

參考文獻

- [1] H. C. Reeve and J. S. Lim, “Reduction of blocking effect in image coding” , IEEE International Conference on ICASSP '83. Acoustics, Speech, and Signal Processing , Volume 8 , pp. 1212 - 1215 , Apr 1983.
- [2] T. Jarske, P. Haavisto and I. Defee , “POST-Filtering Methods For Reducing Blocking Effects From Coded Images” , IEEE Transactions on Consumer Electronics , Volume 40 , Issue 3 , pp. 521 - 526 , Aug 1994.
- [3] B. Ramamurthi and A. Gersho , “Nonlinear space-variant postprocessing of block coded images” , IEEE Transactions on Signal Processing , Volume 34 , Issue 5 , pp. 1258 - 1268 , Oct 1986.
- [4] Y. L. Lee, H. C. Kim and H. W. Park , “Blocking effect reduction of JPEG images by signal adaptive filtering” , IEEE Transactions on Image Processing , Volume 7 , Issue 2 , pp. 229 - 234 , Feb. 1998.
- [5] Lakhani Gopal , “Improved Equations for JPEG’ s Blocking Artifacts Reduction Approach” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Volume 7 , Issue 6 , pp. 930 - 934 , Dec. 1997.
- [6] G. A. Triantafyllidis, D. Tzovaras and M. G. Strintzis , “Blocking Artifact Reduction In Frequency Domain” , International Conference on Image Processing Proceedings , Volume 1 , pp. :269 - 272 , Oct. 2001.
- [7] N. C. Kim, I. H. Jang, D. H. Kim and W. H. Hong , “Reduction of Blocking Artifact in Block-Coded Images Using Wavelet Transform” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Vol. 8 , pp. 253 - 257 , June 1998.
- [8] D. L. Donoho , “De-noising by soft-thresholding” , IEEE Transactions on Information Theory , Volume 41 , Issue 3 , pp. 613 - 627 , May 1995.
- [9] D. L. Donoho and I. M. Johnstone , “Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage” , Department of Statistics , Stanford

California, 94305-4065, USA.

- [10] Stephane Mallat, “A Wavelet Tour of Signal Processing” , Academic Press, San Diego, 1998.
- [11] 單維彰, “凌波初步” , 初版, 全華書局, 台北市, 1999.
- [12] E. P. Simoncelli, W.T. Freeman, E.H. Adelson and D.J. Heeger , “Shiftable multiscale transforms ” , IEEE Transactions on Information Theory , Vol. 38 , pp. 587 - 607 , March 1992.
- [13] J. Liang and T. Parks , “A translation-invariant wavelet representation algorithm with applications” , IEEE Transactions on Signal Processing , Vol. 44 , pp. 225 - 232 Feb. 1996.
- [14] S. Mallat and S. Zhong , “Characterization of signals from multiscale edges” , IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence , Volume 14 , Issue 7 , pp. 710 - 732 , July 1992.
- [15] K. Nallaperumal and J.J. Ranjani , “Efficient Algorithm for removing blocking artifacts in JPEG compressed Images” , 2005 Annual IEEE on INDICON , pp.245 - 249 , Dec. 2005.
- [16] Y. Rangsanseri and S. Dachasilaruk , “Filter Evaluation In Image Deblocking By Wavelet Thresholding” , IEEE Conference , Vol. 1 , pp. 613 - 616 , Sept. 1999.
- [17] R. A. Gopinath, M. Lang, H. Guo and J.E. Odegard , “Wavelet-Based Post-Processing of Low Bit Rate Transform Coded Image” , Proceedings. ICIP-94, IEEE International Conference on Image Processing , Volume 2 , pp. 913 - 917 , Nov. 1994.
- [18] Zixiang Xiong , M.T. Orchard and Ya-Qin Zhang , “A Deblocking Algorithm for JPEG Compressed Images Using Overcomplete Wavelet Representations” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Vol. 7 , pp. 433 - 437 , April 1997.
- [19] S. Wu, H. Yan and Z. Tan , “An Efficient wavelet-based deblocking algorithm for highly compressed images” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Vol. 11 , pp. 1193 - 1198 , Nov. 2001.

