

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

複合材料積層板及樑結構  
之彈性常數識別



**Elastic Constants Identification of Laminated  
Composite Plate and Beam Structures**

研究生：陳志明

指導教授：金大仁 教授

中華民國九十五年九月

複合材料積層板及樑結構之彈性常數識別  
**Elastic Constants Identification of Laminated  
Composite Plate and Beam Structures**

研究生：陳志明

**Student : Chih-Ming Chen**

指導教授：金大仁 教授

**Advisor : Tai-Yan Kam**

國立交通大學

機械工程學系



A Thesis

**Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Doctor of Philosophy  
in**

**Mechanical Engineering**

**September 2006**

**Hsinchu, Taiwan, Republic of China**

**中華民國九十五年九月**

# 複合材料積層板及樑結構之彈性常數識別

學生：陳志明

指導教授：金大仁

國立交通大學機械工程學系

## 摘要

本文提出結合複合材料力學及數值最佳化之方法來識別已成形加工之複合材料積層板及樑結構的彈性常數值。考慮複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-y方向之軸向拉力時，或複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗，應變與複合材料積層結構之各勁度間的關係，以及利用所產生之應變來作為建立複合材料積層板及樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數，進而識別出複合材料積層板結構之材料彈性常數 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 。其方法是先量測出複合材料積層板結構受軸向拉力後之軸向應變、橫向應變及剪應變值，或複合材料積層樑結構受力矩後之軸向應變、橫向應變及剪應變值，利用這些應變值建立成為數值最佳化之目標函數，以複合材料積層板或樑結構的各項彈性常數值為變數，再求取有限制條件下，目標函數的總域極小值，藉搜尋不同路徑以識別出複合材料積層板及樑結構的各項彈性常數值，數值最佳化的方法中，其設計變數是以隨機多起始點同時搜尋的方法將其運用在數值最佳化中，隨機多起始點同時搜尋

的方法是利用可變區間內各獨立變數以隨機取樣的方法找出各獨立變數的起始點，以此方式同時做為搜尋軌跡的開始，以找到目標函數之區域極小值。上述是利用擴增拉格蘭吉乘子法，來得到一個無限制條件的新目標函數，再結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏逼近法和貝氏論點以及總域極小值之數值最佳化演算法，找到誤差函數之極小值，便可精確而且迅速識別出複合材料積層結構的各項彈性常數。

第二部份是研究兩階段識別法來識別當複合材料積層板或樑結構，只有軸向應變及橫向應變值時，則必需使用兩階段式識別法來複合材料積層板或樑結構之彈性常數識別法，依前述之方法先以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 45^\circ$ 對稱堆疊的複合材料積層板或樑結構的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板或樑結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再量測 $\pm \beta^\circ$  (非 $\pm 45^\circ$ ) 對稱堆疊的複合材料積層板或樑結構的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板或樑結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層板或樑結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

本文將以 Graphite/epoxy (Gr/ep)及 Glass/epoxy (Gl/ep)為材料，分別以不同之堆疊方式為例子，來證實本方法之可行性及精確性，再以 Gr/ep 之複合材料做實驗來驗證之。

# **Elastic Constants Identification of Laminated Composite Plate and Beam Structures**

**Student: Chih-Ming Chen**

**Advisor: Tai -Yan Kam**

**Department of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University**



A simple yet effective nondestructive evaluation technique for determining four elastic constants of symmetric angle-ply plates/beams is presented. For elastic constants identification of composite materials, using three measured strains of a single angle-ply laminate subjected to tensile testing, or three strains measured in, respectively, axial, lateral, and 45 degree directions from a symmetric angle-ply composite beam subjected to three-point bending testing are used to identify the elastic constants of the material. In the proposed method, the trial material constants of the angle-ply laminate/beam are used in the laminate/beam analysis to predict the strains in the laminate/beam. An error function is established to measure the difference between the experimental and theoretical

predictions of the strains. The identification of material constants is then formulated as a constrained minimization problem in which the material constants are determined to make the error function a global minimum. The accuracy and capability of the proposed method are demonstrated by means of a number of examples on the material constants identification of angle-ply laminates with different layups. The accuracy of the proposed technique is studied by means of a number of examples on the elastic constants identification of graphite/epoxy (Gr/ep) or glass/epoxy (Gl/ep) symmetric angle-ply beams. The excellent results obtained in this study have demonstrated the feasibility and applications of the proposed technique.

In this thesis, a two-level optimization method for elastic constants identification of symmetric angle-ply laminates/beams is also presented. Measured axial and lateral strains of two symmetric angle-ply laminates/beams with different fiber angles are used in the proposed method to identify four elastic constants of the composite material. In the first-level optimization process, the theoretically and experimentally predicted axial and lateral strains of a  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  laminate are used to construct the error function which is a measure of the differences between the experimental and theoretical predictions of the axial and lateral strains. In the second-level optimization process, the shear modulus and Poisson's ratio determined in the previous level of optimization are kept constant while the Young's moduli of the second angle-ply laminate with fiber angles other than  $45^\circ$  are identified using the same minimization technique that has been used in the previous level. The accuracy of the proposed

method are studied by means of a number of examples on the material constants identification of symmetric angle-ply laminates/beams made of different composite materials.



## 誌 謝

在博士求學生涯中，承蒙指導教授金大仁博士之諄諄教誨，諸多啟發，實獲益良多，不論是學問之紮根，或待人處世之循循善誘，使吾一生受益無窮。

求學期間深受國立勤益技術學院創辦人張明將軍及王國秀女士之嘉勉鼓勵，在此特別致謝；恩師陳大潘教授、蕭國模教授、尹慶中教授及蔡佳霖教授於在校期間之傾囊相授，實是銘感於心；歷屆畢業之學長林世章博士、張瑞榮博士、佘海豐博士、賴峰民博士、朱高弘博士、吳家宏博士及王文庭博士之愛護照顧與經驗傳承，令吾感激不已。

在實驗室中學弟妹們無私的幫忙與協助下，方能克服諸多困境，博士班的偉芬、清榮、士璋、昌毅、于昇、崧任，碩士班的添淦、穎志、睿伸、玉修、乃綱、曉強、永剛、俊行、財維、東恩、正義、坤森、鎮隆、志鴻、巧鈴、國晉、維成、建郎、慶博、欣翰、建勳、哲瑋、國真、加融、耀文、永立、聖傑、魁原，這些同甘共苦的夥伴們，吾將永誌於心；此外，並感謝張馨櫻小姐，對實驗室之付出與關懷。

母親在吾求學期間罹患肺癌，卻仍念念不忘對吾之關愛，在此深深感謝雙親的養育關懷之恩情；對於愛妻旭圭、女兒陳瑩、兒子俊佑的疏於照顧，更深感歉意，然有賴於賢妻的鼎力相助，方可度過生命

中的低潮和難關，回首來時路，心中無限感恩，僅以此文，獻給曾經  
關照並愛護吾之人士。

陳志明 謹誌

2006. 8 於交通大學機械工程學系



# 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	iii
誌謝.....	vi
目錄.....	viii
表目錄.....	xii
圖目錄.....	xviii
符號說明.....	xxi
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究背景與文獻回顧.....	2
1.3 研究方法.....	4
1.4 數值模擬分析.....	9
1.5 實驗驗證.....	11
第二章 複合材料積層結構之力學理論.....	14
2.1 複材結構之力學理論.....	15
2.2 有限元素法分析.....	27

第三章	複合材料積層板及樑結構之彈性常數識別.....	33
3.1	數值最佳化理論.....	35
3.1.1	隨機多起始點搜尋的方法.....	36
3.1.2	區域極小值的尋找方法.....	37
3.1.3	總域極小值之判別方法.....	41
3.1.4	擴增拉格蘭吉乘子法.....	42
3.2	複材積層板及樑結構之彈性常數識別...	45
3.2.1	複合材料積層樑或板結構的彈性常數單一階段識別法.....	45
3.2.2	複合材料積層板或樑結構的兩階段彈性常數識別法.....	49
3.3	靈敏度分析.....	56
第四章	實驗設計說明.....	59
4.1	試片製作.....	60
4.2	標準試片之材料的彈性常數量測.....	60
4.3	應變規組.....	61
4.4	拉伸試驗機.....	64
4.5	單一段識別法之應變量測.....	64

4.5.1	複合材料積層板結構受軸向負載之應變量測.....	65
4.5.2	複合材料積層樑結構之三點彎曲試驗與應變量測.....	68
4.6	兩階段識別法之應變量測.....	71
4.6.1	複合材料積層板結構之應變量測.....	71
4.6.2	複合材料積層樑結構之應變量測.....	74
第五章 結果與討論.....		77
5.1	複合材料積層板及樑結構之單一階段識別法.....	77
5.1.1	複合材料積層板結構之數值模擬.....	78
5.1.2	複合材料積層板結構單一階段識別法之實驗驗證.....	83
5.1.3	複合材料積層樑結構單一階段識別法.....	87
5.1.4	複合材料積層樑結構單一階段識別法之實驗結果.....	91
5.2	複合材料積層板及樑結構之兩段式識別法...	94
5.2.1	複合材料積層板結構兩階段識別法之數值模擬.....	95

5.2.2	複合材料積層板結構兩階段識別法之實際實驗 .....	101
5.2.3	複合材料積層樑結構兩階段識別法之數值模擬 .....	104
5.2.4	複合材料積層樑結構兩階段識別法之實驗結果 .....	109
第六章 結論與未來發展方向 .....		113
6.1	結論 .....	113
6.2	未來發展方向 .....	117
參考文獻 .....		118
附錄. 程式流程圖 .....		128



## 表 目 錄

表 3-1.	Gr/ep 複合材料積層樑單一階段識別法之靈敏度.....	131
表 3-2.	Gl/ep 複合材料積層樑單一階段識別法之靈敏度.....	132
表 3-3.	Gr/ep 複合材料積層板兩階段識別法之靈敏度.....	133
表 3-4.	Gl/ep 複合材料積層板兩階段識別法之靈敏度.....	134
表 3-5.	Gr/ep 複合材料積層板四應變一階段識別之靈敏度.....	135
表 3-6.	Gr/ep 複合材料積層樑兩階段識別法之靈敏度.....	136
表 3-7.	Gl/ep 複合材料積層樑兩階段識別法之靈敏度.....	137
表 4-1.	Graphite/Epoxy 之複材板結構之各項彈性常數值.....	138
表 5-1.	F= 1kN之Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論應變值...	138
表 5-2.	以F= 1kN理論應變值識別Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之各項彈性常數值.....	139
表 5-3.	以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論 應變值.....	140
表 5-4.	以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的理論應變值識別Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之各項彈性常數值.....	141
表 5-5.	以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的Gl/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論應	

	變值.....	142
表 5-6.	以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的理論應變值識別G1/ep 複材板結構 [[ $(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ$ ]之各項彈性常數值.....	143
表 5-7.	$F= 0.5\text{kN}$ Gr/ep複材板結構 $[\theta^\circ]_9$ 之理論應變值.....	144
表 5-8.	以 $F= 0.5\text{kN}$ 的理論應變值識別Gr/ep 複材板結構 $[\theta^\circ]_9$ 之各項 彈性常數值.....	144
表 5-9.	$F= 0.5\text{kN}$ G1/ep複材板結構 $[\theta^\circ]_9$ 之理論應變值.....	145
表 5-10.	以 $F= 0.1\text{kN}$ 的理論應變值識別G1/ep 複材板結構 $[\theta^\circ]_9$ 之各項 彈性常數值.....	145
表 5-11.	以 $N_x = 16.667\text{kN/m}$ 及 $N_y = 0$ 的Gr/ep複材板結構 [[ $(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ$ ]之實驗應變值.....	146
表 5-12.	以 $N_x = 16.667\text{kN/m}$ 及 $N_y = 0$ 的Gr/ep複材板結構 [[ $(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ$ ]之實驗應變值識別之各項彈性常數值...	147
表 5-13.	以 $N_x = 10\text{kN/m}$ 及 $N_y = 0$ 的Gr/ep複材板結構 [[ $(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ$ ]之實驗應變值.....	148
表 5-14.	以 $N_x = 10\text{kN/m}$ 及 $N_y = 0$ 的Gr/ep複材板結構 [[ $(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ$ ]之實驗應變值識別之各項彈性常數值.....	149
表 5-15.	$F= 3\text{N}$ Gr/ep複材樑結構[[ $(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6$ ] <sub>s</sub> 之理論應變值.....	150

表 5-16.	理論應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	150
表 5-17.	理論應變值以隨機多起始點識別Gr/ep 複材樑結構 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	151
表 5-18.	F= 1N Gl/ep複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值.....	152
表 5-19.	理論應變值識別Gl/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	152
表 5-20.	F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值.....	153
表 5-21.	實驗應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	154
表 5-22.	F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值.....	155
表 5-23.	實驗應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	156
表 5-24.	F= 0.5kN Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之理論應變值.....	157
表 5-25.	以理論應變值第一階段所識別Gr/ep 複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	158
表 5-26.	以理論應變值第一階段所識別Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	159

表 5-27.	以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板 結構 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	160
表 5-28.	以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板 結構 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	161
表 5-29.	以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板 結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	162
表 5-30.	以理論應變值第二階段所識別 Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值.....	163
表 5-31.	$F= 0.1\text{kN}$ Gl/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之理論應變值.....	164
表 5-32.	以理論應變值第一階段所識別 Gl/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	164
表 5-33.	以理論應變值第二階段所識別 Gl/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值.....	165
表 5-34.	以 $F= 0.5\text{kN}$ 的 Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之實驗應變值...	166
表 5-35.	以實驗應變值第一階段所識別 Gr/ep 複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值.....	167
表 5-36.	以實驗應變值第二階段所識別 Gl/ep 複材板結構 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值.....	168

表 5-37.	$F= 3NGr/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值.....	169
表 5-38.	以理論應變值第一階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	169
表 5-39.	理論應變值以隨機多起始點第一階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑 結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	170
表 5-40.	以理論應變值第二階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值.....	171
表 5-41.	理論應變值以隨機多起始點第二階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑 結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	172
表 5-42.	$F= 1N G_l/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值.....	173
表 5-43.	以理論應變值第一階段所識別 $G_l/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	173
表 5-44.	理論應變值第二階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值.....	174
表 5-45.	$F= 3N Gr/ep$ 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值.....	175
表 5-46.	以實驗應變值第一階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值.....	176
表 5-47.	實驗應變值第二階段所識別 $Gr/ep$ 複材樑結構 $(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$	

之各項彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值..... 177



## 圖 目 錄

圖 2-1.	主結構方向 x-y 與主材料方向 1-2 示意圖.....	178
圖 2-2.	複材層板之幾何及負載示意圖.....	179
圖 2-3.	複合材料積層板結構受軸向拉力 F 示意圖.....	180
圖 2-4.	複材層樑之幾何及負載示意圖.....	181
圖 2-5.	$[45^\circ]_{24}$ 與 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊之複材積層樑舉起現象...	182
圖 2-6.	$[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.....	182
圖 2-7.	$[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.....	183
圖 2-8.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.....	183
圖 2-9.	$[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.....	184
圖 2-10.	$\frac{L}{w} = 33.3$ 之 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.	184
圖 2-11.	$\frac{L}{w} = 16.7$ 之 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.....	185
圖 2-12.	$\frac{L}{w} = 8.3$ 之 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象.	185
圖 2-13.	複材積層樑有限元素分割示意圖.....	186
圖 2-14.	複材積層樑中間點不同疊層應變之誤差百分比圖.....	186
圖 2-15.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑軸向應變誤差百分比圖.....	187

圖 2-16.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑橫向應變誤差百分比圖	187
圖 2-17.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑剪應變誤差百分比圖	188
圖 2-18.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑橫向之軸向應變誤差百分比圖	188
圖 2-19.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑橫向之橫向應變誤差百分比圖	189
圖 2-20.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑橫向之剪應變誤差百分比圖	189
圖 2-21.	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材積層樑中間點各應變誤差百分比圖	190
圖 2-22.	$\frac{L}{w} = 33.3$ 之 $[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑橫向各應變之誤差百分比曲線圖	190
圖 2-23.	$\frac{L}{w} = 16.7$ 之 $[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑各橫向應變之誤差百分比曲線圖	191
圖 2-24.	$\frac{L}{w} = 8.3$ 之 $[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑橫向各應變之誤差百分比曲線圖	191
圖 2-25.	$[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑中間軸向應變之誤差百分比曲線圖	192
圖 2-26.	$[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑中間橫向應變之誤差百分比曲線圖	192
圖 2-27.	$[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑中間剪應變之誤差百分比曲線圖	193

圖 3-1.	最佳化收斂路徑圖.....	196
圖 4-1.	KYOWA 型號 KFG-3-120-D17-11L3M2S 之應變規組.....	197
圖 4-2.	KYOWA 型號 KFG-3-120-D16-11L3M2S 之應變規組.....	197
圖 4-3.	拉伸試驗機.....	198
圖 4-4.	複合材料積層板拉伸試驗之尺寸大小.....	199
圖 4-5.	$[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖...	201
圖 4-6.	複材積層樑結構受力 F 作用時之三點彎曲試驗示意圖...	202
圖 4-7.	複合材料積層樑結構之三點彎曲試驗圖.....	203
圖 4-8.	對稱堆疊的複合材料積層樑結構之試片.....	204
圖 4-9.	複材層樑三點彎曲試驗之尺寸大小.....	205
圖 4-10.	Gr/ep $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖...	207
圖 4-11.	Gr/ep $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖...	209
圖 4-12.	$[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖.....	210
圖 4-13.	$[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖.....	211
圖 4-14.	Gr/ep $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖...	212
圖 4-15.	Gr/ep $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖...	213

## 符號說明

- $\{\sigma\}^{(m)}$  : 複材層板第  $m$  層之主結構方向應力矩陣
- $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  : 主結構方向  $x$  方向之正向應力、 $y$  方向之正向應力及剪應力
- $[\bar{Q}]^{(m)}$  : 複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向的勁度矩陣
- $Q_{ij}; (i, j = x, y, s)$  : 複合材料積層板之各勁度
- $E_1$ 、 $E_2$  : 楊氏係值
- $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$  : 剪力係數、蒲松比
- $\{\epsilon\}^{(m)}$  : 複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向的應變矩陣
- $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$  :  $x$ -方向之正向應變、 $y$ -方向之正向應變及剪應變
- $\{\epsilon^0\}$  : 複合材料積層板中間面應變矩陣
- $\epsilon_x^0$ 、 $\epsilon_y^0$ 、 $\gamma_{xy}^0$  : 中間面  $x$ -方向之正向應變、 $y$ -方向之正向應變及剪應變
- $\{\kappa\}$  : 複合材料積層板中間面之曲率矩陣
- $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 、 $\kappa_{xy}$  :  $x$  方向之曲率、 $y$  方向之曲率、中間面在  $x$ - $y$  平面上的翹曲曲率
- $\{N\}$  : 複合材料積層板結構之每單位長度之合力矩陣

- $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  : x 方向、y 方向之單位長度之正向力及由 x-方向之平面作用到 y 軸方向之每單位長度的剪力
- $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[D]$  : 拉伸勁度矩陣、耦合勁度矩陣、彎曲勁度矩陣
- $\{M\}$  : 每單位長度的合力矩陣
- $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$  : x 方向之單位長度的合力矩、y 方向之單位長度的合力矩、x-方向之平面作用到 y 軸方向之每單位長度的合力矩
- $A_{ij};(i, j = x, y, s)$  : 複合材料積層板之各拉伸勁度
- $D_{ij};(i, j = x, y, s)$  : 複合材料積層板之各彎曲勁度
- $e(x)$  : 目標函數
- $x_i$  : 設計之獨立變數
- $x_i^L$ 、 $x_i^U$  : 獨立變數之下限值、獨立變數之上限值
- $\mu_j$ 、 $\eta_j$ 、 $r_p$  : Lagrange 乘子
- $\varepsilon_x^*$ 、 $\varepsilon_y^*$ 、 $\gamma_{xy}^*$  : 實驗所得的軸向應變、橫向應變及剪應變值
- $\xi$  : 放大係數
- $\alpha_i$  : 正規化係數
- $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p)$  : 無限制條件新的目標函

# 第一章 緒 論

## 1.1 研究動機

複合材料積層結構體具有較低之密度、相對於相同強度之材料有質量更輕、耐腐蝕性佳、及高強度等諸多優點，所以廣泛地應用在各種科技工程、航太工業、軍事用途、運動器材、汽車工業、造船工業及近年來極為盛行的電子工業等；複合材料積層結構體比起傳統之金屬材料更能滿足設計及使用者所需之特性，現今各國更不斷研發新的製造技術並使其增強機械性質且使其更加強化複合材料積層結構體之性能。

複合材料積層結構體最常用的不外乎是複合材料積層板及樑等結構，而複合材料積層板及樑等結構，則是近年來諸多研究之重點，其廣泛地應用在工業及電子科技上，其中複合材料積層樑結構是一般結構體相互連結之基本元件，而合材料積層板更是結構體承受外力及力矩之重要結構。

複合材料積層板及樑等結構，在工業上之應用已日漸普遍，而且經由於複材性質之提升及製造方法之不斷改進，複合材料積層板及殼之設計及使用，已日益獲得重視。然而複合材料積層樑及板結構，在不同的製造過程及製造環境，皆會影響其材料的各種彈性常數，故如何迅速且精確的測量到以成形加工之複合材料結構體的各项彈性常數，以提供做為設計製造分析之用是當前急需解決的重要研究與課題。對複合材料積層板而言，一般是依據ASTM之規範D3039 量測複合

材料積層板楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，D3518之規範量測之複合材料積層板剪力模數 $G_{12}$ ，需要三種試片，進行各種拉伸試驗，量測出複合材料積層板之各項材料常數；對複合材料積層樑而言，在ASTM之D790規範主要是量測一般材料之抗彎強度，或以三點彎曲試驗來量測一般等方向性材料樑受彎矩之楊氏係數值 $E$ ，並無對於複合材料積層樑之楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 之量測。

本文欲提出一種簡易、精確及快速簡便之新的量測方法，利用一種或兩種試片，藉由量測複合材料積層板結構或複合材料積層樑結構之應變值，便能夠迅速而精確的識別出複合材料積層結構的各項彈性常數，以提供作為設計分析之基礎，或品管快速且方便之檢查法；此外，當材料使用一段時間後，亦可藉由本文之方法做識別，以觀測材料性質的變化。



## 1.2 研究背景與文獻回顧

複合材料積層板及樑結構之力學理論源自於古典之板及樑理論而來，複合材料積層結構之力學理論發展迄今已相當臻善，在 Jones [1]、Tsai 及 Hahn [2]、Vinson 和 Sierakowski [3] 及 Swanson [4] 於其所編著之複合材料力學之相關書籍中，對複合材料積層板及樑結構之力學理論皆有完整之推導，故對於基礎之複合材料積層板及樑結構力學理論之推導與介紹，本文將參考上述文獻來推導複合材料積層結構之力學理論。

近年來數值最佳化的理論廣泛應用在工程科學中，本文之數值最

佳化的理論主要是應用 Snyman 及 Fatti [5]所提出之多起始點總域極小值演算法及動力搜尋軌跡的數值最佳化理論，隨後 Kam 及 Snyman [6]應用上述之理論與技術到複合材料積層結構之最佳化設計，近年來，Kam 及其研究團隊 [7-13] 亦應用前述之數值最佳化的理論，發展出一套可靠度高且高效率之方法，應用在複合材料科學上。本文主要是以隨機多起始點(Multi-Start Method)及總域極小值(Global minimum)的方法和貝氏(Bayesian)分析法[5-13] 以及擴增拉格蘭吉乘子法(Augment Lagrange Multiplier Method 簡稱 A.L.M.) [7-14]將有限制條件之目標函數轉變成無限制條件之目標函數。Lee [15]在其博士論文中及其所提及之相關參考文獻中[16-21]有詳細介紹類神經網路及基因演算法以及最佳化理論之比較，本文不多加贅述。Kam 及其研究團隊[22-36]多年來研究最佳化之方法來求取複合材料之特性，如 Kam 及 Lee [22-25]將數值最佳化的理論應用在複合材料科學上微小裂縫(Crack)之識別。Kam 和 Lai [26-31]，以及 Kam 之研究團隊[32]將數值最佳化的理論應用在複合材料之設計及製造技術上，使其可得到最輕之複合材料積層板、最大剛性之複合材料積層板及三明治複合材料積層板之最佳化設計等，以及複合材料積層板之首層破壞的研究。Kam 及 Liu [33]將數值最佳化的理論應用在複合材料桿之勁度識別。Wang 及 Kam [34-35]將數值最佳化的理論及利用複合材料科積層板之位移與變形的關係應用在複合材料積層板之彈性常數識別。Kam 等[36]將數值最佳化的理論及複合材料壓力容器充壓後之各項應變的關係應用在複合材料壓力容器之彈性常數識別。

此外，Hoa 等[37]研究編織複材之性質，Bledzki 等[38] 以振動頻率來求取  $G_{I/ep}$  複合材料科積層板彈性常數，Marín 等[39-40] 以拉伸

試驗之法來探討複材剪力常數之性質，其克服試片夾持端造成剪應變之影響的方法，是在試片夾持端鑽孔，以夾具將試片穿過鑽孔，再做拉伸試驗以克服試片夾持端造成剪應變之阻礙問題；另有許多文獻皆在探討克服試片夾持端之剪應變的方法[41-43]，Pindera 及 Herakovich [41] 在探討單一偏角(Off-axis)之複合材料積層板，做拉伸試驗時之剪力與剪應變之特性，Pagano 和 Halpin [42]在探討單一偏角之複合材料積層板，克服試片夾持端之剪應變之影響，他們亦是利用在挾持端鑽孔，利用其上下夾頭可轉動來克服剪變形所造成之影響，Sun 及 Chung [43] 提出計算斜角的護片斜角來減少拉伸時應力不均之現象。

Grédiac 等及其研究團隊[44-46] 以虛場法結合有限元素分析來探討複材之各勁度或材料常數的性質，Hwang 及 Chang [47] 以振動實驗之頻率來求取複合材料積層板各彈性常數值，Marin [48] 以邊界元素法(Boundary element method)來識別等項性材料之各彈性常數值，Genovese 等[49]以位移及最佳化之法來求取複材之各彈性常數值，Deobald 及 Gibson [50]、 Frederiksen [51]、 Moussu 及 Nivoit [52]、 及 Fallstrom[53]以振動頻率及 Rayleigh-Ritz 法來求取複合材料積層板彈性常數，Taktak 等[54] 以有限元素分析及最佳化之法來求取三維等向性材料之各彈性常數值。有數個研究者以數值模擬或實驗之方法利用 10~16 個振動頻率求取複合材料積層結構體之各項彈性常數[55-60]。

本文主要是延續本人指導教授 Kam 多年來的研究，而發展出一套可輕易識別複合材料積層板及樑等結構之各項彈性常數之方法並以實驗來印證此方法之精確性可行性。

### 1.3 研究方法

一般量測複合材料積層板楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，是依據ASTM [61]之規範D3039 量測之複合材料積層板楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，D3518 之規範量測之複合材料積層板剪力模數 $G_{12}$ ，進行各種拉伸試驗，即可量測出複合材料積層平板之各項材料常數；然而對於複合材料積層樑之各項材料常數之量測則只有利用以振動頻率來探討複合材料積層樑之特性 [62-65]，在ASTM之規範D790 主要是量測一般材料之抗彎強度，及以三點彎曲試驗來量測一般等方向性材料樑受彎曲之楊氏係數值 $E$ ；而對於複合材料積層樑之楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 之量測則鮮少有文獻探討。本文即主要探討如何以簡便及迅速之方法，來量測複合材料積層板及樑之各項彈性常數值。

本文提出兩種識別方法，分別是單一階段識別法及兩階段識別法；首先說明單一階段識別法之使用時機，當奇數層正負角對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即  $x$ -方向之軸向拉力  $F$  時有軸向應變、橫向應變及剪應變值時，或是正負角對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以向下之線負載  $F$ ，可以量測到複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值時，便可作複合材料積層結構之單一階段識別，進而識別出複合材料積層結構之各彈性常數，由以上可知，當複材積層結構可量測到軸向應變、橫向應變及剪應變值時，便可以一種試片做單一階段識別；兩階段識別法之使用時機，是當偶數層正負角對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即  $x$ -方向之軸向拉力  $F$  時，只有軸向應變及橫向應變值，並無剪應變值，識別時會因為只有兩個應變值，

而條件不夠，無法識別出各彈性常數值，本文以兩種試片，用兩階段識別法來解決這個問題，此外，由靈敏度分析可以知道，無論是複合材料積層板或樑結構，兩階段識別法，可以適當降低複材積層結構識別之靈敏度，進而提高識別時之精確度。

首先考慮複合材料積層板結構，在承受主結構方向（Principal laminated axes）即x-方向之軸向拉力時，應變與複合材料積層結構之各勁度(Stiffness)間的關係，以及利用此軸向拉力所產生之應變來作為建立複合材料積層板結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數，進而識別出複合材料積層板結構之四個材料彈性常數，分別是楊氏係數 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 。

因為複合材料積層板結構，在主結構方向即 x-方向承受一個正向之軸向拉力作用時，且由複合材料積層板結構之力學推導可知各應變與各拉伸勁度值皆有相當大之關係，而複合材料積層板結構之各彈性常數識別，主要是以複合材料積層板結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，當複合材料積層結構承受拉力作用時，利用應變與複合材料積層板結構之各勁度間之關係，以軸向拉力所產生之應變識別出複合材料積層板結構之四個材料彈性常數。本文研究將以所有已知應變值量測值，作為建立複合材料積層板結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數，本文在結果與討論中將證實以所有已知應變量測值，來識別複合材料積層板結構各彈性常數是確實可行的且精確性亦相當良好。

第二部份是考慮對稱堆疊複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗

時，在中間承受一力 $F$ 作用，即在 $x$ -方向承受總力矩 $M$ 作用後，各應變與各勁度值之關係，利用應變與複合材料積層樑結構之各勁度間之關係，建立複合材料各積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數，在利用數值最佳化之方法，識別出複合材料積層樑結構之四個材料彈性常數，分別是楊氏係數 $E_1$ 、 $E_2$ 、剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 。

本文研究將以所有已知應變值量測值，作為建立複合材料各積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，其設計變數再以隨機多起始點方式及在第三章所介紹之數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，此設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數值，本文在結果與討論中將證實以已知應變值，來識別複合材料積層樑結構之各彈性常數之可行性與精確性。

利用前述所推得之複合材料積層板結構受軸向拉力作用後，得到其各應變值與各勁度之關係式，再以實驗所得之應變值，建立一個有限制條件之誤差函數的數學模式，以數值最佳化的方法，將複合材料積層板結構之各項彈性常數值為變數，來求取誤差函數(即數值最佳化理論所稱之目標函數)的極小值，如此，便可精確地識別複合材料積層板結構之各彈性常數值，而這種方法就是複合材料積層板結構之彈性常數識別法；對複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，在中間承受一力 $F$ 作用，即在 $x$ -方向承受總力矩 $M$ 作用後，各應變與各勁度值皆有相當大之關係，再以實驗所得之應變值，建立一個有限制條件之誤差函數的數學模式，再以數值最佳化的方法，將複合材料積層樑結構之彈性常數為變數，來求取誤差函數(即數值最佳化理論則稱為目標函數)的極小值，如此，便可精確地識別複合材料積層樑結構之彈性常

數，而這種方法就是複合材料積層樑結構之彈性常數識別法。

在數值最佳化的方法中，其設計變數是以隨機多起始點同時搜尋的方法將其運用在數值最佳化中，隨機多起始點同時搜尋的方法是利利用可變區間內各獨立變數以隨機取樣的方法找出各獨立變數的起始點，以此方式同時做為搜尋軌跡的開始，以找到目標函數之區域極小值。本文主要是利用 IMSL[66]軟體中的 RNUN 副程式來執行以隨機多起始點搜尋軌跡的方法來搜尋，這種方法可使獨立變數在限制區間內以隨機取樣的方法來選取獨立變數值，故在無限制條件下且可微的目標函數，可以找出一些區域極小值。再以貝氏分析法的標準來判別數個區域極小值，使區域極小值落在臨時總域極小值之機率大於 0.995 時，則可找到真正的總域極小值。

上述是利用擴增拉格蘭吉乘子法，來得到一個無限制條件的新目標函數，再結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏分析法以及總域極小值之數值最佳化演算法，找到誤差函數之極小值，便可精確而且迅速識別出複合材料積層結構的各項彈性常數。

複合材料積層板及樑結構之各項彈性常數識別，有許多個獨立變數，且目標函數通常是非線性的函數，故欲求取其總域極小值或極大值是極為困難的，本文主要是以隨機多起始點及總域極小值的方法和貝氏分析法以及擴增拉格蘭吉乘子法 [5-14]將有限制條件之目標函數轉變成無限制條件之目標函數，再利用單位質量之質點在保守力場中運動，其必滿足能量守恆之原理，且把無限制條件的目標函數當成位能值，用多起始點軌跡搜尋的方法來搜尋最小位能值，而找到目標函數的總域極小值，便可精確而且迅速識別複合材料積層板及樑結構之彈性常數，此乃為本文之主要數值最佳化的方法。

## 1.4 數值模擬分析

首先，以標準試片之材料常數做為正確之複合材料積層板結構之各項材料常數，以作為和本文所識別出來的各項材料常數的比對標準，利用此各項材料常數可計算出複合材料積層板結構，在承受主結構方向即 x-方向之軸向拉力時的各項應變值，再以此各項應變值當成實驗所得之各項應變值，以所有已知應變值量測值，作為建立複合材料積層板結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層板結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，即可知本方法之可行性與正確性。

本文分別用已知奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力時的軸向應變、橫向應變及剪應變值，作一階段之複合材料積層板結構之各彈性常數識別。但當偶數層稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時，只有軸向應變及橫向應變值，而剪應變值為零時，則必需使用兩階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別法，其方法是先量測 $\pm 45^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再以量測 $\pm\beta^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構在承受主結

構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層板結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

同理，再以標準試片之材料常數做為正確之複合材料積層樑結構之各項材料常數，以作為和本文所研究之最佳化識別程式求取的各項材料常數的比對標準，利用此各項材料常數可計算出複合材料積層樑結構，在承受主結構方向即 x-方向受力矩時的各項應變值，再以此各項應變值當成實驗所得之各項應變值，以所有已知應變值量測值，來做為建立複合材料積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層樑結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，即可知本方法之可行性與正確性。

分別用對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力F，以量測複合材料積層樑結構下表面在主結構方向的軸向應變、橫向應變及剪應變值，作一階段之複合材料積層樑結構之各彈性常數識別。亦可用複合材料積層板結構之兩階段彈性常數識別法，來識別複合材料積層樑結構之各彈性常數值，其方法是當只有量測稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力F，以量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變及橫向應變時，則必需使用兩階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別法，其方法是先量測 $\pm 45^\circ$ 對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎

曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再以量測 $\pm\beta^\circ$ 對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，進而識別出複合材料積層樑結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

本文將舉數個例子來證實在識別複合材料積層板及樑結構的各項材料彈性常數值之可行性及精確性。

## 1.5 實驗驗證



最後將以數值模擬之結果，用來設計實驗，驗證本方法之可行性與精確性。首先製作標準複合材料積層平板，再依據 ASTM 的標準，裁成標準試片，以 MTS 萬能拉伸試驗機，進行各種拉伸試驗，即可測量出複合材料積層平板之各項材料常數，識別出來複合材料積層結構的各項材料常數的比對標準。

對複合材料積層板結構而言，第一部份是用已知奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即  $x$ -方向之軸向拉力  $F$  時的軸向應變、橫向應變及剪應變值，作單一階段之複合材料積層板結構之各彈性常數識別。複合材料積層板結構之材料彈性常數識別，是將相同製程之複合材料積層板結構，夾持於拉伸試驗機之上下夾頭上，在主結構方向即  $x$ -方向施以一軸向拉力  $F$  時，以應變規及其量測儀器來量測其軸向應變、橫向應變及剪應變值，以實驗所得之應各項

變量測值，作為建立複合材料積層板結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層板結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對。

第二部份是以偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時，只有軸向應變及橫向應變值，而剪應變值為零時，則必需使用兩階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別法，依前述之方法先以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 45^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再以應變規及其量測儀器來量測 $\pm \beta^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層板結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

對複合材料積層樑結構而言，第一部份是以有可量測到對稱堆疊之複合材料積層樑結構的軸向應變、橫向應變及剪應變值時，做單一階段之複合材料積層樑結構的材料彈性常數識別，其方法是將相同製程之複合材料積層樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力F，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向

應變、橫向應變及剪應變值，以實驗所之各項應變量測值，作為建立複合材料積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層樑結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，來證實在識別複合材料積層板及樑結構的各項材料彈性常數值之可行性及精確性。

第二部份，是用複合材料積層樑結構之兩階段彈性常數識別法，來識別複合材料積層樑結構之各彈性常數值，其方法是只有量測對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ ，以量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變及橫向應變時，則必需使用兩階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別法，其方法是先以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 45^\circ$ 對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再以應變規及其量測儀器來量測 $\pm \beta^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層樑結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

不論是複合材料積層板結構，或是複合材料積層樑結構，皆分兩部份來研究之，分別是以單一階段識別法及兩階段識別法，本文將以數值模擬及實際實驗來印證其可行性及精確性。

## 第二章 複合材料積層結構之力學理論

本章主要介紹並推導複合材料積層結構之力學理論，第一部分先推導複合材料積層板結構，在承受主結構方向即  $x$ -方向之軸向拉力時，之軸向應變、橫向應變及剪應變與複合材料積層板結構之各勁度間之關係，作為建立複合材料積層板結構之彈性常數識別的數值最佳化目標函數，以複合材料積層板結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，然後找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數。

第二部分是推導複合材料積層樑結構，承受力矩作用時，之軸向應變、橫向應變及剪應變與複合材料積層樑結構之各勁度間之關係，來建立複合材料各積層樑結構之彈性常數識別的數值最佳化目標函數，以複合材料積層樑結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，然後找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數。

複合材料積層結構之力學發展迄今已相當臻善，在 Jones [1]、Tsai 和 Hahn [2]、Vinson 和 Sierakowski [3]、及 Swanson [4] 於其所編著之複合材料力學及複合材料相關書籍中，對複合材料積層板及樑結構

之力學理論皆有完整之推導，故對於基礎之複合材料積層板及樑結構力學理之推導與介紹，本文將參考上述文獻 [1-4]，對識別複合材料積層板及樑結構之材料的彈性常數所需之複合材料力學理論，重新整理及推導於下列各節中。

## 2.1 複材結構之力學理論

複合材料積層板結構，主要是由數種不同夾角之單層複合材料 (Lamina) 預浸材堆疊熱壓成形而製成的，故其特性皆與堆疊之單層複合材料之性質及角度有關。

首先來推導一個由  $n$  個不同角度之單層複合材料堆疊而成的，複合材料積層板受外力作用時，其由下方往上算之第  $m$  層的應力-應變關係式，可寫成(2-1)式

$$\{\sigma\}^{(m)} = [\bar{Q}]^{(m)} \{\varepsilon\}^{(m)} \quad (2-1)$$

在(2-1)式中

$$\{\sigma\}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} \quad (2-2)$$

在(2-2)式中  $\{\sigma\}^{(m)}_{3 \times 1}$  為複合材料積層板第 m 層之主結構方向(如圖 2-1)的應力矩陣， $\sigma_x$  為複合材料積層板第 m 層之主結構方向 x 方向之正向應力， $\sigma_y$  為複合材料積層板第 m 層之主結構方向 y 方向之正向應力，而  $\tau_{xy}$  則為複合材料積層板第 m 層之主結構方向 x-y 平面的剪應力。

$$[\bar{Q}]^{(m)} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(m)} \quad (2-3)$$

在(2-3)式中， $[\bar{Q}]^{(m)}_{3 \times 3}$  為複合材料積層板第 m 層之主結構方向的勁度矩陣(Stiffness matrix)， $Q_{ij}$ ，(i, j = x, y, s) 為複合材料積層板第 m 層之各勁度，其值如下可參閱文獻[1-4]之推導，今將結果詳列於下：

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 + Q_{22}S^4 \\ Q_{xy} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})S^2C^2 + Q_{12}(S^4 + C^4) \\ Q_{yy} &= Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 + Q_{22}C^4 \\ Q_{xs} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})SC^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})S^3C \\ Q_{ys} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})S^3C + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})SC^3 \\ Q_{ss} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})S^2C^2 + Q_{66}(S^4 + C^4) \end{aligned} \quad (2-4)$$

於上式中， $C = \cos\beta$ ， $S = \sin\beta$

在(2-4)中

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} = Q_{21} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{2-5}$$

