券發行者及債券投資者而言極爲重要，此時信評機構可做爲一個較爲客觀的參考依據。信評機構會依據公司所公開之財務報表資訊、公司內部管理、產業別及本身主觀判斷等因素，加以檢視，並進行信用分析，最後給予信用等級評分，作爲該公司整體體質好壞的評斷標準。有了這些信用評等後，投資者可依本身不同的風險偏好程度選擇投資標的，當然對信用等級不同的公司要求的報酬也會跟著改變，評等較高的債券因爲違約機率較低，所以報酬率較低，反之，評等較低的債券應該有較高的報酬率，而其中差異就是信用價差(credit spread)的觀念。

隨著信用風險管理與衡量的重要性逐漸被重視，相關理論模型在近年也有相當快速的發展，其中以下幾個關鍵的風險成因(risk components)，更是這些研究的焦點，例如違約率(probability of default, PD)、回覆率(recovery rate)、信用價差及曝險額(exposure at default, EAD)等等。更進一步，除了討論公司發生違約時價值的變化之外，評等改變時造成相對應的價值變動也是一個相當重要的主題，其中的核心在於信用評等轉移矩陣(transition matrix)的建置及應用，這也是本文所著重的要點。本篇論文將進行信用評等轉移矩陣相關模型探討，並利用台灣資料去驗證各模型的可行性及分析結果的合理性，達到了解台灣資料特性的目的，由上述這個過程中發現信用風險理論模型在實証研究上的限制，進而找出一個合理的調整方法，讓信用風險及其衍生性商品的評價在實際運用上更加完備。

第二節 論文架構

本文共分為五個章節，第一章說明研究動機及論文架構。第二章回顧相關文獻。第三章為研究模型，首先以 J.P. Morgan 的信用計量法(CreditMetrics™)為主，再加入 Jarrow-Lando-Turnbull (JLT, 1997)的模型，討論非時間同質的轉移矩陣並以 Kijima and Komoribayashi(KK, 1998)的方法修正 JLT 之風險調整項，讓風險調整項成為一個合理的數值，最後利用前述模型應用於評價信用衍生性商品。第四章為實証研究，利用台灣資料代入信用計量法觀察試行的結果，接著把相關資料透過前述評價模型的運算，討論信用衍生性商品的各項特性。第五章為本論文的總結。

第二章 文獻回顧

本章首先討論目前常見的信用風險模型，由此了解各模型是從何種觀點來進行信用風險評估，並大略比較各模型的優缺點及其相關假設。接下來透過縮減式模型(reduced form model)的探討，描述違約事件發生的過程，作為後續加入信用評等資訊之模型的基礎。

第一節 信用風險模型相關論文

Crouhy 等人(2000)整理出四種較常見的信用風險模型，簡要說明如下：

(一)J.P.Morgan 的 CreditMetrics 法

此模型爲本論文研究重點之一，在此處把 CreditMetrics 法的信用風險值(Credit-VaR)與一般市場風險值(VaR)的差異提出來做比較，並討論 CreditMetrics 法中關於回收率及評等遷移的相關文獻。而其他重要觀念及計算過程會在第三章研究方法中詳細說明之。

VaR 的定義是某段期間內，可容忍範圍下最大市場風險造成的損失，而 Credit-VaR 可想像爲將 VaR 的市場風險損失改爲信用風險損失，簡單說明如下：

1. VaR

VaR 可用數學式表示爲：

$$\mathrm{P}\left(W \le W_0\right) \le \alpha \tag{2.1}$$

其中 W 代表價值

W_0 代表價值門檻值

$(1-\alpha)$爲可容忍的範圍，例如 99%。

將(2.1)式標準化後得到

$$P\left(\frac{W-E\left(W\right)}{\sigma_W} \le \frac{W_0-E\left(W\right)}{\sigma_W}\right) \le \alpha$$

當 $1-\alpha = 99\%$ 時，可得

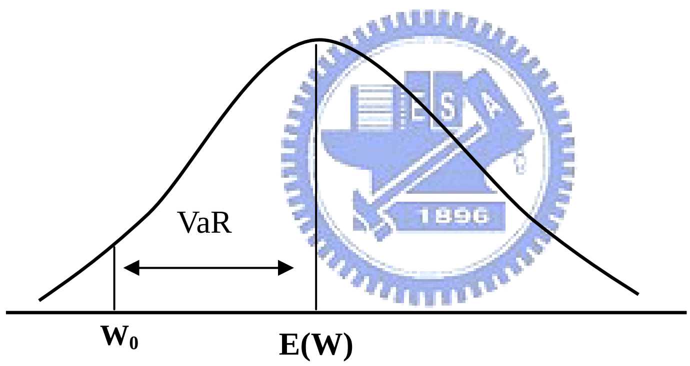
$$\frac{W_0 - E(W)}{\sigma_w} \leq Z_\alpha = 2.33$$

則 VaR 為

$$\begin{aligned} VaR &= W_0 - E(W) \\ &= Z_\alpha \sigma_W \\ &= 2.33\sigma_W \end{aligned} \tag{2.2}$$

此處假設分配為常態分配，以圖(2-1)表示如下

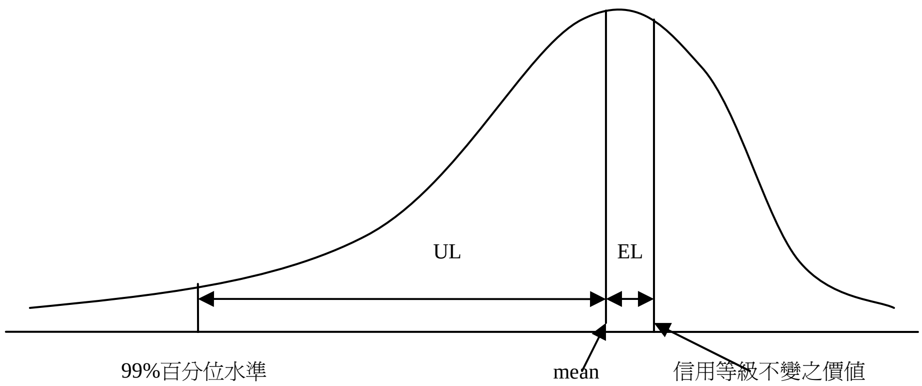
圖 2-1　VaR



2.Credit-VaR

J. P. Morgan (1997)的 Credit Metrics 中之 Credit-VaR 之定義與 VaR 的概念十分相同，只是將市場風險改為信用風險，以圖 2-2 表示如下

圖 2-2 Credit-VaR



其中

EL 為預期損失(Expected Loss)，代表正常情況下平均發生的損失。

UL 為意外損失(Unexpected Loss)，代表特定信賴水準下可能產生的最大損失。詳細計算將在後文敘述。

另外關於回收率的部份，信用計量法是採用 Carty 及 Lieberman(1996)的研究方法，統計出不同債權求償順位下的平均回收率及其標準差。考慮國內外資料特性的差異，我們將回收率計算之相關文獻整理如下，可作為往後研究的參考：

1.市價基礎法

以 Edward I.A. and C.E. Allan (1994)之研究為代表，定義違約損失率(Loss Given Default, LGD)如下：

違約損失率=1-債務工具之市價/違約時點之債務面額

其中 LGD=1-回收率，市價基礎法主要反映債務之市場價值，是由市場實際交易結果而得，在該價格中隱含了投資人對回收結果之預期價值，本金折現、利息損失或重整等相關費用均已包含在內，適於流動性健全之次級市場債務工具。另外 Carty 及 Lieberman(1996)分別以(1)次級市場交易價格(2)

實際銀行償還率兩種方法求算銀行借款之回收率，以 Moody's1989 至 1996 年間先順位擔保違約銀行借款爲對象，(1)之實證結果爲平均回收率爲 71%，中位數爲 77%，標準差爲 32%。(2)之實證結果爲平均回收率爲 79%，中位數爲 92%，標準差爲 29%。

2.現金基礎法

對於無市場價格者如銀行債務而言，此類債務一旦發生違約，回收率往往取決於債權銀行及債務人間談判協商之成果。因此回收率求算通常以債權人最終回收之現金金額作爲依據。以 Asarnow, E.及 D. Edwards (1995)、Carty, L.V. (1996)、Carty 及 Hamilton (1999)研究爲代表。現金回收法則主要將違約後各期所收到淨現金流量予以折現至違約當時價值，公式如下：

$$LGD = 1 - \frac{\sum_{1}^{t} CF/(1+r)^t}{\text{違約時點帳面價值}}$$

其中，Asarnow 及 Edwards (1995)使用違約事件發生時產生之所有經濟損失(Loss in the Event of Default, LIED)，衡量銀行借款之預期損失。經濟損失的定義包括本金、利息、費用之損失並扣除其他利得後除以最初違約金額，並以原始借款利率加以折現。根據其以花旗銀行 1970 年到 1993 年之一般工商業界借款及受監控(structured loans)違約樣本爲對象，求算出之 LIED 分別爲 34.79%及 12.75%。Carty 及 Hamilton(1999)亦以上述方法求算 159 家破產案例爲研究樣本之償還率，結果平均償還率爲 56.7%，中位數償還率爲 56%，標準差則爲 29.3%。Gupton et al. (2000)以 1989 至 2000 年間之 181 筆銀行違約借款爲對象求算回收率。實證結果先順位擔保借款之平均償還率爲 69.5%，標準差爲 22.6%。先順位無擔保則爲 52.1%，標準差 28.6%。

評等遷移(Rating Migration)也是 CreditMetrics 法的重要議題之一，相關文獻整理如下：

Altman and kao(1992)假設轉移機率(transition probabilities)服從穩定馬可夫過程(stable Markov process)，即債權評等變動機率與過去評等結果兩者爲獨立。

然而根據實証結果，評等轉移是呈現自我相關的(Nickell et al. 2001a)，也就是說目前爲低評等的債權會比高評等的債權，在下一期有較高的機率變動爲低評等債券。

如果轉移矩陣爲穩定，則代表轉移情形不會因爲借款者或時間點而有所不同，但是有許多證據指出不同產業、不同國家或景氣循環時點都是影響評等轉移的重要因素(Nickell et al. 2001a 及 Bangia et al.)。因此 CreditMetrics(1999)提出修正方法，並將景氣循環因素包含於轉移矩陣中。Kim(1999)及 Finger(1999)提出加入市場因素(market factor)的條件違約機率，即當市場景氣壞時，會使得違約機率向上調整，反之，當市場景氣好時，會使違約機率向下調整。

(二)KMV 結構法(structural approach)

相較於 CreditMetrics 法有一大部分內容著重於信用轉移矩陣的架構上，KMV 認爲信用評等資訊是間斷的，反映出的資訊有時間上的落差，而且即使落在同一評等的債券，應該具有不同的違約機率，所以 KMV 不再採用評等機構的信用等級資料，而是採用 Merton(1974)的資產價值模型來推導違約機率，KMV 定義違約頻率期望值(expected default frequency, EDF)的計算方法如下：

首先要求資產價值V_A與資產報酬率波動性σ_A的變動關係，可由市場上證券價值V_E與其證券報酬波動性σ_E推得，這些變數之間有以下關係式

$$V_E = f\left(V_A, \sigma_A, K, c, r\right) \tag{2.3}$$

$$\sigma_E = g\left(V_A, \sigma_A, K, c, r\right) \tag{2.4}$$

其中，K代表槓桿比率(leverage ratio)

c代表長期債券平均票息(average coupon paid on the long-term debt)

r代表無風險利率(risk-free interest rate)

因爲上述資訊皆可由市場觀察而得，所以可推得

$$V_A = f\left(V_E, \sigma_A, K, c, r\right) \tag{2.5}$$

接著定義違約距離(distance-to-default,DD)爲資產價值分配中，平均值與違約門檻值之間的距離，以公式表示爲

$$DD = \frac{\ln(V_0 / DPT_T) + (\mu - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2.6}$$

其中，V_0 爲資產的現值；

DPT_T 爲時間長度 T 時的違約點(default point)；

μ 爲資產報酬率；

σ 爲資產報酬標準差；

且資產價值服從常態分配。

舉例說明，令 V_0 =1000，一年後預期資產價值爲 1200，σ =100，違約點爲 800，所以 $DD = \frac{1200-800}{100} = 4$。假設資料母體中有 5000 家公司，其中 DD=4 的公司在一年後有 20 家違約，所以 EDF= $\frac{20}{5000} = 0.4\%$，根據違約率找出相對應的評比爲 BB+等級。實證顯示，在預測違約發生或是信用程度降低時，EDF 是一項不錯的指標。

(三)Credit Suisse Financial Products 的 CreditRisk+精算法(actuarial approach)

CreditRisk+精算法假設違約次數服從 Poisson 分配，如下列公式：

$$P(\text{n defaults}) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad \text{for n=0,1,2,\ldots,} \tag{2.7}$$

其中 μ 爲每年違約的平均數目。

定義信用等級 j 的機率產生函數(probability generating function) $G_j(z)$ 爲

$$G_j(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j}\mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = \exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}) \tag{2.8}$$

