

國立交通大學

土木工程學系

博士論文

非線性自由液面流場的數值模擬
以及其在探討微尺度上層海洋動力之應用

Numerical Simulation of a Fully-Nonlinear Free-Surface Flow
and its Applications on the Studies of
Microscale Dynamics in the Upper Oceans

研究生：洪立萍

指導教授：蔡武廷

中華民國九十五年十二月

非線性自由液面流場的數值模擬
以及其在探討微尺度上層海洋動力之應用

Numerical Simulation of a Fully-Nonlinear Free-Surface Flow and its
Application on the Studies of Microscale Dynamics in the Upper Oceans

研究生：洪立萍

Student：Li-ping Hung

指導教授：蔡武廷

Advisor：Wu-ting Tsai



Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

in

Civil Engineering

December 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年十二月

非線性自由液面流場的數值模擬 以及其在探討微尺度上層海洋動力之應用

學生：洪立萍

指導教授：蔡武廷

國立交通大學
土木工程學系博士班

摘要

本論文建立一完整描述三維非線性自由液面流場運動的數值模式。為於未知的自由液面邊界上滿足非線性邊界條件，本模式利用座標轉換，將非穩態且不規則物理區間的流場控制方程式與邊界條件，映射至規則的計算區間，以進行數值解析。模式的主要數值方法包括：分別以擬頻譜法以及二階有限差分法近似控制方程與邊界條件中的水平與垂直導數；以二階 Runge-Kutta 法進行非穩態的自由液面位移與流場速度的時間積分；利用改良式割線疊代法求解計算區間中不可分離的壓力 Poisson 方程式，以滿足不可壓縮流條件。

本論文首先應用所發展的數值模式，探討二維重力-寄生表面張力波之發展與演化。模擬結果顯示，當寄生表面張力波完全發展時，強烈的渦漩自各個表面張力波之波谷剝離，形成高旋度的邊界層，進而大幅提升流場能量的黏滯消散。為進一步顯示本模式解析非線性波浪運動之能力，我們進行三維「短峰型重力波」與「新月型重力波」的計算；其結果完整模擬波浪非線性交互作用之過程，所形成的波型結構與水槽實驗之觀測相同。最後，我們應用本數值模式，模擬正向風壓與風剪應力作用下之三維自由液面邊界層紊流場。模擬結果顯示：寄生表面張力波列自重力波波峯之前波相處產生，並逐漸發展至波背處；同時於波背處，出現平行於沿流方向，

高低流速交錯的條痕結構。此流場結構與實驗觀測相同。以上三例有關三維自由液面流場之應用，驗證本論文所發展之模式，可以正確解析自由液面流場不同尺度的物理過程；包括液面重力波、表面張力波、黏滯邊界層流場以及紊流結構。



Numerical Simulation of a Fully-Nonlinear Free-Surface Flow and its Applications on the Studies of Microscale Dynamics in the Upper Oceans

Student : Li-ping Hung

Advisor : Professor Wu-ting Tsai

Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

A numerical model for simulating a three-dimensional flow bounded by a fully-nonlinear, free-surface boundary is developed. The free-surface boundary conditions are satisfied on the free-moving surface exactly without any approximation or linearization. The governing equations and the boundary conditions on the time-dependent, physical domain are transformed onto a regular domain for numerical computations. The major implementations of the developed model include: Pseudo-spectral and finite-difference schemes are employed to approximate the spatial-differential operators in the horizontal and vertical directions, respectively. A second-order Runge-Kutta method is adopted to integrate in time for the velocity field and the free-surface elevation. The solenoidal condition of the velocity field is satisfied by solving the transformed pressure Poisson equation. A modified secant method is used to accelerate the iterative solution of the non-separable Poisson equation.

We first apply the numerical model to study the development and evolution of parasitic capillary ripples on a two-dimensional gravity-capillary wave. The simulation results reveal that strong vortices are shed from the troughs of the capillary ripples, convected backward, and form a strong boundary layer. As a result, energy dissipation is enhanced with the generation of parasitic capillaries. The model capabilities for resolving nonlinear interactions among

the surface waves are then demonstrated by simulating the three-dimensional evolutions of the short-crested waves and the crescent waves. Finally, the developed model is applied to simulate a wind-driven turbulent boundary layer bounded by a dynamic water surface. The simulation results reveal fine surface structures, including parasitic capillary waves developed from the front face near the crest of the dominant gravity wave and streamwise velocity streaks on the back gravity-wave surface. These surface structures have been widely observed in the laboratory and field experiments. The three simulation examples also indicate the capabilities of the present model in resolving flow processes of various length scales, including gravity and capillary waves, viscous sublayer and coherent eddies of a turbulent boundary layer.



致 謝

本論文得以完成首要感謝指導老師蔡武廷教授六年半來的悉心指導。受教於蔡老師的求學過程中，不僅提升學術成果品質更增廣對於科學研究的視野，在此對蔡老師致上最深的謝意。感謝黃維信教授、傅武雄教授、黃清勇教授、賴明治教授與葉克家教授於口試期間的指正與建議，您的指教使本論文更加嚴謹並啟發我省思未來之研究方向。感謝於交通大學時期與中央大學時期的實驗室夥伴，有了你們的陪伴讓我渡過美好的求學生涯。感謝我的家人，你們給予我無限的包容與支持，使我能致力於完成學業。



目次

中文摘要	i
英文摘要	iii
致謝	v
目次	vi
表目次	x
圖目次	xi
符號表	xv
第一章 前言	1
1.1 研究背景	1
1.2 三維自由液面紊流邊界層數值模式的發展回顧	2
1.3 模式發展與應用	5
第二章 模式之數學理論	7
2.1 控制方程式與邊界條件	7
2.1.1 流場之控制方程式	8
2.1.2 自由液面的運動邊界條件	8
2.1.3 作用於自由液面上的表面張力	9
2.1.4 作用於自由液面上的風應力	10
2.1.5 自由液面上的應力平衡	11
2.1.6 自由滑移之流場底部邊界	12
2.2 座標轉換	12

2.2.1 座標轉換關係式·····	12
2.2.2 計算區間之流場控制方程式與邊界條件·····	14
2.3 能量守恆·····	16
第三章 模式之數值方法·····	17
3.1 網格點配置與空間導數的離散·····	17
3.2 Runge-Kutta 時間積分與壓力 Poisson 方程式·····	21
3.3 改良割線疊代法求解 Poisson 方程式·····	27
3.3.1 疊代形式之壓力 Poisson 方程式·····	27
3.3.2 直接疊代法與割線疊代法·····	30
3.3.3 疊代法的收斂測試·····	31
3.4 自由液面邊界條件之離散·····	32
3.4.1 自由液面之垂直速度 ($w_{z=1}$)·····	33
3.4.2 自由液面速度在垂直方向上之一次與二次導數·····	34
3.5 數值方法之驗證·····	36
第四章 寄生表面張力波·····	41
4.1 波形與流場結構·····	41
4.2 生成機制之探討·····	46
4.2.1 表面張力的影響·····	46
4.2.2 風壓的作用·····	51
4.2.3 初始波形斜率的影響·····	55
4.3 旋度場之生成機制·····	73
4.3.1 自由液面旋度場·····	73

4.3.2 通過自由液面之旋度通量	76
4.3.3 渦旋之傳輸	78
4.4 能量消散	80
4.4.1 寄生表面張力波引起之能量變化	80
4.4.2 平均液面斜率與能量消散的關係	80
第五章 三維非線性自由液面流場之模擬	83
5.1 短峰型重力波	83
5.1.1 模擬之初始條件	83
5.1.2 模擬結果	84
5.2 新月型重力波	87
5.2.1 模擬之初始條件	87
5.2.2 模擬結果	87
5.3 風波下之剪紊流場	91
5.3.1 模擬之初始條件	91
5.3.2 模擬結果	92
第六章 結論與未來展望	99
參考文獻	101
附錄一 流場能量守恆方程	108
附錄二 擬頻譜法之基礎理論－離散傅立葉級數	113
附錄三 低儲存量之二階 Runge-Kutta 數值積分法	125
附錄四 非線性重力波近似解之三階 Stokes 波	127
附錄五 全域座標系統與局部座標系統之轉換	129

附錄六 流場邊界之旋度通量·····	131
附錄七 短峰型重力波之三階近似解·····	134
附錄八 新月型重力波之模擬初始流場·····	137



表目次

表 4.1：不同波長與初始波形斜率之重力波，其所產生之寄生 表面張力波波形特性。.....	56
--	----



圖目次

圖 2.1：物理區間與計算區間之網格分布圖。.....	13
圖 3.1：計算區間垂直方向非等間距網格分布情形。.....	18
圖 3.2：垂直方向非等間距之正規網格於物理區間與計算區間 分布圖。.....	18
圖 3.3：正規網格系統與交錯網格系統配置圖。.....	19
圖 3.4：於垂直方向使用正規網格系統以及共同正規網格與交 錯網格系統之配置示意圖。.....	20
圖 3.5：以疊代法求解 Poisson 壓力方程式的測試結果。.....	32
圖 3.6：模擬過程之平均水面高度、流場之平均速度散度以及 最大速度散度。.....	37
圖 3.7：模擬過程中總能量之演化以及數值能量損失與黏滯消 散能量之比。.....	39
圖 3.8：前進波之波形模擬結果。.....	40
圖 4.1：波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮 表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 、 波形斜率 (η_x) 與波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。.....	42
圖 4.2：波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮 表面張力影響但不受任何風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.5T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場與旋度場。.....	44
圖 4.3：寄生表面張力波之速度場向量圖與旋度分布。.....	45
圖 4.4：波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在不考 慮表面張力影響且不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 、波形斜率 (η_x) 與波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。.....	47
圖 4.5：波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在不考 慮表面張力影響且不受任何風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.5T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場與旋度場。.....	48

圖 4.6：表面張力作用下之正向應力分布情形。.....	50
圖 4.7：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響並受正向風壓之作用下，其波形 (η)、波形斜率 (η_x) 與波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。.....	53
圖 4.8：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響且受正向風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.5T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場與旋度場。.....	54
圖 4.9：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.12$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	59
圖 4.10：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.16$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	60
圖 4.11：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.20$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	61
圖 4.12：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	62
圖 4.13：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	63
圖 4.14：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.20$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	64
圖 4.15：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.23$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	65

圖 4.16：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	66
圖 4.17：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	67
圖 4.18：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.30$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	68
圖 4.19：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	69
圖 4.20：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	70
圖 4.21：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.30$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	71
圖 4.22：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.31$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其波形 (η) 與波形斜率 (η_x) 的演化過程。.....	72
圖 4.23：自由液面旋度分布圖。.....	74
圖 4.24：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波，其自由液面旋度通量之各項分量延著邊界之分布圖。.....	77
圖 4.25：自由液面之瞬時旋度變化率。.....	79
圖 4.26：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之重力波總能量 (E_w) 隨時間之演化。.....	81
圖 4.27：平均液面斜率與能量消散率的瞬時關係。.....	82
圖 5.1：短峰型重力波之三維菱形結構波形。.....	85

圖 5.2：在考慮表面張力作用下，短峰型重力波之三維菱形結構波形。·····	86
圖 5.3：二維前進波列受三維不安定擾動而形成三維新月型波之演化過程。·····	89
圖 5.4：在考慮表面張力作用下，二維前進波列受三維不安定擾動而形成三維新月型波之演化過程。·····	90
圖 5.5：三維風波之液面高度(η)、沿流向之液面斜率(η_x)與橫向之液面斜率(η_y)。·····	94
圖 5.6：三維風波之液面紊流速度場。沿流紊流速度(u')、橫向紊流速度(v')與垂直紊流速度(w')。·····	95
圖 5.7：由波背相與波前相之風波三維液面變化檢視圖。·····	96
圖 5.8：三維風波之橫向紊流旋度場(ω'_y) 在位於 $y=0$ 、 $0.24\lambda_y$ 、 $0.47\lambda_y$ 與 $0.82\lambda_y$ 垂直沿流方向之流場剖面。·····	98



符號表

(x, y, z) 流場位置座標系統

(ξ, ψ, ζ) 計算區間之位置座標系統

(u, v, w) 流場速度

(n, t_1, t_2) 自由液面上之局部座標

$\{\hat{n}\}$ 自由液面之單位法線方向向量

$\{\hat{t}_1\}$ 投影至 x-z 平面之自由液面單位切線方向向量

$\{\hat{t}_2\}$ 投影至 y-z 平面之自由液面單位切線方向向量

η 自由液面高度

h 流場水深 (平均水平面與流場底部之垂直距離)

p 流場壓力 (動力壓力 Hydrodynamic pressure)

P 總壓力 (Total pressure 或稱為 Thermodynamic pressure, $P = p - \rho gz$)

ρ 流體密度

g 重力加速度

ν 流場運動黏滯係數

μ 流場動力黏滯係數 ($\mu = \rho\nu$)

σ 表面張力係數

κ 自由液面之曲率

τ_n^s 自由液面所受之風應力於液面法線方向 $\{\hat{n}\}$ 之分量

$\tau_{t_1}^s$ 自由液面所受之風剪應力於液面切線方向 $\{\hat{t}_1\}$ 之分量

$\tau_{t_2}^s$ 自由液面所受之風剪應力於液面切線方向 $\{\hat{t}_2\}$ 之分量

T_0 波形之線性理論週期

⊙ 風壓分布與液面波形之相位差

p_0 風壓參數

ω^0 自由液面旋度值，其指向頁內為

u_s 自由液面切線方向速度分量

u_r 自由液面法線方向速度分量

\hat{s} 與自由液面邊界相切之切線方向

\hat{r} 正向於自由液面之法線方向，其指向流場外為正

φ 前進波入射方向與風吹拂方向間的夾角

ϕ 自由液面之切線方向與全域(global)座標 x 方向之夾角

Re Reynolds 數

Fr Froude 數

We Weber 數



第一章 前言

1.1 研究背景

在非常接近海-氣交界面的紊流邊界層內，其流場動力特性為通過界面間之動量、氣體、熱量與水氣等傳輸過程的主要機制。了解這些由接近液面紊流結構所主控的交換過程為海-氣交互作用研究之主要課題。然而直到近期發展之實驗技術才能合理地直接量測接近邊界處之紊流數值，因此以往的相關研究皆以環境變數參數化界面之傳輸特性；例如：建立風速與通過界面之傳輸率的關係 (Liss and Merlivat, 1986 與 Wanninkhof, 1992)，或將全球風場模式化以推算全球海-氣間二氧化碳通量 (Takahashi *et al.*, 1997)。此外，由已知的流場物理背景建立流場結構之概念圖像以推測傳輸過程的機制；稱之為概念式的理論，亦普遍地使用於海-氣交互作用研究。其中包括：Coantic (1986) 之小渦旋模式 (small eddy model)；以局部的紊流消散係數參數化邊界層之紊流通量。Higbie (1935) 與 Danckwerts (1951) 之表面更新模式 (surface renewal model)；以更新渦旋描述邊界層中之水體交換。

然而，風吹拂過海面所引起的傳輸過程是相當複雜的，除了風引起的剪紊流外，海面上亦會出現短風波，而風波於液面上傳遞不僅影響邊界層內紊流結構，其兩者間的交互作用亦可能改變液面狀態因而對界面傳輸有相當大的衝擊。為深入地了解液面運動，Okuda (1982)、Ebuchi *et al.* (1987)、Banner and Peirson (1998)、Caulliez and Collard (1999) 以及 Veron and Melville (2001) 等在實驗水槽中，對於由風場趨動之海面運動進行模擬與量測，其對於液面演化過程與流場結構特性提供定性與定量的研究成果。但有關海-氣傳輸的實驗量測與模式皆僅能建立部份重要環境參數；如風引起之液面阻力速度、紊流擴散參數與液面粗糙度等和傳輸速度的相關性，並無法透視邊界層內紊流結構或說明控制海氣-界面間之動量、質量與能量傳輸的物理機制。

隨著近期遙測技術的發展與普及，液面紅外線影像的實驗與分析技術被應用於可視化流場以提供控制海-氣交換機制的定量資訊 (Jessup *et al.*, 1997、Jahne and Haussecker, 1998、Veron and Melville, 2001、Zappa *et al.*, 2001、Asher *et al.*, 2004、Garbe *et al.*, 2004 與 Schimpf *et al.*, 2004)。以紅外線影像量測流場的實驗方法之兩大優點為：其能同時取得所有傳輸過程與接近液面紊流間之定量關係，以及所有傳輸速度的量測對於時間與空間皆可提供足夠的解析度而可對外環境參數於時間與空間之變異性進行比對。Schimpf *et al.* (2004) 即指出液面溫度擾動分布與溫度次層的溫差以及紊流邊界層中之表面更新結構有直接的關係，而其結論亦可由概念式理論之推論值得到應證。

無論是應用液面紅外線影像實驗技術或是概念式理論模式，海洋表面上的流場結構特徵為液面運動與紊流邊界層間相互作用的重要指標。而以偵測海面流場結構特徵來推斷其下流場之動力過程的研究方法，其可信度與準確性必須仰賴對於自由液面運動與紊流邊界層流場間相互作用的物理特性以及相關的定量數據等具備相當深入且精確的知識背景。然而，流場內複雜的非線性作用與傳輸過程之物理機制尚有許多無法由量測數據得以解釋。欲解析流場內的細部過程，數值模擬即是最佳的研究工具，其可提供流場演化過程之完整數據並可詳盡地檢視其動力特性。

1.2 三維自由液面紊流邊界層數值模式的發展回顧

早期相關於自由液面紊流邊界層的數值模擬主要包括：探討初始均質等向性紊流與自由液面相互作用；Perot and Moin (1995) 與 Walker *et al.* (1996)、由底部無滑移邊界演生之紊流與自由液面相互作用之明渠紊流模式；Leighton *et al.* (1991)、Lam and Banerjee (1992)、Handler *et al.* (1993)、Komori *et al.* (1993)、Borue *et al.* (1995) 與 Pan and Banerjee (1995)，以及考慮平均剪力流中紊流與自由液面相互作用；Tsai (1998)、Shen *et al.* (1999) 與 Tsai *et al.* (2005)等。以上數值模擬；包括 Leighton *et al.* (1991)、Lam and

Banerjee (1992)、Handler *et al.* (1993)、Perot and Moin (1995)、Pan and Banerjee (1995) 與 Walker *et al.* (1996)皆理想化自由液面邊界，將其視為一自由滑移的水平邊界。而 Borue *et al.* (1995)、Tsai (1998)、Shen *et al.* (1999) 以及 Tsai *et al.* (2005) 等則線性化自由液面條件，將自由液面邊界條件滿足於平均水面上而非真實的運動液面。Sullivan *et al.* (2004) 亦視平均液面高度為流場邊界，將自由液面運動參數化為一流場邊界上的外力。由於對自由液面運動的簡化，使得模擬結果只能反應自由液面的存在對於紊流運動的影響，而關於自由液面運動對紊流場的作用以及紊流對於液面邊界變動的貢獻等非線性物理過程皆無法描述。然而建立能真實地呈現自由液面瞬時運動的數值模式之困難處在於：模擬的流場區間為不規則幾何區域；其將增加計算過程中繁複的代數運算，以及流場區間之時變性；此則需要付出大量的計算成本，並須考慮模式滿足不可壓縮流條件的穩定性。

隨著計算能力的進步，欲解析液面波動對於紊流結構的影響之數值模式持續發展：Maass and Schumann (1994)、De Angelis *et al.* (1997)、Cherukat *et al.* (1998) 與 Calhoun and Street (2001)模擬無滑移靜止波形固體邊界與自由滑移水平固體邊界間之紊流場，以了解邊界形變對於紊流場的影響。而 Sullivan *et al.* (2000) 與 Shen *et al.* (2003) 進一步考慮等速移動的正旋函數波形固體邊界以加入運動邊界對流場的影響機制。這些波形邊界流場模擬對於計算過程中區域轉換運算技術已相當成熟，模擬結果亦指出於接近邊界處的局部流場特性與水平邊界並不相同，但對於紊流場貢獻於液面邊界變動之物理過程仍無法描述。Komori *et al.* (1994) 首次求解非穩態自由液面運動邊界的模擬，但只限於微小的液面變動且其結果與線性化自由液面條件之模擬並無太大不同。Hodges and Street (1999) 為近期成功求解完全非線性自由液面邊界之數值模擬，但受限於龐大計算量，此模式僅能使用網格數 $32 \times 32 \times 64$ ，並不足以解析紊流邊界層。Fulgosi *et al.* (2003) 可由自由液面運動方程式追蹤液面變化，但其模式之液面最大波形斜率 ak 受限於 $ak \leq 0.01$ 。

在求解 Navier-Stokes 方程式之紊流模式中，解析自由液面運動的方法

有兩種：固定網格（fixed grid）與移動網格（moving grid）。於固定網格模式中，控制方程離散於物理區間中之固定網格點，並於網格中描述自由液面邊界。於移動網格模式中，物理區間的邊界跟隨著自由液面運動，因此必須根據每個離散時間點的液面高度變化更新對應邊界之物理區間計算網格。固定網格模式有利於兩相流之自由液面；如氣泡或水滴等，或是可能產生巨大形變或複雜的幾何形狀之自由液面；如波浪破碎等。其主要用以捕捉自由液面高度變化的方法有：（1）marker-and-cell 方法；追蹤流場內標記之質點位置（Harlow and Welch, 1965；Raad and Bidoae, 2005 等）。（2）the level-set 方法；決定網格內自由液面以下的距離（Osher and Sethian, 1988；Sussman, 1994；Sussman *et al.*, 2006 等）。（3）volume of fluid 方法；以流體體積守恆決定網格點內流場體積的比例（Hirt and Nichols, 1981；Rhee *et al.*, 2005 等）。上述固定網格模式所解析之自由液面，由於其並無滿足質量守恆與動量守恆，且不具流體運動或動力特性，因此無法應用於探討自由液面邊界層或是紊流場與自由液面交互作用之物理過程。而移動網格模式，由於其在每個離散時間點都需重新製作網格，因此需要耗費較多的計算成本，但自由液面變化完全決定於其運動與動力邊界條件，因此較能合理地解析其邊界層流場。Komori *et al.* (1994)、Sullivan *et al.* (2000)、Shen *et al.* (2003)、Hodges and Street (1999) 與 Fulgosi *et al.* (2003) 等探討自由液面紊流邊界層的數值模擬皆使用移動網格模式描述自由液面運動。

在移動網格模式之計算網格配置方法有兩大類；分別是使用 restricted curvilinear coordinate grid 系統（簡稱為 RCCG）以及 generalized curvilinear coordinate grid 系統（簡稱為 GCCG）。此兩種網格系統皆可將不規則的物理區間轉換至規則且各網格線間相互線性正交的計算區間中。RCCG 系統主要是將物理區間之網格點在計算區間垂直方向上重新分佈，它的優點是格點的產生較容易，轉換後的形式也較簡單，然因自由液面上之格點僅限於垂直之移動，因此在大波幅之自由液面運動時，格點的扭曲亦變大。如 Dommermuth (1993)、De Angelis *et al.* (1997)、Sullivan *et al.* (2000)、Lin and

Li (2002)、Shen *et al.* (2003) 與 Fulgosi *et al.* (2003) 皆使用 RCG 來處理變動的邊界。GCCG 系統中物理區間之網格點則是皆正交於邊界，所以格點的扭曲較小，但格點的生成與轉換後的形式皆較複雜。如 Komori *et al.* (1993) 與 Hodges and Street (1999) 使用 GCCG 來處理變動的邊界。

為滿足不可壓縮流條件，需求解在計算區間中經座標轉換的壓力 Poisson 方程式，此方程式為不可分離之橢圓形式偏微分方程式，其求解方法包括：直接求解全係數矩陣方程式（如 Komori *et al.*，1993、Lin and Li，2002）、使用疊代法（如 Dommermuth，1993、Sullivan *et al.*，2000），或應用 multi-grid 法（如 Hodges and Street，1999）等。但在實際進行數值模擬時，以上方法在計算時間與適用性都有某些限制。如若使用直接求解全矩陣的方式，則空間離散格點數將受限制；若使用疊代法，則只適用於微小變形的自由液面邊界。為了以疊代法有效求解大波幅自由液面運動的壓力 Poisson 方程式，Zhang (1996) 以改良牛頓疊代法（modified Newton's iteration method）求解轉換壓力 Poisson 方程式。其不僅能加速原直接疊代法的收斂速度，亦提高了可求解之邊界形變的最大波幅。但此改良牛頓疊代法極易因疊代條件而導致疊代無法收斂，對此本模式將利用交替使用割線疊代法與直接疊代法，以確定求解過程之收斂並能達到有效的加速效果。

1.3 模式發展與應用

本論文建立一能完整描述自由液面非線性運動之三維紊流模式，改進 Tsai (1998) 非靜水壓-不可壓縮流場模式中所運用之數值方法，將流場運動之控制方程與非線性邊界條件滿足於一伴隨著自由液面運動的非穩態流場區間。模式所解析的流場區間包含垂直方向之完全非線性自由液面邊界與底部自由滑移邊界，以及水平方向之週期邊界。在數值計算的過程， ζ -座標轉換（或稱 σ -座標轉換；Lin and Li，2002）應用於將非穩態不規則流場物理區間中之流場控制方程與邊界條件轉換至穩態之規則計算區間中。在經過轉換的計算區間中，利用改良割線疊代法求解不可分離的流場壓力

Poisson 方程式，其精確的壓力值將使流場得以滿足不可壓縮流條件。Runge-Kutta 時間積分與自由液面非線性運動邊界條件將應用於追蹤非穩態的自由液面變動。模式中水平方向導數以擬頻譜法近似離散而垂直方向導數以二階有限差分法近似離散。垂直方向之非均勻網格分布提升接近液面處的網格密度以增加紊流邊界層空間解析度。本模式的目的為解析自由液面運動以及其與紊流邊界層間之交互作用，因此，本模式必須解析空間中不同尺度的物理過程；包括液面重力波、表面張力波、黏滯邊界層流場以及紊流結構。此結合擬頻譜法於週期區間之水平方向導數以及非均勻網格分布之有限差分法於垂直方向導數的數值近似法具有最佳之空間解析能力，且應用於離散三維的壓力 Poisson 方程式可將其轉換為頻譜空間中的一維全微分方程以提升模式的計算能力。此求解紊流邊界層流場的數值離散方法廣範地使用於明渠紊流場 (Moin and Kim, 1982) 與大氣紊流邊界層 (Moeng, 1984) 等。

非線性自由液面模式首先將應用於模擬一海面上常見之無包覆空氣微小破碎波 (micro-breaking) 流場。在此二維模擬中完整地描述寄生表面張力波之波形演化與流場結構特性，對於流場中強烈渦旋的生成機制與傳輸亦有詳盡地探討。模擬結果證實寄生表面張力波的生成將引起流場中強烈的能量黏滯消散，同時建立流場平均表面粗糙度與能量消散的線性關係。對於三維自由液面運動的模擬；包括短峰型重力波 (short-crested wave) 與新月型重力波 (crescent wave)，其液面波形特徵的演化將驗證本模式解析波浪非線性交互作用過程的能力。而在風波與自由液面紊流邊界層的三維數值模擬中，解析在風應力作用下液面的非線性運動以及邊界層紊流場結構。模擬過程中，發展於波前相之寄生表面張力波列與波背相之沿流向條痕結構與 Ebuchi *et al.* (1987)、Caulliez and Collard (1999) 以及 Veron and Melville (2001) 等風波實驗結果相符，而本論文對於此流場表面特徵的演化與生成機制以及其內部流場結構皆有更詳盡地分析。

第二章 模式之數學理論

本模式模擬一包含非線性自由液面運動的不可壓縮黏性牛頓流之非靜水壓-非穩態流場，其流場運動之控制方程式為質量守恆與動量守恆方程式，邊界條件為自由液面運動條件與應力平衡條件、底部自由滑動條件以及水平方向之週期條件。其中作用於自由液面上的應力包括壓力、黏滯應力、表面張力以及由風場引起之正向應力與剪應力。非線性之自由液面運動邊界條件與動力邊界條件皆真實地滿足於隨著「時間」與「空間」變動之液面邊界上。由於自由液面的運動將使流場為一不規則形狀的區域空間，本模式將應用空間座標轉換，將流場之控制方程式與邊界條件由包含自由液面變動的不規則物理區間轉換至一立方體形的規則計算區間，並在計算區間中進行流場速度與壓力場之求解。

2.1 控制方程式與邊界條件

考慮一三維、非穩態之不可壓縮牛頓流體之流場，其底部為自由滑移邊界，頂部為可運動之自由液面，側邊為週期邊界。在卡式座標系統 $\{\bar{x}\} = (x, y, z)$ 中， x 與 y 表示水平方向分量， z 表示向上為正之垂直方向分量，自由液面邊界表示為 $z = \eta(x, y, t)$ ；其平均水面位於 $z = 0$ ，底部邊界為 $z = -h$ 。流場中之主要變數為速度場 $\{\bar{u}\} = \{u, v, w\}$ ； $u(x, y, z)$ 與 $v(x, y, z)$ 為水平速度分量， $w(x, y, z)$ 為垂直速度分量，以及壓力場 $p(x, y, z)$ 。流場之特徵長度 L 與特徵速度 U 使用於無因次化控制方程式與邊界條件。無因次流場參數包括：Reynolds 數； Re ，定義為慣性力與黏滯力之比 $Re = UL/\nu$ ，Froude 數； Fr ，定義為慣性力與重力之比 $Fr = U/(gL)^{1/2}$ ，與 Weber 數； We ，定義為慣性力與表面張力之比 $We = \rho U^2 L / \sigma$ 。其中 ν 為運動黏滯係數， g 為重力加速度， ρ 為流體密度， σ 為表面張力係數。

2.1.1 流場控制方程式

根據不可壓縮流之質量守恆，流場滿足無因次連續方程式如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

流場之無因次動量方程式為 Navier-Stokes 方程式，以保守形式表示如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (2.4)$$

其中 ∇^2 為 Laplacian 運算元： $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ， p 為動力壓力： $p = P + z/Fr^2$ ，其中 P 為總壓力， z/Fr^2 為靜水壓力。

2.1.2 自由液面的運動邊界條件

流場的頂部邊界為一隨時間變動的自由液面 $\eta(x, y, t)$ ，空間中描述此液面為：

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (2.5)$$

而自由液面之法線方向單位向量為：

$$\{\hat{n}\} \equiv \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{-\eta_x}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \hat{i} + \frac{-\eta_y}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \hat{j} + \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \hat{k} \quad (2.6)$$

自由液面之切面由兩個切線方向單位向量 $\{\hat{t}_1\}$ 與 $\{\hat{t}_2\}$ 組成，此兩向量之必要條件為與自由液面之法線方向正交，如下所示：

$$\{\hat{t}_1\} \cdot \{\hat{n}\} = 0 \quad (2.7)$$

$$\{\hat{t}_2\} \cdot \{\hat{n}\} = 0 \quad (2.8)$$

此兩切線向量並非唯一，因此我們定義 $\{\hat{t}_1\}$ 為與 $\{\hat{n}\}$ 正交並投影於 x - z 平面上之自由液面切線單位向量，其表示為：

$$\{\hat{t}_1\} \equiv \frac{1}{(\eta_x^2 + 1)^{1/2}} \hat{i} + 0 \hat{j} + \frac{\eta_x}{(\eta_x^2 + 1)^{1/2}} \hat{k} \quad (2.9)$$

而 $\{\hat{t}_2\}$ 為與 $\{\hat{n}\}$ 正交並投影於 y - z 平面上之自由液面切線單位向量，其表示為：

$$\{\hat{t}_2\} \equiv 0 \hat{i} + \frac{1}{(\eta_y^2 + 1)^{1/2}} \hat{j} + \frac{\eta_y}{(\eta_y^2 + 1)^{1/2}} \hat{k} \quad (2.10)$$

空間中自由液面隨時間產生形變但其始終保持為一個面，因此液面函數對於時間的全微分必定為零：

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = 0 \quad , \quad \text{或表示為} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (2.11)$$

將自由液面表示式(2.5)式代入上式，並運用(2.6)式即可得：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \{\bar{u}\} \cdot \{\hat{n}\} \times \|\nabla F\| \quad (2.12)$$

其物理意義為自由液面位置隨時間的變化率等於流場速度在自由液面法線方向上之速度分量。將式(2.12)展開即為自由液面運動邊界條件：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0 \quad (2.13)$$

2.1.3 作用於自由液面上的表面張力

當兩不互溶之液體接觸時會產生一密度不連續之交界面；例如空氣與水之交界面，此兩種流體間之分子鍵結特性將使交界面處產生一張力作用；亦即於界面間產生一壓力差，而張力將驅使界面形變為一曲面；如雨滴或是水中的氣泡，此現象稱之為表面張力作用。此張力定義為表面張力係數 σ ；為單位長度所受的力，單位為 N/cm 或是 N/m，其量值決定於交界面間之液體種類與溫度。在 20°C 下，水與空氣界面之表面張力 $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$ 。於自由液面流場中，當液面產生曲度時，流場界面出現由表

面張力引起之壓力差，此正向壓力差與表面張力係數以及液面曲率 κ 關係如下：

$$\Delta p = \sigma \kappa , \quad (2.14)$$

其中，自由液面之曲率 κ 為：

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \nabla \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-\eta_x}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-\eta_y}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}} \right] \\ &= -\eta_{xx}(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{-3/2} - \eta_{yy}(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{-3/2} \\ &\quad + \eta_x \cdot \frac{1}{2}(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{-3/2} \cdot (2\eta_x \eta_{xx} + 2\eta_y \eta_{xy}) \\ &\quad + \eta_y \cdot \frac{1}{2}(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{-3/2} \cdot (2\eta_x \eta_{xy} + 2\eta_y \eta_{yy}) \\ &= \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{3/2}} \left(-\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) - \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) + 2\eta_x \eta_y \eta_{xy} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.1.4 作用於自由液面上的風應力

風作用於流場之應力張量 $[\tau_w]$ 於自由液面上之應力分量，可表示為向量型式 $\{\vec{\tau}^s\}$ 如下所示：

$$\{\vec{\tau}^s\}^T = [\tau_w] \cdot \{\hat{n}\}^T , \quad (2.16)$$

其 $\{\hat{n}\}$ 為應力作用面（亦即自由液面）之法線方向。因此，作用於自由液面上之風應力又可分解為作用於 \hat{n} 方向之正向應力分量 τ_n^s ，以及分別作用於切線方向 \hat{t}_1 與 \hat{t}_2 之剪應力分量 $\tau_{t_1}^s$ 與 $\tau_{t_2}^s$ ，表示如下：

$$\{\vec{\tau}^s\} = \tau_n^s \hat{n} + \tau_{t_1}^s \hat{t}_1 + \tau_{t_2}^s \hat{t}_2 \quad (2.17)$$

其各分量分別為：

$$\{\hat{n}\} [\tau_w] \{\hat{n}\}^T = \tau_n^s , \quad (2.18)$$

$$\{\hat{t}_1\}[\tau_w]\{\hat{n}\}^T = \tau_n^s + \tau_{t_2}^s \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2, \quad (2.19)$$

$$\{\hat{t}_2\}[\tau_w]\{\hat{n}\}^T = \tau_{t_1}^s \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2 + \tau_{t_2}^s. \quad (2.20)$$

2.1.5 自由液面上的應力平衡

自由液面的動力邊界條件即為應力平衡條件。而自由液面運動過程中所受的應力包括：流體之總壓力 P 、流體黏滯應力、表面張力以及風所引起之應力。流場運動過程中，流體所受之應力張量 $[T]$ 為：

$$[T] = \begin{bmatrix} -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

其中 μ 為流體動力黏滯係數。而作用於自由液面上之應力在分別於沿著自由液面法線方向 $\{\hat{n}\}$ 與切線方向 $\{\hat{t}_1\}$ 和 $\{\hat{t}_2\}$ 之分量須與表面張力以及風應力達到平衡，如下所示：

$$\{\hat{n}\}[T]\{\hat{n}\}^T = -\sigma\kappa + \tau_n^s, \quad (2.22)$$

$$\{\hat{t}_1\}[T]\{\hat{n}\}^T = \tau_{t_1}^s + \tau_{t_2}^s \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2, \quad (2.23)$$

$$\{\hat{t}_2\}[T]\{\hat{n}\}^T = \tau_{t_1}^s \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2 + \tau_{t_2}^s. \quad (2.24)$$

將式(2.22)至(2.24)展開，並無因次化即可得自由液面動力邊界條件：

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{Fr^2} - p + \frac{2}{Re} \frac{1}{(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)} \left[\eta_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_x \eta_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \eta_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} - \eta_x \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \eta_y \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ & = \frac{1}{We} \left(\frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_x \eta_y \eta_{xy}}{(\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{3/2}} \right) + \tau_n^s, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
& 2\eta_x \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \eta_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (1 - \eta_x^2) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \eta_x \eta_y \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& = (\eta_x^2 + 1)^{1/2} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2} \cdot Re \cdot \left(\tau_{t_1}^s + \frac{\eta_x \eta_y}{(1 + \eta_x^2)^{1/2} + (1 + \eta_y^2)^{1/2}} \tau_{t_2}^s \right), \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\eta_y \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \eta_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (1 - \eta_y^2) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta_x \eta_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& = (\eta_y^2 + 1)^{1/2} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2} \cdot Re \cdot \left(\frac{\eta_x \eta_y}{(1 + \eta_x^2)^{1/2} + (1 + \eta_y^2)^{1/2}} \tau_{t_1}^s + \tau_{t_2}^s \right). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

2.1.6 流場底部自由滑移邊界條件

流場底部之自由滑移條件如下：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{2.29}$$

$$w = 0, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{2.31}$$

2.2 座標轉換

由於我們所探討的流場是一個包含自由液面運動的流場，其物理區間並不是一個規則幾何形狀區間，因此，我們使用座標轉換將原本包含自由液面邊界的不規則「物理區間」轉換至一規則形狀的「計算區間」。

2.2.1 座標轉換關係式

此座標轉換定義物理區間 (x, y, z, t) 與計算區間 (ξ, ψ, ζ, τ) 之格點位置關係，如圖 2.1 所示：

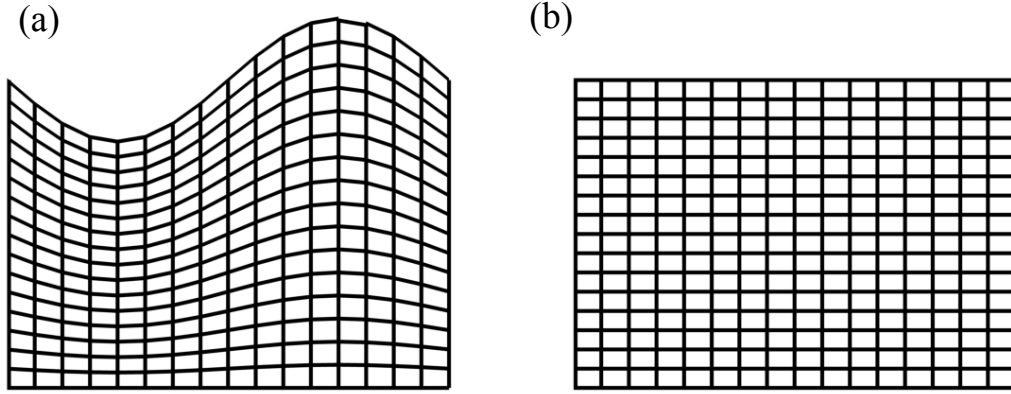


圖 2.1：物理區間(a)經座標轉換至計算區間(b)之二維示意圖。

其關係式為：

$$\tau = t \quad , \quad (2.32)$$

$$\xi = x \quad , \quad (2.33)$$

$$\psi = y \quad , \quad (2.34)$$

$$\zeta = \frac{z+h}{\eta(x,y,t)+h} \quad . \quad (2.35)$$

由式(2.35)可知，此座標轉換與時間演化相依，而物理區間在垂直方向上之邊界； $z = \eta(x,y,t)$ 與 $z = -h$ ，即對應至計算區間之 $\zeta = 1$ 與 $\zeta = 0$ 。在物理區間中所有導數運算皆將運用連鎖法則轉換至計算區間，其一次導數之轉換分別如下所示：

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tau_t \frac{\partial}{\partial \tau} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\eta_t \zeta}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad , \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta_x \zeta}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\eta_y \zeta}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad , \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad . \quad (2.39)$$

2.2.2 計算區間之流場控制方程式與邊界條件

依據式(2.37)至(2.39)之轉換法則，物理區間之無因次連續方程式(2.1)經座標轉換後於計算區間中之形式為：

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.40)$$

而 Navier-Stokes 方程式為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial \xi} (uu) - \frac{\partial}{\partial \psi} (uv) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (uw) \\ + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uu)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial \xi} (uv) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vv) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (vw) \\ + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vv)}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial \xi} (uw) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vw) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (ww) \\ + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uw)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vw)}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

其轉換後之 Laplacian 運算元為：

$$\begin{aligned} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{[1 + (\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2)\zeta^2]}{(\eta + h)^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{2\eta_\xi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \\ - \frac{2\eta_\psi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \zeta} + [2(\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2) - (\eta + h)(\eta_{\xi\xi} + \eta_{\psi\psi})] \frac{\zeta}{(\eta + h)^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

自由液面運動邊界條件式(2.13)經過座標轉換後為：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = w - u\eta_\xi - v\eta_\psi \quad (2.45)$$

自由液面動力邊界條件式(2.25)至式(2.27)經過座標轉換後為：

$$p = \frac{\eta}{Fr^2} + \frac{2}{Re(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)} \left[-(1+\eta_\psi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1+\eta_\xi^2) \frac{\partial v}{\partial \psi} + \eta_\xi \eta_\psi \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \eta_\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta_\psi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] - \frac{1}{We} \left[\frac{\eta_{\xi\xi}(1+\eta_\psi^2) + \eta_{\psi\psi}(1+\eta_\xi^2) - 2\eta_\xi \eta_\psi \eta_{\xi\psi}}{(\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2 + 1)^{3/2}} \right] - \tau_n^s, \quad (2.46)$$

$$-2\eta_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta_\psi \frac{\partial u}{\partial \psi} + \left[\frac{1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2}{\eta+h} \right] \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \eta_\psi \frac{\partial v}{\partial \xi} + (1-\eta_\xi^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta_\xi \eta_\psi \frac{\partial w}{\partial \psi} + \left[\frac{\eta_\xi(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)}{\eta+h} \right] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (2.47)$$

$$= (1+\eta_\xi^2)^{1/2} (1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2} \cdot Re \cdot \left(\tau_{t_1}^s + \frac{\eta_\xi \eta_\psi}{(1+\eta_\xi^2)^{1/2} + (1+\eta_\psi^2)^{1/2}} \tau_{t_2}^s \right),$$

$$- \eta_\xi \frac{\partial u}{\partial \psi} - \eta_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} - 2\eta_\psi \frac{\partial v}{\partial \psi} + \left[\frac{1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2}{\eta+h} \right] \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \eta_\xi \eta_\psi \frac{\partial w}{\partial \xi} + (1-\eta_\psi^2) \frac{\partial w}{\partial \psi} + \left[\frac{\eta_\psi(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)}{\eta+h} \right] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (2.48)$$

$$= (1+\eta_\psi^2)^{1/2} (1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2} \cdot Re \cdot \left(\frac{\eta_\xi \eta_\psi}{(1+\eta_\xi^2)^{1/2} + (1+\eta_\psi^2)^{1/2}} \tau_{t_1}^s + \tau_{t_2}^s \right) \circ$$