$E_1$  為單層複合材料之纖維方向即 1 方向之楊氏係值 (Young's modulus)， $E_2$  為單層複合材料之基材方向即 2 方向之楊氏係值， $\nu_{12}$  為單層複合材料在纖維方向即 1 方向受力而在基材方向即 2 方向產生橫向應變之蒲松比 (Poisson's ratio)， $G_{12}$  為單層複合材料平面即 1-2 平面之剪力係數 (Shear modulus)。

在 Jones [1] 及 Tsai [67] 之複合材料相關書籍中可知，當纖維方向夾角為  $45^\circ$  時，剪力行為最強，故在第三章之兩階段複合材料積層結構體識別中，以  $\pm 45^\circ$  對稱堆疊之複合材料結構，在第一階段識別時可精確的識別出剪力係數  $G_{12}$ 。

而

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} \tag{2-6}$$

在(2-6)式中  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{(m)}$  為複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向的應變矩陣， $\varepsilon_x$  為複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向  $x$ -方向之正向應變， $\varepsilon_y$

為複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向  $y$ -方向之正向應變，而  $\gamma_{xy}$  則為複合材料積層板第  $m$  層之主結構方向  $x$ - $y$  平面的剪應變。

對於一個複合材料積層板第  $m$  層之應變矩陣可寫成(2-7)式

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{(m)} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} + z\{\boldsymbol{\kappa}\} \quad (2-7)$$

在(2-7)式中， $z$  為厚度方向， $z_{m-1} \leq z \leq z_m$ ； $\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\}_{3 \times 1}$  為複合材料積層板中間面(Middle surface)之主結構方向的應變矩陣， $\varepsilon_x^0$  為複合材料積層板中間面之主結構方向  $x$  方向之正向應變， $\varepsilon_y^0$  為複合材料積層板中間面之主結構方向  $y$  方向之正向應變，而  $\gamma_{xy}^0$  則為複合材料積層板中間面之主結構方向  $x$ - $y$  平面的剪應變。 $\{\boldsymbol{\kappa}\}$  為複合材料積層板中間面之曲率(Curvatures)矩陣， $\kappa_x$  為複合材料積層板中間面在  $x$  方向之曲率， $\kappa_y$  為複合材料積層板中間面在  $y$  方向之曲率，而  $\kappa_{xy}$  則為複合材料積層板中間面在  $x$ - $y$  平面上的翹曲曲率。

首先，我們要推導出複合材料積層板所受之應力的合力(Resultant force)與合力矩(Resultant moment)相對於應變與曲率之關係如下：

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

對於複合材料積層板所承受之應力的合力，其依定義可寫成(2-9)

式

$$\{\underline{\mathbf{N}}\} = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} \{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(m)}_{3 \times 1} dz = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} dz \quad (2-9)$$

其中

$$\{\underline{\mathbf{N}}\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

$\{\underline{\mathbf{N}}\}$  為複合材料積層板結構之每單位長度之合力矩陣即為應力的合力矩陣， $N_x$  為複合材料積層板結構主結構方向  $x$  方向之單位長度之正向力， $N_y$  為複合材料積層板結構主結構方向  $y$  方向之單位長度之正向(如圖 2-2)，而  $N_{xy}$  則為複合材料積層板結構由  $x$ -方向之平面作用到  $y$  軸方向之每單位長度的剪力。

$[\underline{\mathbf{A}}]$  為拉伸勁度矩陣(Extensional stiffness matrix)

$$[\underline{\mathbf{A}}] = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} [\underline{\mathbf{Q}}]^{(m)} dz \quad (2-11)$$

$[\underline{\mathbf{B}}]$  為耦合勁度矩陣(Coupling stiffness matrix)

$$[\mathbf{B}] = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} [\bar{\mathbf{Q}}]^{(m)} z dz \quad (2-12)$$

$[\mathbf{D}]$  為彎曲勁度矩陣(Bending stiffness matrix)

$$[\mathbf{D}] = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} [\bar{\mathbf{Q}}]^{(m)} z^2 dz \quad (2-13)$$

複合材料積層結構所承受之應力的合力矩，其依定義可寫成(2-14)

式

$$\{\mathbf{M}\} = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} \{\boldsymbol{\sigma}\}^{(m)} z dz = \sum_{m=1}^n \int_{z_{m-1}}^{z_m} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(m)} z dz \quad (2-14)$$

其中

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

$\{\mathbf{M}\}$  為複合材料積層板結構之每單位長度的合力矩矩陣， $M_x$  為複合材料積層板結構主結構方向在 x 方向之單位長度的合力矩， $M_y$  為複合材料積層板結構主結構方向在 y 方向之單位長度的合力矩，而  $M_{xy}$  則為複合材料積層板結構由 x-方向之平面作用到 y 軸方向之每單位長度的合力矩。

亦可將(2-8)式展開成(2-16)式

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

對於一個由不同角度之單層複合材料板所堆疊而成的複合材料積層板結構之平板而言，複合材料積層板之長×寬為  $a \times b$ ，厚度為  $h$ ，當複合材料積層板是對稱堆疊時，則耦合勁度矩陣  $[B] = 0$ ，若複合材料積層板只受應力合力作用時，且於各層板間無脫層現象發生，故複合材料積層板結構之各層間在主結構之應變皆一致，即各層之應變與中間面之應變相同，即

$$\{\epsilon\}^{(m)} = \{\epsilon^0\} = \{\epsilon\} \quad (2-17)$$

$\{\epsilon\}$  為複合材料積層板結構在主結構方向即  $x$ - $y$  平面之表面應變矩陣。

複合材料積層板結構單位長度所承受正向力時，其合力與應變之關係可寫成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{xs} \\ \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{yy} & \mathbf{A}_{ys} \\ \mathbf{A}_{xs} & \mathbf{A}_{ys} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

直接用拉伸勁度矩陣之反矩陣來求得，故應變矩陣可表成(2-19)式

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{xs} \\ \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{yy} & \mathbf{A}_{ys} \\ \mathbf{A}_{xs} & \mathbf{A}_{ys} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{xx} & \mathbf{a}_{xy} & \mathbf{a}_{xs} \\ \mathbf{a}_{xy} & \mathbf{a}_{yy} & \mathbf{a}_{ys} \\ \mathbf{a}_{xs} & \mathbf{a}_{ys} & \mathbf{a}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-19)$$

將(2-19)式展開，可得(2-20)式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_x &= \mathbf{a}_{xx}\mathbf{N}_x + \mathbf{a}_{xy}\mathbf{N}_y + \mathbf{a}_{xs}\mathbf{N}_{xy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y &= \mathbf{a}_{xy}\mathbf{N}_x + \mathbf{a}_{yy}\mathbf{N}_y + \mathbf{a}_{ys}\mathbf{N}_{xy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} &= \mathbf{a}_{xs}\mathbf{N}_x + \mathbf{a}_{ys}\mathbf{N}_y + \mathbf{a}_{ss}\mathbf{N}_{xy} \end{aligned} \quad (2-20)$$

圖 2-2 為複合材料積層板結構之平板在主結構方向即x、y方向承受

一個正向之軸向合力 $\mathbf{N}_x$ 及 $\mathbf{N}_y$ 作用時， $\mathbf{N}_{xy}=0$ 的負載示意圖。

考慮複合材料積層板結構之平板在主結構方向即 x-方向承受一個正向之軸向拉力 F 下作用時(如圖 2-3)，在(2-20)式中

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{b}} \\ \mathbf{N}_y &= \mathbf{N}_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

因為複合材料積層板結構，在主結構方向即 x 方向承受一個正向之軸向拉力 F 下作用時，其 x 方向之應變通常為最大值，由上面所推

導可知各應變與各拉伸勁度值皆有相當大之關係，而複合材料積層板結構之各彈性常數識別，主要是以複合材料積層板結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，當複合材料積層板結構主結構方向即  $x$ -方向承受軸向拉力  $F$  時，各應變與複合材料積層結構之各勁度間之關係，以及利用此軸向拉力所產生之應變，本文研究將以所有已知應變值量測值，作為建立複合材料各積層結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，其設計變數再以隨機多起始點方式及下一章所介紹之數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數，本文在結果與討論中將證實以所有已知應變值，來識別複合材料積層板結構之各彈性常數之可行性與精確性。

今考慮複合材料積層樑結構，在無側向剪力作用時，當複合材料積層樑結構是對稱堆疊時，則耦合勁度矩陣  $[B]=0$ ，且複合材料積層樑結構無軸向力作用時則  $\{N\}=0$ ，可用上述之關係知，

$$\{M\} = [D]\{\kappa\} \quad (2-22)$$

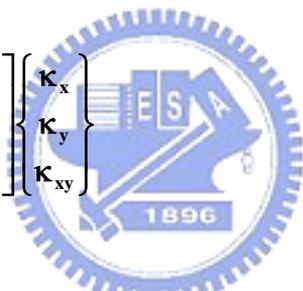
將上式展開可寫成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xs} \\ \mathbf{D}_{yx} & \mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{ys} \\ \mathbf{D}_{sx} & \mathbf{D}_{sy} & \mathbf{D}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-23)$$

若複合材料積層樑結構只承受 x-方向之力矩時，則

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2-24)$$

本文以窄樑理論來推導對稱堆疊之複合材料積層樑結構理論，即

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xs} \\ \mathbf{D}_{yx} & \mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{ys} \\ \mathbf{D}_{sx} & \mathbf{D}_{sy} & \mathbf{D}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-25)$$


在(2-25)式可求對稱堆疊之複合材料積層樑結構之曲率為(2-26)

式，即

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xy} & \mathbf{D}_{xs} \\ \mathbf{D}_{yx} & \mathbf{D}_{yy} & \mathbf{D}_{ys} \\ \mathbf{D}_{sx} & \mathbf{D}_{sy} & \mathbf{D}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{xx} & \mathbf{d}_{xy} & \mathbf{d}_{xs} \\ \mathbf{d}_{yx} & \mathbf{d}_{yy} & \mathbf{d}_{ys} \\ \mathbf{d}_{sx} & \mathbf{d}_{sy} & \mathbf{d}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2-26)$$

將(2-26)式展開可得

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= d_{xx} M_x \\
 \kappa_y &= d_{yx} M_x \\
 \kappa_{xy} &= d_{sx} M_x
 \end{aligned}
 \tag{2-27}$$

對於一根寬為  $w$ ，厚度為  $h$  之對稱堆疊複合材料積層樑結構，且在  $x$  方向承受總力矩  $M$  而言，由定義可知

$$M = wM_x \tag{2-28}$$

由(2-27)及(2-28)式可求到對稱堆疊之複合材料積層樑結構之  $x$  方向之曲率為

$$\kappa_x = d_{xx} M_x = \frac{d_{xx} M}{w} \tag{2-29}$$



對稱堆疊之複合材料積層樑結構之  $y$  方向之曲率為

$$\kappa_y = d_{yx} M_x = \frac{d_{yx} M}{w} \tag{2-30}$$

對稱堆疊之複合材料積層樑結構之  $x$ - $y$  平面上之翹曲曲率為

$$\kappa_{xy} = d_{sx} M_x = \frac{d_{sx} M}{w} \tag{2-31}$$

對於一根寬為  $w$ ，厚度為  $h$ ，且試驗區間長為  $L$  之對稱堆疊複合材料積層樑結構，在中間承受一力  $F$  作用時之三點彎曲試驗(如圖 2-4)而

言，即在 x-方向承受總力矩 M 之對稱堆疊複合材料積層樑結構，其中間之總力矩 M 為

$$M = \frac{FL}{4} \quad (2-32)$$

由(2-29)式可求到對稱堆疊之複合材料積層樑結構中間下表面之 x 方向的應變為

$$\epsilon_x = \frac{h\kappa_x}{2} = \frac{hd_{xx}M_x}{2} = \frac{hd_{xx}M}{2w} = \frac{FLhd_{xx}}{8w} \quad (2-33)$$

由(2-30)式可求到對稱堆疊之複合材料積層樑結構中間下表面之 y 方向的應變為

$$\epsilon_y = \frac{h\kappa_y}{2} = \frac{hd_{yx}M_x}{2} = \frac{hd_{yx}M}{2w} = \frac{FLhd_{yx}}{8w} \quad (2-34)$$

由(2-31)式可求到對稱堆疊之複合材料積層樑結構中間下表面之 x-y 方向的剪應變為

$$\gamma_{xy} = \frac{h\kappa_{xy}}{2} = \frac{hd_{sx}M_x}{2} = \frac{hd_{sx}M}{2w} = \frac{FLhd_{sx}}{8w} \quad (2-35)$$

對稱堆疊複合材料積層樑結構，在中間承受一力 F 作用時之三點彎曲試驗，即在 x-方向承受總力矩 M，各應變與各勁度值皆有關係，而複合材料積層樑結構之各彈性常數識別，主要是以複合材料積層樑結構

之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，本文研究將以所有已知應變值量測值，作為建立複合材料各積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，其設計變數再以隨機多起始點方式及下一章所介紹之數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數，本文在結果與討論中將證實以所有已知應變值，來識別複合材料積層樑結構之各彈性常數之可行性與精確性。

## 2.2 有限元素法分析



複合材料積層樑結構，在中間承受一力  $F$  作用時之三點彎曲試驗，即在  $x$ -方向承受總力矩  $M$ ，在其兩個支撐端會造成些微之舉起現象，而會影響其應變值，Mujika[68-71] 在其文中所提及之單一偏角堆疊 (Off-axis) 之複合材料積層結構，做三點彎曲時，會造成舉起現象甚巨，而本文所研究之複合材料結構為正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構 (Angle-ply beams)，其兩個支撐端會造成些微之舉起現象，只會些微影響其量測應變值。

本節主要以有限元素分析分析正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗，會在其兩個支撐端造成些微之舉起現象。首先，對偏角堆疊之複合材料積層結構及本文本使用之正負角對稱堆

疊之複合材料積層樑結構差異做說明，本文所探討之疊層方式為  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  複合材料積層樑結構，Mujika 所探討之單一偏角堆疊之複合材料積層結構，疊層方式全為  $\theta^\circ$ ，對單一偏角堆疊之複合材料積層結構所探討之疊層方式全為  $\theta^\circ$ ，會造成舉起現象甚巨，故其兩個支撐端及負載是受三個點施力負載之彎曲。而本文是以古典板理論及窄樑理論來探討正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構之疊層方式為  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ ，其中間是受線負載之三點彎曲試驗，在有限元素分析時發現其兩個支撐端會造成些微之舉起現象，但在寬度窄小時對應變影響甚小，將在下文中有詳細探討。



圖 2-5 是正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構及之單一偏角堆疊之複合材料積層樑結構在端點舉起現象的側視圖，知單一偏角堆疊之複合材料積層樑結構在端點舉起現象甚為明顯，相較之下本文所研究之正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，在端點舉起現象幾乎是微乎其微。雖是如此，還是研究本文之方法與 ANSYS 分析之比較，以本文所用之正負角對稱堆疊的複合材料積層樑結構試片為例，其詳細規格詳訴於第四章，今在長度不變的情況下，以其寬度  $w$  (12 mm) 為基準來分別探討當寬度為  $0.5w$ 、 $w$ 、及  $2w$  時之比較，即長寬比  $\frac{L}{w}$  分別為 33.3、16.7、及 8.3。

圖 2-6、2-7、2-8、2-9，分別為正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，不同長寬比  $\frac{L}{w}$  分別為 33.3、16.7、及 8.3 時，且以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑而言，用 ANSYS 分析其在端點舉起現象探討，圖為端點舉起現象的側視圖，可知，隨著寬度增加，其端點舉起現象越明顯。

圖 2-10、2-11、2-12，分別為正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，且以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑而言，在不同長寬比  $\frac{L}{w}$  分別為 33.3、16.7、及 8.3，以 ANSYS 分析其在端點舉起現象探討，可知，隨著寬度增加，其端點舉起現象越明顯，長寬比  $\frac{L}{w}$  在 33.3 時除外，其依  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  對稱堆疊的複合材料積層樑之順序，端點舉起現象越大。

今以有限元素分析之套裝軟體 ANSYS，來模擬複合材料積層樑結構之中間受線負載之三點彎曲試驗時之結果，所選用的是 Shell 99 八節點四角元素，首先，先做收斂測試，其結果在 40 元素已經收斂，以下之研究皆用 80 元素(如圖 2-13)來分析。

圖 2-14 中，為正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，在中間承受一力  $F$  作用，寬度為  $w$ ，分別為不同堆疊角度之對稱堆疊之複合材料積層樑結構以 ANSYS 分析在其中間點的軸向應變、橫向應變及及剪應變值視為正確值，與本文之方法的做比較的誤差百分比圖，其誤差百分比絕對值皆在 3.7% 以內。

圖 2-15、2-16、2-17 及圖 2-18、2-19、2-20，以不同長寬比  $\frac{L}{w}$  分別為 33.3、16.7、及 8.3 的  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑而言，以 ANSYS 分析在其軸向中間線及橫向中間線的軸向應變、橫向應變及及剪應變值視為正確值，與本文之方法做比較的誤差百分比圖，在支撐端兩側相距較大，施力線區，長寬比  $\frac{L}{w}$  為 33.3 時，兩種方法的值，幾乎相同，但隨著寬度增加，其各應變之誤差百分比亦隨之增加，長寬比  $\frac{L}{w}$  在 16.7 以下時之誤差百分比絕對值在 3.7% 以內。但長寬比  $\frac{L}{w}$  在 8.3 時，其橫向應變卻達約 19.1%。

圖 2-21 是以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑為例，在不同長寬比下，ANSYS 分析在其中間點的軸向應變、橫向應變及及剪應變值視為正確值，與本文之方法做比較的誤差百分比圖，由圖可知，在長度為定值時，隨寬度增加其軸向應變、橫向應變值之誤差百分比亦隨之增加，即複合材料積層樑長寬比愈小，軸向應變、橫向應變值

之誤差百分比會愈大。

再以有限元素分析之套裝軟體ANSYS，所選用的是Shell 99 八節點四角元素，用 80 元素分析，來模擬單一偏角 $[45^\circ]_{24}$ 複合材料積層樑結構之中間受線負載之三點彎曲試驗，在中間承受一力 $F$ 作用，長度為 200 mm，圖 2-22 是長寬比 $\frac{L}{w}$ 為 33.3 時，以ANSYS分析在其中間的軸向應變、橫向應變及剪應變值視為正確值，與本文之方法的做比較的誤差百分比圖，軸向應變其誤差百分比絕對值在 1.7%以內，橫向應變其誤差百分比絕對值在 11.9%以內，剪應變其誤差百分比絕對值在 5.4%以內，對單一偏角複合材料積層樑結構之中間受線負載之三點彎曲舉起現象明顯，中間之各應變的變化甚大，其中間的軸向應變、橫向應變及剪應變值誤差百分比絕對值在 11.9%以內。圖 2-23 是長寬比 $\frac{L}{w}$ 為 16.7 時，以ANSYS分析在其中間的軸向應變、橫向應變及剪應變值視為正確值，與本文之方法的做比較的誤差百分比圖，軸向應變其誤差百分比絕對值在 3.7%以內，橫向應變其誤差百分比絕對值在 17.1%以內，剪應變其誤差百分比絕對值在 11.4%以內，對單一偏角複合材料積層樑結構之中間受線負載之三點彎曲舉起現象明顯，中間之各應變的變化甚大，其中間的軸向應變、橫向應變及剪應變值誤差百分比絕對值在 17.1%以內。圖 2-24 是長寬比 $\frac{L}{w}$ 為 8.3 時，以ANSYS分析在其中間的

軸向應變、橫向應變及剪應變值視為正確值，與本文之方法的做比較的誤差百分比圖，軸向應變其誤差百分比絕對值在 8.5% 以內，橫向應變其誤差百分比絕對值在 24.6% 以內，剪應變其誤差百分比絕對值在 26.3% 以內，對單一偏角複合材料積層樑結構之中間受線負載之三點彎曲舉起現象明顯，中間之各應變的變化甚大，其中間的軸向應變、橫向應變及剪應變值誤差百分比絕對值在 26.3% 以內。圖 2-25、2-26、2-27，以不同長寬比  $\frac{L}{w}$  分別為 33.3、16.7、及 8.3 的  $[45^\circ]_{24}$  之單一偏角複合材料積層樑結構而言，以 ANSYS 分析在其中間線及的軸向應變、橫向應變及及剪應變值視為正確值，與本文之方法做比較的誤差百分比圖，兩種方法各應變之誤差會隨著長寬比愈小，誤差百分比絕對值會愈大，其原因是因為單一偏角複合材料積層樑結構中間受線負載之三點彎曲時，舉起現象明顯，當中間施加線負載時，在接觸面會有部份脫離現象，造成負載不均，故本文所提之方法不適用於單一偏角複合材料積層樑結構，然而對於正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構中間施加線負載時，則無上述的現象，所以本文識別所選用之試片是舉起現象不明顯的正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構，且長寬比不宜太小。

### 第三章 複合材料積層板及樑結構之彈性常數識別

本章主要係探討如何利用第二章所推得之複合材料積層結構之力學理論，得到複合材料積層結構之各應變值與各勁度之關係式，再以實驗所得之應變值，建立一個有限制條件之誤差函數  $e(x)$  的數學模式，再以數值最佳化的方法，以複合材料積層結構之彈性常數為變數，來求取誤差函數  $e(x)$  (即目標函數) 的極小值，如此，便可精確的識別複合材料積層結構之彈性常數，而這種方法就是複合材料積層結構之彈性常數識別法。



本文提出兩種識別方法，分別是單一階段識別法及兩階段識別法；首先說明單一階段識別法之使用時機，當奇數層正負角對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即  $x$ -方向之軸向拉力  $F$  時有軸向應變、橫向應變及剪應變值，便作複合材料積層板結構單一階段之識別，進而識別出各項彈性常數，或是正負角對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以向下之線負載  $F$ ，可以量測到複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值時，亦可作複合材料積層樑結構單一階段之各彈性常數識別，進而識別出複合材料積層樑結構各項彈性常數，由以上可知，當複材

積層結構可量測到軸向應變、橫向應變及剪應變值時，便可以一種試片做單一階段識別，進而識別出複材積層結構之各彈性常數值；其次說明兩階段識別法之使用時機，當偶數層正負角對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即 x-方向之軸向拉力 F 時，只有軸向應變及橫向應變值，並無剪應變值，以實驗所得之應變值，建立一個有限制條件之誤差函數  $e(x)$ ，再以數值最佳化的方法，以複合材料積層結構之彈性常數為變數，來求取誤差函數  $e(x)$  的極小值時，會因為只有兩個應變值，而條件不夠，無法識別出各彈性常數值，本文為了解決這個問題，便以兩種試片，用兩階段識別法來識別出偶數層正負角對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數值；此外，在 3.3 節中將會探討靈敏度分析，由靈敏度分析可以知道，無論是複合材料積層板或樑結構，兩階段識別法，可以適當降低複材積層結構識別之靈敏度，進而提高識別時之精確度。

本章所用之數值最佳化的理論主要是由 Snyman 和 Fatti [5] 所提出之多起始點總域極小值演算法的數值最佳化理論，隨後 Kam 和 Snyman[6] 應用上述之理論與技術到複合材料積層結構之最佳化設計，近年來，Kam 及其研究團隊 [7-13] 亦應用前述之數值最佳化的理論，以及利用 Vanderplaats[14] 所著之數值最佳化技術與應用一書中，

所介紹之擴增拉格蘭吉乘子法(簡稱 A.L.M)，發展出一套可靠度高且高效率之方法，應用在複合材料科學上，今將上述各文獻[5-13]之數值最佳化的理論介紹於下列各節中。

### 3.1 數值最佳化理論

近年來隨著數值最佳化不斷的發展，其廣泛地運用在科學工程、應用數學及固體力學領域上，本文即是利用數值最佳化的方法，以複合材料積層結構之彈性常數為變數，找尋誤差函數之最小值，以成功而精確的識別複合材料積層結構之各項彈性常數識別。數值最佳化理論主要是尋找一組變數  $x_i$ ，使其在受有限制條件或無限制條件下的情況下，使目標函數  $e(x)$  能夠達到總域的極大值或極小值(本文是利用數值最佳化的原理來找尋使目標函數即誤差函數  $e(x)$  之總域極小值)。其數值最佳化的程序是先建立一組正確的數值最佳化之數學模式，再改變變數  $x_i$  之值以沿著正確的搜尋軌跡做反覆迭代之程序來及搜尋，使目標函數達到總域的極大值或極小值；通常數值最佳化之數學標準模式可寫成(3-1)式，即

$$\text{Minimize } e(\mathbf{x}) = e(x_i) \quad ; i = 1, 2, \dots, N_E$$

$$\begin{aligned}
\text{Subject to } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_i) &\leq \mathbf{0} && ; k = 1, 2, \dots, N_G \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_j(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{0} && ; j = 1, 2, \dots, N_H \\
\mathbf{x}_i^L &\leq \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i^U && ; i = 1, 2, \dots, N_E
\end{aligned} \tag{3-1}$$

在(3-1)式中， $\mathbf{x}_i$ 為所設計之獨立變數，其獨立變數 $\mathbf{x}_i$ 共有 $N_E$ 個，而 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ 為不等式限制條件，不等式限制條件之數目為 $N_G$ 個， $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ 為等式限制條件，等式限制條件之數目為 $N_H$ 個； $\mathbf{x}_i^L$ 為獨立變數之下限值(Lower bound)， $\mathbf{x}_i^U$ 為獨立變數之上限值(Upper bound)。

複合材料積層樑、板、殼結構之材料彈性常數識別，有許多個獨立變數，且目標函數 $e(\mathbf{x})$ 通常是非線性的函數，故欲求其總域極小值或極大值是極為困難的，本文主要是以隨機多起始點的方法和貝氏分析法以及擴增拉格蘭吉乘子法[5-14]所發展出來之多起始點總域極小值演算法，這種演算法是利用單位質量之質點在保守力場中運動，其必滿足能量守恆之定理，且把無限制條件的目標函數 $e(\mathbf{x})$ 當成位能值，用多起始點軌跡搜尋的方法來搜尋最小位能值，而找到目標函數 $e(\mathbf{x})$ 的總域極小值。

### 3.1.1 隨機多起始點搜尋的方法

本節將要介紹如何以隨機多起始點同時搜尋的方法將其運用在數值最佳化中，隨機多起始點同時搜尋的方法是利用可變區間內各獨立變數  $x_i$  以隨機取樣的方法找出各獨立變數的起始點，以此方式同時做為搜尋軌跡的開始，以找到目標函數  $e(x)$  之區域極小值。本文主要是利用 IMSL 軟體中的 RNUN 副程式來執行以隨機多起始點搜尋軌跡的方法來搜尋，這種方法可使獨立變數  $x_i$  在限制區間內以隨機取樣的方法來選取獨立變數  $x_i$  值，故在無限制條件下且可微的目標函數  $e(x)$ ，可以找出一些區域極小值  $e_k^L(x)$  及其相對應的區域極小點  $x_k$ 。但我們主要是要尋找總域極小值  $e^G(x)$ ，故  $e^G(x)$  一定要滿足(3-2)式，即總域極小值  $e^G(x)$  為已經找到之所有區域極小值  $e_k^L(x)$  的最小值：


$$e^G(x) = \min\{e_k^L(x)\} \quad (3-2)$$

### 3.1.2 區域極小值的尋找方法

用隨機多起始點同時搜尋軌跡之方法，先找出各獨立變數之起始值  $x_i$ ，且  $x$  為時間  $t$  的函數，則目標函數可寫成  $e(x(t))$ ，而隨機多起始點搜尋軌跡的方法，主要是利用單位質量的質點，即  $x(t)$  在  $N_E$  維空間之保守力場中運動以尋找最小之位能值，其運動方程式及起始位置及速

度可寫成(3-3)式：

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}(t) &= -\nabla e(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3-3}$$

在(3-3)式中，其起始速度為零，而起始位置為  $\mathbf{x}_0$ 。

在(3-3)式中目標函數值  $e(\mathbf{x}(t))$  為單位質量質點的位能，數值最佳化理論主要是去尋找單位質量質點的最小位能，如此，便可找到目標函數值  $e(\mathbf{x}(t))$  的區域極小值。

將(3-3)式乘以  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ，則(3-3)式可寫成

$$\ddot{\mathbf{x}}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla e^T(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)\tag{3-4}$$

再將(3-4)式其對時間積分，時間由 0 到  $t$ ，則(3-4)式可寫成

$$\int_0^t \ddot{\mathbf{x}}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = -\int_0^t \nabla e^T(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)\tag{3-5}$$

將(3-5)式積分完成，並代入上下限值，經整理即可得到(3-6)式：

$$\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2 + e(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}(0)\|^2 + e(\mathbf{x}(0)) = e(\mathbf{x}_0)\tag{3-6}$$

在(3-6)式中即為能量守恆定理，其在時間  $t$  之動能及位能之和，等於起始位能，因為其起始速度為零故起始動能亦為零。

對於單位質量質點的搜尋軌跡之搜尋方式及單位質量質點的移動

方向下列二種情況:

1. 在(3-4)式中若  $-\nabla e^T(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) < 0$  時，則表示單位質量質點位能逐漸增加，故動能遂漸減少。這表示單位質量質點的搜尋軌跡及移動方向正好相反，故要將運動軌跡往相反之方向來進行軌跡搜尋，則單位質量之質點可沿著此搜尋軌跡的方向以最快下降的方式移動，此時目標函數值  $e(\mathbf{x}(t))$  之位能將會迅速降低，單位質量之質點行進方向則以數值最佳化之程式迭代方式來改變單位質量質點之行進軌跡方向，其獨立變數  $\mathbf{x}(t)$  之迭代方式及過程如(3-7)式：


$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \Delta t \\ \dot{\mathbf{x}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{x}}_k - \nabla e(\mathbf{x}_{k+1}) \Delta t \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中  $x_0$ 、 $\dot{x}_0$  及時間  $\Delta t$  之步階皆是已知。

2. 在(3-4)式中若  $-\nabla e^T(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) > 0$  時，單位質量質點之位能遂漸減少，故動能遂漸增加。這表示單位質量質點的搜尋軌跡及移動方向正確，則單位質量之質點將沿著此搜尋軌跡的方向以最快下降的方式移動，此時目標函數值  $e(\mathbf{x}(t))$  之位能將會迅速降低，而單位質量之質點行進方向，以數值最佳化程式中迭代方式來改變論單位質量質點行

進軌跡之方向，在(3-7)式中，單位質量之質點運動須滿足近似之能量守恆定理之關係式，如(3-8)式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(\mathbf{t})\|^2 + e(\mathbf{x}_{k+1}(\mathbf{t})) = \\ \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}_k(\mathbf{t})\|^2 + e(\mathbf{x}_k(\mathbf{t})) + \frac{1}{2}\|\nabla e(\mathbf{x}_{k+1}(\mathbf{t}))\|^2(\Delta\mathbf{t})^2 - \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_k^T(\mathbf{t})\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}})\Delta\mathbf{x}_k(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (3-8)$$

在(3-8)式中， $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}})$  為 Hessian 矩陣，而

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{k+1}(\mathbf{t}) - r\Delta\mathbf{x}_k(\mathbf{t}) \quad ; \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (3-9)$$

現在再來說明區域極小值之找尋方法，若以 $e^s$ 為單位質量之質點可沿著此搜尋軌跡的方向，所能找到之最低位能值，此時若有滿足(3-10)式中任兩式之一時，即可停止繼續搜尋，此時之區域極小值的位置為 $e^s$ ，而獨立變數 $x_i$ 即為達到區域極小值 $e^s$ 時的單位質量質點所在之位置，而此時之目標函數 $e^s$ 值即為單位質量質點在搜尋軌跡中所找到的最低位能值，亦就是目標函數值的區域極小值 $e^L$ 。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}(\mathbf{t})) - e^s > \varphi(e(\mathbf{x}(\mathbf{0})) - e^s) \\ \mathbf{T} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\|^2 < (1 - \varphi)(e(\mathbf{x}(\mathbf{0})) - e^s) \end{aligned} \quad (3-10)$$

在(3-10)式中 $\varphi$ 為已知之常數值，在本文之程式中將 $\varphi$ 值設為 0.95。

### 3.1.3 總域極小值之判別方法

本節主要是以貝氏分析法[5-13]的標準來判別數個區域極小值，使區域極小值落在臨時總域極小值之機率大於 0.995 時，則可找到真正的總域極小值。其主要方法是延續上述隨機多起始點軌跡搜尋之方法及區域極小值之尋找，以得到數個區域極小值，再藉由這數個區域極小值  $e_j^L(\mathbf{x}(t))$  來找到總域極小值  $e^G(\mathbf{x}(t))$ 。其方法詳細說明如下：

首先必需找到第一個區域極小值  $e_1^L(\mathbf{x}(t))$ ，再依照前述之方法再找尋第二個區域極小值  $e_2^L(\mathbf{x}(t))$ 。將  $e_1^L(\mathbf{x}(t))$ 、 $e_2^L(\mathbf{x}(t))$  兩個值做比較而取其最小值，此種方法即可找到一個臨時總域極小值  $e^{SG}(\mathbf{x}(t))$ 。依照前述之方法再尋找出更多的區域極小值  $e_j^L(\mathbf{x}(t))$ ，若區域極小值  $e^L(\mathbf{x}(t))$  之值皆在臨時的總域極小值  $e^{SG}(\mathbf{x}(t))$  的收斂範圍值內，則可以算是完成一次成功的搜尋結果，但若要判別其是否是真正的總域極小值  $e^G(\mathbf{x}(t))$ ，則必需完成數次成的搜尋，其判別方法是依據貝氏逼近法及貝氏論點的標準來判別，茲將其說明詳述如下：

對於總域極小值  $e^G(\mathbf{x}(t))$  之判別方法如下，若在  $n$  次區域極小值  $e_j^L(\mathbf{x}(t))$  的隨機取樣中，有  $r$  次均落在臨時的總域極小值  $e^{SG}(\mathbf{x}(t))$  的收斂範圍內時，其機率可寫成下(3-11)式：

$$P(n,r) = 1 - \frac{[(n+1)!(2n-r)!]}{[(2n+1)!(n-r)!]} \quad (3-11)$$

當隨機取樣中的區域極小值  $e_i^L(\mathbf{x}(t))$  等於總域極小值  $e^{SG}(\mathbf{x}(t))$  之值的機率大於  $P(n,r)$  時，本文將  $P(n,r)$  之值定為 0.995，即

$$P [e_i^L(\mathbf{x}(t)) = e^{SG}(\mathbf{x}(t))] \geq P(n,r) \quad (3-12)$$

當(3-12)式成立時，則定義臨時的總域極小值  $e^{SG}(\mathbf{x}(t))$  即為真正的總域極小值  $e^G(\mathbf{x}(t))$ ，依此方法便可得到總域極小值  $e^G(\mathbf{x}(t))$ ，而此時各單位質量之質點所在位置即為欲求之各獨立變數的值  $x_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N_E$ 。



### 3.1.4 擴增拉格蘭吉乘子法

在 Vanderplaats[14]所著之數值最佳化技術與應用一書中，介紹擴增拉格蘭吉乘子法(簡稱 A.L.M)，及 Kam 和其研究團隊之相關文獻中 [7-13]，其方法主要是將原來的數值最佳化的數學模式中的等式或不等式等的限制條件乘上拉格蘭吉乘子，且將乘上拉格蘭吉乘子式子原始的目標函數之數學模式相加。如此，則原來的目標函數  $e(\mathbf{x})$  轉變成為另一個新的目標函數  $\underline{\psi}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{r}_p)$ ，其主要目的是將數學模式中的限制條件問題轉變成為一個無限制條件的問題，這也就是擴增拉格蘭吉乘子

法之主要目的。

今將擴增拉格蘭吉乘子法以舉例介紹如下：設目標函數為程式反求其量測應變與實驗預知應變值差的平方和，且複合材料積層結構之彈性常數有上下限的限制，故可將此模式建立成典型數值最佳化之目標函數  $e(\underline{x})$  之極小值的問題之數學模式，且有上下限之限制，可寫成(3-13)式：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & e(\underline{x}) = [(\underline{\epsilon}_m - \underline{\epsilon}_p)^T (\underline{\epsilon}_m - \underline{\epsilon}_p)] \cdot \xi \\ \text{Subject to} \quad & x_i^L \leq x_i \leq x_i^U ; i = 1 \sim 4 \end{aligned} \quad (3-13)$$

在(3-13)式中， $e(\underline{x})$  即為誤差函數(即目標函數)值，而  $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$  為複合材料積層結構之各彈性常數， $\underline{\epsilon}_m$  為程式反求出之量測應變值， $\underline{\epsilon}_p$  為實驗所得預知應變值； $\xi$  為放大係數，主要目的是用來放大誤差函數的值； $x_i^L$  為複合材料積層結構之各彈性常數的下限值， $x_i^U$  為複合材料積層結構之各彈性常數的上限值，此為一個有限制條件的數值最佳化問題，再利用擴增拉格蘭吉乘子法(簡稱為 A.L.M.)，可將上列有限制條件之數值最佳化數學模式，化成一個無限制條件的新目標函數  $\bar{\Psi}(\tilde{\underline{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{r}_p)$ ，可寫成(3-14)式：

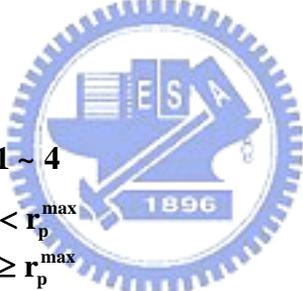
$$\bar{\Psi}(\tilde{\underline{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{r}_p) = e(\underline{x}) + \sum_{j=1}^4 [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \quad (3-14)$$

在(3-14)式中， $\tilde{\mathbf{x}}$ 是正規化後之設計變數，而

$$\begin{aligned} z_j &= \max \left[ g_j(\tilde{\mathbf{x}}_j), \frac{-\mu_j}{2r_p} \right] \\ g_j(\tilde{\mathbf{x}}_j) &= \tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_j^U \leq 0 \\ \phi_j &= \max \left[ H_j(\tilde{\mathbf{x}}_j), \frac{-\eta_j}{2r_p} \right] \\ H_j(\tilde{\mathbf{x}}_j) &= \tilde{\mathbf{x}}_j^L - \tilde{\mathbf{x}}_j \leq 0 \quad ; \quad j=1 \sim 4 \end{aligned} \quad (3-15)$$

在(3-15)式中 $\mu_j, \eta_j, r_p$ 為 Lagrange 乘子， $\max[*,*]$ 表示是取方括弧

中數值之最大值，其迭代方式可寫成(3-16)式：

$$\begin{aligned} \mu_j^{n+1} &= \mu_j^n + 2r_p^n z_j^n \\ \eta_j^{n+1} &= \eta_j^n + 2r_p^n \phi_j^n \quad j=1 \sim 4 \\ r_p^{n+1} &= \begin{cases} \gamma_0 r_p^n & \text{if } r_p^{n+1} < r_p^{\max} \\ r_p^{\max} & \text{if } r_p^{n+1} \geq r_p^{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3-16)$$


在(3-16)式中， $n$ 代表迭代之次數， $\gamma_0$ 為常數， $r_p^{\max}$ 是 $r_p$ 的極大值，

而 $\mu_j^0$ 、 $\eta_j^0$ 、 $r_p^0$ 、 $\gamma_0$ 及 $r_p^{\max}$ 依經驗可將上列各值設定為：

$$\begin{aligned} \mu_j^0 &= 1.0 \quad \eta_j^0 = 1.0 \quad r_p^0 = 0.4 \\ \gamma_0 &= 2.5 \quad r_p^{\max} = 100 \end{aligned} \quad (3-17)$$

在(3-14)式中，利用擴增拉格蘭吉乘子法將一個有限制條件的數值最佳化問題，化成為一個無限制條件的數值最佳化問題，再求取新目

標函數  $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p)$  的極小值，可寫成(3-18)式：

$$\text{Minimize } \underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p) \quad (3-18)$$

上述利用擴增拉格蘭吉乘子法，可得到一個無限制條件新的目標函數  $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p)$ ，結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏逼近法以及總域極小值之數值最佳化演算法，便可精確而且迅速識別複合材料積層結構之彈性常數，此為本文之主要目的；今參考上述各文獻[5-15]將本方法之程式流程圖繪於附錄中。



### 3.2 複材積層板及樑結構之彈性常數識別

本節係以實驗所得之複合材料積層樑或板結構之各主結構方向即 x-y 方向之各應變，來識別複合材料積層樑或板結構之各項彈性常數，最後找到複合材料積層數結構之各項彈性常數，今以複合材料積層樑或板結構來說明如何識別其各項彈性常數。