，v_j 代表風險暴露額。

進而推導出整個投資組合的機率產生函數爲

$$G_j(z) = \prod_{j=1}^{m} \exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\mu_j + \sum_{j=1}^{m}\mu_j z^{v_j}\right\} \tag{2.9}$$

所以整個投資組合的損失分配爲

$$P(loss\ \text{of nL}) = \frac{1}{n!}\frac{d^nG(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} \quad \text{，for n=1,2,} \cdots \tag{2.10}$$

由此可知，CreditRisk+精算法是非常直接的模型，計算上只牽涉到違約機率與曝險額，而不從信用等級變動及利率走勢的觀點切入，但這也使得 CreditRisk+精算法目前還無法應用到衍生性商品。

(四)Mckinsey 的 CreditPortfolioView 法

CreditPortfolioView 將信用評等資訊以及總體經濟因素(包括失業率、GDP 成長率、利率水準、外匯、政府支出及儲蓄率等等)納入模型中。並認爲違約機率服從 logit 模式 $P_{j,t} = \dfrac{1}{1+e^{-Y_{j,t}}}$ ，其中 $Y_{j,t}$ 爲總體因素的回歸方程式，以公式表示爲

$$Y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,1,t} + \beta_{j,2}X_{j,2,t} + \ldots + \beta_{j,m}X_{j,2,m} + v_{j,t} \quad ,v_{j,t} \sim N(0,\sigma_j) \tag{2.11}$$

並利用評等機構(如慕迪與史坦普)的相關信評資料當基礎，模擬出修正後的信用轉移矩陣。

第二節 Jarrow-Turnbull(1995)離散模型

接下來介紹另一種縮減式模型(reduced form model)，Jarrow-Turnbull 離散模型。

此模型假設交易是在無交易成本、無買賣價差且無稅的環境之中進行，交易的商品有兩種，第一種爲無風險零息債券，另一種爲有險性零息債券(在此稱爲 XYZ 零息債券)。本節透過無風險零息債券及有險性零息債券在風險中立理論下的價格變動過程，討論相關數值之關係。令

$P_0(t,T)$=到期日爲 T 時一定會支付＄1 的無風險零息債券，在時間 t 時之價格。

$V_1(t,T)$=到期日爲 T 承諾會支付＄1 的 XYZ 有險性零息債券，在時間 t 時之價格。

爲了分析上的方便，假設有 XYZ 及 XYZs 兩種計價單位。目的是幫助建構

模型，且利用匯率的觀念將 XYZ 零息債券的價格分解爲兩部份：以 XYZs 貨幣爲單位的零息債券價格，及一單位 XYZs 貨幣的價值。

首先令

$$e_1(t) = V_1(t,t) \tag{2.12}$$

$e_1(t)$代表在時間 t 時承諾會支付一元計價單位爲 XYZ，可以想像爲即期匯率。如果 XYZ 零息債券未發生違約則一單位的 XYZs 貨幣仍爲一元；如果 XYZ 零息債券發生違約，則一單位的 XYZs 貨幣必定小於一元。

接下來考慮一個到期日支付一元，以 XYZ 爲計價單位的零息債券。令

$$P_1(t,T) = V_1(t,T) \Big/ e_1(t) \tag{2.13}$$

$P_1(t,T)$代表在時間 t 時，$V_1(t,T)$轉化爲以 XYZs 爲計價單位的價值，且根據(2.12)之定義，在時間 t=T 時，$P_1(T,T)=1$，即$P_1(t,T)$爲無風險零息債券。

我們可將(2.13)式表示爲

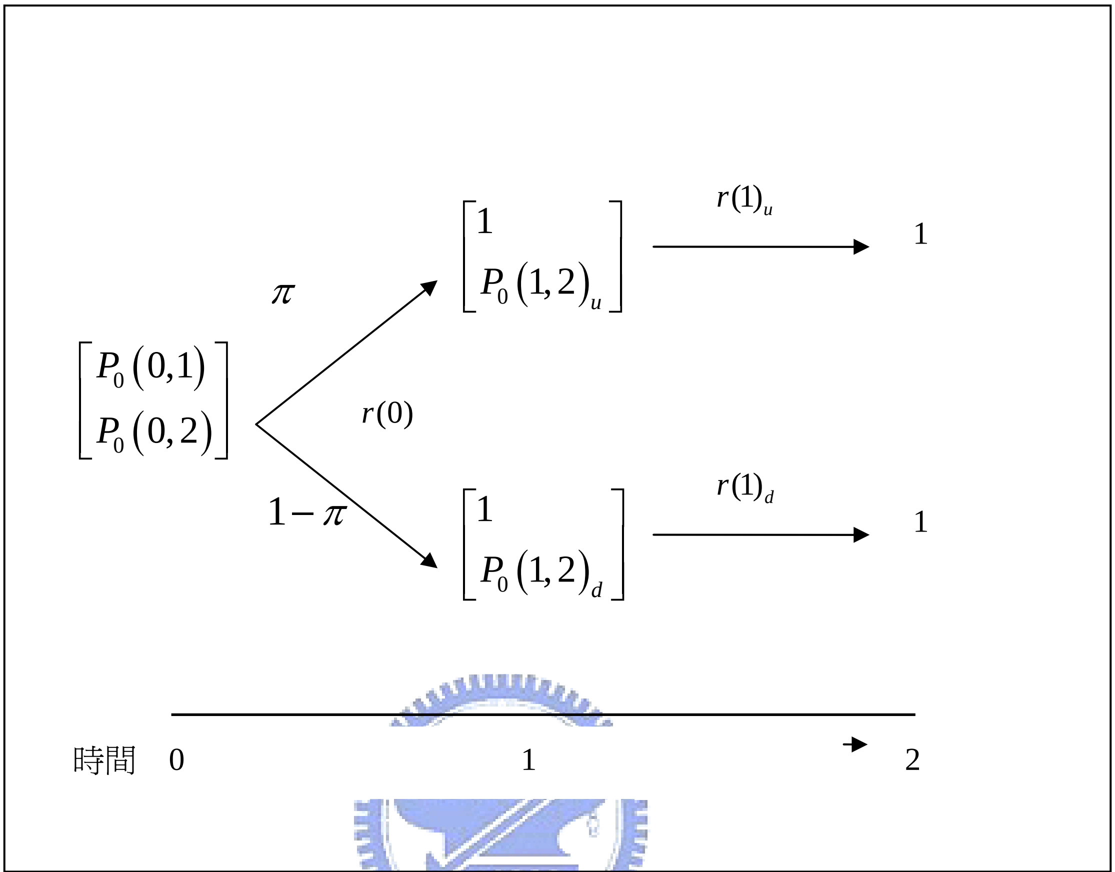
$$V_1(t,T) = P_1(t,T)\, e_1(t) \tag{2.14}$$

接下來討論無風險零息債券價格變動過程，在本文中影響無風險零息債券價格的唯一變數是即期利率，並假設即期利率只有上升與下降兩種變動情況，以兩期變動過程來說明(如圖 2-3)。

定義在 t=0 期時，即期利率$r(0) = 1/P_0(0,1)$。

在 t=1 期時，當即期利率爲上升情況時$r(1)_u = 1/P_0(1,2)_u$，機率爲π；當即期利率爲下降情況時$r(1)_d = 1/P_0(1,2)_d$，機率爲$1-\pi$。

圖 2-3 兩期無風險零息債券價格變動過程



其中 $P_0(t,T)_w$ 代表 t=0 時，到期日 T 時必須支付＄1 之無風險零息債券價格，$w \in \{u,d\}$；$r(t)_w$ 爲 t=0 時的即期利率，$w \in \{u,d\}$。

註 1：[ ] 中上欄代表到期時間爲 1 期之價格相關數值，下欄爲到期時間爲 2 期之價格相關數值。

註 2：此處即期利率定義與一般定義不同。

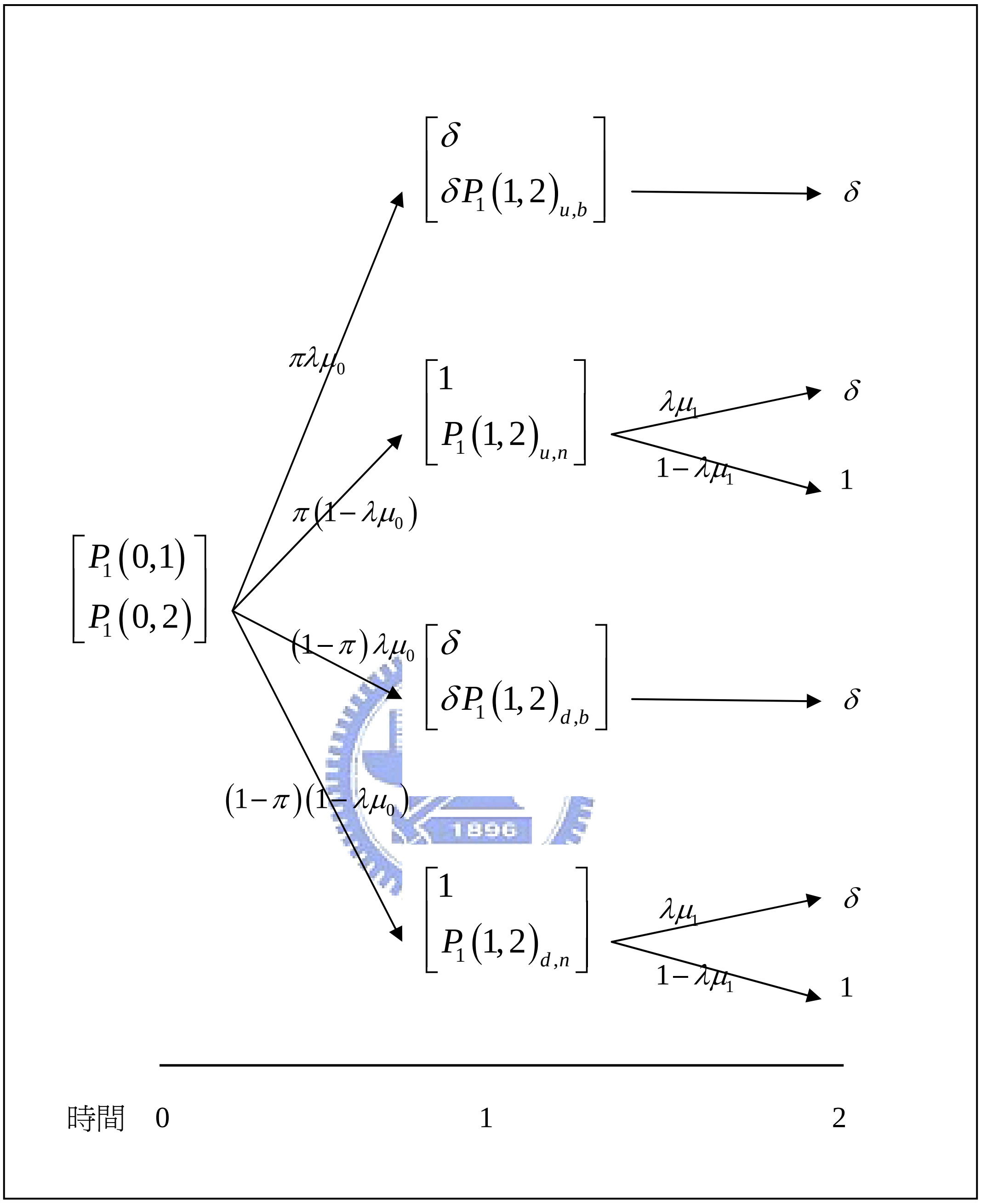
由圖 2-3，可以得到在無套利的評價模型下存在一個風險中立機率 π，使得 $P_0(0,2) = \left[\pi P_0(1,2)_u + (1-\pi) P_0(1,2)_d\right] \big/ r(0)$，經過運算，$\pi$ 可表示爲

$$\pi = \left[P_0(1,2)_d - r(0) P_0(0,2)\right] \big/ \left[P_0(1,2)_d - P_0(1,2)_u\right] \tag{2.15}$$

接下來討論信用等級 XYZ 零息債券價格變動過程，因爲信用等級 XYZ 零息

債券為有險性債券，所以將違約風險也考慮進去，即在 t=1 期時，有以下 4 種情況可能發生，(1)利率上升且違約；(2) 利率上升且不違約；(3)利率下降且違約：(4)利率下降且不違約。定義π為利率上升機率，$\lambda\mu_0$為 0~1 期違約發生機率，$\lambda\mu_1$為 1~2 期違約發生機率，如圖 2-4。此處假設利率過程與違約過程為獨立。

圖 2-4 兩期信用等級 XYZ 零息債券價格變動過程



由圖 2-4，觀察時點為 t=1 期，可以得到下列式子：

$$V_1(1,2)_{u,b} = \delta P_1(1,2)_{u,b} = \delta \Big/ r(1)_u$$

$$V_1(1,2)_{u,n} = P_1(1,2)_{u,n} = \left[\lambda\mu_1\delta + (1-\lambda\mu_1)\right] \Big/ r(1)_u$$

$$V_1(1,2)_{d,b} = \delta P_1(1,2)_{d,b} = \delta \Big/ r(1)_d$$

$$V_1(1,2)_{d,n} = P_1(1,2)_{d,n} = \left[\lambda\mu_1\delta + (1-\lambda\mu_1)\right] \Big/ r(1)_d$$

