

第三章 應用於半橋式直流轉換器的架構與分析

3.1 前言

在第二章所介紹的轉換器，可以初步了解到各式多階轉換器的架構與工作模式，其運用了不同的開關組合與時序控制，雖然達到多階層的實現要求，但在開關的使用數量上，以三階層為例，均需使用至少 4 顆的主動開關元件，不僅使得成本高居不下，亦使得控制及開關的驅動電路複雜化。同時由於線路中開關元件係工作於硬式切換模式，其交換損失所產生的熱消耗問題，也衍伸出另一個麻煩的問題。另外在半橋式直流轉換器中，因為變壓器漏電感所引發的高頻震盪，衍生出許多的電磁干擾的問題，若採取被動式的 RC snubber 來加以抑制，雖然線路簡單，但卻帶來效率降低及散熱等棘手的問題；因此在不影響原有的工作模式下，如何以最少的開關數目，搭配簡單的控制線路，以解決上述問題是本文研究重點。因此，本論文所提出的線路只需使用 3 顆的開關即可達到三階層應用的需求，同時可應用於直流轉直流轉換器及直流轉交流變流器上，電路包含了一個共振電感、兩個共振電容及 4 個飛輪二極體，便可獲得零電壓工作模式的效果。該輔助電路使用於半橋式轉換器時，並不影響原始電路的工作時序控制，因此降低了驅動控制的複雜度。其電路架構如圖 3.1 所示。在新型 3 階段輔助開關應用中，共振電容不僅提供了一共振迴路，在開關截止時亦有箝制因漏感所引起的電壓突波，因此，電容所儲存的能量不會以熱的方式消耗掉，同時在主要上下臂開關導通前與變壓器漏感產生共振，提供零電壓切換損失的優點。以下將討論新型 3 階層輔助開關應用於半橋

式直流直流轉換器時的原理分析。

3.2 系統架構

新型 3 階段輔助線路應用於直流轉直流轉換器上，如圖 3.1 所示，輔助電路中包含了一個共振電感 L_r 、兩個共振電容 C_{r1} 與 C_{r2} 及 4 個飛輪二極體 $D_4 \sim D_7$ ，而 C_1 、 C_2 及 C_3 分別是開關 S_1 、 S_2 及 S_3 的內部寄生電容， L_{lk} 則是變壓器的等效漏電感。以下就分別對直流/直流轉換器及直流/交流變流器，在各時序區段及電路動作原理，作一個詳細的介紹說明。

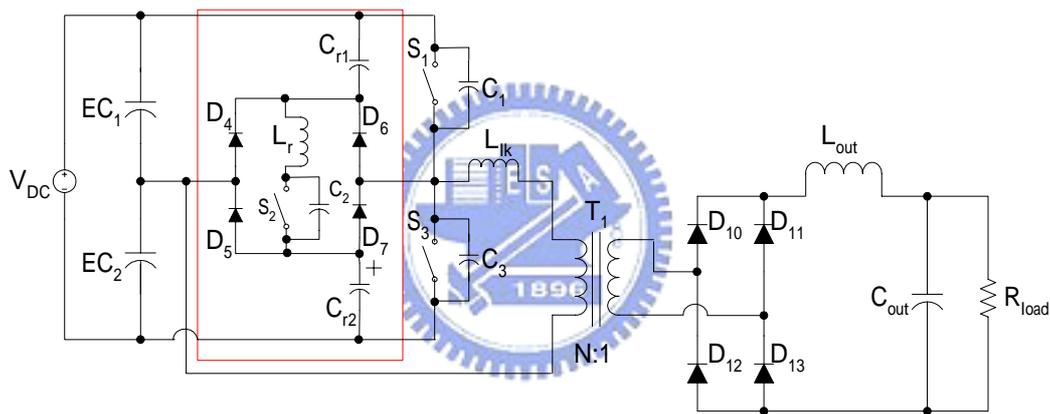


圖 3.1. 輔助 3 階段電路於半橋式直流/直流轉換器應用

3.3 線路原理模式分析

在主要開關及輔助開關動作時序以圖 3.2 來表示，由於半橋式轉換器為了避免非對稱開關時序所造成的電感漣波增加[7]，因此上下臂開關動作採為對稱方式操作。然後，對開關的切換週期分為 7 個模式加以分析，如圖 3.2 所示。