#### 3.2.1 複合材料積層板或樑結構的彈性常數單一階段識別法

本節主要是探討有軸向應變、橫向應變及剪應變之複合材料積層

樑或板結構的彈性常數識別法，此方法用於奇數層對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板結構，承受軸向拉力即 x-方向承受一正向拉力作用後，在各主結構方向即 x-y 方向之軸向應變、橫向應變及剪應變值皆有應變值。對於一個由單種材料堆疊而成之複合材料積層樑或板結構之彈性常數識別法，即是一種有上下限限制的數值最佳化問題。首先，以實驗量測單種材料奇數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即 x-方向承受一正向拉力作用後或對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構受力矩作用後之各主結構方向即 x-y 方向之正向應變及剪應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可將目標函數  $e(\mathbf{x})$  之極小值的問題，建立成如(3-19)式的數學模式，且有上下限之限制，即誤差函數  $e(\mathbf{x})$  為程式反求出之量測應變值與實驗所得預知應變值差的平方和再乘以放大係數：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & e(\mathbf{x}) = [(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_y^*)^2 + (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*)^2] \cdot \xi \\ \text{Subject to} \quad & x_i^L \leq x_i \leq x_i^U ; i = 1 \sim 4 \end{aligned} \quad (3-19)$$

在(3-19)式中， $e(\mathbf{x})$  即為誤差函數，而設計變數  $\mathbf{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$  為複合材料積層樑或板結構之各項彈性常數， $E_1$  為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值， $E_2$  為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值， $G_{12}$  為複合材料平面即 1-2 平面之剪力係數， $\nu_{12}$  為複合材料在纖

維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比。  
 $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 及 $\gamma_{xy}$ 為主結構方向即x-y方向之軸向應變、橫向應變及剪應變的  
 猜測值； $\varepsilon_x^*$ 、 $\varepsilon_y^*$ 及 $\gamma_{xy}^*$ 為主結構方向即x-y方向之實驗所得的軸向應變、  
 橫向應變及剪應變值； $\xi$  為放大係數，主要目的是用來放大誤差函數  
 的值，在軸向應變、橫向應變及剪應變值於  $10^{-3}$ 至  $10^{-6}$ 之間時，依經驗  
 知最好取  $\xi$  放大係數之範圍在  $\xi = 10^5 \sim 10^6$ ，故本文取  $\xi = 10^6$ ，便可  
 適當的提升單一階段複合材料積層板結構之彈性常數識別； $\mathbf{x}_l^l$  為複合  
 材料之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的下限值， $\mathbf{x}_l^u$  為複合材料  
 之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的上限值，此為一個有限制條件  
 的數值最佳化問題，再利用擴增拉格蘭吉乘子法，可將上列有限制條件  
 之數值最佳化數學模式，化成一個無限制條件的新目標函數  
 $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p)$ ，可寫成(3-20)式：

$$\underline{\Psi}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p) = \mathbf{e}(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^4 [\mu_j z_j + \mathbf{r}_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + \mathbf{r}_p \phi_j^2] \quad (3-20)$$

在(3-20)式中

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = \left[ \frac{\mathbf{E}_1}{\alpha_1}, \frac{\mathbf{E}_2}{\alpha_2}, \frac{\mathbf{G}_{12}}{\alpha_3}, \frac{\mathbf{v}_{12}}{\alpha_4} \right] \quad (3-21)$$

在(3-21)式中，主要是將設計變數正規化(Normalization)，而  $\alpha_i$  是

正規化係數(Normalization factors)，其主要作用是來修飾設計變數，使  $\frac{E_1}{\alpha_1}, \frac{E_2}{\alpha_2}, \frac{\nu_{12}}{\alpha_4}$ ，及  $\frac{G_{12}}{\alpha_3}$  之值在 10 以下。

在(3-20)式中，是利用擴增拉格蘭吉乘子法將一個有限制條件的數值最佳化問題，化成為一個無限制條件的數值最佳化問題，再求取新目標函數  $\bar{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{r}_p)$  的極小值，可寫成(3-22)式：

$$\text{Minimize } \bar{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{r}_p) \quad (3-22)$$

上述即利用擴增拉格蘭吉乘子法，可得到一個無限制條件新的目標函數  $\bar{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{r}_p)$ ，再結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏逼近法和貝氏論點以及總域極小值之數值最佳化演算法，找到誤差函數  $e(\underline{x})$  之極小值約趨近於零，便可精確而且迅速識別出單種材料之複合材料積層結構的各項彈性常數  $\underline{x} = [E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}]$ 。

圖 3-1 為以  $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$  對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別為例，以 IMSL 之利用的 RNUN 副程式來執行以隨機起始點搜尋，這種方法可使獨立變數在限制區間內以隨機取樣的方法來選取獨立變數值，以理論之軸向應變、橫向應變及剪應變值，代入(3-19)式，利用擴增拉格蘭吉乘子法，可將上列有限制條件之數值最佳化數學模式，化成一個無限制條件的新目標函數，在求取新目標函數之極小值，

本次總共迭代 10 次後，到達極小值，各變數之值是對極小值正規化。

### 3.2.2 複合材料積層板或樑結構的兩階段彈性常數識別法

本節主要是探討對相同製程及相同材質之複合材料積層板結構，只有軸向應變及橫向應變之複合材料積層樑或板結構的兩階段彈性常數識別法，此方法用於偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構承受軸向拉力即  $x$ -方向承受一正向拉力作用後，在各主結構方向即  $x$ - $y$  方向之軸向應變及橫向應變有應變值，而剪應變值為零；或對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構，承受彎矩後，量測在各主結構方向即  $x$ - $y$  方向之軸向應變及橫向應變有應變值，作兩階段彈性常數識別法，茲將分數如下：

第一階段識別：

對於一個由單種材料堆疊而成之複合材料積層板結構之彈性常數識別法，是一種有上下限限制的數值最佳化問題。首先，以實驗量測  $\pm 45^\circ$  單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即  $x$ -方向承受一正向拉力作用後之各主結構方向即  $x$ - $y$  方向之軸向應變及橫向應變值；或對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構，承受彎矩

後，量測在各主結構方向即 x-y 方向之軸向應變及橫向應變有應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可將目標函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$  之極小值的問題，建立成如(3-23)式的數學模式，且有上下限之限制，即誤差函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$  為程式反求出之量測應變值與實驗所得預知應變值差的平方和再乘以放大係數：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}) = [(\epsilon_x^{(1)} - \epsilon_x^{*(1)})^2 + (\epsilon_y^{(1)} - \epsilon_y^{*(1)})^2] \cdot \xi \\ \text{Subject to} \quad & x_i^{(1)L} \leq x_i^{(1)} \leq x_i^{(1)U} ; i = 1 \sim 4 \end{aligned} \quad (3-23)$$

在(3-23)式中， $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$  為第一階段偶數層對稱堆疊複合材料積層樑或板結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = [\mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{G}_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$  為第一階段以  $\pm\theta^\circ$  單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板結構各項彈性常數， $\mathbf{E}_1^{(1)}$  為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值， $\mathbf{E}_2^{(1)}$  為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值， $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$  為複合材料平面即 1-2 平面之剪力係數， $\nu_{12}^{(1)}$  為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比。 $\epsilon_x^{(1)}$  及  $\epsilon_y^{(1)}$  為第一階段以  $\pm 45^\circ$  單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板主結構方向即 x-y 方向之軸向應變及橫向應變猜測值； $\epsilon_x^{*(1)}$  及  $\epsilon_y^{*(1)}$  為第一階段以  $\pm 45^\circ$  單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板主結構方向即 x-y 方向之實驗所得的軸向應變及橫向應變值； $\xi$  為放大係數，主要目的是用來

放大誤差函數的值，在軸向應變、橫向應變及剪應變值於  $10^{-3}$  至  $10^{-6}$  之間時，依經驗知最好取  $\xi$  放大係數之範圍在  $\xi = 10^5 \sim 10^6$ ，在複合材料積層板結構的兩階段彈性常數識別法中，取  $\xi = 10^6$ ； $\mathbf{x}_i^{(1)L}$  為第一階段識別時複合材料之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的下限值， $\mathbf{x}_i^{(1)U}$  為第一階段識別時複合材料之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的上限值，此為一個有限制條件的數值最佳化問題，再利用擴增拉格蘭吉乘子法，可將上列有限制條件之數值最佳化數學模式，化成一個無限制條件的新目標函數  $\bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p)$ ，可寫成(3-24)式：

$$\bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p) = e(\mathbf{x}^{(1)}) + \sum_{j=1}^4 [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \quad (3-24)$$

在(3-24)式中

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \left[ \frac{\mathbf{E}_1^{(1)}}{\alpha_1}, \frac{\mathbf{E}_2^{(1)}}{\alpha_2}, \frac{\mathbf{G}_{12}^{(1)}}{\alpha_3}, \frac{\nu_{12}^{(1)}}{\alpha_4} \right] \quad (3-25)$$

在(3-25)式中，主要是將設計變數正規化，而  $\alpha_i$  是正規化係數，其主要作用是來修飾設計變數，使  $\frac{\mathbf{E}_1}{\alpha_1}, \frac{\mathbf{E}_2}{\alpha_2}, \frac{\nu_{12}}{\alpha_4}$ ，及  $\frac{\mathbf{G}_{12}}{\alpha_3}$  之值在 10 以下。

在(3-24)式中，是利用擴增拉格蘭吉乘子法將一個有限制條件的數值最佳化問題，化成為一個無限制條件的數值最佳化問題，再求取新目標函數  $\bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p)$  的極小值，可寫成(3-26)式：

$$\text{Minimize } \underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}^{(1)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p) \quad (3-26)$$

上述即利用擴增拉格蘭吉乘子法，可得到一個無限制條件新的目標函數  $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}^{(1)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p)$ ，再結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏逼近法和貝氏論點以及總域極小值之數值最佳化演算法，找到誤差函數  $e(\underline{x}^{(1)})$  之極小值約趨近於零，便識別出第一階段單種材料之複合材料積層結構的各項彈性常數  $\underline{x}^{(1)} = [\mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{G}_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$ 。而此第一階段單種材料偶數層對稱堆疊複合材料積層樑或板結構的各項彈性常數值中，將第一階段  $\pm 45^\circ$  偶數層對稱堆疊複合材料積層板結構所識別出來之  $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$  及  $\nu_{12}^{(1)}$  為偶數層對稱堆疊複合材料積層板結構之剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比；或將第一階段  $\pm 45^\circ$  對稱堆疊複合材料積層樑結構所識別出來之  $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$  及  $\nu_{12}^{(1)}$  為對稱堆疊複合材料積層樑結構之剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比，定此兩個值為偶數層對稱堆疊複合材料積層樑或板結構之剪力係數與蒲松比，即  $\mathbf{G}_{12}^{(1)} = \mathbf{G}_{12}$  及  $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{12}$ 。

第二階段識別：

再實驗量測  $\pm \beta^\circ$  (非  $\pm 45^\circ$  對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板結構)

之單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即 x-方向承受一正向拉力作用後之各主結構方向即 x-y 方向之軸向應變及橫向應變值;或對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構，承受彎矩後，量測在各主結構方向即 x-y 方向之軸向應變及橫向應變有應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ ，且有上下限之限制，即誤差函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$  為程式反求出之量測應變值與實驗所得預知應變值差的平方和再乘以放大係數：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)}) = [(\epsilon_x^{(\beta)} - \epsilon_x^{*(\beta)})^2 + (\epsilon_y^{(\beta)} - \epsilon_y^{*(\beta)})^2] \cdot \xi \\ \text{Subject to} \quad & x_i^{(2)L} \leq x_i^{(2)} \leq x_i^{(2)U}; \quad i = 1 \sim 2 \end{aligned} \quad (3-27)$$

在(3-27)式中， $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$  為第二階段對稱堆疊複合材料積層樑或板結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數  $\underline{\mathbf{x}}^{(2)} = [\mathbf{E}_1^{(2)}, \mathbf{E}_2^{(2)}]$  為第二階段以  $\pm\beta^\circ$  單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板結構各項彈性常數， $\mathbf{E}_1^{(2)}$  為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值， $\mathbf{E}_2^{(2)}$  為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值。 $\epsilon_x^{(\beta)}$  及  $\epsilon_y^{(\beta)}$  為以  $\pm\beta^\circ$  單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板主結構方向即 x-y 方向之實驗所得預知的軸向應變及橫向應變值； $\epsilon_x^{*(\beta)}$  及  $\epsilon_y^{*(\beta)}$  為以  $\pm\beta^\circ$  單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑或板主結構方向即 x-y 方向之實驗所得預知的軸向

應變及橫向應變值； $\xi$ 為放大係數，主要目的是用來放大誤差函數的值，此 $\xi$ 亦為 $10^6$ ； $\mathbf{x}_i^{(2)L}$ 為第一階段識別時複合材料之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的下限值， $\mathbf{x}_i^{(2)U}$ 為第一階段識別時複合材料之主材料方向即 1-2 方向的各彈性常數的上限值，此為一個有限制條件的數值最佳化問題，再利用擴增拉格蘭吉乘子法，可將上列有限制條件之數值最佳化數學模式，化成一個無限制條件的新目標函數 $\bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p)$ ，可寫成(3-28)式：

$$\bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \mathbf{r}_p) = e(\mathbf{x}^{(2)}) + \sum_{j=1}^2 [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \quad (3-28)$$

在(3-28)式中

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = \left[ \frac{\mathbf{E}_1^{(2)}}{\alpha_1}, \frac{\mathbf{E}_2^{(2)}}{\alpha_2} \right] \quad (3-29)$$

在(3-29)式中，主要是將設計變數正規化，而 $\alpha_i$ 是正規化係數，其主要作用是來修飾設計變數，使設計變數 $\frac{\mathbf{E}_1^{(2)}}{\alpha_1}, \frac{\mathbf{E}_2^{(2)}}{\alpha_2}$ 之值在 10 以下。

$$\begin{aligned} z_j &= \max \left[ g_j(\tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)}), \frac{-\mu_j}{2r_p} \right] \\ g_j(\tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)}) &= \tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)U} \leq 0 \\ \phi_j &= \max \left[ H_j(\tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)}), \frac{-\eta_j}{2r_p} \right] \\ H_j(\tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)}) &= \tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)L} - \tilde{\mathbf{x}}_j^{(2)} \leq 0 \quad ; j=1 \sim 2 \end{aligned} \quad (3-30)$$

在(3-28)式中，是將一個有限制條件的數值最佳化問題，化成為一個無限制條件的數值最佳化問題，再求取新目標函數  $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(2)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\mathbf{r}}_p)$  的極小值，可寫成(3-31)式：

$$\text{Minimize } \underline{\Psi}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(2)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\mathbf{r}}_p) \quad (3-31)$$

上述即利用擴增拉格蘭吉乘子法，可得到一個無限制條件新的目標函數  $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(2)}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\mathbf{r}}_p)$ ，再結合多起始點軌跡搜尋法及貝氏逼近法和貝氏論點以及總域極小值之數值最佳化演算法，找到誤差函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$  之極小值約趨近於零，便識別出第二階段單種材料之複合材料積層結構的各項彈性常數  $\underline{\mathbf{x}}^{(2)} = [\mathbf{E}_1^{(2)}, \mathbf{E}_2^{(2)}]$ 。而此第二階段單種材料之複合材料積層樑或板結構的各項彈性常數值中， $\mathbf{E}_1^{(2)}$  即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值  $E_1$ ， $\mathbf{E}_2^{(2)}$  為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值  $E_2$ 。利用此兩階段識別法，便可精確且迅速地識別出複合材料積層樑或板結構的各項彈性常數值。

### 3.3 靈敏度分析( Sensitivity analysis)

在每個實驗當中皆存在一定的實驗誤差，其原因有人為因素、儀

器本身之誤差、或控制器所造成之干擾等等，都會造成量測上之誤差。其中在量測複合材料積層樑、板及殼結構主結構方向即x-y方向之 $\varepsilon_x^*$ 、 $\varepsilon_y^*$ 及 $\gamma_{xy}^*$ 之實驗所得預知的軸向應變、橫向應變及剪應變值時，都會造成量測上之誤差。而如何知道軸向應變、橫向應變及剪應變值之誤差，對識別出複合材料積層結構的各項彈性常數 $\underline{\mathbf{X}}=[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \nu_{12}, \mathbf{G}_{12}]$ 之影響，一般之方法是做靈敏度分析；本文利用Benjamin及Cornell [72]之統計學理論，和 Kam 及其研究團隊[13,34]、Hwang等[73]、Drechsler [74]、以及Chan等[75]提出靈敏度研究對結果之影響，參考上述之文獻，將其應用在本研究上，其方法是假設實驗所得的軸向應變、橫向應變及剪應變值之誤差是獨立的，分別以其靈敏度對識別出之複合材料積層結構的各項彈性常數之影響。

首先，我們假設軸向應變、橫向應變及剪應變值之間的誤差是彼此獨立而無相關聯性，令 $(\bar{\varepsilon}_i, \sigma_i)$ 是軸向應變、橫向應變及剪應變值的預測值(Expected value)與標準差(Standard deviation)。則識別出之複合材料積層結構的各項彈性常數 $\underline{\mathbf{X}}=[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \nu_{12}, \mathbf{G}_{12}]$ 可表示成

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{G}_i(\varepsilon) \quad (3-32)$$

(3-32)中 $\varepsilon$ 為各應變值，將 $\mathbf{X}_i$ 以所量測之各應變值以用泰勒級數

展開成(3-33)式，即

$$\mathbf{X}_i \cong \mathbf{G}_i(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_k) \left. \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \varepsilon_k} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3-33)$$

梯度  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \varepsilon_k} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  是以所量測之各應變值的預測值計算，可用有限差分法

之關係來求梯度  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \varepsilon_x} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ ，如改變些微之軸向應變  $(\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ ，而所識

別出來之彈性常數值為  $\mathbf{G}_i + \Delta\mathbf{G}_i$ ，即

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \varepsilon_x} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cong \frac{\Delta \mathbf{X}_i}{\Delta \varepsilon_x} \quad (3-34)$$

各項彈性常數之變異取第一項之大約值為

$$\text{var}[\mathbf{X}_i] \cong \sum_{k=1}^n \left( \left. \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \varepsilon_k} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right)^2 \text{var}[\varepsilon_k]$$

(3-35)

式中  $\text{var}[\ ]$  是隨機變異。

$$\text{C.O.V.}(\mathbf{X}_i) = \frac{\sqrt{\text{var}[\mathbf{X}_i]}}{|\mathbf{X}_i|} \quad (3-36)$$

C.O.V. ( $\mathbf{X}_i$ ) 是複合材料積層結構的各項彈性常數之變異數。

表 3-1 及表 3-2 分別是 Gr/ep 及 Gl/ep 複合材料積層樑結構之單一

階段識別法之靈敏度。

表 3-3 及表 3-4 分別是Gr/ep及G/ep複合材料積層板結構兩階段識別法之靈敏度，對Gr/ep而言,由表 3-3 知第一階段識別，先以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 複合材料積層板結構識別出之 $G_{12}$  與  $\nu_{12}$ ，再由 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$  ( $\theta \neq 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ )複合材料積層板結構作第二階段識別出之  $E_1$ , and  $E_2$ ，知以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$  複合材料積層板結構識其靈敏度較低，量測變異之 C.O.V. 亦較小。而表 3-5 是複合材料積層板結構以四個應變做單一階段識別之靈敏度，由表中可以知道，本文所用之兩階段識別法比四個應變做單一階段識別之靈敏度低；表 3-6 及表 3-7 分別是Gr/ep及G/ep複合材料積層樑結構兩階段識別法之靈敏度。



## 第四章 實驗設計說明

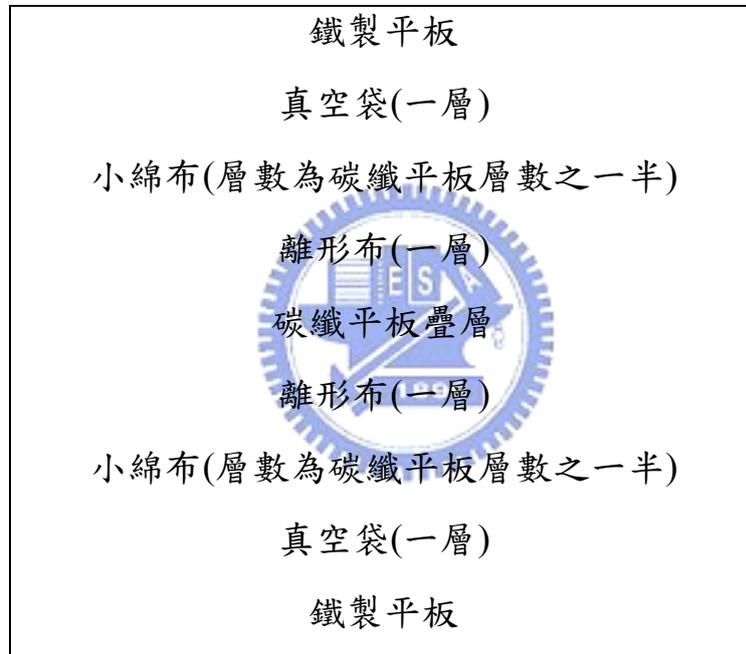
本章主要是設計一實際實驗來量測以奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即 x-方向之軸向拉力 F 時的軸向應變、橫向應變及剪應變值，作為單一階段之複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，以數值最佳化之方法來識別出奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數值。再以同樣之實驗方法來量測以偶數層稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即 x-方向之軸向拉力 F 時，只有軸向應變及橫向應變值，再用此真實之軸向應變及橫向應變值，以兩階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別法，來識別出偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數值。

此外，要再設計一實際實驗來量測，其方法是量測稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 F，以量測複合材料積層樑結構下表面之對稱堆疊之複合材料積層樑結構的軸向應變、橫向應變及剪應變值，作為單一階段之複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，做單一階段之複合材料積層樑結構的材料彈性常數識別，以數值最佳化之方法來識別出對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數值。同理以實際實驗量測對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 F，以量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變及橫向應變值，使用兩階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別法，以數值最佳化之方法來識別出對稱堆疊的複合材料積層

樑結構之各彈性常數值。。

#### 4.1 試片製作

將熱壓機先預熱至 80°C，然後再放入碳纖平板之預浸材疊層，其製作平板時，碳纖平板疊層及其所需之附件之疊放順序如下：



放入碳纖平板之預浸材疊層於熱壓機後，將上下夾板之壓力升到 300psi，保持 30 分鐘後，溫度再由 80°C 提昇到 120°C，保持 90 分鐘後 (含 80°C 昇溫到 120°C 之時間)，使其自然冷卻至室溫(此時上下夾板之壓力尚保持著 300psi)，再卸下平板。

#### 4.2 標準試片之材料的彈性常數量測

首先依上述之試片製作標準，製作好之碳纖複合材料積層平板，再將其平板寬度，再依據ASTM的標準，以試片切割機，裁成其標準試片所需之長度(含夾持端護片之長度)後，在碳纖複合材料積層平板兩端，以AW106來貼夾持端所需之護片，等待約一天後，使護片能確實牢固的黏貼於碳纖複合材料積層平板上，再用試片切割機將複合材料積層平板(含黏貼之夾持端護片)切割成ASTM的標準試片，用砂紙小心的研磨試驗區間中間之表面後，以酒精擦拭其研磨面，擦拭乾淨後再將應變規(Strain gages)黏貼於碳纖複合材料積層平板試驗區間中間之表面，再將試片夾於MTS萬能拉伸試驗機，進行拉伸試驗，測量出複合材料積層平板之彈性常數值。依據ASTM之規範D3039量測之複合材料積層板楊氏係數值 $E_1$ 、 $E_2$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，D3518之規範量測之複合材料積層板剪力模數 $G_{12}$ ，進行各種拉伸試驗，即可測量出複合材料積層平板之各項材料常數，茲將本文所欲識別之複合材料積層結構的各項材料常數列於表4-1中，用來和本文數值模擬與實驗結果所識別出來之複合材料積層結構的各項材料常數作為比對標準。

### 4.3 應變規組

本文所用之應變規組有兩種，一種是需要量測軸向應變、橫向應變及剪應變值的三個應變值，另一種是只需要量測軸向應變及橫向應變值之二個應變值。

首先介紹量測軸向應變、橫向應變及剪應變值的三個應變值之應

變規組，本文所用之應變規組為 KYOWA 廠牌，其型號為 KFG-3-120-D17-11L3M2S(如圖 4-1)依據 KYOWA 公司之說明書資料，茲將其應變規組之各項資料節錄如下：

廠牌： KYOWA

Type： KFG-3-120-D17-11L3M2S

Gage length： 3 mm

Gage resistance(24°C， 50% RH)： 120.4±0.4Ω

Gage factor(24°C， 50% RH)： 2.08±1.0%



此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 0°方向之應變值 $\epsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 90°方向之應變值 $\epsilon_{90}$ ，以及量測與主結構方向x-方向夾角 45°之應變值 $\epsilon_{45}$ ，用此應變規組所量測到的三個應變值，其應變之量測，需要結instruNet 資料擷取系統，方可即時記錄三個應變值，此instruNet 資料擷取系統需先經廠商之校正後，並於量測時依應變規組之資料設定Gage resistance及Gage factor值，即可找到我們欲得之軸向應變、橫向應變及剪應變值，應變規組與軸向應變、橫向應變及剪應變值之關係如(4-1)式

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90} \quad (4-1)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90})$$

另一種是只需要量測軸向應變及橫向應變值之二個應變值，本文所用之應變規組為 KYOWA 廠牌，其型號為 KFG-3-120-D16-11L3M2S (如圖 4-2) 依據 KYOWA 公司之說明書資料，茲將其應變規組之各項資料節錄如下：

廠牌： KYOWA

Type： KFG-3-120-D16-11L3M2S

Gage length： 3 mm

Gage resistance(24°C , 50% RH)： 119.6±0.4Ω (或 120.4±0.4Ω)

Gage factor(24°C , 50% RH)： 2.07±1.0%



此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 0° 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 90° 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的二個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值，即

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_0 \quad (4-2)$$

依上述之方法，即可利用 KFG-3-120-D17-11L3M2S 之應變規組來量測軸向應變、橫向應變及剪應變值的三個應變值；利用 KFG-3-120-D16-11L3M2S 之應變規組來量測軸向應變及橫向應變值。

#### 4.4 拉伸試驗機

實驗所用之拉伸試驗機有兩種，其拉伸試驗機之各項資料如下：

第一種：

廠 牌：Hung Ta Instrument Co., LTD.

型 號：HT-9102A(如圖 4-3)



第二種：

廠 牌：MTS

型 號：810

#### 4.5 單一階段識別法之應變量測

本節主要說明複合材料積層板結構，在主結構方向即 x-方向施以一軸向拉力 F 時，或複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，量測其軸向應變、橫向應變及剪應變值，以做為單一階段識別所需之實驗應變值。

#### 4.5.1 複合材料積層板結構受軸向負載之應變量測

本節主要介紹單一階段識別法之複合材料積層板結構之軸向負載與應變量測，即是以奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，夾持於拉伸試驗機之上下夾頭上，在主結構方向即 x-方向施以一軸向拉力 F 時，以應變規及其量測儀器來量測其軸向應變、橫向應變及剪應變值，以實驗所得之各項實際應變量測值，作單一階段之複合材料積層板結構之各彈性常數識別。為了能將平板完全夾持住，其奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之試寬度取 30mm。其詳細試片(如圖 4-4)規格如下：

試驗區間長：220 mm

寬：30 mm

厚：1.125 mm

疊層：每層厚度 0.125 mm，9 層共厚 1.125 mm

本文分別做 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力

$F= 0.5\text{kN}$ 之拉伸後的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，及 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F= 0.3\text{kN}$ 之拉伸後的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，來印證本方法是確實可行的。

先量測 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F= 0.5\text{kN}$ 之拉伸後的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，其拉伸試驗機廠牌為Hung Ta Instrument Co., LTD.，型號為HT-9102A，拉伸速率為 $0.01\text{ mm/s}$ 。

值得一提的是拉伸試驗機夾持試片用之上下夾頭，有許多文獻皆在探討克服試片夾持端效應的方法[39-43]，Pagano和Halpin [42]在探討單一偏角(Off-axis)之複合材料積層板，克服試片夾持端之影響，他們是利用試片在挾持端兩端鑽孔，利用其可轉動之上下夾頭來克服剪變形所造成之影響，在其文獻中，明白指出測試區間之長寬的比值必須要大於六，即 $\frac{a}{b} > 6$ 才可降低挾持端之效應；Pindera及Herakovich [41] 在探討單一偏角之複合材料積層板，做拉伸試驗時之剪力與剪應變之特性，利用試片在挾持端兩端鑽孔，及其可轉動之上下夾頭來克服剪變形所造成之影響，並在試片中間貼三軸之應變規，利用三軸之應變值轉換成單一偏角之複合材料積層板之剪應變值，進而求取單一偏角之複合材料積層板的剪力常數 $G_{12}$ ；Marín等[39-40] 以拉伸試驗之法來探討複材剪力常數之性質，其文獻中，明白指出測試區間之長寬的比值必須要大於六，才可降低挾持端之效應，他們以單一偏角之複合材料

積層板做拉伸試驗，以集中因數來修正挾持端效應對剪力常數 $G_{12}$ 之影響；Sun及Chung [43] 提出計算斜角護片斜角的，來克服單一偏角之複合材料積層板，拉伸時試片夾持端應力不均之現象的影響，此方法是較簡單試片不用鑽孔且夾持端可用油壓夾頭。本文所選用試片為正負角對稱堆疊之複材積層板，在偶數層時無剪應變，在奇數層時剪應變相對於單一偏角之複合材料積層板小很多，本文所用之試片，其測試區間之長寬的比值即 $\frac{a}{b} \cong 7.33$ ，依有限元素分析，挾持端之效應約在遠離挾持端 0.3 的單位長度時，無挾持端之效應，本文所用之夾頭為可稍微轉動之傳統機械式夾頭，即可量測到試片中間所貼之可接受誤差的三軸應變值。

圖 4-5 (a)、(b)、及(c)分別是 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變及負載- $45^\circ$ 方向應變圖。

其應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D17-11L3M2S，此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，以及量測與主結構方向x-方向夾角 $45^\circ$ 之應變值 $\varepsilon_{45}$ ，用此應變規組所量測到的三個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變、橫向應變及利用 $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90})$ 而算出剪應變值。

另外改變不同荷重及拉伸方法，以手動調至 0.3kN後，取部分數據

之平均值，來做 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F=0.3\text{kN}$ 之拉伸，其拉伸試驗機之各項資料如上所述；其應變規組為 KYOWA 之型號 KFG-3-120-D17-11L3M2S。

以所量測到之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即 x-方向之軸向拉力 F 時的軸向應變、橫向應變及剪應變的實際實驗應變值，作為建立複合材料積層板結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層板結構之各項彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層板結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，來證實本文研究之方法在識別複合材料積層板結構的各項材料彈性常數值之可行性及精確性。

#### 4.5.2 複合材料積層樑結構之三點彎曲試驗與應變量測

對複合材料積層樑結構而言，首先探討的是以有可量測到對稱堆疊之複合材料積層樑結構的軸向應變、橫向應變及剪應變值時，做單一階段之複合材料積層樑結構的材料彈性常數識別，其方法是將相同製程之複合材料積層樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力 F(如圖 4-6、4-7)再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值。

本文將分別量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變、橫向應變及剪應變值，及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變、橫向應變及剪應變值。

首先量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變、橫向應變及剪應變值，其拉伸試驗機為Hung Ta Instrument Co., LTD.，型號為HT-9102A，上夾頭下壓速率 $0.01\text{mm/s}$ 。其應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D17-11L3M2S，此型式之應變規組，此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，以及量測與主結構方向x-方向夾角 $45^\circ$ 之應變值 $\varepsilon_{45}$ ，用此應變規組所量測到的三個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變、橫向應變及剪應變值。

其詳細試片(如圖 4-8、4-9)規格如下:

試片總長 : 232 mm

試驗區間長: 200 mm

試片寬 : 12 mm

試片厚 : 2.88 mm

疊 層：每層厚度 0.12 mm ，24 層共厚 2.88 mm

以實驗所之各項應變量測值，作為建立複合材料積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層樑結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，來證實在識別複合材料積層板及樑結構的各項材料彈性常數值之可行性及精確性。

其次重複上述方法，再量測 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變、橫向應變及剪應變值，其拉伸試驗機之各項資料如上所述。

其應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D17-11L3M2S，此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\epsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\epsilon_{90}$ ，以及量測與主結構方向x-方向夾角 $45^\circ$ 之應變值 $\epsilon_{45}$ ，用此應變規組所量測到的三個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變、橫向應變及剪應變值。

圖 4-10 (a)、(b)、(c)是 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之複合材料積層樑結構作三點彎曲試驗力 $F=3\text{N}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變及負載- $45^\circ$ 方向應變圖；圖 4-11 (a)、(b)、(c)是 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之複合材料積層樑結

構作三點彎曲試驗力 $F=3\text{N}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變及負載- $45^\circ$ 方向應變圖;其詳細試片規格詳如上述，以實驗所之各項應變量測值，作為建立複合材料積層樑結構之材料彈性常數識別的數值最佳化目標函數即誤差函數之數學模式，以複合材料積層樑結構之各彈性常數為數值最佳化之設計變數，其設計變數再以隨機多起始點方式及數值最佳化方法，找尋誤差函數的極小值，當找到誤差函數之極小值時，而此時之設計變數即為複合材料積層樑結構之各彈性常數值，再將識別出來之各彈性常數值，和標準試片的各彈性常數值做比對，來證實在識別複合材料積層板及樑結構的各項材料彈性常數值之可行性及精確性。



#### 4.6 兩階段識別法之應變量測

本節係說明複合材料積層板結構，在主結構方向即  $x$ -方向施以一軸向拉力  $F$  時，或複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，量測其軸向應變及橫向應變值，以做為兩階段識別所需之實驗應變值。

##### 4.6.1 複合材料積層板結構之應變量測

本節探討的是兩階段識別法之複合材料積層板結構之軸向負載與應變量測，其是以偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時，只有軸向應變及橫向應變值，則必需使用兩階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別法，依前述之方法先以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 45^\circ$  偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，

首先量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的實驗軸向應變及橫向應變值，其拉伸試驗機廠牌為MTS，型號為810，拉伸速率為 $0.01\text{ mm/s}$ 。

所選用之應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D16-11L3M2S。此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的二個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值。其詳細試片(如圖4-4)規格如下，試驗區間長 $\times$ 寬 $\times$ 厚為 $220\text{ mm}\times 30\text{ mm}\times 1\text{ mm}$ ，堆疊之疊層，每層厚度 $0.125\text{ mm}$ ，8層共厚 $1\text{ mm}$ 。

將實驗所量測到之 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的實驗軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪

力模數 $G_{12}$ 及浦松比 $\nu_{12}$ ，然後再以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 30^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構在承受主結構方向即x-方向之軸向拉力F時的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，即量測 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的實驗軸向應變及橫向應變值，其拉伸試驗機為上述之MTS型號 810，拉伸速率為或  $0.01\text{ mm/s}$ 。

圖 4-12 (a)、(b) 及 4-13 (a)、(b) 分別是 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變圖，及 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之複合材料積層板結構承受軸向拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變圖。

其詳細試片規格如上所述，所選用之應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D16-11L3M2S。此型式之應變規組，可量測主結構方向x-方向之應變值，即  $0^\circ$  方向之應變值 $\epsilon_0$ ，和量測主結構方向y-方向之應變值，即  $90^\circ$  方向之應變值 $\epsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的二個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值。

將實驗所量測到之 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力 $F=0.5\text{kN}$ 之拉伸後的實驗軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層板結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

## 4.6.2 複合材料積層樑結構之應變量測

本節係探討以可量測到對稱堆疊之複合材料積層樑結構的軸向應變及橫向應變值時，用複合材料積層樑結構之兩階段彈性常數識別法，來識別複合材料積層樑結構之各彈性常數值。其方法是當只有量測對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ ，以量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變及橫向應變時，則必需使用兩階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別法，首先以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 45^\circ$ 稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別，量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變及橫向應變值，其拉伸試驗機為Hung Ta Instrument Co., LTD. 型號為HT-9102A之拉伸試驗機，上夾頭下壓速率為 $0.02\text{ mm/s}$ 。

所選用之應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D16-11L3M2S。此型式之應變規組，可量測主結構方向 $x$ -方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向 $y$ -方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的兩個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變

及橫向應變值，其詳細試片規格為試片總長 232 mm，試驗區間長 200 mm，試片寬 12 mm，試片厚 2.88 mm。

將實驗所量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變及橫向應變值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，再固定其所識別出之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ ，然後再以應變規及其量測儀器來量測 $\pm 60^\circ$ 偶數層對稱堆疊的複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在結構之中間處施以一壓力 $F$ 的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層樑結構之彈性常數識別，即量測 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變及橫向應變值，其拉伸試驗機之各項資料如上述。

其應變規組之各項資料如下：

應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D16-11L3M2S，此型式之應變規組，可量測主結構方向 $x$ -方向之應變值，即 $0^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向 $y$ -方向之應變值，即 $90^\circ$ 方向之應變值 $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的兩個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值。將實驗所量測 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 複合材料積層樑結構中心承受壓力 $F=3\text{N}$ 之三點彎曲後的軸向應變及橫向應變值，做第二階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而識別出複合材料積層樑結構之彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 。

圖 4-14 (a)、(b)分別是 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之複合材料積層樑結構作三點彎

曲試驗力 $F=3\text{N}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變圖；圖 4-15 (a)、(b) 分別是 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之複合材料積層樑結構作三點彎曲試驗力 $F=3\text{N}$ 之拉伸後的負載-軸向應變、負載-橫向應變圖。

不論是複合材料積層板結構，或是複合材料積層樑結構，皆分兩部份來探討之，分別是以單一階段識別法及兩階段識別法，以實驗來驗證其可行性及精確性。



## 第五章 結果與討論

首先，依照第四章 4.1 節所介紹之製程，製作標準之複合材料積層板的標準試片，再依 4.2 節陳述之方法裁製好複合材料積層板的標準試片的規格依 ASTM 之規範 D3039 量測之複合材料積層板楊氏係數值  $E_1$ 、 $E_2$  及蒲松比  $\nu_{12}$ ，D3518 之規範量測之複合材料積層板剪力模數  $G_{12}$ ，本文所使用之複合材料積層板及樑結構之材料為 Graphite/Epoxy，其複合材料積層板及樑結構之各項彈性常數值如表 4-1 所列。



### 5.1 複合材料積層板及樑結構之單一階段識別法

本節將對複合材料積層板及樑結構而言，分別以數值模擬實驗驗證來探討之。將對稱堆疊的複合材料積層板及樑結構之各彈性常數的上下限値之範圍為

Gr/ep:

$$0 < E_1 < 310 \text{ GPa}, 0 < E_2 < 20 \text{ GPa}, 0 < G_{12} < 20 \text{ GPa}, 0.1 < \nu_{12} < 0.5$$

Gl/ep

$$0 < E_1 < 60 \text{ GPa}, 0 < E_2 < 16 \text{ GPa}, 0 < G_{12} < 16 \text{ GPa}, 0.05 < \nu_{12} < 0.5$$

#### 5.1.1 複合材料積層板結構之數值模擬

用 graphite/epoxy 之材料分別以  $[(15^\circ/-15^\circ)_4/15^\circ]$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_4/60^\circ]$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層板為例，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1.125mm之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向施以一軸向拉力 $F=1\text{ kN}$ 之拉伸時，其理論應變值詳列於表 5-1。

以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)式中，作為單一階段之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\underline{x})$ ，而設計變數 $\underline{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值。

表 5-2 為所識別出來的奇數層對稱堆疊之複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值；由表中知以 $[(15^\circ/-15^\circ)_4/15^\circ]$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 及 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.5%以內，而 $[(60^\circ/-60^\circ)_4/60^\circ]$ 之角度堆疊的奇數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言，所識別出來的 $E_1$ 、 $E_2$ 之

誤差百分比絕對值在為 0.3%以內， $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值為 0%，其不論各種不同角度堆疊的奇數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言，整體而言，各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.5%以內，所識別各項彈性常數值之精確度亦相當良好。

表 5-3 為 graphite/epoxy 之材料以  $[(15^\circ/-15^\circ)_4/15^\circ]$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_4/60^\circ]$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層板為例，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1.125mm之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向及y-方向施以合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=1\text{ kN/m}$ ；合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=5\text{ kN/m}$ ；合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=-1\text{ kN/m}$ ；以及合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=-5\text{ kN/m}$ 之拉伸時之理論應變值。

在表 5-4 中，是以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值代入所分別識別出來之結果，不論各種角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，不論各種不同角度堆疊的複合材料積層板結構而言所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 其誤差百分比絕對值在 0.7%以內，而 $E_2$ 及 $G_{12}$ 識別出來的彈性常數值其誤差百分比絕對值分別在 0.7%及 0.6%以內， $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值為 0%，對整體而言，所識別出來的彈性常