經過運算，$\lambda\mu_1$ 可表示為

$$\lambda\mu_1 = \left[1 - P_1(1,2)_{u,n}\, r(1)_u\right] \Big/ \left[1-\delta\right] \tag{2.16}$$
$$= \left[1 - P_1(1,2)_{d,n}\, r(1)_d\right] \Big/ \left[1-\delta\right]$$

同樣的由圖 2-4，觀察時點為 t=0 期，可以得到下列式子：

$$V_1(0,1) = P_1(0,1) = \left[\lambda\mu_0\delta + (1-\lambda\mu_0)\right] \Big/ r(0)$$
$$\begin{aligned} V_1(0,2) = P_1(0,2) = \Big[&\pi(\lambda\mu_0)\delta P_1(1,2)_{u,b} \\ &+ \pi(1-\lambda\mu_0) P_1(1,2)_{u,n} \\ &+ (1-\pi)\lambda\mu_0\delta P_1(1,2)_{d,b} \\ &+ (1-\pi)(1-\lambda\mu_0) P_1(1,2)_{d,n} \Big] \Big/ r(0) \end{aligned} \tag{2.17}$$

將(2.15)、(2.16)式代入(2.17) 式，經過運算後可得

$$\lambda\mu_0 = \left[1 - r(0)P_1(0,1)\right] \Big/ \left[1-\delta\right]$$
$$= \left[r(1)_d P_1(1,2)_{d,n} - P_1(0,2) \Big/ P_0(0,2)\right] \Big/ \left[r(1)_d P(1,2)_{d,n} - \delta\right]$$

根據上述價格變動過程的討論，可以整理出下列公式：

$$V_1(t,T) = P_0(t,T)\, \tilde{E}_t\left(e_1(T)\right) \tag{2.18}$$

其中

$$\tilde{E}_1\left(e_1(2)\right) = \begin{cases} \delta & \text{，如果在t=1時倒閉} \\ \lambda\mu_1\delta & \text{，如果在t=1時未倒閉} \end{cases}$$

$$\tilde{E}_0\left(e_1(2)\right) = \lambda\mu_0\delta + (1-\lambda\mu_0)\left[\lambda\mu_1\delta + (1-\lambda\mu_1)\right]$$
$$\tilde{E}_0\left(e_1(1)\right) = \lambda\mu_0\delta + (1-\lambda\mu_0)$$

其中 $\tilde{E}_t(\bullet)$ 為在風險中立下，時間 t 時的條件期望值。

以實際數值做演算，相關數值列於下表 2-1，利率過程如圖 2-5 所示。

表 2-1　無風險零息債券價格及有險性零息債券價格

到期期間	無風險零息債券價格	有險性零息債券價格
T	$P_0(0,T)$	$V_1(0,T)$
1	94.8627	94.2176
2	89.5343	87.1168

將上述相關數值代入下式(2.19)中

$$V_1(0,1) = P_0(0,1)\left[\lambda\mu_0\delta + (1-\lambda\mu_0)\right]$$

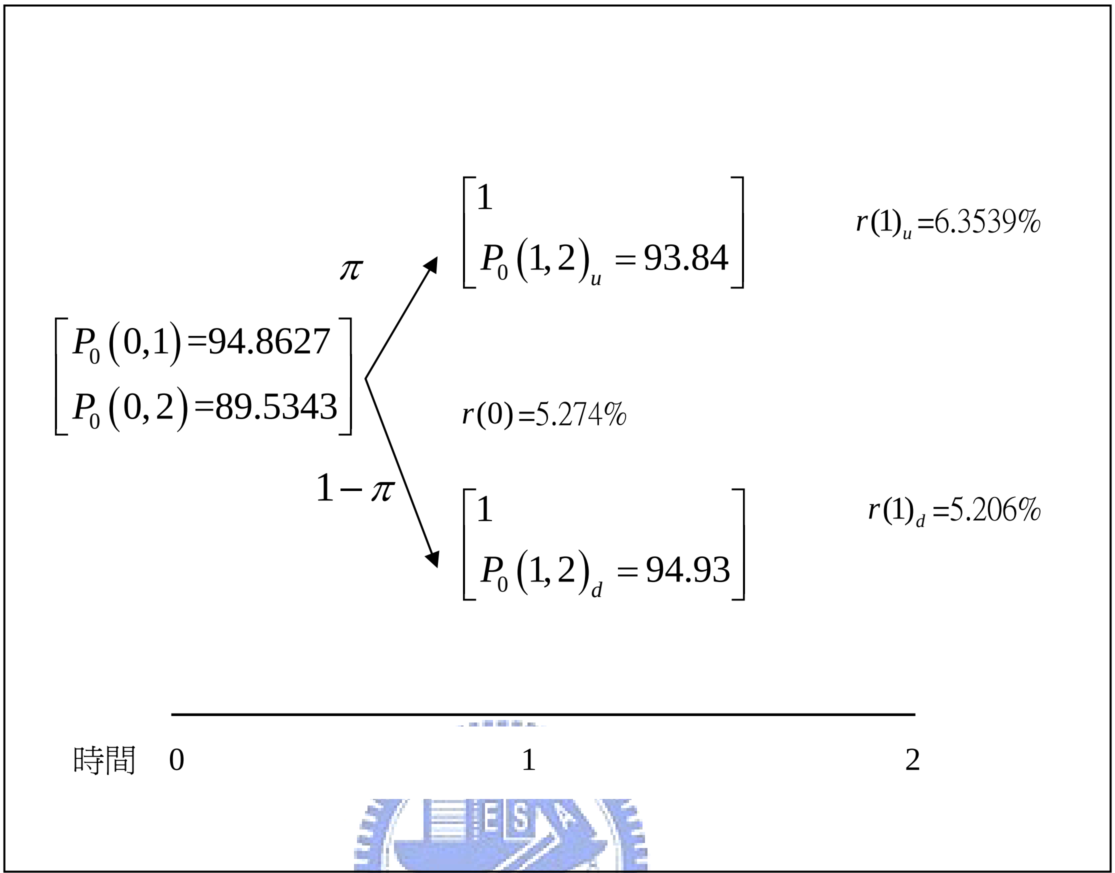
$$V_1(0,2) = P_0(0,2)\ \lambda\mu_0\delta + (1-\lambda\mu_0)\left[\lambda\mu_1\delta + (1-\lambda\mu_1)\right] \quad (2.19)$$

可得

$\lambda\mu_0 = 0.01$

$\lambda\mu_1 = 0.03$

圖 2-5 利率過程


$\begin{bmatrix} P_0(0,1)=94.8627 \\ P_0(0,2)=89.5343 \end{bmatrix}$
π
$1-\pi$
$\begin{bmatrix} 1 \\ P_0(1,2)_u = 93.84 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ P_0(1,2)_d = 94.93 \end{bmatrix}$
$r(0)$=5.274%
$r(1)_u$=6.3539%
$r(1)_d$=5.206%
時間 0 1 2

第三章 研究模型

從前一章的各種信用模型中，我們選擇信用計量法作爲本論文的研究重點之一，接著再討論從 Jarrow-Turnbull 離散模型延伸出的馬可夫鏈(Markov Chain)模型，並找出其中不合理的數值來做修正，最後將此方法應用於評價信用衍生性商品。

第一節 信用計量法(J.P. Morgan CreditMetrics™ 1997)

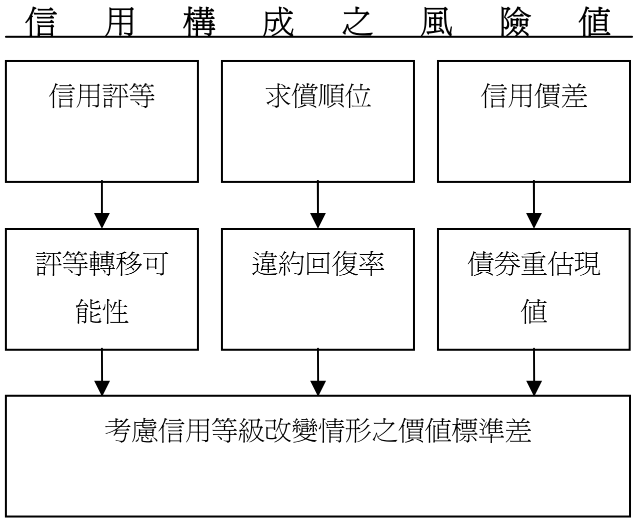
信用計量法是由 J.P. Morgan 於 1997 年開發出的工具，主要利用分析債權等級變動及信用風險值來檢視投資組合中，因債權資產信用等級改變所產生之信用風險。此信用風險模型能夠衡量債券資產的價值變化，也可用於銀行放款以及金融衍生性商品。

信用計畫法主要依據以下步驟，計算各別金融工具及投資組合的信用風險值。首先，必須了解投資組合中每一債券資產的曝險概況，並利用所有債券資產的信用風險等級變動狀況，構成轉移矩陣(transition matrix)，以求算債權資產在某特定時間，信用評等由某等級轉移至另一等級，導致資產價值產生的變化。接著，求出債券資產在未來期間移轉至不同等級之價值，建立出債權資產的機率分配。最後，在考慮債權資產間的相關係數下，結合所有個別資產的價值分配，以產生投資組合的新價值。我們將依序討論持有單一債權的情形及多個債權的情形。

(一)單一債權之評價

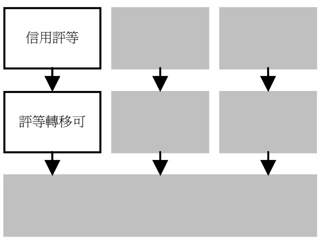
依下列三步驟(其架構如下圖 3-1 所示)，可評價單一債權之信用風險。

圖 3-1 單一債權評價架構



下面步驟以 CreditMetrics™技術文件中的例子說明 CreditMetrics™法如何計算信用風險值(Credit-VaR)。假設持有一個 BBB 評等的第二求償順位債券，到期期限為 5 年且票面利率為 6%，依下列步驟可求其信用風險值。

步驟一：確定信用評等轉移矩陣



在這個模型中，風險產生不只關係著違約情形，在信用等級改變時也會使風險產生變化。因此我們不但應該關心下一期是否發生違約，也必須注意信用等級在下一期變化到各種狀態的可能性。在此例中我們舉目前信用評等為 BBB 的債權來做說明，觀察在一年後可能發生的情形。

圖 3-2 表示 BBB 評等債券在一年後升級為 AAA 評等債券的機率為 0.02%，升級為 AA 評等債券的機率為 0.33%，以此類推。考慮其他各個評等的情形下，我們可以整理成一個矩陣如表 3-1。

圖 3-2　BBB 評等債券轉移機率

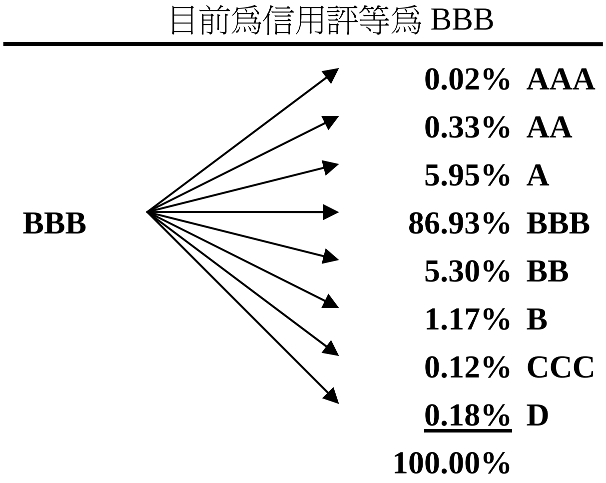


表 3-1 信用評等轉移矩陣　　單位%

期初之信用評等	期終之信用評等							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

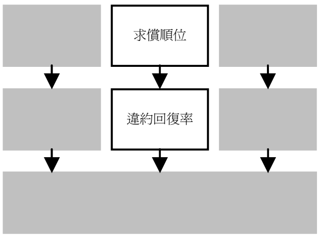
資料來源：Standard & Poor’s CreditWeek (15 April 96)

上述矩陣即稱爲信用評等轉移矩陣，一般可由各評等機構所公佈之資料所取得，本例爲史坦普爾(Standard & Poor’s)公司所作之評等，表中第一欄表示債券在期初時之信用等級，後面機率代表一年後信用等級轉移到其他等級之機率(包括違約)，所以每一列機率加總均爲 100%。

步驟二：評價

在步驟一，我們決定了債券在下一期所有可能情形的發生機率，因此可以觀察因爲評等改變使得債券價值產生的變化。我們可以依照下一期發生違約與下一期不違約兩種狀況討論債券價值的變化。

情況一：發生違約時之評價



如果債券發生違約，一般會依據債券的回收率(recovery rate)來計算債券的剩餘價值。回收率因因債券的求償順位而有所不同，表 3-2 爲利用歷史資料統計出來各個不同求償順位回覆率的平均值與標準差。