- [20] A . W. C. Liew and H. Yan , “Blocking artifacts suppression in block-coded images using overcomplete wavelet representation” , IEEE Transactions on Circuits System Video Technology , vol. 14 , pp.450-460 , Apr. 2004.
- [21] Alan Wee-Chung Liew and Hong Yan , “Blocking artifacts reduction in JPEG compressed images using overcomplete wavelet representation” , Proceedings of 2001 International Symposium on Intelligent Multimedia, Video and Speech Processing , pp. 129 - 132 , May 2001.
- [22] A.W. -C. Liew and Hong Yan , “Blocking artifacts suppression in block-coded images using overcomplete wavelet representation” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Volume 14 , Issue 4 , pp. 450 - 461 , April 2004.
- [23] R. Rosenholtz and A. Zakhor , “Iterative procedures for reduction of blocking effects in transform image coding” , IEEE Transactions on Circuits System , vol. 2 , no. 1 , pp. 91-94 , Mar. 1992.
- [24] Y.Y. Nikolas, P. Galatsanos and A. K. Katsaggelos , “Projection-Based Spatially Adaptive Reconstruction of Block-Transform Compressed Images” , IEEE Transactions on Image Processing , Vol. 4 , pp. 896 - 908 , July 1995.
- [25] S. J. Reeves and S.L. Eddins , “Comments on “Iterative Procedures for Reduction of Blocking Effects in Transform Image Coding”” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Vol. 3 , pp. 439 - 440 , Dec. 1993.
- [26] Y.Li and W.Chu , “A New Non-Restoring Square Root Algorithm and Its VLSI Implemenations” , ICCD '96. Proceedings. , IEEE International Conference in Computer Design: VLSI in Computers and Processors , pp. 538 - 544 , Oct. 1996.
- [27] Lan-Rong Dung and Meng-Chun Lin , “A Maskable Memory Architecture for Rank-Order Filtering” , IEEE Transactions on Consumer Electronics , pp.558-564 , May 2004.
- [28] M. lang , H. Guo, J. E. Odegard , C. S. Burrus and R. O. Wells , “Noise Reduction Using an Undecimated Discrete Wavelet Transform” , IEEE Letters on Signal Processing , Volume 3 , Issue 1 , pp. 10 - 12 , Jan. 1996.

- [29] M. J. Shensa , “The discrete wavelet transform: wedding the a trous and mallat algorithms” , IEEE Transactions on Signal Processing , Vol. : 40 , pp. 2464 – 2482 , Oct. 1992.
- [30] F. Gao, X. Li and W. G. Wee , “A New Wavelet Based Deblocking Algorithm For Compressed Images” , IEEE Conference on Signals, Systems and Computers , Vol. 2 , pp.1745 – 1748 , Nov. 2002.
- [31] T. Jarske, P. Haavisto, and I. Defee, , “Post-Filtering Methods for Reducing Blocking Effects from Coded Images” , IEEE Transactions on Consumer Electronics , Volume 40 , Issue 3 , pp. 521 – 526 , Aug 1994.
- [32] H.C. Kim, and H.W. Park , “Signal adaptive postprocessing for blocking effects reduction in JPEG image” , Proceedings. International Conference on Image Processing , Volume 1 , pp. 41 – 44 , Sept. 1996.
- [33] G. Barnard and H. V. Schalkwyk, , “Reducing the block-effect in transform image coding” , COMSIG 1989. Proceedings., Southern African Conference on Communications and Signal Processing , pp. 97 – 101 , 23 June 1989.
- [34] Y.F. Hsu and Y.C. Chen , “A new adaptive separable median filter for removing blocking effects” , IEEE Transactions on Consumer Electronics , Volume 39 , Issue 3 , pp. 510 – 513 , Aug. 1993.
- [35] R.C. Hardie and C. Boncelet , “LUM filters: a class of rank-order-based filters for smoothing and sharpening” , IEEE Transactions on Signal Processing , Volume 41 , Issue 3 , pp. 1061 – 1076 , March 1993.
- [36] P. List, A. Joch, J. Lainema, G. Bjntegaard and M. Karczewicz , “Adaptive deblocking filter” , IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology , Volume 13 , Issue 7 , pp. 614 – 619 , July 2003.
- [37] D. Van der Weken , M. Nachtgael and E.E. Kerre, , “Image quality evaluation” , International Conference on Signal Processing , Volume 1 , pp. 711 – 714 , Aug. 2002.
- [38] J. Dusek and K. Roubik , “Testing of new models of the human visual system for image quality evaluation” , Proceedings on