自由滑移之底部邊界條件式(2.28)至式(2.31)經過座標轉換後為：

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.50)$$

$$w = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \circ \quad (2.52)$$

2.3 能量守恆

流場能量守恆即為流場中各形態能量；包括動能、勢能、表面張力所做的功以及黏滯能量消散之變化率總合必須等於外力對流場做功所輸入之能量增加率。欲了解流場運動過程中能量分布情形，我們將速度向量與動量方程式進行內積，即可得流場能量方程式，其推導過程詳述於附錄一。所得之無因次能量方程式表示如下：

$$\begin{aligned}
 & \frac{D}{Dt} \iiint_V \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) dV + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr^2} \iint_{S_0} \frac{\partial(\eta^2)}{\partial t} dS_0 + \frac{1}{We} \iint_{S_0} \kappa \frac{\partial \eta}{\partial t} dS_0 \\
 & - \frac{2}{Re} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dV \quad (2.53) \\
 & = \iint_{S_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} \tau_n^s dS_0 + \iint_{S_0} \left[\frac{u + w \eta_x}{(\eta_x^2 + 1)^{1/2}} \cdot \tau_{t_1}^s + \frac{v + w \eta_y}{(\eta_y^2 + 1)^{1/2}} \cdot \tau_{t_2}^s \right] (\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2} dS_0 \quad .
 \end{aligned}$$

其中 S_0 為自由液面投射至 x - y 平面之面積。等號左邊第一項為流體運動引起之動能變化率 ($\equiv dE_k/dt$)，第二項為自由液面變動所產生之勢能變化率 ($\equiv dE_\eta/dt$)，第三項為表面張力所做功引起之能量變化率 ($\equiv dE_\sigma/dt$)，第四項為由流體黏滯性所引起之能量消散變化率 ($\equiv dE_\nu/dt$)。而等號右邊第一項為自由液面上正向風應力做功產生之能量變化率 ($\equiv dE_{\tau_n^s}/dt$)，第二項為風剪應力做功產生之能量變化率 ($\equiv dE_{\tau_t^s}/dt$)。若流場運動中無任何外力作用，則等號右邊即為零。

第三章 模式之數值方法

3.1 網格點配置與空間導數的離散

本模式計算區間的邊界為水平方向（ ξ 與 ψ ）之四個週期邊界面以及垂直方向之自由液面映射邊界： $\zeta=1$ ，與底部邊界： $\zeta=0$ 。模式中同時使用兩種網格系統：正規網格系統與交錯網格系統。其中，正規網格系統在水平方向為均勻分布，而垂直方向則為非均勻分布；亦即網格間為非等間距，其分布型式如下 (Gavrilakis, 1992)：

$$\zeta(k) = \tanh \left[1.8417 \times \frac{k-1}{N_z} \right] / \tanh 1.8417 \quad (3.1)$$

其中 N_z 為垂直方向之總格點數， k 為垂直位置指標。根據式(3.1)，在垂直方向上越接近液面，空間解析度愈高，其網格點位置與間距關係顯示於圖 3.1。垂直方向非等間距的正規網格於物理區間與計算區間之分布，如圖 3.2 所示，而此網格分布將更有利於解析自由液面邊界層。交錯網格系統之水平位置與正規網格重疊，但其垂直方向則位移至相鄰正規網格之間距中心，如圖 3.3 所示。兩種網格系統之使用方式為：水平速度 u 、 v 與壓力 p 置於正規網格點，垂直速度 w 則置於交錯網格點。模式中之連續方程式、壓力 Poisson 方程式，以及水平方向之動量方程式皆滿足於正規網格點上，而垂直方向之動量方程式則滿足於交錯網格點上。

水平方向的導數：如 $\partial u / \partial \xi$ 、 $\partial^2 u / \partial \xi^2$ 、 $\partial v / \partial \psi$ 、 $\partial^2 v / \partial \psi^2$ 與 $\partial(uv) / \partial \xi$ 等，使用擬頻譜法進行離散，模式中將利用大量的快速傅立葉轉換來進行水平導數的運算。有關於擬頻譜法之離散型式傅立葉級數理論將於附錄二中說明。而垂直方向導數計算：如 $\partial u / \partial \zeta$ 與 $\partial^2 u / \partial \zeta^2$ 等，則使用二階中間差分法進行離散。

模式中同時使用兩種網格系統的原因是為了維持連續方程式（同時亦

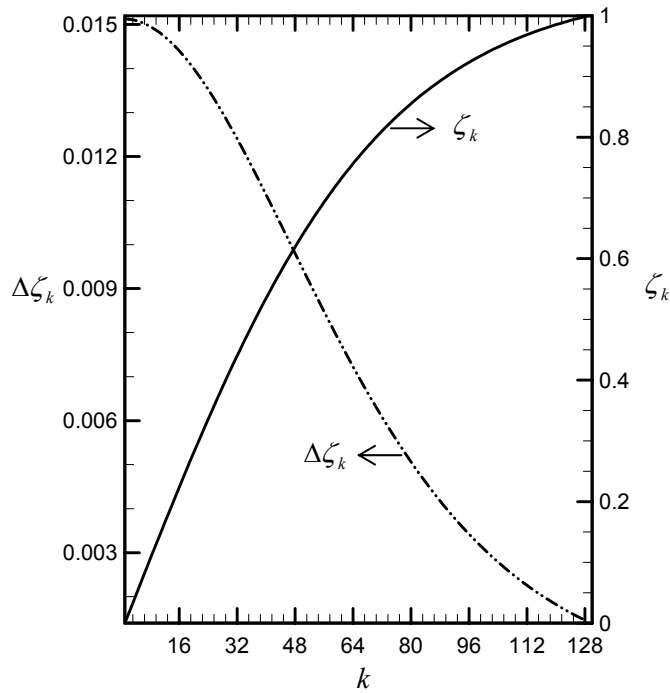


圖 3.1：計算區間之垂直方向非等間距網格分佈情形。 ζ_k 為第 k 個網格點位置(實線)， $\Delta\zeta_k$ 為第 k 個網格間距(虛線)。越接近上邊界 $\zeta=1$ 處之網格分佈越密。以垂直方向網格點數 $N_z=129$ 為例，最大網格距約為 0.015；最小網格距約為 0.0015。

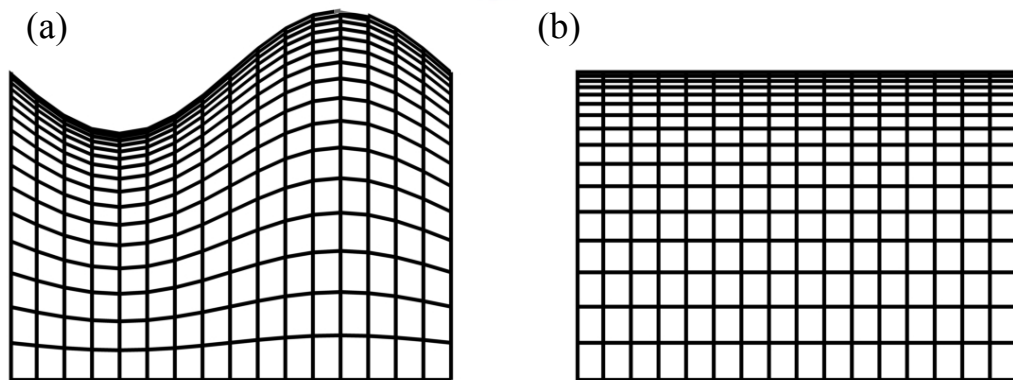


圖 3.2：垂直方向非等間距之正規網格於物理區間(a)與計算區間(b)之二維示意圖。

為壓力方程式) 之空間解析度。由於映射法中連續方程式的滿足需要壓力在垂直方向的二次導數，因此必須將垂直方向之動量方程式取垂直梯度(其詳細步驟將於下節中說明)。

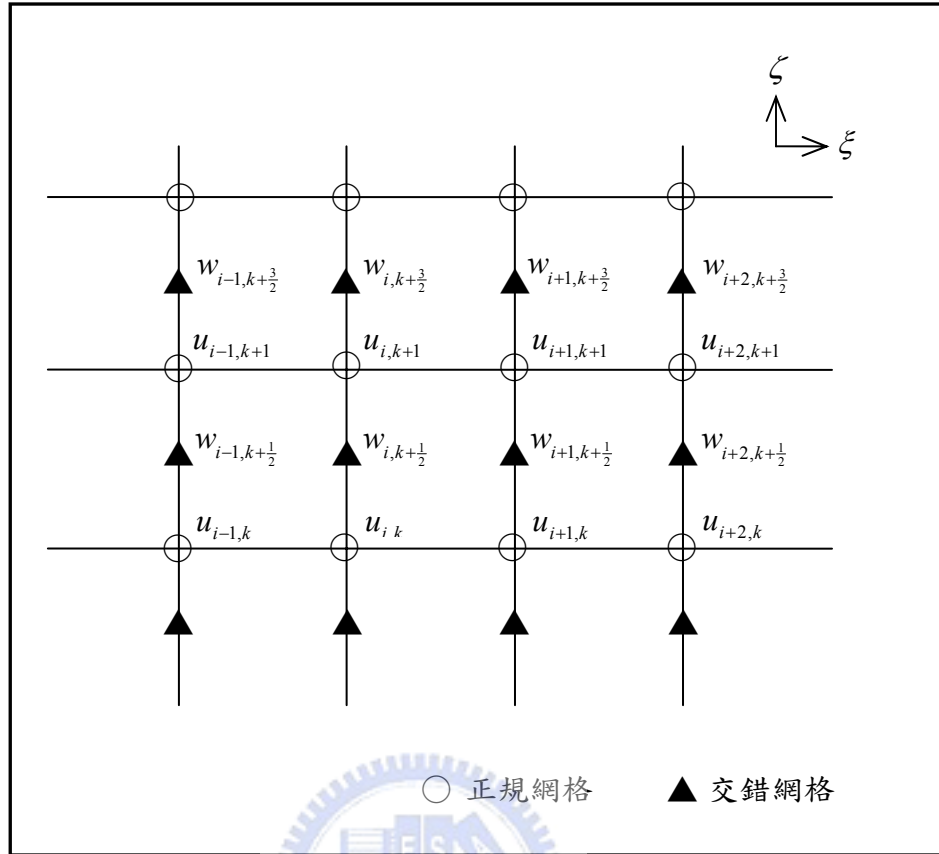


圖 3.3：正規網格系統與交錯網格系統配置圖。模式中水平速度 u, v 與壓力 p 置於正規網格點，垂直速度 w 則置於交錯網格點。而連續方程式、壓力 Poisson 方程式，以及水平方向之動量方程式皆滿足於正規網格點上，垂直方向之動量方程式則滿足於交錯網格點上。

若不使用交錯網格，則壓力方程式之空間解析度就無法維持在一個垂直網格距。若將垂直動量方程式(2.4)經時間積分後簡化表示為：

$$w = A \frac{\partial p}{\partial z} + B, \quad (3.2)$$

其中 A 與 B 為速度場相關係數。而假設在垂直方向為正規網格分布的情形下(參考圖 3.4(a))，在垂直位置指標 k 之網格點上，其連續方程式之垂直速度在垂直方向上的導數 $(\partial w / \partial z)_k$ 使用中間差分法離散過程之示意情形如下：

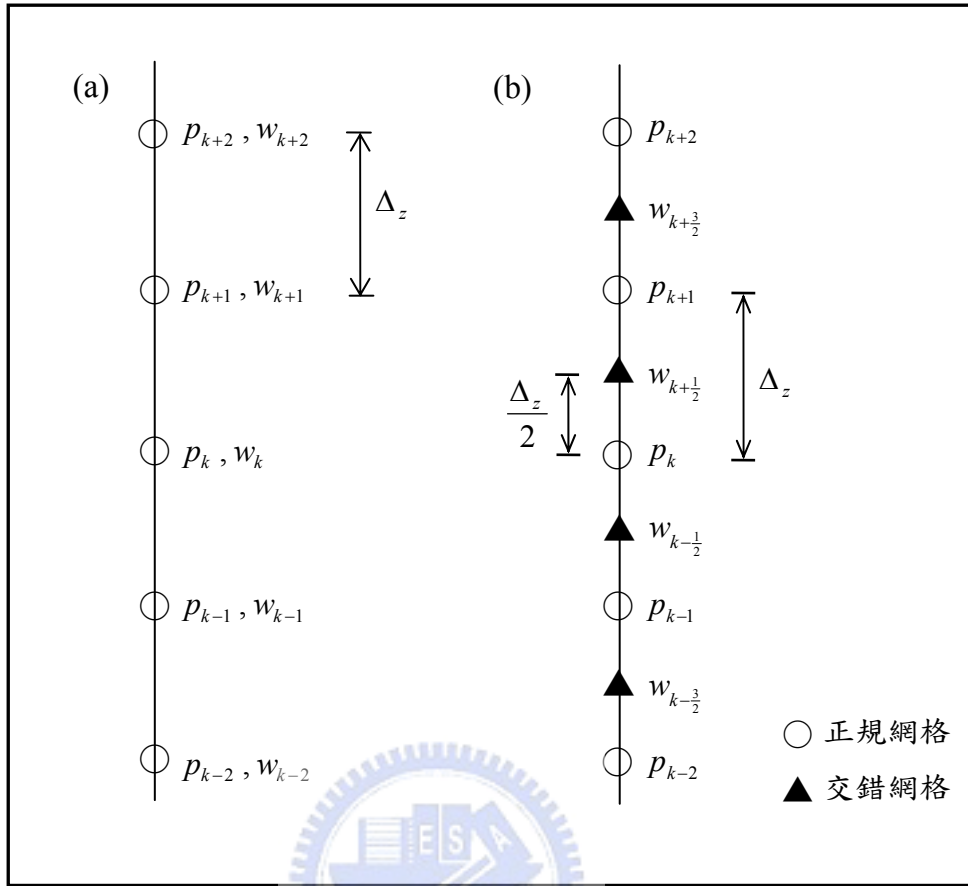


圖 3.4: 於垂直方向使用(a)正規網格系統以及(b)共同正規網格與交錯網格系統之配置示意圖。文中說明使用(b)網格配置法才能使壓力 Poisson 方程式之空間解析度維持為 Δ_z 。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_k &\approx \frac{1}{2\Delta_z} [w_{k+1} - w_{k-1}] \approx \frac{1}{2\Delta_z} \left[A \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{k+1} + B_{k+1} - A \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{k-1} - B_{k+1} \right] \\ &\approx \frac{1}{2\Delta_z} \left[A_{k+1} \frac{p_{k+2} - p_k}{2\Delta_z} - A_{k-1} \frac{p_k - p_{k-2}}{2\Delta_z} \right] + C \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 C 為速度場相關係數。由式(3.3)可知，其離散後所需位於 $k+2$ 、 k 與 $k-2$ 之壓力值已跨過了鄰近於 k 之網格點。因此，連續方程式之垂直方向空間解析度將由 Δ_z 擴大至 $2\Delta_z$ 。而在垂直方向為交錯網格分布的情形下(參考圖 3.4(b))，離散過程之示意情形如下：

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_k &\approx \frac{1}{\Delta_z} \left[w_{k+\frac{1}{2}} - w_{k-\frac{1}{2}} \right] \approx \frac{1}{\Delta_z} \left[A \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{k+\frac{1}{2}} + B_{k+\frac{1}{2}} - A \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{k-\frac{1}{2}} - B_{k-\frac{1}{2}} \right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta_z} \left[A_{k+\frac{1}{2}} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta_z} - A_{k-\frac{1}{2}} \frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta_z} \right] + C
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其離散後所需位於 $k+1$ 、 k 與 $k-1$ 之壓力值，則恰好與二階中間有限差分法之空間解析度相符。因此，垂直速度 w 與壓力 p 必須分別配置於交錯網格系統與正規網格系統才可維持一致的空間解析度。

3.2 Runge-Kutta 時間積分與壓力 Poisson 方程式

本節中我們將利用二階 Runge-Kutta 對 Navier-Stokes 方程式(2.41)至(2.43)以及自由液面運動方程式(2.45)進行時間積分，並運用連續方程式之映射法 (Projection) 得到壓力 Poisson 方程式。為達到最佳演算法，在此將 Runge-Kutta 積分計算流程分解為兩個步驟，表示如下：

$$\begin{aligned}
u' &= f(\tau, u) \\
u^* &= u^i + \Delta\tau \cdot f(\tau^i, u^i) \\
u^{i+1} &= u^* + \frac{\Delta\tau}{2} [f(\tau^i + \Delta\tau, u^*) - f(\tau^i, u^i)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

上式之 u^i 為時間 τ^i 時之速度， u^{i+1} 為下一個時間離散點 $\tau^i + \Delta\tau$ 時之速度。在積分第一個步驟中，先以 u^i 與 $f(\tau^i, u^i)$ 求得一中繼速度 u^* ，第二個步驟再以 u^* 與 $f(\tau^i + \Delta\tau, u^*)$ 求得 u^{i+1} 。有關於 Runge-Kutta 積分式之演化與其低儲存量的運用將詳細說明於附錄三。

為了便利於說明，我們將 Navier-Stokes 方程式(2.41)至(2.43)表示為：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + FU, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi \zeta}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + FV, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + FW. \quad (3.8)$$

其中 FU 、 FV 與 FW 為速度平流項與黏滯項，其皆為速度 (u, v, w) 以及自由液面高度 η 的函數，如下所示：

$$\begin{aligned} FU = & \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial \xi} (uu) - \frac{\partial}{\partial \psi} (uv) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (uw) \\ & + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uu)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FV = & \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial \xi} (uv) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vv) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (vw) \\ & + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vv)}{\partial \zeta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FW = & \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial \xi} (uw) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vw) - \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (ww) \\ & + \frac{\zeta}{\eta + h} \left[\eta_\tau \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uw)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vw)}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned}$$

而自由液面運動方程式為：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = w - u\eta_\xi - v\eta_\psi. \quad (3.9)$$

在 Runge-Kutta 第一步驟中：

$$u^* = u^i + \Delta \tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FU^i \right], \quad (3.10)$$

$$v^* = v^i + \Delta \tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FV^i \right], \quad (3.11)$$

$$w^* = w^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{1}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FW^i \right], \quad (3.12)$$

$$\eta^* = \eta^i + \Delta\tau \cdot [w^i - u^i \eta_\xi^i - v^i \eta_\psi^i] \circ \quad (3.13)$$

其式(3.13)中之 η^* 可由已知速度場 (u^i, v^i, w^i) 與自由液面高度 η^i 順利求得。但 p^i 尚為未知數，因此欲求速度場 (u^*, v^*, w^*) 必須先求解壓力。而流場壓力可由強制欲求解之速度場滿足連續方程式，即可演化成為壓力方程式，如下所示：

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^*}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial w^*}{\partial \zeta} = 0 \circ \quad (3.14)$$

此即為連續方程式之映射法。將式(3.10)、(3.11)與(3.12)代入上式如下：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[u^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FU^i \right] \right] \\ & - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[u^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FU^i \right] \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[v^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FV^i \right] \right] \\ & - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[v^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FV^i \right] \right] \\ & + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[w^i + \Delta\tau \cdot \left[-\frac{1}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FW^i \right] \right] = 0 \circ \end{aligned} \quad (3.15)$$

將上式進行代數運算並整理其型式可表示為：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 p^i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^i}{\partial \psi^2} + \frac{1}{(\eta^* + h)(\eta^i + h)} \frac{\partial^2 p^i}{\partial \zeta^2} \\
& + \frac{(\eta_\xi^* \eta_\xi^i + \eta_\psi^* \eta_\psi^i) \zeta}{(\eta^* + h)(\eta^i + h)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} \right) \\
& - \zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_\xi^i}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\eta_\psi^i}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} \right) \right] \\
& - \frac{\zeta}{\eta^* + h} \left(\eta_\xi^* \frac{\partial^2 p^i}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta_\psi^* \frac{\partial^2 p^i}{\partial \psi \partial \zeta} \right) = S^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}
S^i = & \frac{D^i}{\Delta \tau} + \frac{\partial(FU^i)}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial(FU^i)}{\partial \zeta} \\
& + \frac{\partial(FV^i)}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial(FV^i)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial(FW^i)}{\partial \zeta} ,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

而

$$D^i = \frac{\partial u^i}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial u^i}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^i}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial v^i}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial w^i}{\partial \zeta} . \tag{3.18}$$

式(3.16)即為壓力 Poisson 方程式，其壓力之邊界條件除了四個水平方向之週期邊界條件外，垂直方向之邊界條件為自由液面上之正向應力平衡；(2.46)式，與自由滑移底部邊界之壓力梯度為零；(2.52)式。此經過座標轉換之 Poisson 方程式(3.16)與其上邊界式(2.46)之 Dirichlet 條件以及下邊界式(2.52)之 Neumann 條件的數值求解過程將於下節中說明。而在求解得 p^i 值之後代回式(3.10)、(3.11)與(3.12)即可得 Runge-Kutta 之中繼速度場 (u^*, v^*, w^*) 。

在 Runge-Kutta 第二步驟中，

$$\begin{aligned}
u^{i+1} &= u^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[\left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FU^* \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FU^i \right] \right] \\
&= u^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FU^* - \overline{FU}^i \right], \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{i+1} &= v^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[\left[-\frac{\partial p^*}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FV^* \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-\frac{\partial p^i}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^i \zeta}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FV^i \right] \right] \\
&= v^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FV^* - \overline{FV}^i \right], \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{i+1} &= w^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[\left[-\frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FW^* \right] - \left[-\frac{1}{\eta^i + h} \frac{\partial p^i}{\partial \zeta} + FW^i \right] \right] \\
&= w^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[-\frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FW^* - \overline{FW}^i \right], \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\eta^{i+1} = \eta^* + \frac{\Delta\tau}{2} \cdot \left[[w^* - u^* \eta_\xi^* - v^* \eta_\psi^*] - [w^i - u^i \eta_\xi^i - v^i \eta_\psi^i] \right]. \tag{3.22}$$

相似於步驟一，式(3.22)中 η^{i+1} 可由已知速度場 (u^i, v^i, w^i) 與 (u^*, v^*, w^*) 以及自由液面高度 η^i 與 η^* 求得。而式 (3.19)、(3.20) 與 (3.21) 中之 FU^* 、 FV^* 、 FW^* 、 \overline{FU}^i 、 \overline{FV}^i 以及 \overline{FW}^i 皆為已知函數值。欲求解速度場 $(u^{i+1}, v^{i+1}, w^{i+1})$ 必須再次運用連續方程式之映射法得到 p^* 的 Poisson 壓力方程式。因此，強制未知速度場滿足連續方程式之條件如下所示：

$$\frac{\partial u^{i+1}}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial u^{i+1}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{i+1}}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial v^{i+1}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial w^{i+1}}{\partial \zeta} = 0. \tag{3.23}$$

將式(3.19)、(3.20)與(3.21)代入上式如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[u^* + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FU^* - \overline{FU}^i \right] \right] \\
& - \frac{\eta_\xi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[u^* + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FU^* - \overline{FU}^i \right] \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[v^* + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FV^* - \overline{FV}^i \right] \right] \\
& - \frac{\eta_\psi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[v^* + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \left[-\frac{\partial p^*}{\partial \psi} + \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FV^* - \overline{FV}^i \right] \right] \\
& + \frac{1}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[w^* + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \left[-\frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + FW^* - \overline{FW}^i \right] \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

將上式進行代數運算並整理其型式可表示為：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 p^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial \psi^2} + \frac{1}{(\eta^{i+1} + h)(\eta^* + h)} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \zeta^2} \\
& + \frac{(\eta_\xi^{i+1} \eta_\xi^* + \eta_\psi^{i+1} \eta_\psi^*) \zeta}{(\eta^{i+1} + h)(\eta^* + h)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} \right) \\
& - \zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_\xi^*}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\eta_\psi^*}{\eta^* + h} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} \right) \right] \\
& - \frac{\zeta}{\eta^{i+1} + h} \left(\eta_\xi^{i+1} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta_\psi^{i+1} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \psi \partial \zeta} \right) = S^*.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中

$$\begin{aligned}
S^* = & \frac{D^*}{2\Delta \tau} + \frac{\partial(FU^* - \overline{FU}^i)}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial(FU^* - \overline{FU}^i)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(FV^* - \overline{FV}^i)}{\partial \psi} \\
& - \frac{\eta_\psi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial(FV^* - \overline{FV}^i)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial(FW^* - \overline{FW}^i)}{\partial \zeta},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

而

$$D^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^*}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^{i+1} \zeta}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^{i+1} + h} \frac{\partial w^*}{\partial \zeta}. \tag{3.27}$$

再一次求解壓力 Poisson 方程式(3.25)並將 p^* 值代回式(3.19)、(3.20)與(3.21)

即可得速度場 $(u^{i+1}, v^{i+1}, w^{i+1})$ ，亦即完成一個時間離散點之積分。

3.3 改良割線疊代法求解 Poisson 方程式

3.3.1 疊代形式之壓力 Poisson 方程式

由上節我們得知流場之壓力方程式為一 Poisson 方程式；表示如下：

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2} + \frac{1}{(\eta^* + h)(\eta + h)} \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} \\
 & + \frac{(\eta_\xi^* \eta_\xi + \eta_\psi^* \eta_\psi) \zeta}{(\eta^* + h)(\eta + h)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \\
 & - \zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_\xi}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\eta_\psi}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right] \\
 & - \frac{\zeta}{\eta^* + h} \left(\eta_\xi^* \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta_\psi^* \frac{\partial^2 p}{\partial \psi \partial \zeta} \right) = S \quad .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{D}{\Delta \tau} + \frac{\partial(FU)}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial(FU)}{\partial \zeta} \\
 & + \frac{\partial(FV)}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial(FV)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial(FW)}{\partial \zeta} ,
 \end{aligned}$$

而

$$D = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\eta_\psi^* \zeta}{\eta^* + h} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta^* + h} \frac{\partial w}{\partial \zeta} .$$

以上三式分別為上節中之式(3.16)、式(3.17)與式(3.18)，為了說明求解過程，我們省略變數的時間離散上標。而 FU 、 FV 與 FW 為速度平流項與黏制項，其皆為速度 (u, v, w) 以及自由液面高度 η 的函數，其分量如下所示：

$$\begin{aligned}
FU &= \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial \xi} (uu) - \frac{\partial}{\partial \psi} (uv) - \frac{1}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (uw) \\
&\quad + \frac{\zeta}{\eta+h} \left[\eta_\tau \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uu)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} \right], \\
FV &= \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial \xi} (uv) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vv) - \frac{1}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (vw) \\
&\quad + \frac{\zeta}{\eta+h} \left[\eta_\tau \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uv)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vv)}{\partial \zeta} \right], \\
FW &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial \xi} (uw) - \frac{\partial}{\partial \psi} (vw) - \frac{1}{\eta+h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (ww) \\
&\quad + \frac{\zeta}{\eta+h} \left[\eta_\tau \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \eta_\xi \frac{\partial (uw)}{\partial \zeta} + \eta_\psi \frac{\partial (vw)}{\partial \zeta} \right].
\end{aligned}$$

Laplacian 運算元為：

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{[1 + (\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2) \zeta^2]}{(\eta+h)^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{2\eta_\xi \zeta}{\eta+h} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \\
&\quad - \frac{2\eta_\psi \zeta}{\eta+h} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \zeta} + [2(\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2) - (\eta+h)(\eta_{\xi\xi} + \eta_{\psi\psi})] \frac{\zeta}{(\eta+h)^2} \frac{\partial}{\partial \zeta}.
\end{aligned}$$

此壓力方程式的邊界條件分別為水平方向之週期條件、垂直方向上自由液面正向應力平衡之 Dirichlet 條件以及自由滑移邊界壓力梯度為零之 Neumann 條件。垂直方向上之邊界條件如下所示：

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\eta}{Fr^2} + \frac{2}{Re(1 + \eta_\xi^2 + \eta_\psi^2)} \left[-(1 + \eta_\psi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1 + \eta_\xi^2) \frac{\partial v}{\partial \psi} + \eta_\xi \eta_\psi \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\quad \left. - \eta_\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta_\psi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] - \frac{1}{We} \left[\frac{\eta_{\xi\xi}(1 + \eta_\psi^2) + \eta_{\psi\psi}(1 + \eta_\xi^2) - 2\eta_\xi \eta_\psi \eta_{\xi\psi}}{(\eta_\xi^2 + \eta_\psi^2 + 1)^{3/2}} \right] - \tau_n^s \quad \text{於 } \zeta = 1,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{於 } \zeta = 0.$$

將式(3.16)進行水平方向之擬頻譜法離散後，其於每一個模態之壓力 Poisson

方程式將演化為垂直方向 ζ 的二階全微分方程式。此二階全微分方程為一不可分離之微分方程式，若運用垂直方向有限差分法將其離散，則必須求解一稀疏矩陣（sparse matrix）。為了提升計算效率，我們將避免直接求解稀疏矩陣而改以疊代法求解，因此將式(3.16)之形式調整如下：

$$Lp = \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} = S + \varepsilon(p, \eta, \eta^*)。 \quad (3.28)$$

其中運算子 L 定義為：

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}。 \quad (3.29)$$

式(3.28)中之 S 如式(3.16)所示；其為速度 (u, v, w) 以及液面高度 η 與 η^* 的函數，可將其視為已知值之來源項，而 $\varepsilon(p, \eta, \eta^*)$ 為式(3.16)中等號左邊係數為非常數之壓力函數項，表示如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon(p, \eta, \eta^*) = & -\frac{(\eta_\xi^* \eta_\xi + \eta_\psi^* \eta_\psi) \zeta}{(\eta^* + h)(\eta + h)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{\partial \zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \\ & + \zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_\xi}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\eta_\psi}{\eta + h} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right] \\ & + \frac{\zeta}{\eta^* + h} \left(\eta_\xi^* \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta_\psi^* \frac{\partial^2 p}{\partial \psi \partial \zeta} \right) \\ & - \left[\frac{1}{(\eta^* + h)(\eta + h)} - \frac{1}{h^2} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2}。 \end{aligned} \quad (3.30)$$

在疊代求解過程中，將式(3.28)經以水平方向之擬頻譜法與垂直方向之中間差分法離散後，即可得每個模態的三帶寬對角矩陣（tri-diagonal matrix）之聯立方程式。

3.3.2 直接疊代法與割線疊代法

將(3.28)表示為求解形式如下：

$$f(p) = p - L^{-1}[\varepsilon(p, \eta, \eta^*) + S(\bar{v}, \eta, \eta^*)] = 0 \quad (3.31)$$

若使用直接疊代法，並以 $p^{(m)}$ 表示第 m 次疊代所得到之壓力值，其疊代式即可表示為：

$$p^{(m)} = L^{-1}[\varepsilon(p^{(m-1)}, \eta, \eta^*) + S(\bar{v}, \eta, \eta^*)] \quad (3.32)$$

而參考 Zhang (1996)，使用割線法 (Secant methods) 進行疊代，則其疊代式即可表示為：

$$\begin{aligned} p^{(m)} &= p_1 - \frac{f(p_1)}{\frac{f(p_1) - f(p^{(m-1)})}{p_1 - p^{(m-1)}}} \\ &= p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\frac{(p_1 - p_2) - (p^{(m-1)} - p_1)}{p_1 - p^{(m-1)}}} \\ &= p_1 - \frac{[p_1 - p_2][p_1 - p^{(m-1)}]}{2p_1 - p_2 - p^{(m-1)}} \\ &= p_2 - \frac{[p_2 - p_1][p_2 - p_1]}{p_2 - 2p_1 + p^{(m-1)}} \quad (3.33) \end{aligned}$$

其中， p_1 與 p_2 分別為連續兩次之直接疊代值，表示如下：

$$p_1 = L^{-1}[\varepsilon(p^{(m-1)}, \eta, \eta^*) + S(\bar{v}, \eta, \eta^*)] \quad (3.34)$$

$$p_2 = L^{-1}[\varepsilon(p_1, \eta, \eta^*) + S(\bar{v}, \eta, \eta^*)] \quad (3.35)$$

如式(3.33)所示，疊代過程以割線逼近方式加速其收斂速度，但運用於計算流場之液面邊界波幅較大時，將非常容易導致發散。因此，本模式利用交替使用直接疊代法與割線疊代法；稱其為改良割線疊代法，以達到最佳之疊代收斂效能。而為求得壓力 Poisson 方程式(3.28)之最佳近似解，疊代收

斂條件設定為式(3.28)之精確度，如下所示：

$$\|Lp^{(m)} - [\varepsilon(p^{(m-1)}, \eta, \eta^*) + S(\bar{v}, \eta, \eta^*)]\|_{\infty} < 10^{-6}。 \quad (3.36)$$

此收斂條件將會直接影響模式中連續方程式的守恆精確度。

3.3.3 疊代法的收斂測試

本節我們將對直接疊代法與改良割線疊代法於發生形變之物理區間中 Poisson 方程式的求解能力進行一收斂測試。於無因次流場物理區間之水平方向範圍為： $-\lambda/2 \leq x < \lambda/2$ ， $-\lambda/2 \leq y < \lambda/2$ ，流場底部為 $z = -h$ ； $h = 1$ ，而自由液面為一二維平面波，表示為：

$$\eta(x, y) = a \cos(k_x x) \cos(k_y y) 。 \quad (3.37)$$

其中 a 為波幅，無因此波長 $\lambda = 1$ ，波數 $k_x = k_y = 2\pi$ 。壓力 Poisson 方程式為：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left[2 - (k_x^2 + k_y^2)(z + h)^2 \right] \cos(k_x x) \sin(k_y y) 。 \quad (3.38)$$

其邊界條件為水平方向之週期邊界，垂直方向於自由液面與流場底部分別為 Dirichlet 條件以及 Neumann 條件；表示如下：

$$p|_{z=\eta} = \cos(k_x x) \sin(k_y y) (\eta + h)^2 ， \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 。 \quad (3.40)$$

計算所使用的網格點數 (N_x, N_y, N_z) 為(32, 32, 33)，疊代之收斂條件為其數值解與壓力實解： $p(x, y, z) = \cos(k_x x) \sin(k_y y) (z + h)^2$ 之相對誤差小於 10^{-8} 。圖 3.5 顯示在不同自由液面波幅下，於求解過程中使用直接疊代法與改良割線疊代法其達成收斂條件所需之疊代次數。於圖中結果可知，自由液面波幅越大，兩種疊代法達到收斂所需之疊代次數亦越多。使用直接疊代法於

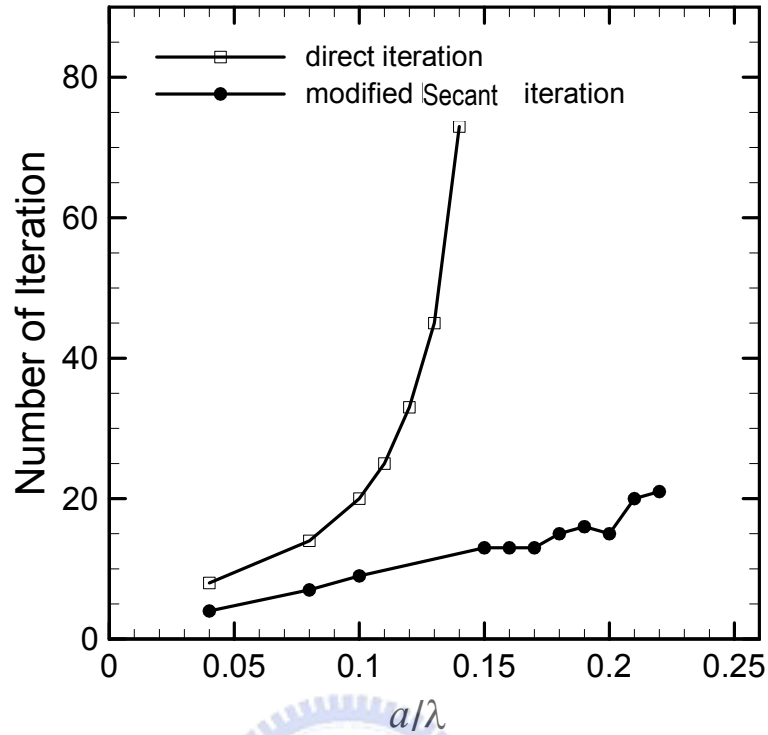


圖 3.5：以疊代法求解 Poisson 壓力方程式的測試結果。其分別表示直接疊代法與改良割線疊代法對於物理空間形變之求解能力。

$a/\lambda \geq 0.13$ 時，疊代收斂效率即急遽減低。在 $a/\lambda > 0.1$ 時，改良割線疊代法求解能力明顯地優於直接疊代法。而在此測試算例中，以改良割線疊代法求解壓力 Poisson 方程式之流場形變的最大容許波幅為 $a/\lambda = 0.22$ 。

3.4 自由液面邊界條件之離散

有關自由液面邊界條件的應用，其運動邊界條件式(3.9)於時間積分離散式(3.13)以及式(3.22)中，將運用於追蹤自由液面隨時間的變動。自由液面動力邊界條件之法線方向應力平衡條件式(2.46)為流場壓力 Poisson 方程式於垂直方向之 Dirichlet 邊界條件。而自由液面切線方向應力平衡將使用於積分自由液面動量方程式中垂直方向一次導數與二次導數之離散值，如 $\partial(uv)/\partial\zeta$ 、 $\partial^2u/\partial\zeta^2$ 與 $\partial^2v/\partial\zeta^2$ 等。

3.4.1 自由液面之垂直速度 ($w_{\zeta=1}$)

在運用自由液面運動邊界條件式(3.13)與(3.22)以追蹤自由液面隨時間的變動時，我們將需要自由液面上之垂直速度 $w_{\zeta=1}$ 。由於垂直方向動量方程式是滿足於交錯網格點上，因而無法由積分動量方程式求得 $w_{\zeta=1}$ ，因此我們將連續方程式沿垂直方向積分以求之，說明如下：

連續方程式沿垂直方向積分如下：

$$\int_{\zeta=0}^{\zeta=1} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta_{\xi} \zeta}{\eta + h} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\eta_{\psi} \zeta}{\eta + h} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta + h} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right] d\zeta = 0, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} w_{\zeta=1} - w_{\zeta=0} + (\eta + h) \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} d\zeta - \eta_{\xi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta \\ + (\eta + h) \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \psi} d\zeta - \eta_{\psi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

應用底部自由滑移條件(2.51)式，並將水平方向之一次導數運算元移至垂直積分運算之外，如下所示：

$$\begin{aligned} w_{\zeta=1} + (\eta + h) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 u d\zeta - \eta_{\xi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta \\ + (\eta + h) \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^1 v d\zeta - \eta_{\psi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

分別將上式之第三與五項分解為：

$$\eta_{\xi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta = \eta_{\xi} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta u) - u \right] d\zeta = \eta_{\xi} u_{\zeta=1} - \eta_{\xi} \int_0^1 u d\zeta, \quad (3.44)$$

$$\eta_{\psi} \int_0^1 \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta = \eta_{\psi} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta v) - v \right] d\zeta = \eta_{\psi} v_{\zeta=1} - \eta_{\psi} \int_0^1 v d\zeta. \quad (3.45)$$

將(3.44)與(2.45)代回式(3.43)可得：

$$w_{\zeta=1} - \eta_{\xi} u_{\zeta=1} - \eta_{\psi} v_{\zeta=1} + (\eta + h) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_0^1 u d\zeta \right] + \eta_{\xi} \int_0^1 u d\zeta + (\eta + h) \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\int_0^1 v d\zeta \right] + \eta_{\psi} \int_0^1 v d\zeta = 0 \quad (3.46)$$

再分別將式(3.46)之第四與五項以及第六與七項合併可得自由液面上之垂直速度 $w_{\zeta=1}$ ，如下所示：

$$w_{\zeta=1} - \eta_{\xi} u_{\zeta=1} - \eta_{\psi} v_{\zeta=1} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\eta + h) \int_0^1 u d\zeta \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(\eta + h) \int_0^1 v d\zeta \right] = 0 \quad , \text{ 或}$$

$$w_{\zeta=1} = \eta_{\xi} u_{\zeta=1} + \eta_{\psi} v_{\zeta=1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\eta + h) \int_0^1 u d\zeta \right] - \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(\eta + h) \int_0^1 v d\zeta \right] \quad (3.47)$$

3.4.2 自由液面速度在垂直方向上之一次與二次導數

將自由液面切線方向應力平衡式(2.47)與式(2.48)再一次表示如下：

$$\left[\frac{1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2}{\eta + h} \right] \frac{\partial u}{\partial \zeta} + [0] \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \left[\frac{\eta_{\xi} (1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2)}{\eta + h} \right] \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$= 2\eta_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_{\psi} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - (1 - \eta_x^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_{\xi} \eta_{\psi} \frac{\partial w}{\partial \psi}$$

$$+ Re (1 + \eta_{\xi}^2)^{1/2} (1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2)^{1/2} \tau_{t_1}^s \quad , \quad (3.48)$$

$$[0] \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \left[\frac{1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2}{\eta + h} \right] \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \left[\frac{\eta_{\psi} (1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2)}{\eta + h} \right] \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$= \eta_{\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + 2\eta_{\psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \eta_{\xi} \eta_{\psi} \frac{\partial w}{\partial \xi} - (1 - \eta_{\psi}^2) \frac{\partial w}{\partial \psi}$$

$$+ Re (1 + \eta_{\psi}^2)^{1/2} (1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\psi}^2)^{1/2} \tau_{t_2}^s \quad . \quad (3.49)$$

再運用自由液面上滿足連續方程式之條件，表示如下：

$$\left[-\frac{\eta_{\xi}}{\eta + h} \right] \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \left[-\frac{\eta_{\psi}}{\eta + h} \right] \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \left[\frac{1}{\eta + h} \right] \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \psi} \quad (3.50)$$

將以上三式(3.48)、(3.49)以及(3.50)以行列式聯立求解 $\partial u/\partial \zeta$ 、 $\partial v/\partial \zeta$ 與 $\partial w/\partial \zeta$ 在自由液面($\zeta=1$)之值，可表示如下：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} = & \frac{\eta+h}{(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^2} \left[\operatorname{Re}(1+\eta_\psi^2)(1+\eta_\xi^2)^{1/2}(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2}\tau_{t_1}^s \right. \\ & - \operatorname{Re}\eta_\xi\eta_\psi(1+\eta_\psi^2)^{1/2}(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2}\tau_{t_2}^s \\ & + \eta_\psi(1-\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \eta_\xi(1+\eta_\xi^2-\eta_\psi^2)\frac{\partial v}{\partial \psi} \\ & \left. + 2\eta_\xi\eta_\psi\frac{\partial w}{\partial \psi} - (1-\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)\frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_\xi(3+\eta_\xi^2+3\eta_\psi^2)\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{\zeta=1}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} = & \frac{\eta+h}{(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^2} \left[-\operatorname{Re}\eta_\xi\eta_\psi(1+\eta_\xi^2)^{1/2}(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2}\tau_{t_1}^s \right. \\ & + \operatorname{Re}\eta_\xi\eta_\psi(1+\eta_\xi^2)(1+\eta_\psi^2)^{1/2}(1+\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)^{1/2}\tau_{t_2}^s \\ & + \eta_\xi(1+\eta_\xi^2-\eta_\psi^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \eta_\psi(1-\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)\frac{\partial u}{\partial \xi} \\ & \left. + 2\eta_\xi\eta_\psi\frac{\partial w}{\partial \xi} - (1+\eta_\xi^2-\eta_\psi^2)\frac{\partial w}{\partial \psi} + \eta_\psi(3+3\eta_\xi^2+\eta_\psi^2)\frac{\partial u}{\partial \psi} \right]_{\zeta=1}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} = \eta_\xi\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} + \eta_\psi\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} - (\eta+h)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \psi}\right)_{\zeta=1}. \quad (3.53)$$