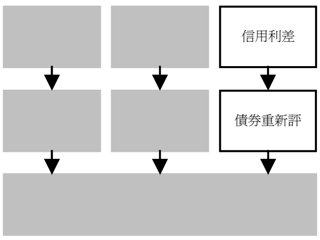
表 3-2 不同求償順位回覆率的平均值與標準差　　　　　　　單位：%

求償順位	平均數	標準差
先順位	53.80	26.86
第二求償順位	51.13	25.45
第三求償順位	38.52	23.81
次低求償順位	32.74	20.18
最低求償順位	17.09	10.90

資料來源：Carty & Liberman (96a) –Moody’s Investors Service

我們所舉的例子 BBB 債券爲第二求償順位債券，對照上表可以知道此債券的平均回收率爲 51.13%且回收率的標準差爲 25.45%。

情況二：當債券評等調升或調降後之評價(不發生違約時)



當債券評等在期末改變時，我們必須重新計算債券價格，進行此評價需要每一不同信用等級債券的遠期零息殖利率曲線資料(如表 3-3)，並利用每期現金流量與折現的觀念推得債券價格。

表 3-3 不同信用等級債券的遠期零息殖利率曲線

信用等級	一年	兩年	三年	四年
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

資料來源：J.P Morgan CreditMetrics™(1997)

根據我們的假設 BBB 評等債券，面額＄100，到期期間為五年，票面利率 6%。

若一年後信用評等調升為 A，則此債券價值 V 為

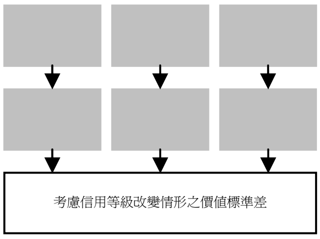
$$V=6+\frac{6}{(1+3.72\%)}+\frac{6}{(1+4.32\%)^2}+\frac{6}{(1+4.93\%)^3}+\frac{106}{(1+5.32\%)^4}=108.66$$

以此類推分別計算一年後信用評等變動為其他等級後之債券價值(包含違約情形)，彙整如表 3-4。

表3-4 債券重估價值

一年後信用等級	價值($)
AAA	109.37
AA	109.19
A	108.66
BBB	107.55
BB	102.02
B	98.10
CCC	83.64
Default	51.13

步驟三：估計信用風險值



由步驟一之信用評等轉移矩陣及步驟二的信用評等變動後之價值，可以推演出價值的波動程度，也就是衡量風險大小的依據。信用計量法是以標準差(standard deviation)及百分位水準(percentile level)作爲衡量準則。

1.以標準差衡量信用風險

在信用計量法中，衡量債券信用風險的方法之一爲利用標準差大小作爲判斷依據。要計算標準差 σ_{Total}，首先必須先計算平均值 μ_{Total}，這裡的平均值爲不同信用等級債券的價值 μ_i 乘上個別機率權重 P_i 然後加總，在本例中爲$107.09，接下來就可以計算出標準差，在本例中爲2.99。其詳細計算公式如下(相關數值列於表3-5)。

$$\mu_{Total} = \sum_{i=1}^{s} p_i \mu_i$$

$$\sigma_{Total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} p_i \mu_i^2 - \mu_{Total}^2}$$

表 3-5 信用等級改變後債券價值的變動情形

一年後的信用等級	發生機率(%)	債券重估價值($)	機率加權值($)	重估價值與平均值之差($)	機率加權差之平方
AAA	0.02	109.37	0.02	2.28	0.0010
AA	0.33	109.19	0.36	2.10	0.0146
A	5.95	108.66	6.47	1.57	0.1474
BBB	86.93	107.55	93.49	0.46	0.1853
BB	5.30	102.02	5.41	(5.06)	1.3592
B	1.17	98.10	1.15	(8.99)	0.9446
CCC	0.12	83.64	1.10	(23.45)	0.6598
Default	0.18	51.13	0.09	(55.96)	5.6358
		平均值=$107.09		變異數=8.9477 標準差=$2.99	

更進一步，信用計量法考慮到發生違約時，回收率的標準差會影響到信用風險，故對上述公式做了以下修正

$$\mu_{Total} = \sum_{i=1}^{s} p_i \mu_i$$

$$\sigma_{Total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} p_i \left(\mu_i^2 + \sigma_i^2 \right) - \mu_{Total}^2}$$

其中，σ_i 表示發生違約時，回收率的不確定性。

比較一下兩公式計算出來的結果，可以發現債券價值的標準差從$2.99 增加爲$3.18，這說明在考慮回收率的不確定性這項因素後，會提高債券的信用風險。

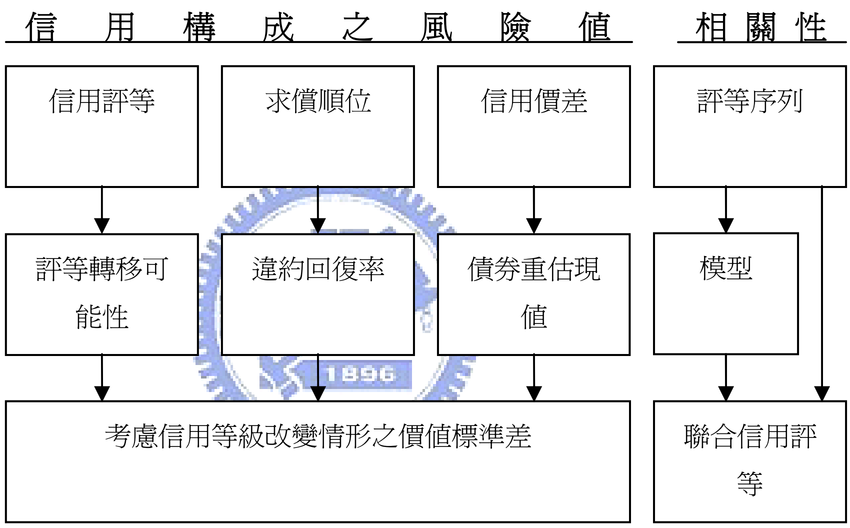
2.以百分位水準衡量信用風險

另一個衡量方法是透過百分位水準來檢視。其方法爲先選擇一個α值，α值代表一年後債券價值下降到某臨界水準的機率爲α，在本例中α爲 1%，一年後發生違約的機率爲 0.18%，小於 1%，故再加上一年後信用等級變爲 CCC 的機率 0.12%，此時累積機率爲 0.30%，還是小於 1%，所以再加上一年後信用等級變爲 B 的機率 1.17%，此時累積機率爲 1.47%，大於 1%，且一年後信用等級變爲 B 後的債券價值爲$98.1，故$\alpha$ =1%的百分位值爲$98.1。將平均數減掉百分位值即爲信用風險值，經由上述計算後可以得到此例之信用風險值爲$8.99。

(二)多個債權之評價

計算多個債權的投資組合之信用風險值，必須考慮到債權之間的相關性，但是本文中討論台灣資料實證研究的部份，對債權相關性方面的資料並不充足，所以在這裡只簡要說明如何處理多個債權之信用評等聯合轉移矩陣，信用風險值詳細計算公式予以省略，期待往後相關資訊更爲透明時，再做深入討論。圖 3-3 爲考慮相關性的步驟架構圖。

圖 3-3 多債權評價架構



同樣以 CreditMetrics™技術文件中的例子做說明，假設持有到期期限爲 5 年，票面利率爲 6%的 BBB 評等債券及到期期限爲 3 年，票面利率爲 5%的 A 評等債券，依下列步驟可計算此投資組合的信用風險值。

步驟一：信用評等聯合轉移矩陣

比較多個債權與單一債權評價，有一個很大的差別在於債權間的相關性，下面我們分兩種情況考慮相關性造成的影響。

情況一：債權間相關性爲零

若債券與債券之間，它們的評等變動完全無關，所以它們的聯合轉移機率爲個別的轉移機率相乘，舉例說明，如果 BBB 評等債券與 A 評等債券再下一期都維持相同評等，則聯合轉移機率爲：

$$\underset{\text{聯合轉移機率}}{\underline{79.15\%}} = \underset{\substack{\text{BBB 評等債券}\\ \text{維持不變機率}}}{\underline{86.93\%}} * \underset{\substack{\text{A 評等債券}\\ \text{維持不變機率}}}{\underline{91.05\%}}$$

將所有可能情形整理如下表 3-6

表 3-6 信用評等聯合轉移矩陣(相關係數=0)

BBB 評等債券		A 評等債券							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.01	0.30	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.01	0.14	5.42	0.33	0.04	0.02	0.00	0.00
BBB	86.93	0.08	1.98	79.15	4.80	0.64	0.23	0.01	0.05
BB	5.30	0.00	0.12	4.83	0.29	0.04	0.01	0.00	0.00
B	1.17	0.00	0.03	1.06	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.11	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	0.18	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

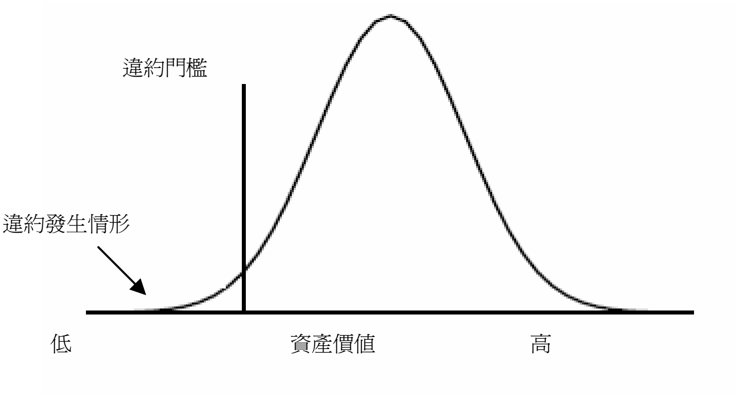
資料來源：J.P Morgan CreditMetrics™(1997)

情況二：債權間相關性不為零

考慮債權間相關性不為零的信用風險值計算較相關性為零時複雜很多，CreditMetrics™利用 Merton(1974)的公司價值理論與信用評等資訊，並加上債權間的相關性找出信用評等聯合轉移矩陣，最後可計算出此投資組合的平均值與標準差，說明如下。

Merton 的理論為當公司資產價值低於流通在外的負債總額時，即為發生違約。因此資產價值會有一個門檻值，此門檻值即為發生違約的臨界值，如圖 3-4 所示：

圖 3-4 資產價值分配及違約門檻值



同理，將此觀念應用於信用評等上，可利用某評等公司維持原等級或變為其他等級的機率，求出某評等公司價值低於其他信用評等價值的相對應門檻值，進而計算出聯合轉移機率與相對應的投資組合價值。下圖 3-5 為公司信用評等為 BBB 的例子。表 3-7 及表 3-8 為假設相關係數等於 0.3 時，計算出來的信用評等聯合轉移矩陣，以及相對應的投資組合價值。

圖 3-5 BBB 公司資產價值分配及其他等級門檻值

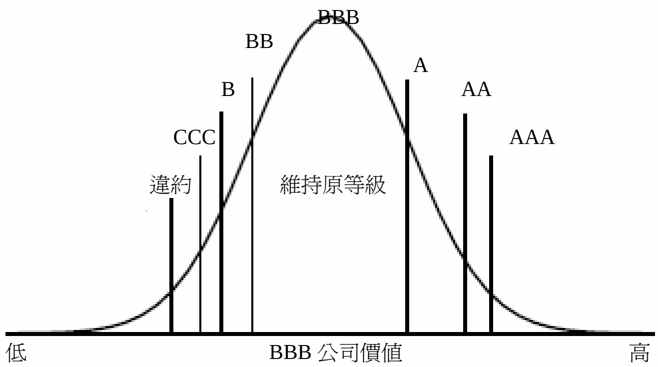


表 3-7 信用評等聯合轉移矩陣(相關係數=0.3)

BBB 評等債券		A 評等債券							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
BBB	86.93	0.07	1.81	79.69	4.55	0.57	0.19	0.01	0.04
BB	5.30	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.01
B	1.17	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	0.18	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

表3-8 各情形下投資組合價值

BBB 評等債券		A 評等債券							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		106.59	106.49	106.30	105.64	103.15	101.39	88.71	51.13
AAA	109.37	215.96	215.86	215.67	215.01	212.52	210.76	198.08	160.50
AA	109.19	215.78	215.68	215.49	214.83	212.34	210.58	197.90	160.32
A	108.66	215.25	215.15	214.96	214.30	211.81	210.05	197.37	159.79
BBB	107.55	214.14	214.04	213.85	213.19	210.70	208.94	196.26	158.68
BB	102.02	208.61	208.51	208.33	207.66	205.17	203.41	190.73	153.15
B	98.10	204.69	204.59	204.40	203.74	201.25	199.49	186.81	149.23
CCC	83.64	190.23	190.13	189.94	189.28	186.79	185.03	172.35	134.77
Default	51.13	157.72	157.62	157.43	156.77	154.28	152.52	139.84	102.26