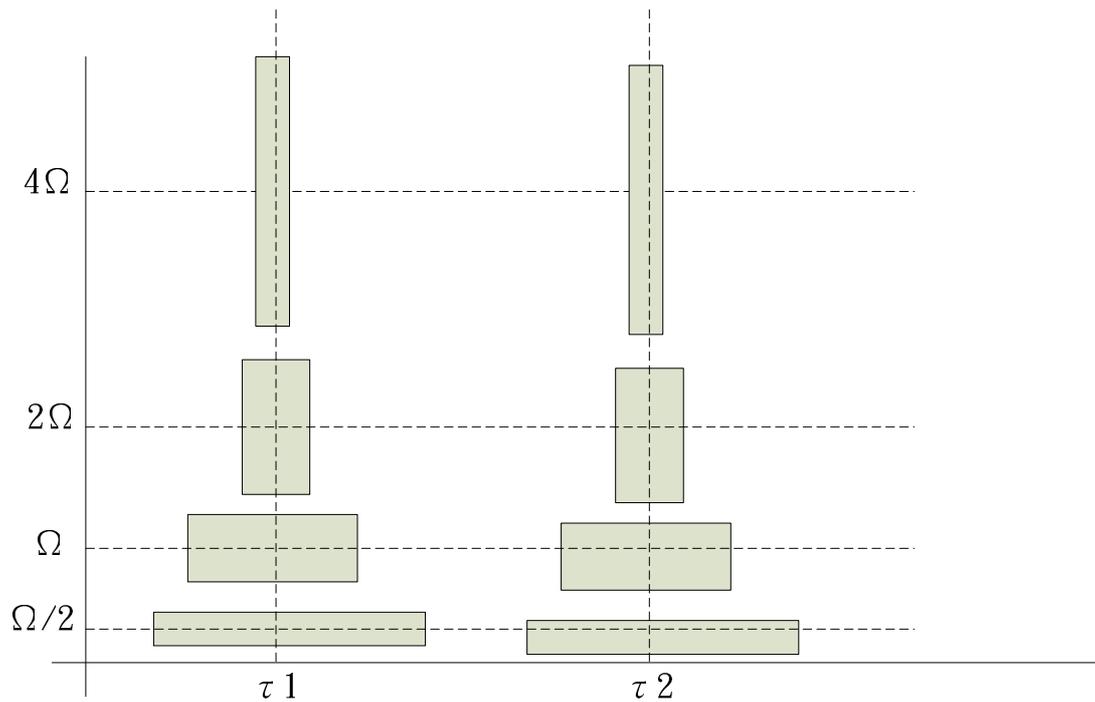
Signal Processing and Its Applications, Volume 2, pp. 621 – 622 ,
July 2003.

- [39] ZhiMing Zhang, JeongHoon Park and YongJe Kim , “A novel deblocking algorithm using edge flow-directed filter and curvelet transform” , IEEE International Conference on Multimedia and Expo. , Volume 1 , pp. 683 – 686 , June 2004.
- [40] A. Nosratinia , “Postprocessing of JPEG-2000 images to remove compression artifacts” , IEEE Letters on Signal Processing , Volume 10 , Issue 10 , pp. 296 – 299 , Oct. 2003.
- [41] M. M. Hadhoud, M. M. Foaad and H. A. A. Allah, , “Improved method for blocking-artifact reduction in block coded images in wavelet-transform domain” , Proceedings on Radio Science , pp. 301 – 308 , March 2002.
- [42] 繆紹綱, 數位影像處理-活用Matlab, 初版, 全華科技圖書, 台北市, 民88.
- [43] Rafael C. Gonzalez , Richard E. Woods and Steven L Eddins , 數位影像處理-運用MATLAB, 繆紹綱譯, 初版, 普林斯頓國際, 台北市, 2005.
- [44] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods , Digital image processing , 2nd ed, Prentice Hall , Upper Saddle River , N. J. , 2002.
- [45] International Standard ISO/IEC 14496-2:2001 , Information technology-Coding of audio-visual objects:Part 2: Visual , Second edition , DEC. 2001.
- [46] R. Coifman and D. Donoho , “Translation invariant de-noising ” , Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics , vol. New York: Springer-Verlag , pp. 125-150 , 1995

附錄 A 、 小波轉換理論與架構

小波轉換最早是由Morlet 和Grossmann在分析地震波訊號時，所提出來作為一種訊號分析的數學工具，其轉換基礎建立在一個母波(mother wavelet)上，利用母波的平移(translation)與縮放(dilation)形成轉換的基底函數。相較於傅立葉系列所採用的弦式波基底而言，小波轉換的基底有較短的持續時間(time duration)，因而得名。