數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值有 0.7%以內之精確度，故可印証本方法之可行性及精確。但在 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板當合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=5 \text{ kN/m}$ ，其軸向應變等於橫向應變，限制條件不夠，為多組解，當合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=-5 \text{ kN/m}$ 時，無剪應變，其限制條件不夠，亦為多組解。

表 5-5 為glass/epoxy之材料以 $[(15^\circ/-15^\circ)_4/15^\circ]$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_4/60^\circ]$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層板為例，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1.125mm之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向及y-方向施以合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=1 \text{ kN/m}$ ；合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=5 \text{ kN/m}$ ；合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=-1 \text{ kN/m}$ ；以及合應力 $N_x=5 \text{ kN/m}$ 、 $N_y=-5 \text{ kN/m}$ 之拉伸時之理論應變值。

在表 5-6 中，是以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值代入所分別識別出來之結果，不論各種角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，不論各種不同角度堆疊的複合材料積層板結構而言所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 其誤差百分比絕對值在 0.7%以內，而 $E_2$ 及 $G_{12}$ 識別出來的彈性常數值其誤差百分比絕對值在 0.2%以內， $\nu_{12}$ 其誤差百

分比絕對值為 0%，對整體而言，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值有 0.7%以內之精確度，故可印証本方法之可行性及精確。但在 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板當合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=5\text{ kN/m}$ ，其軸向應變等於橫向應變，限制條件不夠，及當合應力 $N_x=5\text{ kN/m}$ 、 $N_y=-5\text{ kN/m}$ 時，無剪應變，其限制條件不夠，以上兩種情況皆為多組解。

用Gr/ep之單一角度堆疊材料分別以 $[15^\circ]_9$ 、 $[30^\circ]_9$ 、 $[45^\circ]_9$ 、及 $[60^\circ]_9$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層板為例，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1.125mm之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向施以一軸向拉力 $F=0.5\text{ kN}$ 之拉伸時，其理論應變值列於表 5-7。

以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值，作為單一階段之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\underline{x})$ ，而設計變數 $\underline{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值。

表 5-8 為所識別出來單一角度堆疊之複合材料積層板結構的各項

彈性常數值及其誤差百分比絕對值；由表中知以 $[15^\circ]_9$ 、 $[30^\circ]_9$ 、 $[45^\circ]_9$ 、及 $[60^\circ]_9$ 角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.51%以內，而所識別出來的 $E_1$ 之誤差百分比絕對值在為 0.51%以內， $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值皆為 0%，其不論各種不同單一偏角堆疊之複合材料積層板結構而言，整體而言，各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.51%以內，所識別各項彈性常數值之精確度亦相當良好。

再以 $G_I/ep$ 之單一角度堆疊材料分別以 $[15^\circ]_9$ 、 $[30^\circ]_9$ 、 $[45^\circ]_9$ 、及 $[60^\circ]_9$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層板為例，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1.125mm之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向施以一軸向拉力 $F= 0.1 \text{ kN}$ 之拉伸時，其理論應變值列於表 5-9。

以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值，作為單一階段之單一角度堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\mathbf{x})$ ，而設計變數 $\mathbf{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值。表 5-10 為所識別出來單一偏角堆疊之複合材料積層板結構

的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值；由表中知以 $[15^\circ]_9$ 、 $[30^\circ]_9$ 、 $[45^\circ]_9$ 、及 $[60^\circ]_9$ 之不同角度單一偏角堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.98%以內，而所識別出來的 $E_1$ 之誤差百分比絕對值在 0.98%以內， $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值皆在 0.1%以內，其不同角度單一偏角堆疊之複合材料積層板結構而言，整體而言，各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.98%以內，所識別各項彈性常數值之精確度極佳。由以上分別以 $G_r/ep$ 及 $G_l/ep$ 之單一角度堆疊之複合材料積層板結構為例，證實本方法確實可運用在單一角度堆疊之複合材料積層板結構的各項彈性常數值識別，惟因單一角度堆疊之複合材料積層板拉伸時之剪應變值甚大，必須要參考文獻[41-43]之法，以克服夾持端之影響。

### 5.1.2 複合材料積層板結構單一階段識別法之實驗驗證

就複合材料積層板結構之實際實驗分析而言，先依 4.1 節之製程做好如標準試片之相同製程的複合材料積層板結構，再做本文所研究之單一階段識別及兩階段識別法之兩部份實驗，將實際實驗之數據做單一階段複合材料積層板結構識別及兩階段複合材料積層板結構識別後，以表 4-1 之各項材料常數值和實驗結果所識別出來之複合材料積層

結構的各項材料常數作為比對標準。

以單一階段識別法，以奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，夾持於拉伸試驗機之上下夾頭上，在主結構方向即  $x$ -方向施以一軸向拉力  $F$ ，以應變規及其量測儀器來量測其軸向應變、橫向應變及剪應變值，以實驗所得之各項實際應變量測值，作單一階段之複合材料積層板結構之各彈性常數識別。其奇數層對稱堆疊的複合材料積層板之規格為試驗區間長為 220 mm，試片寬為 30 mm，厚為 1.125 mm，9 層共厚 1.125 mm。

先量測以三片  $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$  之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構，以 Hung Ta Instrument Co., LTD. 之拉伸試驗機，型號為 HT-9102A，拉伸速率為 0.01 mm/s，應變規組為 KYOWA 之型號 KFG-3-120-D17-11L3M2，當承受軸向拉力  $F=0.5\text{kN}$  之拉伸時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，其實驗應變值列於表 5-11。

以表 5-11 之實際實驗軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)式中，作為單一階段之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數  $e(\underline{x})$ ，而設計變數  $\underline{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$  為奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值。

表 5-12 是分別將每一試片所實際實驗之軸向應變、橫向應變及剪應變值，作單一階段識別法所識別出來之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$  之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 11.1% 以內。

再以  $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$  之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之實驗應變平均值，作單一階段奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別， $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$  之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板以實際實驗軸向應變、橫向應變及剪應變值之平均值代入作單一階段各彈性常數識別之結果，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 5.7% 以內，故可印証本方法識別各項彈性常數值相當精確且可行的。

另外改變不同荷重及拉伸方法，其拉伸試驗機及應變規組之各項資料如上所述，奇數層對稱堆疊的複合材料積層板之規格為試驗區間長為 220 mm，試片寬為 30 mm，厚為 1.125 mm，9 層共厚 1.125 mm；今將軸向拉力  $F$  以手動慢慢調至 0.3kN 時，取部分數據之平均值，來做以  $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$  之複合材料積層板結構承受軸向拉力  $F= 0.3\text{kN}$  之拉

伸時之軸向應變、橫向應變及剪應變值，如表 5-13 所列。

以實際實驗軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)式中，作為單一階段之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別，將 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數，在表 5-14 中是分別將每一試片所實際實驗之軸向應變、橫向應變及剪應變值，作單一階段識別法所識別出來之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 8.8%以內。



以三片 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之實驗應變平均值，作單一階段奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 7.2%以內，故可印証本方法識別各項彈性常數值相當精確且可行的。

在圖 4-5(a)、(b)及(c)分別是 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之角度堆疊之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板之負載-軸向應變圖和其直線逼近圖、負載-橫向應變圖和其直線逼近圖及負載- $45^\circ$ 方向應變圖和其直線逼近圖。

切記的是拉伸試驗機夾持試片用之上下夾頭，不宜選用油壓式上下夾頭，而需用傳統之機械式上下夾頭，因為油壓式上下夾頭之夾持力過緊，會造成在量測  $45^\circ$  方向上之應變值量測值不準確，而影響剪應變值之誤差過大，故宜用稍可轉動之機械式上下夾頭來改善。

### 5.1.3 複合材料積層樑結構單一階段識別法

本節將分別以 Gr/ep 之複合材料為例，用  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  等四種不同角度之堆疊複合材料積層樑為例，其複合材料積層樑之每層厚度為 0.12mm，今將複合材料積層樑試片作成，試片總長為 232mm，試驗區間長為 200mm，寬為 12mm，厚度為 2.88mm 之對稱堆疊的複合材料積層樑，之複合材料積層樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力  $F=3N$ ，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值，其理論應變值列於表 5-15。

以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)式中，作為單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需

的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\mathbf{x})$ ，而設計變數 $\mathbf{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。

表 5-16 為單一階段識別法所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以 $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 及 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.2%以內，其中 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比皆為零，故可印証本方法識別各項彈性常數值相當精確。最後，以 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構為例，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 其誤差百分比絕對值為 0.3%，而 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 識別出來的彈性常數值其誤差百分比絕對值在 0.2%以內之精確度，對整體而言，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值皆在 0.3%以內。

表 5-17 為以 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，以隨機多起使點所找到之總域極小值，其可靠度在 0.997 以上，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.1%以內， $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構而言，所識別出來的 $E_1$ 之誤差百分比絕對值為 0.04%， $E_2$ 之誤差百分比絕對值為

0.1%， $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值為 0%，其不論各種不同角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構而言，整體而言，各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.1%以內，所識別各項彈性常數值有不錯之精確度。

今再以GI/ep 之複合材料為例，同樣以 $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 等四種不同角度之堆疊複合材料積層樑為例，其複合材料積層樑之每層厚度為 0.12mm，今將複合材料積層樑試片作成，試片總長為 232mm，試驗區間長為 200mm，寬為 12mm，厚度為 2.88mm之對稱堆疊的複合材料積層樑，複合材料積層樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力 $F=1\text{N}$ ，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值，其理論應變值列於表 5-18。

以真實之理論軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)式中，作為單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\mathbf{x})$ ，而設計變數 $\mathbf{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。

表 5-19 為單一階段識別法所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$  及  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之角度堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 0.2% 以內，其中  $G_{12}$  及  $\nu_{12}$  其誤差百分比皆為零，故可印証本方法識別各項彈性常數值相當精確。最後，以  $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$  之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構為例，所識別出來的彈性常數值  $E_2$  其誤差百分比絕對值為 0.4%，而  $E_1$ 、 $G_{12}$  及  $\nu_{12}$  識別出來的彈性常數值其誤差百分比絕對值在 0.03% 以內，對整體而言，所識別出來的彈性常數值  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$  其誤差百分比絕對值皆在 0.4% 以內。以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構為例，所識別出來的彈性常數值  $E_1$  其誤差百分比絕對值為 0.8%，而  $E_2$ 、 $G_{12}$  及  $\nu_{12}$  識別出來的彈性常數值其誤差百分比絕對值在 0.2% 以內，對整體而言，所識別出來的彈性常數值  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$  其誤差百分比絕對值皆在 0.8% 以內。故知無論對 Gr/ep 或 Gl/ep 而言，各種角度堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑結構，作單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別有極高之精確度。

#### 5.1.4 複合材料積層樑結構單一階段識別法之實驗結果

就複合材料積層樑結構之實際實驗分析而言，先依 4.1 節之製程做好如標準試片之相同製程的複合材料積層樑結構，再做本文所研究之單一階段識別及兩階段識別法之兩部份實驗，將實際實驗之數據做單一階段複合材料積層樑結構識別及兩階段複合材料積層樑結構識別後，以表 4-1 之各項材料常數值和實驗結果所識別出來之複合材料積層結構的各項材料常數作為比對標準。

首先，以單一階段識別法，將對稱堆疊的複合材料積層樑結構，置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力  $F=3\text{N}$ ，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值，以實驗所得之各項實際應變量測值，作單一階段之複合材料積層樑結構之各彈性常數識別。其複合材料積層樑之每層厚度為  $0.12\text{mm}$ ，今將複合材料積層樑試片作成，試片總長為  $232\text{mm}$ ，試驗區間長為  $200\text{mm}$ ，寬為  $12\text{mm}$ ，厚度為  $2.88\text{mm}$ 。

以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑而言，其荷重拉伸試驗機及應變規組之各項資料如上述，來做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力  $F=3\text{N}$  時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，列於表 5-20。

以表 5-20 之實際實驗軸向應變、橫向應變及剪應變值，作為單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別。表 5-21 是

分別將每一試片所實際實驗之軸向應變、橫向應變及剪應變值，作單一階段識別法所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 8.5% 以內。

再以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之實驗應變平均值，作單一階段對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別，表 5-21 為  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  對稱堆疊的複合材料積層樑作單一階段各彈性常數識別之結果，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 3.7% 以內，故可知以實驗之平均值識別較為精確。

再量測  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑結構，以 Hung Ta Instrument Co., LTD. 之拉伸試驗機，型號為 HT-9102A，將對稱堆疊的複合材料積層樑結構，置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，中間處施壓速率為 0.01 mm/s，應變規組為 KYOWA 之型號 KFG-3-120-D17-11L3M2S，複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力  $F=3\text{N}$  時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，其實驗應變值列於表 5-22。

以表 5-22 之實際實驗軸向應變、橫向應變及剪應變值代入(3-19)

式中，作為單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變、橫向應變及剪應變值，建立誤差函數 $e(\mathbf{x})$ ，而設計變數 $\mathbf{x}=[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]$ 為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。

表 5-23 是分別將每一試片所實際實驗之軸向應變、橫向應變及剪應變值，作單一階段識別法所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值除 $\nu_{12}$ 在 10%以內，其餘各項彈性常數值之誤差百分比絕對值皆在 7%以內。

再以 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之實驗應變平均值，作單一階段對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別，在表 5-23 中 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑作單一階段各彈性常數識別之結果，所識別出來的各項彈性常數值其誤差百分比絕對值皆在 6.7%以內。

在圖 4-10(a)、(b) 及、(c)分別是 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑之負載-軸向應變圖和其直線逼近圖、負載-橫向應變圖和其直線逼近圖及負載-45°方向應變圖和其直線逼近圖。圖 4-11(a)、(b) 及、

(c)分別是 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑之負載-軸向應變圖和其直線逼近圖、負載-橫向應變圖和其直線逼近圖及負載- $45^\circ$ 方向應變圖和其直線逼近圖。

## 5.2 複合材料積層板及樑結構之兩段式識別法

本節將對複合材料積層板及樑結構而言，以兩段式識別法來識別複合材料積層板及樑結構之各彈性常數，且分別以數值模擬實驗驗證來探討。將對稱堆疊的複合材料積層板及樑結構之各彈性常數的上下限值之範圍為：

第一階段：

Gr/ep:

$$0 < E_1 < 1000 \text{GPa}, 0 < E_2 < 50 \text{GPa}, 0 < G_{12} < 20 \text{GPa}, 0.1 < \nu_{12} < 0.5$$

Gl/ep:

$$0 < E_1 < 300 \text{GPa}, 0 < E_2 < 30 \text{GPa}, 0 < G_{12} < 20 \text{GPa}, 0.05 < \nu_{12} < 0.5$$

第二階段：

Gr/ep:

$$0 < E_1 < 1000 \text{ GPa}, 0 < E_2 < 50 \text{ GPa}$$

Gl/ep:

$$0 < E_1 < 300 \text{ GPa}, 0 < E_2 < 30 \text{ GPa}$$

### 5.2.1 複合材料積層板結構兩階段識別法之數值模擬

今用 graphite/epoxy 之材料分別以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 、及  $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$  等四種不同角度之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板為例，來介紹兩階段識別法之數值模擬，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1mm 之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即 x-方向施以一軸向拉力  $F = 0.5 \text{ kN}$  之拉伸時，其理論應變值列於表 5-24。

以表 5-24 之理論軸向應變及橫向應變值代入(3-23)式中，作為兩階段之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變及橫向應變值，即成為第一階段數值最佳化中目標函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$  之極小值的問題， $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$  即為誤差函數，而設計變數  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = [E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, G_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$  為偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項

彈性常數值。今將第一階段以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構之隨機各起始點、區域極小值，以及最後找到之總域極小值列於表 5-25 中。

在表 5-25 為第一階段所識別出來之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表中可知道以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言，所識別出來的彈性常數值 $G_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 誤差百分比絕對值皆為 0%，有很好之精確度。此第一階段以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構的各項彈性常數值中，設定 $G_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 為複合材料積層板結構之剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比，故在第二階段識別時設定 $G_{12}^{(1)} = G_{12}$ 及 $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{12}$ 。

今第一階段若以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構之總域極小值列於表 5-26 中。在表 5-26 分別為第一階段以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出來之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-26 中可知道以 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的

偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言找不到總域極小值外， $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 及 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出來的彈性常數值 $G_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 誤差百分比絕對值分別為71.5%及6.7%以內並無 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出 $G_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ ，有很好之精確度。故以第一階段以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構，所識別出之複合材料積層板結構的剪力係數與為複合材料在纖維方向即1-方向受力而在基材方向即2-方向產生橫向應變之蒲松比 $G_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ ，故在第二階段識別時設定為已知值。

今再分別以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即x-方向承受一正向拉力作用時之各主結構方向即x-y方向之軸向應變及橫向應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數 $e(\underline{x}^{(2)})$ ； $e(\underline{x}^{(2)})$ 為第二階段複合材料積層板結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數 $\underline{x}^{(2)} = [E_1^{(2)}, E_2^{(2)}]$ 為第二階段以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構各項彈性常數，將第二階段以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料

積層板結構之隨機各起始點、區域極小值，以及最後找到之總域極小值列於表 5-27、5-28 及 5-29 中。而表 5-30 為第二階段所識別出來之偶數層對稱堆疊的Gr/ep複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-30 中，可知道以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構，所識別出來的彈性常數值 $E_1^{(2)}$ 誤差百分比絕對值在 0.05%以內；所識別出來的彈性常數 $E_2^{(2)}$ 值誤差百分比絕對值為 0%；此第二階段單種材料之複合材料積層板結構的各項彈性常數值中， $E_1^{(2)}$ 即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值 $E_1$ ， $E_2^{(2)}$ 為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值 $E_2$ 。



用Gl/ep之材料分別以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 等四種不同角度之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板為例，來介紹兩階段識別法之數值模擬，其複合材料積層板之每層厚度為 0.125mm，今將複合材料積層板截成長為 220mm，寬為 30mm，厚度為 1mm對稱堆疊的複合材料積層板，在主結構方向即x-方向施以一軸向拉力 $F=0.1\text{kN}$ 之拉伸時，其理論應變值列於表 5-31。

以表 5-31 之理論軸向應變及橫向應變值，作為兩階段之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變

及橫向應變值，即成為第一階段數值最佳化中目標函數 $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$ 之極小值的問題， $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$ 即為誤差函數，而設計變數 $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = [\mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{G}_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$ 為偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值。

在表 5-32 為第一階段所識別出來之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-32 中可知道以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言，所識別出來的彈性常數值 $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 誤差百分比絕對值皆為 0%，有很好之精確度。以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出來之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值，在表中可知道以 $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構而言找不到總域及小值外，以 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出來的彈性常數值 $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 誤差百分比絕對值分別為 17.4%及 0%，並無 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構所識別出 $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ ，有很好之精確度。故以第一階段以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構，所識別出之複合材料積層板結構的剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而

在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比  $G_{12}^{(1)}$  及  $\nu_{12}^{(1)}$ ，故在第二階段識別時設定為已知值。

今再分別以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$  之偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即 x-方向承受一正向拉力作用時之各主結構方向即 x-y 方向之軸向應變及橫向應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數  $e(\underline{x}^{(2)})$ ； $e(\underline{x}^{(2)})$  為第二階段複合材料積層板結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數  $\underline{x}^{(2)} = [E_1^{(2)}, E_2^{(2)}]$  為第二階段以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$  單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構各項彈性常數。今再將第二階段以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$  之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構之隨機各起始點最後找到的總域極小值列於表 5-33。表 5-33 為第二階段所識別出來之偶數層對稱堆疊的 GI/ep 複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值，在表中，可知道以  $[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$  之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構，所識別出來的彈性常數值  $E_1^{(2)}$  誤差百分比絕對值在 0.05% 以內；所識別出來的彈性常數  $E_2^{(2)}$  值誤差百分比絕對值為 0%；此第二階段單種材料之複合材料積層板結構的各項彈性

常數值中， $E_1^{(2)}$  即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值  $E_1$ ， $E_2^{(2)}$  為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值  $E_2$ 。

## 5.2.2 複合材料積層板結構兩階段識別法之實際實驗

首先量測  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  及  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力  $F=0.5\text{kN}$  之拉伸時的實驗軸向應變及橫向應變值如表 5-34，其拉伸試驗機廠牌為 MTS，型號為 810，拉伸速率為  $0.005\text{mm/s}$ ；所選用之應變規組為 KYOWA 之型號 KFG-3-120-D16-11L3M2S，此型式之應變規組，可量測主結構方向 x-方向之應變值，即  $0^\circ$  方向之應變值  $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向 y-方向之應變值，即  $90^\circ$  方向之應變值  $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的二個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值。其詳細試片規格如下，試驗區間長×寬×厚為  $220\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ ，堆疊之疊層，每層厚度  $0.125\text{ mm}$ ，8 層共厚  $1\text{ mm}$ 。

在表 5-35 中，是以三片  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構承受拉力  $F=0.5\text{kN}$  之拉伸時之實際實驗軸向應變及橫向應變值，作為單一階段之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各彈性

常數識別，建立誤差函數  $e(\underline{x}^{(1)})$ ，而設計變數為奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之各項彈性常數值，以及將實際實驗之軸向應變及橫向應變值之平均值，作第一階段識別法所識別出來之奇數層對稱堆疊的複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  之角度堆疊之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構為例，所識別出來的剪力模數  $G_{12}$  和蒲松比  $\nu_{12}$  其誤差百分比絕對值皆在 1.3% 以內，故可知本方法做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，而以  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  之角度堆疊之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板結構之實際實驗之軸向應變及橫向應變值之平均值，做第一階段之複合材料積層板結構之彈性常數識別，所識別出來的剪力模數  $G_{12}$  值其誤差百分比絕對值為 0.9%，而其蒲松比  $\nu_{12}$  值其誤差百分比絕對值為 1%。

將第一階段所識別出來之複合材料積層板結構彈性常數之剪力模數  $G_{12} = 6.78 \text{ GPa}$  及蒲松比  $\nu_{12} = 0.297$  值固定，再量測以  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  之單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即 x-方向承受一正向拉力  $F = 0.5 \text{ kN}$  作用時之各主結構方向即 x-y 方向之實際實驗的軸向應變及橫向應變值如表 5-36 所列，利用此實際實驗的應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識

別目標函數 $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ ； $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ 為第二階段複合材料積層板結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數 $\underline{\mathbf{x}}^{(2)} = [\mathbf{E}_1^{(2)}, \mathbf{E}_2^{(2)}]$ 為第二階段以 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構各項彈性常數

表 5-36 分別為第二階段所識別出來之 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 偶數層對稱堆疊的Gr/ep複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表中，可知道以 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構，所識別出來的彈性常數值 $\mathbf{E}_1^{(2)}$ 誤差百分比絕對值皆在 4.15%以內；所識別出來的彈性常數值 $\mathbf{E}_2^{(2)}$ 誤差百分比絕對值皆在 8.35%以內；此第二階段單種材料之複合材料積層板結構的各項彈性常數值中， $\mathbf{E}_1^{(2)}$ 即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值 $E_1$ ， $\mathbf{E}_2^{(2)}$ 為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值 $E_2$ 。

同理，再將第一階段以實際實驗之軸向應變及橫向應變值之平均值所識別出來之複合材料積層板結構彈性常數之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 值固定，再量測以 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之單種材料偶數層對稱堆疊而成之複合材料積層板結構受軸向拉力即x-方向承受一正向拉力 $F= 0.5\text{kN}$ 作用時之各主結構方向即x-y方向之實際實驗的軸向應變及橫向應變值之平均值建立第二階段識別目標函數 $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ ；第二階段所識別出來之

$[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  偶數層對稱堆疊的Gr/ep複合材料積層板結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值，所識別出來的彈性常數值 $E_1^{(2)}$  誤差百分比絕對值皆為 0.96%；所識別出來的彈性常數值 $E_2^{(2)}$  誤差百分比絕對值皆在 1.73%。在表 5-36 中可知道以  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  之角度堆疊的偶數層對稱堆疊之複合材料積層板結構實際實驗的軸向應變及橫向應變值之平均值，所識別出來的彈性常數值 $E_1$  及 $E_2$  之誤差百分比絕對值皆在 1.73%以內，有較佳之結果。

圖 4-12(a)、(b)及圖 4-13(a)、(b)分別是 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 和 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊之偶數層對稱堆疊的複合材料積層板之負載-軸向應變圖和及負載-橫向應變圖。



### 5.2.3 複合材料積層樑結構兩階段識別法之數值模擬

以Gr/ep 例，其堆疊方式分別為 $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 等四種不同角度之對稱堆疊的複合材料積層樑為例，其複合材料積層樑之每層厚度為 0.12mm，今將複合材料積層樑試片作成，試片總長為 232mm，試驗區間長為 200mm，寬為 12mm，厚度為 2.88mm之對稱堆疊的複合材料積層樑，複合材料積層

樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力 $F=3\text{N}$ ，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值。其理論應變值列於表 5-37。

以表 5-37 之理論軸向應變及橫向應變值代入，作為兩階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變及橫向應變值，即成為第一階段數值最佳化中目標函數 $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$ 之極小值的問題， $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$ 即為誤差函數，而設計變數 $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}=[\mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{G}_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$ 為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。在表 5-38 為第一階段所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表中可知道以 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊複合材料積層樑結構而言，所識別出來的彈性常數值 $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 誤差百分比絕對值皆為 0%，有很好之精確度。此第一階段以 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊之複合材料積層樑結構的各項彈性常數值中，設定 $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ 及 $\nu_{12}^{(1)}$ 為複合材料積層樑結構之剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比，故在第二階段識別時設定 $\mathbf{G}_{12}^{(1)} = \mathbf{G}_{12}$  及  $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{12}$ 。

表 5-39 是以 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為

例，以隨機多起使點所找到之總域極小值，其機率在 0.999 以上，所識別出來的彈性常數值 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值為 0%。

今再分別以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力 $F$ 作用時，之各主結構方向即 $x$ - $y$ 方向之軸向應變及橫向應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數 $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ ； $e(\underline{\mathbf{x}}^{(2)})$ 為第二階段複合材料積層樑結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數 $\underline{\mathbf{x}}^{(2)} = [E_1^{(2)}, E_2^{(2)}]$ 為第二階段以 $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構各項彈性常數，

而表 5-40 為第二階段所識別出來之對稱堆疊的graphite/epoxy複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-40 中，可知道以 $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構，所識別出來的彈性常數值 $E_1^{(2)}$ 及 $E_2^{(2)}$ 誤差百分比絕對值皆在 0.04%以內；此第二階段單種材料之複合材料積層樑結構的各項彈性常數值中， $E_1^{(2)}$ 即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值 $E_1$ ， $E_2^{(2)}$ 為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值 $E_2$ 。

表 5-41 是以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，以隨機多起使點所找到之總域極小值，其機率在 0.999 以上，所識別出來的彈性常數值  $E_1$  及  $E_2$  其誤差百分比絕對值在 0.04% 以內。

今再以  $G_{I/ep}$  為例，其堆疊方式分別為  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 、 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 、及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  等四種不同角度之對稱堆疊的複合材料積層樑為例，其複合材料積層樑之每層厚度為 0.12mm，今將複合材料積層樑試片作成，試片總長為 232mm，試驗區間長為 200mm，寬為 12mm，厚度為 2.88mm 之對稱堆疊的複合材料積層樑，之複合材料積層樑結構置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力  $F=1N$ ，再以應變規及其量測儀器來量測複合材料積層樑結構下表面之軸向應變、橫向應變及剪應變值，其理論應變值列於表 5-42。

以表 5-42 之理論軸向應變及橫向應變值代入，作為兩階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別所需的真實軸向應變及橫向應變值，即成為第一階段數值最佳化中目標函數  $e(\underline{x}^{(1)})$  之極小值的問題， $e(\underline{x}^{(1)})$  即為誤差函數，而設計變數  $\underline{x}^{(1)} = [E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, G_{12}^{(1)}, \nu_{12}^{(1)}]$  為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。

在表 5-43 為第一階段所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結

構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表中可知道以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊複合材料積層樑結構而言，所識別出來的彈性常數值  $G_{12}^{(1)}$  及  $\nu_{12}^{(1)}$  誤差百分比絕對值皆為 0%，有很好之精確度。此第一階段以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之對稱堆疊之複合材料積層樑結構的各項彈性常數值中，設定  $G_{12}^{(1)}$  及  $\nu_{12}^{(1)}$  為複合材料積層樑結構之剪力係數與為複合材料在纖維方向即 1-方向受力而在基材方向即 2-方向產生橫向應變之蒲松比，故在第二階段識別時設定  $G_{12}^{(1)} = G_{12}$  及  $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{12}$ 。

今再分別以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗，在複合材料積層樑結構之中間處施以一壓力  $F$  作用時，之各主結構方向即  $x$ - $y$  方向之軸向應變及橫向應變值，再利用應變值建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數  $e(\underline{x}^{(2)})$ ； $e(\underline{x}^{(2)})$  為第二階段複合材料積層樑結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數  $\underline{x}^{(2)} = [E_1^{(2)}, E_2^{(2)}]$  為第二階段以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構各項彈性常數，而表 5-44 為第二階段所識別出來之對稱堆疊的 graphite/epoxy 複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-44 中，可知道以  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 、 $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$  及  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$  之角度堆疊的對稱堆疊

之複合材料積層樑結構，所識別出來的彈性常數值 $E_1^{(2)}$ 及 $E_2^{(2)}$ 誤差百分比絕對值皆在 0.03%以內；此第二階段單種材料之複合材料積層樑結構的各項彈性常數值中， $E_1^{(2)}$ 即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值 $E_1$ ， $E_2^{(2)}$ 為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值 $E_2$ 。

#### 5.2.4 複合材料積層樑結構兩階段識別法之實驗結果

就複合材料積層樑結構之實際實驗分析而言，先依 4.1 節之製程做好如標準試片之相同製程的複合材料積層樑結構，再做本文所研究之單一階段識別及兩階段識別法之兩部份實驗，將實際實驗之數據做單一階段複合材料積層樑結構識別及兩階段複合材料積層樑結構識別後，以表 4-1 之各項材料常數值和實驗結果所識別出來之複合材料積層結構的各項材料常數作為比對標準。

首先量測 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊之複合材料積層樑結構，以Hung Ta Instrument Co., LTD. 之拉伸試驗機，型號為HT-9102A，將 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑結構，置於做三點彎曲之基座上，其施力夾頭則夾於伸試驗機之上夾頭上，中間處施壓速率為 0.02mm/s，所選用之應變規組為KYOWA之型號KFG-3-120-D16-11L3M2S，此型式之應變規組，可量測主結構方向x-

方向之應變值，即  $0^\circ$  方向之應變值  $\varepsilon_0$ ，和量測主結構方向  $y$ -方向之應變值，即  $90^\circ$  方向之應變值  $\varepsilon_{90}$ ，用此應變規組所量測到的二個應變值，即可找到我們欲得之軸向應變及橫向應變值。 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  對稱堆疊之複合材料積層樑結構做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力  $F=3\text{N}$  時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，其實驗應變值列於表 5-45。

在表 5-45 中，是  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  對稱堆疊之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力  $F=3\text{N}$  時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變之平均值，將其代入(3-26)式中，作為單一階段之對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各彈性常數識別，建立誤差函數  $e(\underline{\mathbf{x}}^{(1)})$ ，而設計變數為對稱堆疊的複合材料積層樑結構之各項彈性常數值。

表 5-46 是分別將實際實驗之軸向應變及橫向應變值之平均值，作第一階段識別法所識別出來之對稱堆疊的複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。由表中可知道以  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  之角度堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑結構為例，所識別出來的剪力模數  $G_{12}$  值其誤差百分比絕對值為 1.9%，而其蒲松比  $\nu_{12}$  值其誤差百分比絕對值為 1%，故可知本方法做第一階段之複合材料積層樑結構之彈性常

數識別，之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 值相當精確。

將第一階段所識別出來之複合材料積層樑結構彈性常數之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 值固定，再量測以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力 $F=3N$ 時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，如表 5-45 所列，利用此實際實驗之軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變之平均值，建立一個有限制條件之典型數值最佳化問題，便可建立第二階段識別目標函數 $e(\underline{x}^{(2)})$ ； $e(\underline{x}^{(2)})$ 為第二階段複合材料積層樑結構之彈性常數識別的誤差函數，而設計變數 $\underline{x}^{(2)}=[E_1^{(2)}, E_2^{(2)}]$ 為第二階段以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構各項彈性常數。

表 5-47 為第二階段所識別出來之  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊的 graphite/epoxy複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值。在表 5-47，可知道以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構，所識別出來的彈性常數值 $E_1^{(2)}$ 及 $E_2^{(2)}$ 誤差百分比絕對值皆在 7.4%以內；此第二階段單種材料之複合材料積層樑結構的各項彈性常數值中， $E_1^{(2)}$ 即為複合材料之纖維方向即 1-方向之楊氏係數值 $E_1$ ， $E_2^{(2)}$ 為複合材料之基材方向即 2-方向之楊氏係數值 $E_2$ ；所識別出

來的彈性常數值 $E_1$ 及 $E_2$ 之誤差百分比絕對值皆在 7.4%以內。

同理，再將第一階段以實際實驗之軸向應變及橫向應變值之平均值所識別出來之複合材料積層樑結構彈性常數之剪力模數 $G_{12}$ 及蒲松比 $\nu_{12}$ 值固定，再量測以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構，做三點彎曲試驗時，在中間處施以一壓力 $F=3N$ 時的軸向應變、橫向應變及剪應變之實驗應變值，用實際實驗的軸向應變及橫向應變之平均值，建立第二階段識別目標函數 $e(\underline{x}^{(2)})$ ；且第二階段以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 單種材料對稱堆疊而成之複合材料積層樑結構各項彈性常數值。表 5-47 第二階段所識別出來之  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊的 graphite/epoxy複合材料積層樑結構的各項彈性常數值及其誤差百分比絕對值，在表 5-47，可知道以  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊的對稱堆疊之複合材料積層樑結構，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 及 $E_2$ 之誤差百分比絕對值皆亦在 2.9%以內。

圖 4-14(a)、(b)及圖 4-15(a)、(b)分別是  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 和  $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊之對稱堆疊的複合材料積層樑之負載-軸向應變圖和及負載-橫向應變圖。

## 第六章 結論與未來發展方向

本文提出結合複合材料力學及數值最佳化之方法來識別已成形加工之複合材料積層板及樑結構的彈性常數值，分別以 Graphite/epoxy (Gr/ep)及 Glass/epoxy (Gl/ep)為材料，及不同之堆疊方式為例子，證實本方法精確性高，此外，以 Gr/ep 之複合材料積層板及樑結構來做實驗亦印證了本方法確實可行。



### 6.1 結論

1. 本文所提出之單一階段及兩階段識別彈性常數法，以量測複合材料積層板或樑結構之表面應變值確實可以精確及簡便的識別出複合材料積層板或樑結構之各項彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ ，可作為品管及設計研發之用。
2. 複合材料積層板結構單一階段識別彈性常數法，分別以Gr/ep及Gl/ep之複合材料積層板結構作單一階段識別之模擬，本方法對各種不同角度堆疊的複合材料積層板結構均可相當精準地識別出各項彈性常

數值，Gr/ep及G1/ep所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值皆在 0.7%以內。

3. 以Gr/ep之複合材料積層板結構來做實驗作之單一階段識別，分別以 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之角度堆疊及 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之角度堆疊作拉伸試驗，知以平均應變值所識別出來之各項彈性常數值較為精確，對 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之角度堆疊之複合材料積層板結構而言，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值分別為 3.1%、3.0%、5.7%、及 0%；對 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之角度堆疊之複合材料積層板結構而言，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值分別為 2.7%、6.6%、7.2%、及 0%。
4. 複合材料積層樑結構單一階段識別彈性常數識別法，分別以Gr/ep及G1/ep之複合材料積層樑結構作單一階段識別之模擬，本方法對各種不同角度堆疊的複合材料積層樑結構均可相當精準地識別出各項彈性常數值，Gr/ep所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 0.3%以內，G1/ep所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 0.8%以內。
5. 以Gr/ep之複合材料積層樑結構做實驗，用單一階段識別法，分別以 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊及 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊作三點彎曲試

驗，知以試驗區間中間之平均應變值所識別出來之各項彈性常數值較為精確，對 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊之複合材料積層樑結構而言，平均軸向、橫向及剪應變值之誤差為 2.9%、2.6%及 3.6%，C.O.V.值分別為 1.1%、1.2%及 1.1%，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值分別為 3.5%、3.7%、2.8%、及 0%，C.O.V.值為 0.89%、3.86%、1.17%、及 0.19%；對 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之角度堆疊之複合材料積層樑結構而言，平均軸向、橫向及剪應變值之誤差為 2.1%、2.1%及 5%，C.O.V.值分別為 0.9%、1.2%及 2.1%，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值分別為 5.0%、2.2%、2.0%及 6.7%，C.O.V.值為 2.13%、1.90%、1.61%及 3.61%。



6. 對複合材料積層樑結構兩階段識別彈性常數法，分別以 $G_r/ep$ 及 $G_l/ep$ 之複合材料積層板結構作兩段式識別之模擬，本方法對各種不同角度堆疊的複合材料積層板結構均可相當精準地識別出各項彈性常數值，無論 $G_r/ep$ 或 $G_l/ep$ 所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 0.12%以內。
7. 以 $G_r/ep$ 之複合材料積層板結構來做實驗，用兩階段識別法，分別以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊及之角度堆疊作拉伸試驗，以平均應變值做

第一階段識別，所識別出來之剪力常數 $G_{12}$ 及浦松比 $\nu_{12}$ 其誤差百分比分別為 0.9%及 1%，以  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊之複合材料積層板結構以平均應變做第二階段識別，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 及  $E_2$ 其誤差百分比絕對值分別為 0.96%及 1.73%，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 1.73%以內。

8. 對複合材料積層樑結構兩階段彈性常數識別法，分別以 $G_r/ep$ 及 $G_l/ep$ 之複合材料積層樑結構作兩段式識別之模擬，本方法對各種不同角度堆疊的複合材料積層樑結構均可相當精準地識別出各項彈性常數值，無論 $G_r/ep$ 或 $G_l/ep$ 所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 0.04%以內。

9. 以 $G_r/ep$ 之複合材料積層樑結構做實驗，用兩階段識別法，分別以 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊及之角度堆疊作拉伸試驗，以平均應變值做第一階段識別，所識別出來之剪力常數 $G_{12}$ 及浦松比 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值分別為 1.9%及 1%，以  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之角度堆疊之複合材料積層樑結構以平均應變做第二階段識別，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 及  $E_2$ 其誤差百分比絕對值分別為 0.1%及 2.9%，所識別出來的彈性常數值 $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 及 $\nu_{12}$ 其誤差百分比絕對值在 2.9%以內，兩段式識別彈性常數法較單一階段識別彈性常數識別法之精確度較

高。

10. 對於正負角對稱堆疊之複合材料積層樑結構做三點彎曲實驗，所施加之負載為線負載，其舉起現象而言，隨著寬度增加，其端點舉起現象越明顯，長寬比為 33.3 時，有限元素法及本文方法的值，幾乎相同，但隨著寬度增加，其中間點各應變之誤差百分比亦隨之增加，長寬比為 16.7 時，各應變之誤差百分比絕對值在 3.7% 以內，尤其在長寬比為 8.3 時，各應變之誤差百分比絕對值在 19.1% 以內，為減少誤差之影響，試片之長寬比不宜太小。



## 6.2 未來發展方向

1. 藉由本方法未來可研究識別已成形加工之纏繞式複合材料空間桁架之管殼結構的各項彈性常數之可行性。
2. 可研究識別已成形加工且具有彈性邊界之複合材料積層樑結構的各項彈性常數及彈性支撐之參數識別的可行性。
3. 未來可研究識別經特殊處理已成形加工的合金材料之各種結構體的各項彈性常數。
4. 運用此方法識別已成形加工之三明治複合材料積層板及樑結構的各項彈性常數識別的可行性。
5. 運用此方法發展研究奈米材料之性質研究。

## 參 考 文 獻

1. R. M. Jones, 1975, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill book company.
2. S. W. Tsai, H. T. Hahn, 1980, "Introduction to Composite Materials", Techomic publishing Co., Inc.
3. J. R. Vinson, R. L. Sierakowski, 1986, "The Behavior of Structures Composed of Composite Materials", Martinus Nijhoff publishers.
4. S. R. Swanson, 1997, "Introduction to Design and Analysis with Advanced Composite Materials", Prentice-Hall International, Inc.
5. J. A. Snyman, L. P. Fatti, 1987, "A Multi-Start Global Minimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories", Journal of Optimization Theory and Applications, 54(1), pp. 121-141.
6. T. Y. Kam, J. A. Snyman, 1991, "Optimal Design of Laminated Composite Structures Using a Global Optimization Technique", Journal of Composite Structures, 19, pp. 351-370.
7. 朱高弘, 1992, "受挫屈複合材料板之最佳設計", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文。
8. 陳大智, 1992, "複合材料板之多層次最佳設計", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文。
9. 賴峰民, 1993, "複合材料積層板設計及製造", 國立交通大學機械工程研究所碩士論文。

10. 廖紹助, 1994, “複合材料積層板之輕量設計”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文。
11. 賴峰民, 1997, “複合材料結構首層破壞之最佳化設計”, 國立交通大學機械工程研究所博士論文。
12. 林志宏, 1999, “複合材料彈性常數之識別”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文。
13. 王文庭, 2000, “複合材料結構彈性常數識別”, 國立交通大學機械工程研究所博士論文。
14. G. N. Vanderplaats, 1984, “Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications”, McGraw Hill Inc., New York.
15. 李清榮, 2006, “彈性支撐複合材料板結構系統參數之識別”, 國立交通大學機械工程研究所博士論文。
16. E. M. Salchenberger Cinar, N. A. Lash, 1992, “Neural Networks: A New Tool for Predicting Thrift Failures,” *Decision Sciences*, 23, pp. 889-916.
17. R. S. Sexton, N. D. Jatinder, Gupta, 2000, “Comparative Evaluation of Genetic Algorithm and Backpropagation for Training Neural Networks”, *Information Sciences*, 129, pp. 45-59.
18. R. S. Sexton, R. E. Dorsey, J. D. Johnson, 1998, “Toward Global Optimization of Neural Networks: A Comparison of the Genetic Algorithm and Backpropagation”, *Decision Support System*, 22, pp.