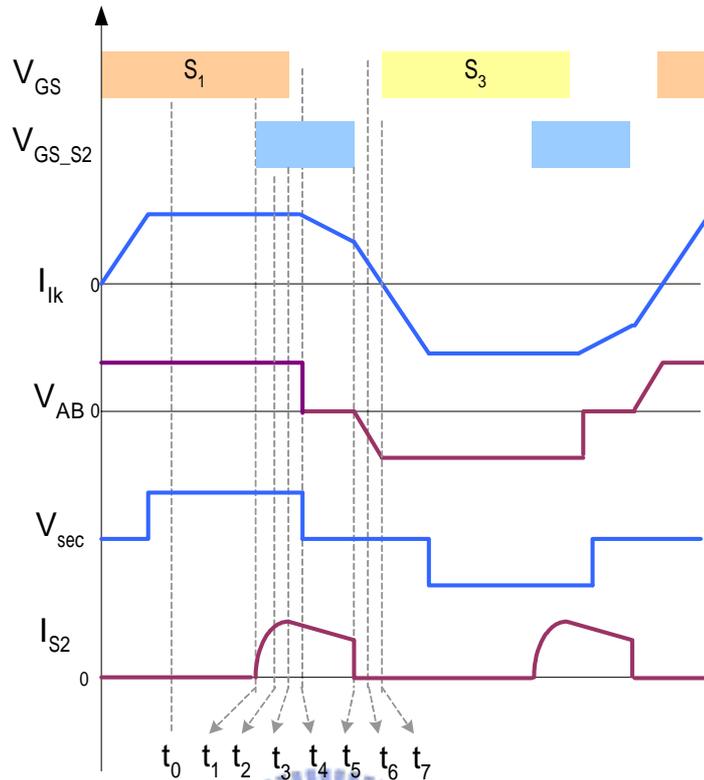


圖 3.2. 開關時序及主要電壓電流波形

1. 模式 1 : $[t_0-t_1]$

一開始時開關 S_1 開關導通，電流從電容器 EC_1 正極流經 S_1 後，經過變壓器的初級側線圈，流回電容器 EC_1 負端形成一電流迴路。此時二次側二極體 D_{10} 和 D_{13} 處於順偏狀態，電容器上電壓 $+\frac{V_{DC}}{2}$ 經過變壓器依圈數比例關係耦合至二次側，對輸出儲能電感 L_{out} 及濾波電容 C_{out} 進行充電，在此定義電流的方向為電感流入的方向為正斜率，因此輸出電感電流斜率此時為正。

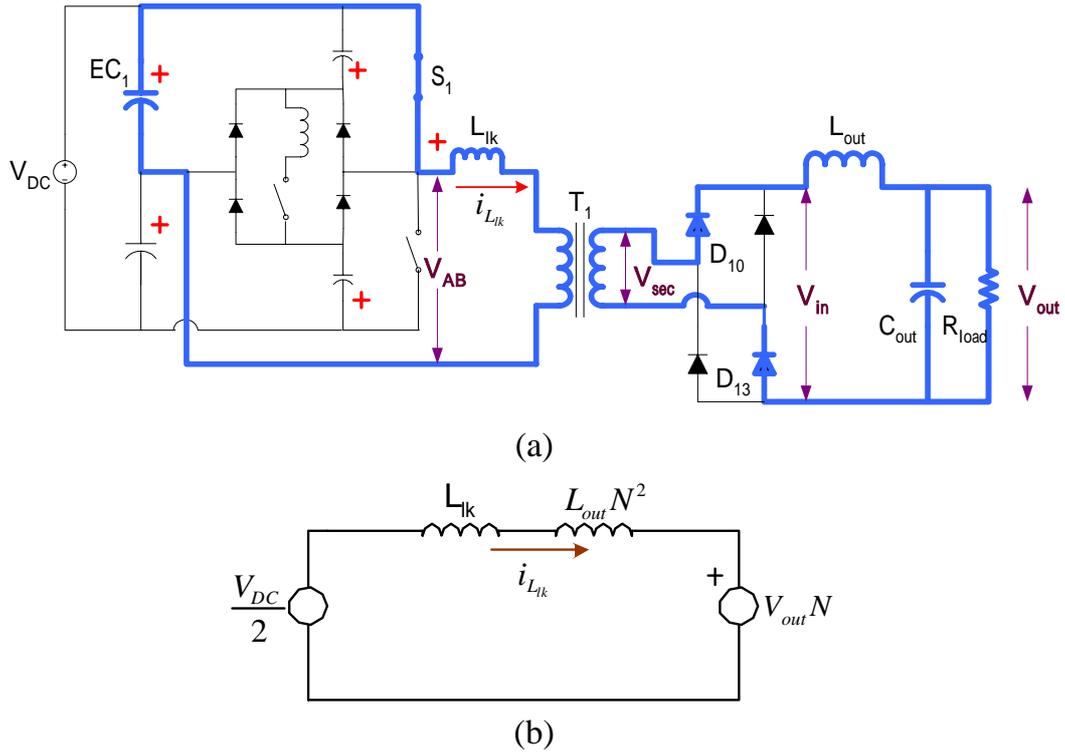


圖 3.3. t_0 - t_1 時段電路分析模式 1(a)工作迴路(b)等效電路

在此區間圖 3.3(a)電路的等效電路如圖(b)所示，上臂開關導通，初級側電壓經由變壓器耦合輸出至次級，對輸出電感進行充電。初級側電流成線性的增加。其輸入端和輸出端的關係依據克希荷夫電壓方程式可表示為

$$\frac{V_{DC}}{2} = L_{lk} \frac{di_{L_{lk}}}{dt} + L_{out} N^2 \frac{di_{L_{lk}}}{dt} + V_{out} N \quad (3.1)$$