以上三式(3.51)、式(3.52)與式(3.53)除了表示自由液面速度場在垂直方向上之一次導數，亦可應用其一次導數之二階差分離散式決定在自由液面之上的虛擬網格點之速度場。由此虛擬網格點之速度場，自由液面速度場在垂直方向上之二次導數 $\partial^2 u/\partial \zeta^2$ 、 $\partial^2 v/\partial \zeta^2$ 與 $\partial^2 w/\partial \zeta^2$ 也將可以使用二階差分離散式得到近似值。而自由液面切線方向應力平衡條件即應用於自由液面水平方向動量方程式之積分。

3.5 數值方法之驗證

本數值模式的建立是基於求解三維流場的 Navier-Stokes 方程式與連續方程式，並伴隨著非穩態的自由液面運動與動力邊界條件。由於我們欲模擬的物理問題為海洋表面下邊界層流場，其空間上具有在水平方向尺度遠大於垂直方向尺度的特性，因此設定水平方向為週期邊界。而數值方法中，空間之水平方向導數運算以擬頻譜法離散，而垂直方向導數則以二階中間差分法離散。二階 Runge-Kutta 應用於控制方程式與自由液面運動邊界條件之時間積分。自由液面動力邊界條件分別運用於壓力方程式之邊界條件與自由液面水平方向動量方程式中。壓力 Poisson 方程式得以使流場達到質量守恆。本節將以模擬一二維重力波之傳遞驗證數值離散方法的正確性與模式的可用性。此模擬之各項參數說明如下：前進波波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ ； a 為波幅， $k = 2\pi/\lambda$ 為波數。模擬物理區間為水平方向長度 10cm，而平均水深 8cm 之流場。流場之特徵長度定義為 $L \equiv 1/k$ ，特徵速度定義為波形傳遞之相速度 $U \equiv \sqrt{g/k}$ 。流場之無因次參數包括：Froude 數 $Fr = U/\sqrt{gL} = 1$ ，Reynolds 數 $Re = UL/\nu \approx 6286$ 。自由液面初始高度為一三階 Stokes 波波形，而初始流場速度為 Stokes 波之速度場，並忽略表面張力的影響。

模擬過程之平均水面高度，流場之平均速度散度以及最大速度散度分別顯示於圖 3.6(a) 至圖 3.6(c)。圖中顯示水平方向網格數與垂直方向網格數分別為 16×48 、 32×64 以及 128×128 之不同解析度的模擬結果。以解析度為 128×128 為例，當模擬結束時，其平均水面高度已達到數值計算之機器精確度： $k^3 \iint \eta dx dy \approx 10^{-15}$ 。流場之平均速度散度： $(gk)^{-1/2} \|\nabla \cdot \vec{v}\|_{L_2}$ ，在整個計算過程中皆保持在小於 10^{-11} ，而最大速度散度： $(gk)^{-1/2} \|\nabla \cdot \vec{v}\|_{L_\infty}$ ，亦小於 10^{-8} 。其平均水面高度的守恆顯示模式中處理自由液面邊界條件之離散方式符合流場之物理特性。模擬過程中流場之質量守恆是取決於壓力 Poisson 方程式之收斂條件，而本模式皆將疊代之收斂條件設定為 10^{-6} 。因此，流場之速度散度確認質量守恆，亦驗證了求解壓力 Poisson 方程式之正確性。

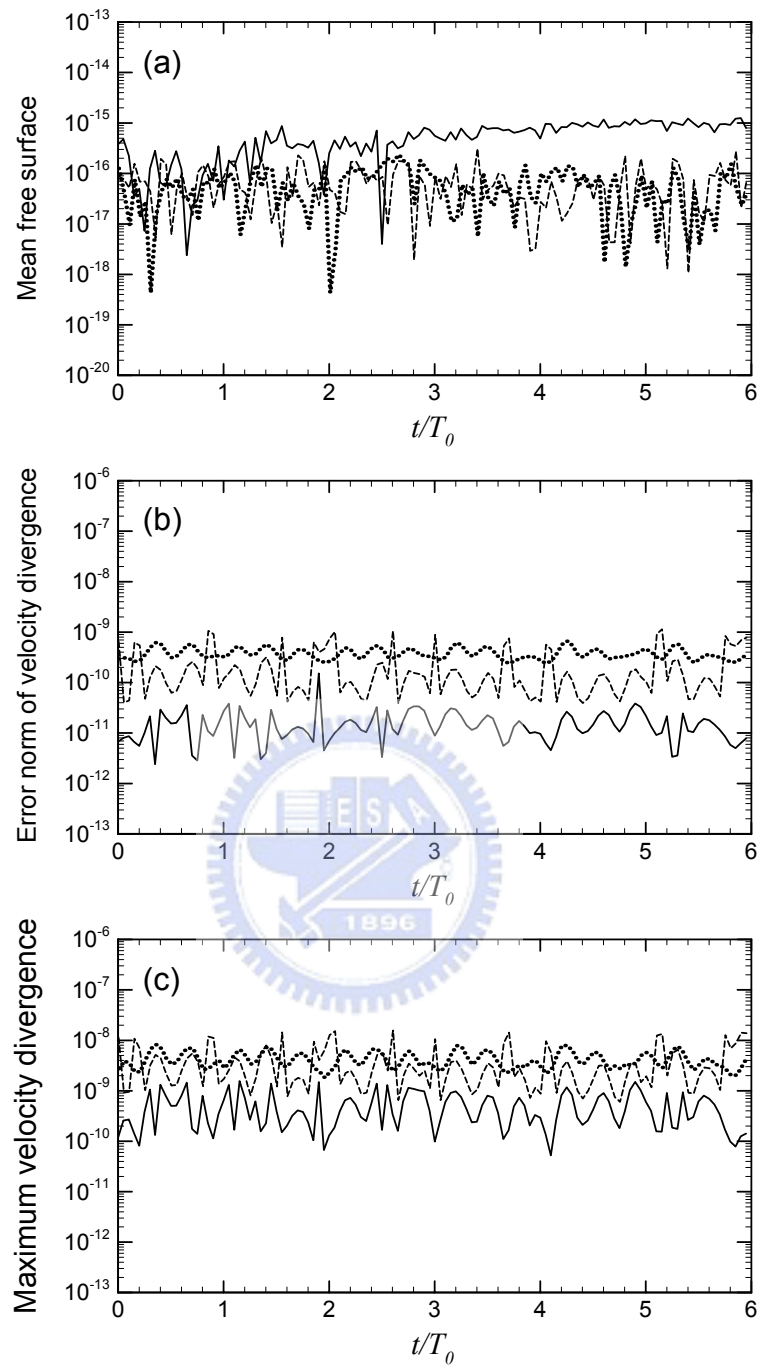


圖 3.6：模擬過程之平均水面高度(a)、流場之平均速度散度(b)以及最大速度散度(c)。圖中顯示不同解析度的結果：其中 $(N_x, N_z) = (16, 48)$ 為點線、 $(32, 64)$ 為折線、 $(128, 128)$ 為實線， N_x 為水平方向網格數； N_z 為垂直方向網格數。 T_0 為前進波之線性週期。

圖 3.7 (a) 顯示模擬過程中總能量之變化，其中包括流場動能、勢能以及因黏滯消散所損失的能量。圖 3.7(b) 顯示模擬過程中數值能量損失與黏滯消散能量之比。圖中顯示經過模擬初期調整，總能量之演化隨時間呈現穩定，並隨著空間解析度增加而減少。以解析度為 128×128 為例，當模擬結束時，由數值計算引起之能量損失為流場初始能量之 0.03% 。流場之能量守恆驗證了求解 Navier-Stokes 方程式之數值方法的正確性。而圖 3.7(b) 顯示模擬過程中數值能量損失與黏滯消散能量之比約為 0.01 ，其顯示本模式應用的數值方法在足夠的解析度下具有解析流場邊界層的能力。

圖 3.8 為自由液面上之波形演化模擬結果並顯示其與 Fenton(1988) 高階近似理論解之比較。Fenton(1988) 之穩態高階 Stokes 波近似解是由解析非黏性勢流場理論之 Laplace 方程式所得，其自由液面邊界條件為 Bernoulli 方程式。而本節中所模擬之前進波，其動力機制為重力與其慣性力，黏滯效應非常微弱。因此，由圖 3.8 可知，模擬波形與 Fenton(1988) 近似解非常相近，表示本模式以求解 Navier-Stokes 方程式並以自由液面運動方程式與應力平衡為邊界條件亦能精準地反應自由液面之非線性運動特性。

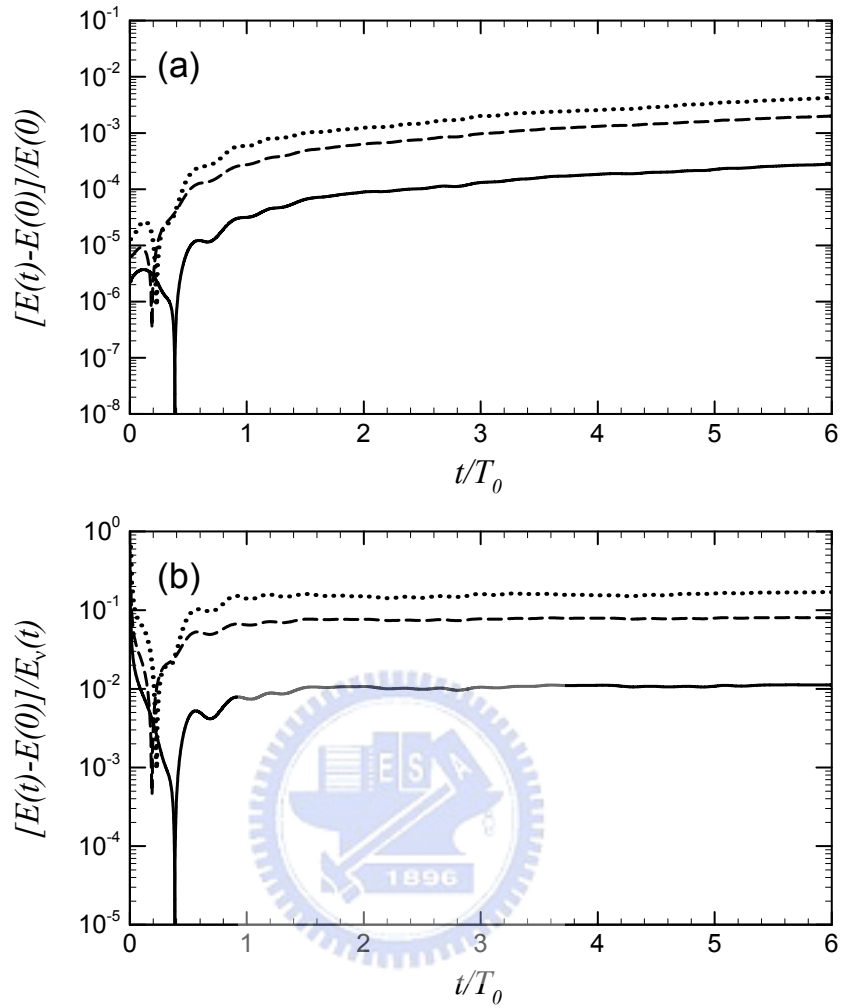


圖 3.7：模擬過程中總能量之演化(a)以及數值能量損失與黏滯消散能量之比(b)。其中總能量包括流場動能、勢能以及因黏滯消散所損失的能量。圖中顯示不同解析度的模擬結果：其中 $(N_x, N_z) = (16, 48)$ 為點線、 $(32, 64)$ 為折線、 $(128, 128)$ 為實線， N_x 為水平方向網格數； N_z 為垂直方向網格數。 T_0 為前進波之線性週期。

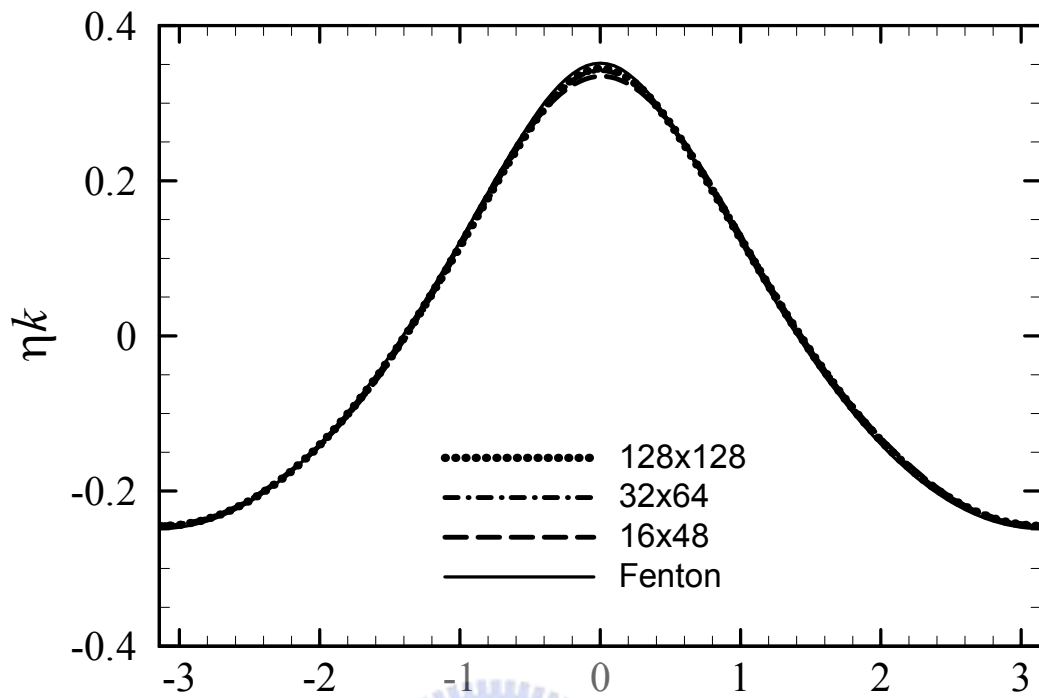


圖 3.8：前進波之波形模擬結果。圖中顯示不同解析度於時間 $t/T = 5.0$ 的模擬結果： $(N_x, N_z) = (128, 128)$ 為點線； $(32, 64)$ 為折-點線； $(16, 48)$ 為折線、Fenton(1988) 非線性理論穩態解為實線。其 N_x 為水平方向網格數； N_z 為垂直方向網格數， T 為前進波之非線性週期。

第四章 寄生表面張力波

關於寄生表面張力波的研究起始於 Cox (1958)，其於風場下產生波浪之實驗中發現：在短風波（波長 $\lambda_g \approx 3 \sim 15 \text{ cm}$ ）之前波相處，存在著一系列波長較短的表面張力波（波長 $\lambda_c \approx O(10^{-1}) \text{ cm}$ ），此表面張力波群附著於短重力波上並以相近的相速度往相同方向傳播。此無包覆空氣之短波，亦稱之為微小破碎波，廣泛地出現於海面上，其形成之邊界層流場被視為對於海-氣交界面之傳輸過程具有重大意義。在本章節中，我們將運用非線性自由液面模式模擬寄生表面張力波之生成過程並探討其邊界層流場特性。

4.1 波形與流場結構

模擬之初始條件為一波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.25$ 之三階 Stokes 前進波，根據線性理論，其週期為 $T_0 = 2\pi/(gk + \sigma k^3)^{1/2} \approx 0.17 \text{ s}$ 。此流場運動除了受重力、流體黏滯力與表面張力作用外，不考慮其他外力作用；例如風應力等。圖 4.1 為其波形 (η)、波形斜率 (η_x) 與波形在前進方向之二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。圖中之參考座標以波形的線性相速度向右移動，其波形上分別標示出最高波峯點（標示為空心圓）、波形凸起點（Bulge：局部最大負曲率處，標示為實心圓）與波形凹入點（Toe：局部最大正曲率處，標示為三角形）。初始波形 ($t = 0.0T_0$) 其於波峯位置為左右對稱；相對於波谷亦同，而在接近波峯處較陡；波谷處較平緩為典型的非線性波之波形特性。在演化之初期 ($t = 1/4T_0$)，其局部最大負曲率點逐漸脫離最高波峯點，此時波形已形成不對稱，並在波峯下游處產生波形之凸起。隨時間演化，波形不對稱愈來愈明顯 ($t = 0.5T_0$)，而在波形之凸起點下游處產生局部最大正曲率點亦即波形凹入點。此局部最大正曲率值持續增加，而其下游之波形曲率開始產生微幅的振盪 ($t = 3/4T_0$)。隨著曲率的振盪逐漸增強，波形上出現表面張力短波，其始於波形凹入點，往下游波谷處逐一形成。表面張力短波之曲率持續增加，波形亦越明顯，其數目也逐漸增加並延伸至波背。此短波波群附著於重力波上並以相似的相速度傳播因而稱之為寄生表面張力波。

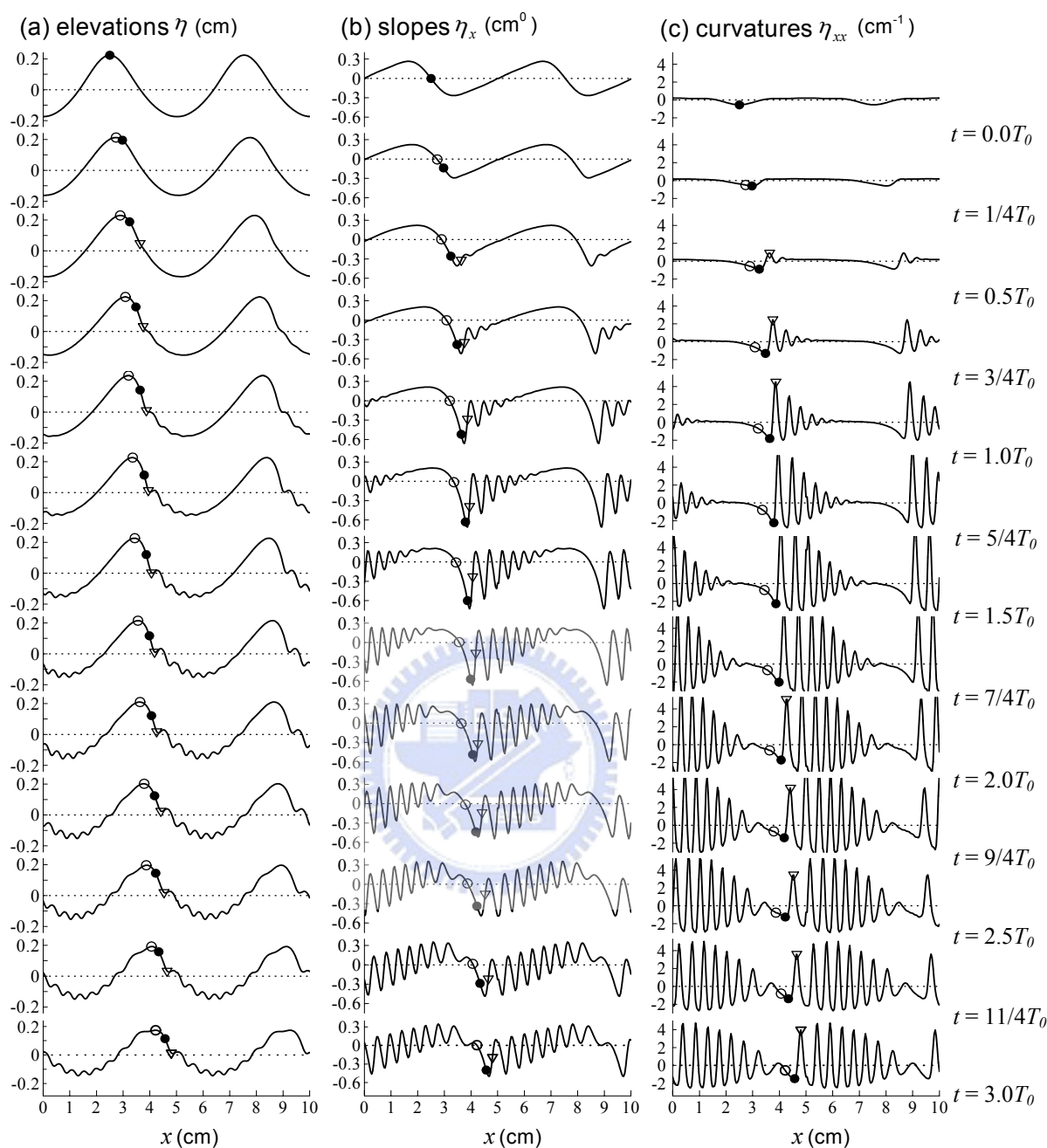


圖 4.1：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η)、(b)波形斜率 (η_x) 與(c)波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。圖中分別標示出最高波峯點 (\circ)，波形凸起點 (\bullet)，波形凹入點 (∇)。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = \sqrt{g/k + \sigma k} = 29.52 \text{ cm/s}$ 向右移動。線性週期 $T_0 = 2\pi / \sqrt{gk + \sigma k^3} = 0.1694 \text{ s}$ 。

此波形結構在發展完成並達到一近似穩定的狀態後，開始逐漸的衰減。

圖 4.2 為此波形結構之瞬時流場與旋度場。在模擬初期 ($t=1/4T_0$) 非線性重力波之速度場特性如下：水平速度為正/負之最大值位於波峯/波谷處；如圖 4.2(a) 所示，垂直速度為正/負之最大值位於波前相/波背相處；如圖 4.2(e) 所示。此流場造成一厚度相當薄的自由液面邊界層，其在位於波谷/波峯處分別有一順/逆時針方向之弱渦旋；於圖 4.2(i)。當波形凹入點產生時 ($t=0.5T_0$)，流場在波前相開始有微小的擾動，順時針方向之弱渦旋往上游移動至波前相處，如圖 4.2(j) 所示。當寄生表面張力波形成後 ($t=1.0T_0$)，每個表面張力短波皆於其所在位置引起一前進波形態之速度場；如圖 4.2(c 與 g) 所示。同時，在其各個波谷/波峯處分別產生一順/逆時針方向之渦旋且順時針方向渦旋由波谷處產生後立即被抬升並往上游拖曳，如圖 4.2(k) 所示，此旋度結構與 Mui & Dommermuth (1997) 之數值模擬結果相同。隨著寄生表面張力波持續發展 ($t=2.0T_0$)，成對渦旋除了數量增加外強度亦逐漸增強並往下方流場擴張，如圖 4.2(l) 所示。其中於標記為波形凹入處所產生之順時針方向渦旋的強度最大，其範圍擴展至重力波波峯以及波背相。我們推測此結構即為 Okuda (1982) 於實驗中所測得之波峯下高旋度區，也與 Ebuchi *et al.* (1987) 以及 Longuet-Higgins (1992) 所推論之流場結構相符。發展完成之寄生表面張力波其順時針方向渦旋之漫延與聯結使得自由液面下方形成一高旋度之順時針方向渦旋帶，同時流場邊界層厚度亦明顯增加。圖 4.3 以放大重力波前波相接近自由液面區域流場以顯示寄生表面張力波所形成之速度場與旋度分布。

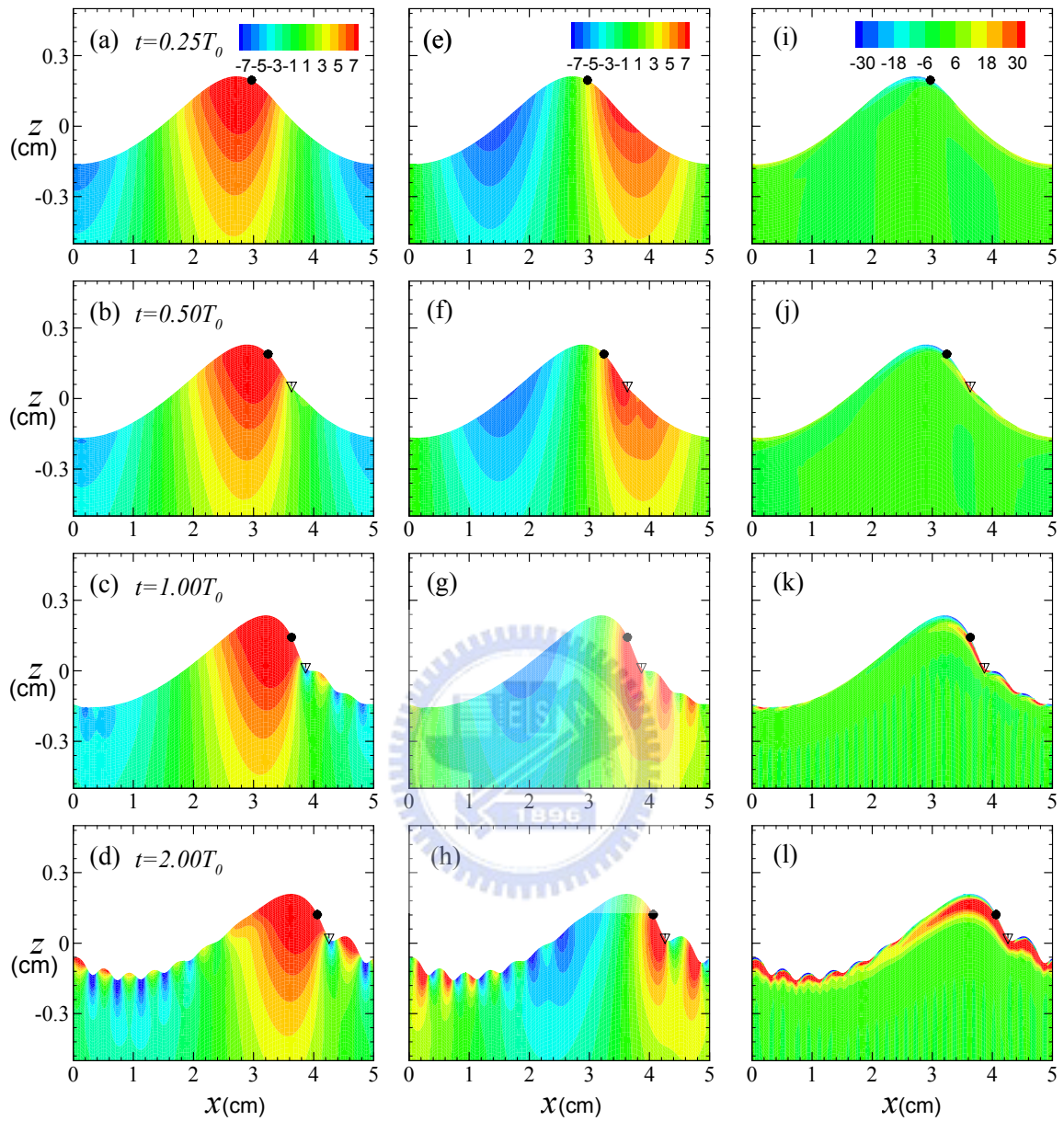


圖 4.2：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.50T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場（水平速度：(a)~(d)，垂直速度：(e)~(h)），與旋度場 ((i)~(l))。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = 29.52$ cm/s 向右移動。線性週期 $T_0 = 0.1694$ s。圖中分別標示波形凸起點 (●)，波形凹入點 (▽) 之位置。

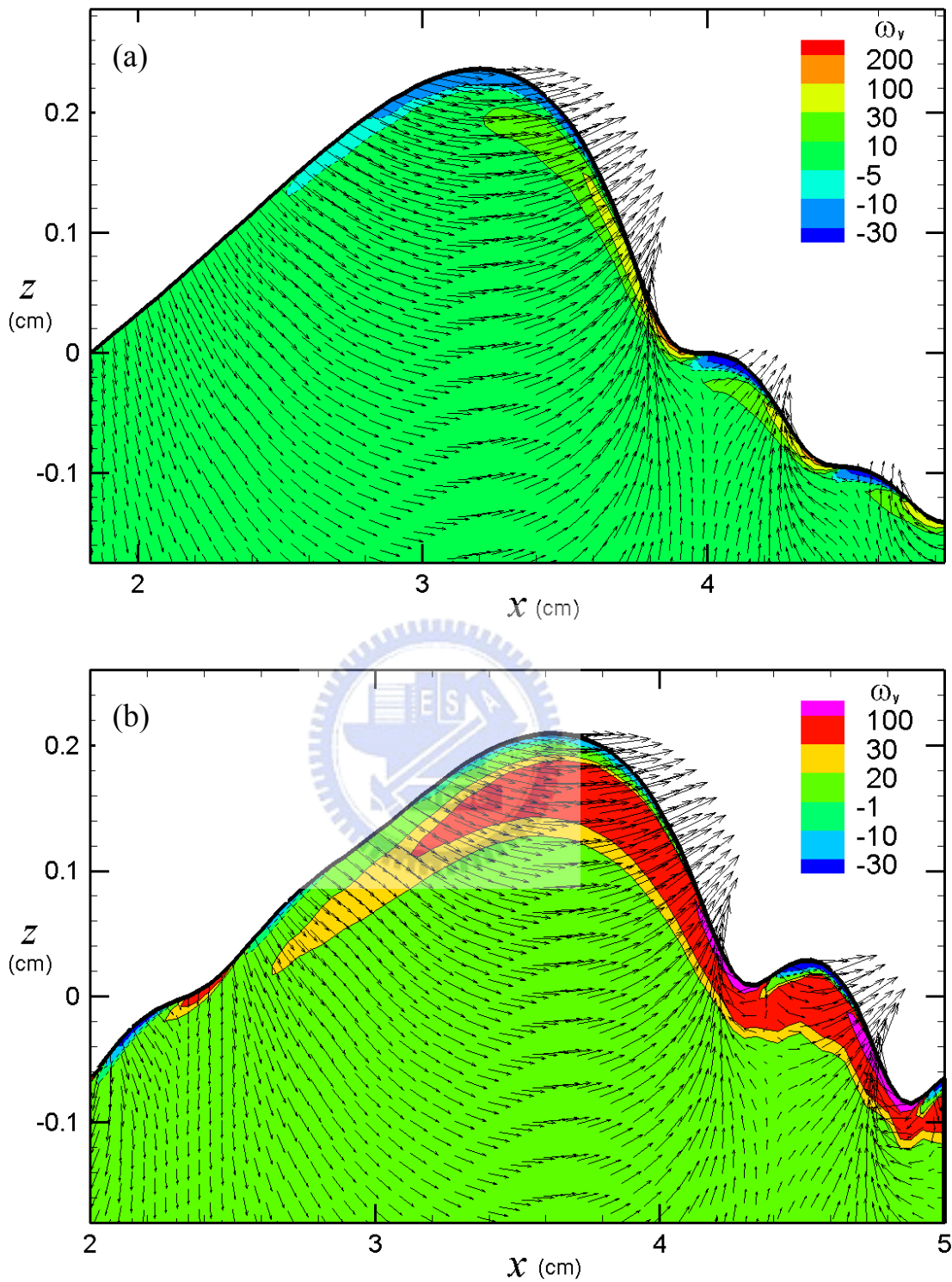


圖 4.3：寄生表面張力波之速度場向量圖與旋度分布。圖(a)為圖 4.2(k)之重力波前波相接近自由液面之區域流場。圖(b)為圖 4.2(l)之重力波前波相接近自由液面處之區域流場。

4.2 生成機制之探討

在以往相關的研究中，對於產生寄生表面張力波之主要機制有著不同的推論，包括：Cox (1958) 表示重力波傳播時其非線性作用所產生之高頻簡諧模組由於與主波形發生共振而被擴大，因此在主波形上出現寄生表面張力波。其產生共振的條件為主波之波相速度與表面張力波之波速相同。Longuet-Higgins (1963) 推論當波形即將達到最高波高時，接近波峯處之曲率非常大因此表面張力作用使得接近波峯處之正向應力增加，此隨波形移動之應力增量即為產生寄生表面張力波的主因。本節中，我們將針對各個可能生成寄生表面張力波的機制進行對照模擬以了解其影響。

4.2.1 表面張力的影響

首先我們進行一與 4.1 節相同的模擬條件但不考慮表面張力之對照模擬。模擬初始條件為波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.25$ 之三階 Stokes 前進波，但不考慮表面張力的作用，此重力波之週期根據線性理論為 $T_0 = 2\pi/(gk)^{1/2} \approx 0.18 \text{ s}$ ，其波速比 4.1 節所模擬之重力波稍慢。圖 4.4 為其波形 (η)、波形斜率 (η_x) 與波形在前進方向之二次導數 (η_{xx}) 的演化過程，而圖 4.5 為其波形結構之瞬時流場與旋度場。圖 4.4 顯示在演化過程中，其局部最大負曲率點與最高波峯點幾乎是重疊在一起，而局部最大正曲率點皆不存在。前進波波形於隨時間演化過程中皆無生成任何表面張力短波。圖 4.5 顯示其流場結構在傳遞過程裡並無太大的改變，也沒有任何流場擾動。由圖 4.4 與圖 4.5 所示之模擬結果，我們可確認表面張力的影響是產生寄生表面張力波之主要機制之一。

根據表面張力之物理特性，當自由液面產生曲度時，表面張力會在交界面的兩端造成一壓力梯度。流場之總壓力 (Total pressure 或 Hydrodynamic pressure) 為流體運動過程中所受到之正向應力；亦即熱動壓力 (Thermodynamic pressure) 與流體質量承受重力的靜水壓 (Hydrostatic pressure) 之合，而表面張力所引起之壓力梯度即反應在水動壓力的部份。

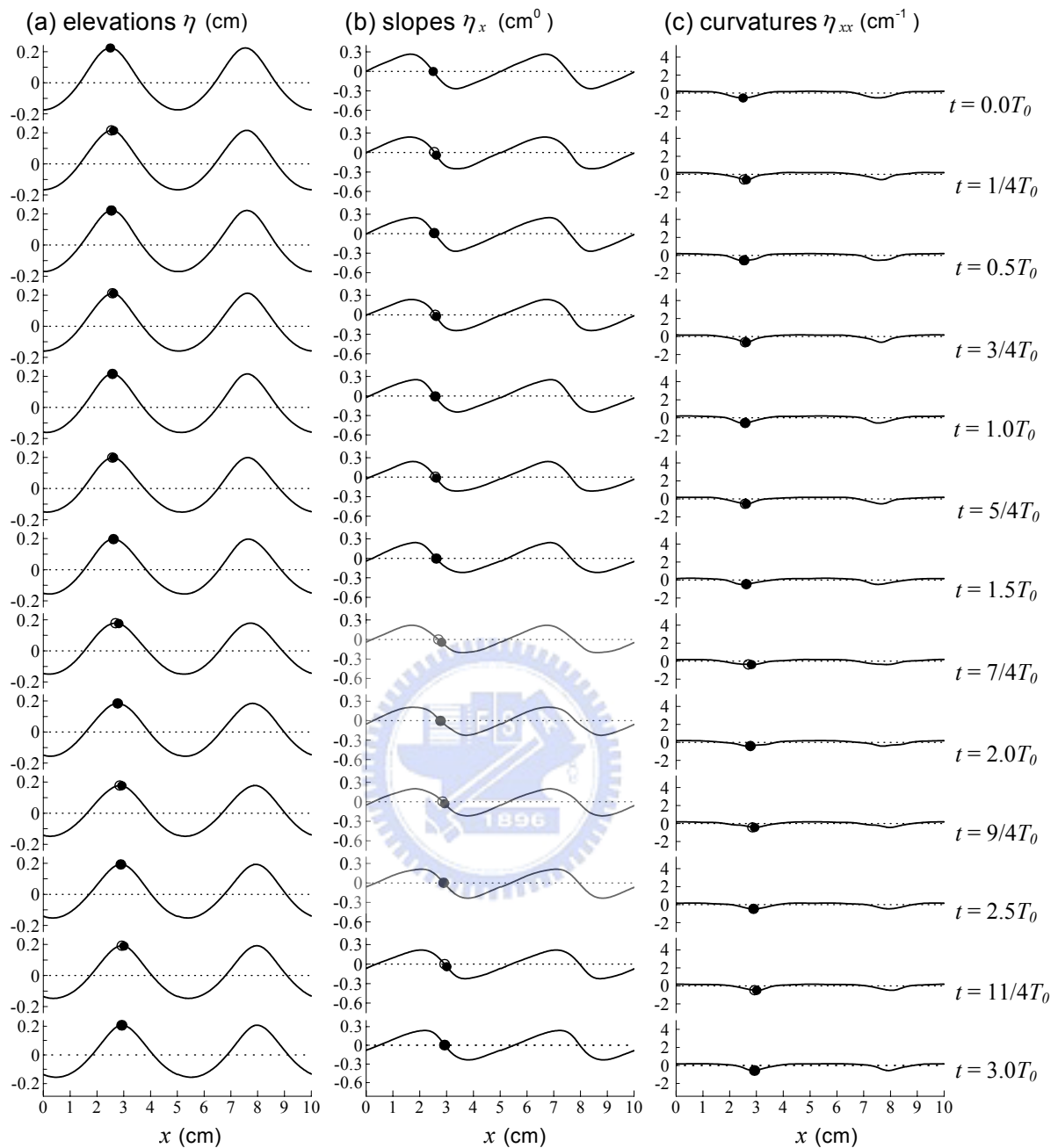


圖 4.4：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在不考慮表面張力影響且不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η)、(b)波形斜率 (η_x) 與(c)波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。圖中分別標示出最高波峯點 (○)，波形凸起點 (●)，而波形凹入點不存在。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = \sqrt{g/k} = 27.93$ cm/s 向右移動。線性週期 $T_0 = 2\pi/\sqrt{gk} = 0.1790$ s。

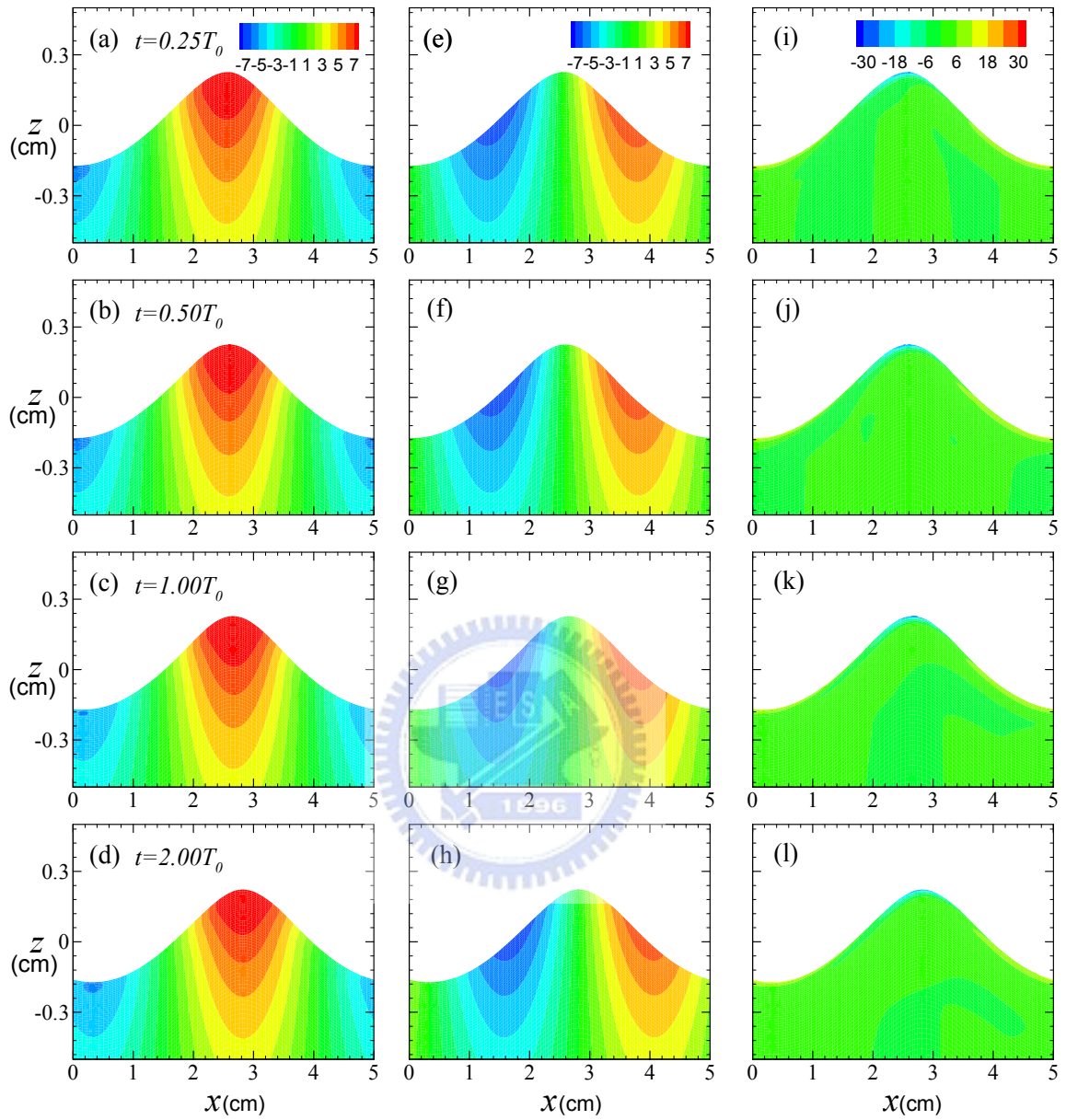


圖 4.5：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在不考慮表面張力影響且不受任何風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.5T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場（水平速度：(a)~(d)，垂直速度：(e)~(h)）與旋度場（(i)~(l)）。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = 27.93$ cm/s 向右移動。線性週期 $T_0 = 0.1790$ s。

圖 4.6 分別表示考慮表面張力作用（實線）與忽略表面張力作用（虛線）的模擬中，液面高度、液面上總壓力與液面上熱動壓力之分布。圖 4.6(a) 顯示兩模擬過程之波形的不同。圖 4.6(b) 顯示其液面上之總壓力分布情形是完全不同，其考慮表面張力作用的總壓力分布隨寄生表面張力波形成而有相當大的起伏（約為 $700 \text{ g/cm} \cdot \text{s}^2$ ）。將分布於液面上之總壓力去除重力靜壓部份後，其熱動壓力分布如圖 4.6(c) 所示。圖中顯示表面張力效應不止改變水面上水動壓力之分布形態，其考慮表面張力作用與忽略表面張力作用下之熱動壓力之值相差 $O(10^3)$ 。因此可知表面張力作用主控了液面上總壓力之分布，而液面總壓力值亦反應於液面高度變化。