- 171-186.
19. C. C. Huang, Y. F. Huang, 1991, "Bounds on the Numbers of Hidden Neuron in Multiplayer Perceptions", *IEEE Trans. Neural Networks*, 2(1), pp. 47-55.
  20. C. Y. Lin, C. Fleury, 1992, "Genetic Algorithms in Optimization Problems with Discrete and Integer Design Variables", *Engineering Optimization*, 19, pp. 309-327.
  21. D. E. Goldberg, C. H. Kuo, 1987, "Genetic Algorithms in Pipeline Optimization", *Journal of Computing in Civil Engineering*, 1, pp. 128-141.
  22. T. Y. Kam, T. Y. Lee, 1994, "Crack Size Identification Using an Expanded Mode Method", *International Journal of Solids and Structures*, 31, pp. 925-940.
  23. T. Y. Lee, T. Y. Kam, 1993, "Detection of Crack Location via a Global Minimization Approach", *International Journal of Engineering Optimization*, 21, pp. 147-159.
  24. T. Y. Kam, T. Y. Lee, 1992, "Detection of Cracks from Modal Test Data", *International Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 42 (2), pp. 381-387.
  25. T. Y. Kam, T. Y. Lee, 1994, "Identification of Crack Size via an Energy Approach", *International Journal of Nondestructive Evaluation*, 13(1), pp. 1-11.
  26. T. Y. Kam, F. M. Lai, and T. M. Chao, 1999, "Optimum Design of Foam-Filled Laminated Composite Sandwich Plates", *International Journal of Solids & Structures*, 36(19), pp. 2865-2889.

27. T. Y. Kam, F. M. Lai, 1999, "Experimental and theoretical predictions of first-ply failure strength of laminated composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, 36(16), 2379-2395.
28. T. Y. Kam, F. M. Lai, S. C. Liao, 1996, "Minimum Weight Design of Laminated Composite Plates Subject to Strength Constraint", *Journal of AIAA*, 34(8), pp.1699-1708.
29. T. Y. Kam, F. M. Lai, 1995, "Design of Laminated Composite Plates for Optimal Dynamic Characteristics Using a Constrained Global Optimization Technique", *International Journal of Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 120, pp. 389-402.
30. T. Y. Kam, F. M. Lai, H. F. Sher, 1995, "Optimal Parameters for Curing Gr/Ep Composite Laminates", *International Journal of Materials Processing Technology*, 48, pp. 357-363.
31. T. Y. Kam, F. M. Lai, 1995, "Maximum Stiffness Design of Laminated Composite Plates via a Constrained Global Optimization Approach", *International Journal of Composite Structures*, 32(1) 391-398.
32. T. Y. Kam, M. D. Lai, 1989, "Multilevel Optimal Design of Laminated Composite Plate Structures", *Computers and Structures*, 31(2), pp. 197-202.
33. T. Y. Kam, C. K. Liu, 1998, "Stiffness identification of laminated composite shafts", *International Journal of Mechanical Sciences*, 4(9),927-936.
34. W. T. Wang, T. Y. Kam, 2001, "Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates", *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, 127(11), pp. 1117-1123.

35. W. T. Wang, T. Y. Kam, 2000, "Material characterization of laminated composite plates via static testing", *International Journal of Composite Structures*, 50(4), pp. 347-352.
36. T. Y. Kam, C. H. Lin, W. T. Wang, 2000, "Identification of material constants of composite laminated pressure vessels using measured strains", *ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, 122(4), pp. 425-427.
37. S. V. Hoa, S. Z. Sheng, P. Ouellette, 2003, "Determination of elastic properties of triax composite materials", *Composites Science and Technology*, 63, pp.437-443.
38. A. K. Bledzki, A. Kessler, R. Rikards, A. Chate, 1999, "Determination of elastic constants of glass/epoxy unidirectional laminates by the vibration testing of plates", *Composites Science and Technology*, 59, pp. 2015-2024.
39. J. C. Marín, J. Cañas, F. París, J. Morton, 2002, "Determination of  $G_{12}$  by means of the off-axis tension test. Part I: review of gripping systems and correction factors", *Composites: Part A* (33), pp. 87-100.
40. J. C. Marín, J. Cañas, F. París, J. Morton, 2002, "Determination of  $G_{12}$  by means of the off-axis tension test. Part II: a self-consistent approach to the application of correction factors", *Composites: Part A*, 33, pp. 101-111.
41. M. J. Pindera, C. T. Herakovich, 1986, "Shear characterization of unidirectional composites with the off-axis tension test", *Experimental Mechanics*, pp. 103-112.
42. N. J. Pagano, J. C. Halpin, 1968, "Influence of end constraint in the

- testing of anisotropic bodies”, *Journal of Composite Mechanicals*, 2(1), pp. 18-31.
43. C. T. Sun, I. Chung, 1993, “An oblique end-tab design for testing off-axis composite specimens”, *Composites*, 24(8), pp. 619-623.
44. M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, 2002, “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1 – Principle and definition”, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 2691-2705.
45. M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, 2002, “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2 – Application to in-plane properties”, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 2707-2730.
46. M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, 2003, “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3- Application to the bending rigidities of anisotropic plates”, *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 2401-2419.
47. S. F. Hwang, C. S. Chang, 2000, “Determination of elastic constants of materials by vibration testing”, *Composite Structures*, 49, pp. 183-190.
48. L. Marin, L. Elliott, D. B. Ingham, D. Lesnic, 2004, “parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method”, *Engineering Analysis with Boundary Element*, pp. 221-233.
49. K. Genovese, L. Lamberti and C. Pappalettere, 2004, “A new hybrid technique for in-plane characterization of orthotropic materials”, *Society for Experimental Mechanics*, pp. 58-592
50. L. R. Deobald, R. F. Gibson, 1988, “Determination of elastic constants

- of orthotropic plates by a modal analysis/Rayleigh-Ritz technique”,  
Journal of Sound and Vibration, pp. 269-283
51. P. S. Frederiksen, 1997, “Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates”, journal of composite materials, 31(4), pp. 360-382.
52. F. Moussu, M. Nivoit, 1993, “Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/method of superposition”, Journal of Sound and Vibration, pp. 149-163.
53. K. E. Fallstrom, 1991, “Determining material properties in anisotropic plates using Rayleigh’s method”, Polymer Composites, pp. 360-314.
54. M. Taktak, F. Dammak, S. Abid, M. Haddar, 2005, “A mixed-hybrid finite element for three-dimensional isotropic helical beam analysis”, International Journal of Mechanical Sciences, 47, pp. 209-229
55. C. M. Mota Soares, M. Moreira de Freitas, A. L. Araújo and P. Pederson, 1993, “Identification of material properties of composite plate specimens”, Composite Structures, 25, pp. 277-285.
56. H. Sol, H. Hua, J. De Visscher, J. Vantomme and W. P. De Wilde, 1997, “A mixed numerical/experimental technique for the nondestructive identification of the stiffness properties of fibre reinforced composite materials”, NDT & E International, 30(2), pp. 85-91.
57. W. P. Wilde, H. Sol, 1987, “Anisotropic material identification using measured resonant frequencies of rectangular composite plates”, Composite Structures, 4(2), pp.2317-2324.

58. R. Rikards, A. Chate, W. Steinchen, A. Kessler, A. K. Bledzki, 1999, "Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design", *Composites*, 30B, pp. 279-289.
59. K. H. Ip, P. C. Tse, T. C. Lai, 1998, "Material characterization for orthotropic shells using modal analysis and Rayleigh-Ritz models", *Composites*, 29B, pp. 397-409.
60. A. L. Araújo, C. M. Mota Soares, M. Moreira de Freitas, 1996, "Characterization of material parameters of composite plate specimens using optimization and experimental vibrational data", *Composites*, 27B, pp. 185-191.
61. ASTM, 1990, "Standards and Literature References for Composite Materials", 2<sup>nd</sup> Ed., West Conshohocken, Pa.
62. E. C. Cojocaru, H. Irschik, H. Gattlinger, 2004, "Dynamic response of an elastic bridge due to a moving elastic beam", *Composite and Structures*, 82, pp. 931-934.
63. A. B. Lipen, A. V. Chigarev, 1998, "The displacements in an elastic half-space when a load moves along a beam lying on its surface", *Journal Appl. Maths Mechs*, 62(5), pp.791-796.
64. H. S. Zibdeh, R. Rackwitz, "Response moments of an elastic beam subjected to poissonian moving loads", *Journal of Sound and Vibration*, 188(4), pp.479-495.
65. B. Nadler, M. B. Rubin, 2003, "Determination of hourglass coefficients in the theory of a Cosserat point for nonlinear elastic beams", *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 6163-6188.

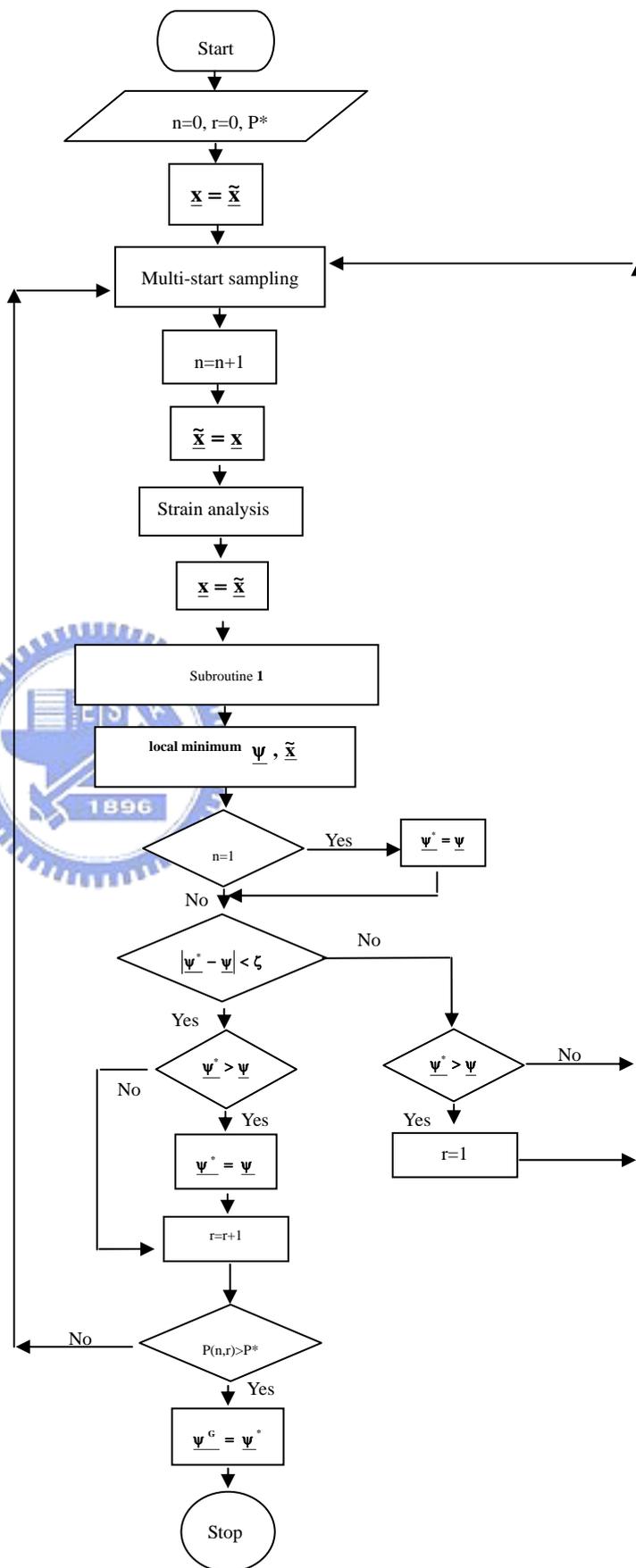
66. IMSL, 1994, "User's manual", Version 3.0, IMSL Inc.
67. S. W. Tsai, 1987, "Composite design", Think Composites, Dayton.
68. F. Mujika, A. Valea, P. Ganan, I. Mondragon, 2005, "Off-axis flexure test: A new method for obtaining in-plane shear properties", *Journal of Composite Material*, pp. 953-980.
69. F. Mujika, L. Berglund, J. Varna, I. Mondragon, 2002, "45° flexure test for measurement of in-plane shear modulus", *Journal of Composite Material*, 36, pp. 2313-2338.
70. F. Mujika, I. Mondragon, 2003, "On the displacement field for unidirectional off-axis composites in 3 point flexure. Part 1: analytical approach", *Journal of Composite Material*, 37, pp.1041-1066.
71. F. Mujika, A. de Benito, I. Mondragon, 2003, "On the displacement field for unidirectional off-axis composites in 3 point flexure. Part 2: numerical and experimental results", *Journal of Composite Material*, 37, pp. 1191-1217.
72. R. J. Benjamin, C. A. Cornell, 1970, "Probability, statistics, and decision for civil engineers", McGraw-Hill, New York.
73. T. K. Hwang, C. S. Hong, C. G. Kim, 2003, "Probabilistic deformation and strength prediction for a filament wound pressure vessel", *composites: Part B* 34, pp. 481-497.
74. M. Drechsler, 1998, "Sensitivity analysis of complex models", *Biological Conservation*, 86, pp. 401-412.
75. A. Chan, X. L. Liu, W. K. Chiu, 2004, "Sensitivity analysis of potential tests for determining the interlaminar shear modulus of fibre reinforced

composites”, Composite Structures, 66, pp. 109-114.

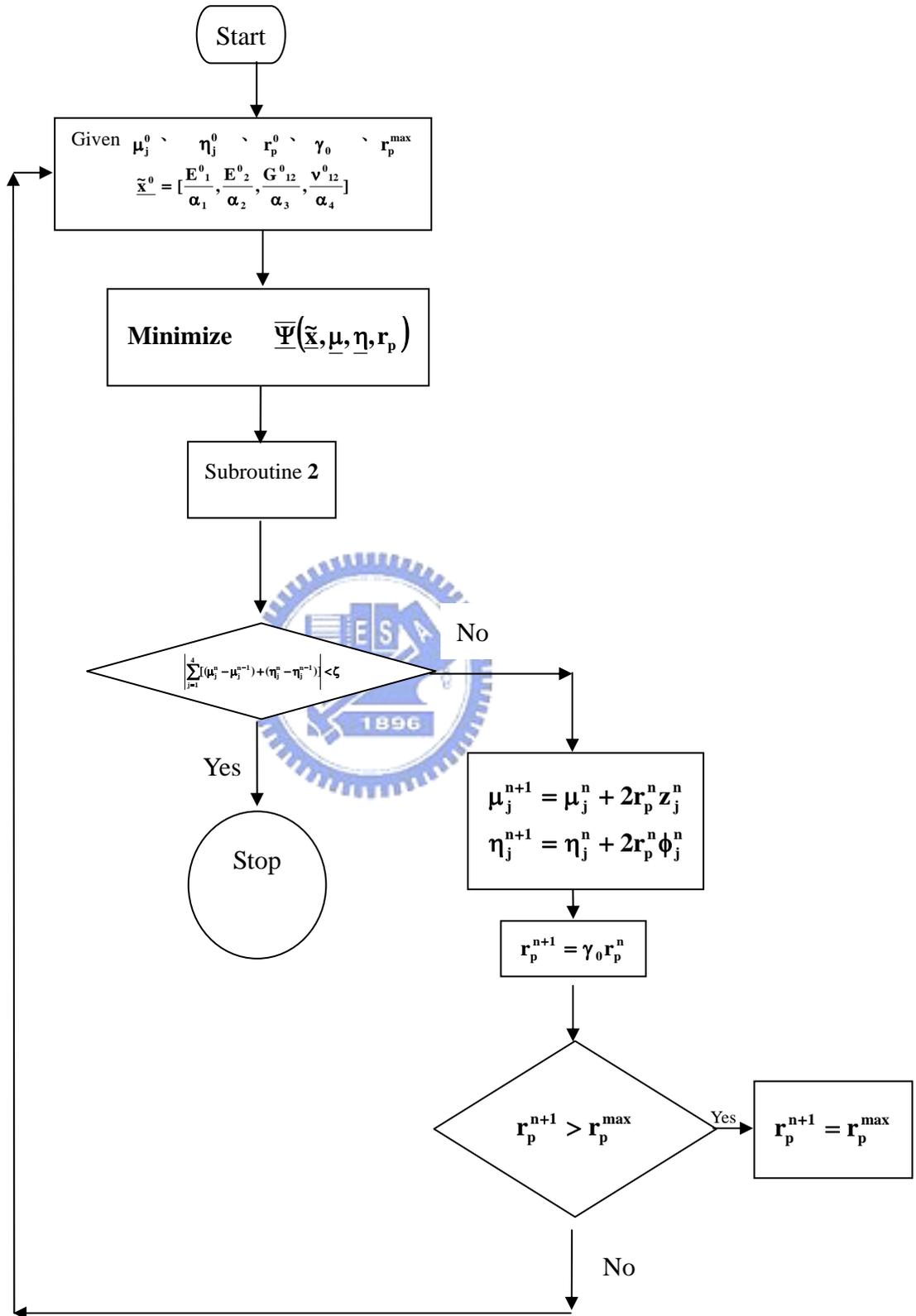


# 附錄 程式流程圖

## 一、主程式流程圖



## 二. 副程式 1 流程圖(擴增拉格蘭吉乘子法流程圖)



### 三. 副程式 2 流程圖(軌跡收尋流程圖)

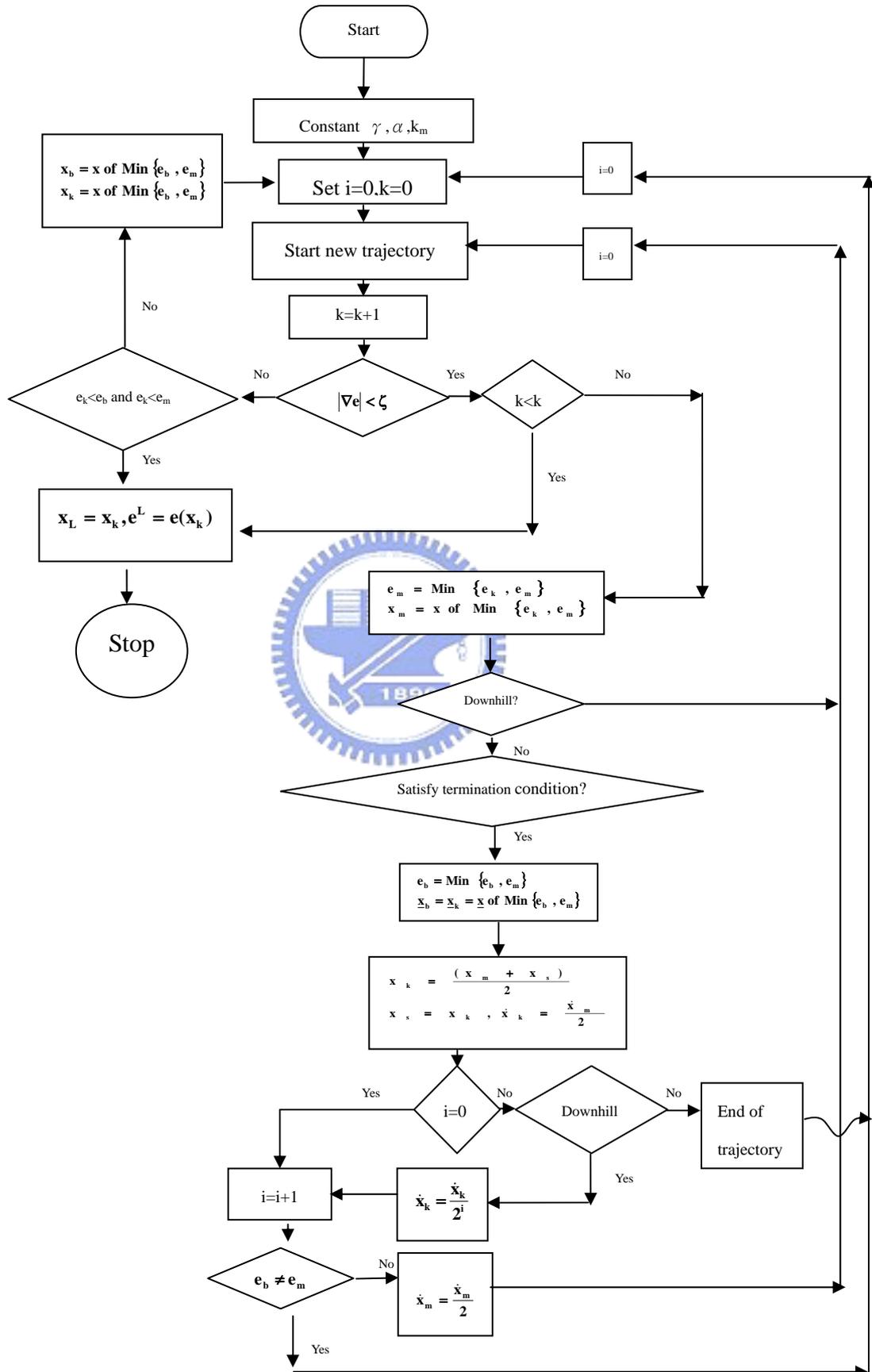


表 3-1. Gr/ep 複合材料積層樑單一階段識別法之靈敏度

Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>6</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )			C.O.V.			C.O.V. For 3 strains
		$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_x} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_y} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \gamma_{xy}} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	For $\varepsilon_x$	For $\varepsilon_y$	For $\gamma_{xy}$	
15°	<b>E<sub>1</sub></b> (GPa)	-2.204	-0.1095	-0.629	5.70%	0.27%	0.38%	5.72%
	<b>E<sub>2</sub></b> (GPa)	-4.883	2.328	-6.669	20.36%	9.22%	6.33%	22.97%
	<b>G<sub>12</sub></b> (GPa)	7.919	1.369	64.57	4.39%	0.73%	8.26%	9.384%
	<b>v<sub>12</sub></b>	2.244	0.137	-1.143	2.83%	0.17%	0.33%	2.86%
30°	<b>E<sub>1</sub></b> (GPa)	-2.554	-0.846	-6.954	13.92%	5.77%	3.57%	15.48%
	<b>E<sub>2</sub></b> (GPa)	-5.229	-1.011	10.04	45.23%	10.94%	8.18%	47.24%
	<b>G<sub>12</sub></b> (GPa)	7.621	4.982	67.553	8.90%	7.28%	7.43%	13.69%
	<b>v<sub>12</sub></b>	0.607	0.15	4.654	1.61%	0.42%	1.16%	2.03%
45°	<b>E<sub>1</sub></b> (GPa)	-2.660	-2.701	-12.093	35.12%	25.26%	5.32%	43.59%
	<b>E<sub>2</sub></b> (GPa)	7.071	7.095	69.74	148.55%	105.56%	48.85%	188.67%
	<b>G<sub>12</sub></b> (GPa)	-1.034	1.036	0.0078	2.92%	2.08%	0.001%	3.59%
	<b>v<sub>12</sub></b>	-1.259	0.080	-8.682	8.11%	0.37%	1.86%	8.33%
60°	<b>E<sub>1</sub></b> (GPa)	-2.046	-4.857	-11.179	50.89%	34.89%	4.64%	61.87%
	<b>E<sub>2</sub></b> (GPa)	0.492	1.449	6.811	18.03%	15.34%	4.16%	24.04%
	<b>G<sub>12</sub></b> (GPa)	-2.992	-4.242	-23.224	15.32%	6.27%	1.98%	16.67%
	<b>v<sub>12</sub></b>	-5.617	-20.345	-51.213	63.62%	66.55%	9.67%	92.58%

表 3-2. GI/ep 複合材料積層樑單一階段識別法之靈敏度

Fiber angle [[ $\theta^\circ$ / $-\theta^\circ$ ] $_6$ ] $_s$	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )			C.O.V.			C.O.V. For 3 strains
		$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_x} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_y} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \gamma_{xy}} \Big _{\bar{\varepsilon}}$	For $\varepsilon_x$	For $\varepsilon_y$	For $\gamma_{xy}$	
15°	$E_1$ (GPa)	-4.646	-0.154	-2.136	5.41%	0.08%	0.34%	5.42%
	$E_2$ (GPa)	0.6017	3.7398	-4.4371	3.31%	8.95%	3.31%	10.10%
	$G_{12}$ (GPa)	0.05571	-0.4611	37.9622	0.06%	0.22%	5.58%	5.58%
	$\nu_{12}$	-1.2256	-4.8668	9.0386	2.13%	3.68%	2.13%	4.755%
30°	$E_1$ (GPa)	-5.483	-0.449	4.444	9.86%	0.52%	0.78%	9.9%
	$E_2$ (GPa)	0.0144	-0.01123	51.852	0.13%	0.06%	43.75%	43.75%
	$G_{12}$ (GPa)	2.165	0.225	5.926	3.62%	0.24%	0.96%	3.75%
	$\nu_{12}$	11.544	-12.348	162.96	30.72%	21.12%	42.24%	56.34%
45°	$E_1$ (GPa)	-5.408	-5.663	-28.818	16.81%	9.05%	3.88%	19.48%
	$E_2$ (GPa)	0.6656	0.8091	19.2123	9.69%	6.05%	12.11%	16.64%
	$G_{12}$ (GPa)	-0.104	0.0971	-0.192	3.02%	1.45%	0.24%	3.36%
	$\nu_{12}$	-1.248	1.052	9.606	5.79%	2.51%	1.93%	6.60%
60°	$E_1$ (GPa)	2.124	-11.226	-123.799	8.92%	12.75%	8.54%	17.75%
	$E_2$ (GPa)	-0.2123	0.3368	4.6194	4.24%	1.82%	1.51%	4.85%
	$G_{12}$ (GPa)	-0.941	0.1123	-27.72	3.74%	0.12%	1.81%	4.15%
	$\nu_{12}$	-5.218	-11.001	-33.259	33.34%	19.00%	3.49%	38.53%

表 3-3. Gr/ep 複合材料積層板兩階段識別法之靈敏度

Level	Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )		Var[ $x_i$ ]	C.O.V.
			$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x} \Big _{\bar{\epsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_y} \Big _{\bar{\epsilon}}$		
First	45°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.74	-0.79	0.0011	25.42%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.11	-0.14	0.000028	2.83%
		G <sub>12</sub> (GPa)	-0.56	0.59	0.000625	3.66%
		$\nu_{12}$	-0.0084	0.02	0.0000002	0.14%
Second	15°	E <sub>1</sub> (GPa)	-1.12	-0.04	0.00006	5.30%
		E <sub>2</sub> (GPa)	0.14	1.33	0.000082	9.82%
	30°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.96	-0.18	0.00021	9.90%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.34	1.055	0.0004	21.83%
	60°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.51	-3.205	0.0046	46.22%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.204	0.054	0.00017	14.14%

表 3-4. GI/ep 複合材料積層板兩階段識別法之靈敏度

Level	Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )		Var[ $\mathbf{x}_i$ ]	C.O.V.
			$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x} \Big _{\bar{\epsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_y} \Big _{\bar{\epsilon}}$		
First	45°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.267	1.400	0.000105	32.41%
		E <sub>2</sub> (GPa)	0.335	-5.864	0.001636	31.35%
		G <sub>12</sub> (GPa)	-1.13	0.73	0.00025	3.82%
		$\nu_{12}$	-0.008	-0.35	0.000006	0.94%
Second	15°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.41	0.005	0.000004	5.21%
		E <sub>2</sub> (GPa)	1.34	8.05	0.00035	22.51%
	30°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.41	0.02	0.00001	8.03%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-2.03	9.52	0.00245	59.77%
	60°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.11	-2.23	0.000125	28.97%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.50	0.02	0.00008	11.00%

表 3-5. Gr/ep 複合材料積層板四應變一階段識別之靈敏度

Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )				Var[ $x_i$ ]	C.O.V.
		$\left. \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x^{45}} \right _{\epsilon}$	$\left. \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_y^{45}} \right _{\epsilon}$	$\left. \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x^{30}} \right _{\epsilon}$	$\left. \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x^{30}} \right _{\epsilon}$		
45°+30°	$E_1$ (GPa)	-0.169	0.237	0.218	-0.173	0.0000822	6.19%
	$E_2$ (GPa)	-0.921	-1.276	1.077	1.066	0.00237	52.77%
	$G_{12}$ (GPa)	-0.562	0.533	0.034	-0.035	0.000583	3.53%
	$\nu_{12}$	-18.823	-14.021	21.16	0.027	0.671	272.78%

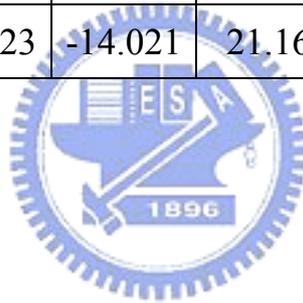


表 3-6. Gr/ep 複合材料積層樑兩階段識別法之靈敏度

Level	Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )		Var[ $x_i$ ]	C.O.V.
			$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x} \Big _{\bar{\epsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_y} \Big _{\bar{\epsilon}}$		
First	45°	E <sub>1</sub> (GPa)	-1.39	-1.40	0.0001752	10.21%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.23	-0.26	0.0000052	1.22%
		G <sub>12</sub> (GPa)	-1.03	1.09	0.0001000	1.46%
		$\nu_{12}$	-0.08	-0.07	0.0000005	0.24%
Second	15°	E <sub>1</sub> (GPa)	-2.21	-0.11	0.0000103	2.20%
		E <sub>2</sub> (GPa)	0.26	2.49	0.0000134	3.97%
	30°	E <sub>1</sub> (GPa)	-1.77	-0.33	0.0000338	3.97%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.66	1.99	0.0000679	8.94%
	60°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.98	-5.39	0.0006553	17.40%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.38	0.10	0.0000272	5.66%

表 3-7. GI/ep 複合材料積層樑兩階段識別法之靈敏度

Level	Fiber angle [[ $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ] <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	Elastic constant	Sensitivity ( $10^3$ )		Var[ $x_i$ ]	C.O.V.
			$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_x} \Big _{\bar{\epsilon}}$	$\frac{\partial x_i}{\partial \epsilon_y} \Big _{\bar{\epsilon}}$		
First	45°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.26	-0.27	0.0000020	4.58%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-1.08	-1.33	0.0000349	4.62%
		G <sub>12</sub> (GPa)	-0.83	0.81	0.0000200	1.08%
		$\nu_{12}$	-0.17	-0.08	0.0000007	0.32%
Second	15°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.46	-0.01	0.0000007	2.16%
		E <sub>2</sub> (GPa)	1.53	9.37	0.0000620	9.52%
	30°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.45	-2.35	0.0000016	3.27%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-2.35	12.17	0.0005125	27.38%
	60°	E <sub>1</sub> (GPa)	-0.11	-2.40	0.0000189	11.25%
		E <sub>2</sub> (GPa)	-0.56	0.03	0.0000134	4.43%

表 4-1 Graphite/Epoxy 之複材板結構之各項彈性常數值

Material type	Material constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
Graphite/Epoxy	146.5	9.22	6.84	0.3
C.O.V.	0.7%	1.2%	3.2%	0.19%

(Source:本表由金大仁實驗室依 ASTM[61]規範量測而得)

表 5-1.  $F=1\text{kN}$ 之Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論應變值

Fiber angle $\theta$	Strain		
	$\epsilon_x (10^{-4})$	$\epsilon_y (10^{-4})$	$\gamma_{xy} (10^{-4})$
15°	2.479	-2.395	-0.5088
30°	5.228	-6.554	-0.4371
45°	12.67	-8.985	-0.3747
60°	22.68	-6.554	-0.3352

表 5-2. 以F= 1kN理論應變值識別Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$  之各項彈性常數值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
15°	146.54 (0.03%) <sup>†</sup>	9.25 (0.3%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
30°	146.58 (0.05%)	9.25 (0.3%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
45°	146.71 (0.1%)	9.17 (0.5%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
60°	146.07 (0.3%)	9.23 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-3. 以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論應變

值

Stress resultant		Fiber angle $\theta$	Strain		
$N_x$ (kN/m)	$N_y$ (kN/m)		$\epsilon_x (10^{-5})$	$\epsilon_y (10^{-5})$	$\gamma_{xy}(10^{-6})$
5	1	15°	3.001	5.349	-8.591
		30°	5.877	-3.027	-7.562
		45°	16.32	-9.675	-6.745
		60°	32.05	-8.262	-6.339
5	5	15°	0.1265	41.11	-12.42
		30°	-1.988	24.19	-11.58
		45°	5.534	5.534	-11.24
		60°	24.19	-1.988	-11.58
5	-1	15°	4.377	-12.53	-6.674
		30°	9.809	-16.63	-5.551
		45°	21.71	-17.28	-4.497
		60°	35.99	-11.40	-3.717
5	-5	15°	7.312	-48.30	-2.839
		30°	17.67	-43.85	-1.528
		45°	32.49	-32.49	0
		60°	43.85	-17.67	1.528

表 5-4. 以不同之  $N_x$  及  $N_y$  的理論應變值識別 Gr/ep 複材板結構

$[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$  之各項彈性常數值

Stress resultant		Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
$N_x$ (kN/m)	$N_y$ (kN/m)		$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
5	1	15°	146.46 (0.03%) <sup>†</sup>	9.20 (0.2%)	6.85 (0.1%)	0.30 (0%)
		30°	146.50 (0%)	9.25 (0.3%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		45°	146.31 (0.1%)	9.26 (0.4%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		60°	145.48 (0.7%)	9.27 (0.5%)	6.82 (0.3%)	0.30 (0%)
5	5	15°	146.50 (0%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		30°	146.00 (0.3%)	9.27 (0.5%)	6.81 (0.4%)	0.30 (0%)
		45°	No global minimum			
		60°	145.71 (0.5%)	9.28 (0.7%)	6.80 (0.6%)	0.30 (0%)
5	-1	15°	146.58 (0.05%)	9.23 (0.1%)	6.85 (0.1%)	0.30 (0%)
		30°	146.47 (0.02%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		45°	146.36 (0.1%)	9.25 (0.3%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		60°	147.08 (0.4%)	9.21 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
5	-5	15°	146.93 (0.3%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		30°	147.03 (0.4%)	9.23 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
		45°	No global minimum			
		60°	147.03 (0.4%)	9.23 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-5. 以不同之 $N_x$ 及 $N_y$ 的G/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$ 之理論應變

值

Stress resultant		Fiber angle $\theta$	Strain		
$N_x$ (kN/m)	$N_y$ (kN/m)		$\varepsilon_x (10^{-5})$	$\varepsilon_y (10^{-5})$	$\gamma_{xy}(10^{-5})$
5	1	15°	12.05	4.861	-1.642
		30°	17.79	-3.422	-1.908
		45°	31.80	-11.15	-1.635
		60°	45.97	-9.059	-1.062
5	5	15°	7.441	47.34	-1.832
		30°	7.275	35.46	-2.475
		45°	17.21	17.21	-2.725
		60°	35.46	7.275	-2.475
5	-1	15°	14.35	-16.38	-1.547
		30°	23.05	-22.86	-1.625
		45°	39.09	-25.32	-1.090
		60°	51.23	-17.23	-0.3551
5	-5	15°	18.96	-58.85	-1.357
		30°	33.56	-61.74	-1.058
		45°	53.68	-53.68	0
		60°	61.74	-33.56	1.058

表 5-6. 以不同之  $N_x$  及  $N_y$  的理論應變值識別 GI/ep 複材板結構

$[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_4/\theta^\circ]$  之各項彈性常數值

Stress resultant		Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
$N_x$ (kN/m)	$N_y$ (kN/m)		$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
5	1	15°	38.58 (0.05%) <sup>†</sup>	8.25 (0.2%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		30°	38.59 (0.03%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		45°	38.60 (0%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		60°	38.86 (0.7%)	8.26 (0.1%)	4.15 (0.2%)	0.26 (0%)
5	5	15°	38.63 (0.08%)	8.28 (0.1%)	4.13 (0.2%)	0.26 (0%)
		30°	38.60 (0%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		45°	No global minimum			
		60°	38.53 (0.2%)	8.27 (0%)	4.13 (0.2%)	0.26 (0%)
5	-1	15°	38.60 (0%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		30°	38.58 (0.05%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		45°	38.60 (0%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		60°	38.84 (0.6%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
5	-5	15°	38.46 (0.4%)	8.26 (0.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		30°	38.49 (0.3%)	8.26 (0.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
		45°	No global minimum			
		60°	38.49 (0.3%)	8.26 (0.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-7. F= 0.5kN Gr/ep複材板結構[0°]<sub>9</sub>之理論應變值

Material type	Layup	Strain		
		$\epsilon_x^*$	$\epsilon_y^*$	$\gamma_{xy}^*$
Gr/Ep	[15°] <sub>9</sub>	2.268E-4	-5.517E-5	-4.624E-4
	[30°] <sub>9</sub>	5.520E-4	-1.048E-4	-7.380E-4
	[45°] <sub>9</sub>	9.533E-4	-1.297E-4	-7.528E-4
	[60°] <sub>9</sub>	1.305E-3	-1.048E-4	-5.660E-4

表 5-8. 以F= 0.5kN的理論應變值識別Gr/ep 複材板結構[0°]<sub>9</sub>之各項彈

性常數值

Material type	Layup	Identified material constant			
		E <sub>1</sub> (Gpa)	E <sub>2</sub> (GPa)	G <sub>12</sub> (GPa)	$\nu_{12}$
Gr/Ep	[15°] <sub>9</sub>	146.53 (0.02%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
	[30°] <sub>9</sub>	146.63 (0.09%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
	[45°] <sub>9</sub>	146.68 (0.12%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
	[60°] <sub>9</sub>	147.25 (0.51%)	9.22 (0%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-9. F= 0.1kN G1/ep複材板結構[ $\theta^\circ$ ]<sub>9</sub>之理論應變值

Material type	Layup	Strain		
		$\epsilon_x^*$	$\epsilon_y^*$	$\gamma_{xy}^*$
G1/Ep	[15°] <sub>9</sub>	1.107E-4	-3.500E-5	-1.225E-4
	[30°] <sub>9</sub>	1.923E-4	-6.510E-5	-1.740E-4
	[45°] <sub>9</sub>	2.777E-4	-8.014E-5	-1.408E-4
	[60°] <sub>9</sub>	3.330E-4	-6.510E-5	-6.978E-5

表 5-10. 以F= 0.1kN的理論應變值識別G1/ep 複材板結構[ $\theta^\circ$ ]<sub>9</sub>之各項彈

性常數值

Material type	Layup	Identified material constant			
		E <sub>1</sub> (Gpa)	E <sub>2</sub> (GPa)	G <sub>12</sub> (GPa)	$\nu_{12}$
G1/Ep	[15°] <sub>9</sub>	38.58 (0.05%) <sup>†</sup>	8.26 (0.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
	[30°] <sub>9</sub>	38.60 (0%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
	[45°] <sub>9</sub>	38.67 (0.2%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
	[60°] <sub>9</sub>	38.98 (0.98%)	8.27 (0%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-11. 以 $N_x = 16.667\text{kN/m}$ 及 $N_y = 0$  的Gr/ep複材板結構