利用以上資訊，最後可得到 BBB 債券與 A 債券構成的投資組合價值平均值 u_{total} 及標準差 σ_{total} 如下：

$$u_{total} = \sum_{i=1}^{64} p_i u_i = 213.63$$

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{64} p_i u_i^2 - u_{total}^2} = 3.55$$

將以上結果做比較，我們整理出單一債權與多個債權投資組合的平均值及標準差後，可得信用評等 BBB 債券價值平均值為＄107.09，標準差為＄2.99；信用評等 A 債券價值平均值為＄106.55，標準差為＄1.49；同時持有兩債券，形成的投資組合價值平均值為＄213.63，標準差為＄3.55。若以標準差當作衡量風險的依據，會發現投資組合的風險會小於個別風險相加，這也說明形成投資組合後具有風險分散的效果；另一個風險指標為百分位水準，可從表 3-8 讀出 1%的百分位值為＄204.40，此值較平均值小＄9.23，當然若是增加債權數目時，百分位值的分析會變的更複雜。

最後以邊際風險(marginal risk)來說明多增加一個債權，對投資組合造成的影響，以表 3-9 及表 3-10 來做比較。

表 3-9 說明，當僅持有 BBB 評等債券時，標準差為＄2.99。增加 A 評等債券後，投資組合標準差變為＄3.35，即邊際風險為＄0.36(＄3.35-＄2.99)，遠較 A 評等債券本身的標準差＄1.49 小，這就是風險分散的效果

表 3-9 以標準差看邊際風險

投資組合	標準差	邊際風險
僅 BBB 評等債券	＄2.99	
BBB 評等債券與 A 評等債券	＄3.35	⇨ ＄0.36
僅 A 評等債券	＄1.49	

表 3-10 說明，當僅持有 BBB 評等債券時，1%百分位值爲＄98.1，較平均數＄107.09 小＄8.99。增加 A 評等債券後，投資組合的 1%百分位值爲＄204.40，較此時平均數 213.63 小＄9.23。可得邊際風險爲＄0.24(＄9.23-＄8.99)，而 A 評等債券 1%百分位值爲＄103.15，較平均數＄106.55 小＄3.39。比較邊際風險＄0.24 與 A 評等債券的＄3.39 之差異，同樣的這也可以說明風險分散的效果。

表 3-10 以百分位值看邊際風險

<table>
<tr><th>投資組合</th><th>(平均數)-(1%百分位值)</th><th>邊際風險</th></tr>
<tr><td>僅 BBB 評等債券</td><td>＄8.99</td><td rowspan="3">＄0.24</td></tr>
<tr><td>BBB 評等債券與 A 評等債券</td><td>＄9.23</td></tr>
<tr><td>僅 A 評等債券</td><td>＄3.39</td></tr>
</table>

第二節 Jarrow-Lando-Turnbull (1997)模型(JLT Model)

JLT(1997)提出債券信用等級的變動過程，可以馬可夫鏈(Markov Chain)模型表示如下。假設 $x=\{x_t, t=0,1,2,\cdots\}$ 爲時間同質(Time-Homogeneous)的馬可夫鏈。而其狀態空間爲 $N=\{1,2,\cdots,K,K+1\}$ 。其中 N=1 代表最高信用等級(Aaa)，N=2 代表第二高信用等級(Aa)，以此類推。N=K 代表最低信用等級(Caa)，N=K+1 代表發生違約(Default)。若公司發生違約即爲吸收狀態(Absorbing State)，以後不能改變公司評等，維持在 N=K+1。

馬可夫鏈 X 變動過程以轉移矩陣(Transition Matrix)Q 表示如下：

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} & q_{1.k+1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} & q_{2.k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kk} & q_{k.k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它描述從本期至下一期公司信用等級，從某一等級變動至其他等級或維持原等級的轉移機率(Transition Probabilities)。

其中 q_{ij} =本期信用等級爲 i 變動至下一期信用等級爲 j 的移動機率

$$=p\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\},\quad i,j\in N,\ t=0,1,2,\cdots$$ 。

這個轉移矩陣也可寫成以下形式

$$Q=\begin{pmatrix} A & \mathrm{R} \\ & \\ 0^{'} & 1 \end{pmatrix} \tag{3-1}$$

其中 A 代表非發生違約狀態下的子矩陣，它為 K×K 矩陣，即 Q 矩陣內包括前 K 行及前 K 列的子矩陣。A 的狀態空間為 $\hat{N}=\{1,2,\cdots,K\}$ ，表示如下：

$$A=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kk} \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

R 為 Q 矩陣內第 K+1 行前 K 個移動機率所組成的行向量。其中 $q_{i,k+1}$ 代表本期為 i 下一期發生違約的機率，$i=1,2,3,\cdots K$；0 為零行向量(zero column vector)。它代表本期公司發生違約下一期公司信用等級為 j 的機率，在本文假設下，不會發生故為零；1 代表 $q_{k+1,k+1}$ ，即本期公司發生違約，下一期公司信用等級必也為違約。

為了評價有險性債券，我們必須考慮風險中立機率測度 $\tilde{P}$ 下，相對應的隨機過程 $\tilde{x}=\{\tilde{x}_t,t=1,2,\cdots\}$ 。根據 JLT(1997)，考慮風險中立機率測度 $\tilde{P}$ (Risk-Neutral Probability Measure)下， $\tilde{x}=\{\tilde{x}_t,t=1,2,\cdots\}$ 為非時間同質的馬可夫鏈(Non-Homogeneous Markov Chain)。接下來我們以 $\tilde{q}_{ij}(t,t+1)$ 表示在時間 t 時，本期信用等級為 i 變動至下一期信用等級為 j 的移動機率，以公式表示如下：

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1)=\tilde{P}\left\{\tilde{X}_{t+1}=j \middle| \tilde{X}_t=i\right\},\quad i,j\in N$$

並且相對應的轉移矩陣 $\tilde{Q}(t,t+1)$ 為

$$\tilde{Q}(t,t+1)=\begin{pmatrix} \tilde{q}_{11}(t,t+1) & \tilde{q}_{12}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1k}(t,t+1) & \tilde{q}_{1,k+1}(t,t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t,t+1) & \tilde{q}_{22}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2k}(t,t+1) & \tilde{q}_{2,k+1}(t,t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{q}_{k1}(t,t+1) & \tilde{q}_{k2}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{kk}(t,t+1) & \tilde{q}_{k,k+1}(t,t+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同理這個轉移矩陣可表示如下：

$$\tilde{Q}(t,t+1)=\begin{pmatrix} \tilde{A}(t,t+1) & \tilde{R}(t,t+1) \\ \\ 0^{'} & 1 \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

$$\text{其中 } \tilde{A}(t,t+1)=\begin{pmatrix} \tilde{q}_{11}(t,t+1) & \tilde{q}_{12}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1k}(t,t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t,t+1) & \tilde{q}_{22}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2k}(t,t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_{k1}(t,t+1) & \tilde{q}_{k2}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{kk}(t,t+1) \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

且 $\tilde{R}(t,t+1)$ 為 $\tilde{Q}(t,t+1)$ 矩陣內第 K+1 行前 K 個移動機率所組成的行向量。

首先進行評價風險性債券的討論，首先定義符號：

$V_0(t,T)$=無風險債券在 t 時間的價值，其到期日為 T。

$V_j(t,T)$=信用等級為 j 的債券在 t 時間的價值，其到期日為 T。

由 Jarrow & Turnbull(1995)得知，$V_0(t,T)$ 及 $V_j(t,T)$ 評價公式如下：

$$V_0(t,T)=\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]$$

$$\begin{aligned} V_j(t,T) &= \tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\left[1_{\{\tau_j>T\}}+\delta 1_{\{\tau_j\le T\}}\right]\right] \\ &= \tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]\tilde{E}_t\left[1_{\{\tau_j>T\}}+\delta 1_{\{\tau_j\le T\}}\right] \end{aligned}$$

上式指標函數代表若違約發生在到期日後，則在到期日時債券價值為 1；反之，若違約發生在到期日前，則在到期日時債券價值為 δ 。

其中

$r(s)$ 為隨時間 t 變動的即期利率。

δ 為回覆率（recovery rate）。

τ_j 為 j 等級債券違約發生的時間點。

T 為債券到期日 。

接下來將上式展開

$$\begin{aligned} V_j(t,T) &= V_0(t,T)\left[1\cdot\tilde{P}_t(\tau_j > T) + \delta\cdot\tilde{P}_t(\tau_j \le T)\right] \\ &= V_0(t,T)\left[\delta + (1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}\right] \end{aligned} \tag{3-5}$$

其中 $\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}$ 為存活率，即非違約情形機率的加總，以公式表示如下：

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t\{\tau_j > T\} &= \sum_{k=1}^{K}\tilde{q}_{jk}(t,T) \\ &= 1-\tilde{q}_{j,k+1}(t,T) \end{aligned} \tag{3-6}$$

依照 JLT(1997)設定風險中立移動機率為原來移動機率 q_{ij} 乘以一個風險調整項 $\pi_i(t)$ (The Risk Premium Adjustment)，公式如下：

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1) = \begin{cases} \pi_i(t)q_{ij} & , i \ne j \\ 1-\pi_i(t)(1-q_{i,K+1}) & , i = j \end{cases} \tag{3-7}$$

且 $\pi_i(t)$ 滿足

$$0 < \pi_i(t) \le \frac{1}{1-q_{ii}}, \quad i \in \hat{N}$$

由(3-7)式之定義，經過推導後(推導過程如下節所列)可得

$$\pi_j(0) = \frac{V_0(0,1)-\delta V_j(0,1)}{(1-\delta)V_0(0,1)q_{j,K+1}} \tag{3-8}$$

觀察(3-8)式後發現，分母存在 $q_{j,K+1}$ 這一項，$q_{j,K+1}$ 代表 j 等級債券發生違約的機率，故對高等級債券(j)而言，$q_{j,K+1}$ 會非常小甚至為零而違反假設的限制條件。因此為了修正這個數值上的困擾，我們將在下一節討論 Kijima(1998)所提出的模型，希望能找到合理的數值。

第三節 Kijima and Komoribayashi(1998) 模型(K.K model)

爲了修正上節不合理的數值情形，K.K 依照 JLT 設定風險中立移動機率爲原來移動機率 q_{ij} 乘以一個風險調整項 (The Risk Premium Adjustment)的觀念，將 $\pi_i(t)$ 換爲 $l_i(t)$，並修正公式如下：

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1)=\begin{cases} l_i(t)q_{ij} & ,j\neq K+1 \\ 1-l_i(t)\left(1-q_{i,K+1}\right) & ,j=K+1 \end{cases} \tag{3-9}$$

利用 $\tilde{Q}(t,t+1)$ 的性質我們可以推導 $l_i(t)$ 的上下限如下：

$$\begin{aligned}
1&=\sum_{j=1}^{K}\tilde{q}_{ij}(t,t+1)+\tilde{q}_{i,K+1}(t,t+1)\\
&=\sum_{j=1}^{K}l_i(t)q_{ij}+\tilde{q}_{i,K+1}(t,t+1)\\
&=l_i(t)\sum_{j=1}^{K}q_{ij}+\tilde{q}_{i,K+1}(t,t+1)\\
&=l_i(t)\left(1-q_{i,K+1}\right)+\tilde{q}_{i,K+1}(t,t+1)\\
&\Rightarrow l_i(t)\left(1-q_{i,K+1}\right)\leq 1\\
&\Rightarrow 0<l_i(t)\leq\frac{1}{1-q_{i,K+1}} \quad ,i\in\hat{N}
\end{aligned} \tag{3-10}$$

令 $a_i=1-q_{i,K+1}>0 \ \ for\ all\ i\in\hat{N}$

a_i 代表沒有發生違約的機率，可由 $\sum_{j=1}^{K}q_{ij}$ 得到。

接著 $l_i(t)$ 可由下列式子推導而得，首先令

$$L_D(t)=\begin{pmatrix} l_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_K(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(t,t+1)=L_D(t)A=\begin{pmatrix} l_1(t)q_{11} & l_1(t)q_{12} & \cdots & l_1(t)q_{1K} \\ l_2(t)q_{21} & l_2(t)q_{22} & \cdots & l_2(t)q_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_K(t)q_{K1} & l_K(t)q_{K2} & \cdots & l_K(t)q_{KK} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{R}(t,t+1)=e-L_D(t)Ae \qquad \text{此處 } e=(1,1,\cdots,1)' \tag{3-11}$$

這裡的 $\tilde{A}(t,t+1)$ 與 $\tilde{R}(t,t+1)$ 定義與前文一致，分別代表非發生違約狀態下的子矩陣與 $\tilde{Q}(t,t+1)$ 矩陣內第 K+1 行前 K 個移動機率所組成的行向量。

根據 $\tilde{Q}(t,t+1)$ 矩陣，我們可以計算等級 i 債券存活率 $\tilde{P}_r(\tau_i>T)$ 為

$$\tilde{P}_r(\tau_i>T)=\sum_{k=1}^{K}q_{ik}(0,t)$$

以向量 $b(t)$ 代表各個不同等級的存活率，公式如下：

$$\begin{aligned} b(t)&=\tilde{A}(0,t)e \\ &=\left(\sum_{k=1}^{K}q_{1k}(0,t),\sum_{k=1}^{K}q_{2k}(0,t),\cdots,\sum_{k=1}^{K}q_{Kk}(0,t)\right)' \end{aligned}$$