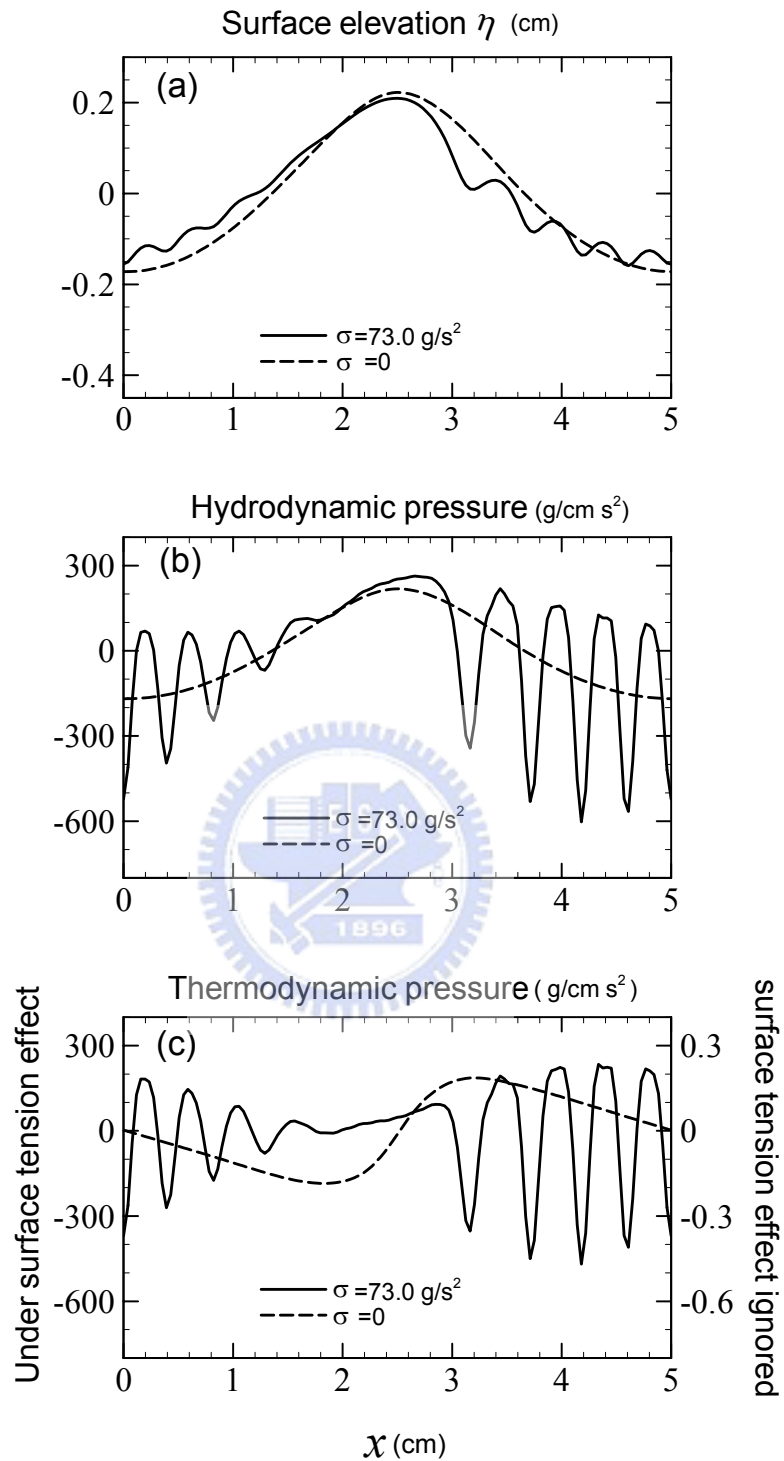


圖 4.6：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波，於時間 $t = 2T_0$ 時之(a)液面高度、(b)液面上之總壓力與(c)液面上熱動壓力之分布，其中 T_0 為前進波之線性週期。實線與折線分別表示於考慮表面張力作用與忽略表面張力作用之模擬結果。圖(c)中考慮表面張力作用之熱動壓力量值表示於圖左邊界，忽略表面張力作用之熱動壓力量值表示於圖右邊界。

4.2.2 風壓的作用

舉凡早期對於寄生表面張力波的觀測皆是於吹風之實驗水槽，其風波傳遞過程中之液面演化，如 Cox (1958)、Okuda (1982) 以及 Ebuchi *et al.* (1987) 等。即使由 4.1 節之模擬結果已證實：在無風應力作用下，寄生表面張力波依然產生，我們仍想了解在寄生表面張力波生成過程中，風應力所造成的影響。因此，我們進行一與 4.1 節相同的模擬條件但流場液面邊界受到一正向風壓作用之對照模擬。相同地，模擬初始條件為波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.25$ 之三階 Stokes 前進波，其週期根據線性理論為 $T_0 = 2\pi/(gk + \sigma k^3)^{1/2} \approx 0.17 \text{ s}$ 。而有關於風應力的分布形態，我們將應用 Fedorov & Melville (1998) 以邊界層近似理論推導弱非線性自由液面穩態解之解析過程中，根據風所引起之正向壓力平衡其黏滯消散，可得一正向風壓分布之解析解；其形式如下：

$$\tau_n^s(x, t) = p_0 \rho c_0^2 \cos(kx - \Theta - ct) \quad (4.1)$$

其中 $c_0 = (g/k + \sigma k)^{1/2}$ 為線性理論之波形相速度，而 $c = c_0[1 + (p_0/ak)\cos\Theta]^{1/2}$ ， p_0 為決定風壓大小之參數，而 Θ 為風壓分布與液面波形之相位差。在 Fedorov & Melville (1998) 的理論中， Θ 有兩種型式，本模擬以其型式一為算例，其形式如下：

$$\Theta \approx -\pi + \frac{4vk}{c_0} \frac{ak}{\rho} \quad (4.2)$$

此形式之最大正向風應力位於接近液面波谷之位置，此分布型態也與 Banner and Peirson (1998) 於實驗中所量測得之海-氣交界面的正向風壓分布型態相符。圖 4.7 為模擬結果之波形 (η)、波形斜率 (η_x) 與波形在前進方向之二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。圖 4.8 為其波形結構之瞬時流場與旋度場。比較圖 4.1 與圖 4.7 之波形演化，於表面張力波發展完成時 ($t > 2.0T_0$)，風壓作用下之液面曲率較小，亦即寄生波波形較不明顯。而由旋度場結構圖 4.2(1) 與圖 4.8(1) 之比較也可發現：於風壓作用下，寄生表面張力波引起

之旋度結構比於無風壓作用下較弱些，表示風壓的確有延遲其演化至衰弱的過程。因此本節之模擬結果顯示風的作用並不是產生寄生表面張力波的主要機制之一，其主要作用為能量的輸入以延遲寄生表面張力波衰減之演化過程。



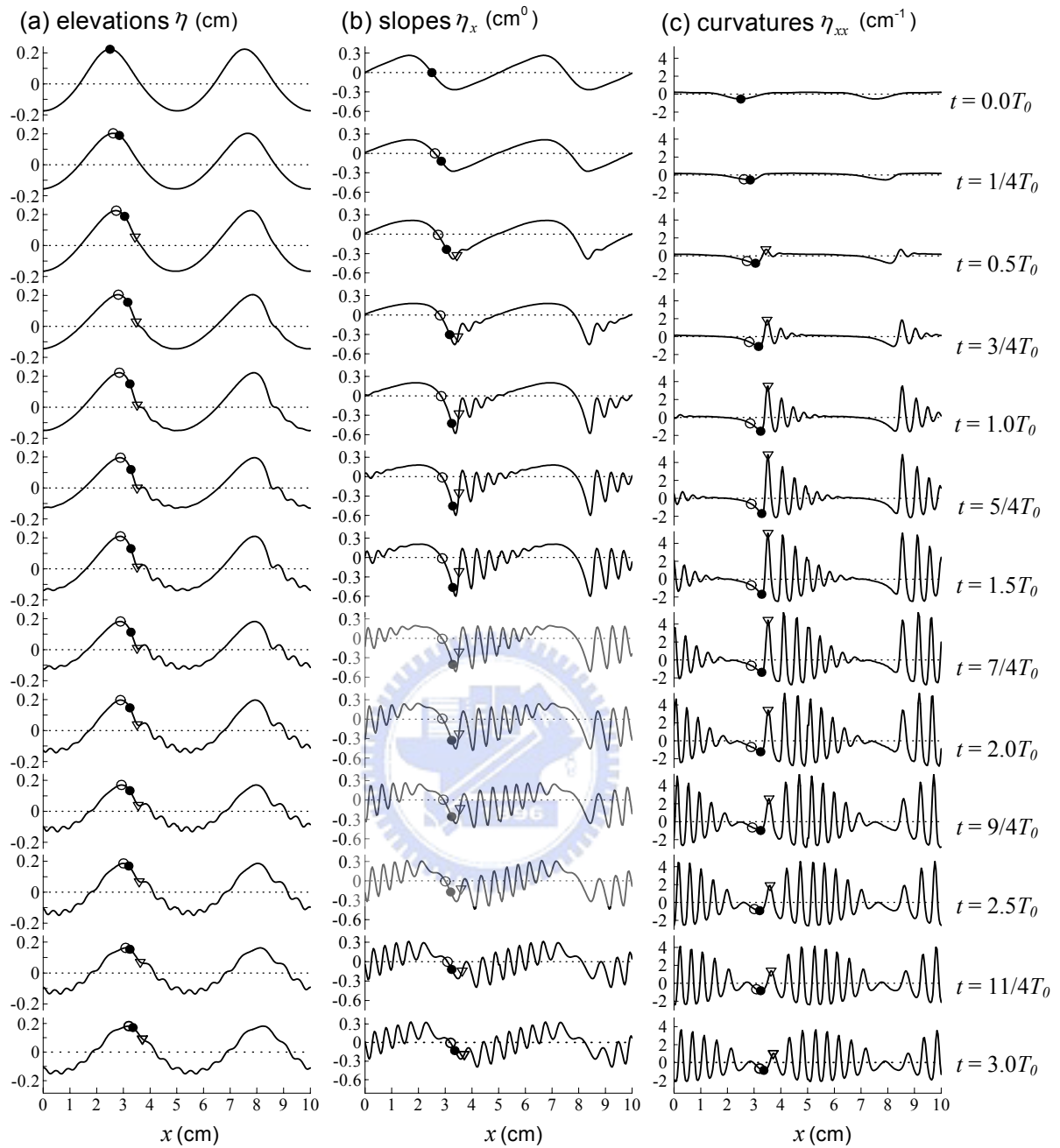


圖 4.7：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響並受正向風壓之作用下，其(a)波形 (η)、(b)波形斜率 (η_x) 與(c)波形二次導數 (η_{xx}) 的演化過程。圖中分別標示出最高波峯點 (\circ)，波形凸起點 (\bullet)，波形凹入點 (∇)。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = \sqrt{g/k + \sigma k} = 29.52 \text{ cm/s}$ 向右移動。線性週期 $T_0 = 2\pi / \sqrt{gk + \sigma k^3} = 0.1694 \text{ s}$ 。

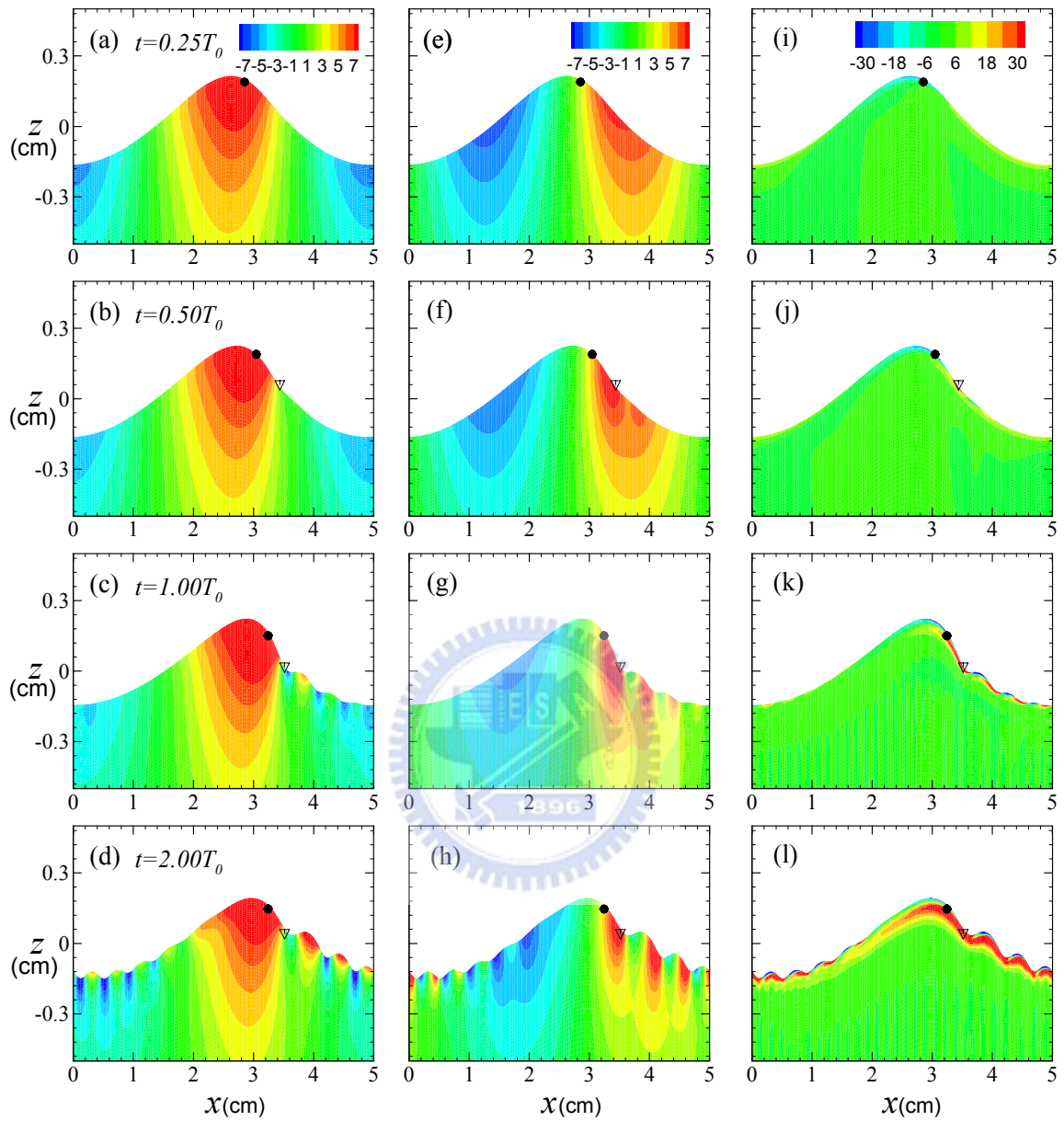


圖 4.8：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響且受正向風壓之作用下，於時間 $t = 0.25T_0, 0.50T_0, T_0, 2T_0$ 之瞬時速度場（水平速度：(a)~(d)，垂直速度：(e)~(h)）與旋度場 ((i)~(l))。參考座標隨著線性波相速度 $C_0 = 29.52 \text{ cm/s}$ 向右移動。線性週期 $T_0 = 0.1694 \text{ s}$ 。圖中分別標示波形凸起點 (●)，波形凹入點 (▽)。

4.2.3 初始波形斜率的影響

本節中我們將進行一系列不同波高之對照模擬以了解重力波初始波形斜率對於寄生表面張力波生成的影響。除了分析初始波形斜率對波形演化的影響，對於不同波長之重力短波： $\lambda = 5.0\text{ cm}$ 、 7.5 cm 與 10 cm ，也將對其進行對照模擬並探討各個波形之特性。

延續 4.1 節之模擬條件，初始條件為波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ 之三階 Stokes 前進波，對於各不同波形陡度：分別為 $ak = 0.12$ 、 0.16 、 0.20 、 0.25 與 0.28 ，其波形與波形斜率演化過程顯示於圖 4.9 至圖 4.13。由圖 4.9 與圖 4.10 可得知：初始波形陡度 $ak = 0.12$ 與 0.16 的演化過程中，其波形斜率有微幅的擾動，但並無明顯之表面張力波產生於重力波波形上。當波形初始陡度高於 0.20 時，如圖 4.11 至圖 4.13 所示，即可在重力波上觀察到明顯的表面張力波。因此可知對於波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ 之重力波， $ak = 0.20$ 為一產生寄生表面張力波之特徵波形陡度。由圖 4.11 至圖 4.13 所顯示之波形演化過程可得知：其表面張力波斜率與重力波之初始陡度有關，初始陡度越大引起之表面張力波斜率越大。

在波長 $\lambda = 7.5\text{ cm}$ 之對照模擬中，三階 Stokes 前進波之初始波形陡度分別為 $ak = 0.20$ 、 0.23 、 0.25 、 0.28 與 0.30 ，其波形與波形斜率演化過程顯示於圖 4.14 至圖 4.18。不同於波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ 的算例，在波形初始陡度 $ak = 0.20$ 與 0.23 之演化過程中，其波形斜率雖有擾動，但重力波波形上並無明顯之表面張力波。在波形初始陡度達到 0.25 ；如圖 4.16 所示，於波形演化至時間 $t = 1.5T_0$ 時，可觀察到位於波前相之表面張力波逐漸形成，而由其波形斜率可看出：其波形擾動的頻率較波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ 者高，亦即所形成之寄生表面張力波數目較多。而當時間達到 $t = 3.0T_0$ 時，波形上之表面張力波結構幾乎已衰竭。由初始陡度 $ak = 0.28$ 與 0.30 之波形演化中可得知；如圖 4.17 與圖 4.18 所示，不同於波長 $\lambda = 5\text{ cm}$ 之寄生表面張力波分布於整個重力波波形上，在重力波 $\lambda = 7.5\text{ cm}$ 的演化過程中，當表面張力波傳遞至波背處時，由於其波長短且振幅小，因此在波背處之表面張力波結構非常不明顯，此特性亦可

重力波之波形參數		寄生表面張力波之波形特徵			
波長 λ (cm)	初始波形 陡度 ak	形成起始 位置($^{\circ}$)	最大波形 斜率	最大/小波長 (cm)	完成發 展總數
5.0	0.12	×	0.132	×	×
5.0	0.16	38.7	0.235	~	~
5.0	0.20	37.2	0.441	0.64/0.46	8
5.0	0.25	35.7	0.728	0.57/0.38	8
5.0	0.28	37.2	0.906	0.64/0.40	8
7.5	0.20	×	0.224	×	×
7.5	0.23	23.6	0.318	~	~
7.5	0.25	22.1	0.477	~	~
7.5	0.28	23.6	0.802	0.57/0.28	17
7.5	0.30	22.1	1.044	0.54/0.25	18
10.0	0.25	×	0.293	×	×
10.0	0.28	16.0	0.474	~	~
10.0	0.30	19.1	0.746	0.5/~	~
10.0	0.31	19.1	1.024	~	~

表 4.1：不同波長與初始波形斜率之重力波，其所產生之寄生表面張力波波形特性。
 × 表示寄生表面張力波並無出現於重力波之波形上，~ 表示寄生表面張力波波形不明顯。形成起始位置為與最大波高(位於 0°)之相位差，其誤差約為 $\pm 2^{\circ}$ 。寄生表面張力波之波長誤差約為 $\pm 0.05\text{cm}$ 。

由 Jiang *et al.* (1999) 之造波實驗結果應證。此外，其他於不同波長與初始波形斜率之重力波所生成之寄生表面張力波的特性與相異處將詳列於表 4.1。

在波長 $\lambda = 10\text{cm}$ 之對照模擬中，三階 Stokes 前進波之初始波形陡度分別為 $ak = 0.25$ 、 0.28 、 0.30 與 0.31 ，其波形與波形斜率演化過程顯示於圖 4.19

至圖 4.22。在波形初始陡度 $ak = 0.25$ 的演化過程中，重力波波形上並無明顯之表面張力波，如圖 4.19 所示。而在 $ak = 0.28$ 、 0.30 與 0.31 演化過程中顯示： $\lambda = 10$ cm 重力波所生成之表面張力波結構並無規則性。由於其波形陡度已相當大，傳輸過程之非線性效應也相當強，我們推測此時重力波的非線性效應已與表面張力作用互相制衡，因而使得在 $\lambda = 5$ cm 與 7.5 cm 前進波其由表面張力效應主導之波形特性於波長增加為 $\lambda = 10$ cm 且波形較陡的重力波上已不明顯。此重力波 $\lambda = 10$ cm 之波形不規則特性與 Fedorov *et al.* (1998) 之實驗結果相符。

重力波之初始波形斜率與其運動慣性內能相關，而短重力波必須達到其特徵波形陡度才會形成寄生表面張力波。而於本節之各組對照實驗中發現，不同波長之重力波其特徵波形陡度並不相同且其生成之寄生表面張力波亦有不同的波形特性，其歸納如下：

- (1) 初始波形斜率為生成寄生表面張力波之重要機制，而重力波波長越長，其生成表面張力波所需之初始波形斜率也越高。
- (2) 重力波波長越長，其表面張力波之形成位置越接近最大波高位置，且所形成之表面張力波數目較多，其波長也較短。
- (3) 對於各波長之重力波，其最陡之寄生表面張力波皆生成於最接近波高處，而各個寄生表面張力波之波形斜率往下游逐漸遞減，其波長與位置有關，位於重力波波峯處 ($\eta > 0$) 之波長較大於位於波谷處 ($\eta < 0$)。
- (4) 寄生表面張力波之數目只與重力波波長有關，與波形初始陡度無關。根據 Cox (1958)、Fedorov and Melville (1998) 與 Fedorov *et al.* (1998) 之推論，假設表面張力波的生成原因是因為其與重力波之高頻簡諧模組發生共振，我們以其波相速度近似相同來估算表面張力波之數目 N_p 。

$$c^2 \approx c_p^2$$

$$\frac{g}{k} \approx \sigma k_p$$

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \approx \frac{2\pi\sigma}{\lambda_p}$$

$$N_p = \frac{\lambda}{\lambda_p} \cong \frac{\lambda^2 g}{4\pi^2 \sigma} \quad (4.3)$$

其中 c 與 c_p 分別為重力波與表面張力波之相速度， k 與 k_p 分別為重力波與表面張力波之波數， λ 與 λ_p 分別為重力波與表面張力波之波長。依(4.3)式可得：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ 之重力波其表面張力波數目約為8，而 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ 之重力波其表面張力波數目約為18個，此近似值皆與模擬結果相符。



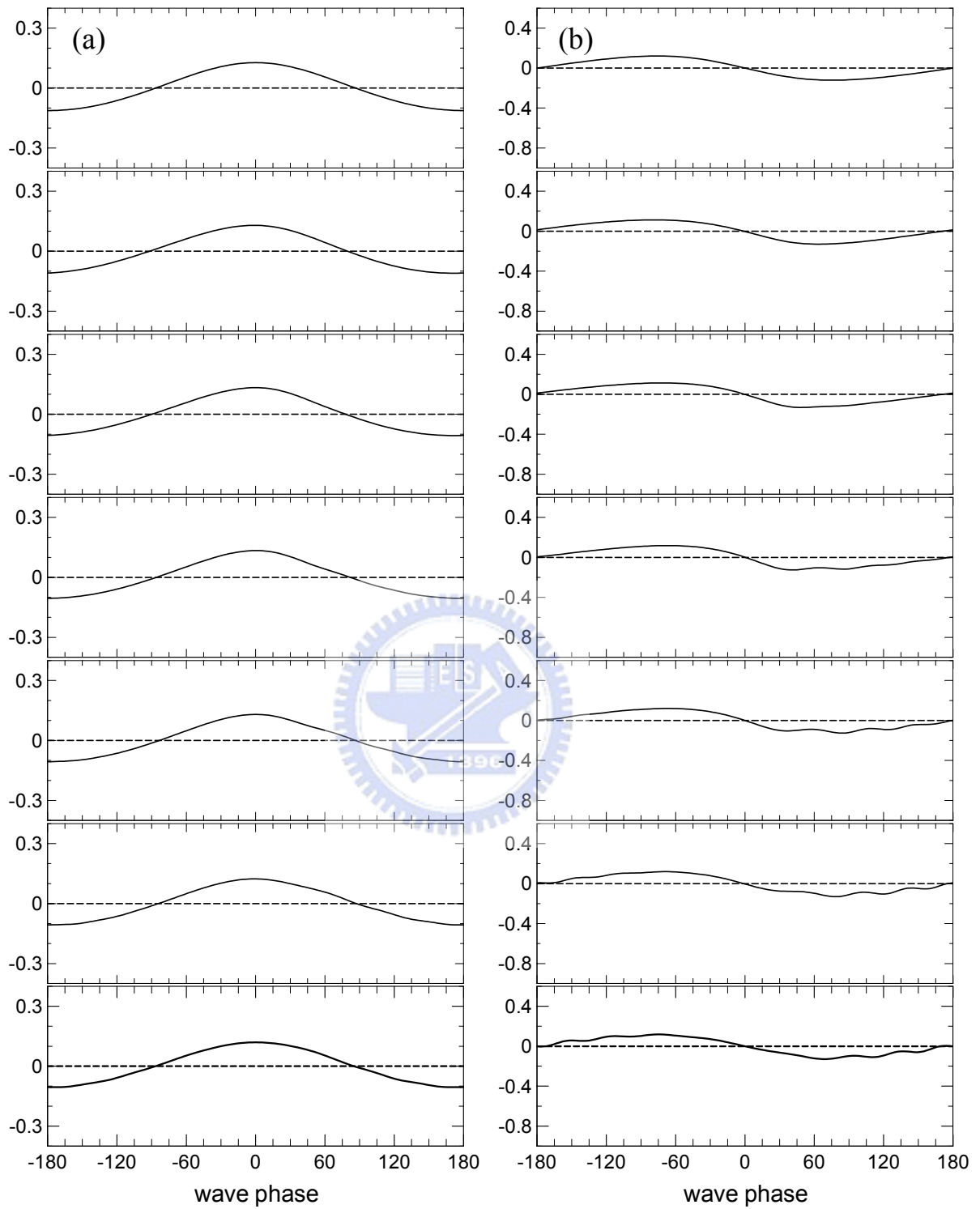


圖 4.9：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.12$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

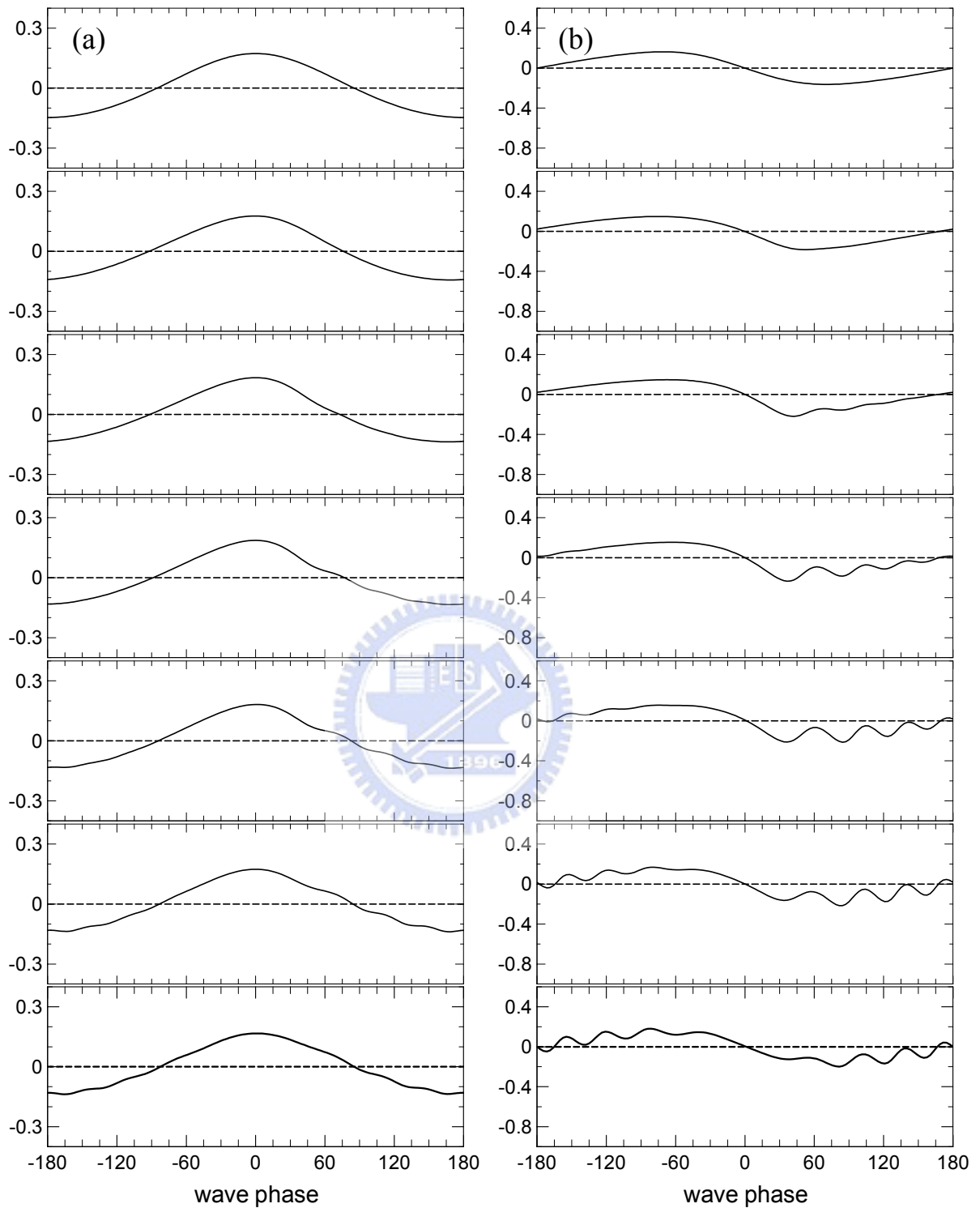


圖 4.10：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.16$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

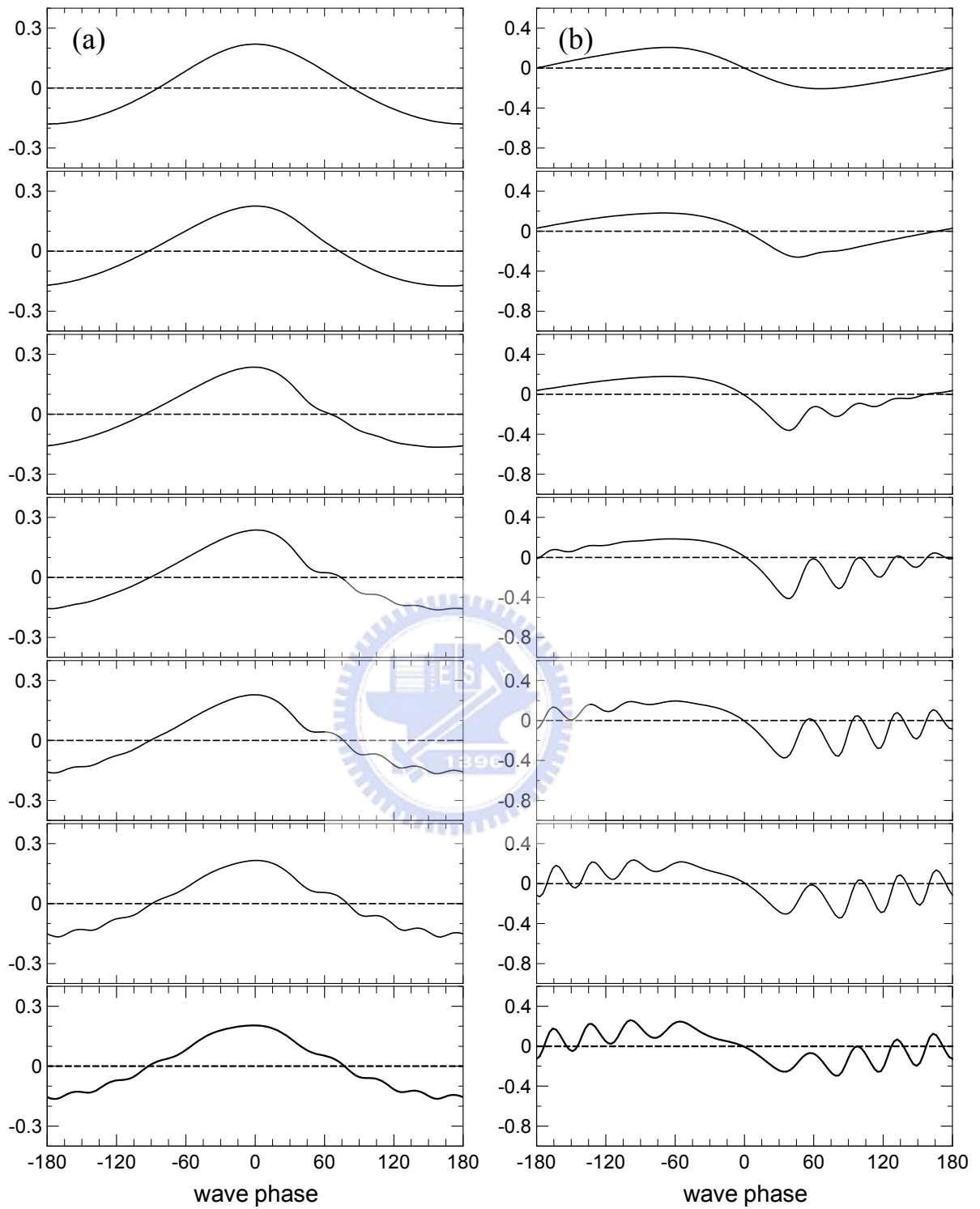


圖 4.11：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.20$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

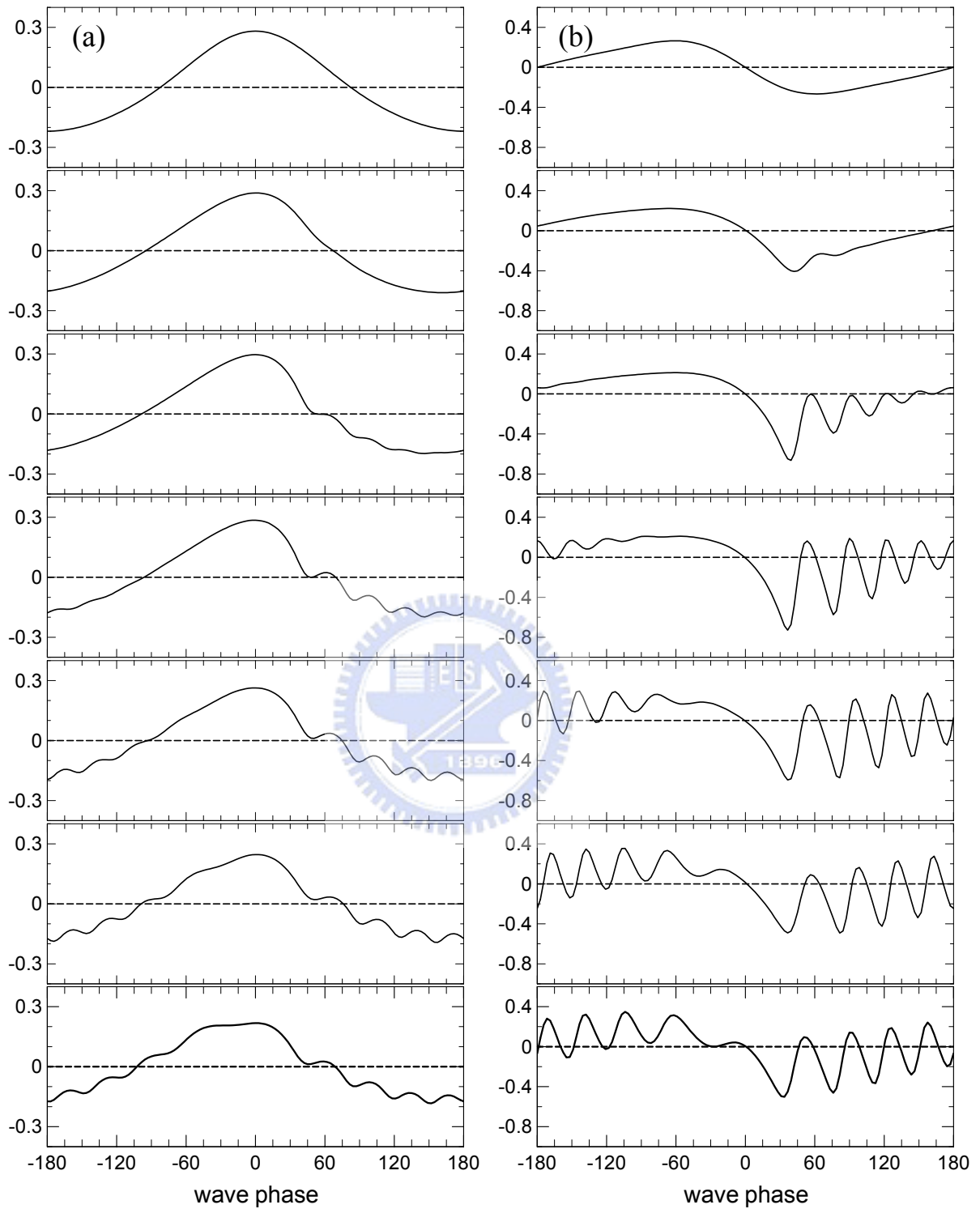


圖 4.12：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

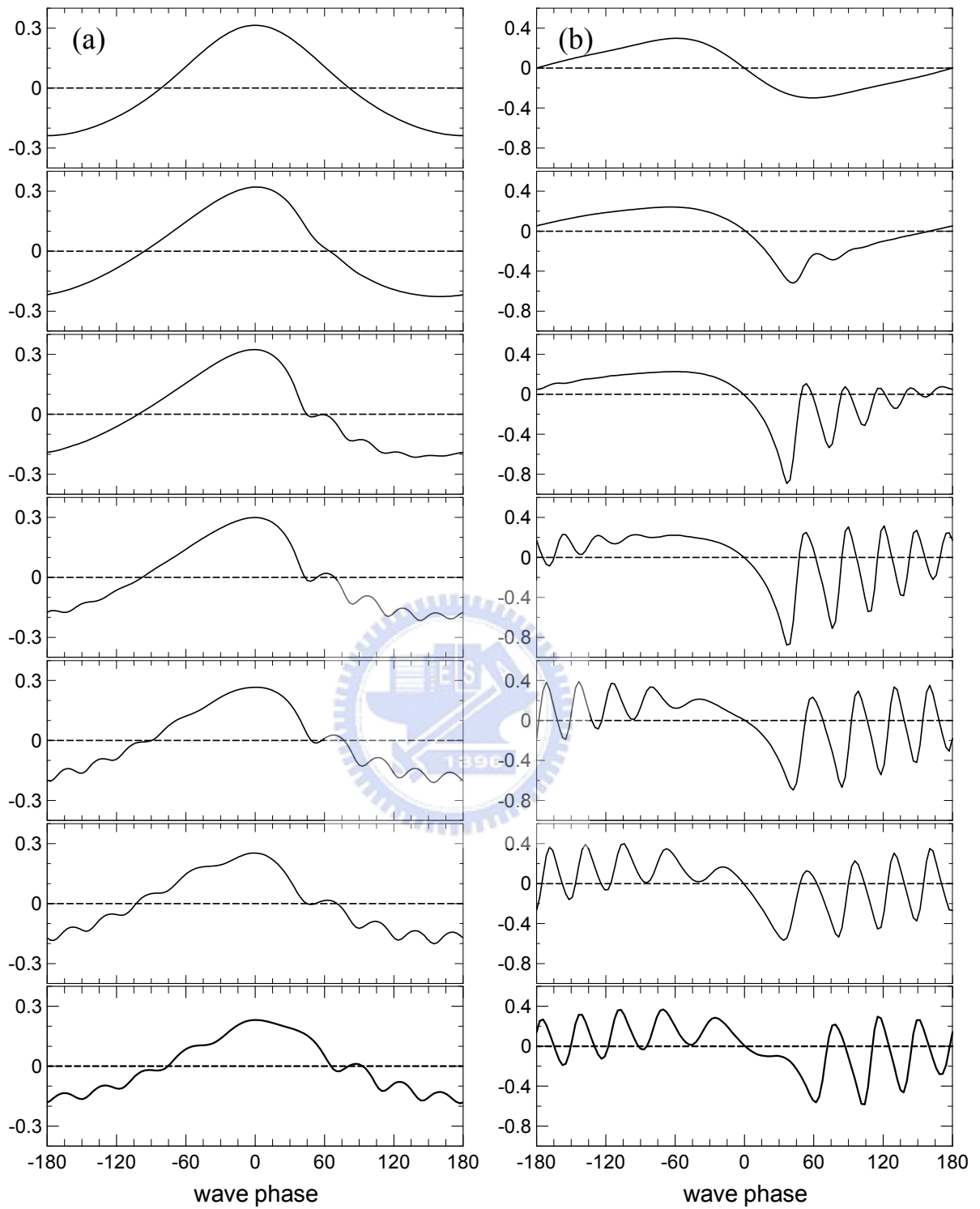


圖 4.13：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

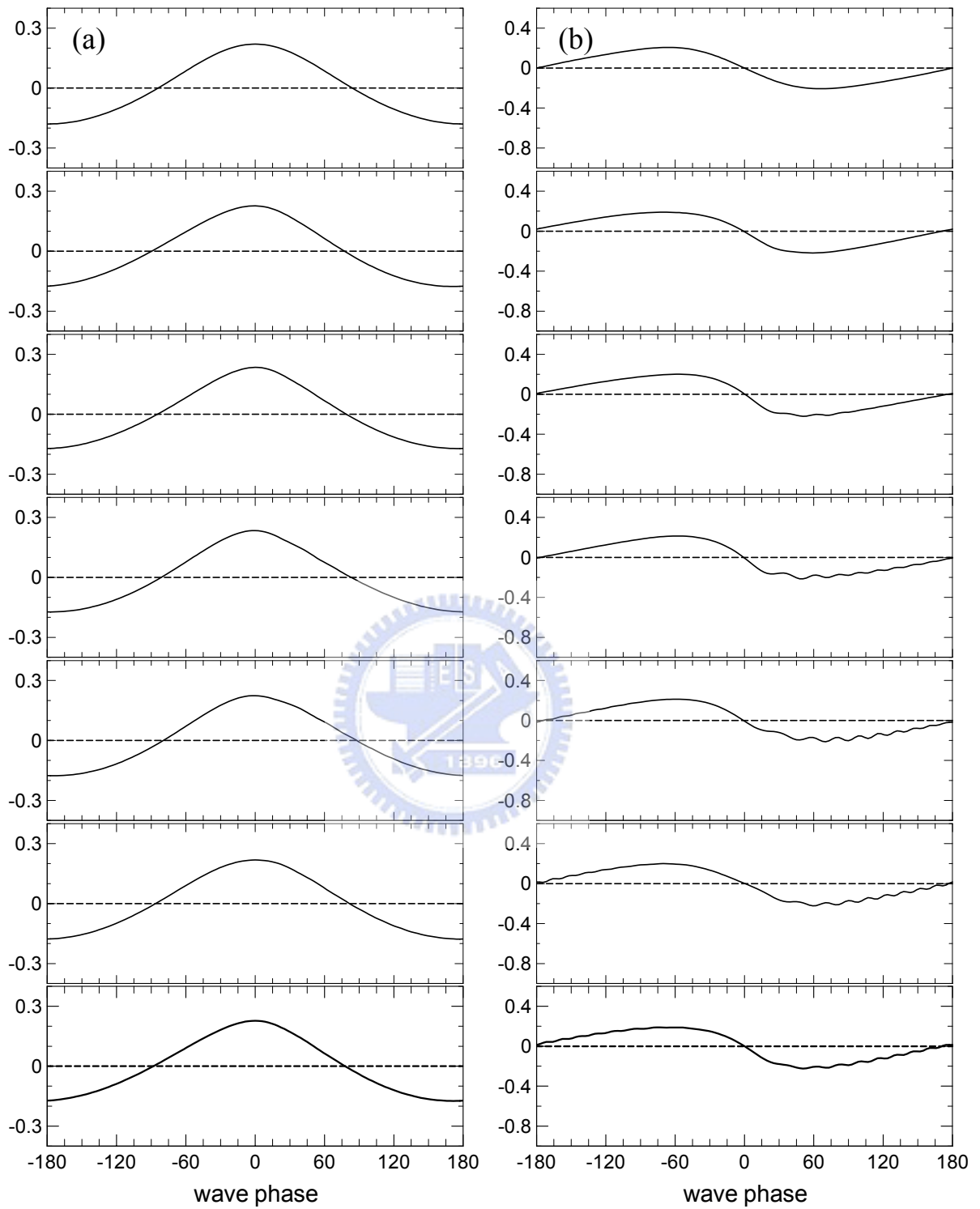


圖 4.14：波長 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.20$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