$[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之實驗應變值

Specimen No.	Measured strain			Derived strains
	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$	$\varepsilon_y^* (10^{-4})$	$\varepsilon_{45}^* (10^{-4})$	$\gamma_{xy}^* (10^{-4})$
1	2.687 (+2.8%) <sup>†</sup>	-3.361 (+2.6%)	-0.4481 (+1.7%)	-0.2222 (+1.7%)
2	2.772 (+6%)	-3.467 (+5.8%)	-0.4658 (+5.7%)	-0.2366 (+8.3%)
3	2.713 (+3.8%)	-3.431 (+4.7%)	-0.4747 (+7.7%)	-0.2314 (+5.9%)
average	2.724 (+4.2%)	-3.420 (+4.7%)	-0.4629 (+5.0%)	-0.2301 (+5.3%)
C.O.V.	1.6%	1.6%	2.9%	3.2%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-12. 以 $N_x = 16.667 \text{ kN/m}$  及  $N_y = 0$  的Gr/ep複材板結構 $[(30^\circ/-30^\circ)_4/30^\circ]$ 之

實驗應變值識別之各項彈性常數值

Case	Measured strain			Identified material constant			
	$\epsilon_x^*$ ( $10^{-4}$ )	$\epsilon_y^*$ ( $10^{-4}$ )	$\gamma_{xy}^*$ ( $10^{-4}$ )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	2.687	-3.361	-0.2222	141.18 (3.6%) <sup>†</sup>	8.34 (9.5%)	6.78 (0.9%)	0.30 (0%)
2	2.772	-3.467	-0.2366	139.91 (4.5%)	9.89 (7.3%)	6.27 (8.3%)	0.30 (0%)
3	2.713	-3.431	-0.2314	144.70 (1.2%)	10.24 (11.1%)	6.31 (7.7%)	0.30 (0%)
4 <sup>§</sup>	2.724	-3.420	-0.2301	141.92 (3.1%)	9.50 (3.0%)	6.45 (5.7%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

<sup>§</sup>This case uses average measured strains for identification

表 5-13. 以 $N_x=10\text{kN/m}$ 及  $N_y=0$  的Gr/ep複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之

實驗應變值

Specimen No.	Measured strain			Derived strain
	$\epsilon_x^* (10^{-4})$	$\epsilon_y^* (10^{-4})$	$\epsilon_{45}^* (10^{-4})$	$\gamma_{xy}^* (10^{-4})$
1	4.095 (+7.7%) <sup>†</sup>	-2.971 (+10.2%)	0.5045 (+1.4%)	-0.1150 (+2.3%)
2	4.084 (+7.4%)	-2.921 (+8.4%)	0.5233 (+5.0%)	-0.1184 (+5.3%)
3	4.028 (+5.9%)	-2.888 (+7.2%)	0.5121 (+3.0%)	-0.1158 (+3%)
average	4.069 (+7.0%)	-2.927 (+8.6%)	0.5130 (+3.2%)	-0.1164 (+3.6%)
C.O.V.	0.9%	1.4%	1.7%	1.5%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-14. 以 $N_x=10\text{kN/m}$  及  $N_y=0$  的Gr/ep複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ 之實

驗應變值識別之各項彈性常數值

Case	Measured strain			Identified material constant			
	$\epsilon_x^*$ ( $10^{-4}$ )	$\epsilon_y^*$ ( $10^{-4}$ )	$\gamma_{xy}^*$ ( $10^{-4}$ )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	4.095	-2.971	-0.1150	145.42 (0.7%) <sup>†</sup>	8.41 (8.8%)	6.29 (8%)	0.30 (0%)
2	4.084	-2.921	-0.1184	139.8 (4.6%)	8.56 (7.2%)	6.34 (7.3%)	0.29 (3.3%)
3	4.028	-2.888	-0.1158	142.28 (2.9%)	8.93 (3.1%)	6.43 (6%)	0.30 (0%)
4 <sup>§</sup>	4.069	-2.927	-0.1164	142.55 (2.7%)	8.61 (6.6%)	6.35 (7.2%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

<sup>§</sup>This case uses average measured strains for identification

表 5-15. F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值

Fiber angle $\theta$	Strain		
	$\varepsilon_x (10^{-5})$	$\varepsilon_y (10^{-5})$	$\gamma_{xy}(10^{-5})$
15°	7.577	-7.303	-1.750
30°	15.97	-19.99	-1.504
45°	38.69	-27.40	-1.290
60°	69.22	-19.99	-1.154

表 5-16. 理論應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數

值

Fiber angle $\theta$	Identified elastic constant			
	$E_1(\text{GPa})$	$E_2(\text{GPa})$	$G_{12}(\text{GPa})$	$\nu_{12}$
15°	146.51 (0.007%) <sup>†</sup>	9.24 (0.2%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
30°	146.56 (0.04%)	9.23 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
45°	146.50 (0%)	9.21 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
60°	146.06 (0.3%)	9.23 (0.1%)	6.83 (0.1%)	0.30 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-17. 理論應變值以隨機多起始點識別 Gr/ep 複材樑結構

$[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值

Starting Point		Elastic constant				No. of iterations
point No.	stage	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	
1	Initial	130.37	3.22	13.36	0.26	5
	Final	146.56	9.23	6.84	0.30	
2	Initial	159.88	16.88	7.54	0.49	5
	Final	146.56	9.23	6.84	0.30	
3	Initial	226.93	4.76	4.54	0.38	8
	Final	146.56	9.23	6.84	0.30	
4	Initial	265.99	2.29	16.45	0.39	10
	Final	146.56	9.23	6.84	0.30	
5	Initial	304.55	5.65	8.02	0.103	10
	Final	146.56	9.23	6.84	0.30	
Global minimum		146.56 (0.04%) <sup>†</sup>	9.23 (0.1%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)	Probability 0.997835

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-18.  $F=1N$  GI/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值

Elastic constants*	Fiber angle $\theta$	$\varepsilon_x (10^{-5})$	$\varepsilon_y (10^{-5})$	$\gamma_{xy} (10^{-6})$
$E_1 = 38.6 \text{ GPa}$	$15^\circ$	8.975	-3.904	-12.17
$E_2 = 8.27 \text{ GPa}$	$30^\circ$	13.86	-8.908	-13.50
$G_{12} = 4.14 \text{ GPa}$	$45^\circ$	24.04	-12.36	-10.41
$\nu_{12} = 0.26$	$60^\circ$	32.96	-8.908	-5.412

\*Data from Swanson [4]

表 5-19. 理論應變值識別GI/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數

值

Fiber angle $\theta$	Identified elastic constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
$15^\circ$	38.52 (0.2%) <sup>†</sup>	8.23 (0.5%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
$30^\circ$	38.59 (0.03%)	8.24 (0.4%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
$45^\circ$	38.67 (0.2%)	8.26 (0.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
$60^\circ$	38.31 (0.8%)	8.28 (0.1%)	4.15 (0.2%)	0.26 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-20. F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值

Specimen No.	Measured strains		
	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$	$\varepsilon_y^* (10^{-4})$	$\gamma_{xy}^* (10^{-5})$
1	3.932 (+1.6%) <sup>†</sup>	-2.775 (+1.3%)	-1.321 (+2.4%)
2	3.997 (+3.3%)	-2.821 (+3.0%)	-1.350 (+4.7%)
3	4.017 (+3.8%)	-2.841 (+3.7%)	-1.341 (+4.0%)
average	3.982 (+2.9%)	-2.812 (+2.6%)	-1.337 (+3.6%)
C.O.V.	1.1%	1.2%	1.1%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-21. 實驗應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常

數值

Specimen No.	Measured strain			Identified elastic constant			
	$\epsilon_x^*$ ( $10^{-4}$ )	$\epsilon_y^*$ ( $10^{-4}$ )	$\gamma_{xy}^*$ ( $10^{-5}$ )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	3.932	-2.775	-1.321	142.84 (2.5%) <sup>†</sup>	9.05 (1.8%)	6.74 (1.5%)	0.301 (0.33%)
2	3.997	-2.821	-1.350	141.35 (3.5%)	8.44 (8.5%)	6.63 (3.1%)	0.300 (0%)
3	4.017	-2.841	-1.341	140.33 (4.2%)	9.01 (2.3%)	6.59 (3.7%)	0.300 (0%)
Average strain	3.982	-2.812	-1.337	141.38 (3.5%)	8.88 (3.7%)	6.65 (2.8%)	0.300 (0%)
C.O.V.	1.1%	1.2%	1.1%	0.89%	3.86%	1.17%	0.19%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-22. F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值

Specimen No.	Measured strains		
	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$	$\varepsilon_y^* (10^{-4})$	$\gamma_{xy}^* (10^{-5})$
1	7.002 (+1.2%) <sup>†</sup>	-2.016 (+0.9%)	-1.240 (+7.5%)
2	7.071 (+2.2%)	-2.041 (+2.1%)	-1.189 (+3.0%)
3	7.123 (+2.9%)	-2.066 (+3.4%)	-1.207 (+4.6%)
average	7.065 (+2.1%)	-2.041 (+2.1%)	-1.212 (+5.0%)
C.O.V.	0.9%	1.2%	2.1%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-23. 實驗應變值識別Gr/ep 複材樑結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常

數值

Specimen No.	Measured strain			Identified elastic constant			
	$\varepsilon_x^*$ ( $10^{-4}$ )	$\varepsilon_y^*$ ( $10^{-4}$ )	$\gamma_{xy}^*$ ( $10^{-5}$ )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	7.002	-2.016	-1.240	140.92 (3.8%) <sup>†</sup>	8.92 (3.3%)	6.83 (0.1%)	0.33 (10%)
2	7.071	-2.041	-1.189	136.21 (7.0%)	9.20 (0.2%)	6.63 (3.1%)	0.31 (3.3%)
3	7.123	-2.066	-1.207	141.70 (3.3%)	8.89 (3.6%)	6.66 (2.6%)	0.33 (10%)
Average strain	7.065	-2.056	-1.212	139.2 (5.0%)	9.02 (2.2%)	6.70 (2.0%)	0.32 (6.7%)
C.O.V.	0.9%	1.2%	2.1%	2.13%	1.90%	1.61%	3.61%

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-24.  $F=0.5\text{kN}$  Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之理論應變值

Fiber angle $\theta$	Strain	
	$\epsilon_x (10^{-4})$	$\epsilon_y (10^{-4})$
$[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$	1.388	-1.352
$[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$	2.930	-3.695
$[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$	7.119	-5.064
$[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$	12.75	-3.695



表 5-25. 以理論應變值第一階段所識別Gr/ep 複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$

之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constant				No. of iterations
		$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	
1	Initial	736.71	45.75	13.08	0.36	10
	Final	130.22	18.80	6.84	0.30	
2	Initial	445.59	3.31	17.87	0.26	8
	Final	130.22	18.80	6.84	0.30	
3	Initial	529.27	25.58	14.04	0.43	7
	Final	130.22	18.80	6.84	0.30	
4	Initial	429.96	17.10	14.77	0.28	9
	Final	130.22	18.80	6.84	0.30	
5	Initial	633.82	32.28	19.87	0.37	10
	Final	130.22	18.80	6.84	0.30	
Global minimum		130.22 (11.1%) <sup>†</sup>	18.80 (103.9%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)	Probability 0.997

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-26. 以理論應變值第一階段所識別Gr/ep 複材板結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$

之各項彈性常數值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
15°	150.79 (2.9%) <sup>†</sup>	14.30 (55.1%)	1.95 (71.5%)	0.32 (6.7%)
30°	184.31 (25.8%)	31.14 (237.7%)	3.11 (54.5%)	0.30 (0%)
60°	No global minimum			

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

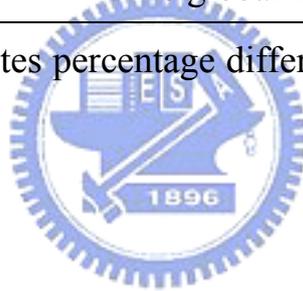


表 5-27. 以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板結構 [(15°/-15°)<sub>2</sub>]<sub>s</sub>之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constants		No. of iterations
		E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	
1	Initial	422.41	24.73	7
	Final	146.45	9.22	
2	Initial	387.67	2.75	8
	Final	146.45	9.22	
3	Initial	413.83	18.4	7
	Final	146.45	9.22	
4	Initial	131.42	19.00	3
	Final	146.45	9.22	
5	Initial	171.35	23.65	10
	Final	146.45	9.22	
Global minimum		146.45 (0.03%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)	Probability 0.997

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-28. 以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板結

構 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constants		No. of iterations
		E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	
1	Initial	419.61	23.24	10
	Final	146.52	9.22	
2	Initial	258.77	4.71	8
	Final	146.52	9.22	
3	Initial	449.55	1.97	9
	Final	146.52	9.22	
4	Initial	312.97	7.35	6
	Final	146.52	9.22	
5	Initial	346.63	19.04	6
	Final	146.52	9.22	
Global minimum		146.52 (0.01%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)	Probability 0.997

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-29. 以理論應變值隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材板結

構 $[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$ 之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constants		No. of iterations
		E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	
1	Initial	1.31	1.95	5
	Final	146.57	9.22	
2	Initial	63.89	19.43	4
	Final	146.57	9.22	
3	Initial	238.51	10.54	3
	Final	146.57	9.22	
4	Initial	379.97	12.59	4
	Final	146.57	9.22	
5	Initial	282.15	3.66	6
	Final	146.57	9.22	
Global minimum		146.57 (0.05%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)	Probability 0.997

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-30. 以理論應變值第二階段所識別Gr/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之

彈性常數 $E_1$  及  $E_2$ 值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant	
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
15°	146.45 (0.03%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)
30°	146.52 (0.01%)	9.22 (0%)
60°	146.57 (0.05%)	9.22 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-31.  $F=0.1\text{kN}$  GI/ep 複材板結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$  之理論應變值

Layup	Actual strains	
	$\varepsilon_x (10^{-5})$	$\varepsilon_y (10^{-5})$
$[(15^\circ/-15^\circ)_2]_s$	9.874	-4.322
$[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$	15.26	-9.876
$[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$	26.55	-13.71
$[(60^\circ/-60^\circ)_2]_s$	36.44	-9.876

表 5-32. 以理論應變值第一階段所識別 GI/ep 複材板結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$  之各項彈性常數值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
	$E_1(\text{GPa})$	$E_2(\text{GPa})$	$G_{12}(\text{GPa})$	$\nu_{12}$
$15^\circ$	No global minimum			
$30^\circ$	42.41 (9.9%) <sup>†</sup>	27.93 (237.7%)	3.42 (17.4%)	0.26 (0%)
$45^\circ$	30.87 (20.0%)	12.99 (57.1%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
$60^\circ$	No global minimum			

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-33. 以理論應變值第二階段所識別GI/ep 複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之

彈性常數 $E_1$  及  $E_2$ 值

Fiber angle $\theta$	Estimate of material constant	
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
15°	38.60 (0%) <sup>†</sup>	8.27 (0%)
30°	38.62 (0.05%)	8.28 (0.12%)
60°	38.60 (0%)	8.27 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-34. 以F= 0.5kN的Gr/ep複材板結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_2]_s$ 之實驗應變值

Fiber angle $\theta$	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$				$\varepsilon_y^* (10^{-4})$			
	Specimen No.	Measured	average	C.O.V.	Specimen No.	Measured	average	C.O.V.
$[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$	1	7.081 (-0.5%) <sup>†</sup>	7.081 (-0.5%)	0.2%	1	-5.224 (+3.2%)	-5.202 (+2.7%)	1.8%
	2	7.098 (-0.3%)			2	-5.101 (+0.7%)		
	3	7.063 (-0.8%)			3	-5.282 (+4.3%)		
$[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$	1	3.016 (+2.9%)	2.958 (+1%)	1.8%	1	-3.772 (+2.1%)	-3.733 (+1%)	1.1%
	2	2.911 (-0.6%)			2	-3.737 (+1.1%)		
	3	2.947 (+0.6%)			3	-3.689 (-0.2%)		

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-35. 以實驗應變值第一階段所識別Gr/ep 複材板結構 $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$

之各項彈性常數值

Specimen No.	Measured strain		Identified material constant			
	$\varepsilon_x^*$ ( $10^{-4}$ )	$\varepsilon_y^*$ ( $10^{-4}$ )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	7.081	-5.224	147.01 (0.3%) <sup>†</sup>	19.09 (107.0%)	6.77 (1.0%)	0.297 (1%)
2	7.098	-5.101	134.79 (8.0%)	18.88 (104.8%)	6.83 (0.1%)	0.296 (1.3%)
3	7.063	-5.282	154.45 (5.4%)	19.22 (108.5%)	6.75 (1.3%)	0.298 (0.67%)
Average strain	7.081	-5.202	144.97 (1.0%)	19.05 (106.6%)	6.78 (0.9%)	0.297 (1%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-36. 以實驗應變值第二階段所識別GI/ep 複材板結構 $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$

之彈性常數 $E_1$  及  $E_2$ 值

Specimen No.	Measured strain		Identified elastic constant	
	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$	$\varepsilon_y^* (10^{-4})$	$E_1(\text{GPa})$	$E_2 (\text{GPa})$
1	3.016	-3.772	140.42 (4.15%) <sup>†</sup>	8.45 (8.35%)
2	2.911	-3.737	149.77 (2.23%)	9.18 (0.43%)
3	2.947	-3.689	145.36 (0.78%)	9.56 (3.69%)
Average strain	2.958	-3.733	145.10 (0.96%)	9.06 (1.73%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-37. F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之理論應變值

Fiber angle $\theta$	Strain	
	$\varepsilon_x (10^{-4})$	$\varepsilon_y (10^{-4})$
$[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$	0.7577	-0.7303
$[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$	1.597	-1.999
$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$	3.869	-2.740
$[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$	6.922	-1.999

表 5-38. 以理論應變值第一階段所識別Gr/ep 複材樑結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$

之各項彈性常數值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
15°	151.65 (3.5%) <sup>†</sup>	14.59 (58.2%)	1.94 (71.6%)	0.32 (6.7%)
30°	185.32 (26.5%)	31.69 (243.7%)	3.12 (54.4%)	0.31 (3.3%)
45°	129.70 (11.5%)	18.75 (103.4%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)
60°	No global minimum			

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-39. 理論應變值以隨機多起始點第一階段所識別Gr/ep 複材樑結構[(45°/-45°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub>之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constant				No. of iterations
		E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	G <sub>12</sub> (GPa)	ν <sub>12</sub>	
1	Initial	435.43	10.71	11.24	0.43	9
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
2	Initial	306.25	4.27	17.98	0.26	20
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
3	Initial	74.50	4.47	12.75	0.39	18
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
4	Initial	523.17	41.81	15.66	0.24	19
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
5	Initial	837.38	45.83	9.36	0.45	10
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
6	Initial	685.09	14.82	8.54	0.35	21
	Final	129.70	18.75	6.84	0.30	
Global minimum		129.70 (11.5%) <sup>†</sup>	18.75 (103.4%)	6.84 (0%)	0.30 (0%)	Probability 0.999417

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-40. 以理論應變值第二階段所識別Gr/ep 複材樑結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$

之彈性常數 $E_1$  及  $E_2$  值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant	
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
15°	146.50 (0%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)
30°	146.54 (0.03%)	9.22 (0%)
60°	146.56 (0.04%)	9.22 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-41. 理論應變值以隨機多起始點第二階段所識別Gr/ep 複材樑結

構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值

Starting point No.	Stage	Material constants		No. of iterations
		E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	
1	Initial	429.24	14.97	11
	Final	146.56	9.22	
2	Initial	888.33	11.42	6
	Final	146.56	9.22	
3	Initial	420.13	5.38	12
	Final	146.56	9.22	
4	Initial	240.77	29.79	13
	Final	146.56	9.22	
5	Initial	430.33	34.98	9
	Final	146.56	9.22	
6	Initial	765.89	14.92	12
	Final	146.56	9.22	
Global minimum		146.56 (0.04%) <sup>†</sup>	9.22 (0%)	Probability 0.999417

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-42.  $F=1\text{N}$  Gl/ep 複材樑結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  之理論應變值

Material constants*	Beam layup	Actual strain	
		$\varepsilon_x (10^{-5})$	$\varepsilon_y (10^{-5})$
$E_1=38.6\text{ GPa},$ $E_2=8.27\text{ GPa},$ $G_{12}=4.14\text{ GPa},$ $\nu_{12}=0.26$	$[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$	8.957	-3.904
	$[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$	13.86	-8.908
	$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$	24.04	-12.36
	$[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$	32.96	-8.908

\*Data from Swanson [4]

表 5-43. 以理論應變值第一階段所識別 Gl/ep 複材樑結構  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  之各項彈性常數值

Fiber angle $\theta$	Identified material constant			
	$E_1(\text{GPa})$	$E_2(\text{GPa})$	$G_{12}(\text{GPa})$	$\nu_{12}$
15°	39.91 (3.4%) <sup>†</sup>	17.67 (113.7%)	2.11 (49.0%)	0.27 (3.8%)
30°	42.34 (9.7%)	27.90 (237.4%)	3.43 (17.1%)	0.25 (3.8%)
45°	31.06 (19.5%)	12.78 (54.5%)	4.14 (0%)	0.26 (0%)
60°	No global minimum			

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-44. 理論應變值第二階段所識別Gr/ep 複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值

Fiber angle $\theta$	Estimate of material constant	
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
15°	38.60 (0%) <sup>†</sup>	8.27 (0%)
30°	38.59 (0.03%)	8.27 (0%)
60°	38.60 (0%)	8.27 (0%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-45. F= 3N Gr/ep複材樑結構 $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$ 之實驗應變值

Fiber angle $\theta$	$\varepsilon_x^* (10^{-4})$				$\varepsilon_y^* (10^{-4})$			
	Specimen No.	Measured	average	C.O.V.	Specimen No.	Measured	average	C.O.V.
$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$	1	3.879 (+0.3%) <sup>†</sup>	3.880 (+0.3%)	0.9%	1	-2.819 (+2.9%)	-2.858 (+4.3%)	1.2%
	2	3.844 (-0.6%)			2	-2.868 (+4.7%)		
	3	3.916 (+1.2%)			3	-2.887 (+5.4%)		
$[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$	1	7.045 (+1.8%)	7.081 (+2.3%)	1.3%	1	-2.023 (+1.2%)	-2.048 (+2.5%)	1.5%
	2	7.188 (+3.8%)			2	-2.081 (+4.1%)		
	3	7.009 (+1.3%)			3	-2.039 (+2.0%)		

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes the percentage difference between actual and measured strains.

表 5-46. 以實驗應變值第一階段所識別 Gr/ep 複材樑結構

$[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 之各項彈性常數值

Specimen No.	Identified material constant			
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
1	139.96 (4.5%) <sup>†</sup>	18.93 (105.3%)	6.75 (1.3%)	0.296 (1.3%)
2	154.41 (5.4%)	19.19 (108.1%)	6.74 (1.5%)	0.297 (1%)
3	145.02 (1.0%)	19.02 (106.3%)	6.65 (2.8%)	0.297 (1%)
Average strain	146.21 (0.2%)	19.04 (106.5%)	6.71 (1.9%)	0.297 (1%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

表 5-47. 實驗應變值第二階段所識別Gr/ep 複材樑結構 $[(60^\circ/-60^\circ)_6]_s$ 之

各項彈性常數 $E_1$ 及 $E_2$ 值

Specimen No.	Identified elastic constant	
	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
1	137.44 (6.2%) <sup>†</sup>	9.10 (1.3%)
2	153.47 (4.8%)	8.54 (7.4%)
3	149.25 (1.9%)	9.21 (0.1%)
Average strain	146.71 (0.1%)	8.95 (2.9%)

<sup>†</sup>Value in parentheses denotes percentage difference between identified and actual data.

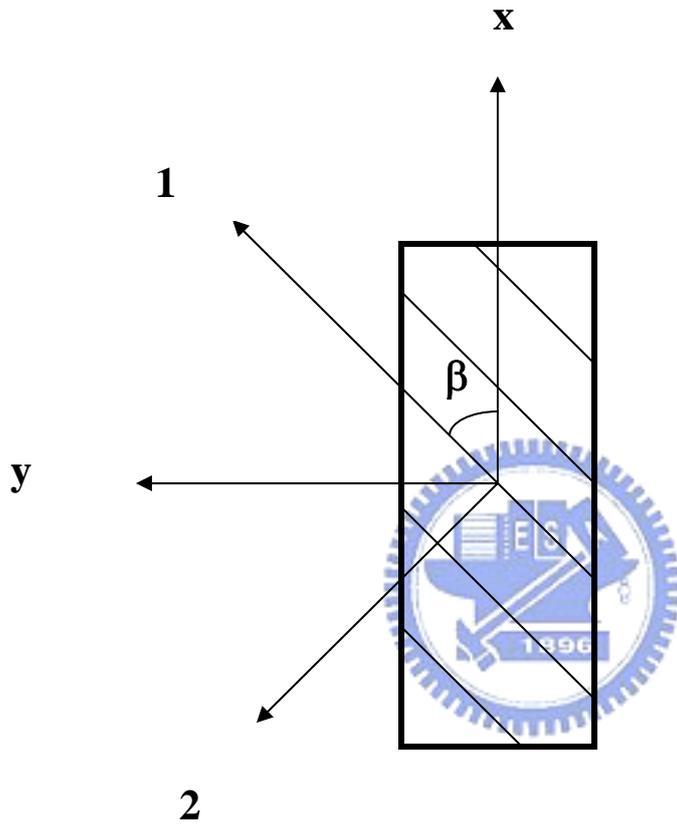


圖 2-1 主結構方向  $x$ - $y$  與主材料方向 1-2 示意圖

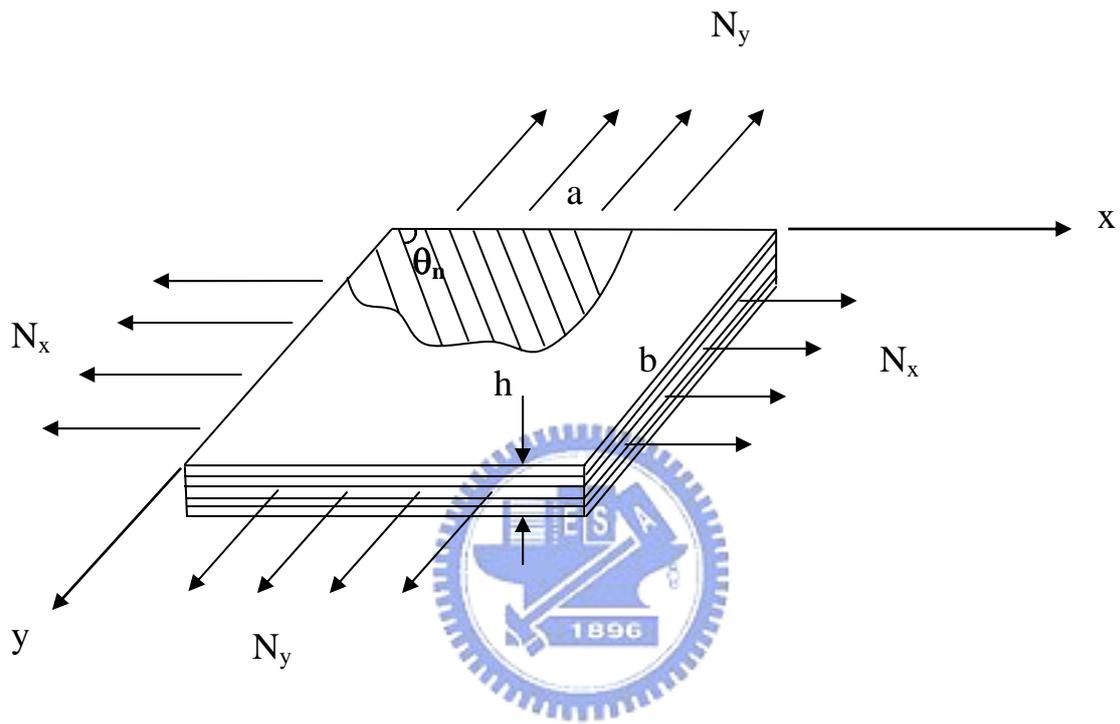


圖 2-2. 複材層板之幾何及負載示意圖

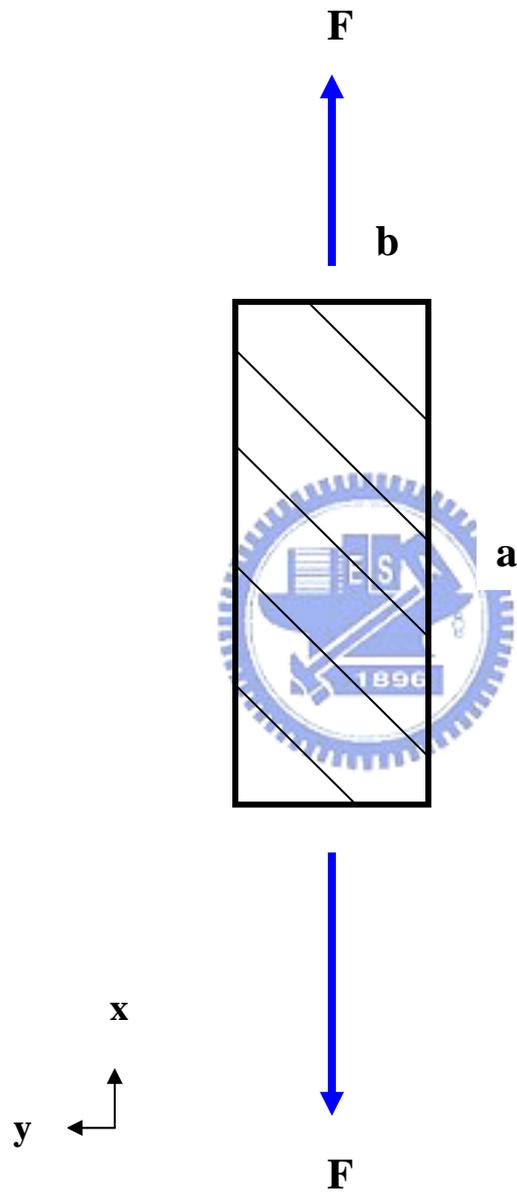


圖 2-3. 複合材料積層板結構受軸向拉力  $F$  示意圖

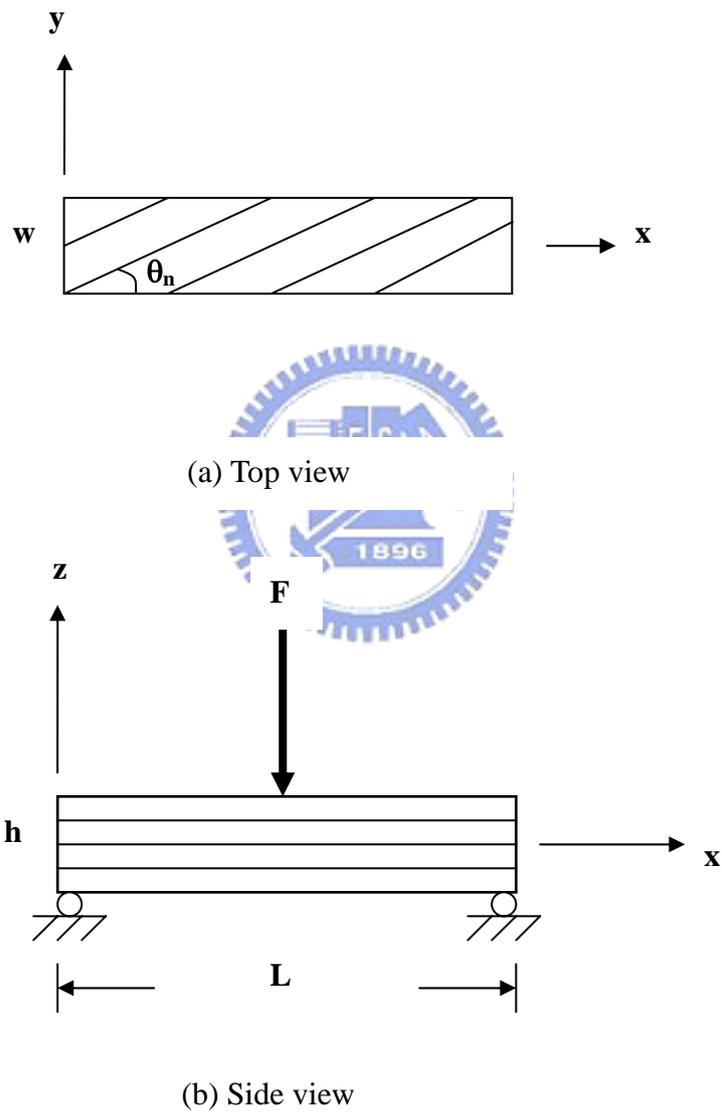


圖 2-4. 複材層樑之幾何及負載示意圖

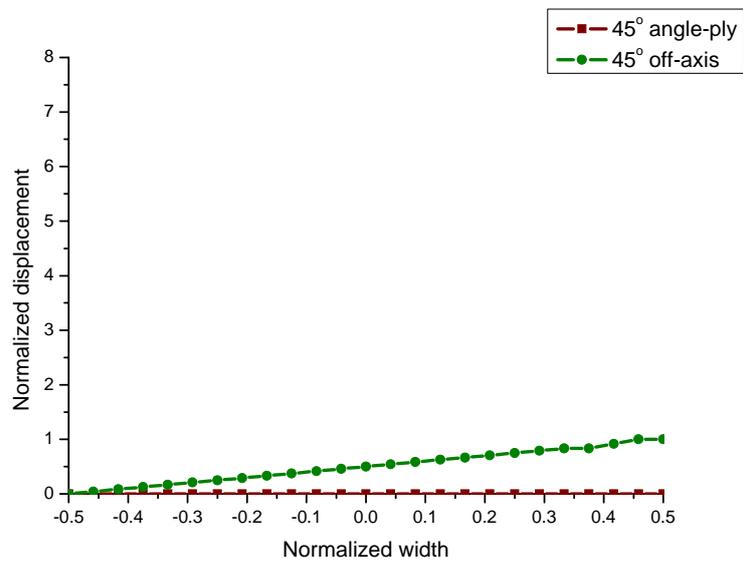


圖 2-5.  $[45^\circ]_{24}$ 與 $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$ 對稱堆疊之複材積層樑舉起現象

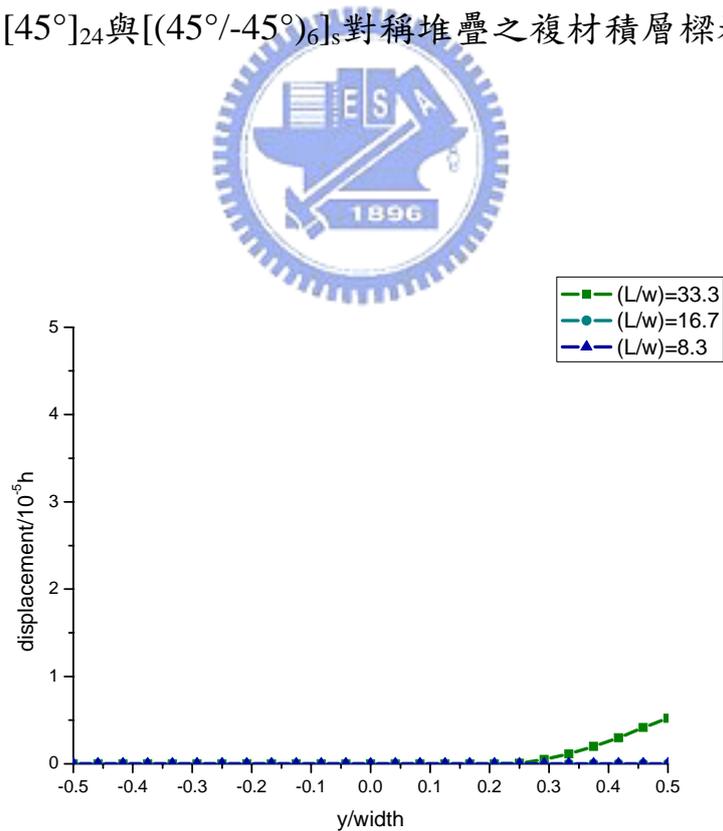


圖 2-6.  $[(15^\circ/-15^\circ)_6]_s$ 複材積層樑結構支撐端之舉起現象

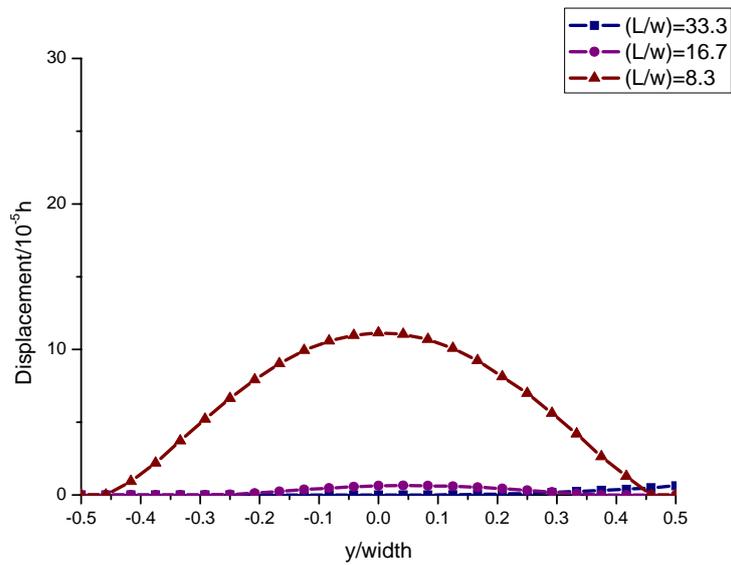


圖 2-7.  $[(30^\circ/-30^\circ)_6]_s$  複材積層樑結構支撐端之舉起現象

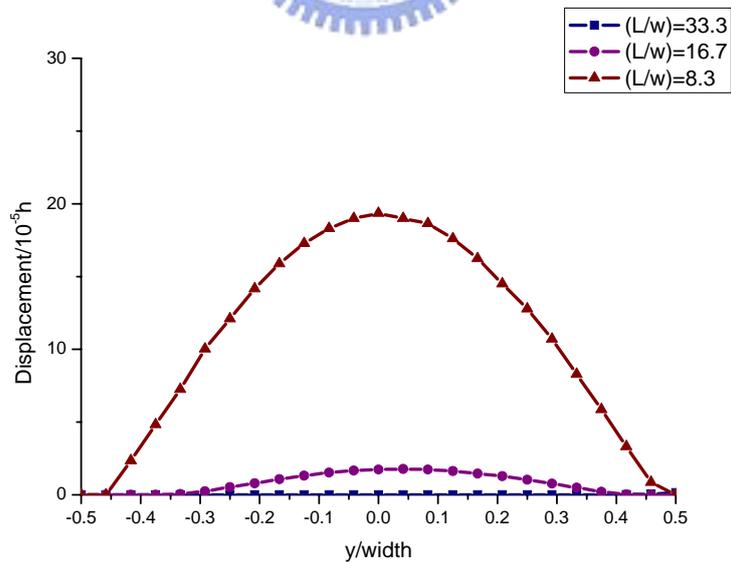


圖 2-8.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑結構支撐端之舉起現象

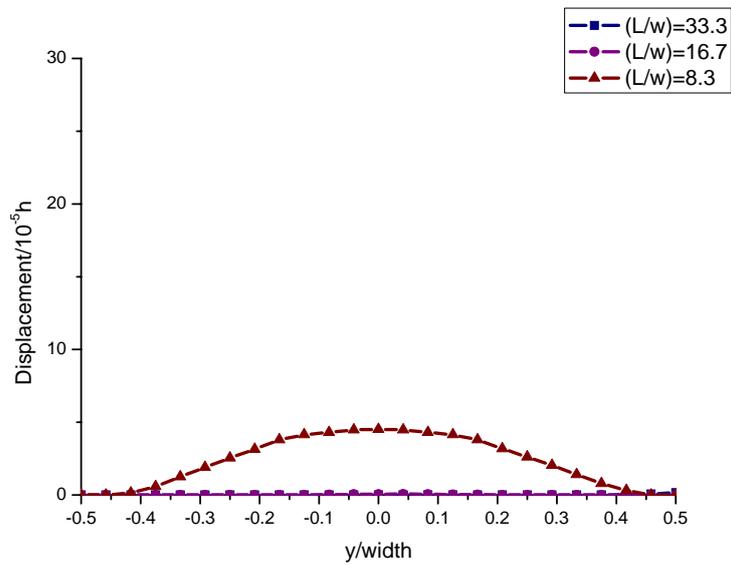


圖 2-9. [(60°/-60°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub>複材積層樑結構支撐端之舉起現象