根據前文，等級 j 債券存活率 $\tilde{P}_r(\tau_i>T)$，可以由等級 j 債券的市場價格 $V_j(0,T)$、$V_0(0,t)$ 及回覆率 δ 計算得到，公式如下：

$$\tilde{P}_r(\tau_j>T)=\sum_{k=1}^{K}q_{jk}(0,t)=\frac{V_j(0,t)-\delta V_0(0,t)}{(1-\delta)V_0(0,t)}$$

另一方面根據先前假設，$\tilde{A}(0,t+1)$ 可展開如下：

$$\begin{aligned} \tilde{A}(0,t+1)&=\tilde{A}(0,t)\tilde{A}(t,t+1) \\ &=\tilde{A}(0,t)L_D(t)A \qquad t=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3-12}$$

(3-12)式左右兩邊同乘 e 可得

$$\tilde{A}(0,t+1)e=\tilde{A}(0,t)L_D(t)Ae$$

又$\because b(t)=\tilde{A}(0,t)e$，故

$$b(t+1)=\tilde{A}(0,t)L_D(t)Ae$$

假設$\tilde{A}(0,t)$的反矩陣存在則

$$L_D(t)Ae=\tilde{A}^{-1}(0,t)b(t+1)$$

$$l_j(t)a_j=\sum_{K=1}^{K}\tilde{q}_{iK}^{-1}(0,t)\frac{V_K(0,t)-\delta V_0(0,t)}{(1-\delta)V_0(0,t)} \quad \mathrm{j}\in\hat{N}$$

將a_j移到等號右邊，即可得到風險調整像$l_j(t)$為

$$l_j(t)=\frac{1}{1-q_{j,K+1}}\sum_{k=1}^{K}\tilde{q}_{ik}^{-1}(0,t)\frac{V_K(0,t)-\delta V_0(0,t)}{(1-\delta)V_0(0,t)} \quad \mathrm{j}\in\hat{N} \qquad (3\text{-}13)$$

第四節 評價信用衍生性商品

接下來將上述模型應用於信用價差選擇權的評價。

定義在時間 t，信用等級 i 的債券，其到期收益率 $Y_i(t,T)$ 表示為

$$Y_i(t,T) = -\frac{\ln V_i(t,T)}{T-t}, \quad \text{i=0,1,2,} \cdots$$

等級 i 債券殖利率與無風險債券的價差 $\Delta_i(t,T)$ 為

$$\begin{aligned}\Delta_i(t,T) &= Y_i(t,T) - Y_0(t,T) \\ &= -\frac{1}{T-t}\ln\frac{V_i(t,T)}{V_0(t,T)}\end{aligned}$$

將(3-5)式代入得到

$$\begin{aligned}\Delta_i(t,T) &= Y_i(t,T) - Y_0(t,T) \\ &= -\frac{1}{T-t}\ln\frac{V_0(t,T)\left[\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}\right]}{V_0(t,T)} \\ &= -\frac{1}{T-t}\ln\left[\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}\right]\end{aligned} \tag{3-14}$$

在(3-14)中，如果在到期日之前不發生違約，則 $\tilde{P}_t\{\tau_j > T\} = 0$ 。

現在考慮一個歐式信用價差賣權，令 i 等級信用風險價差賣權到期日為 t，債券到期日為 T，履約價差為 K，則其歐式信用價差賣權到期價值可表示為

$$\left\{K - \Delta_{\tilde{x}_t}(t,T)\right\}_+$$

此處 $\{x\}_+ = \max\{x,0\}$ ， $\tilde{x}_t$ 代表在 t 時信用等級為 $\tilde{x}_t = i$ 。

在風險中立下，信用價差賣權的價值為

$$\Pi_i = \tilde{E}_i\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\left\{K - \Delta_{\tilde{x}_t}(t,T)\right\}_+\right] \tag{3-15}$$

此處 $r(s)$ 為無風險即期利率。

利用 $r(s)$ 與 $\tilde{x}_t$ 獨立的假設，可將(3-15)式展開為

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \tilde{E}_i\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]\tilde{E}_i\left[\left\{K-\Delta_{\tilde{X}_t}(t,T)\right\}_+\right] \\ &= V_0(0,t)\,\tilde{E}_i\left[\left\{K-\Delta_{\tilde{X}_t}(t,T)\right\}_+\right]\end{aligned} \tag{3-16}$$

其中 $\tilde{E}_i\left[\left\{K-\Delta_{\tilde{X}_t}(t,T)\right\}_+\right]=\sum_{j=1}^{k+1}\tilde{q}_{ij}(0,t)\left\{K-\Delta_j(t,T)\right\}_+$

此處 $\Delta_{\tilde{X}_t}(t,T)=\Delta_j(t,T)\quad \tilde{q}_{ij}(0,t)$

$\tilde{q}_{ij}(0,t)$ =從時點 0 至賣權到期日 t，信用等級 i 債券變成 j 的移動機率。

將(3-14)代入(3-16)可得

$$\begin{aligned}\left\{K-\Delta_{\tilde{X}_t}(t,T)\right\}_+ &= \left\{K+\frac{1}{T-t}\ln\left[\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t\left\{\tau_j>T\right\}\right]\right\}_+ \\ &= \left\{K+\frac{1}{T-t}\ln\left[1-(1-\delta)\tilde{q}_{j,K+1}(t,T)\right]\right\}_+\end{aligned}$$

整理上述各式後，最後可以得到歐式信用價差賣權的評價公式為

$$\Pi_i = V_0(0,t)\sum_{j=1}^{k+1}\tilde{q}_{ij}(0,t)\left\{K+\frac{1}{T-t}\ln\left[1-(1-\delta)\tilde{q}_{j,K+1}(t,T)\right]\right\}_+ \tag{3-17}$$

第四章 實証研究

本章將以實際資料代入前一章介紹的信用風險模型中，驗證各模型的可行性及實務上會遇到的困難並加以調整解決。

第一節 相關資料來源及處理

相關研究資料利用台灣經濟新報社 TEJ 所公佈之 TCRI 評等，以及「貨幣觀測與信用評等」期刊擷取而得。由於台灣經濟新報社將信用評等區分為 1~9 及 D 等(TCRI 以 1 為最好，9 為最差，D 代表違約)，因為取得的各級信用價差曲線的資料是將 TCRI 評等分為 4 個區間，即 1~4 為一個區間，5~6 為一個區間，7~9 為一個區間，D 一個區間，故將信用評等轉移矩陣也調整成相同分組方式，此處台灣經濟新報社定義發生以下事件為違約(如附錄一)。

整理出信用評等轉移矩陣及各級零息債券到期收益率如表 4-1、表 4-2：

表 4-1 TCRI 信用評等轉移矩陣 (單位：%)

年	TCRI	家數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
89	1	11	81.82	18.18	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	25	0	84	8	0	8	0	0	0	0	0
	3	34	0	11.76	55.88	26.47	5.88	0	0	0	0	0
	4	86	0	1.16	3.49	68.6	20.93	5.81	0	0	0	0
	5	131	0	0	0	9.16	58.02	21.37	9.16	2.29	0	0
	6	117	0	0	0	1.71	12.82	57.26	22.22	4.27	0	1.71
	7	82	0	0	0	1.22	2.44	8.54	58.54	13.41	9.76	6.1
	8	64	0	0	0	0	0	0	10.94	56.25	21.88	10.94
	9	66	0	0	0	0	0	1.52	3.03	4.55	66.67	24.24
	D	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

資料來源：「貨幣觀測與信用評等」期刊

表 4-2 各級零息債券到期收益率 (單位：%)

TCRI	90 天	180 天	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年	6 年
1-4	6.11	6.52	6.67	6.11	5.72	5.78	6.11	6.52
5-6	6.39	6.81	7.01	6.73	6.67	6.81	6.86	6.60
7-9	6.75	7.38	7.88	7.67	7.33	7.27	7.42	7.66

資料來源：「貨幣觀測與信用評等」期刊 (處理方法整理於附錄二)

接下來將表 4-1 處理成分爲四組的情形如下表 4-3 及表 4-4，以便進行後續分析。

表 4-3 信用評等轉移矩陣分爲四組之情形(以家數表示) (單位：家數)

年	TCRI	家數	1-4	5-6	7-9	D
89	1-4	133	107	26	0	0
	5-6	248	14	186	46	2
	7-9	212	1	10	159	42
	D	34	0	0	0	34

表 4-4 信用評等轉移矩陣分爲四組之情形(以百分比表示) (單位：%)

年	TCRI	家數	1-4	5-6	7-9	D
89	1-4	133	80.45	19.55	0.00	0.00
	5-6	248	5.65	75.00	18.54	0.81
	7-9	212	0.47	4.71	75.00	19.82
	D	34	0.00	0.00	0.00	100.00

第二節 信用計量法台灣資料實證結果

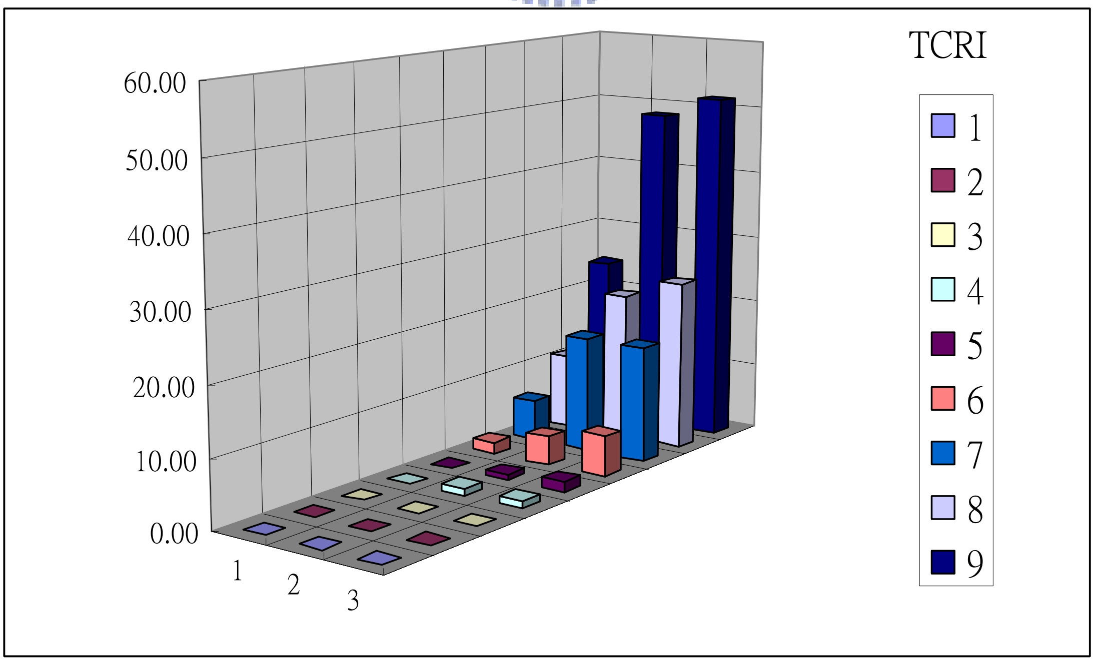
本節將依照第三章第一節的作法分析台灣資料，首先參考表 4-5 的累積違約率，我們可以觀察到評等越差的公司發生違約的可能越高，且隨著時間拉長累積違約率也有明顯增加，以圖形表示為圖 4-1。

表 4-5　各級評等累積違約率

TCRI	89 年	1 年內違約		2 年內違約		3 年內違約	
	總家數	%	家數	%	家數	%	家數
1	11	0	0	0	0	0	0
2	25	0	0	0	0	0	0
3	34	0	0	0	0	0	0
4	86	0	0	1.16	1	1.16	1
5	131	0	0	0.76	1	1.53	2
6	117	1.71	2	4.27	5	5.98	7
7	82	6.1	5	17.07	14	17.07	14
8	64	10.94	7	21.88	14	25.00	16
9	66	24.24	16	48.48	32	51.52	34

資料來源：「貨幣觀測與信用評等」期刊

圖 4-1 各級評等 3 年累積違約率



根據下列步驟求解信用風險值，首先將期初信用等級為 5~6 區間的公司當做觀察目標，由表 4-4 得知此評等區間在期末變為其他區間的機率可表示為表 4-6 。

表 4-6 信用評等為[5~6]區間的轉移機率

目前為信用評等為**[5~6]**

[5~6]

5.65% [1~4]