觀察圖A1 可以了解小波分析的調適性，因為低頻訊號的週期比較長，若探測時間很短，可能連一個週期都看不完全，如何斷定其頻率？就一般情況來看，低頻的資訊量多而且重要，有將它們仔細分析的必要，所以一個有效率的低頻率波函數應該在時域上寬，在頻域上窄。反之，高頻訊號的週期就甚短，若使用太長的探測時間可能無法捕捉到細微變化部分，且高頻的資訊量稀疏而較不重要(有些甚至是雜訊)，若在頻域上細細探索，可能會造成資源的浪費。在時域上寬而頻域上窄的調適性，使得小波轉換具有很好的局部分析(local analysis)能力。從時域到頻域的轉換，以數學角度來看，無非就是基底的轉換。訊號處理的主要目的之一，就是企圖找到某種基底，使得訊號在那種特殊基底的表示之下，能夠突顯某種現象，以利我們從中探測到某種訊息。



圖A 1. 小波轉換在時頻域的解析度

小波轉換提供了一種新的基底轉換之可能性。要使小波技術的方法快速而又準確，挑選或設計合適小波至關緊要。合適小波的判斷標準與具體應用有關。

小波的種類相當多樣化[10]，像Morlet、Mexican hat、Meyer、Haar、Daubenchies、Symlets、Coiflets 等等，都是常用的小波類型，而且在Matlab 的Toolbox 裡面都可以很方便的呼叫出來使用。至於每一種小波的高通和低通濾波所使用的係數，因為都已經發展的相當廣泛，目前都可以直接從查資料得知。

至於如何去選擇適合的小波，可以從數學或是實驗去做決定。如果是從數學方面去著手，就是去研究小波方程式，看數學動作有沒有相關到結果的產生。如果是從實驗方面去著手，就是試著從眾多的小波去一一實做，然後看哪一種小波的結果較能符合後續的研究。

A.1. 連續小波轉換(continuous wavelet transform)

小波轉換將一個時間函數映射到一個和的二維函數，此點與短時距傅立葉轉換相似。 a 表示尺度(scale)參數，其作用是將函數做壓縮或伸展； b 為小波函數沿著時間軸的移動。設信號為平方可積(square integrable)，表示為

$f(t) \in L^2(R)$ ，其中 $L^2(R)$ (也可稱為Hilbert space) 表示所有可計算且平方可積分的函數所形成的函數空間，即滿足能量有限的訊號 $f(t)$ 所形成的空間：

$$\int f^2(t)dt < \infty \quad (A-1)$$

則 $f(t)$ 對 $\psi(t)$ 所作的CWT(Continuous Wavelet Transform) 被定義為

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (A-2)$$

其中 a 和 b 都是實數，* 代表的是共軛複數。可以這樣理解上面表態式的意

義：如我們用鏡頭觀察目標 $f(t)$ (即待分析訊號)， $\psi(t)$ 代表鏡頭所起的作用 (例如濾波)。 b 相當於使鏡頭相對於目標平行移動， a 的作用相當於鏡頭向目標推進或遠離。由此可見小波變換有以下特點[10]:

a. 有多分辨率(multi-resolution)，也叫多尺度(multi-scale)的特點，可以由粗及細地逐步觀察訊號

b. 可以看成用基本頻率特性為 $\psi(t)$ 的帶通濾波器在不同尺度 a 下對訊號做濾波。

c. 適當地選母小波，使WT在時、頻域都具有表徵訊號局部特徵的能力。

若我們先定義以下式子

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{A-3})$$

(其中正規化因子 $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ 是為了使能量維持一定值)

則式A-2可以改寫為：

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (\text{A-4})$$

其中a代表了縮放量(dilation variable), b則代表平移量(time shift)。而 $\psi(t)$ 代表小波中的母波(mother wavelet), 且須有下列特性[11]:

1. 函數的積分為零：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{A-5})$$

因此其圖形必是上下起伏的震盪波(oscillatory waves)

2. 平方積分為有限值：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{A-6})$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1$

表示 $|\psi(x)|$ 所形成的面積必然不會很大, 亦即其振幅必須在正負兩個方向快速衰減為零。

所以 $\psi(x)$ 的圖形看來就像一個小小的波浪。由於小波基底函數在正負兩個方向迅速衰減到零, 因此必須利用平移參數b 移動小波基底函數 $\psi(x)$ 以涵蓋整個時間軸, 且利用比例參數a 以涵蓋所有的頻率, 而小波基底函數 $\psi(x)$ 變換至

$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 時必須乘上 $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ 才可保持其範數(norm)使其能量保持不變。

基本小波可以是實數或複數，而其選擇將會影響到轉換的結果對應為實數或複數。由於小波轉換的相角在某些應用中含有許多有用的資訊，所以使用複數小波會比較有好處。下面是一些 $\psi(t)$ 以及其傅立葉轉換的例子：

(a)墨西哥帽(Mexican hat)小波：

墨西哥帽(Mexican hat)小波是高斯(Gauss) 函數的二階導數。這種小波被最先用於多媒體中的多尺度邊緣(edge)檢測。因為它的形狀像墨西哥帽的截面而得名。但其並沒有尺度函數(scale function)。