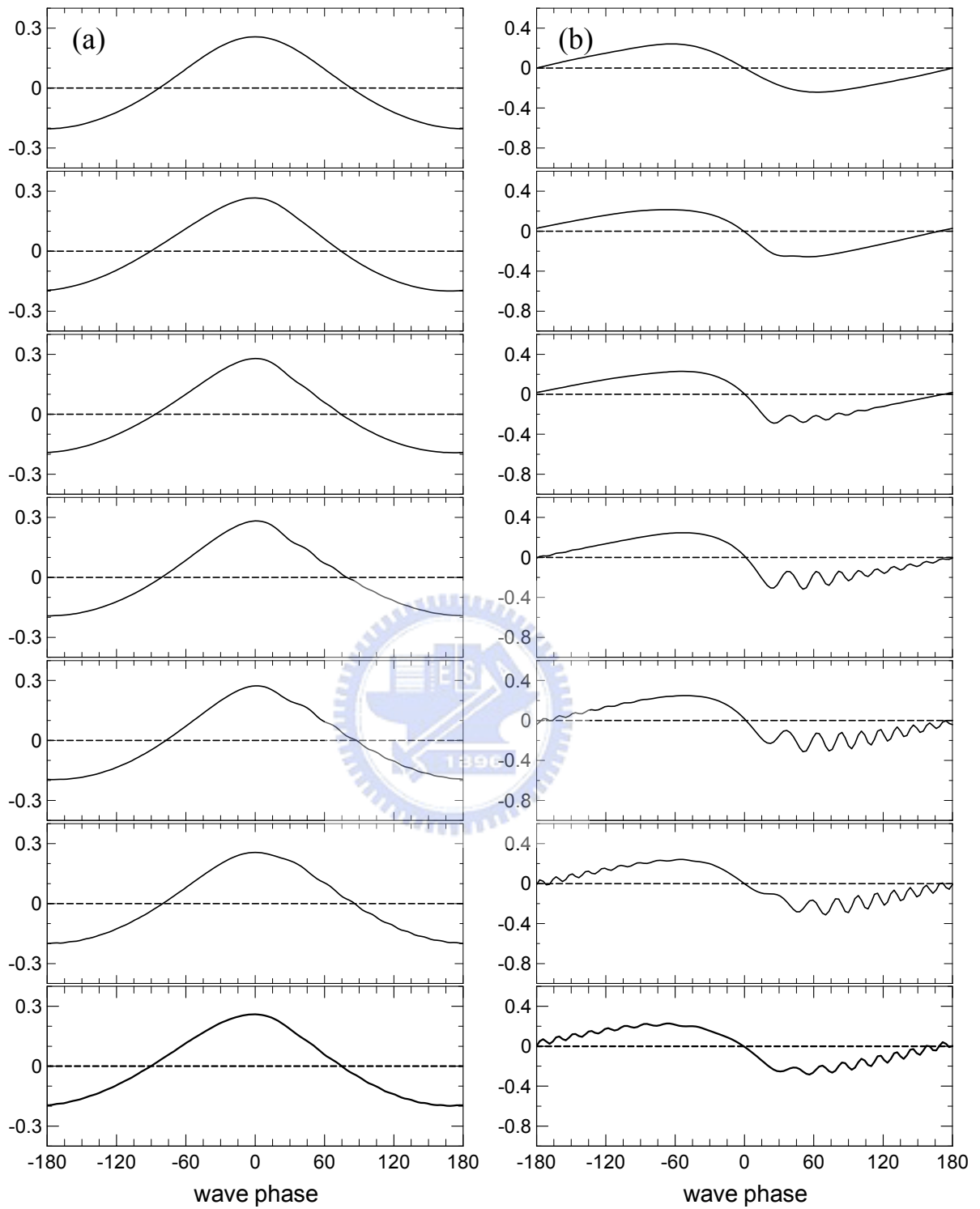


圖 4.15：波長 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.23$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

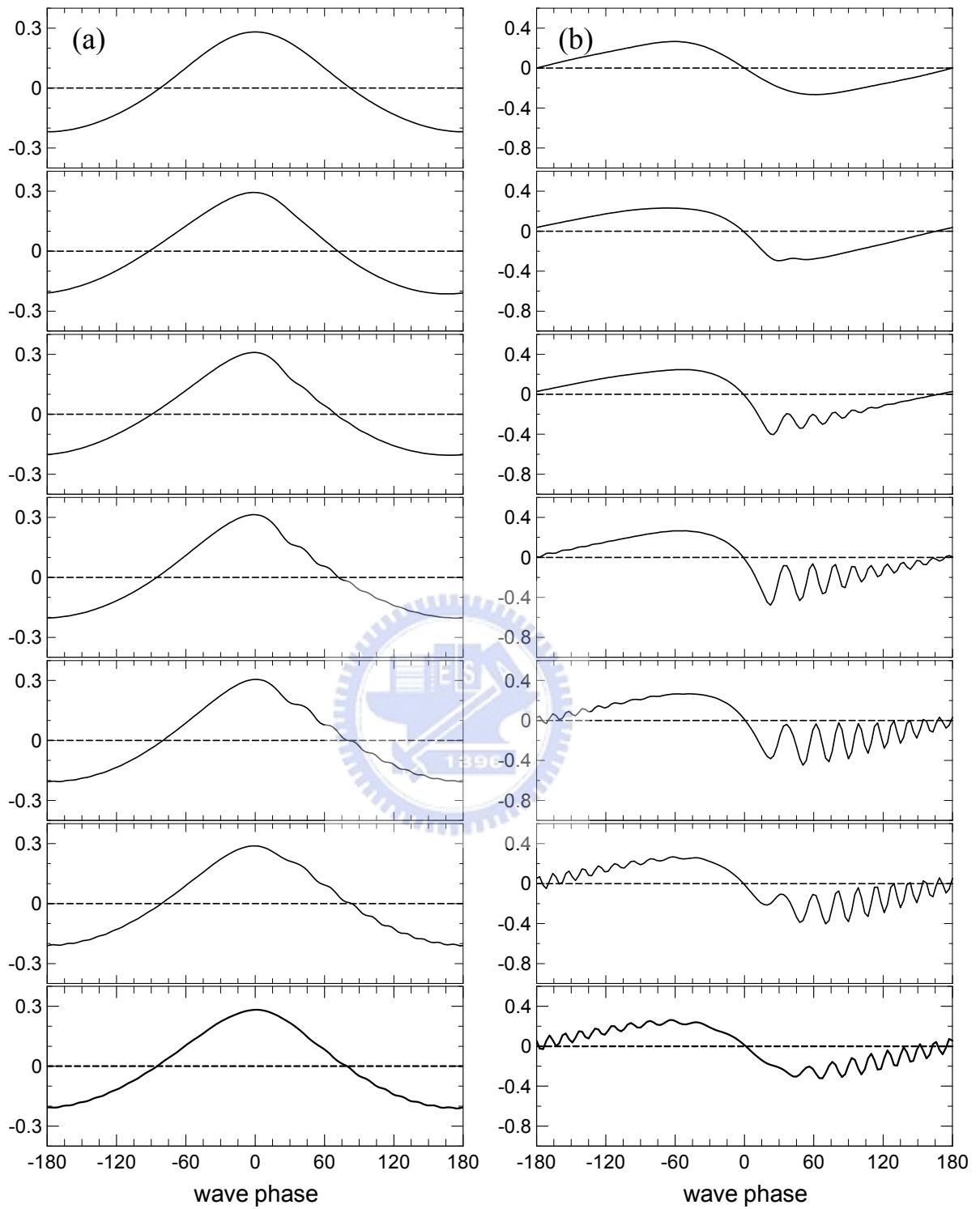


圖 4.16：波長 $\lambda = 7.5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

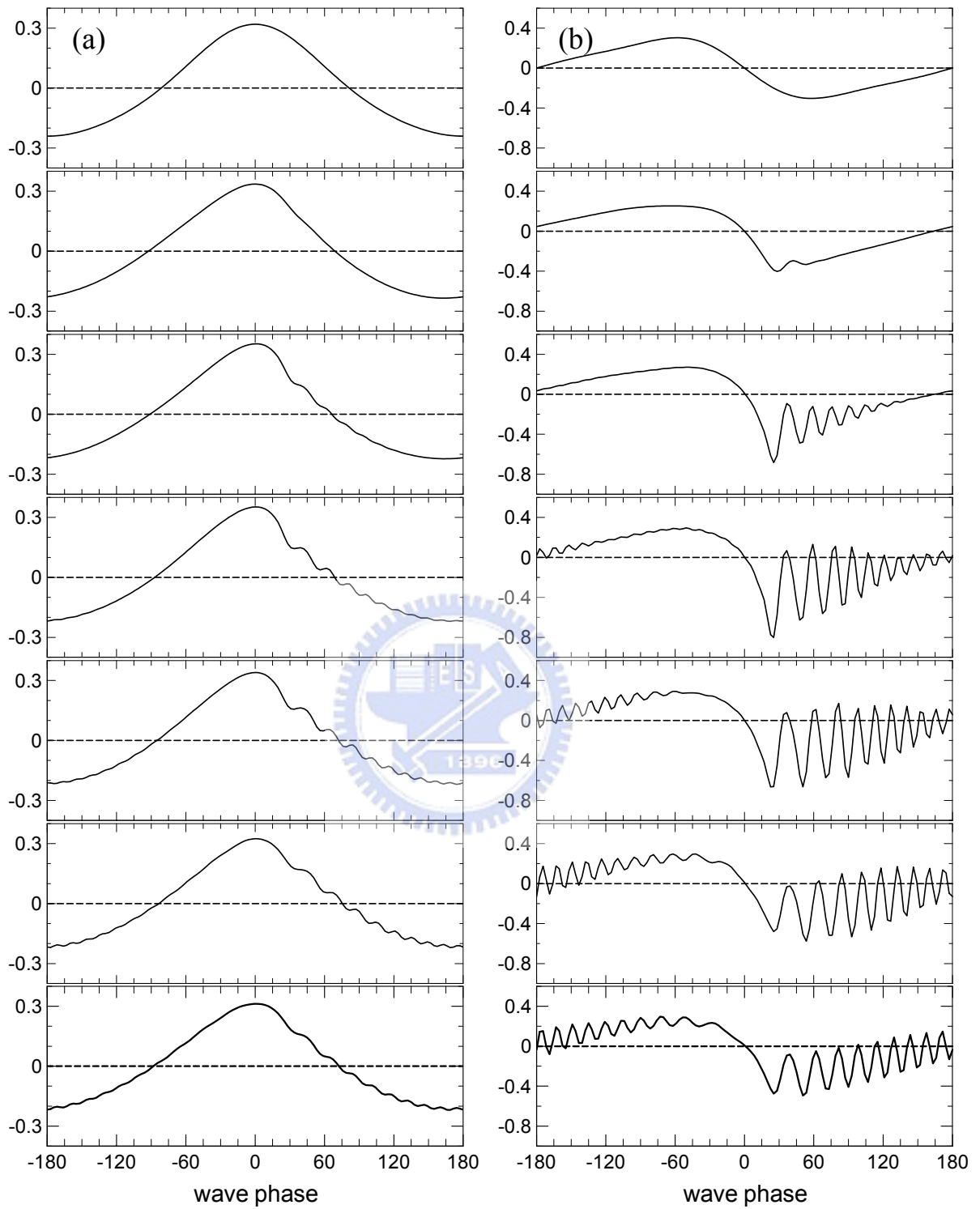


圖 4.17：波長 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

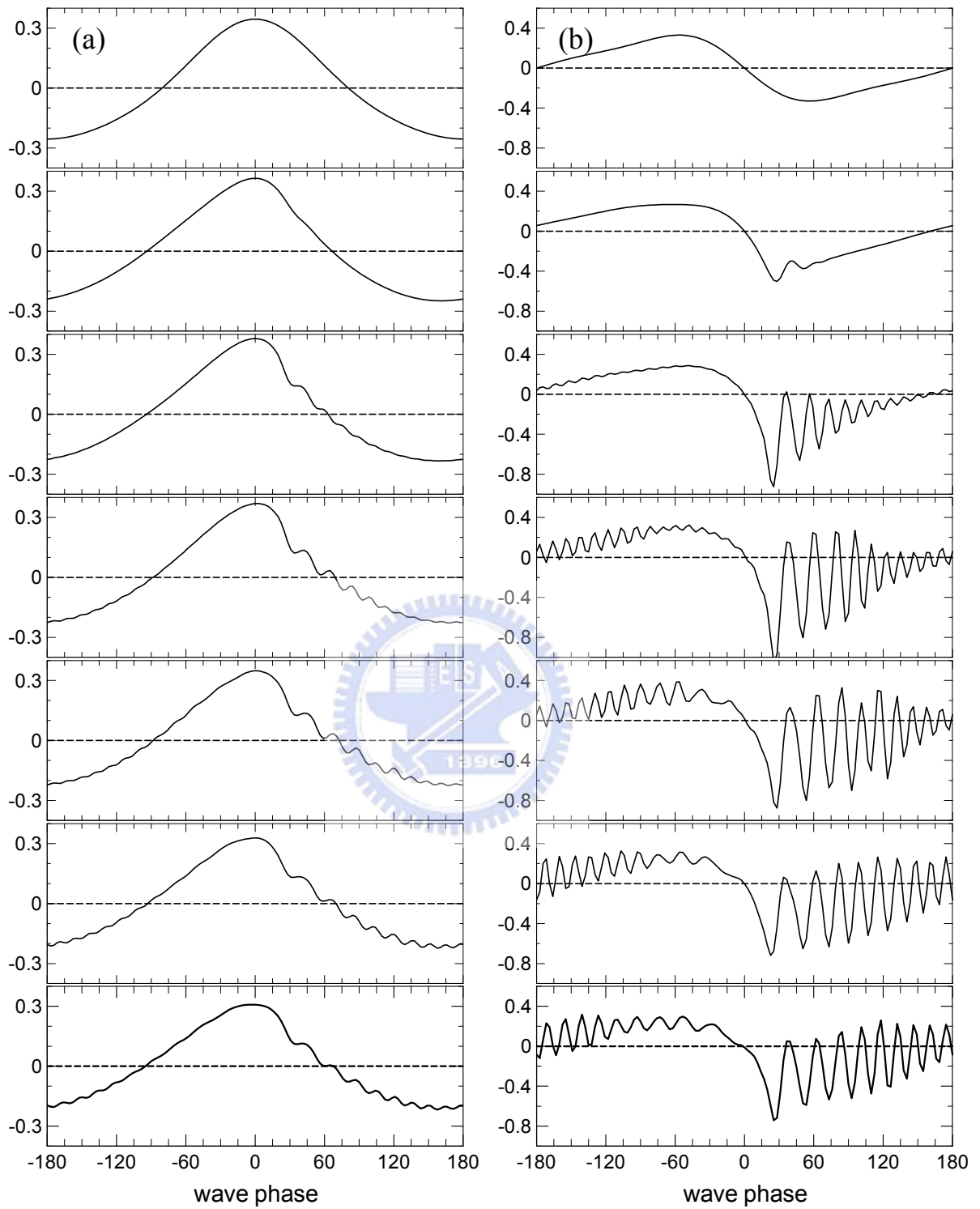


圖 4.18：波長 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.30$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

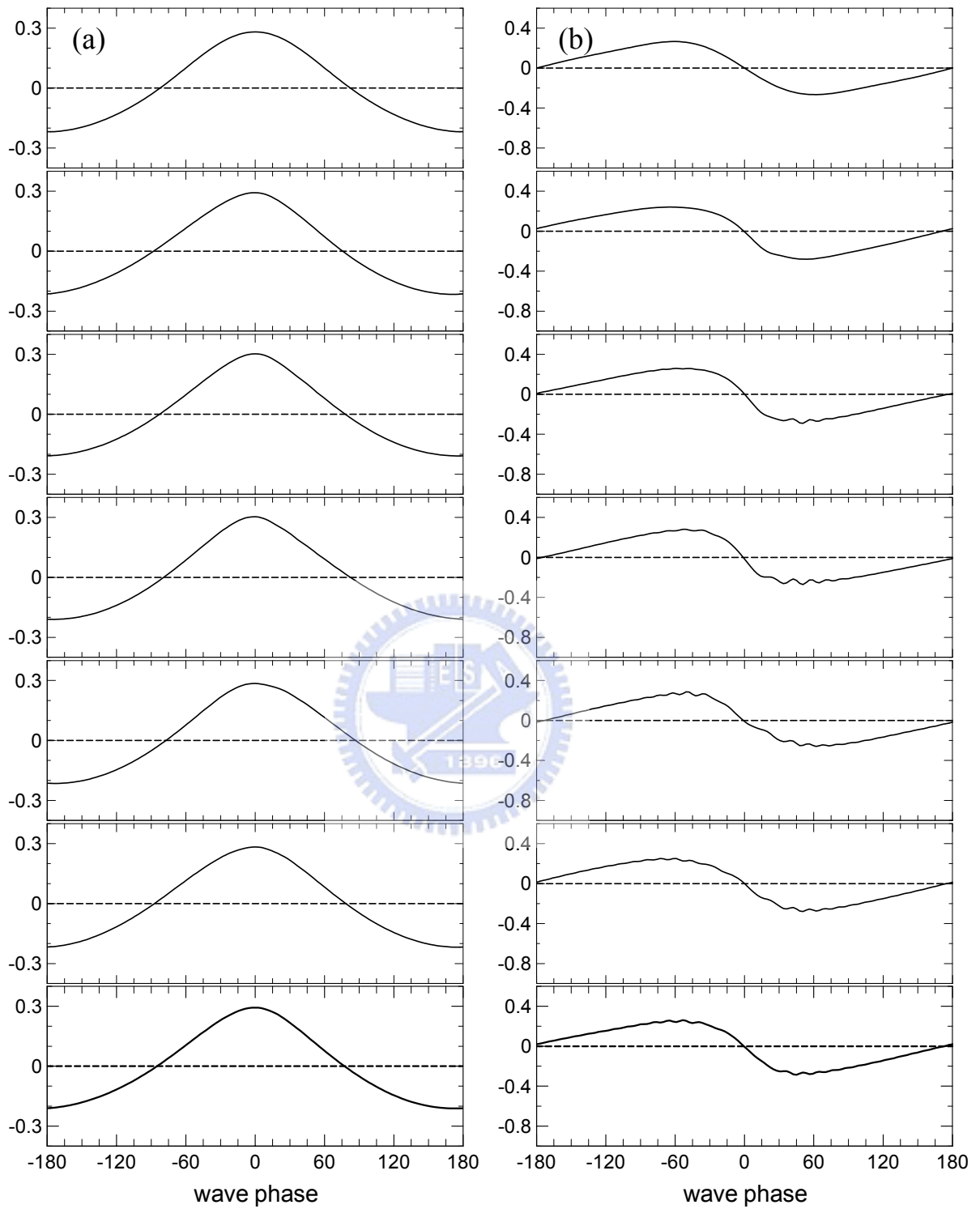


圖 4.19：波長 $\lambda = 10 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

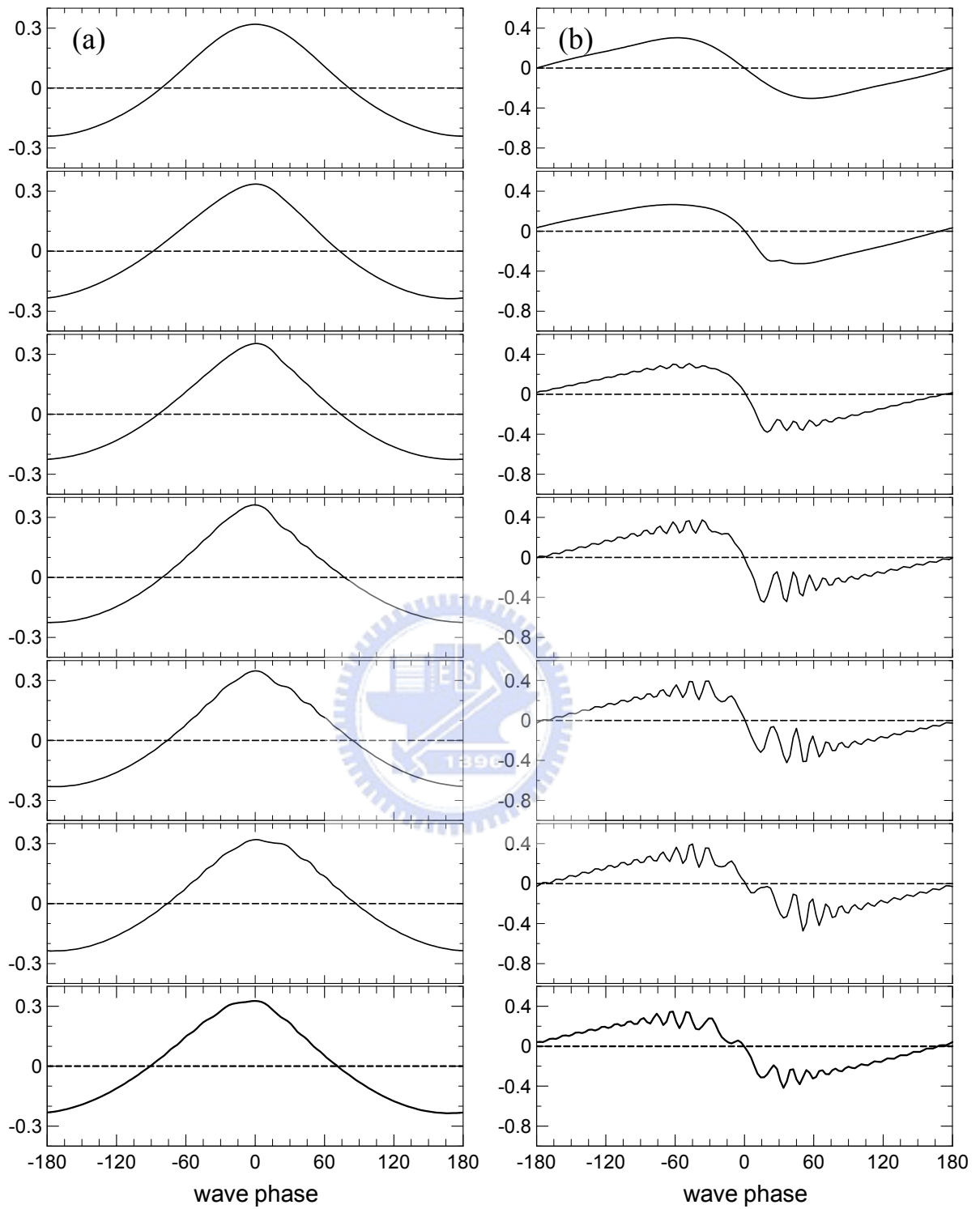


圖 4.20：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.28$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

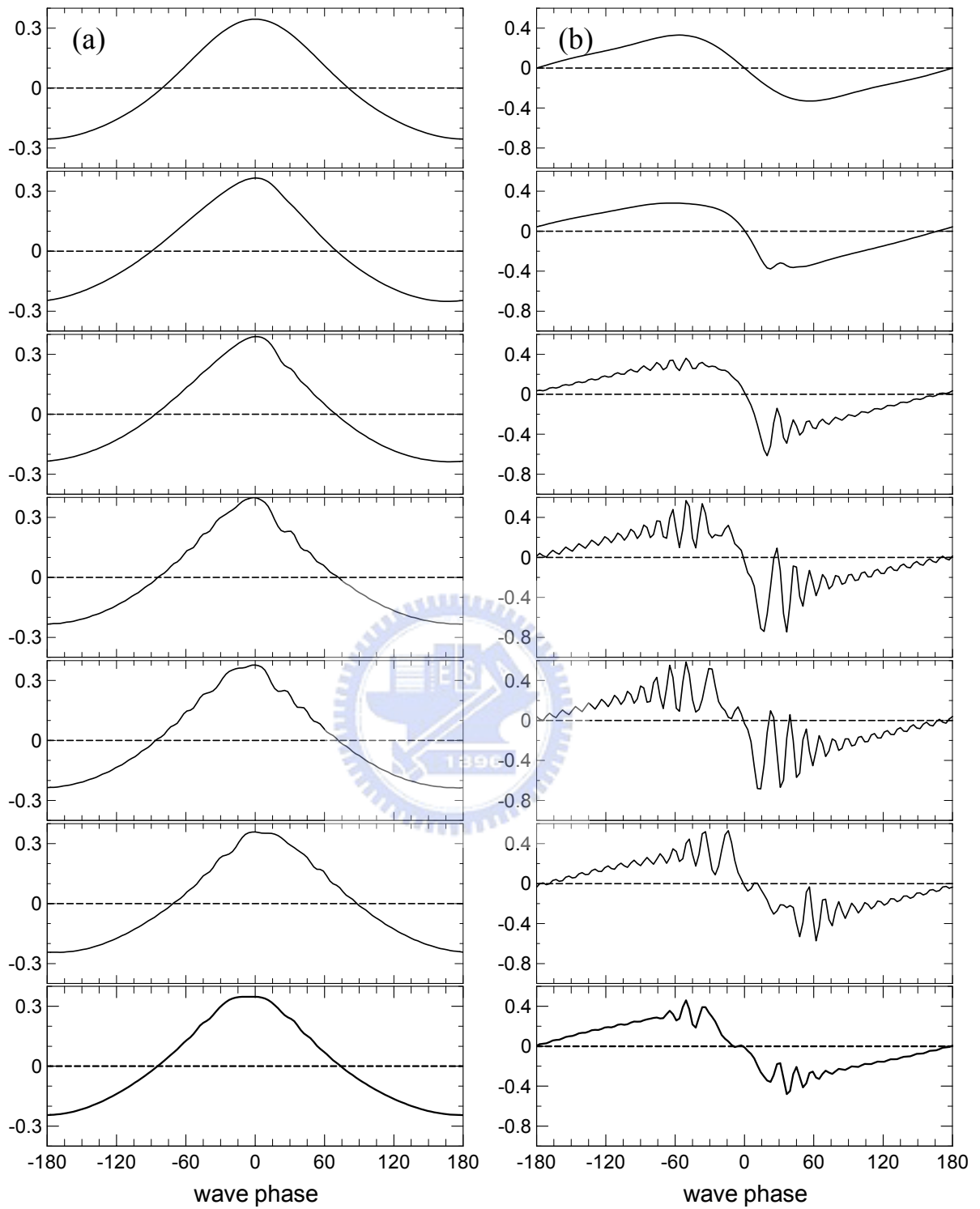


圖 4.21：波長 $\lambda = 10 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.30$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

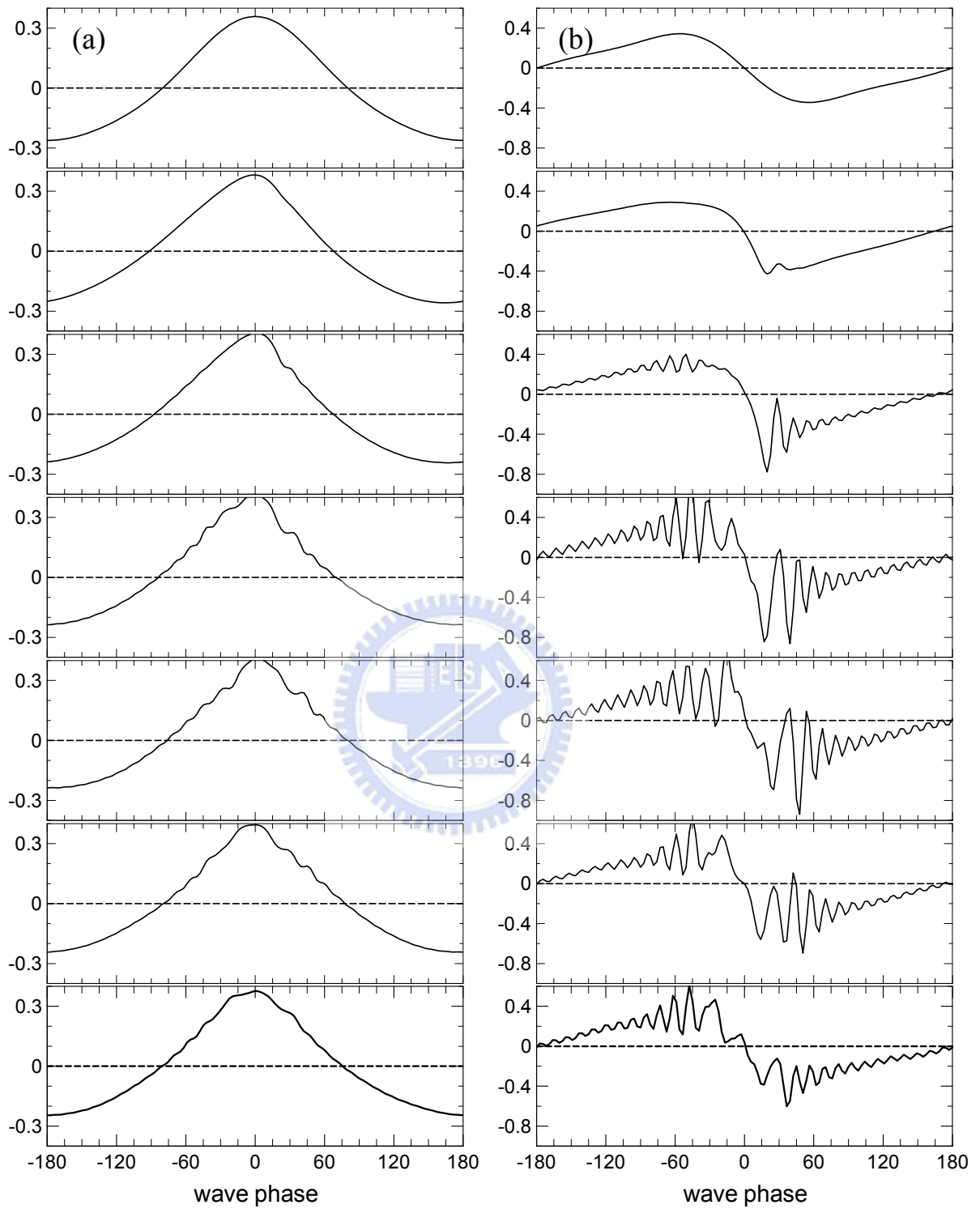


圖 4.22：波長 $\lambda = 10$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.31$ 之前進波在考慮表面張力影響但不受任何風壓之作用下，其(a)波形 (η) 與(b)波形斜率 (η_x) 的演化過程，圖由上至下為於時間 $t = \frac{1}{2} n T_0$ ， $n = 0 \sim 6$ ， T_0 為線性週期。

4.3 旋度場之生成機制

於 4.1 節中顯示初始重力波流場中只存在一相當薄的自由液面邊界層如圖 4.2(i) 所示，然而當寄生表面張力波形成時，在接近液面之流場內於每個表面張力波之波谷/波峯處分別產生一順/逆時針方向之強烈的旋度結構。其中，順時針方向渦旋由波谷處產生後立即被抬升並往上游拖曳，而發展完成之寄生表面張力波之各個順時針方向渦旋之漫延與聯結，最終累積於重力波之波峯下高旋度區，並使得自由液面下方形成一高旋度之順時針方向渦旋帶。而逆時針方向渦旋在形成後即被局限在波峯處。有關波形演化過程中流場旋度的來源以及形成渦旋結構的機制將於本節中探討。

4.3.1 自由液面旋度場

Lugt (1987) 與 Longuet-Higgins (1992) 應用線性自由液面剪應力平衡條件於旋度定義中得到一自由液面旋度概念：當自由液面呈曲面狀態時，即伴隨著旋度場之生成。Wu (1995) 延續此概念推導出二維非穩態自由液面旋度之解析解如下：

$$\omega^0 = -2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial s} + \kappa u_s \right) \quad (4.4)$$

其中 ω^0 為自由液面上旋度值，並定義其順時針方向為正。 \hat{s} 為與邊界相切之切線方向， u_s 為自由液面切線方向速度分量， u_r 為法線方向速度分量， κ 為自由液面曲率。圖 4.23 表示在 4.1 節之模擬過程中波形變化、自由液面曲率變化以及自由液面旋度的演化關係。圖 4.23 中顯示自由液面旋度隨著寄生表面張力波的形成而迅速增加，其於各個寄生表面張力波波谷/波峯處產生正/負旋度值。而其分布型態與自由液面曲率的變化相似，此應證了 Lugt (1987) 與 Longuet-Higgins (1992) 之自由液面旋度概念。圖 4.23 中亦顯示模擬結果與 Wu (1995) 理論值之比較，其自由液面旋度的分布與量值皆與解析解相當穩合。

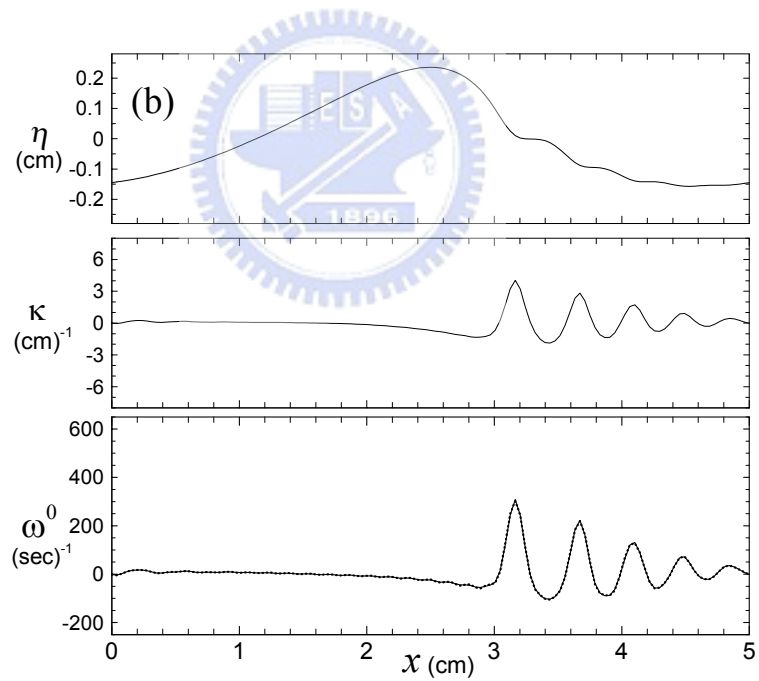
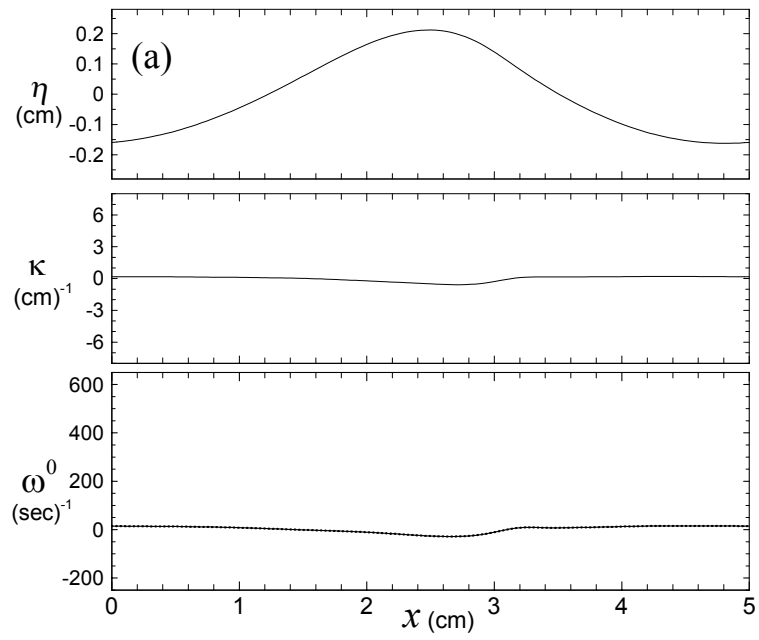


圖 4.23：圖示見下頁。

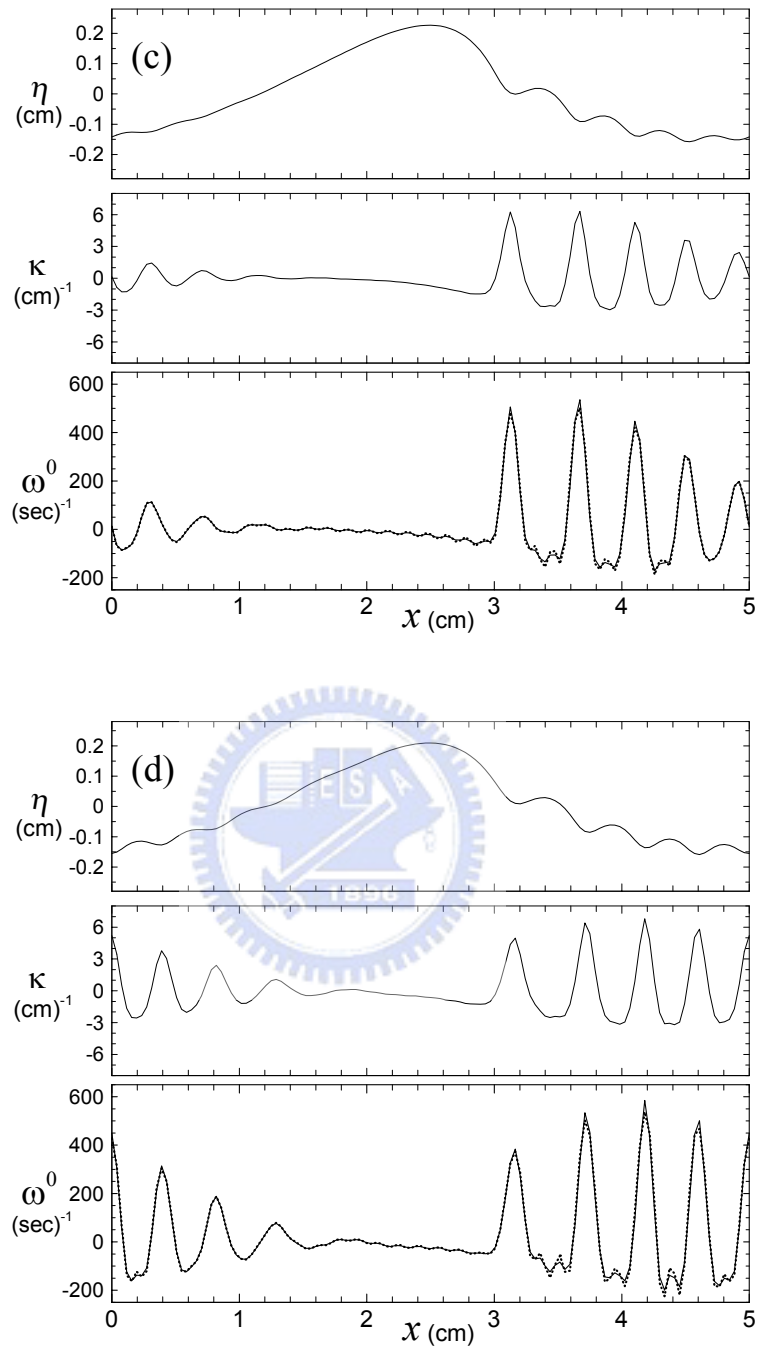


圖 4.23：自由液面旋度分布圖。波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波，其瞬時之波形、波形曲率與自由液面旋度分布，分別於時間(a) $t = 0.25T_0$ ，(b) $t = 1.0T_0$ ，(c) $t = 1.5T_0$ ，(d) $t = 2.0T_0$ ， T_0 為線性理論之週期。其中自由液面旋度分布圖中之實線為模擬結果，虛線為 Wu (1995) 預測值。

4.3.2 通過自由液面之旋度通量

二維流場之旋度傳輸方程式說明流場中旋度變化率等於旋度黏滯消散，如下所示：

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (4.5)$$

若將上式對於整個流場進行體積分，並運用高斯定理將其轉換為邊界面積分，再應用流場底部之自由滑移條件，可將流場總旋度變化率表示如下：

$$\iiint_V \frac{D\omega}{Dt} dV = \iiint_V \nu \nabla^2 \omega dV = \iint_{S_f} \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} dS_f \quad (4.6)$$

其中 \hat{r} 為正向於與自由液面之法線方向，其指向流場外為正。式(4.6)表示流場之總旋度變化率來自於自由液面上之黏滯旋度通量。在上節中，我們已知自由液面旋度隨著寄生表面張力波的形成而迅速增加，然而欲了解自由液面旋度傳送入流場內之機制則必須解析其黏滯旋度通量。以下我們將運用流場切線方向動量方程式分析自由液面黏滯旋度通量之各項動力機制，其詳細之推導過程列於附錄六。自由液面黏滯旋度通量可表示如下：

$$-\nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\frac{\partial u_s}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial (u_s)^2}{\partial s} + \frac{\partial (u_r)^2}{\partial s} \right] + u_r \omega \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (4.7)$$

θ 為自由液面切線方向與重力方向之夾角。式(4.7)中等號右邊之第一項為由非穩態之加速度所引起之旋度通量，第二項為平流加速度所造成之旋度通量，第三與四項則分別為流場之正向應力梯度以及重力加速度造成之旋度通量。圖 4.24 為在 4.1 節之模擬過程中，分別於時間 $t = 0.25T_0$ 與 $t = 1.0T_0$ 時，自由液面黏滯旋度通量之各項分量沿著邊界之分布。圖 4.24(a) 中顯示，在寄生表面張力波尚未發生時，其重力加速度項（折-點線）、平流項（折-點-點線）以及正向應力梯度（實線）皆為造成之自由液面旋度通量之主要分量。但當寄生表面張力波開始發展後，如圖 4.24(b) 所示，平流項（折-點-點線）與正向應力梯度（實線）為其主要分量。而在形成表面張力波之