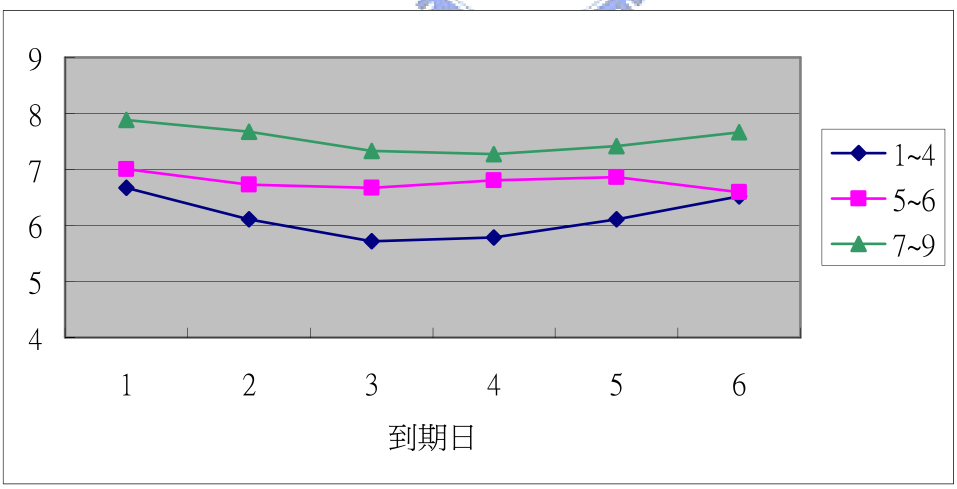
75.00% [5~6]

18.54% [7~9]

0.81% [D]

100.00%

圖 4-2 TCRI 各級評等殖利率曲線



接下來加上圖 4-2 TCRI 各級評等殖利率曲線的資訊，可推得一年後信用評等變動爲其他等級後之重估價值，並假設發生違約後，回收率爲 51.13%，結果整理如表 4-7。

表 4-7 重估價值

一年後信用等級	重估價值($)
1~4	104.1197
5~6	103.4253
7~9	99.43633
D	51.13

將表 4-6 及表 4-7 之資訊彙整於表 4-8，並計算相關數値列於表中。

表 4-8 信用等級改變後債券價值的變動情形

一年後的信用等級	發生機率(%)	重估價值($)	機率加權值($)	重估價值與平均值之差($)	機率加權差之平方
1~4	5.65	104.1197	5.882763	1.818313	0.186804
5~6	75.00	103.4253	77.56898	1.123913	0.947386
7~9	18.54	99.43633	18.4355	-2.86506	1.521865
Default	0.81	51.13	0.414153	-51.1714	21.20994
		平均值=$102.3014		變異數=23.86599 標準差=$4.8852	

其中機率加權值=發生機率*重估價值；

重估價值與平均值之差=重估價值-平均值；

機率加權差之平方=發生機率*(重估價值與平均值之差)^2 ；

平均值=$\sum_{i=1}^{s} p_i \mu_i$

$$=\begin{Bmatrix} 5.65\% * 104.1197 + \\ 75.00\% * 103.4253 + \\ 18.54\% * 99.43633 + \\ 0.81\% * 51.15 \end{Bmatrix}$$

$$= 102.3014$$

標準差=$\sqrt{\sum_{i=1}^{s} p_i \mu_i^2 - \mu_{Total}^2}$

$$=\begin{Bmatrix} 5.65\% * 104.1197^2 + \\ 75.00\% * 103.4253^2 + \\ 18.54\% * 99.43633^2 + \\ 0.81\% * 51.13^2 \end{Bmatrix} - 102.3014^2$$

$$= 4.8852$$

最後計算信用風險值如下：

若假設價值分配爲常態分配，利用表 4-8 中所列之標準差($4.8852) 求得 5%信用風險值及 1%信用風險值爲：

5%信用風險值=1.65*σ = $ 8.060717

1%信用風險值=2.33*σ = $ 11.38271

若假設價值分配爲實際分配，可得：

第 1 百分位數值(實際上爲 0.81 百分位數值)爲 $ 51.13 且第 5 百分位數值(實際上爲 19.85 百分位數值)爲 $ 99.43633。

所以 1%信用風險值(實際上爲 0.81% VAR)= $ 51.1714

5%信用風險值(實際上爲 19.85% VAR)= $ 2.86506

因爲上述數值差距過大，故根據 saunders(2002)書中建議，可以利用線性補插求得第 1 百分位數值接近 $ 51.6476 且第 5 百分位數值接近 $ 62.54588

故 1%信用風險值= $ 102.3014- $ 51.6476= $ 50.6537

5%信用風險值= $ 102.3014- $ 62.5458= $ 39.7555

第三節 信用價差選擇權實証探討

由信用評等轉移矩陣及債券價格等資訊，並利用(3-13)式可求出風險調整項 $l_i(t)$。將求出的風險調整項乘上原本的信用評等轉移矩陣，即為風險中立下之信用評等轉移矩陣。令 $\delta = 0$ (回收率為零)，觀察 KK 及 JLT 所計算出之信用風險調整項，計算結果如下：

首先列出 KK 的信用風險調整項 $l_i(t)$ ，如表 4-9

表 4-9 信用風險調整項 $l_i(t)$

	到期日(年)						
TCRI	1	2	3	4	5	6	上限
1-4	0.987347	0.99107	0.999442	0.999739	0.989705	0.973066	1
5-6	0.992428	0.988692	0.98441	0.975475	0.968285	0.97273	1.008166
7-9	1.218388	1.203669	1.197495	1.187872	1.171348	1.149823	1.247194

上表中最後一欄為 $l_i(t)$ 的理論上限(3-10 式)，從表中可以觀察到任何信用等級及其各到期日之 $l_i(t)$ 均小於其理論上限，表示在 KK 的假設下數值上有合理的結果。

JLT 的假設下所計算出的信用風險調整項 $\pi_i(t)$ ，結果如下表 4-10

表 4-10 信用風險調整項 $\pi_i(t)$

	到期日(年)						
TCRI	1	2	3	4	5	6	上限
1~4	1.281466	0.901255	0.056061	0.026254	1.040243	2.767914	5.115089514
5~6	1.957844	2.431989	2.979515	4.137708	5.084887	4.497431	4
7~9	0.119285	0.182454	0.209408	0.251974	0.326693	0.42726	4

此處最後一欄為 $\pi_i(t)$ 理論上限，觀察上表可以發現信用評等[5~6]區間在到期日為 4 年時，出現大於理論上限的情形，故本文採用 KK 的方法來修正 JLT 風險調整項的計算方式，以修正數值上不合理的情形。

接下來觀察三種回收率下的信用風險調整項期間結構，選擇$\delta=0$、$\delta=0.25$及$\delta=0.5$等情況加以討論，由圖 4-3 及圖 4-4 可得，較高信用等級(信用等級 1~4 區間)的信用風險調整項小於 1，而在較低信用等級(信用等級 7~9 區間)，信用風險調整項有大於 1 的現象，此結果與 KK 文中之實証資料相同。如果觀察回收率大小對信用風險調整項的影響，可以發現在回收率較低時，會得到較高的信用風險調整項，我們可以在信用等級 1~4 區間及 7~9 區間都發現有此現象。

圖 4-3 信用等級 1~4 區間的信用風險調整項期間結構

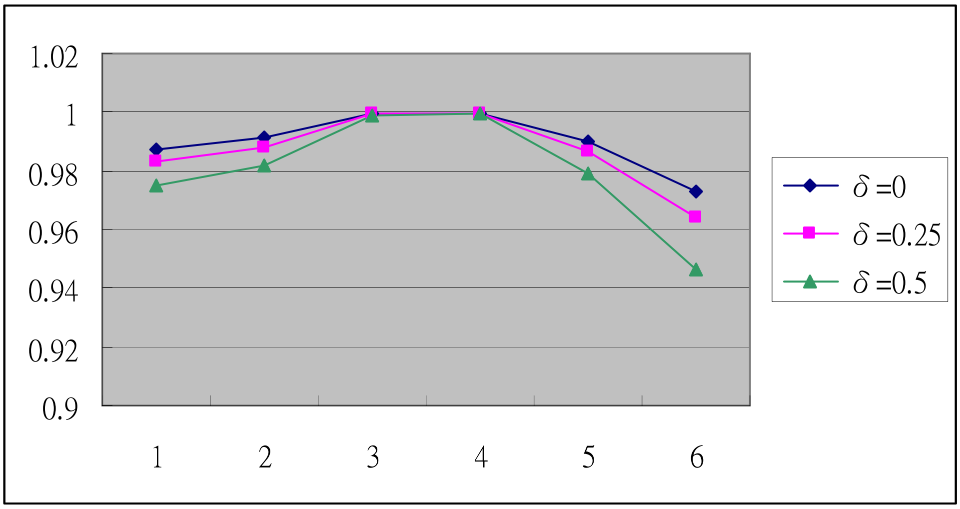
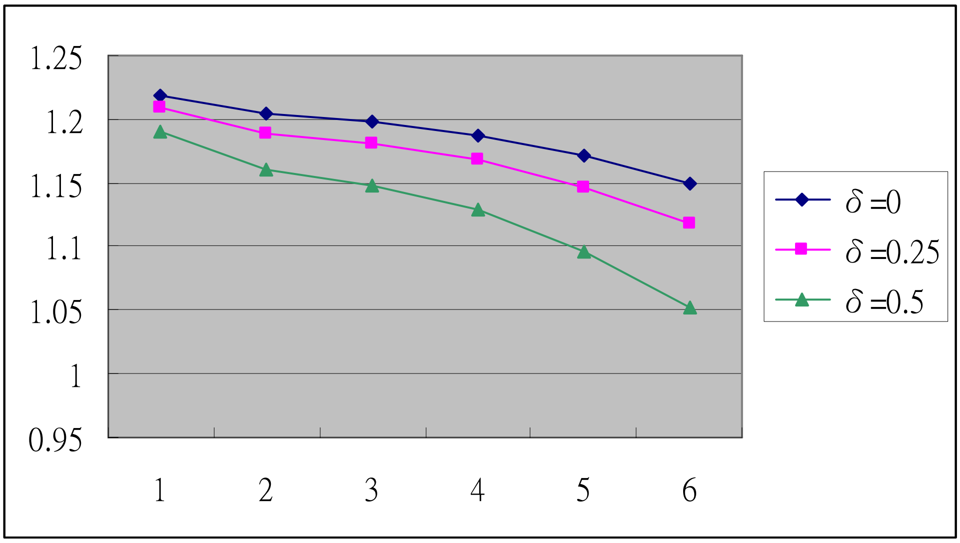


圖 4-4 信用等級 7~9 區間的信用風險調整項期間結構



更進一步，利用(3-17)式可以計算出信用價差賣權的價格(令 T=6，K=0.03)結果整理如圖 4-5 及圖 4-6 所示。考慮回收率造成的影響，一般來說如果發生違約回收率愈低則投資人損失愈高，換句話說若發生違約，回收率愈低會造成債券的報酬率變低，進而使信用價差賣權的價格變低，由信用等級 1~4 區間及信用等級 5~6 區間的信用價差選擇權期間結構圖形似乎支持此想法，但是觀察信用價差賣權的公式後發現，回收率大小也會使信用風險調整項產生改變，而信用風險調整項也是決定信用價差賣權價格的其中一項變數，故修正上述說法為考慮各項效果的影響大小後，報酬率的影響效果大於信用風險調整項的影響，也就是說回收率越小會使得本文實証資料下之信用價差賣權變低。