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \\ \psi(\omega) &= \frac{-\sqrt{8}\sigma^{5/2}\pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)\end{aligned}\tag{A-7}$$

(b)Haar：

Haar 函數是小波分析中最早用到的一個正交小波函數，也是最簡單的一個小波函數，它是介於 $t \in [0,1]$ 範圍內的單個矩形波。Haar 小波在時域內是不連續的，所以作為基本小波性能不是特別好，但他也有自己的優點，如[10]：

(1)計算簡單。

(2) $\psi(t)$ 不但與 $\psi(2^j t)$ [$j \in Z$] 正交，且和自己的整數位移正交，即

$$\int \psi(t)\psi(t-ik)dt = 0, k \in Z.$$

以下是Haar小波的時域和頻域表示法。

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

$$\psi(w) = je^{-j\frac{w}{2}} \frac{\sin^2(w/4)}{w/4}$$

(c) Morlet :

Morlet 小波並沒有尺度函數, 且是非正交分解,

$$\psi(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{r^2}{2}} \quad (\text{A-9})$$

$$\psi(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{-(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

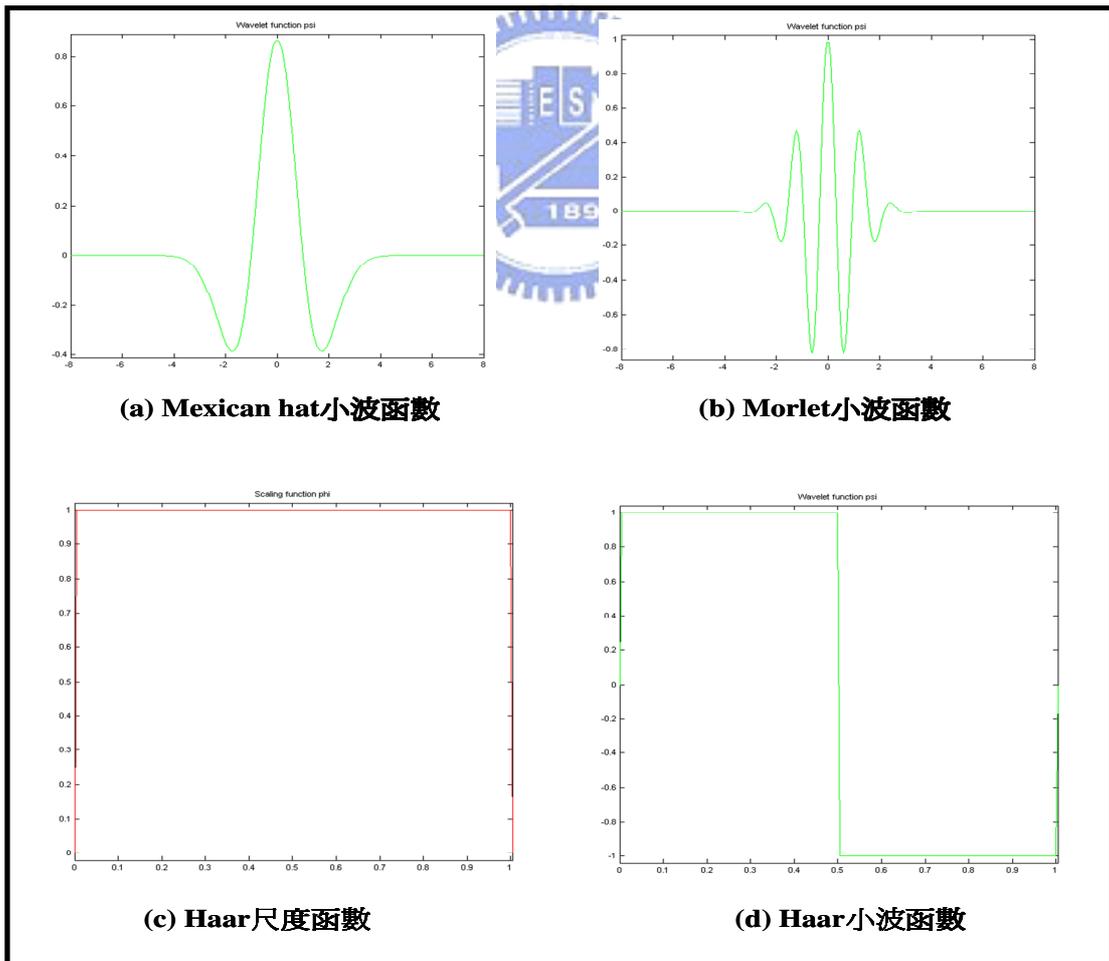


圖 A 2: 一些小波的尺度函數和其小波函數

A. 2. 離散小波轉換(Discrete Wavelet Transform)

雖然以提取特徵的角度看，常常還需要採用連續小波轉換，但是在每個可能的尺度離散點都去算小波係數，那將是個巨大的工程，並且產生一大堆令人厭煩的數據。如果只取這些尺度的一小部分，以及部分時間點，將會大大減輕我們的工作量，同時並不失準確性。離散小波轉換(Discrete Wavelet Transform，簡稱DWT)主要就是建立在二進制小波轉換的基礎上。

由(A-4)式可以得知：

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

$$\text{令 } a = a_0^0, a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^j; j = 1, 2, \dots, N$$

當尺度擴大 a_0^j 倍時，意味著頻率降 a_0^j 倍，因此取樣間隔可以擴大 a_0^j 倍。一個很自然的想法是將時間位移也以 a_0^j 倍進行離散化，即沿時間軸以 a_0^j 為間隔做均勻取樣，根據Nyquist 取樣定理，這樣仍然可以不丟失訊息。以冪級數進行離散化是一個高效的離散方法，因為冪指數 j 的小變化，就會引起尺度非常大的變化，動態範圍非常大。一般情況下，取 $a_0 = 2$ ，這樣非常便於分析，並且適合於在計算機上進行高效的運算。所以我們可以將 $\psi(t)$ 表示為