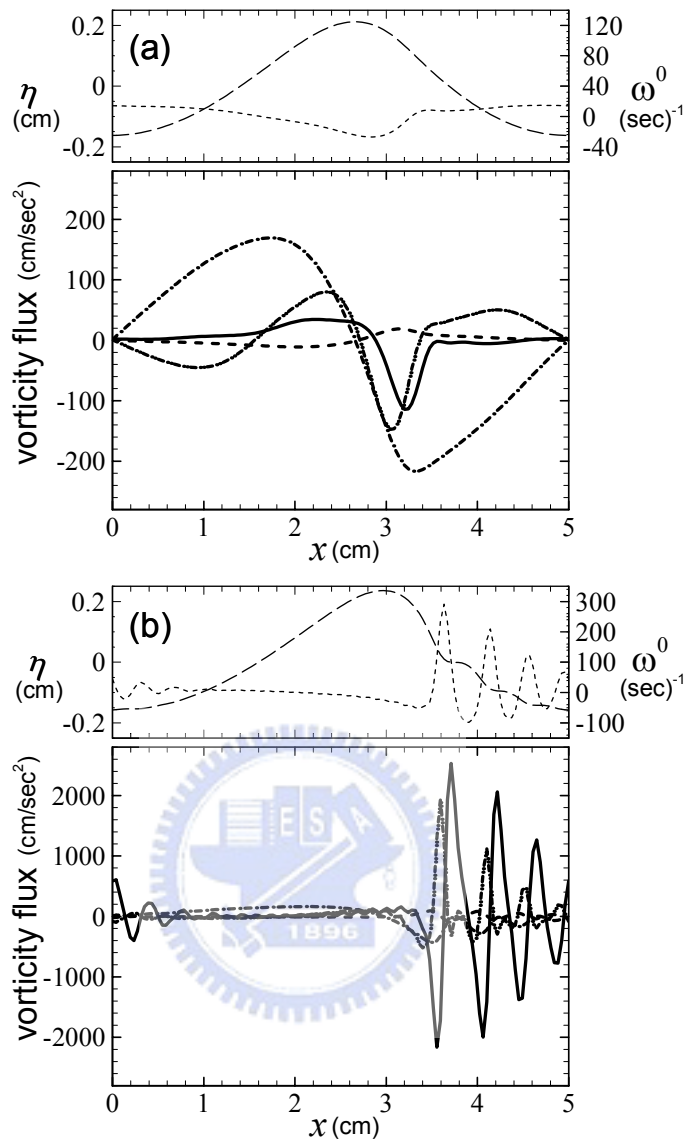


圖 4.24：波長 $\lambda = 5$ cm，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波，其自由液面旋度通量之各項分量延著邊界之分布圖。上圖為波形 (η) (折線) 與自由液面旋度 (ω^0) (點線)。下圖分別表示由非穩態之加速度 (折線)、平流加速度 (折-點-點線)、流場正向應力沿著曲面之梯度 (實線) 以及重力加速度 (折-點-點線) 造成之旋度通量。其中 (a) $t = 0.25T_0$ ，(b) $t = 1.0T_0$ ， T_0 為線性理論之週期。

處，其自由液面旋度通量值由 $O(10^2)$ 增加為 $O(10^3)$ ，表示此時正有大量的旋度由自由液面進入流場中，亦即為提供渦旋結構發展之旋度來源。

4.3.3 渦旋之傳輸

由以上兩節的結論，我們了解當寄生表面張力波產生時，呈現曲面之自由液面形成高旋度值，而自由液面上之平流項與正向應力梯度驅動了黏滯旋度通量，將旋度分布由液面傳送至流場內。在本節中，我們將利用旋度傳輸方程式探討當旋度進入流場內部其分布與運動情形。根據旋度傳輸方程式(4.5)式，旋度場之瞬時變化率為流場平流項與黏滯消散，如下所式：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(u \cdot \nabla) \omega + \nu \nabla^2 \omega \quad (4.8)$$

圖 4.25 顯示在 4.1 節之模擬過程中，流場平流項引起之旋度場瞬時變化率以及旋度場之黏滯消散。於圖 4.25(a) 發現位於緊鄰自由液面邊界處之流場，其旋度平流項分布形態為波前/背項為正/負。此可說明當自由液面旋度傳送入流場內部時，位於波峯/谷之逆/順時針渦旋皆受到平流作用而往上游延伸。而於圖 4.25(b) 顯示於相同流場位置之波峯/谷處，旋度黏滯消散為負/正，此說明受旋度黏滯消散作用，位於波峯/谷之逆/順時針渦旋分別被局限於波峯處/向外擴散至下方流場。而圖 4.25(a) 中位於緊鄰自由液面邊界流場之下方，其旋度平流項分布形態不同於其上方之流場，於重力波之波前/背項為負/正。此說明受旋度黏滯消散作用而擴散至流場內部之順時針渦旋，在受緊鄰邊界流場之平流傳輸將其向後拖曳後，最終累積於重力波之接近波峯之波背處，如圖 4.2(1)所示。

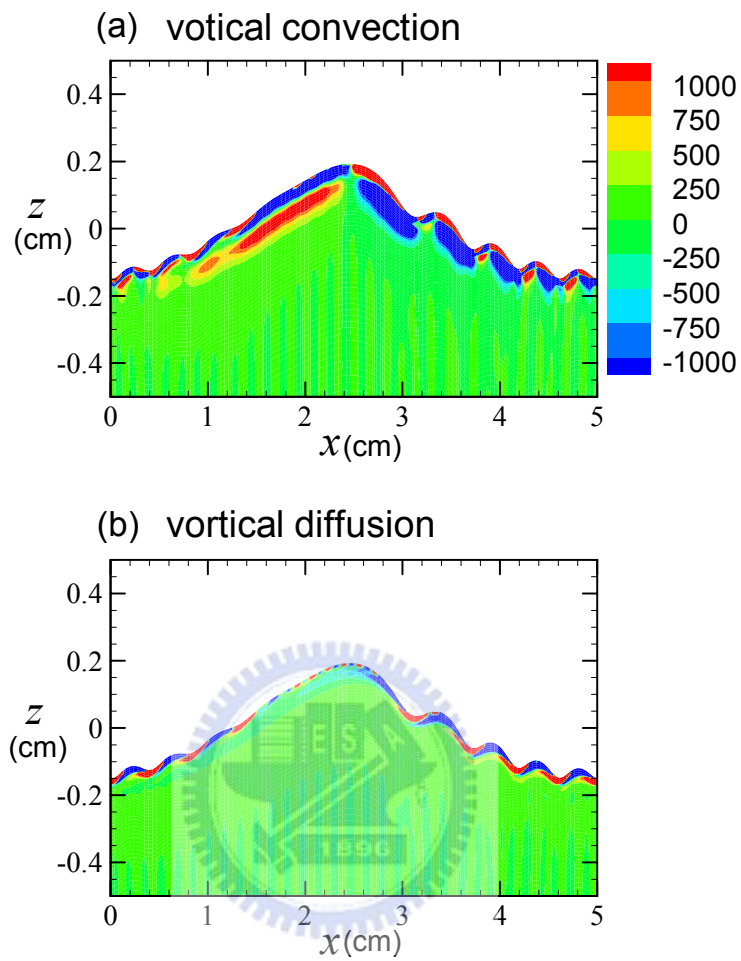


圖 4.25：自由液面之瞬時旋度變化率。(a)旋度受到流場之平流作用而產生之瞬時變化率，(b) 旋度受到黏滯消散作用而產生之瞬時變化率。此為波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之前進波於時間 $t = 2.0T_0$ 時之分布狀態， T_0 為線性理論之週期。

4.4 能量消散

4.4.1 寄生表面張力波引起之能量變化

由上節的討論中，我們已了解在寄生表面張力波形成同時，自由液面旋度受到流場平流項以及正向壓力梯度作用大量傳送進入流場內，並形成強烈的渦旋結構。而本節中將持續地探討此旋度結構於大幅增加自由液面邊界層厚度時，其對於流場能量造成的影響。圖 4.26 顯示於 4.1 節之模擬過程中，重力波總能量 E_w 隨時間的演化（實線）。其重力波總能量包括動能、勢能與表面張力所作的功。另外，於 4.2 節忽略表面張力作用的對照模擬，其重力波總能量演化亦表示於圖 4.26（虛線）。圖中顯示考慮表面張力並產生寄生表面張力波流場之能量消散遠大於忽略表面張力之流場。根據能量消散式：

$$E_w(t) = E_w(0)e^{-\beta t}, \quad (4.9)$$

其能量消散率 β 在寄生表面張力波發展完成時 ($t = 1.5T_0 \sim 2.0T_0$) 達到最大值為 $\beta \approx 1.02 \text{ s}^{-1}$ 。而於忽略表面張力之對照模擬，其 $\beta \approx 0.063 \text{ s}^{-1}$ 與線性理論近似值 $\beta = 4\nu k^2$ 相近。此結果顯示寄生表面張力波的形成將大幅提升流場之能量黏滯消散，其能量消散率約增加為理論值的 16 倍。此能量消散率 $\beta \approx 1.02 \text{ s}^{-1}$ 表示在物理上波浪之總能量將在 0.98 秒後完全被消散殆盡，其能量消散速度非常迅速。此結果證實伴隨寄生表面張力波生成所形成之強烈渦旋結構將大量耗損流場能量。

4.4.2 平均液面斜率與能量消散的關係

隨著寄生表面張力波生成而引起之能量黏滯消散於 Zhang(2002) 之實驗量測結果亦得到證實。Zhang(2002) 推論當表面張力波形成時，流場能量為液面波形斜率的函數，但也提及因於實際流場中量測液面波形斜率之困難度，所以無法得到有效的波形數據以將表面張力波引起之能量損失參數化。然而對於數值模擬而言，我們可以得到隨時間與空間變動之液面波形

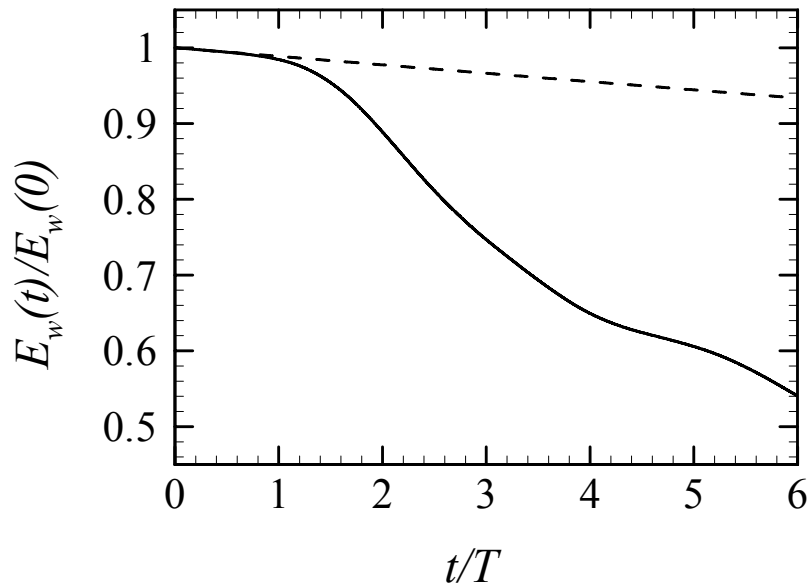


圖 4.26：波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ 之重力波總能量 (E_w) 隨時間之演化，其 T 為線性理論週期。圖中實線為考慮表面張力作用並在液面生成寄生表面張力波之流場能量變化，虛線為忽略表面張力作用而液面上無生成寄生波之流場能量變化。圖中實線之能量消散率最大值 $\beta \approx 1.02 \text{ s}^{-1}$ ，而虛線之能量消散率 $\beta \approx 0.0642 \text{ s}^{-1}$ ，由此可知寄生表面張力波的產生將提高能量黏滯消散率約 16 倍。

斜率的完整資料。因此，我們建立平均液面斜率與能量消散的瞬時關係。圖 4.27 顯示兩組模擬數據，包括波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.25$ （標示為方形點），以及波長 $\lambda = 5 \text{ cm}$ ，初始波形陡度 $ak = 0.28$ （標示為圓形點）之模擬結果。由圖中顯示模擬過程中，瞬時平均液面斜率與能量消散率顯示其兩者間成比值約為 14.0 之線性關係。

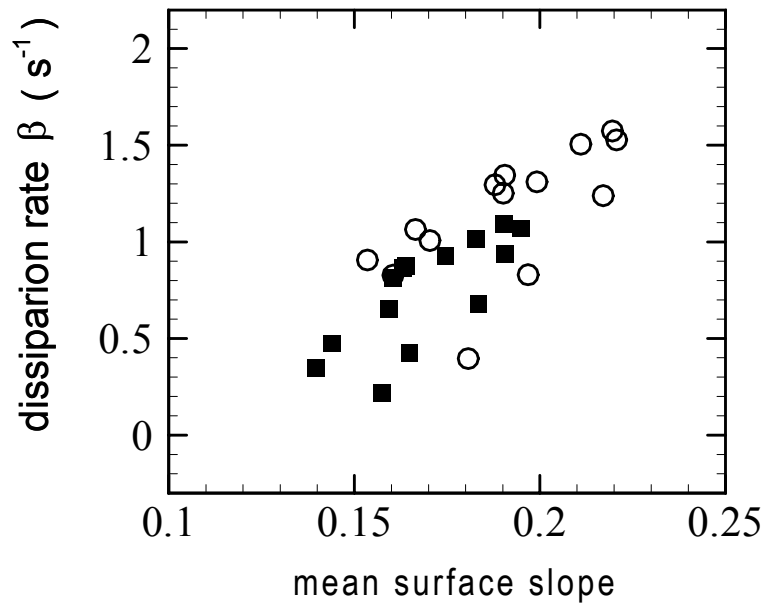


圖 4.27：平均液面斜率與能量消散率的瞬時關係。波長 $\lambda = 5$ cm 的重力波於受表面張力作用下之模擬過程，其瞬時之平均液面斜率與能量消散率的關係。圖中方形點與圓圈點分別為初始波形陡度 $ak = 0.25$ 以及 $ak = 0.28$ 之兩組模擬結果。其皆顯示平均液面斜率與能量消散率間成斜率約為 14 的線性關係。

第五章 三維非線性自由液面流場之模擬

為了確認本文所建立之非線性自由液面紊流邊界層模式對於海洋表面波形與流場結構的模擬能力，本章將試以此模式模擬存在於自然界中之三維自由液面流場。首先是短峰型重力波（short-crested wave），其為不同傳播方向之前進波間交互作用而形成的菱形結構波形。再者是新月型重力波（crescent wave），為重力波與其不安定擾動模態間交互作用所演化生成之馬蹄形結構波形。此兩者皆為重力波傳遞過程中產生波浪非線性交互作用所形成的三維自由液面流場結構。最後，我們將模擬一風吹拂下之三維剪紊流流場。此流場中包括非線性液面運動以及自由液面與紊流場間的交互作用，而模擬結果中將呈現重力波、表面張力波以及沿流方向紊流條痕三種不同尺度的流場表面結構。

5.1 短峰型重力波

在風產生波浪的實驗觀察中，如 Ebuchi *et al.* (1987)、Caulliez and Collard (1999) 與 Veron and Melville (2001) 等皆發現在生成三維風波的演化初期，自由液面上存在著一二維波形結構。此液面二維波形結構為呈菱形之重力波並伴隨著寄生表面張力波於其前波相。此菱形波形結構為兩個對稱斜向前進波之疊合，其波長約為 4.0~10.0 cm，而波前進方向與風吹拂方向之夾角各為 $\pm 30^\circ$ 。

5.1.1 模擬之初始條件

我們以一弱非線性短峰型重力波流場為模擬此菱形波形結構與其寄生表面張力波流場之初始條件。根據 Hsu *et al.* (1979) 的理論解析，弱非線性之短峰型重力波為兩個斜向入射前進波的疊合，此兩入射波之波長 λ 與波形陡度 ak 皆相同，而其入射方向與風吹拂方向間的夾角分別為 $\pm \varphi$ 。模擬流場之計算區間在 x 與 y 方向分別為 $\lambda/\sin \varphi$ 與 $\lambda/\cos \varphi$ ，而初始流場在 x 與 y 方向皆為對稱波形且其流場邊界皆為週期條件。參考 Caulliez and Collard (1999) 之

實驗結果，我們將模擬參數設定為入射波波長 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，風吹拂方向為 $+x$ ，波前進方向與風向的夾角 $\varphi = 30^\circ$ ，初始速度場為 Hsu *et al.* (1979) 所推導之理論近似解，其型式詳見於附錄七。根據入射波波長與入射角，模擬計算區間為一長 8.66 cm ，寬 15.0 cm ，而水深設定為 8.0 cm 之流場，模擬所使用的網格數目為 128^3 。

5.1.2 模擬結果

兩初始入射波之波長為 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.30$ 所形成之三維短峰型重力波波形表示於圖 5.1。其所顯示之液面為計算區間於水平方向擴張一倍之流場範圍。圖中分別表示於時間 $t = 0.25T_0$ (圖 5.1(a, b)) 與 $t = 2.0T_0$ (圖 5.1(c, d)) 之菱形結構波形模擬結果，其中 T_0 為前進波線性週期。風吹拂之方向為 $+x$ ，圖 5.1(a, c) 為瞬時液面沿流向導數 (η_x)，圖 5.1(b, d) 為瞬時液面橫向導數 (η_y)。圖 5.1 中表面菱形結構延著風吹方向前進，而波形於傳遞過程中呈現近似穩定的狀態。但當我們將初始入射波之波形陡度提高為 $ak = 0.35$ 時，如圖 5.2 所示，由於其非線性效應增強，發展初期之對稱波形在 $t = 2.0T_0$ 時，其菱形結構在沿流向逐漸變化為非對稱波形，且於波前相產生寄生表面張力波列。圖 5.2(c, d) 所顯示之表面波形結構與 Caulliez and Collard (1999) 以及 Veron and Melville (2001) 在實驗中所觀察之風波結構一致，而形成此短峰型重力波與寄生表面張力波之自由液面波形結構的動力機制包含了兩入射重力波間、重力波與表面張力波間以及兩組表面張力波列間之非線性交互作用。

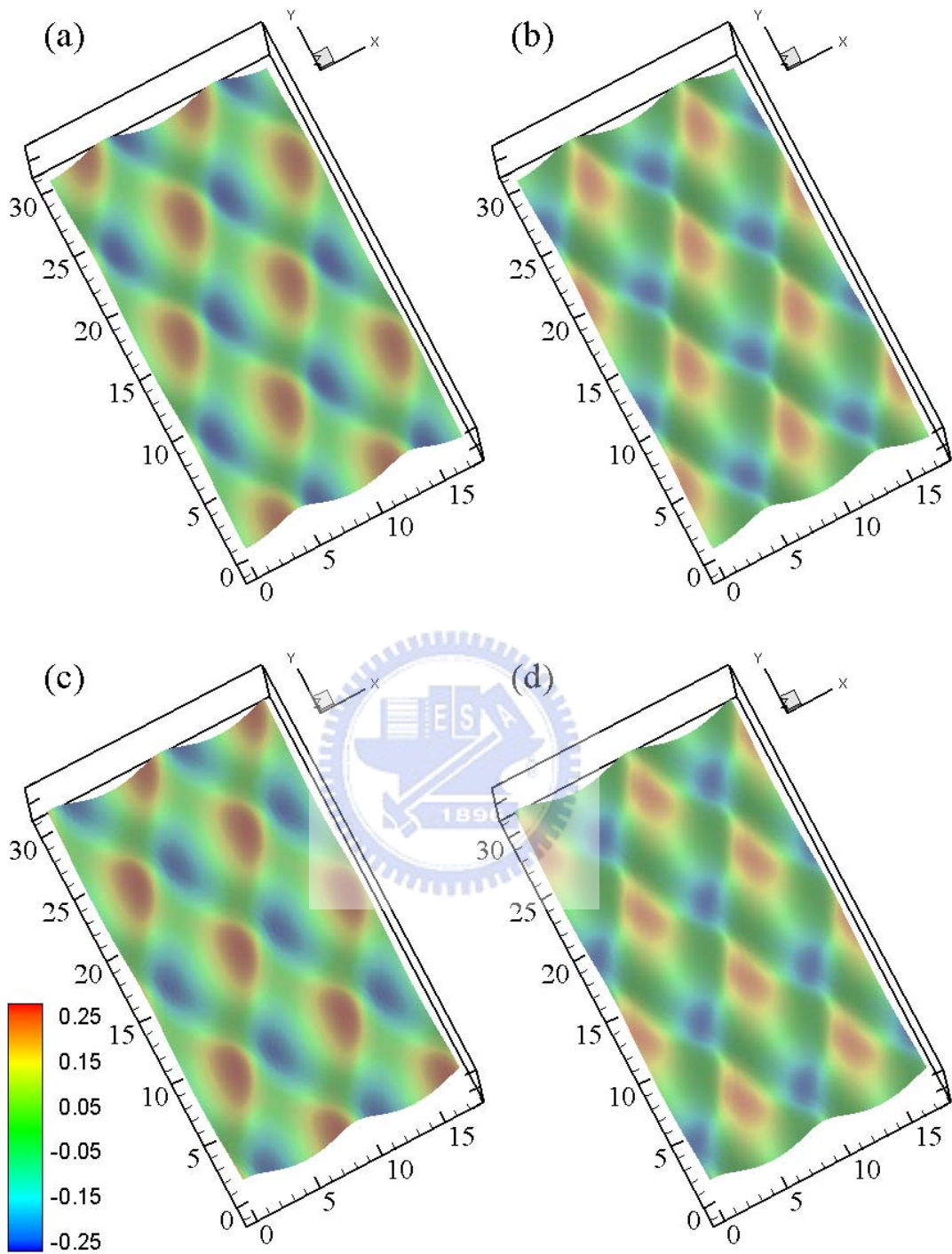


圖 5.1 :短峰型重力波之三維菱形結構波形於時間 $t = 0.25T_0$ (a, b) 與 $t = 2.0T_0$ (c, d), T_0 為線性週期。圖中風吹拂方向為 $+x$, (a, c) 為瞬時液面沿流向導數 (η_x), (b, d) 為瞬時液面橫向導數 (η_y)。此算例之兩初始入射波波長為 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$, 波形陡度 $ak = 0.30$ 。

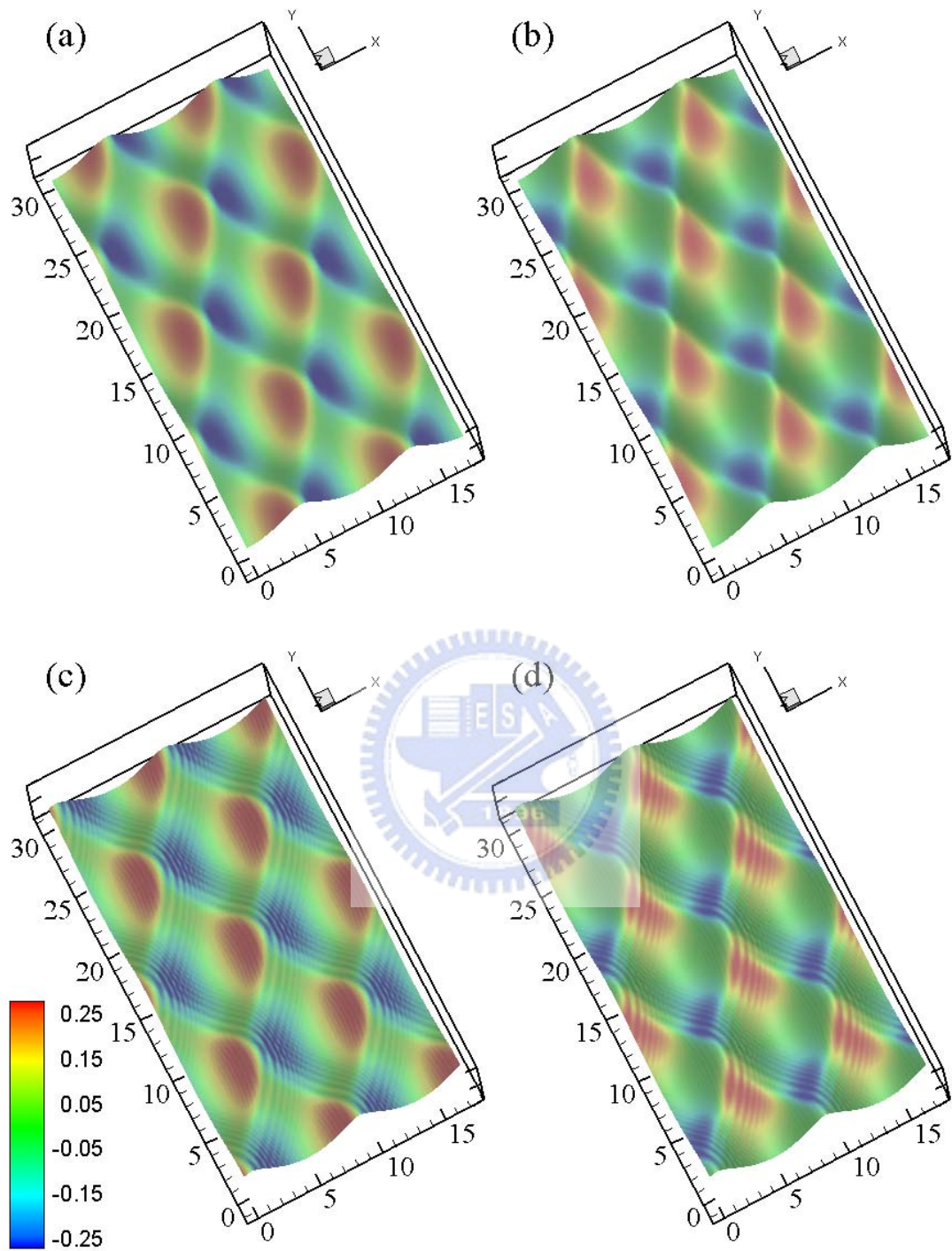


圖 5.2：在考慮表面張力作用下，短峰型重力波之三維菱形結構波形於時間 $t = 0.25T_0$ (a, b) 與 $t = 2.0T_0$ (c, d)， T_0 為線性週期。圖中風吹拂方向為 $+x$ ，(a, c) 為瞬時液面沿流向導數 (η_x)，(b, d) 為瞬時液面橫向導數 (η_y)。此算例之兩初始入射波波長為 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.35$ 。

5.2 新月型重力波

新月型重力波是一在液面呈現新月型或馬蹄型波形結構之三維重力波，於 Su (1982)、Su *et al.* (1982)、Caulliez & Collard (1999) 與 Collard & Caulliez (1999) 等水波實驗中皆觀察到此型態的液面結構。McLean (1982) 根據安定性分析結果指出此新月型重力波是由前進波列與其二維不安定模態發生交互作用而形成之三維流場。而近期的數值研究如 Fructus *et al.* (2005a, b) 與 Xue *et al.* (2001) 也確認此不安定機制會使前進波列引發三維波形擾動進而演化成如實驗所見之新月型液面波形結構。

5.2.1 模擬之初始條件

參照 Fructus *et al.* (2005a) 與 Xue *et al.* (2001) 的數值計算，我們考慮自由液面的運動為三維擾動波與二維前進波列之疊合，而模擬之初始流場詳列於附錄八。其擾動波形振幅為前進波波幅之 20%，沿流向與橫向擾動波數為： $k_x = (1+p)k$ ， $k_y = qk$ ，其中 k 為前進波波數。根據 McLean (1982) 之安定性分析，其次簡諧第二型態中最不安定模態的 p 與 q 值分別為 0.5 與 1.23。本模擬之前進波列波長 $\lambda = 7.5\text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.25$ ，計算區間之沿流向與橫向長度分別為 $\lambda/p = 15.0\text{ cm}$ 與 $\lambda/q = 6.1\text{ cm}$ ，水深設定為 6.0 cm，而於沿流向、橫向以及垂直方向所使用的網格數目為 $128 \times 64 \times 128$ 。

5.2.2 模擬結果

三維新月型重力波於時間 $t = nT, n = 0 \sim 5$ 之演化過程顯示於圖 5.3。圖中所顯示之液面為計算區間於水平方向擴張一倍之流場範圍。由圖 5.3 (b) 可看出，在模擬之初期，擾動波形即明顯的增強。在圖 5.3(c) 中，二維前進波在 x 與 y 方向之波形位移逐漸生成，圖 5.3(d) 中顯示 y 方向出現交錯的波形。而在圖 5.3(e) 與 (f) 中，新月型波形結構已發展完成。此位於波峯之波前列呈尖銳形之三維新月型波形結構與 Fructus *et al.* (2005a) 與 Xue *et al.* (2001) 以邊界積分數值方法計算之結果相當符合。

由於此新月型重力波亦為波長較短之重力波，因此表面張力可能對於

其傳遞過程產生影響。而本數值模式具有解析小於重力波尺度之流場結構的能力，因此，相對於圖 5.3，圖 5.4 為相同模擬條件但加入表面張力作用的模擬結果。相似於圖 5.3，在模擬初期擾動波形即明顯的增強，如圖 5.4(b) 所示，而同時二維前進波波前相產生寄生表面張力波波列。隨著時間演化，二維前進波在 x 與 y 方向之波形位移逐漸生成，而其所伴隨之寄生表面張力波也產生相同的波形位移，如圖 5.4(c, d) 所示。在圖 5.4(c, d, e) 中顯示，當新月型重力波生成的同時，產生位移之各個寄生表面張力波列間亦發生相互影響而生成交錯的表面張力波波列。由於表面張力波的產生，使得新月型重力波的能量受到大量的黏滯消散，因此，在圖 5.4(e, f) 中尖銳之三維新月型結構亦相較於圖 5.3(e, f) 為不明顯。



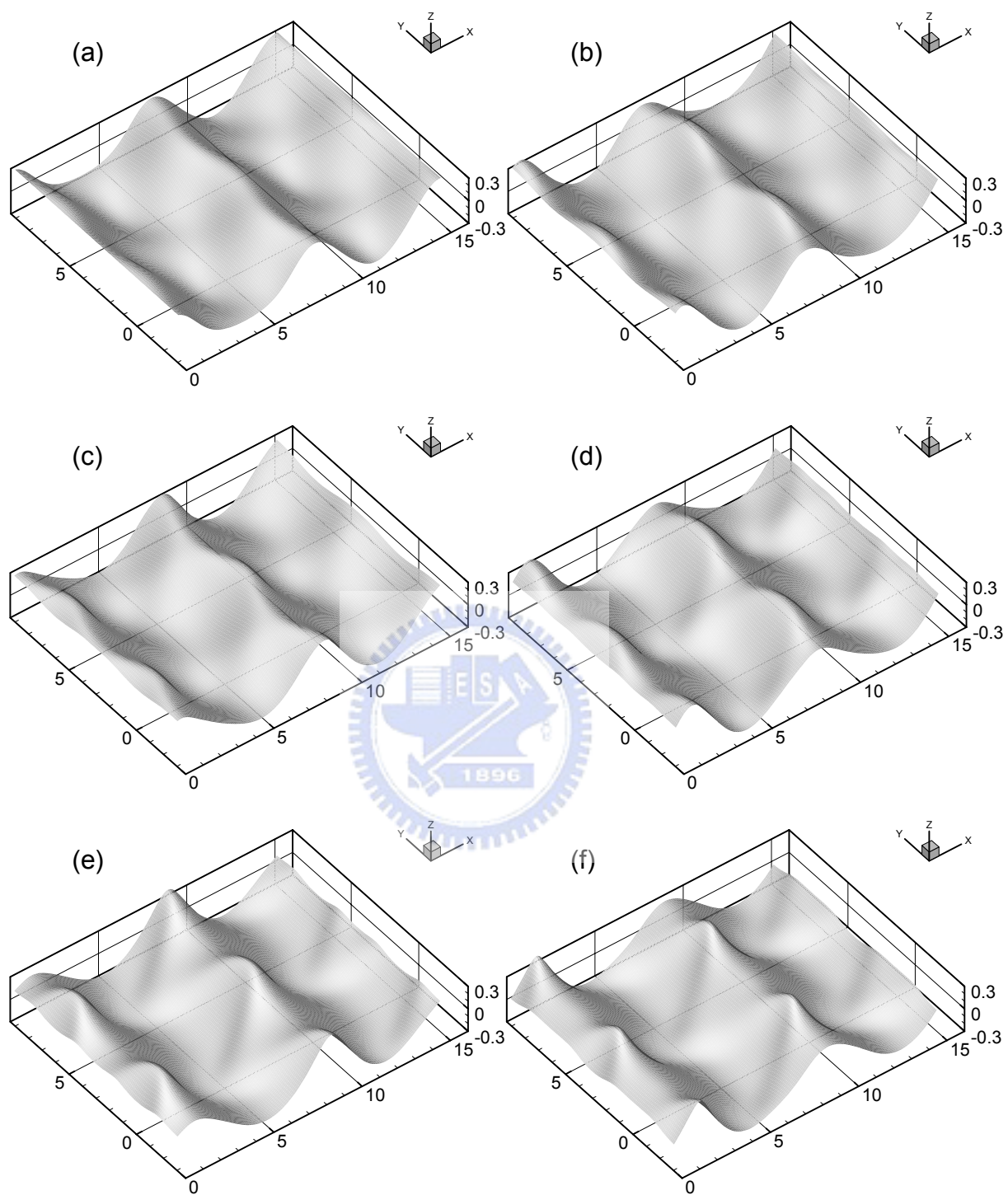


圖 5.3：二維前進波列受三維不安定擾動而形成三維新月型波之演化過程。(a)~(f) 分別為時間 $t = nT_0$, $n = 0 \sim 5$, T_0 為前進波之線性週期。初始前進波波長為 $\lambda = 7.5$ cm，波形陡度 $ak = 0.25$ ，波形前進方向為 $+x$ ，而擾動波幅參數 $\varepsilon = 0.2$ 。

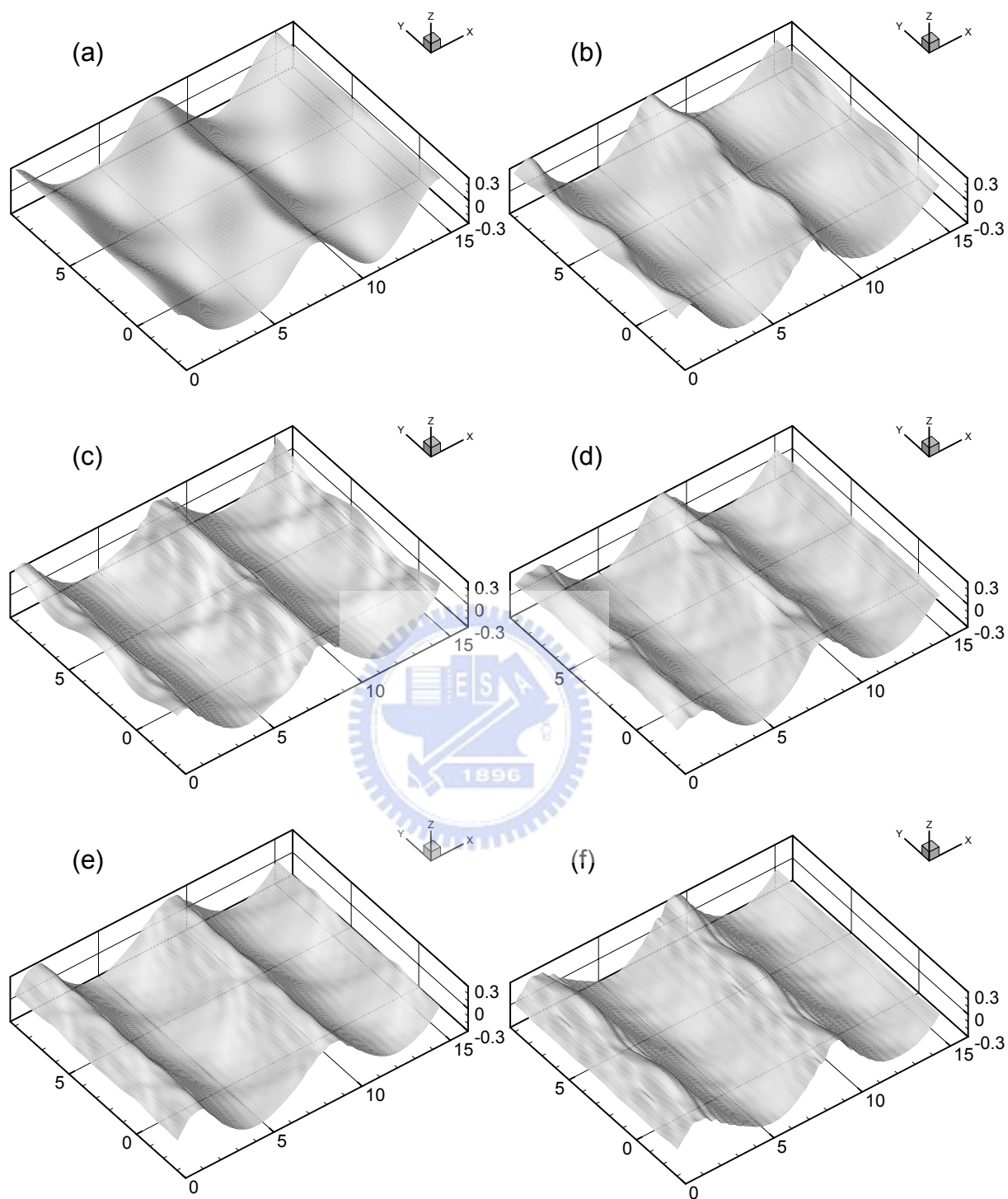


圖 5.4：在考慮表面張力作用下，二維前進波列受三維不安定擾動而形成三維新月型波之演化過程。(a)~(f) 分別為時間 $t = nT_0$, $n = 0 \sim 5$, T_0 為前進波之線性週期。初始前進波波長為 $\lambda = 7.5 \text{ cm}$ ，波形陡度 $ak = 0.25$ ，波形前進方向為 $+x$ ，而擾動波幅參數 $\varepsilon = 0.2$ 。

5.3 風波下之剪紊流場

由風所趨動之海面運動為一結構複雜的流場，其動力過程包括：風將能量經由海-氣交界面之應力傳輸進入流場內、風應力引起之剪力流與重力波交互作用，以及紊流邊界層流場運動等。而在這些過程中，海面上衍生出之流場結構向來被視為研究海-氣交互作用的重要特徵 (Zappa *et al.*, 2001)。關於風波之流場內部結構，在早期的實驗量測中得到些初步的結論，包括：Okuda (1982) 在接近風波波峯靠近液面處之流場存在著一高旋度區；Ebuchi *et al.* (1987) 風波波形前相有數個成列之寄生表面張力波；其波長隨著與主波波峯之距離遞減，而波形後相之波背處產生與風向平行之條痕結構。近年來海面紅外線影像 (Zappa *et al.*, 1997) 與海面微波遙測資料 (Rozenberg *et al.*, 1999) 等技術也應用於量測海洋表面流場結構特徵並進而推測其底下流場內部結構。

本論文所建立之數值模式具有解析「非線性自由液面運動」以及其「紊流邊界層流場」的能力，因此，我們試以數值模式對於風所趨動之流場運動進行模擬，期望所得的數值結果可以提供於實驗量測之研究結論進行定性與定量的驗證。

5.3.1 模擬之初始條件

我們假設 Ebuchi *et al.* (1987) 所觀察到之風波液面結構是由風剪紊流與重力波之交互作用所形成，因此，設定模擬的流場包含二維前進波與三維剪紊流，且其自由液面邊界上受到正向風壓應力與風剪應力的作用。模式中有一關於風應力的設定如下：Fedorov and Melville (1998) 根據風壓輸入能量將與表面張力波所引起之黏滯能量消散相互平衡的概念推導出自由液面正向風應力之近似解為：

$$\tau_n^s(x, t) = p_0 \rho c_0^2 \cos(kx - \Theta_n - ct) \quad (5.1)$$

其中 p_0 為正向風應力參數； $c_0 = (g/k + \sigma k)^{1/2}$ 為線性理論波速； Θ_n 為最大正向

應力與波峯間之相位差。而參照 Banner and Peirson (1998) 的量測結果，自由液面上沿流方向之切線風剪應力可近似為：

$$\tau_{t_1}^s(x, t) = \tau_0 [1 + \cos(kx - \Theta_t - ct)] \quad (5.2)$$

其中 τ_0 為平均剪應力值，而 Θ_t 為最大剪應力值與波峯的相位差。模擬之初始流場包含二維非線性三階 Stokes 波 $\vec{v}_w(x, z)$ 、二維沿流方向之風驅動平均剪力流 $U(x, z)$ 以及三維紊流擾動速度場 $\vec{v}'(x, y, z)$ ，表示如下：

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}_w(x, z) + U(x, z) \cdot \vec{i} + \vec{v}'(x, y, z) \quad (5.3)$$

其中，風驅動之平均剪力流場速度分布為：

$$U(x, z) = \left[\frac{\tau_{t_1}^s(x, 0)}{2\tau_0} \right] U_0 \exp\left(\frac{2\tau_0}{\rho\nu U_0} z \right) \quad (5.4)$$

其中 U_0 為液面上 ($z = \eta$) 剪力流速之平均值。在此並引用 Tsai *et al.* (2005) 之初始紊流速度場 $\vec{v}'(x, y, z)$ ，此初始紊流速度場經過數值處理程序後已為一組具有等向性之隨機擾動流場。模擬之初始前進波波長 $\lambda = 7.5$ cm；波形陡度 $ak = 0.25$ ，液面上平均剪力流 $U_0 = 10.0$ cm/s。初始之流場擾動參數與液面擾動參數分別設定為 $\|\vec{v}'\|_{L_\infty} = 0.3 \|\vec{v}_w\|_{L_\infty}$ 與 $\|\eta'\|_{L_\infty} = 0.1 \|\eta_w\|_{L_\infty}$ 。根據 Banner and Peirson (1998) 的量測，自由液面上之風應力參數設定如下：正向風應力參數 $p_0 = 0.00078$ ；所受之最大正向壓力為 $\|\tau_n^s\| = 0.963$ dyn/cm²，而其與波峯間之相位差 $\Theta_n = -162^\circ$ 。平均剪應力 $\tau_0 = 2.0$ dyn/cm²，其最大值與波峯的相位差 $\Theta_t = -50^\circ$ 。計算區間之沿流向與橫向長度皆為 7.5 cm，水深設定為 6.0 cm，所使用的網格數目為 128³。

5.3.2 模擬結果

於風波下之剪紊流場數值模擬中發現，模擬結果與 Ebuchi *et al.* (1987) 所描述之表面流場結構相當符合。圖 5.5 中分別顯示自由液面高度 (η)、自由液面沿流方向梯度 (η_x) 與橫向梯度 (η_y) 於時間 $t = 1.0T_0$ 與 $t = 2.0T_0$ 之分布