圖 4-5 信用等級 1~4 區間的信用價差選擇權期間結構

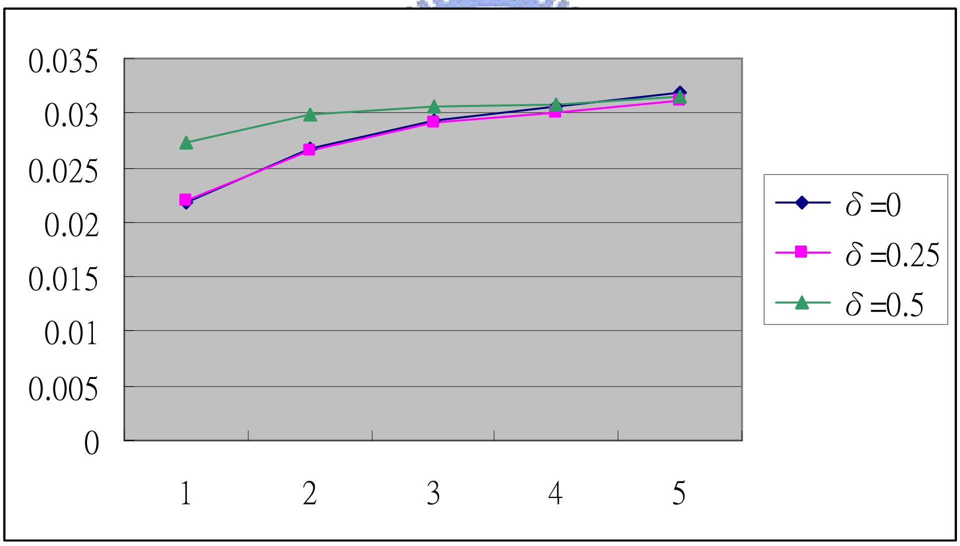
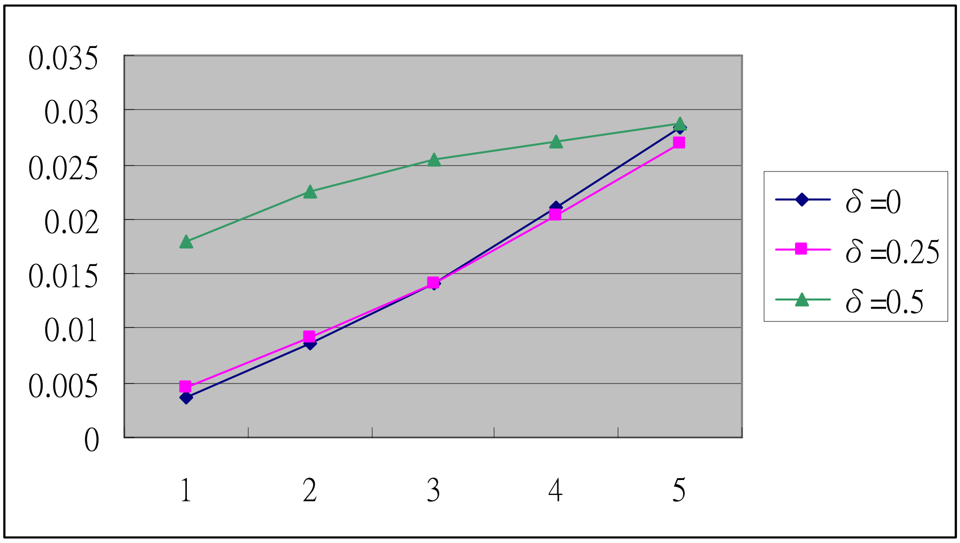
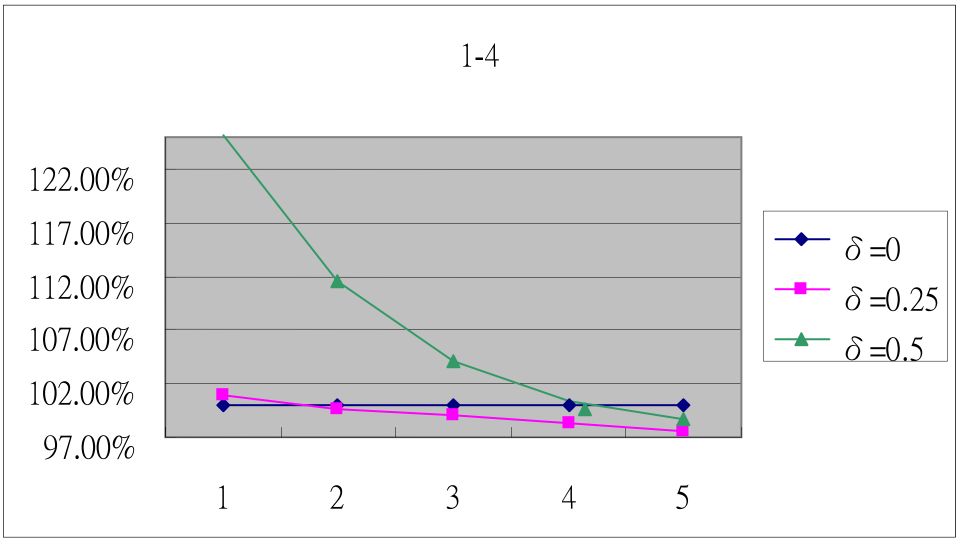


圖 4-6 信用等級 5~6 區間的信用價差選擇權期間結構



從另一個角度來看，因爲在實證研究上估計回收率是一項非常困難的工作，所以如果能找到有某種穩健性存在，將提供一個非常重要的訊息，對不確定回收率下的信用價差賣權定價具有很大的參考價值。這裡的穩健性代表當回收率在某個範圍內時不會對信用價差賣權的價格有明顯的影響，我們舉高信用等級(信用等級 1~4 區間)的信用價差選擇權期間結構關係圖來做說明，如下圖 4-7

圖 4-7 信用價差選擇權期間結構關係圖



圖中以$\delta = 0$的信用價差選擇權期間結構作爲基準，可以看到$\delta = 0.25$的信用價差選擇權期間結構非常貼近基準，但是$\delta = 0.5$的信用價差選擇權期間結構與基準有非常大的差異故較不具參考價值。

第五章 結論與建議

本篇論文主要建構在信用評等轉移矩陣上，透過 J.P. Morgan 的 CreditMetrics™法及 Jarrow、Lando 及 Turnbull 的模型進行研究，最後應用於信用價差選擇權上，並嘗試從此過程中証實信用風險控管的重要性。由前一章台灣資料實証結果，我們針對信用風險值與信用價差選擇權做以下結論：

(一)在 CreditMetrics™法中，選擇標準差或百分位水準當做衡量風險的依據，可以明顯看出評等等級改變所造成價值的波動程度，但是兩者所計算出來的信用風險值有相當程度的差異，可就以下幾點來分析其原因：

1. 台灣各評等等級之價差曲線資料目前尚未十分完備，所以資料處理過程中，將評等等級由原本十個等級重新分爲四個區間，這也使得評等區間改變時，觀察價值變動的程度會變大，造成誤差的產生。不過隨著往後評等資料愈來愈健全時，可以克服這項缺點。

2. 違約回覆率δ是一個可以更進一步探討的部份，本研究中的違約回覆率採用國外文獻之歷史平均值，後續研究可以朝估計台灣違約回覆率的方向進行。

(二)從信用價差選擇權的實証結果，可看出包括不同等級區間、回收率、到期日及其他相關變數對信用價差賣權的影響，這可做爲未來以台灣資料，進行信用相關衍生性商品研究時的參考。

本文主要研究的模型屬於縮減式模型，此類模型在評價特定公司相關的違約訊息時較不具精確性，原因在於，模型假設在相同信用等級的公司具有相同信用價差，這使得同信用等級中公司與公司之間的差異性不能被突顯，而且信用評等的發佈並不是非常具有即時性，無法精確反應特定公司當時的情形，但是從另一個角度來看，從整體公司的觀點，信用評等轉移矩陣仍是一個非常好的指標，可提供給投資者一個良好的風險參考依據。

參考文獻

【中文部份】

1. 沈大白、莊盧(2002)，「信用計量法(CreditMetrics)之實證研究」，貨幣觀測與信用評等，第 36 期，96-105。

2. 施宜君(2001)，信用風險之評價與應用，國立政治大學金融所碩士論文。

3. 徐中敏(2004)，「國內企業戶違約損失率研究」，信用資訊。

4. 陳松男(2002)，金融工程學：金融商品創新選擇權理論，華泰書局。

5. 張大成、楊佳寧(2001)，「銀行放款(BankLoan)暨債券殖利率曲線的推估」，貨幣觀測與信用評等，第 31 期，82-89。

6. 蕭惠元、陳惠玲(2002)，「各級 TCRI 之違約率統計」，貨幣觀測與信用評等，第 34 期，19~25。

【英文部分】

1. Altman E. I. and A. C. Eberhart (1994), “Do Seniority Provisions Protect Bondholders’ Investments?” Journal of Portfolio Management, 67-75.

2. Altman E. and D. L. Kao (1992). “The implications of corporate bond rating drift. ” Financial Analysts Journal , 64-75.

3. Anthony Saunders, Linda Allen, (2002), Credit Risk Measurement, John Wiley & Sons,Inc.

4. Asarnow, Elliot, and David Edwards (1995), “Measuring Loss on Defaulted Bank Loans: A 24-Year Study” The Journal of Commercial Lending.

5. Bangia, A., F. X. Diebold, and T. Schuermann(2000)“Ratings Migration and the Business Cycle, with Applications to Credit Portfolio Stress Testing.”Working Paper 26, Wharton Financial Institutions Center.

6. Carty, L. V., D. T. Hamilton, S. C. Keenan, A. Moss, M. Mulvaney, T. Marshella, and M. G. Subhas (1998), “Bankrupt Bank Loan Recoveries” Moody’s Special Comment,1-18.

7. Carty, L.V. and Lieberman (1996) , “Defaulted Bank Loan Recoveries” , Moody’s Special Report, 1-9.

8. Duffie, D. and K.J. Singleton (2003), Credit Risk Pricing, Measurement, and Management.

9. Gupton, G.M., Finger, C. and Bhatia, M (1997)., CreditMetricsTM-Technical Document, J.P. Morgan & Co. Incorporated.

10. Gupton, G. M., D. Gates, and L. V. Carty (2000) , “Bank Loan Loss Given Default” Moody’s Special Comment, 1-15.

11. Jarrow, R.A., Turnbull, S.M. (1995) "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk", Journal of Finance, Vol. L, No. 1, Cornell University, and Queen's University (Canada), pp. 53-85.

12. Jarrow, R.A., Lando, D., Turnbull, S.M. (1997), “A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spread”, The Review of Financial Studies, vol 10, No. 2, 481-523.

13. Kijima, M., Komoribayashi, K (1998), “A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives”, The Journal of Derivatives, 97-108.

14. Kim, J.(1999) “Conditioning the Transition Matrix.” Credit Risk：37-40.

15. M. Crouhy, D. Galai & R. Mark (2000), “A comparative analysis of current credit risk models.” Journal of Banking and Finance, Vol.24, 59-117.

16. Nickell, P., W Perraudin, and S. Varotto.(2001) “Stability of Rating Transitions.” Journal of Banking and finance 24, no. 1/2：203-228.

附錄一

以下述 9 類事件的「爆發」，作爲違約計入時點

事件	說明
1 倒閉破產	宣告倒閉、惡性倒閉、或破產
2 重整	聲請重整
3 跳票擠兌	公司跳票、或銀行擠兌
4 紓困求援	向財政部申請紓困、或向銀行要求展延、減息並掛帳、個別要求或召開債權人會議，全面要求都算 與銀行之展延，原則上以見報曝光、或財報上明確寫明「展延」者爲限。
5 接管	雖未跳票，但原經營者下台 看似沒有違約之事，不過，接管後多半會跟銀行協商展延債務，還是會落入第 4 種狀況
6CPA 意見	對其繼續經營有疑慮
7 淨值爲負	公司淨值爲負數，且經營層無增資打算
8 全額下市	轉列全額交割股、或下市 之所以受到交易所這類處分，原因主要有 3 類 （1）財務危機、或 （2）虧損過鉅以致每股淨值不及 5 元；或 （3）違反資訊揭露、不在期限內召料股東會、改選董事 其中，第（3）項屬經營代理成本過高之疑慮，看似與違約無關，但事後來看，多半會發展爲財務危機。故本類不再細分。 反倒是第（2）項，可能因減資、或現金增資，提高每股淨值後，就回復普通交易。
9 財務吃緊停工	停工未必涉及違約，但若停工消息見報時，已確定是因財務吃緊，則續後必發展成財務危機。

附錄二

沈大白、楊佳寧(2001)利用 Nelson 及 Siegel(1987)所推導出的節約參數模型(Parsimonious Model)及 Svensson (1994)模型之相關理論，來試推不同信用評等等級銀行借款利率之殖利率曲線。

其公式可表示如(1)式，是採用指數多項式的型態來表示遠期利率，而透過(2)式，我們可得到(3)式的即期利率，其中$r(m)$為遠期利率，$R(m)$為即期利率，m為到期期間，r為一未知的時間參數。

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau} + \beta(m/\tau)e^{-m/\tau} \tag{1}$$

$$R(m) = \frac{1}{m}\int_0^m r(x)dx \tag{2}$$

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1(\tau/m)\left[1 - e^{-m/\tau}\right] + \beta_2(\tau/m)\left[1 - e^{-m/\tau}(m/\tau + 1)\right] \tag{3}$$

其中β_0是用以描述殖利率曲線斜率的平行移動，說明殖利率與期間之長期關係，β_1是用以描述殖利率曲線斜率的變化，說明殖利率與期間的短期關係，至於β_2則是用以描述殖利率曲線曲度的改變，即說明殖利率與期間短期關係。

Svensson 四因子模型函數延伸 Nelson 及 Siegel 節約參數模型函數，以截距、斜率及雙曲度來描述利率曲線，公式如下：

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2(m/\tau_1)e^{-m/\tau_1} + \beta_3(m/\tau_2)e^{-m/\tau_2} \tag{4}$$

因 Nelson 及 Siegel 所推導出來的三因子模型，只包含了單一駝峰的情況。但殖利率曲線也可能出現雙駝峰之情況，因此 Svensson(1994)對 Nelson 及 Siegel 所推導之模型，進行延伸，考慮曲線為雙駝峰之情況，因此(1)式的遠期利率方程式，將會變成(4)式的型態，其中$r(m)$為遠期利率，τ_1、τ_2為未知的時間參數，另(4)式透過(2)式即可求出即期利率方程式。再利用不同之τ_1、τ_2將可求出β_0、β_1、β_2和β_3，四個參數的不同組合，其中β_2和β_3是用來述殖利率曲線的曲度。

銀行借款資料由台灣經濟新報 TEJ Profile 中上市櫃及公開發行銀行借款明細資料庫(所有銀行貸款)取得。