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{\frac{-j}{2}} \psi \left(\frac{t - ka_0^j b}{a_0^j} \right) = a_0^{\frac{-j}{2}} \psi(a_0^{-j} t - kb) \quad (\text{A-10})$$

為了使小波轉換具有可變性的時間和頻率分辨率，我們很自然的需要改變 a 和 b 的大小，為了計算上更有效率，一般最常用便是二進制的離散化，通常令 $a_0 = 2, b = 1$ ，如此代入(A-10)式可得二進制離散小波轉換的表示式。

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j} t - k) \quad j, k \in Z \quad (\text{A-11})$$

離散小波轉換主要是將一個訊號分解成近似空間(Approximation Space)和細節空間(Detail Space)，其中，在近似空間內的近似訊號表示了原訊號裡最主要的訊號。我們以 V_j 來表示近似空間， V_j 是依照一定解析度由原始訊號所取出來的各類頻率訊號之集合，此下標 j 表示為尺度參數值， j 值越大，其所定義的解析度也就越細。

在相鄰兩個近似空間 V_j 與 V_{j+1} 裡，根據相同的條件所定義得到的兩個近似訊號 cV_j 和 cV_{j+1} 之間存在一個差值訊號，這些差值訊號所成的集合便稱次為細節空間 W_j 。細節空間 W_j 是近似空間 V_j 在近似空間 V_{j+1} 裡的正交補集，也就是說， V_{j+1} 可分解成兩個彼此互相正交的子集合 V_j 和 W_j 。

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (\text{A-12})$$

當函數 f 屬於一個空間 $L^2(\mathbb{R})$ ，則有一個尺度(scaling)函數 $\phi(t)$ 使得 f 從 $L^2(\mathbb{R})$ 的空間濾得一個較為平滑的子訊號(即近似空間(Approximation Space))。尺度函數 $\phi(t)$ 可視為低通濾，而同一層的高通濾波器即為小波函數 $\psi(t)$ (即細節空間(Detail Space))。將前述比較平滑的子訊號再由經過擴張和平移後的尺度函數進一步分解出細節部分而逐漸平滑化，依此步驟進行下去使得原始訊號被映射到一連串的子空間。

在數位信號處理中，一個信號或函數 $f(t)$ 經常可以被表示成某個基底的線性組合。

$$f(t) = \sum_k a_k \psi_k(t) \quad (\text{A-13})$$

(k : integer, a_k 是一個實係數, $\psi_k(t)$ 是實函數集)。

如果上式是唯一，剛稱此函數集為基底。為了運算上的方便，一般都希望基底具有正交的特性，即

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \psi_l(t) dt = 0, \text{ for } k \neq l \quad (\text{A-14})$$

那麼係數 a_k 便能由內積得到：

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t) \psi_k(t) dt \quad (\text{A-15})$$

以Fourier series 來說，正交基底函數 $\psi_k(t)$ 就是 $\sin(k\omega_0 t)$ 和 $\cos(k\omega_0 t)$ ，對 wavelet 來說，一個類似(A-10)的雙參數表示式如下：