等值圖， T_0 為重力波之線性週期。而瞬時之自由液面紊流速度場 (u', v', w') 表示於圖 5.6，其中紊流速度定義為：

$$u' = u(x, y, z) - \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} u(x, \tilde{y}, z) d\tilde{y} , \quad (5.5)$$

$$v' = v(x, y, z) - \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} v(x, \tilde{y}, z) d\tilde{y} , \quad (5.6)$$

$$w' = w(x, y, z) - \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} w(x, \tilde{y}, z) d\tilde{y} , \quad (5.7)$$

其中 λ_y 為流場區間之橫向長度。由圖 5.5(a, c, e) 之自由液面變化可看出在發展初期液面高度變化為單一之重力波，而隨時間演化，於重力波之前波相處出現寄生表面張力波之波前列，並逐漸發展至波背處，如圖 5.5 (b, d, f) 所示。圖中所顯示之寄生表面張力波以及橫向梯度於重力波前相之擾動增量皆與 Ebuchi *et al.* (1987) 以及 Veron and Melville (2001) 觀察之風波結構相似。而其瞬時之表面紊流場，除了隨著寄生表面張力波的生成而於重力波前相集中外，於接近重力波波峯之波背處出現平行於沿流方向之條痕結構，此條痕結構於紊流橫向流速等值圖中相當明顯，如圖 5.6 (b) 所示。此液面條痕結構的橫向間距大約為 0.625 cm，與 Ebuchi *et al.* (1987) 觀察結果非常相近。圖 5.7 以三維波形圖顯示於 $t = 2.0T_0$ 時之液面變化與紊流橫向流速分布，並分別由迎風方向以及背風方向觀察其結構，圖 5.7(a) 與 Ebuchi *et al.* (1987) 之圖 11 中所呈現的風驅動流場結構概念圖非常相近。

而於圖 5.6(b, d, f) 中亦發現在寄生表面張力波生成之處，各紊流流速分量皆有二維振盪，其正負速度於沿流向與橫向之相互交錯分布形成棋盤式流場。我們推測此棋盤式流場結構是由紊流場所演生的沿流向條痕結構與橫向表面張力波列運動軌跡速度場間交互作用而形成。

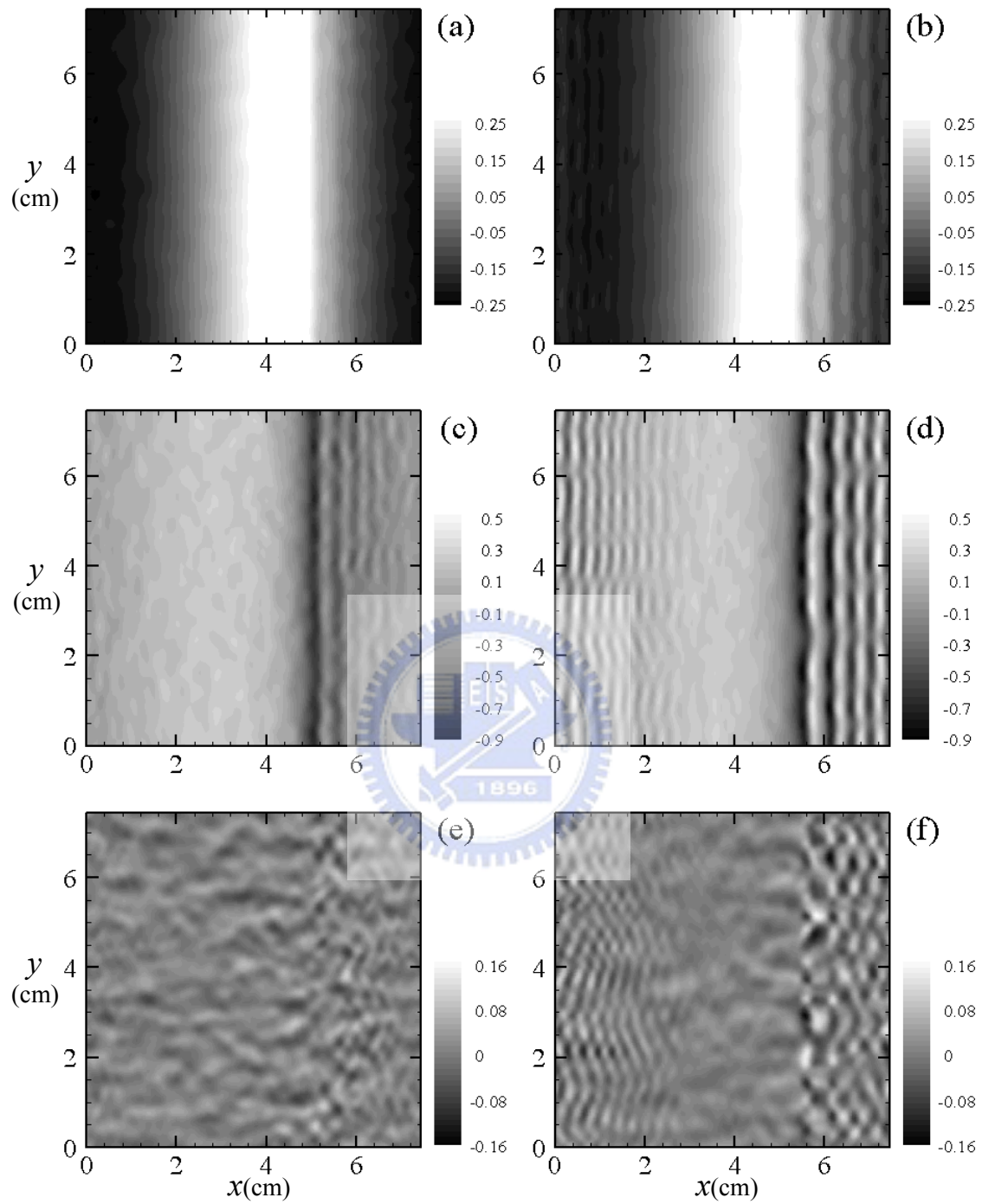


圖 5.5：三維風波之液面高度(η)(a, b)、沿流向之液面斜率(η_x)(c, d)與橫向之液面斜率(η_y)(e, f)於時間 $t = T_0$ (a, c, e)與 $t = 2T_0$ (b, d, f)， T_0 為線性理論週期。風與重力波前進方向皆為 $+x$ 。

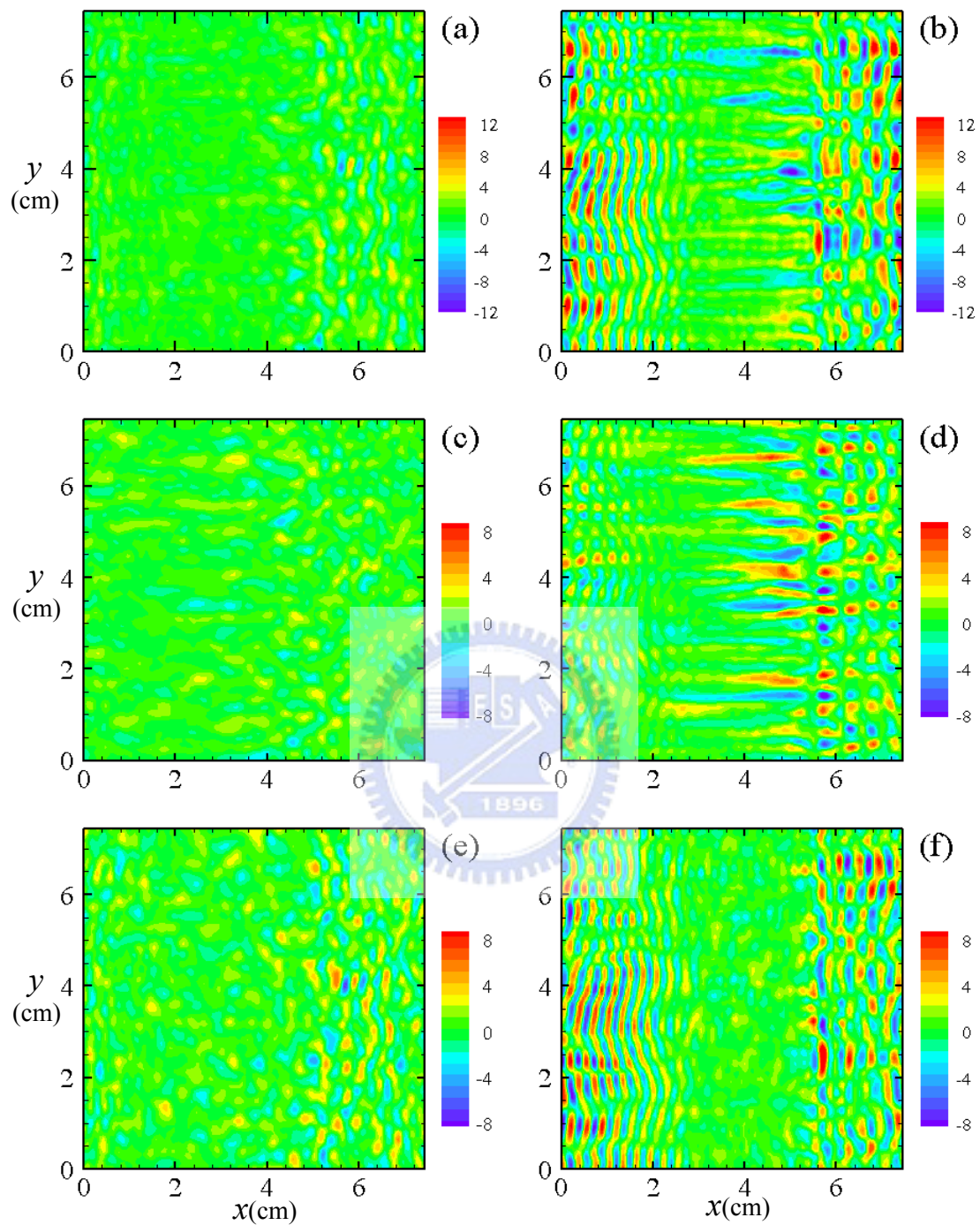


圖 5.6：三維風波之液面紊流速度場。沿流紊流速度(u')(a, b)、橫向紊流速度(v')(c, d)與垂直紊流速度(w')(e, f)於時間 $t = T_0$ (a, c, e)與 $t = 2T_0$ (b, d, f)， T_0 為線性理論週期。風與重力波前進方向皆為 $+x$ 。

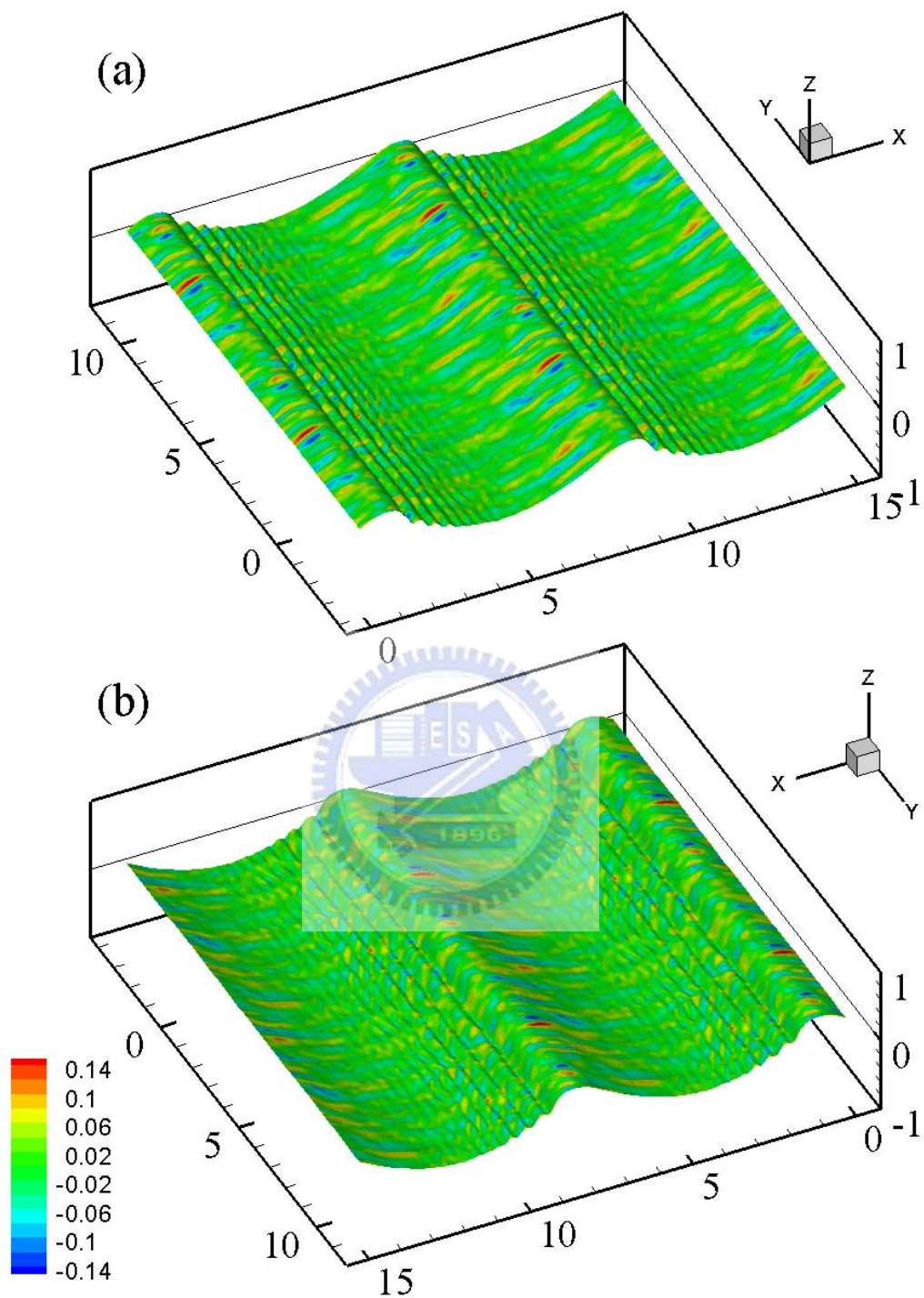


圖 5.7：由波背相(a)與波前相(b)之風波三維液面變化檢視圖。液面上顯示橫向紊流速度 (v') 分布，其紅/藍色分別表示正/負值。圖中於風波前相形成的寄生表面張力波以及於波背相的沿流向條痕結構已發展完成於時間 $t = 2T_0$ ， T_0 為線性理論週期。

風波流場於接近自由液面處之旋度結構表示於圖 5.8，圖中顯示橫向紊流旋度 ω'_y 等值分布於平行於沿流向之流場切面上。根據圖 5.8 中各切面之旋度結構，如同 Jessup *et al.* (1997) 所推測之，其風波下之旋度場於橫向有相當大的變異性。但其中典型的旋度結構；包括 Okuda (1982) 與 Ebuchi *et al.* (1987) 在位於接近最大波峯之波背處的高旋度區，以及由寄生表面張力波引起之旋度場，由自由液面生成後受到重力波平流動量的牽引使得渦旋結構往逆風向拖曳等，依然存在於流場中。此外，Yoshikawa *et al.* (1988) 與 Komori *et al.* (1993) 皆提出於風波之微小破碎下方流場觀察到往逆風方向的流場剝離結構。此流場剝離結構亦可能即為圖 5.8 中於波背處之向流場內部延伸之渦旋結構。



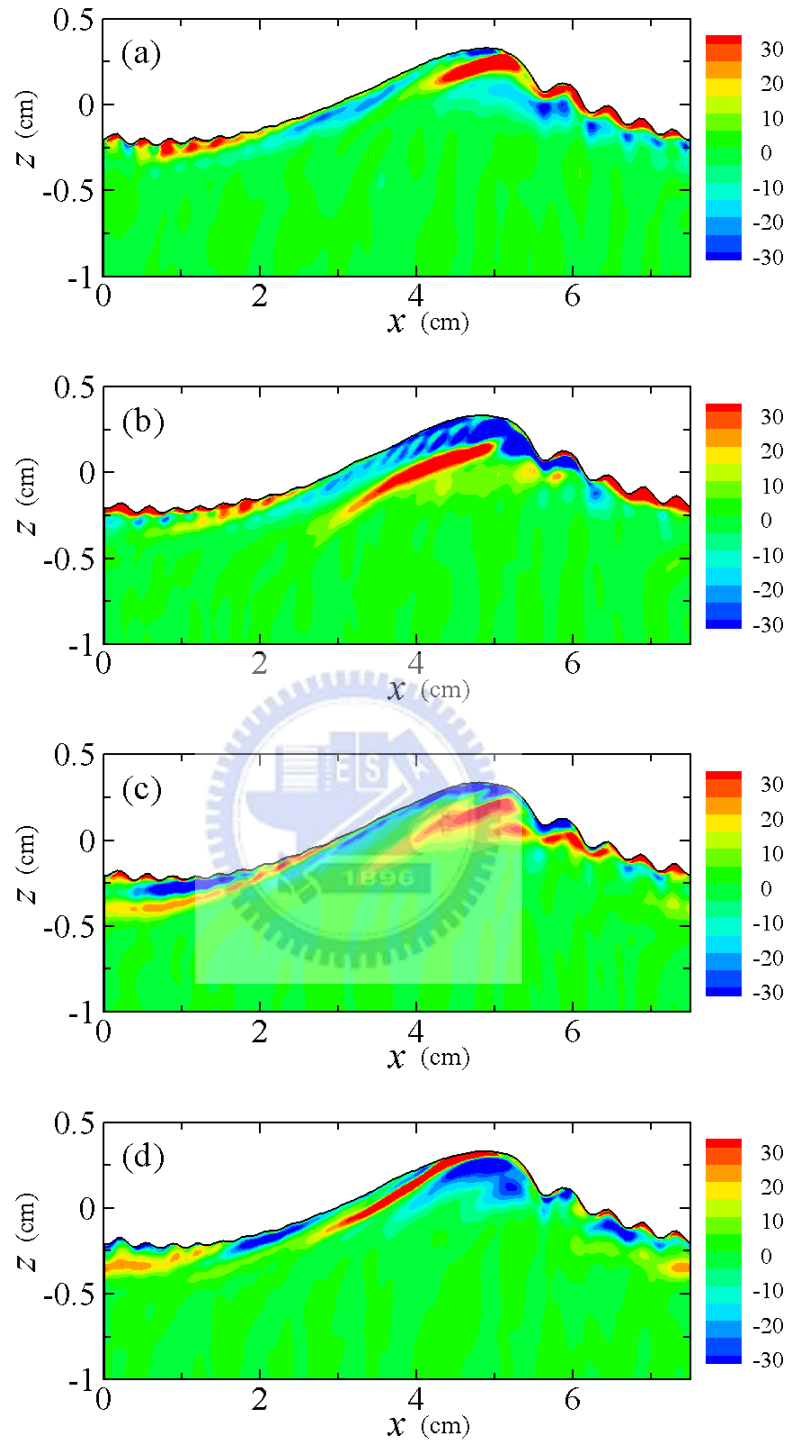


圖 5.8：三維風波之橫向紊流旋度場(ω'_y) 在位於 $y=(a)0$ 、 $(b)0.24\lambda_y$ 、 $(c)0.47\lambda_y$ 與 $(d)0.82\lambda_y$ 垂直沿流方向之流場剖面，於時間 $t=2T_0$ ， T_0 為線性理論週期。其紅/藍色分別表示順時針/逆時針方向渦旋。風與重力波前進方向皆為 $+x$ 。

第六章 結論與未來展望

本論文建立一解析完全非線性自由液面紊流邊界層之數值模式，其自由液面運動與紊流邊界層之非線性交互作用皆完整地呈現於數值模擬結果。為將自由液面邊界條件滿足於真實的運動邊界，模式中運用座標轉換將於隨時間變動之物理區間內的控制方程式與邊界條件轉換至規則的計算區間進行離散。改良割線疊代法有效地求解不可分離的壓力 Poisson 方程式以確保使流場滿足連續方程式。數值方法的準確性可經由模擬過程之能量守恆、質量守恆以及自由液面非線性特徵得到驗證。

有關於本模式的特點，除了具備模擬運動邊界與紊流邊界層之交互作用的能力外，其亦能同時解析液面運動中不同尺度的物理過程；包括重力波、表面張力波、黏滯邊界層以及紊流等。文中對於重力波傳遞過程中形生之寄生表面張力波的演化過程、流場結構、旋度場的生成與傳輸機制以及其對能量消散的重要影響等流場特性進行深入地分析。對於液面上不同尺度之非線性波浪交互作用則顯示於短峰型重力波與新月型重力波的模擬。在風吹拂下之流場運動的模擬中，發展於自由液面上重力波前波相之寄生表面張力波列與棋盤式流場結構，以及於波背相之沿流方向條痕結構等皆為重力波、寄生表面張力波與風剪紊流等小尺度流場結構間之非線性動力過程的流場特徵。

本模式應用直接數值模擬 (Direct numerical simulation ; 簡稱 DNS) 解析自由液面非線性運動以及其紊流邊界層流場中複雜的交互作用。但本模式僅能適用於模擬長度尺度小於 $O(1)$ m 之小尺度物理過程。然而，自然界之海洋流場內包含大尺度運動 (長度尺度大於 $O(10^3)$ m ; 如洋流等) 、中尺度運動 (長度尺度介於 $O(1\sim 10^3)$ m ; 如 Langmuir 環流等) 以及小尺度運動 (如短風波的傳遞或紊流消散等) 。因此，較真實的海洋流場模擬為大渦模擬 (Large-eddy simulation ; 簡稱 LES) 之大尺度數值模擬；其計算範圍為大區域流場，但其計算網格的數目受限於硬體設備與計算時效並無

法達到如 DNS 之高解析度。因而在進行 LES 過程中，小於網格尺度之紊流過程由於無法被解析而必須經由參數化的步驟 (sub-grid scale parameterizations) 以近似其對於整體流場運動的影響。然而，此參數化過程可能無法真實反應小尺度運動之詳細的物理機制，特別是自由液面紊流邊界層流場。因此，對於包含自由液面紊流邊界層運動的大尺度模擬，由 Dimas and Fialkowski (2000) 大波模擬 (Large-wave simulation) 的概念，引伸出以建立伴隨著自由液面紊流邊界層 DNS 之 LES 數值模式的構想：將 LES 位於邊界層中的網格分別以 DNS 解析小尺度紊流運動以取代參數化的過程。據目前計算硬體的發展速度，建立此結合小尺度的 DNS 與大尺度的 LES 之三維自由液面流場模式的可行性是指日可待。如此，對於海洋流場內之各種尺度的物理過程與其不同尺度運動間之非線性交互作用皆可完整地於數值模擬中解析之，此更真實且準確的模擬結果將非常有利於預測與分析海-氣交互作用等自然科學與環境科學相關研究工作的發展。



参考文献

1. Asher, W. E., A.T. Jessup and M.A. Atmane (2004), Oceanic application of the active controlled flux technique for measuring air-sea transfer velocities of heat and gases, *J. Geophys. Res.*, **109**, C08S12, doi: 10.1029/2003JC001862.
2. Atkinson, K. E. (1989), “*An Introduction to Numerical Analysis*”, Second edition. John Wiley & Sons, New York.
3. Banner, M. L. and E. H. Fooks (1985), On the microwave reflectivity of small-scale breaking water waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **399**, 93-109.
4. Banner, M. L. and W. L. Peirson (1998), Tangential stress beneath wind-driven air-water interfaces, *J. Fluid Mech.*, **364**, 115-145.
5. Banner, M. L. and D. H. Peregrine (1993), Wave breaking in deep water, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 373-397.
6. Banner, M. L. and O. M. Phillips (1974), On the incipient breaking of small scale waves, *J. Fluid Mech.*, **65**, 647-656.
7. Borue, V., S. A. Orszag and I. Staroselsky (1995), Interaction of surface waves with turbulence: direct numerical simulation of turbulent open-channel flow, *J. Fluid Mech.*, **286**, 1-23.
8. Calhoun, R. J. and R. L. Street (2001), Turbulent flow over a wavy surface: Neutral case, *J. Geophys. Res.*, **106**, C5, 9277-9294.
9. Caulliez, G. and F. Collard (1999), Three-dimensional evolution of wind waves from gravity-capillary to short gravity range, *Eur. J. Mech. B*, **18**, 389-402.
10. Cherukat, P., Y. Na, T. J. Hanratty and J. B. McLaughlin (1998), Direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow over a wavy wall. *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **11**, 109-134.
11. Coantic, M. (1986), A model of gas transfer across air-water interfaces with capillary waves, *J. Geophys. Res.*, **91**, 3925-3943.

12. Collard, F. and G. Caulliez (1999), Oscillating crescent-shaped water wave patterns, *Phys. Fluids*, **11**, 3195-3197.
13. Csanady, G. T. (1990), The role of breaking wavelets in air-sea gas transfer. *J. Geophys. Res.*, **95**, 749-759.
14. Dahlouist, G., A. Bjorck and N. Anderson (1974), “*Numerical Methods.*” Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J..
15. Danckwerts, P. V. (1951), Significance of liquid-film coefficients in gas absorption, *Ind. Eng. Chem.*, **43**, 1460-1467.
16. De Angelis, V., P. Lombardi, and S. Banerjee (1997), Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall, *Phys. Fluids*, **9**, 2429-2442.
17. Dean, R.G. and R. A. Dalrymple (1991), “*Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists.*” World Scientific, Singapore.
18. Dimas, A. A. and L. T. Fialkowski (2000), Large-Wave Simulation (LWS) of free-surface flows developing weak spilling breaking waves, *J. Comput. Phys.*, **159**, 172-196.
19. Dommermuth, D. G. (1993), The laminar interactions of a pair of vortex tubes with a free-surface, *J. Fluid Mech.*, **246**, 91-115.
20. Ebuchi, N., H. Kawamura and Y. Toba (1987), Fine structure of laboratory wind-wave surfaces studied using an optical method, *Bound.-Layer Meteor.*, **39**, 133-151.
21. Fedorov, A. V. and W. K. Melville (1998), Nonlinear gravity-capillary waves with forcing and dissipation, *J. Fluid Mech.*, **354**, 1-42.
22. Fedorov, A. V., W. K. Melville and A. Rosenberg (1998), An experimental and numerical study of parasitic capillary waves, *Phys. Fluids*, **10**, 1351-1323.
23. Fenton, J. D. (1988), The numerical solution of steady water wave problems, *Comp. Geosci.*, **14**, 356-368.
24. Fructus, D., D. Clamond, J. Grue, and O. Kristiansen (2005a), An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems, *J. Comput. Phys.*, **205**, 665-685.

25. Fructus, D., C. Kharif, M. Francius, O. Kristiansen, D. Clamond, and J. Grue (2005b), Dynamics of crescent water wave patterns, *J. Fluid Mech.*, **537**, 155-186.
26. Fulgosi, M., D. Lakehal, S. Banerjee, and V. De Angelis (2003), Direct numerical simulation of turbulence in a sheared air-water flow with a deformable interface, *J. Fluid Mech.*, **482**, 319-345.
27. Fulks, W. (1978), "*Advanced Calculus*", Third edition, John Wiley & Sons, New York.
28. Garbe, C. S., U. Schimpf and B. Jahne (2004), A surface renewal model to analyze infrared image sequences of the ocean surface for the study of air-sea heat and gas exchange, *J. Geophys. Res.*, **109**, C08S15, doi: 10.1029/2003JC001802.
29. Gavrilakis, S (1992), Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *J. Fluid Mech.*, **244**, 101-129.
30. Gemmrich, J. and L. Hasse (1992), Small-scale surface streaming under natural conditions as effective in air-sea gas exchange, *Tellus*, **44B**, 150-159.
31. Handler, R. A., Jr. T. F. Swean, R. I. Leighton and J. D. Swearingen (1993), Length scales and the energy balance for turbulence near a free surface. *AIAA J.* , **31**, 1998-2007.
32. Harlow, F. H. and J. E. Welch (1965), Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**, 2182-2189.
33. Higbie, R. (1935), The rate of absorption of a pure gas into a still liquid during short periods of exposure, *Trans. Am. Inst. Chem. Eng.*, **31**, 365-389.
34. Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981), Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, **39**, 201-225.
35. Hsu, J. R. C., Y. Tsuchiya and R. Silvester (1979), Third-order approximation to short-crested waves, *J. Fluid Mech.*, **90**, 179-196.
36. Hodges, B. R. and R. L. Street (1999), On simulation of turbulent nonlinear free-surface flows, *J. Comput. Phys.*, **151**, 425-457.
37. Jessup, A. T., C. J. Zappa and H. Yeh (1997), Defining and quantifying microscale wave breaking with infrared imagery, *J. Geophys. Res.*, **102**, 23,145-23,153.

38. Jiang, L., H. –J. Lin, W. W. Schultz and M. Perlin (1999), Unsteady ripple generation on steep gravity-capillary waves. *J. Fluid Mech.*, **386**, 281-304.
39. Jahne, B. and H. Haussecker (1998), Air-water gas exchange, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 443-468.
40. Komori, S., R. Nagaosa and Y. Murakami (1993), Turbulence structure and mass transfer across a sheared air-water interface in wind-driven turbulence, *J. Fluid Mech.*, **249**, 161-183.
41. Lam, K. and S. Banerjee (1992), On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow. *Phys. Fluids A*, **4**, 306-320.
42. Leighton, R. I., Jr. T. F., Swann, R. A. Handler and J. D. Swearingen (1991), Interaction of vorticity with a free surface in turbulent open channel flow. *AIAA Paper* 91-0236.
43. Lin, P. and C. W. Li (2002), A σ -coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **38**, 1045-1068.
44. Lisss, P. S. and L. Merlivat (1986), Air-sea gas exchange rates: Introduction and synthesis, in *The Role of Air Sea Exchange in Geochemical Cycling*, edited by P. Buat-Menard, pp. 113-127, D. Reidel, Norwell, Mass.
45. Longuet-Higgins, M. (1963), The generation of capillary waves by steep gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **16**, 138-159.
46. Longuet-Higgins, M. (1992), Capillary rollers and bores, *J. Fluid Mech.*, **240**, 659-679.
47. Luge, H. J. (1987), Local flow properties at a viscous free surface, *Phys. Fluids*, **30(12)**, 3647-3652.
48. Lyzenga, D. R. (1998), Effects of intermediate-scale waves on radar signatures of ocean fronts and internal waves, *J. Geophys. Res.*, **103**, 18,759-18,768.
49. Maass, C. and U. Schumann (1994), Numerical simulation of turbulent flow over a wavy boundary. *Proc. of DLES-1, in Direct and Large-Eddy Simulation-1*, ed. P.R. Voke, L. Kleiser and J. P. Chollet, ERCOFTAC Series, Vol. 26, Kluwer.
50. McLean, J. W. (1982), Instabilities of finite-amplitude water waves, *J. Fluid Mech.*,

- 114**, 315-330.
51. Moin, P. and J. Kim (1982), Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, **114**, 315-330.
 52. Moeng, C.-H. (1984), A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2052-2062.
 53. Mui, R. C. Y. and D. G. Dommermuth (1995), The vortical structure of parasitic capillary waves, *Trans. ASME: J. Fluids Engng.*, **117**, 355-361.
 54. Okuda, K. (1982), Internal flow structure of short wind waves Part 1. On the internal vorticity structure, *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **38**, 28-42.
 55. Osher, S. and J. A. Sethian (1988), Front propagating with curvature-dependent speed : algorithm based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.*, **79**, 12-49.
 56. Pan, Y and S. Banerjee (1995), A numerical study of free-surface turbulence in channel flow. *Phys. Fluids*, **7**, 1649-1664.
 57. Raad, P. E. and R. Bidoae (2005), The three-dimensional Eulerian-Lagrangian marker and micro cell method for the simulation of free surface flows, *J. Comput. Phys.*, **203**, 668-699.
 58. Ralston, A. and P. Rabinowitz (1978), "*A First Course in Numerical Analysis*", Second edition, McGraw-Hill, New York.
 59. Rhee, S. H., B. P. Makarov, H. Krishinan and V. Ivanov (2005), Assesment of the volume of fluid method for free-surface wave flow. *J. Mar. Sci. Technol.*, **10**, 178-180.
 60. Rozenberg, A. D., M. J. Ritter, W. K. Melville, C. C. Gottschall and A.V. Smirnov (1999), Free and bound capillary waves as microwave scatterers: laboratory studies, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **37**, 1052-1065.
 61. Schimpf, U. C. Carbe, and B. Jahne (2004), Investigation of transport processes across the sea surface microlayer by infrared imagery, *J. Geophys. Res.*, **109**, C08S15, doi: 10.1029/2003JC001803.
 62. Schlichting, H. (1979), "*Boundary-Layer Theory*." McGraw-Hill, New York.

63. Shen L., X. Zhang, D. K. P. Yue and G. S. Triantafyllou (1999), The surface layer for free-surface turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, **386**, 167-212.
64. Shen L., X. Zhang, D. K. P. Yue and M. S. Triantafyllou (2003), Turbulent flow over a flexible wall undergoing a streamwise traveling wave motion, *J. Fluid Mech.*, **484**, 197-221.
65. Su, M.-Y. (1982), Three-dimensional deep-water waves. Part1. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns, *J. Fluid Mech.*, **124**, 73-108.
66. Su, M.-Y., M. Bergin, P. Marler, and R. Myrick (1982), Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains, *J. Fluid Mech.*, **124**, 45-72.
67. Sullivan, P. P., J. C. McWilliams, and C.-H. Moeng (2000), Simulation of turbulent flow over idealized water waves, *J. Fluid Mech.*, **404**, 47-85.
68. Sullivan, P. P., J. C. McWilliams, and W. K. Melville (2004), The oceanic boundary layer driven by wave breaking with stochastic variability. Part.1 Direct numerical simulations, *J. Fluid Mech.*, **507**, 143-174.
69. Sussman, M., A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell and M. L. Welcome (1999), An Adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, **148**, 81-124.
70. Sussman, M., K. M. Smith, M. Y. Hussaini, M. Ohta and R. Zhi-Wei (2006), A sharp interface method for incompressible two-phase flows, *J. Comput. Phys.*, in press.
71. Takahashi, T., R. A. Feely, R. Weiss, R. Wanninkhof, D. W. Chipman and S. C. Sutherland (1997), Global air-sea flux of CO₂ : An estimate based on measurements of sea-air pCO₂ difference, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **94**, 8292-8299.
72. Tsai, W.-T. (1998), A numerical study of the evolution and structure of a turbulent shear layer under a free surface, *J. Fluid Mech.*, **354**, 239-276.
73. Tsai, W.-T., S.-M. Chen, M.-Y. Lin, and L.-P. Hung (2003), Molecular sublayers beneath the air-sea interface relative to momentum, heat and gas transports, *Geophys. Res. Lett.*, **30**, 1968, doi: 10.1029/2003GL018164.
74. Tsai, W.-T., S.-M. Chen and C.-H. Moeng (2005), A numerical study on the evolution

- and structure of a stress-driven, free-surface turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, **545**, 163-192.
75. Tsai, W.-T. and D. K. P. Yue (1993), Interactions between a free surface and a vortex sheet shed in the wake of a surface-piercing plate, *J. Fluid Mech.*, **257**, 691-721.
76. Veron, F. and W. K. Melville (2001), Experiments on the stability and transition of wind-driven water surfaces, *J. Fluid Mech.*, **446**, 25-65.
77. Walker, D. T., R. I. Leighton and L. O. Garza-Rios (1996), Shear-free turbulence near a flat free surface, *J. Fluid Mech.*, **4320**, 19-51.
78. Wanninkhof, R. (1992), Relationship between gas exchange and wind speed over the ocean, *J. Geophys. Res.*, **97**, 7373-7381.
79. Williamson, J. H. (1980), Low-storage Runge-Kutta schemes, *J. Comput. Phys.*, **35**, 48-56.
80. Wu, J. Z. (1995), A theory of three-dimensional interfacial vorticity dynamics, *Phys. Fluids*, **7(10)**, 2375-2395.
81. Xue, M., H. Xu, Y. Liu and D. K. P. Yue (2001), Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves, *J. Fluid Mech.*, **438**, 11-39.
82. Yoshikawa, I., H. Kawamura, K. Okuda and Y. Toba (1988), Turbulent structure in water under laboratory wind waves, *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **44**, 143-156.
83. Zappa, C. J., W. E. Asher and A.T. Jessup (2001), Microscale wave breaking and air-water gas transfer, *J. Geophys. Res.*, **106**, 9385-9391.
84. Zhang, C. C. (1996), Turbulent free-surface wakes behind towed models – Experimental measurements, numerical simulations and stability analysis, *Ph.D. thesis*, Massachusetts Institute of Technology.
85. Zhang, X. (2002), Enhanced dissipation of short gravity and gravity capillary waves due to parasitic capillaries, *Phys. Fluids*, **14**, L81-L84.