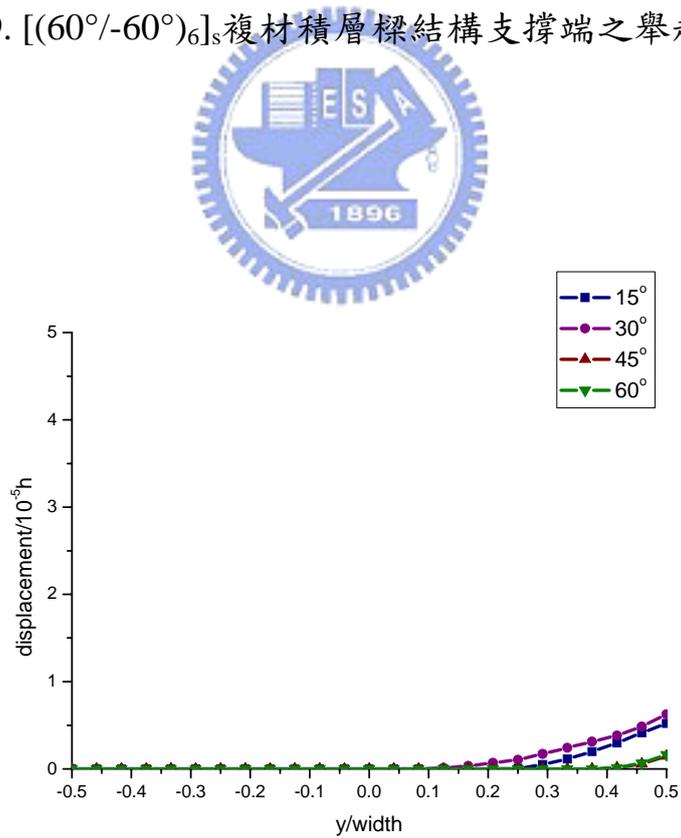


圖 2-10.  $\frac{L}{w} = 33.3$  之  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  複材積層樑結構支撐端之舉起現象

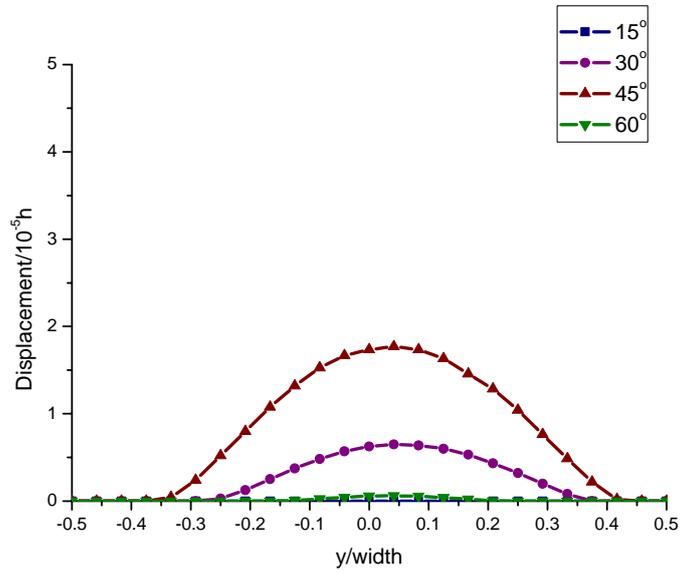


圖 2-11.  $\frac{L}{w} = 16.7$  之  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  複材積層樑結構支撐端之舉起現象

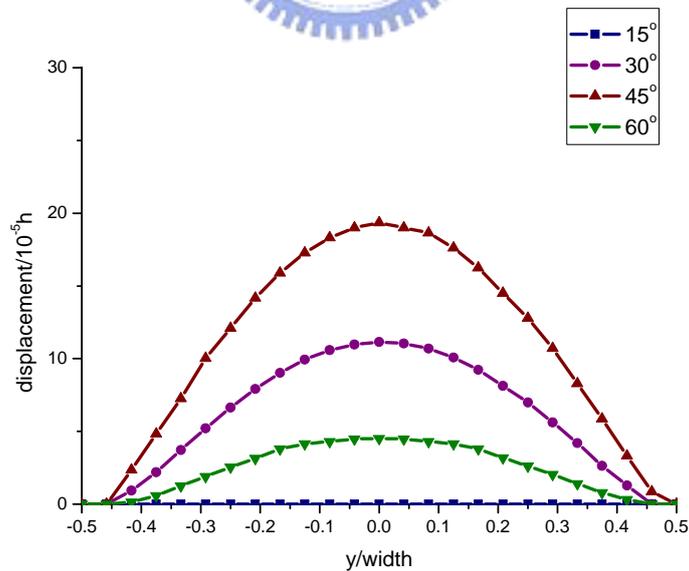


圖 2-12.  $\frac{L}{w} = 8.3$  之  $[(\theta^\circ/-\theta^\circ)_6]_s$  複材積層樑結構支撐端之舉起現象

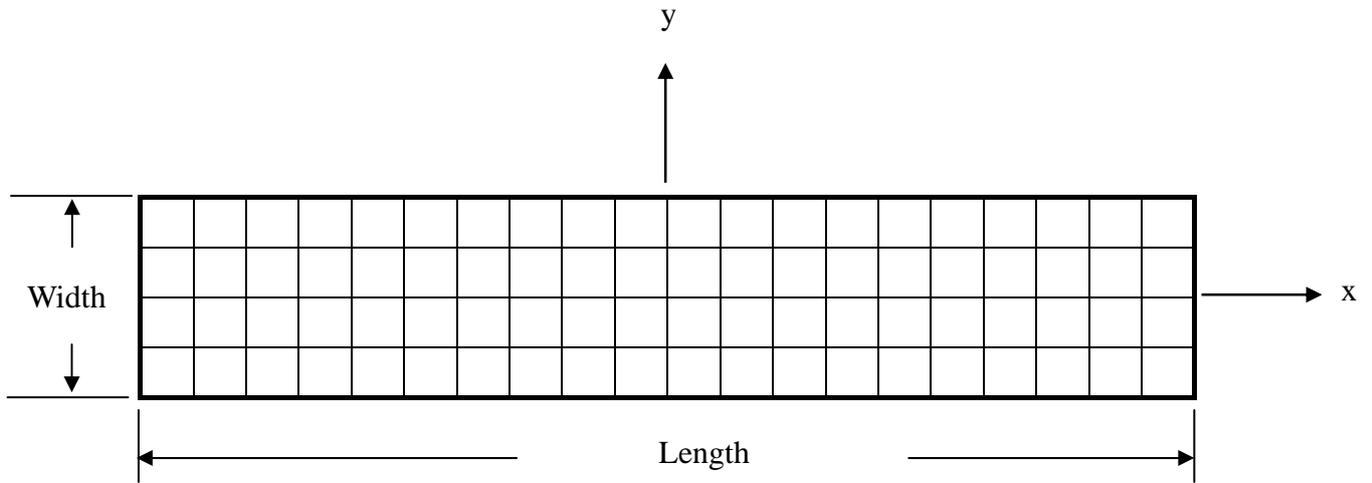


圖 2-13. 複材積層樑有限元素分割示意圖

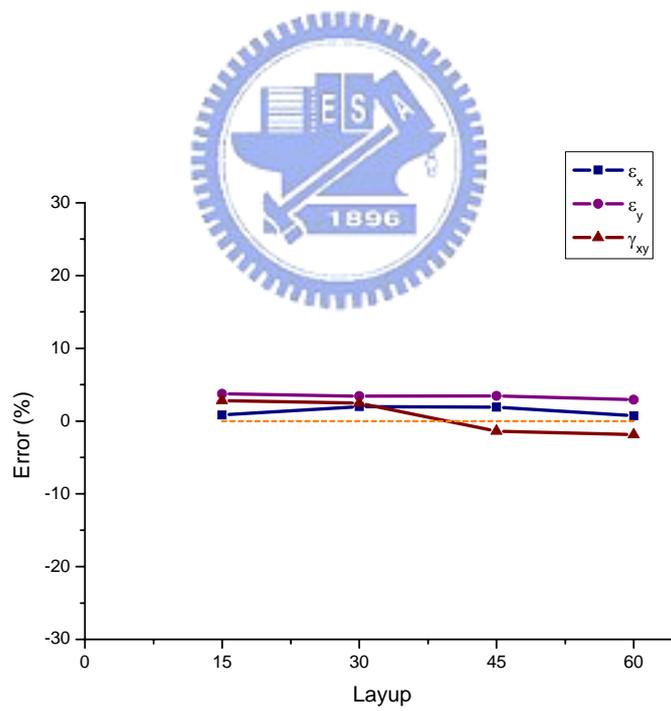


圖 2-14. 複材積層樑結構中間點不同疊層應變之誤差百分比圖

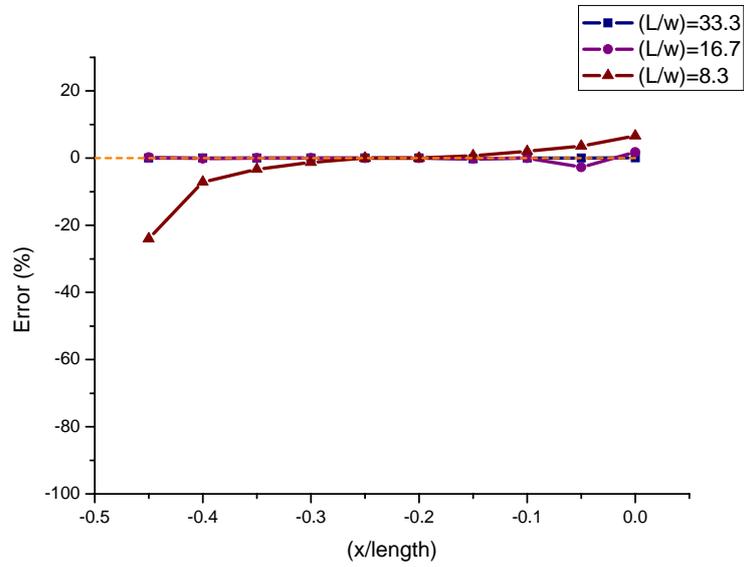


圖 2-15.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑軸向應變誤差百分比圖

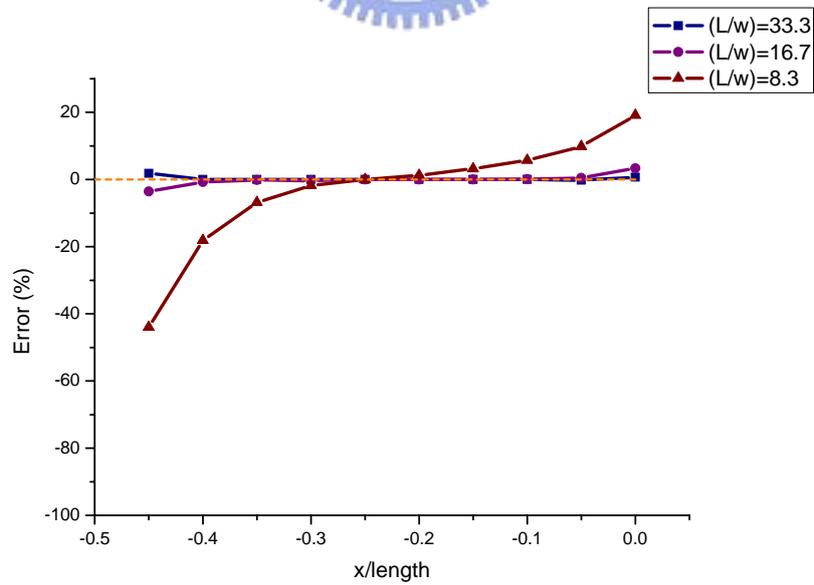


圖 2-16.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑橫向應變誤差百分比圖

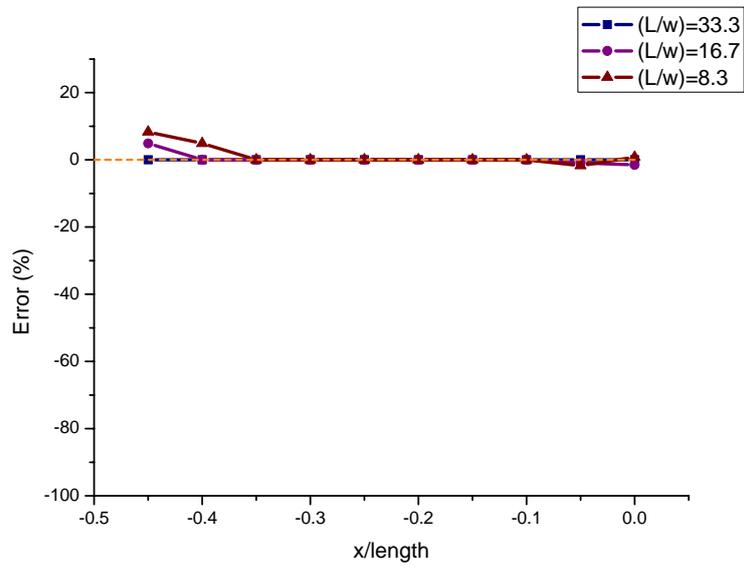


圖 2-17.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑剪應變誤差百分比圖

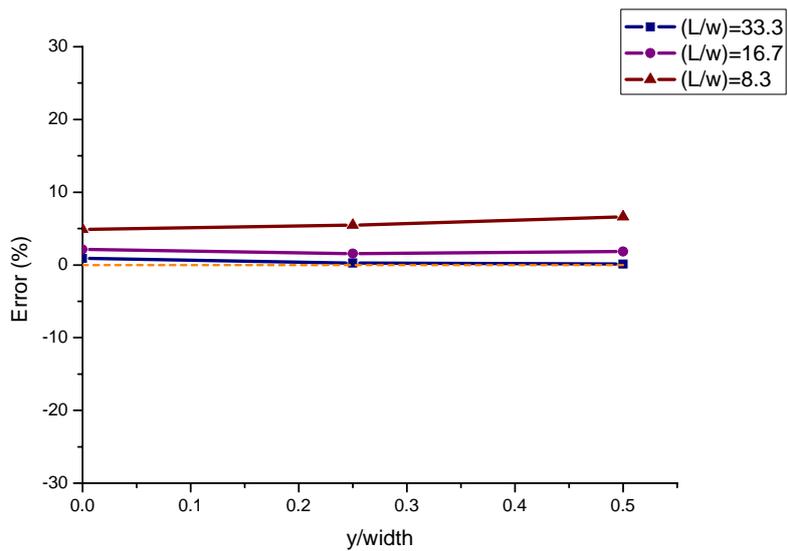


圖 2-18.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑橫向之軸向應變誤差百分比圖

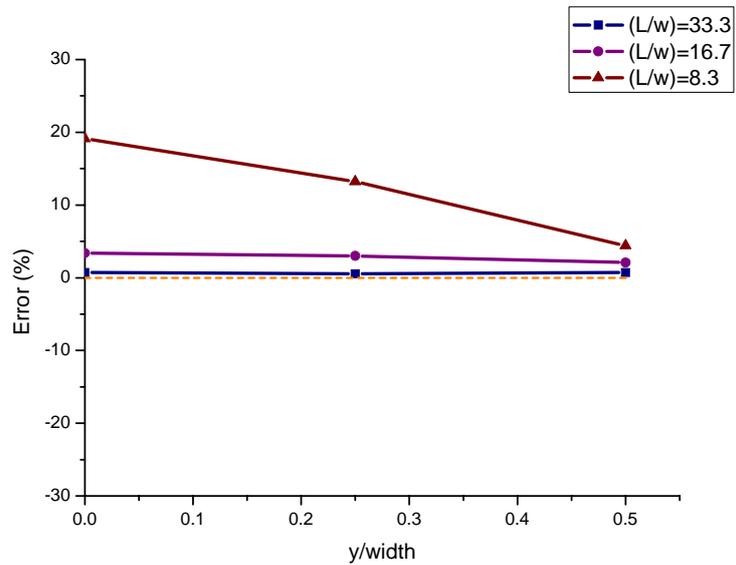


圖 2-19.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑橫向之橫向應變誤差百分比圖

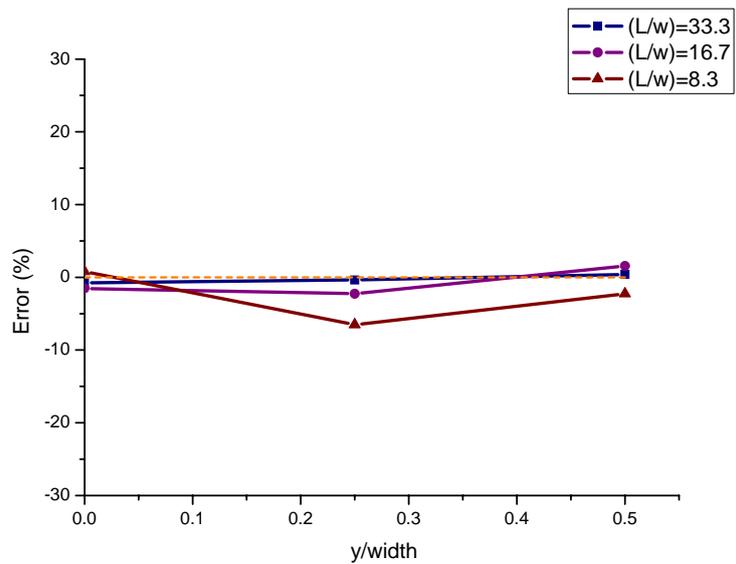


圖 2-20.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑橫向之剪應變誤差百分比圖

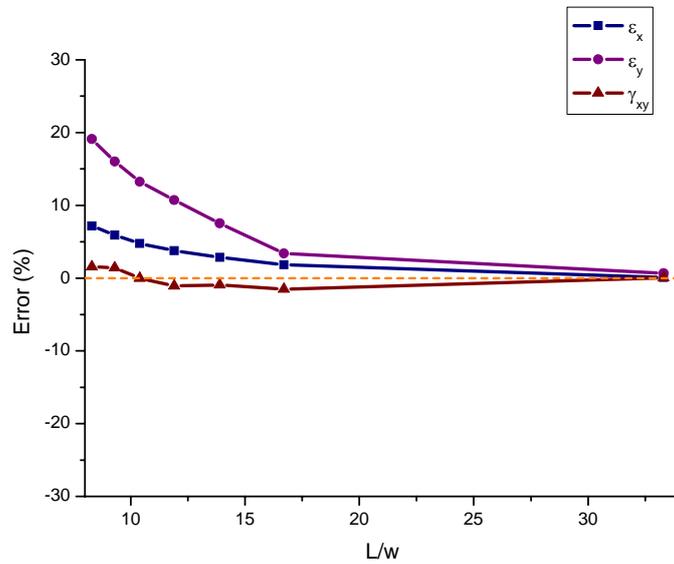


圖 2-21.  $[(45^\circ/-45^\circ)_6]_s$  複材積層樑中間各應變誤差百分比圖

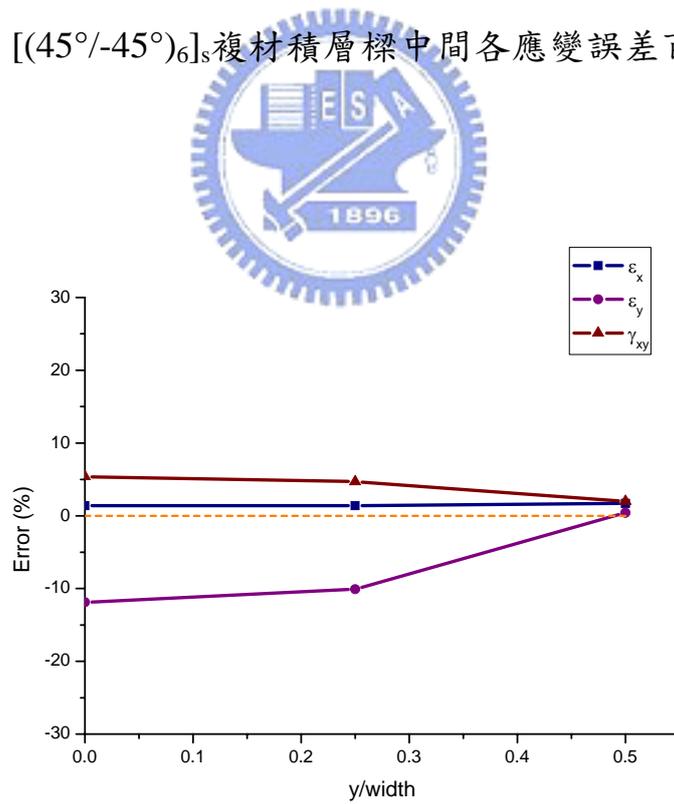


圖 2-22.  $\frac{L}{w} = 33.3$  之  $[45^\circ]_{24}$  單一偏角複材積層樑橫向各應變之誤差百分比曲線圖

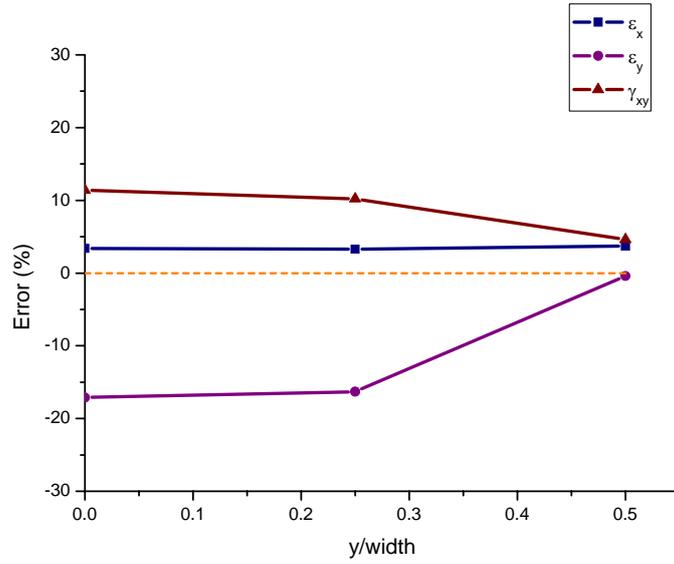


圖 2-23.  $\frac{L}{w} = 16.7$  之  $[45^\circ]_{24}$  單一偏角複材積層樑橫向各應變之誤差百分

比曲線圖

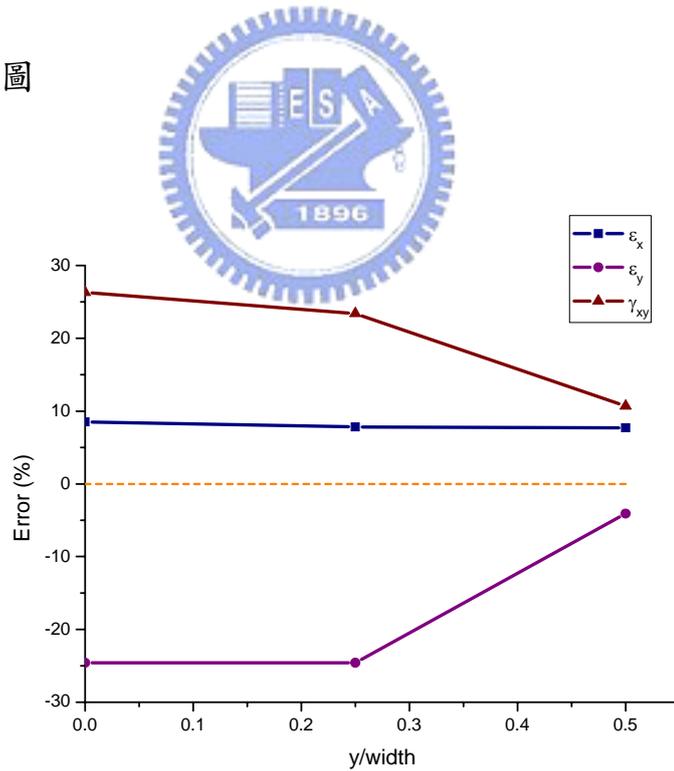


圖 2-24.  $\frac{L}{w} = 8.3$  之  $[45^\circ]_{24}$  單一偏角複材積層樑橫向各應變之誤差百分

比曲線圖

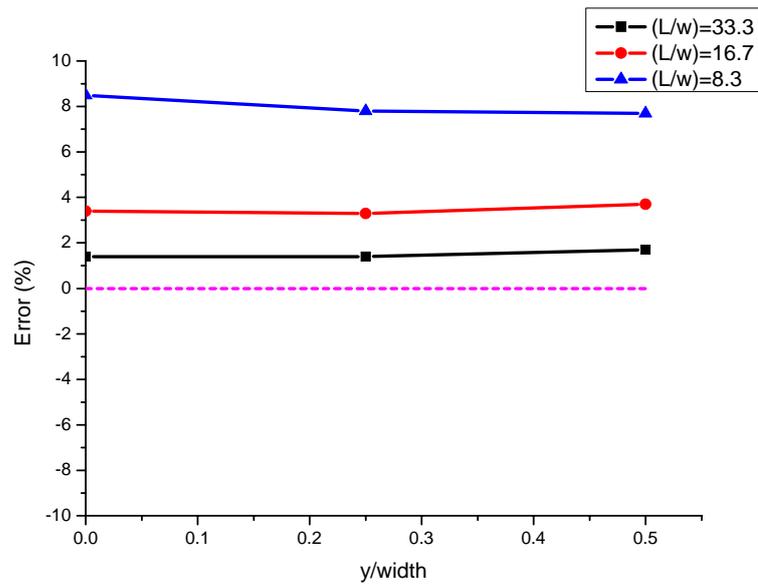


圖 2-25.  $[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑中間軸向應變之誤差百分比曲線圖

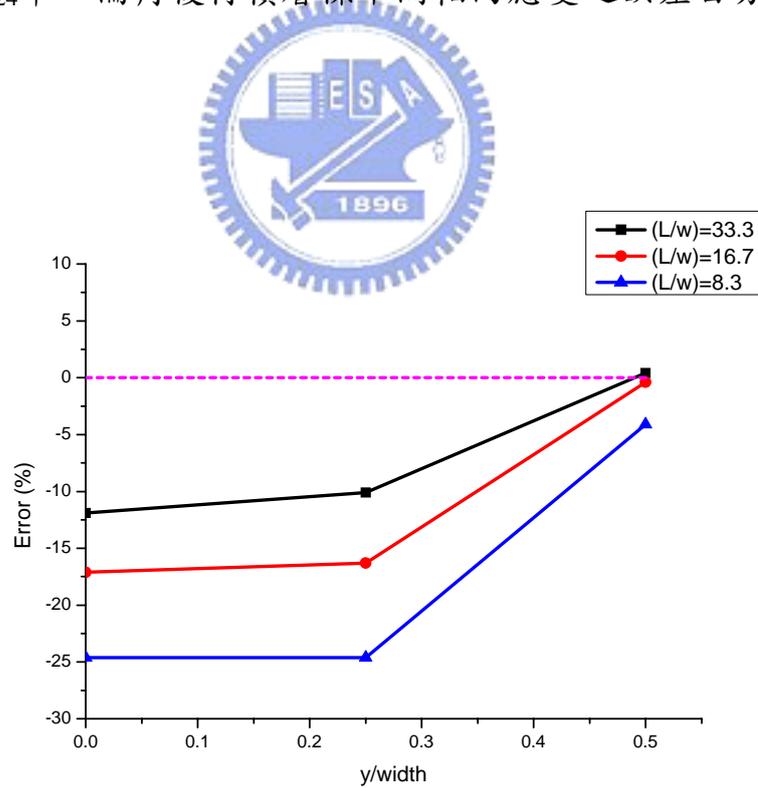


圖 2-26.  $[45^\circ]_{24}$ 單一偏角複材積層樑中間橫向應變之誤差百分比曲線圖

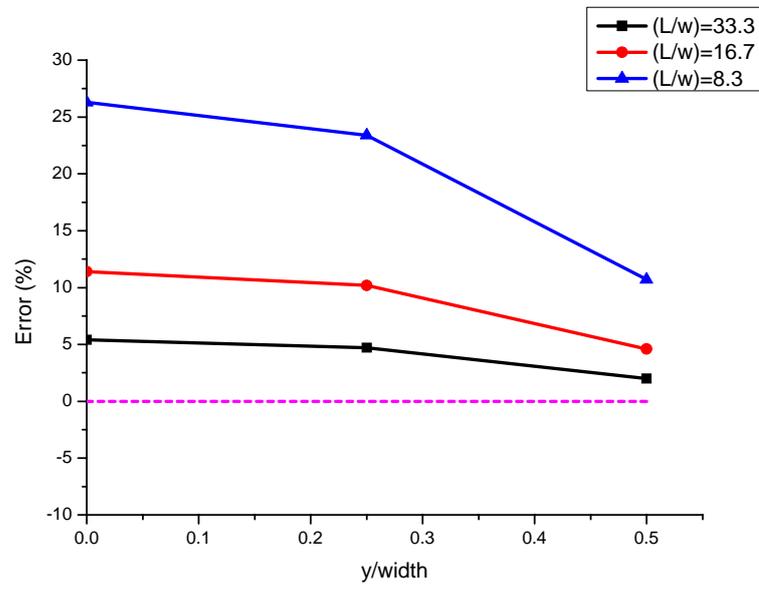
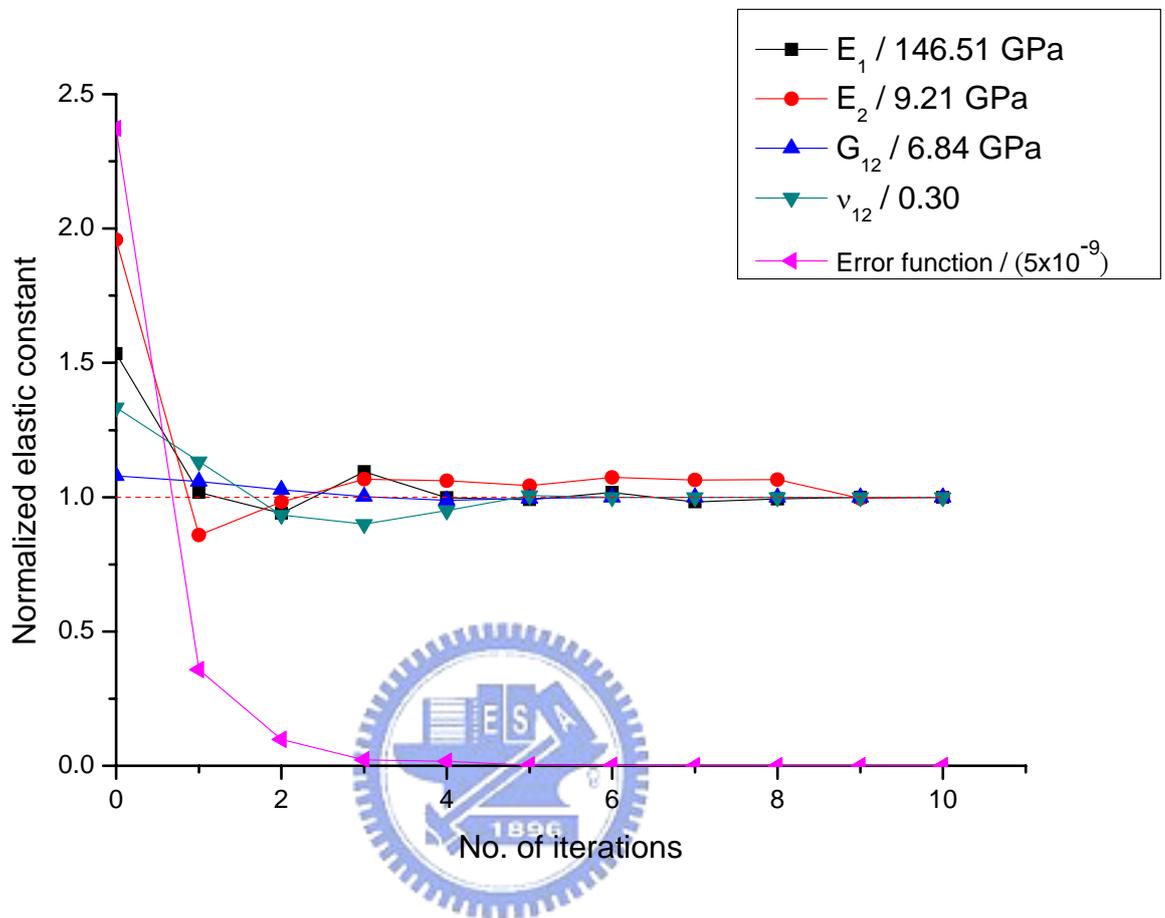
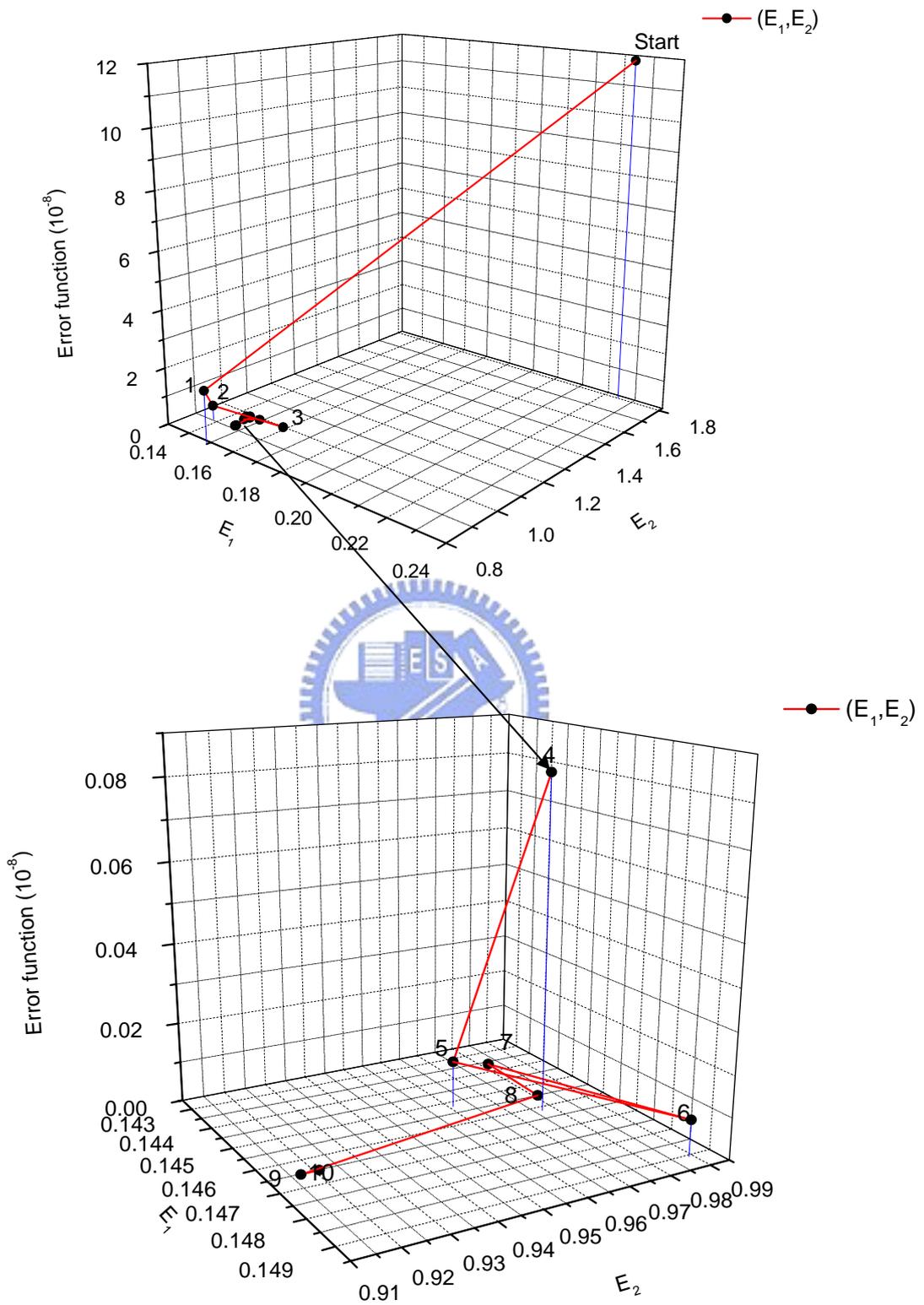


圖 2-27.  $[45^\circ]_{24}$  單一偏角複材積層樑中間剪應變之誤差百分比曲線圖

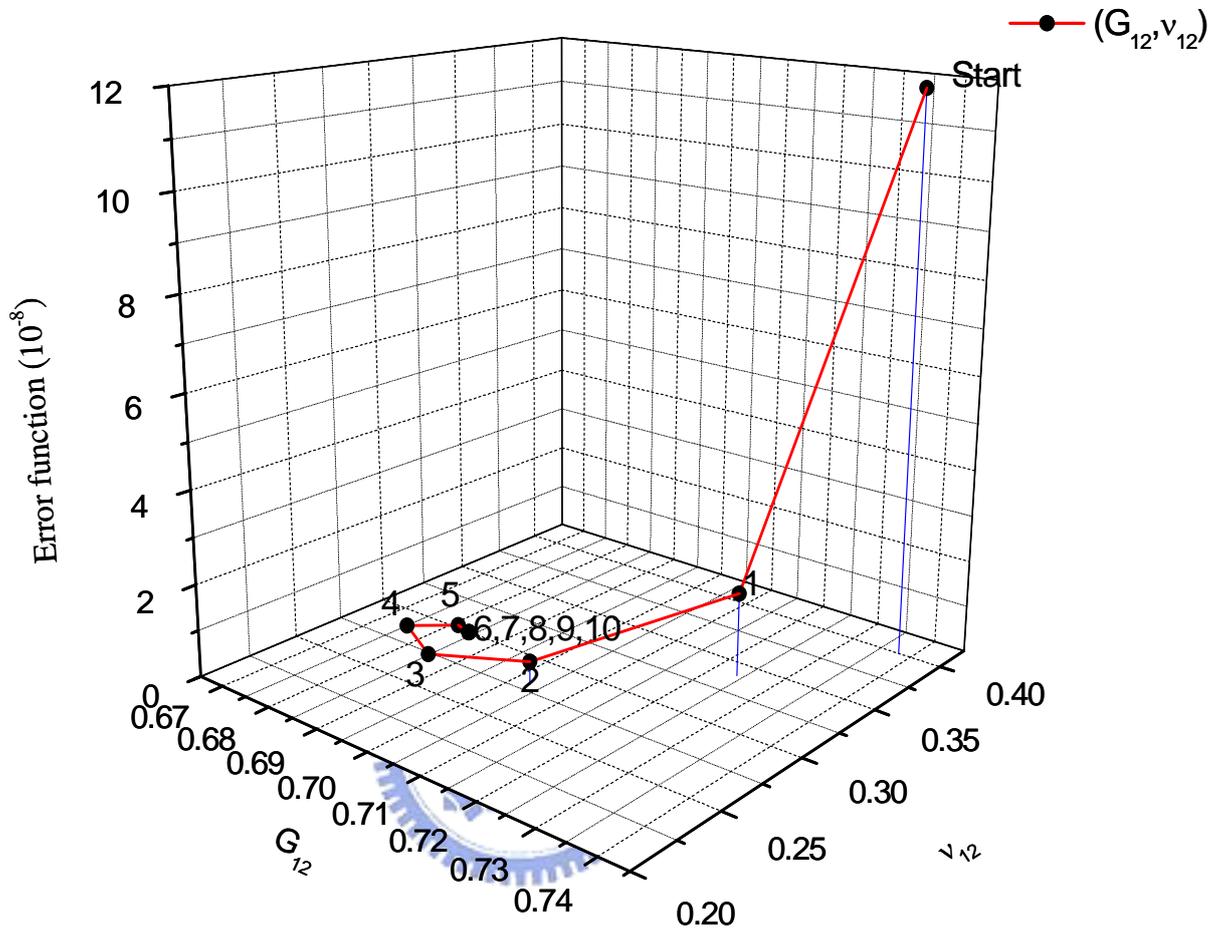




(a) 各變數及目標函數收斂路徑圖



(b)  $(E_1, E_2)$  收斂路徑圖



(c)  $(G_{12}, \nu_{12})$ 收斂路徑圖

圖 3-1 最佳化收斂路徑圖

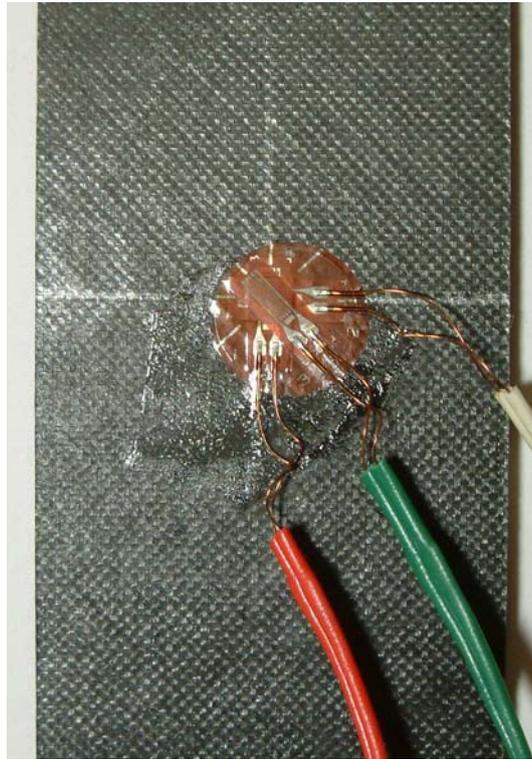


圖 4-1 KYOWA 型號 KFG-3-120-D17-11L3M2S 之應變規組

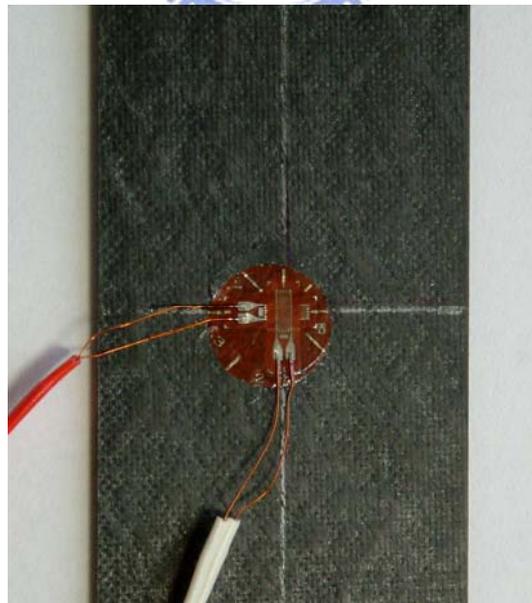


圖 4-2 KYOWA 型號 KFG-3-120-D16-11L3M2S 之應變規組

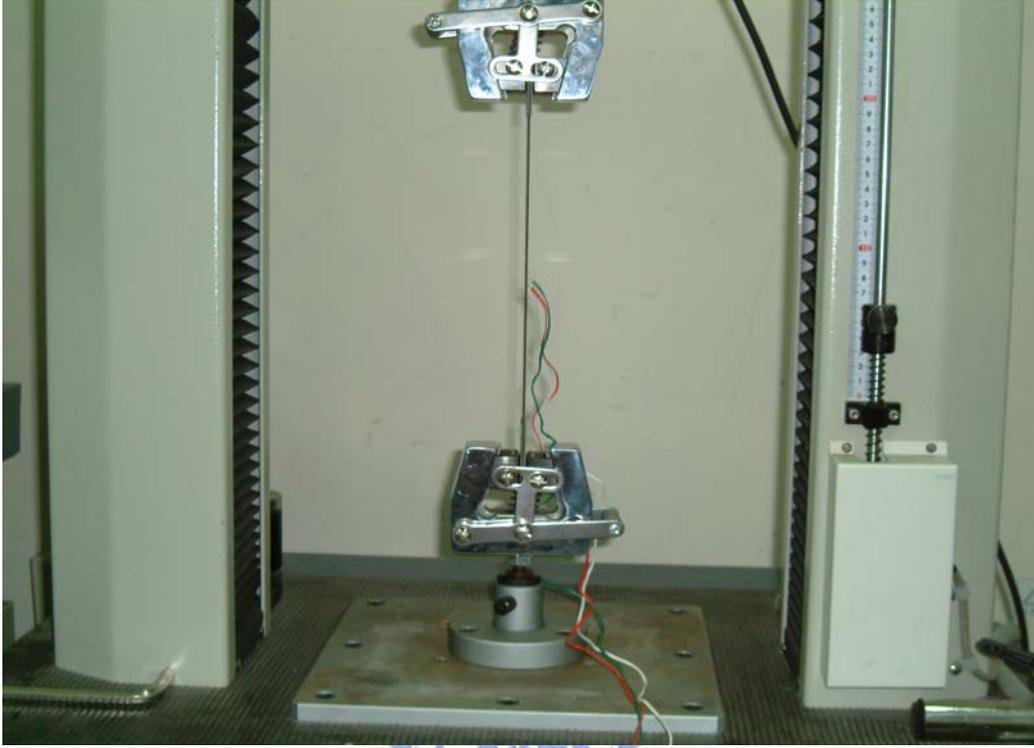


圖 4-3 拉伸試驗機

(廠牌: Hung Ta Instrument Co., LTD. , 型號為 HT-9102A)