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (\text{A-16})$$

這裡 j 和 k 都是整數， $\psi_{j,k}(t)$ 稱為小波(wavelet)函數，並且具有正交基底的特性，擴展 j 、 k 係數後的 $a_{j,k}$ 集合稱之為 $f(t)$ 的離散小波轉換。

A.3. Mallat 的快速小波演算法

在真實的世界裡，訊號 $f(x)$ 常是「多層解析度訊號(multi-resolution signals)」，同時具有粗細不同的「解析度」；以頻率的觀點而論，它們常是「多頻訊號」；低解析度所表達的是變化平緩之局部低頻訊號，高解析度所表達的是變化劇烈之局部高頻訊號。而小波是可以對這種多頻訊號作多層解析度分析與表達的一種數學工具。

基本上小波轉換是以一連串不同的解析度空間(multi resolution space) V_j 以連續近似來表示函數 $f(x)$ 函數 f 屬於一個空間 $L^2(R)$ ，而這些子空間 V_j 滿足下列特性

$$(1) \text{ 包含性} : \dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

← 粗(解析度低) 細(解析度高) →

$$(2) \text{完整性} : \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

$$(3) \text{尺度性} : f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1}$$

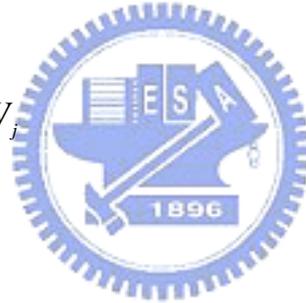
此外 V_{j+1} 空間經由 $\phi(t)$ 濾除的細緻訊號應存在另一正交基底所組成的子空間

間 W_j 中使得

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, V_j \perp W_j \quad (\text{A-17})$$

\oplus 代表正交和. 即 V_{j+1} 可分解成 V_j 和 W_j 兩個子空間; 同理 V_j 和 W_j 兩個子空間可合成 V_{j+1} 空間. 如此遞迴分解 則 V_{j+1} 可表示為

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ &= (V_{j-1} \oplus W_{j-1}) \oplus W_j \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \dots \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$



由於 V_j 空間可分解成 V_{j-1} 子空間和 W_{j-1} 子空間的正交和, 所以

W_{j-1} 包含於 V_j , 又因為 V_j 和 W_j 相互垂直故可知 W_{j-1} 與 W_j 也相互垂直, 依

此類推可得知各細緻子空間兩兩相互垂直, 即

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \{0\} \quad (\text{A-19})$$

此即為多重解析度分析(Multiresolution Analysis)的概念.

Mallat在圖像的分解與重構的啟發之下, 根據多重解析度分析理論, 提出了小波分解與重構的快速算法, 稱次為Mallat算法. 該算法相當于FFT在傅利葉轉換

中的地位. 由上一節的多重解析度分析, 可得出:

$$P_j f(t) = \sum_n a_n^j \phi_{j,n}(t) \quad (\text{A-20})$$

$P_j f(t)$ 表 $f(t)$ 對 $\phi_{j,n}(t)$ 的投影.

當 $j=0$ 時.

$$P_0 f(t) = \sum_n a_n^{(0)} \phi_{0,n}(t) \quad (\text{A-21})$$

由於

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= \langle P_1 f(t), \phi_{1,k}(t) \rangle = \langle P_0 f(t), \phi_{1,k}(t) \rangle \\ &= \sum_n \langle \phi_{0,n}(t), \phi_{1,k}(t) \rangle a_n^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

可證明

$$\langle \phi_{j+1,n}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) \phi^*(t-n+2k) dt = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n+2p) \right\rangle = h_0[n-2k] \quad (\text{A-23})$$

所以證明近似空間係數 $a_k^{(j-1)}$

$$a_k^{(j-1)} = \sum_n h_0(n-2k) a_n^{(j)} = a^{(j)} * \bar{h}_0(2k) \quad (\text{A-24})$$

其中 $\bar{h}_0(n) = h_0(-n)$

細節空間係數 $d_k^{(j-1)}$

$$d_k^{(j-1)} = \sum_n h_1(n-2k) x_n^{(j)} = d^{(j)} * \bar{h}_1(2k) \quad (\text{A-25})$$

而重構(reconstruct)剛可以證明為:

$$a_k^{(j)} = a^{(j-1)} * h_0[k] + d^{(j-1)} * h_1[k] \quad (\text{A-26})$$

圖A3和圖A4分別說明了2維Mallat快速小波轉換的方法.