附錄一 流場能量守恆方程

欲了解流場運動過程中的能量變化情形，我們可將速度向量與動量方程式進行內積，即可得流場之能量方程式。能量方程式並不是流場運動之控制方程，而在模式中計算流場之能量變化率的目的為檢驗數值模式求解動量守恆與邊界條件的正確性。為了推導過程之書寫便利，以下將使用張量式來說明。

1. 應力所作的功：

流場任一流體分子所受之應力（Surface stress） τ_{ij} 為：

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A1.1})$$

其中 p 為流體運動總壓力（Thermodynamic pressure）， λ 為狀態常數參數， μ 為運動黏滯係數。由於流場為不可壓縮流，其 $\partial u_k / \partial x_k = 0$ ，上式可簡化為：

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A1.2})$$

而 $\tau_{ij} dA_j$ 為流場的應力作用力（Surface force），此作用力所作的功為 $u_i \tau_{ij} dA_j$ 。而此作用力對於整個流場體積所作的功為此應力作用力對於流場體積之邊界進行面積分：

$$\iint_S u_i \tau_{ij} dA_j \quad (\text{A1.3})$$

對單位流場體積而言，其所作的功為微分形式如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) \quad (\text{A1.4})$$

將式(A1.4)對於整個流場體積進行體積分並應用 Divergence theorem：

$$\iiint_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV = \iint_S F_i \cdot dS_i = \iint_S F_i \cdot n_i dA \quad \circ$$

即可驗證式(A1.3)與(A1.4)之定義，如下所示：

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) dV = \iint_S u_i \tau_{ij} dA_j \quad \circ \quad (\text{A1.5})$$

流場應力所作的功有一部份是增加流場動能而其他是作用於使流場產生形變所需要的能量。將應力對流場所作的功之微分形式(A1.4)分解如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \circ \quad (\text{A1.6})$$

上式等號右邊的第二項即為增加流場動能，也就是由動量方程式直接與速度進行內積之動能變化率中應力所作的功；亦即貢獻於增加動能的部份，而第一項為使流場產生形變所需要的能量。流體的應變（deformation： $\partial u_i / \partial x_j$ ）會將動能轉換為內能，而使得動能減少。其說明如下：

將應力所作的功當中由於應變將動能轉換為內能的項；式(A1.6)等號右邊第二項表示如下：

$$\begin{aligned} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \left[-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \circ \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

式(A1.7)中之第一項 $-p \partial u_k / \partial x_k$ 為貢獻於流體分子之壓縮形變所需能量。此項為可逆之能量，也就是指流體壓縮形變可以增加流場能量亦可損失流場能量。但在不可壓縮流體中，此項即為零。而式(A1.7)中其餘部份定義為消散函數如下所示：

$$\begin{aligned}
\Phi &\equiv \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right] \\
&= \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad \circ
\end{aligned} \tag{A1.8}$$

上式中我們將 $\partial u_i / \partial x_j$ 分解為對稱張量與反對稱張量，而對稱張量與反對稱張量之乘積為零。由式(A1.8)可看出消散函數為恆正量，因此可知：消散函數表示一不可逆之能量形態，亦即能量之黏滯消散。再一次應用不可壓縮流條件進行簡化，消散函數即為：

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad \circ \tag{A1.9}$$

在不可壓縮流體中，此應力所作的功永遠貢獻於增加不可逆之流場內能。

2. 流場能量方程式：

流場之動量方程式為：

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \circ \tag{A1.10}$$

其中 ρ 為流場密度， g_i 為重力場。將速度向量與動量方程式進行內積可得：

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right) &= u_i \cdot \rho g_i + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}] \\
&= u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho g z \delta_{ij}] + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \rho g z \delta_{ij}] - \rho g z \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \rho g z \delta_{ij}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \circ
\end{aligned} \tag{A1.11}$$

將式(A1.2)對流場區間積分：

$$\iiint_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right) dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \rho g z \delta_{ij}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{A1.12})$$

其中等號右邊第一與二項應用 Divergence theorem，可得

$$\iiint_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right) dV = \iint_S u_i \rho g z \delta_{ij} \cdot n_j dS_f + \iint_S u_i \tau_{ij} \cdot n_j dS_f - 2\mu \iiint_V e_{ij} \cdot e_{ij} dV \quad (\text{A1.13})$$

上式中，等號左邊為流體運動引起之動能變化率（ $\equiv dE_k/dt$ ）。等號右邊第一項為自由液面變動所產生之位能變化率（ $\equiv dE_\eta/dt$ ），第二項為自由液面應力所做功引起之能量變化率，第三項為由流體黏滯性所引起之能量消散變化率（ $\equiv dE_v/dt$ ）。式(A1.13)中等號右邊第一與二項為自由液面上之面積分。為了利於計算，自由液面上面積 dS_f 將投影於 x - y 平面，表示如下：

$$dS_f = (\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2} dx dy \quad \circ$$

流場區間內之動量變化率方程式(A1.13)中各項可展開為：

$$\begin{aligned} \iint_{S_f} u_i \rho g z \delta_{ij} \cdot n_j dS_f &= \rho g \cdot \iint_{S_f} \eta u_i \cdot n_i dS_f \\ &= \rho g \cdot \iint_{S_f} \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}} dS_f \\ &= \rho g \iint_{S_{xy}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dy \quad \circ \end{aligned} \quad (\text{A1.14})$$

$$\begin{aligned}
\iint_S u_i \tau_{ij} \cdot n_j dS &= \iint_{S_f} u_i \cdot [(-\sigma\kappa + \tau_n^s) \hat{n} + (\tau_{t_1}^s) \hat{t}_1 + (\tau_{t_2}^s) \hat{t}_2] dS_f \\
&= \iint_{S_f} \left[(-u\eta_x - v\eta_y + w) \cdot (-\sigma\kappa + \tau_n^s) + \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1} \cdot \frac{u + w\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \cdot \tau_{t_1}^s \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1} \cdot \frac{v + w\eta_y}{\sqrt{\eta_y^2 + 1}} \cdot \tau_{t_2}^s \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}} dS_f \quad (A1.15) \\
&= \iint_{S_{xy}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot (-\sigma\kappa + \tau_n^s) + \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1} \cdot \frac{u + w\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \cdot \tau_{t_1}^s \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1} \cdot \frac{v + w\eta_y}{\sqrt{\eta_y^2 + 1}} \cdot \tau_{t_2}^s \right] dx dy \quad \circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\mu \iiint_V e_{ij} e_{ij} dV &= -2\mu \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \\
&= -\mu \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \quad \circ \quad (A1.16)
\end{aligned}$$

附錄二 擬頻譜法之基礎理論—離散傅立葉級數

本模式中，流場物理區間之水平方向為週期邊界條件，因此於空間水平方向導數之數值離散方式為擬頻譜法，本節中將提供兩種定義「離散傅立葉轉換」之理論。

1. 離散函數之正交性質

兩週期為 2π 之複數函數 f, g ，其內積定義為：

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx, \quad (\text{A2.1})$$

或是離散型式：

$$(f, g) = \sum_{k=0}^N f(x_k)\bar{g}(x_k). \quad (\text{A2.2})$$

其中 $x_k = (2\pi/N) \cdot k$ ， \bar{g} 為 g 之共軛複數。

因此，對於正交函數 $\phi_j(x) = e^{ijx}$ ， $j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ，其正交性質如下所示：

$$(\phi_j, \phi_k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x} dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi & \text{For } j = k \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 0 & \text{For } j \neq k \end{cases},$$
$$(\phi_j, \phi_k) = \begin{cases} 2\pi & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}. \quad (\text{A2.3})$$

而離散型式之正交函數 $\phi_j(x_k) = e^{ijx_k}$ ， $j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ， $k = 0 \sim N-1$ ，其正交性質則為：

$$\begin{aligned}
(\phi_j, \phi_k) &= \sum_{l=0}^{N-1} e^{ijx_l} e^{-ikx_l} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i(j-k)x_l} = 1 + e^{i(j-k)\frac{2\pi}{N}} + e^{i(j-k)\frac{4\pi}{N}} + \dots \\
&= \begin{cases} 1+1+1+\dots = 1 \times (N) & \text{For } j = k \\ \frac{1 - (e^{i\frac{2n\pi}{N}})^N}{1 - e^{i\frac{2n\pi}{N}}} = \frac{1 - e^{i2n\pi}}{1 - e^{i\frac{2n\pi}{N}}} = 0 & \text{For } j \neq k \end{cases},
\end{aligned}$$

$$(\phi_j, \phi_k) = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}. \quad (\text{A2.4})$$

式(A2.4)中 (ϕ_j, ϕ_k) 為等比級數，其倍率為 $r = e^{i(j-k)\frac{2\pi}{N}}$ ，此等比級數在 $r=1$ 或 $r < 1$ 時收斂。於 $r < 1$ 時，其級數合為 $(1-r^N)/(1-r)$ 。

根據離散傅立葉轉換理論：若函數 $f(x)$ 為一週期函數，其週期為 2π ，則其離散型式之傅立葉級數可表示如下：

$$f_k = f(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} C_j e^{ijx_k}. \quad (\text{A2.5})$$

其中 $x_k = (2\pi/N) \cdot k$ ， C_j 為傅立葉係數。利用離散型式之函數正交性質；式(A2.4)，將式(A2.5)轉換為：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} e^{-inx_k} \{f_k\} &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-inx_k} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} C_j e^{ijx_k} \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} C_j \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(j-n)x_k} \right\} \\
&= C_n \times N,
\end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

可得傅立葉係數如下所示：

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-inx_k}. \quad (\text{A2.7})$$

或更換其下標 n 為 j 即可表示為：

$$C_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ijx_k} \quad (A2.8)$$

式(A2.5)與式(A2.8)即為離散傅立葉轉換(對) (Discrete Fourier Transform Pairs)。

2. 應用梯形積分法於離散傅立葉級數之係數求解

若 $f(x)$ 為一週期為 2π 週期函數，其於 $0 \leq x \leq 2\pi$ 為片段連續且可微分，則 $f(x)$ 可表示為傅立葉級數，如下：

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ijx} \quad (A2.9)$$

C_j 為傅立葉係數。將其以有限項級數近似之，如下所示：

$$f(x) \approx \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx} \quad (A2.10)$$

而其離散型式可表示為：

$$f(x_k) = \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \quad (A2.11)$$

其中 $x_k = (2\pi/N) \cdot k$ 。根據傅立葉理論，其傅立葉係數為：

$$C_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx \quad (A2.12)$$

若梯形積分法為週期函數之最佳積分法，則運用梯形積分法於式(A2.11)之積分運算，可得最佳傅立葉係數 C_j 之值，表示如下：

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{2} \left[f(x_0) e^{-ijx_0} + 2f(x_1) e^{-ijx_1} + 2f(x_2) e^{-ijx_2} + \dots \right. \\ &\quad \left. 2f(x_{N-1}) e^{-ijx_{N-1}} + f(x_N) e^{-ijx_N} \right] \quad (A2.13) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-ijx_k} \quad . \end{aligned}$$

如下所示， C_j 亦為週期函數，其週期為 N 。

$$\begin{aligned}
 C_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ijx_k} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\left[j\frac{2\pi}{N}k + 2k\pi\right]} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i[j+N]\frac{2\pi}{N}k} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i[j+N]x_k} = C_{j+N} \text{。}
 \end{aligned} \tag{A2.14}$$

根據 C_j 之週期性質，可將 $f(x)$ 之有限項傅立葉級數形式(A2-11)轉換為：

$$\begin{aligned}
 f(x_k) &= \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \\
 &= \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{-1} C_j e^{ijx_k} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \\
 &= \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{-1} C_j e^{ij\left[\frac{2\pi}{N}k\right] + i2k\pi_k} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \\
 &= \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{-1} C_{j+N} e^{i[j+N]\frac{2\pi}{N}k} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \\
 &= \sum_{j=\frac{N}{2}}^{N-1} C_l e^{i[l]\frac{2\pi}{N}k} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} C_j e^{ijx_k} \quad \left. \begin{array}{l} \text{令 } j+N \equiv l \\ \text{。} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} C_j e^{ijx_k} \text{。}
 \end{aligned} \tag{A2.15}$$

由式(A2.15)與式(A2.13)可得， $f(x)$ 之離散傅立葉轉換如下：

$$f_k = f(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} C_j e^{ijx_k} \text{,} \tag{A2.16}$$

$$C_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-ijx_k} \text{。} \tag{A2.17}$$

以下我們將利用 Euler-MacLaurin 公式應證梯形積分法則為週期函數之最佳

積分法。

Euler-MacLaurin 公式為：

若 $m \geq 0$ ， $n \geq 1$ ，定義 $h = (b-a)/n$ ，而 $x_j = a + jh$ $j = 0, 1, 2, \dots$ 。假設 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為連續且 $2m+2$ 次可微分函數，則梯形積分法的誤差為：

$$\begin{aligned} En(f) &= \int_a^b f(x)dx - h \sum_{j=0}^n f(x_j) \\ &= - \sum_{i=1}^m \frac{B_{2i}}{(2i)!} h^{2i-2} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] \\ &\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a) f^{(2m+2)}(\xi) B_{2m+2}, \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

其中 $B_k(x)$ 為 Bernoulli 多項式， B_k 為 Bernoulli 係數， ξ 為 $[a, b]$ 之任意數。

若 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為一週期函數且其無限可微分，則根據 Euler-MacLaurin 公式，使用梯形積分法近似其於 $[a, b]$ 之積分值時，其誤差如式(A2.18)所示，其中之 $f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a) = 0$ ，因而當 $n \rightarrow \infty$ 時， $h \rightarrow 0$ ，其收斂率正比於 h^{2m+2} ， m 為任意數，收斂率 h^{2m+2} 必大於任何 h 的冪次。因此，對於週期函數，梯形積分法為其於週期區間積分的最佳近似法。

Euler-MacLaurin 公式之證明如下：

Bernoulli 多項式 $B_k(x)$ 的定義為：

$$\begin{aligned} \frac{t(e^{xt} - 1)}{e^t - 1} &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!} \\ &= B_0(x) + B_1(x)t + B_2(x) \frac{t^2}{2!} + B_3(x) \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

當 $x = 1$ 時，

$$\frac{t(e^t - 1)}{e^t - 1} = t, \text{ 則 } B_0(1) = B_2(1) = B_3(1) = B_4(1) = \dots = 0, \text{ 而 } B_1(1) = 1. \quad (\text{A2.20})$$

當 $x = 0$ 時，

$$\frac{t(e^0 - 1)}{e^t - 1} = 0, \text{ 則 } B_0(0) = B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = \dots = 0. \quad (\text{A2.21})$$

將式(A2.19)展開如下：

$$\frac{t \left[xt + \frac{(xt)^2}{2!} + \frac{(xt)^3}{3!} + \dots \right]}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = B_0(x) + B_1(x)t + B_2(x)\frac{t^2}{2!} + \dots, \quad (\text{A2.22})$$

可得知 Bernoulli 多項式 $B_k(x)$ 為：

$$B_0(x) = 0, \quad (\text{A2.23})$$

$$B_1(x) = x, \quad (\text{A2.24})$$

$$B_2(x) = x^2 - x, \quad (\text{A2.25})$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad (\text{A2.26})$$

$$B_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x, \quad (\text{A2.27})$$

$$B_5(x) = x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{65}{6}x^3 + 5x^2 + \frac{7}{3}x. \quad (\text{A2.28})$$

⋮

而 Bernoulli 係數 B_k 的定義為：

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^t - 1} &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \\ &= B_0 + B_1 t + B_2 \frac{t^2}{2!} + B_3 \frac{t^3}{3!} + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A2.29})$$

由下式可建立 Bernoulli 多項式 $B_k(x)$ 與 Bernoulli 係數 B_k 之關係：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{t(e^{xt} - 1)}{e^t - 1} \right] &= \frac{t^2 e^{xt}}{e^t - 1} \\
&= t \left[\frac{t(e^{xt} - 1)}{e^t - 1} \right] + \frac{t^2}{e^t - 1} \\
&= B'_0(x) + B'_1(x)t + B'_2(x) \frac{t^2}{2!} + \dots \\
&= B_0(x)t + B_1(x)t^2 + B_2(x) \frac{t^3}{2!} + \dots \\
&\quad + B_0 t + B_1 t^2 + B_2 \frac{t^3}{2!} \quad \circ
\end{aligned} \tag{A2.30}$$

由式(A2.28)可得：

$$B'_0(x) = 0 \quad , \tag{A2.31}$$

$$B'_1(x) = B_0(x) + B_0 \quad , \tag{A2.32}$$

$$\frac{B'_2(x)}{2!} = B_1(x) + B_1 \quad , \tag{A2.33}$$

$$\frac{B'_3(x)}{3!} = \frac{B_2(x)}{2!} + \frac{B_2}{2!} \quad , \tag{A2.34}$$

$$\frac{B'_4(x)}{4!} = \frac{B_3(x)}{3!} + \frac{B_3}{3!} \quad \circ \tag{A2.35}$$

⋮

由式(A2.23)與式(A2.24)代入式(A2.30)可得知：

$$1 = 0 + B_0 \Rightarrow B_0 = 0 \quad \circ \tag{A2.36}$$

由式(A2.24)與式(A2.25)代入式(A2.31)可得知：

$$\frac{1}{2}(2x - 1) = x + B_1 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2} \quad \circ \tag{A2.37}$$

由式(A2.25)與式(A2.26)代入式(A2.32)可得知：

$$\frac{1}{6}(3x^2 - 3x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x^2 + x + B_2) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6} \quad \circ \tag{A2.38}$$

將由式(A2.28) Bernoulli 多項式 $B_k(x)$ 與 Bernoulli 係數 B_k 之關係式整理如

下：

$$k > 0, \quad B_{2k+1} = 0. \quad (\text{A2.39})$$

$$k > 1, \quad B'_{2k}(x) = 2kB_{2k-1}(x). \quad (\text{A2.40})$$

$$k \geq 0, \quad B'_{2k+1}(x) = (2k+1)[B_{2k}(x) + B_{2k}]. \quad (\text{A2.41})$$

另外，由以下之積分運算式：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t(e^{xt}-1)}{e^t-1} dx &= \left[\frac{t}{e^t-1} \left(\frac{e^{xt}}{t} - x \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{t}{e^t-1} \left[\frac{e^t}{t} - 1 - \frac{1}{t} + 0 \right] = \frac{e^t - t - 1}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{e^t - 1}, \end{aligned} \quad (\text{A2.42})$$

其中：

$$\int_0^1 \frac{t(e^{xt}-1)}{e^t-1} dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} B_j(x) \frac{t^j}{j!} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \int_0^1 B_j(x) dx, \quad (\text{A2.43})$$

$$1 - \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!} = 1 - B_0 - \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!} = - \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!}, \quad (\text{A2.44})$$

由式(A2.43)與式(A2.44)可得知 $B_k(x)$ 與 B_k 之積分運算關係式為：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \int_0^1 B_j(x) dx &= - \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!}, \\ -B_j &= \int_0^1 B_j(x) dx, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{A2.45})$$

假設 $f(x)$ 為 $2k$ 次可微分函數，其定義為：

$$U_k \equiv \frac{1}{(2k)!} \int_0^h B_{2k} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) f^{(2k)}(x + \bar{x}) d\bar{x}. \quad (\text{A2.46})$$

於 $k=1$ 時，

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2!} \int_0^h B_2\left(\frac{\bar{x}}{h}\right) f^{(2)}(x+\bar{x}) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{2!} \int_0^h \left[\frac{\bar{x}^2}{h^2} - \frac{\bar{x}}{h} \right] f^{(2)}(x+\bar{x}) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{2!} \left[\left[\frac{\bar{x}^2}{h^2} - \frac{\bar{x}}{h} \right] f'(x+\bar{x}) \Big|_0^h - \int_0^h \left[\frac{2\bar{x}}{h^2} - \frac{1}{h} \right] f'(x+\bar{x}) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{h} \int_0^h f'(x+\bar{x}) d\bar{x} - \frac{2}{h^2} \int_0^h \bar{x} f'(x+\bar{x}) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \frac{2}{h^2} \left(\bar{x} f(x+\bar{x}) \Big|_0^h - \int_0^h f(x+\bar{x}) d\bar{x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2h} f(x+h) - \frac{1}{2h} f(x) - \frac{1}{h} f(x+h) + \frac{1}{h^2} \int_0^h f(x+\bar{x}) d\bar{x} \\
&= -\frac{1}{2h} [f(x+h) + f(x)] + \frac{1}{h^2} \int_0^h f(x+\bar{x}) d\bar{x} \quad \circ \quad (\text{A2.47})
\end{aligned}$$

而於 $k > 1$ 時，



$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{1}{(2k)!} \int_0^h B_{2k} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) f^{(2k)}(x + \bar{x}) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{(2k)!} \left[B_{2k} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) f^{(2k-1)}(x + \bar{x}) \Big|_0^h - \frac{1}{h} \int_0^h f^{(2k-1)}(x + \bar{x}) B'_{2k} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{1}{(2k)!} \left[B_{2k}(1) f^{(2k-1)}(x + h) - B_{2k}(0) f^{(2k-1)}(x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k}{h} \int_0^h f^{(2k-1)}(x + \bar{x}) B_{2k-1} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{-1}{(2k-1)!} \frac{1}{h} \int_0^h f^{(2k-1)}(x + \bar{x}) B_{2k-1} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) d\bar{x} \\
&= \frac{-1}{h(2k-1)!} \left[B_{2k-1} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) f^{(2k-2)}(x + \bar{x}) \Big|_0^h - \frac{1}{h} \int_0^h f^{(2k-2)}(x + \bar{x}) B'_{2k-1} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{-1}{h(2k-1)!} \left[B_{2k-1}(1) f^{(2k-2)}(x + h) - B_{2k-1}(0) f^{(2k-2)}(x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k-1}{h} \int_0^h f^{(2k-2)}(x + \bar{x}) \left[B_{2k-2} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) + B_{2k-2} \right] d\bar{x} \right] \\
&= \frac{1}{h^2(2k-2)!} \left[\int_0^h f^{(2k-2)}(x + \bar{x}) B_{2k-2} \left(\frac{\bar{x}}{h} \right) d\bar{x} + B_{2k-2} \int_0^h f^{(2k-2)}(x + \bar{x}) d\bar{x} \right] \\
&= \frac{B_{2k-2}}{h^2(2k-2)!} \left[f^{(2k-3)}(x + h) - f^{(2k-3)}(x) \right] + \frac{1}{h^2} U_{k-1} \quad \circ
\end{aligned} \tag{A2.48}$$

由式(A2.48)我們可得到一 U_k 疊代關係如下：

$$\begin{aligned}
U_{k-1} &= h^2 U_k - \frac{B_{2k-2}}{(2k-2)!} \left[f^{(2k-3)}(x + h) - f^{(2k-3)}(x) \right], \\
\text{或 } U_k &= h^2 U_{k+1} - \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[f^{(2k-1)}(x + h) - f^{(2k-1)}(x) \right] \circ
\end{aligned} \tag{A2.49}$$

返回離散積分誤差之探討，若

$$I(f) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx, \tag{A2.50}$$

$$\text{而 } I_1(f) = \frac{h}{2} [f(x_{j-1}) - f(x_j)] , \quad (\text{A2.51})$$

則對於每個區間 h 之近似誤差為：

$$\begin{aligned} E_1(f) &= I(f) - I_1(f) \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_{j-1}) - f(x_j)] \\ &= h^2 U^1 \\ &= h^2 \left[h^2 U_2 - \frac{h^2 B_2}{2!} [f'(x_j) - f'(x_{j-1})] \right] \\ &= h^4 \left[h^2 U_3 - \frac{B_4}{4!} [f^{(3)}(x_j) - f^{(3)}(x_{j-1})] - \frac{h^2 B_2}{2!} [f'(x_j) - f'(x_{j-1})] \right] \\ &= h^6 U_3 - \frac{h^4 B_4}{4!} [f^{(3)}(x_j) - f^{(3)}(x_{j-1})] - \frac{h^2 B_2}{2!} [f'(x_j) - f'(x_{j-1})] \\ &\quad \vdots \\ &= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(x_j) - f^{(2k-1)}(x_{j-1})] + h^{2m+2} U_{m+1} \end{aligned} \quad (\text{A2.52})$$

根據式(A2.49)，

$$U_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)!} \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{2m+2} \left(\frac{\bar{x} - x_{j-1}}{h} \right) f^{(2m+2)}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{A2.53})$$

若我們定義一函數 $\bar{B}_k(x)$ 為將 $0 \leq x < 1$ 區間之 $B_k(x)$ 進行週期性的延展，其形式如下所示：

$$\bar{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x), & \text{for } 0 < x < 1 \\ \bar{B}_k(x-1), & \text{for } x > 1 \end{cases} \quad (\text{A2.54})$$

對於 n 個區間之近似誤差為：

$$\begin{aligned}
E_n(f) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_{j-1}) - f(x_j)] \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(x_j) - f^{(2k-1)}(x_{j-1})] \right. \\
&\quad \left. + h^{2m+2} \frac{1}{(2m+2)!} \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{2m+2} \left(\frac{\bar{x} - x_{j-1}}{h} \right) f^{(2m+2)}(\bar{x}) d\bar{x} \right\} \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} \int_a^b \bar{B}_{2m+2} \left(\frac{\bar{x} - a}{h} \right) f^{(2m+2)}(\bar{x}) d\bar{x} \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \int_a^b \bar{B}_{2m+2} \left(\frac{\bar{x} - a}{h} \right) d\bar{x} \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \cdot n \cdot \int_a^{a+h} \bar{B}_{2m+2} \left(\frac{\bar{x} - a}{h} \right) d\bar{x} \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \cdot n \cdot h \cdot \int_0^1 \bar{B}_{2m+2}(x) dx \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \cdot (b-a) \cdot \int_0^1 B_{2m+2}(x) dx \\
&= - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k-2}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&\quad + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot (b-a) \cdot f^{(2m+2)}(\xi) \cdot B_{2m+2} \quad \circ \quad (A2.55)
\end{aligned}$$

由以上之說明，Euler-MacLaurin 公式(A2.18)即可得證，同時，亦應證離散傅立葉轉換形式；即式(A2.16)與式(A2.17)之合理性。

附錄三 低儲存量之二階 Runge-Kutta 數值積分法

本節將說明於模式中執行「低儲存量」二階 Runge-Kutta 數值積分之計算步驟。Runge-Kutta 二階之 Modified Euler 方法為：

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad y_0 = \alpha_0 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)) \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

其數值劫取誤差(truncation error)為 $O(h^2)$ 。以 x 水平方向速度 u 為例： u_i 為時間 τ_i 之 x 方向速度，而由 u_i 積分 $f(\tau_i, u_i)$ 可得下一個時間離散點 τ_{i+1} 之速度 u_{i+1} ，其中時間間距為 $h = \tau_{i+1} - \tau_i$ ，依式(A3.1)表示如下：

$$\begin{aligned} u' &= f(\tau, u), \quad u_0 = \alpha_0 \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{2} f(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i + h, u_i + hf(\tau_i, u_i)) \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

進行計算中，為達到低儲存量之運算，我們將 Runge-Kutta 積分分為兩個步驟計算。

於 Runge-Kutta 第一步驟：首先定義 $u^* \equiv u_i + hf(\tau_i, u_i)$ ，並將 Modified Euler 式(A3.2)之積分法表示為另一型式，如下所示：

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{2} f(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i + h, u^*) \\ &= u^* - hf(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i + h, u^*) \\ &= u^* - \frac{h}{2} f(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i + h, u^*) \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

由已知的 u_i 與 $f(\tau_i, u_i)$ 計算得 u^* ，根據上式可知 u_i 於往後的計算中已不需要使用，因此可將 u^* 取代 u_i ，此時必須儲存的變數為 $f(\tau_i, u_i)$ 與 u^* 。

於 Runge-Kutta 第二步驟：由已知的 u^* 計算得 $f(\tau_i + h, u^*)$ ，並定義

$f^*(\tau_i + h, u^*) \equiv -f(\tau_i, u_i) + f(\tau_i + h, u^*)$ ，並再次將 Modified Euler 式(A3.3)之積分法表示為另一型式，如下所示：

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u^* - \frac{h}{2} f(\tau_i, u_i) + \frac{h}{2} f(\tau_i + h, u^*) \\ &= u^* + \frac{h}{2} f^*(\tau_i + h, u^*) \quad \circ \end{aligned} \tag{A3.4}$$

相同地，根據上式可知 $f(\tau_i, u_i)$ 於往後的計算中已不需要使用，因此可將 $f^*(\tau_i + h, u^*)$ 取代 $f(\tau_i, u_i)$ ，此時將以目前所儲存的變數為 $f^*(\tau_i + h, u^*)$ 與 u^* ，並代入上式即可完成二階 Runge-Kutta 之時間積分，求得下一個時間離散點之速度 u_{i+1} 。此時所計算出之 u_{i+1} 亦將取代 u^* 之儲存空間，以運用於下一個時間離散點之速度 u_{i+2} 的計算。根據此分解為兩個步驟之 Runge-Kutta 積分計算流程，我們將可達到節省記憶體空間與撰寫程式之便利性之最佳演算法。



附錄四 非線性重力波近似解之三階 Stokes 波

本節中將弱非線性波之三階 Stokes 波穩態解的頻率、波形以及其速度場詳列如下：

其非線性波理論之頻率 σ 為：

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh(kh)} \times \left\{ 1 + a^2 k^2 \left[\frac{9}{8} (\tanh^{-2}(kh) - 1)^2 + \tanh^{-2}(kh) \right] \right\}。 \quad (\text{A4.1})$$

其中 a 為波形振幅， $k = 2\pi/\lambda$ 為波數； λ 為重力波波長， h 為平均水面至流場底部之距離。於二維流場 (x, z) 中自由液面波形為：

$$\begin{aligned} \eta = & a \cos(kx - ct) \\ & + \frac{1}{4} a^2 k \tanh^{-1}(kh) (3 \tanh^{-2}(kh) - 1) \cos 2(kx - ct) \\ & - \frac{3}{8} a^3 k^2 (\tanh^{-4}(kh) - 3 \tanh(kh) + 3) \cos(kx - ct) \\ & + \frac{3}{64} a^3 k^2 (8 \tanh^{-6}(kh) + (\tanh^{-2}(kh) - 1)^2) \cos 3(kx - ct)。 \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

其中 $c = \sigma/k$ 為波形相速度。其速度場 (u, w) 為：

$$\begin{aligned} u = & \frac{akg \cosh(k(z+h))}{\sigma \cosh(kh)} \cos(kx - ct) \\ & + \frac{3 a^2 k^2 g (\tanh^{-2}(kh) - 1)^2}{4 \sigma \tanh^{-1}(kh)} \cosh(2k(z+h)) \cos 2(kx - ct) \\ & + \frac{3 a^3 k^3 g}{64 \sigma} (\tanh^{-2}(kh) - 1)(\tanh^{-2}(kh) + 3)(9 \tanh^{-2}(kh) - 13) \\ & \times \frac{\cosh(3k(z+h))}{\cosh(3kh)} \cos 3(kx - ct) \end{aligned} \quad (\text{A4.3})$$

$$\begin{aligned}
w = & \frac{akg \sinh(k(z+h))}{\sigma \cosh(kh)} \sin(kx - ct) \\
& + \frac{3 a^2 k^2 g (\tanh(kh) - 1)^2}{4 \sigma \tanh(kh)} \sinh(2k(z+h)) \sin 2(kx - ct) \\
& + \frac{3 a^3 k^3 g (\tanh^{-2}(kh) - 1)(\tanh^{-2}(kh) + 3)(9 \tanh^{-2}(kh) - 13)}{64 \sigma} \\
& \times \frac{\sinh(3k(z+h))}{\cosh(3kh)} \sin 3(kx - ct)
\end{aligned} \tag{A4.4}$$



附錄五 全域座標系統與局部座標系統之轉換

對於二維自由液面流場，其計算區間之局部(local)座標延著自由液面邊界 $F = z - \eta(x, t)$ 正交曲線座標系統中之法線單位向量 \hat{r} 為：

$$\hat{r} \equiv \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{-\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \hat{k}, \quad (\text{A5.1})$$

而與邊界相切之切線單位向量 \hat{s} 為：

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \hat{i} + \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \hat{k}. \quad (\text{A5.2})$$

自由液面之切線方向與全域(global)座標 x 方向之夾角為 ϕ ，可表示為：

$$\cos \phi \equiv \hat{i} \cdot \hat{s} = \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}}, \quad (\text{A5.3})$$

$$\sin \phi = (1 - \cos^2 \phi)^{1/2} = \frac{-\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}}. \quad (\text{A5.4})$$

或

$$\sin \phi = (1 - \cos^2 \phi)^{1/2} = \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}}. \quad (\text{A5.5})$$

在此定義為式(A5.4)。

全域座標系統與局部座標系統之轉換關係為：

$$x = s \cos \phi + r \sin \phi, \quad (\text{A5.6})$$

$$z = -s \sin \phi + r \cos \phi. \quad (\text{A5.7})$$

因此，全域座標系統中之速度場即可表示為：

$$u_s = u \cos \phi - w \sin \phi = u \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \right] - w \cdot \left[\frac{-\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \right], \quad (\text{A5.8})$$

$$u_r = u \sin \phi + w \cos \phi = u \cdot \left[\frac{-\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \right] + w \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + 1}} \right]。 \quad (\text{A5.9})$$

而在計算區間 (ξ, ζ) 中，其沿著邊界曲線之切線方向之導數即可表示為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial s} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial u_r}{\partial z} (-\sin \phi) \\ &= \left[\frac{\partial u_r}{\partial \xi} - \frac{\eta_\xi}{\eta + h} \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\eta_\xi^2 + 1}} \right] + \left[\frac{1}{\eta + h} \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right] \cdot \left[\frac{\eta_\xi}{\sqrt{\eta_\xi^2 + 1}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta_\xi^2 + 1}} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{A5.10})$$

相同地，

$$\frac{\partial (u_r)^2}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\eta_\xi^2 + 1}} \frac{\partial (u_r)^2}{\partial \xi}, \quad (\text{A5.11})$$

$$\frac{\partial (u_s)^2}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\eta_\xi^2 + 1}} \frac{\partial (u_s)^2}{\partial \xi}。 \quad (\text{A5.12})$$

附錄六 流場邊界之旋度通量

首先建立一延著自由液面邊界之曲線座標系統 (s, r, y) ；其中， \hat{s} 為與邊界相切之切線方向， \hat{r} 為正向於切線方向之法線方向， \hat{y} 為垂直於由 s - r 平面的方向，並定義其向頁內為正。對於二維流場 (s, r) ，其連續方程式為：
(Schlichting 1987)

$$\frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{R(s)+r} = 0 \quad (\text{A6.1})$$

其中， u_s 為切線方向速度分量， u_r 為法線方向速度分量， $R(s)$ 為邊界之曲率半徑。切線方向之 Navier-Stokes 方程式為：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{R(s)}{R(s)+r} u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_s u_r}{R(s)+r} \\ &= -\frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \\ &+ \nu \left\{ \frac{R(s)^2}{(R(s)+r)^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_s}{(R(s)+r)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2R(s)}{(R(s)+r)^2} \frac{\partial u_r}{\partial s} - \frac{R(s)}{(R(s)+r)^3} \frac{dR(s)}{ds} u_r + \frac{R(s)r}{(R(s)+r)^3} \frac{dR(s)}{ds} \frac{\partial u_s}{\partial s} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A6.2})$$

其中， p 為流場之總壓力， g 為重力加速度， θ 為自由液面之切線方向與重力方向之夾角。此二維流場之旋度定義為：

$$\omega_y \equiv \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_s}{R(s)+r} - \frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{\partial u_r}{\partial s} \quad (\text{A6.3})$$

而 ω_y 在 \hat{r} 方向上之梯度為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_s}{(R(s)+r)^2} \\ &+ \frac{R(s)}{(R(s)+r)^2} \frac{\partial u_r}{\partial s} - \frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial s \partial r} \end{aligned} \quad (\text{A6.4})$$

接下來再利用連續方程式將上式中之 $\partial^2 u_r / \partial s \partial r$ 取代之。連續方程式對 s 取一次導數為：

$$\begin{aligned} \frac{dR(s)}{ds} \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{R(s)}{(R(s)+r)^2} \frac{dR(s)}{ds} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} \\ + \frac{\partial^2 u_r}{\partial s \partial r} - \frac{u_r}{(R(s)+r)^2} \frac{dR(s)}{ds} + \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_r}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A6.5})$$

即可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial s \partial r} = \frac{u_r}{(R(s)+r)^2} \frac{dR(s)}{ds} - \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_r}{\partial s} \\ - \frac{r}{(R(s)+r)^2} \frac{dR(s)}{ds} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (\text{A6.6})$$

將式(A6.6)代回旋度梯度式(A6.4)如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial r} = \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{R(s)+r} \frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_s}{(R(s)+r)^2} + \frac{R(s)}{(R(s)+r)^2} \frac{\partial u_r}{\partial s} \\ - \frac{R(s)}{(R(s)+r)^3} \frac{dR(s)}{ds} u_r + \frac{R(s)}{(R(s)+r)^2} \frac{\partial u_r}{\partial s} \\ + \frac{R(s)r}{(R(s)+r)^3} \frac{dR(s)}{ds} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \left(\frac{R(s)}{R(s)+r} \right)^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

上式之等號右邊恰好等於切線方向動量方程式(A6.2)之黏滯消散項。應用切線方向動量方程式即可得：

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \omega_y}{\partial r} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{R(s)}{R(s)+r} u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \frac{\partial u_s}{\partial r} \\ + \frac{u_r u_s}{R(s)+r} + \frac{R(s)}{R(s)+r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A6.8})$$

由以上可知位於自由液面 $r=0$ 處，進入流場之旋度黏滯通量為：

$$-v \frac{\partial \omega_y}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\frac{\partial u_s}{\partial t} - \left[u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_r u_s}{R(s)} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (A6.9)$$

其中等號右邊之第一項為由非穩態之加速度所引起之旋度通量，第二項(跨號中)為平流加速度所造成之旋度通量，第三與四項則分別為流場之正向應力梯度以及重力加速度造成之旋度通量。

為了利於計算，平流加速度項將利用自由液面旋度轉換其形式，如下：

$$\begin{aligned} u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_r u_s}{R(s)} &= u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \left[\omega_y - \frac{u_s}{R(s)} + \frac{\partial u_r}{\partial s} \right] + \frac{u_r u_s}{R(s)} \\ &= u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \omega_y - \frac{u_r u_s}{R(s)} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial s} + \frac{u_r u_s}{R(s)} \\ &= u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial s} + u_r \omega_y \quad \circ \end{aligned} \quad (A6.10)$$

因此，自由液面之旋度通量可表示為：

$$-v \frac{\partial \omega_y}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\frac{\partial u_s}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial (u_s)^2}{\partial s} + \frac{\partial (u_r)^2}{\partial s} \right] + u_r \omega_y \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (A6.11)$$

附錄七 短峰型重力波之三階近似解

於 5.1 節中，對於短峰型重力波與其寄生表面張力波之模擬，其初始流場條件將利用由 Hsu et al.(1979) 以微擾法所推導之三維弱非線性短峰型重力波之三階穩態近似解。其形式詳列於下：

於三維流場 (x, y, z) 中自由液面波形為：

$$\eta(x, y) = \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \begin{aligned} & [\cos X \cos Y] \\ & + \varepsilon [b_1 \cos 2X \cos 2Y + b_2 \cos 2X + b_3 \cos 2Y] \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} [b_{11} \cos X \cos Y + b_{13} \cos X \cos 3Y \\ & + b_{31} \cos 3X \cos Y + b_{33} \cos 3X \cos 3Y] \end{aligned} \right\} \quad (A7.1)$$

而其三維速度場 (u, v, w) 為：

$$u(x, y, z) = \varepsilon m \sqrt{\frac{g}{k}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\omega_0 \frac{\cosh Z}{\sinh d} \cos X \cos Y \right] \\ & + \varepsilon [2\beta_2 \cosh 2Z \cos 2X \cos 2Y + 2\beta_3 \cosh 2mZ \cos 2X] \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} [\beta_{13} \cosh \gamma_1 Z \cos X \cos 3Y + 3\beta_{31} \cosh \gamma_3 Z \cos 3X \cos Y \\ & + 3\beta_{33} \cosh 3Z \cos 3X \cos 3Y] \end{aligned} \right\} \quad (A7.2)$$

$$v(x, y, z) = \varepsilon n \sqrt{\frac{g}{k}} \left\{ \begin{aligned} & \left[-\omega_0 \frac{\cosh Z}{\sinh d} \sin X \sin Y \right] \\ & - \varepsilon [2\beta_2 \cosh 2Z \sin 2X \sin 2Y] \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} [3\beta_{13} \cosh \gamma_1 Z \sin X \sin 3Y + \beta_{31} \cosh \gamma_3 Z \sin 3X \sin Y \\ & + 3\beta_{33} \cosh 3Z \sin 3X \sin 3Y] \end{aligned} \right\} \quad (A7.3)$$

$$\begin{aligned}
w(x, y, z) = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{k}} \left\{ \left[\omega_0 \frac{\sinh Z}{\sinh d} \sin X \cos Y \right] \right. \\
+ \varepsilon [2\beta_2 \sinh 2Z \cos 2X \cos 2Y + 2m\beta_3 \sinh 2mZ \sin 2X] \\
+ \frac{\varepsilon^2}{2} [\gamma_1 \beta_{13} \sinh \gamma_1 Z \sin X \cos 3Y + \gamma_3 \beta_{31} \sinh \gamma_3 Z \sin 3X \cos Y \\
\left. + 3\beta_{33} \sinh 3Z \sin 3X \cos 3Y] \right\} \quad \circ \quad (\text{A7.4})
\end{aligned}$$

其中 $m = \sin \theta$, $n = \cos \theta$; $X = mx/k$, $Y = ny/k$, $Z = (z+d)/k$ 。波形陡度 $\varepsilon = ak$, 波數 $k = 2\pi/L$; L 為入射波波長 , θ 為入射方向與 y 方向之夾角 , d 為平均水面與底部之距離。自由液面波形之參數分別為 :

$$\omega_0 = \sqrt{\tanh d} \quad \circ$$

$$K_1 = K_2 / (1 + \omega_m^4) \quad , \quad \omega_m = \sqrt{\tanh md} \quad ,$$

$$K_2 = \frac{(1 + \omega_m^4) [(2m^2 - 2n^2 + 1)\omega_0^{-3} - 3\omega_0]}{[(1 + \omega_m^4) - m(\omega_m/\omega_0)^2]} \quad ,$$

$$b_1 = \frac{1}{8} (3\omega_0^{-6} - \omega_0^{-2})$$

$$b_2 = \frac{1}{8} [3\omega_0^2 - \omega_0^{-2} (m^2 - n^2) + \omega_0 K_2]$$

$$b_3 = \frac{1}{8} [\omega_0^2 - \omega_0^{-2} (m^2 - n^2)] \quad \circ$$

三維速度場之參數分別為 :

$$\beta_1 = \frac{1}{8} (-\omega_0^{-3} + \omega_0)$$

$$\beta_2 = \frac{3(\omega_0^{-7} - \omega_0)}{16 \cosh 2d}$$

$$\beta_3 = \frac{(1 + \omega_m^4) K_1}{16 \cosh 2md} \quad ,$$

$$\gamma_1 = (m^2 + 9n^2)^{1/2} \quad , \quad \gamma_3 = (9m^2 + n^2)^{1/2} \quad \circ$$

$$\beta_{13} = [16 \cosh \gamma_1 d (\gamma_1 \tanh \gamma_1 d - \omega_0^2)]^{-1} \times [(-3\omega_0^{-7} + 8\omega_0^{-3} - 3\omega_0 + 2\omega_0^5) + m^2(-6\omega_0^{-7} + 4\omega_0^{-3} - 10\omega_0) + n^2(6\omega_0^{-7} - 4\omega_0^{-3} - 2\omega_0) + 4n^2(m^2 - n^2)\omega_0^{-3}] ,$$

$$\beta_{31} = [16 \cosh \gamma_3 d (\gamma_3 \tanh \gamma_3 d - 9\omega_0^2)]^{-1} [(-9\omega_0^{-7} + 64\omega_0^{-3} - 33\omega_0 + 18\omega_0^5) + 36m\omega_0^2\omega_m^2 K_1 + 2(3\omega_0^4 - 8m^2 - 1)K_2 + m^2(-18\omega_0^{-7} + 4\omega_0^{-3} - 30\omega_0) + 4m^2(m^2 - n^2)\omega_0^{-3} + n^2(18\omega_0^{-7} - 4\omega_0^{-3} + 2\omega_0)] ,$$

$$\beta_{33} = (128 \cosh 3d)^{-1} (1 + 3\omega_0^4) (9\omega_0^{-13} - 22\omega_0^{-9} + 13\omega_0^{-5}) \circ$$

$$b_{11} = \frac{1}{16} (5\omega_0^{-4} - 4 + 4\omega_0^4) + \frac{1}{8} m\omega_0\omega_m^2 K_1 + \frac{1}{16} (\omega_0^3 + 2m^2\omega_0^{-1} - \omega_0^{-1}) K_2 + \frac{1}{32} m^2 [(3\omega_0^{-8} - 2\omega_0^{-4} - 1) - 4(m^2 - n^2)\omega_0^{-4}] + \frac{1}{32} n^2 [(3\omega_0^{-8} - 2\omega_0^{-4} - 1) + 4(m^2 - n^2)\omega_0^{-4}] ,$$

$$b_{13} = \frac{1}{16} (9\omega_0^{-4} - 6 + 2\omega_0^4) - \frac{1}{16} m^2 (3\omega_0^{-8} + 5) + \frac{1}{16} n^2 (3\omega_0^{-8} + 1) + [16(\gamma_1 \tanh \gamma_1 d - \omega_0^2)]^{-1} \times [(-3\omega_0^{-6} + 8\omega_0^{-2} - 3\omega_0^2 + 2\omega_0^6) + m^2(-6\omega_0^{-6} + 4\omega_0^{-2} - 10\omega_0^2) + n^2(6\omega_0^{-6} - 4\omega_0^{-2} - 2\omega_0^2) + 4n^2(m^2 - n^2)\omega_0^{-2}] ,$$

$$b_{31} = \frac{1}{16} (21\omega_0^{-4} - 10 + 6\omega_0^4) + \frac{3}{4} m\omega_0\omega_m^2 K_1 - \frac{1}{16} m^2 (3\omega_0^{-8} + 5) + \frac{1}{16} n^2 (3\omega_0^{-8} + 1) + \frac{1}{8} (\omega_0^3 - m^2\omega_0^{-1}) K_2 + [3/16(\gamma_3 \tanh \gamma_3 d - 9\omega_0^2)] \times [(-9\omega_0^{-6} + 64\omega_0^{-2} - 33\omega_0^2 + 18\omega_0^6) + 36m\omega_0^3\omega_m^2 K_1 + 2K_2(3\omega_0^5 - 8m^2\omega_0 - \omega_0) + n^2(18\omega_0^{-6} - 4\omega_0^{-2} + 2\omega_0^2) + m^2(-18\omega_0^{-6} + 4\omega_0^{-2} - 30\omega_0^2) + 4m^2(m^2 - n^2)\omega_0^{-2}] ,$$

$$b_{33} = \frac{1}{16} (-3\omega_0^{-8} + 21\omega_0^{-4} - 15) + [16(\tanh 3d - 3\omega_0^2)]^{-1} [(-27\omega_0^{-6} + 66\omega_0^{-2} - 39\omega_0^2)] \circ$$

附錄八 新月型重力波之模擬初始流場

根據 Fructus *et al.* (2005a) 與 Xue *et al.* (2001) 模擬新月型重力波波形的數值計算，我們考慮自由液面之運動為三維擾動波與二維前進波列之疊合，其流場之初始波形 $\eta(x, y)$ 與速度場 $\vec{v}(x, y, z)$ 如下所示：

$$\eta(x, y) = \eta_{stokes}(x) + \eta'(x, y), \quad (\text{A8.1})$$

$$\vec{v}(x, t, z) = \vec{v}_{stokes}(x, z) + \vec{v}'(x, y, z). \quad (\text{A8.2})$$

其中二維前進波列為 Fenton (1988) 之三階 Stokes 波理論解，而擾動波波形與速度場為：

$$\eta'(x, y) = \frac{1}{2} \varepsilon a [\sin(k_x x + k_y y) + \sin(k_x x - k_y y)], \quad (\text{A8.3})$$

$$u'(x, y, z) = \varepsilon \frac{ak_x g^{1/2}}{(k_x^2 + k_y^2)^{1/4}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{z(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}, \quad (\text{A8.4})$$

$$v'(x, y, z) = \varepsilon \frac{ak_y g^{1/2}}{(k_x^2 + k_y^2)^{1/4}} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{z(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}, \quad (\text{A8.5})$$

$$w'(x, y, z) = -\varepsilon a (k_x^2 + k_y^2)^{1/4} g^{1/2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{z(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}. \quad (\text{A8.6})$$

上式中之 a 與 k 分別為前進波列之波幅與波數。 ε 為擾動波形之振幅參數，本模擬中設定 $\varepsilon = 0.2$ 。橫向與縱向之擾動波數為： $k_x = (1 + p)k$ ， $k_y = qk$ ；根據 McLean (1982) 之安定性分析中次簡諧第二型態中最不安定之模態設定 $p = 0.5$ 而 $q = 1.23$ 。