Specimen size:  
a=220 mm  
b=30 mm  
c=40 mm

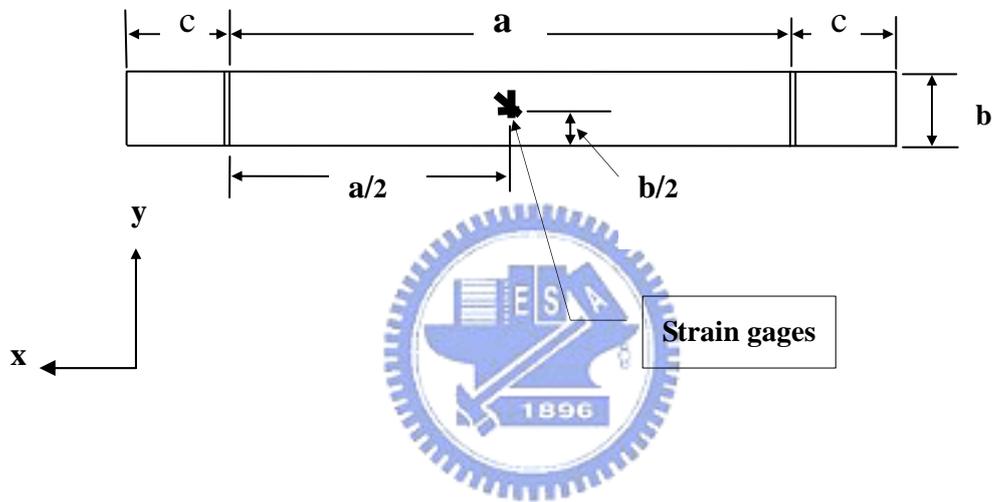
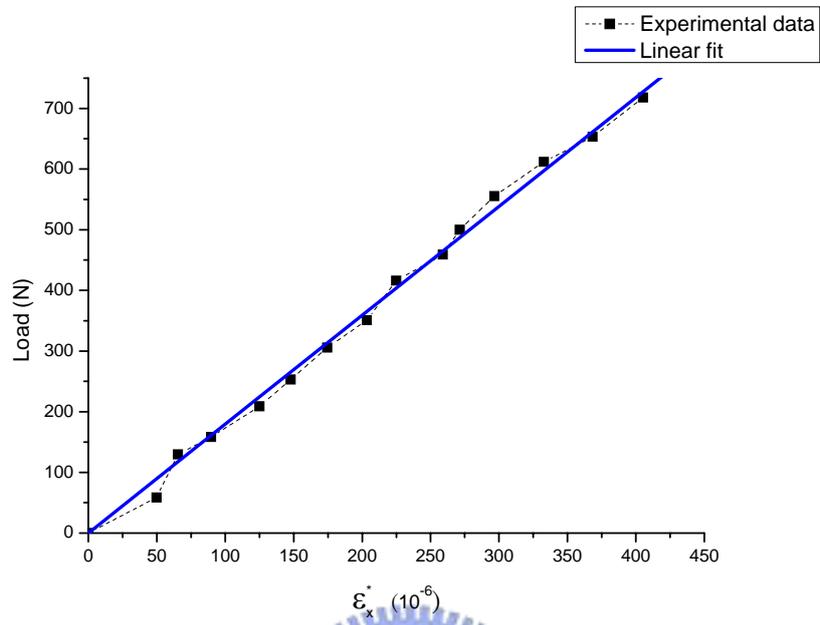
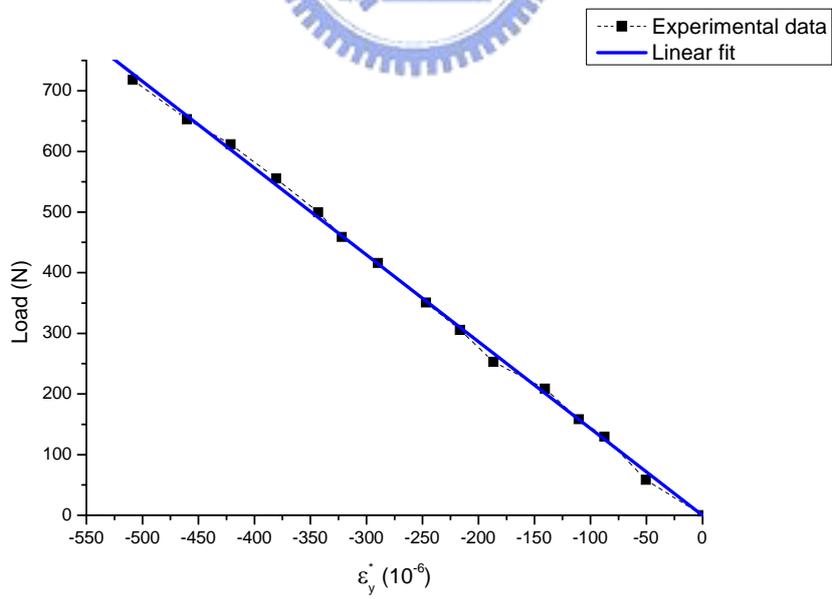


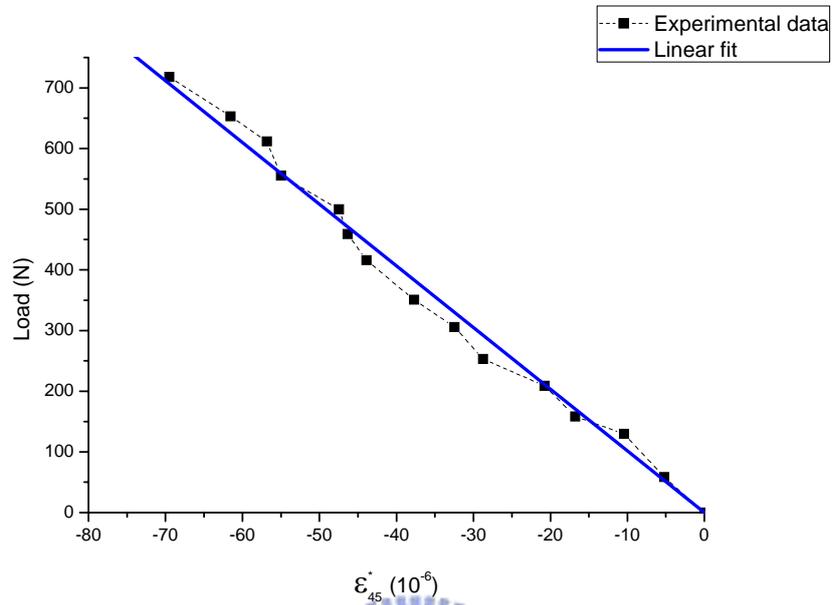
圖 4-4. 複合材料積層板拉伸試驗之尺寸大小



(a) Axial direction



(b) Lateral direction



(c) 45° direction

圖 4-5. [(30°/-30°)<sub>4</sub>/30°]複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖

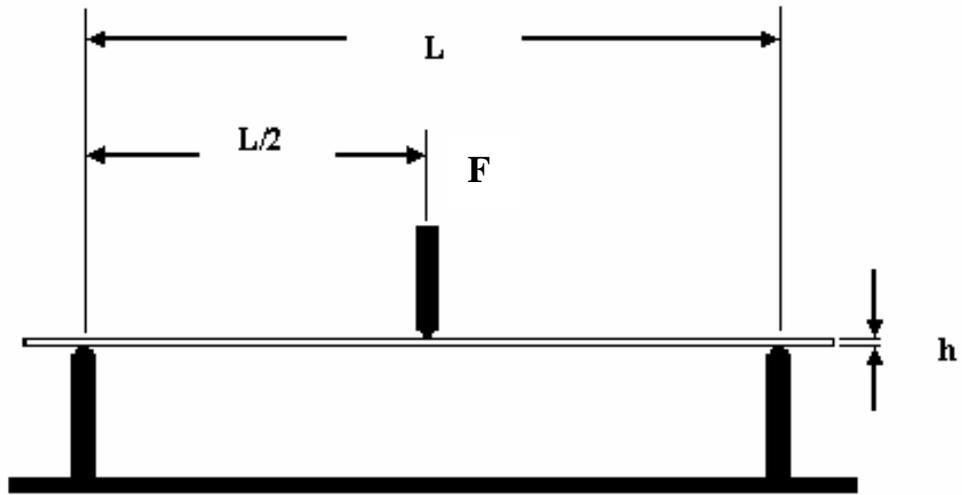


圖 4-6. 複材積層樑結構受力  $F$  作用時之三點彎曲試驗示意圖

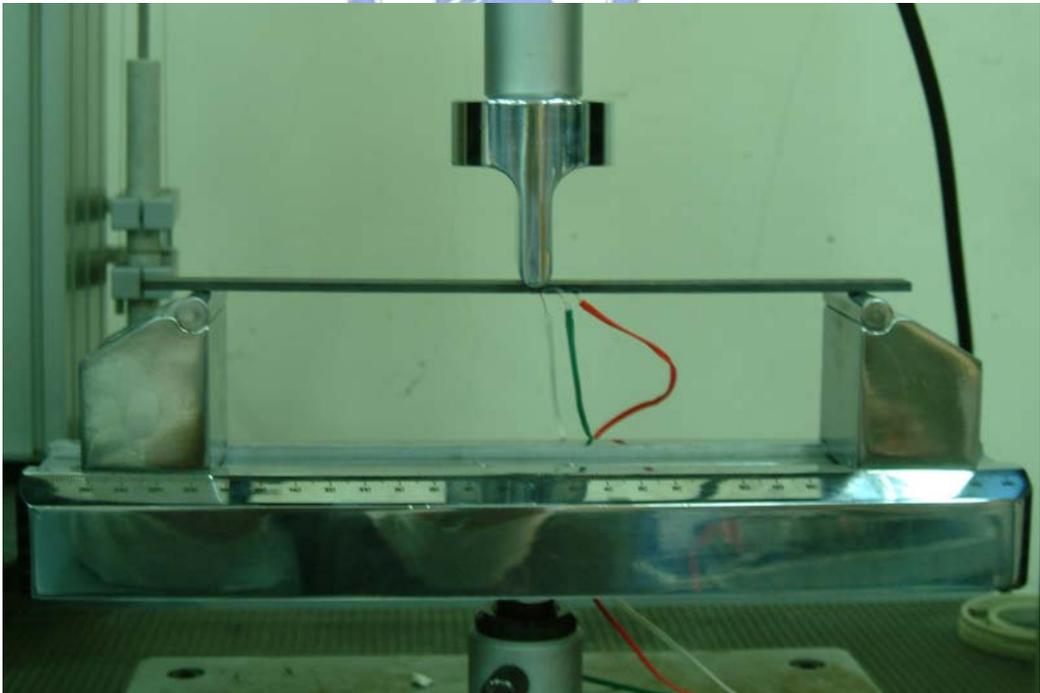


圖 4-7 複合材料積層樑結構之三點彎曲試驗圖

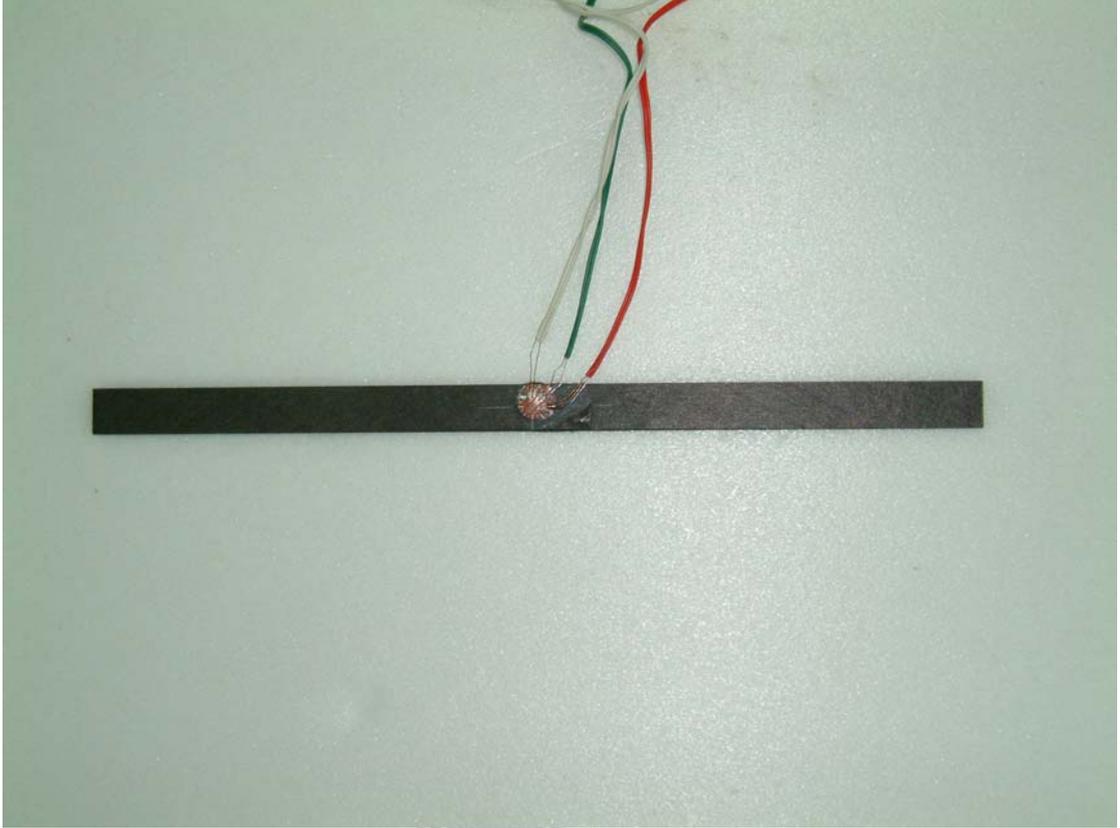


圖 4-8 對稱堆疊的複合材料積層樑結構之試片

**Specimen size:**

$L_t = 232 \text{ mm}$

$L = 200 \text{ mm}$

$w = 12 \text{ mm}$

$h = 2.88 \text{ mm}$

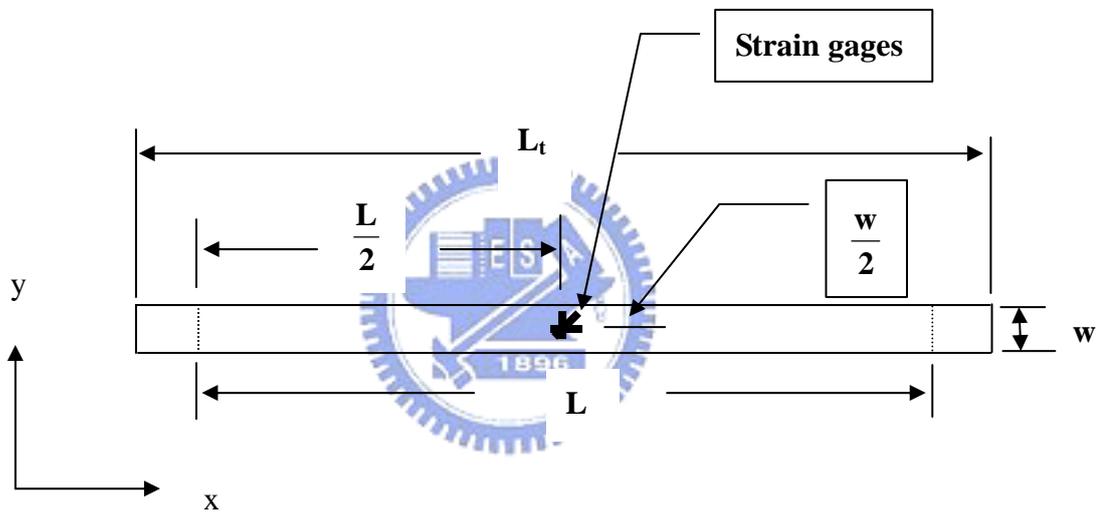
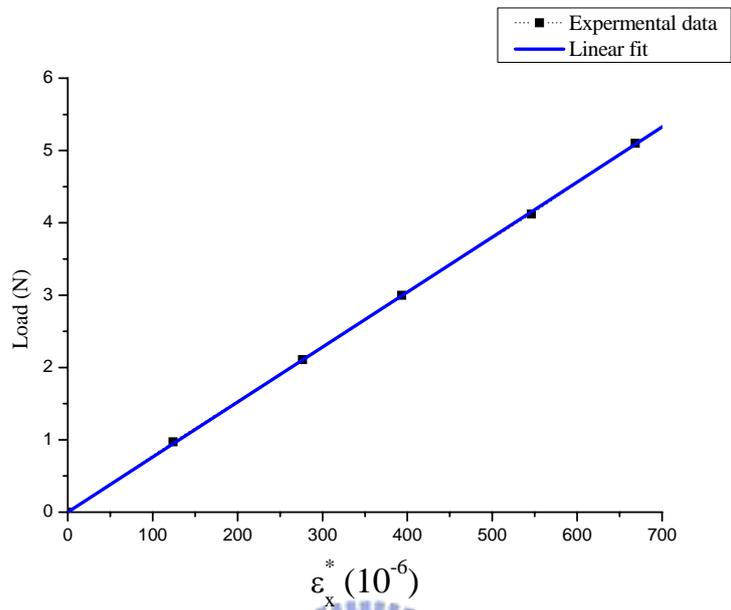
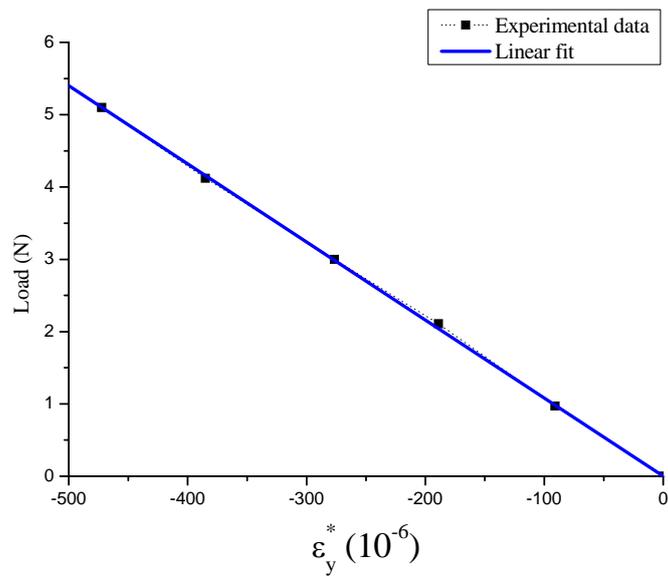


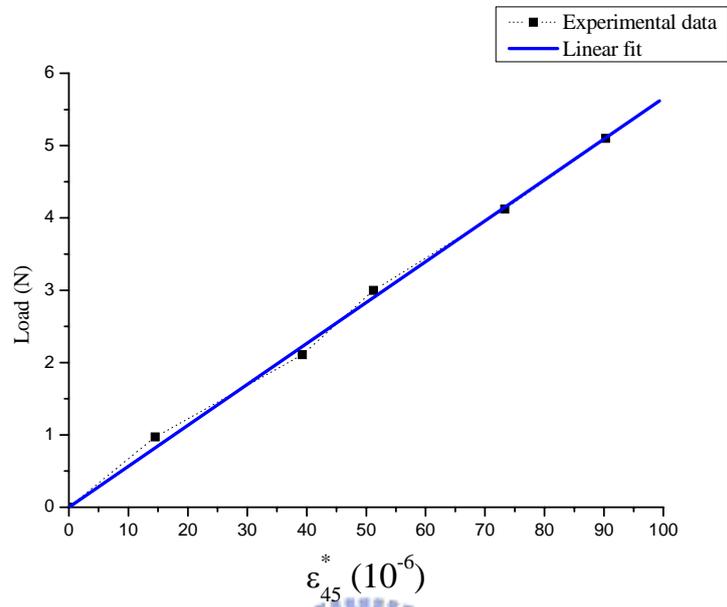
圖 4-9. 複材層樑三點彎曲試驗之尺寸大小



(a) Axial direction

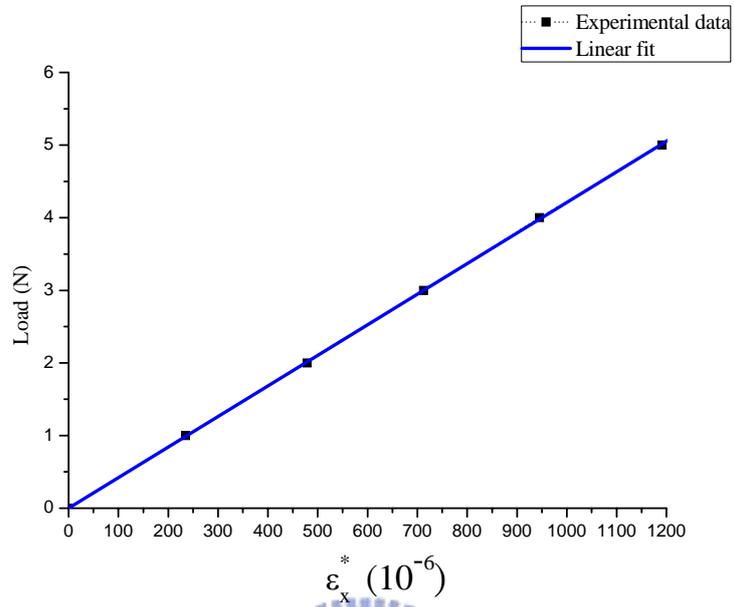


(b) Lateral direction

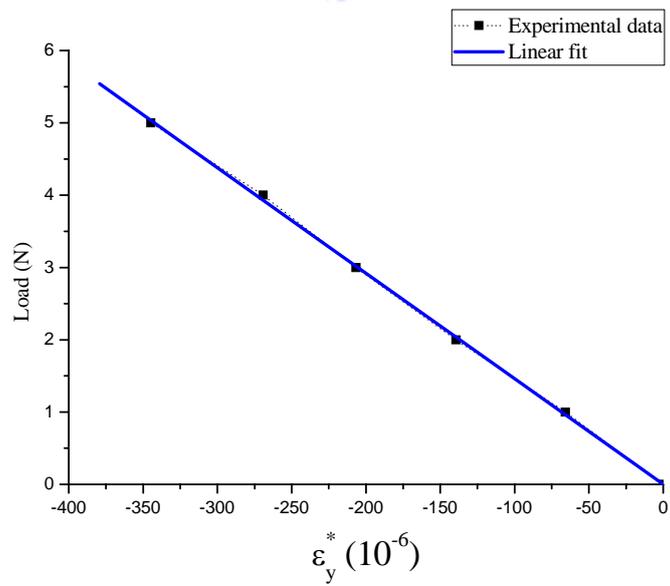


(c) 45° direction

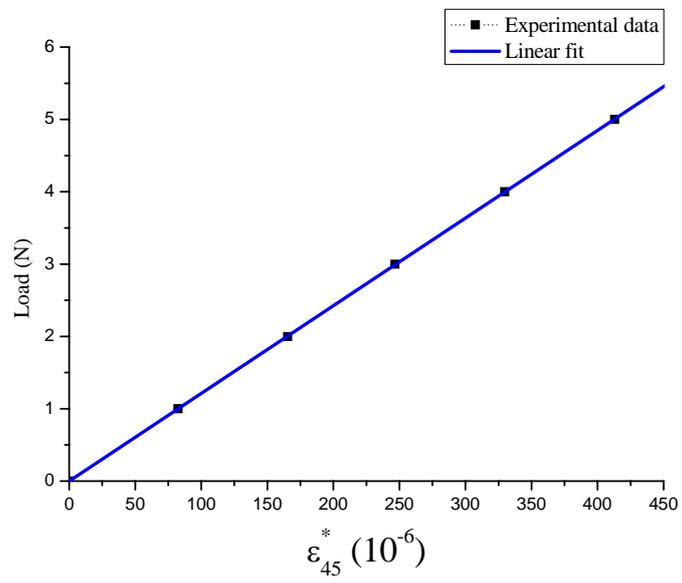
圖 4-10. Gr/ep [(45°/-45°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub>複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖



(a) Axial direction



(b) Lateral direction



(c) 45° direction

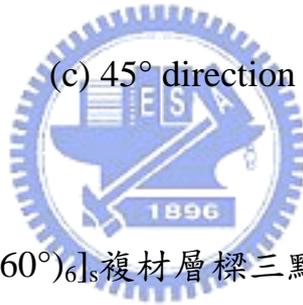
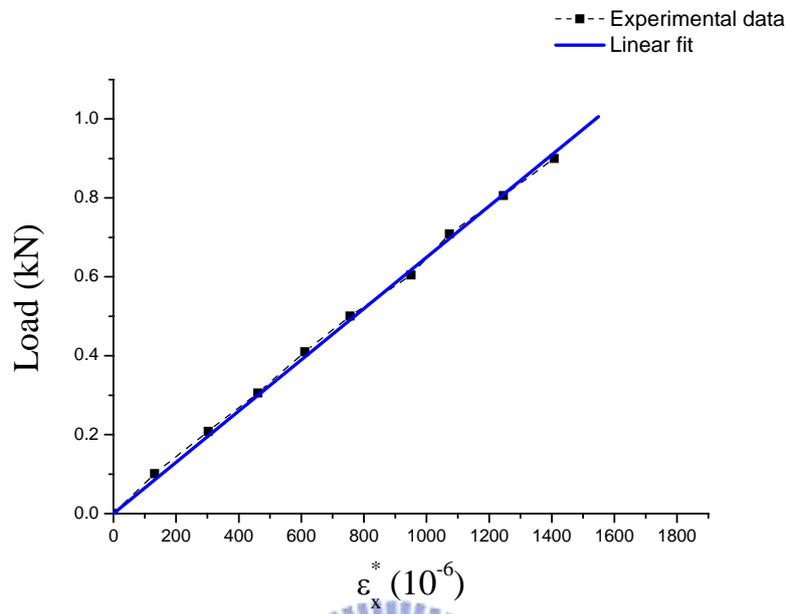
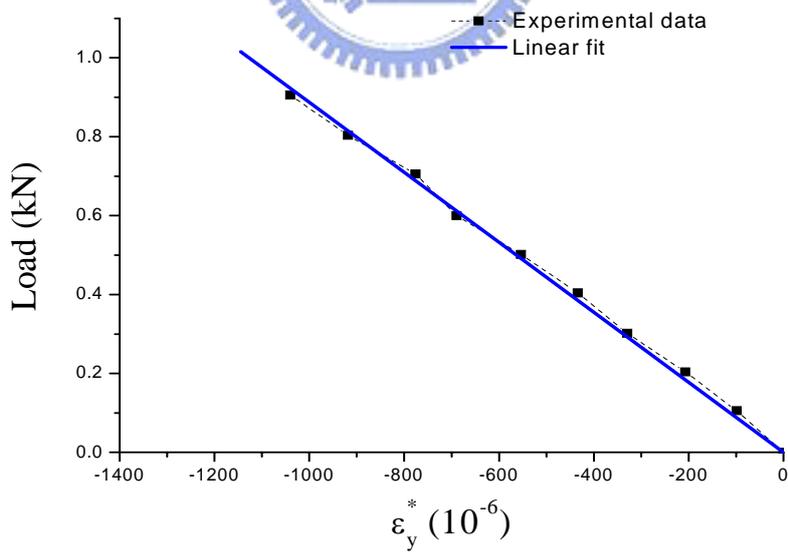


圖 4-11. Gr/ep [(60°/-60°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub> 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖

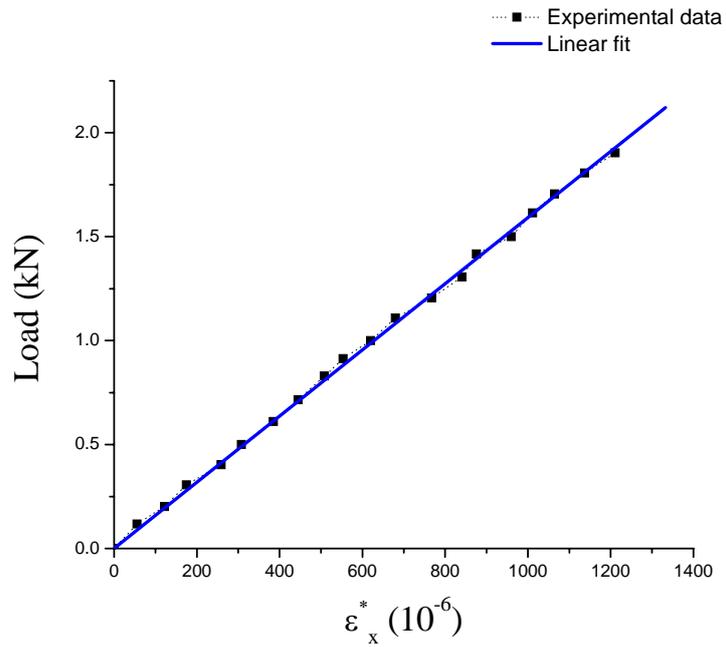


(a) Axial direction

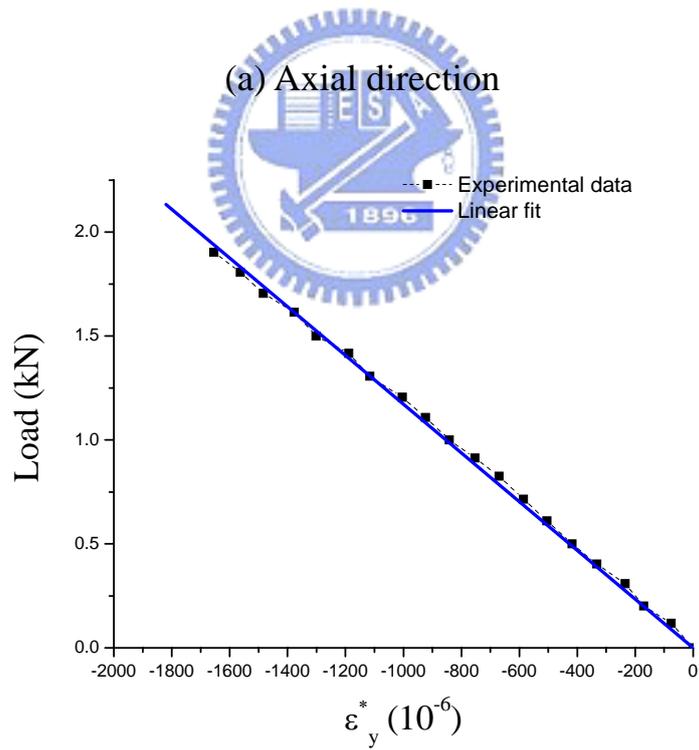


(b) Lateral direction

圖 4-12.  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$  複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖

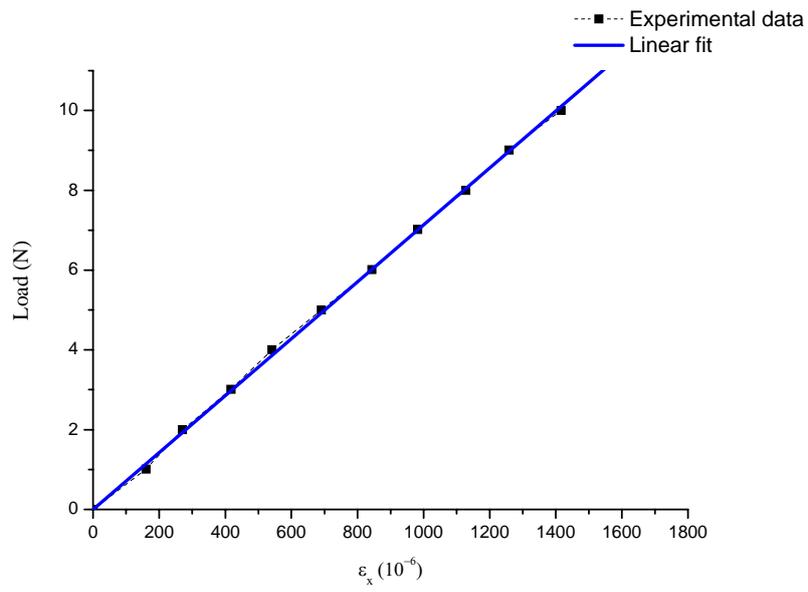


(a) Axial direction

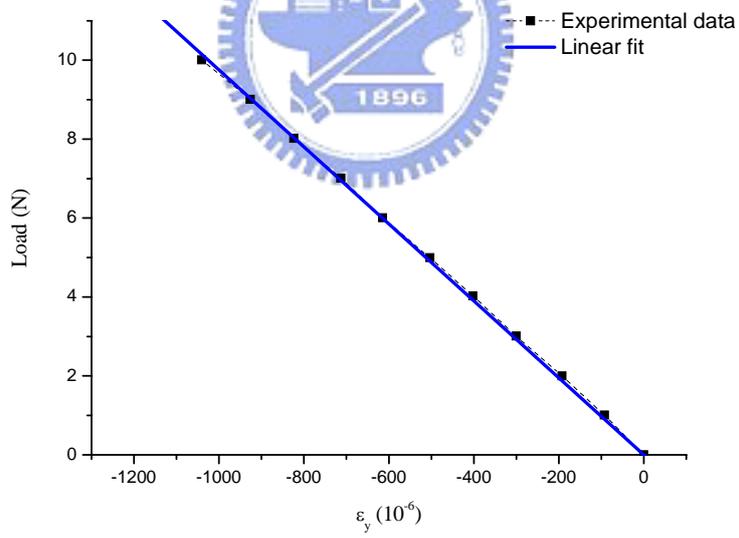


(b) Lateral direction

圖 4-13.  $[(30^\circ/-30^\circ)_2]_s$  複合材料積層板拉伸試驗負載-應變圖

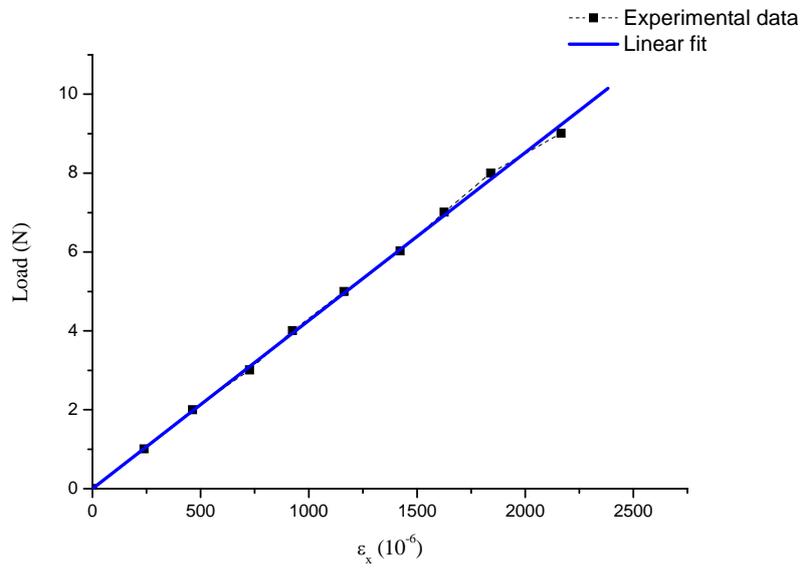


(a) Axial direction

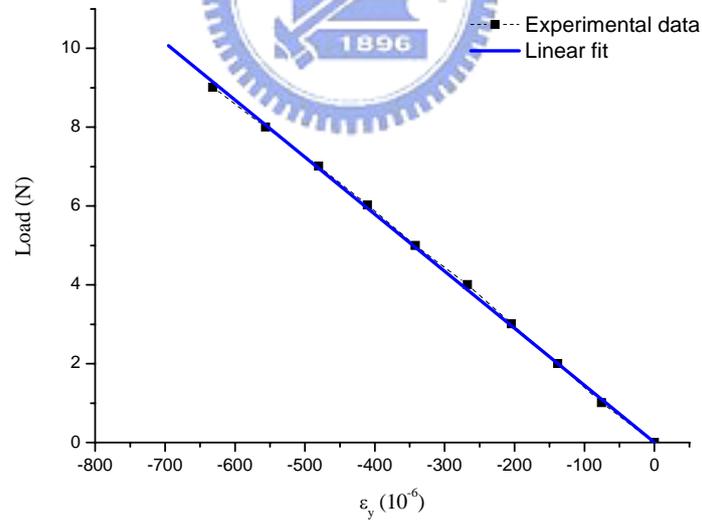


(b) Lateral direction

圖 4-14. Gr/ep [(45°/-45°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub>複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖



(a) Axial direction



(b) Lateral direction

圖 4-15. Gr/ep [(60°/-60°)<sub>6</sub>]<sub>s</sub> 複材層樑三點彎曲試驗負載-應變圖