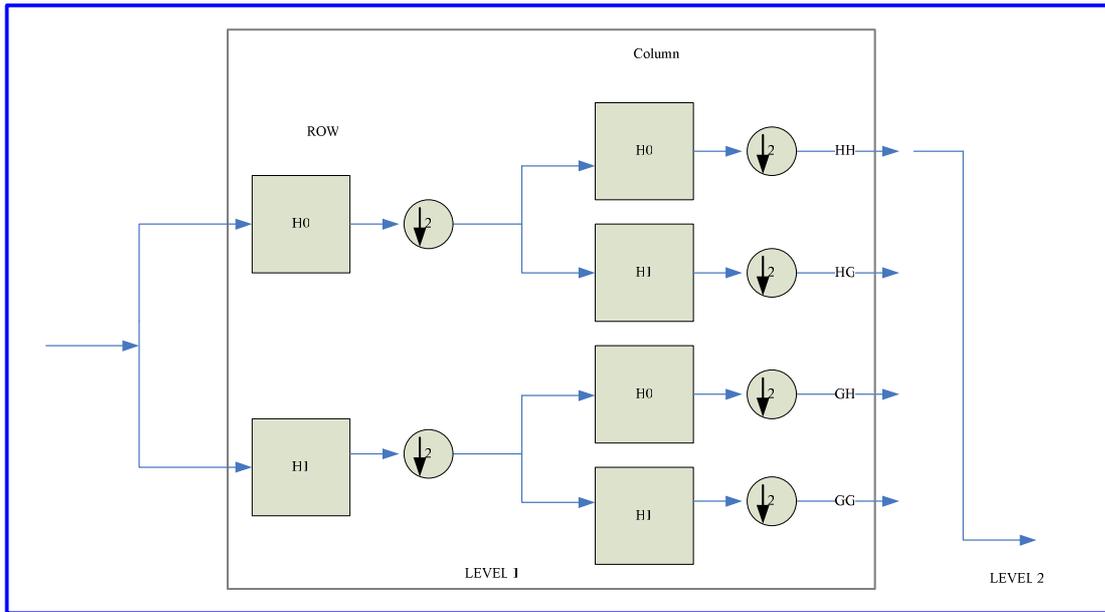


圖 A 3: DWT 的快速分解

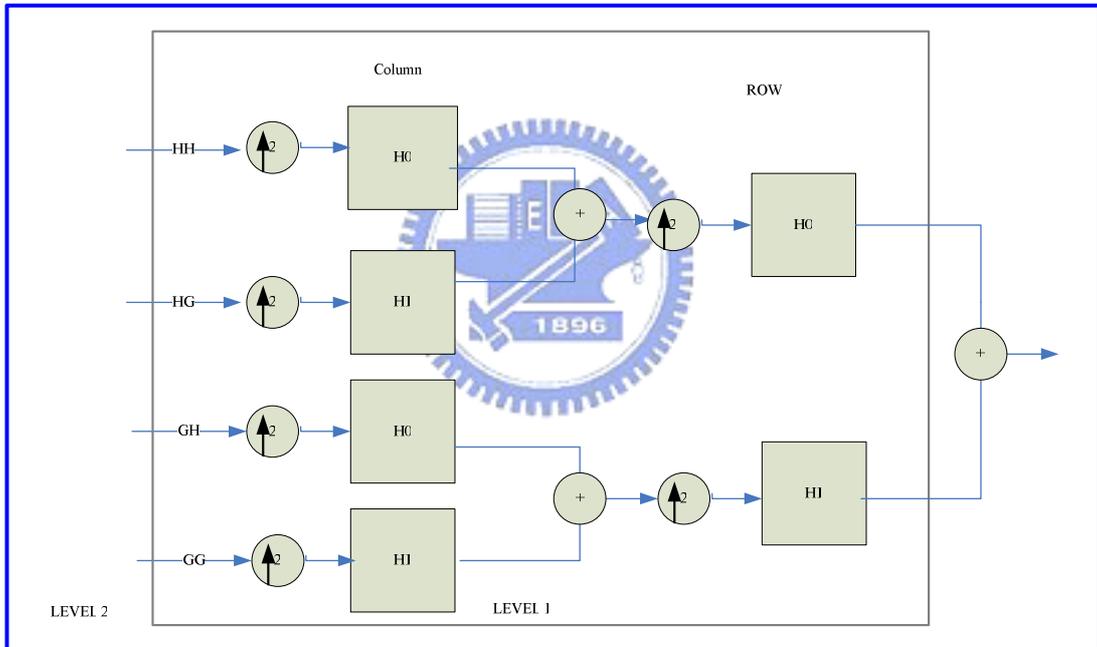


圖 A 4: DWT 的快速重構