其中N定義為變壓器 T_1 的初次級圈數比。

此時流經變壓器的電流可以以下式表示：

$$\frac{di_{L_{lk}}}{dt} = \frac{V_{DC}/2 - V_{out} N}{L_{lk} + L_{out} N^2} \quad (3.2)$$

或者表示為

$$i_{L_{lk}} = \frac{V_{DC}/2 - V_{out} N}{L_{lk} + L_{out} N^2} (t_1 - t_0) \quad (3.3)$$

由於輔助開關尚未開始導通，共振電容 C_{r1} 的兩端的電壓經由二極體 D_6 箝制在零電位，而 C_{r2} 的兩端的電壓等於 $+\frac{V_{DC}}{2}$ 。

2. 模式 2 : [t₁-t₂]

在 t₁ 時將輔助開關 S₂ 導通，此時形成另一個電流迴路與原來的主迴路並聯，其目的在於將共振電感充電，以其延續主開關截止時的電流。

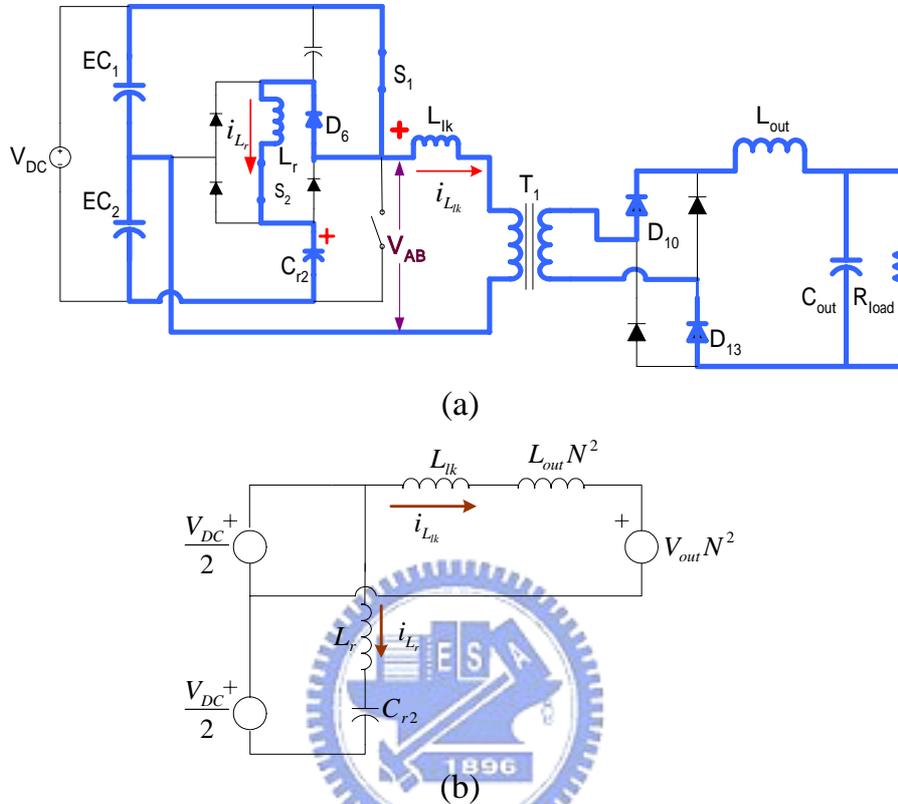


圖 3.4. t₁-t₂ 時段電路分析模式 2(a) 工作迴路 (b) 等效電路

圖 3.4 為在模式 2，電流在電路中流動的情形，其中 L_{lk} 為變壓器的等效漏感。在 t₁ 時，輔助開關開始導通，C_{r2} 開始經由 L_r 充電，C_{r2} 兩端電壓開始上升，且於時間 t₂ 達到 $+\frac{V_{DC}}{2}$ ，此時流經 L_r 電流由零上升至 I_{lk}，根據克希荷夫電壓方程式，在該區間 L_r 的電流可視為

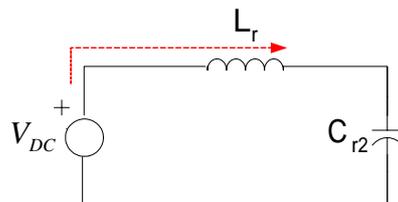


圖 3.5. L_r 與 C_{r2} 串聯諧振等效電路

由圖 3.5 可得出

$$L_r \frac{di_{L_r}}{dt} + v_{C_{r2}}(t) = V_{DC} \quad (3.4)$$

及

$$i_{L_r} = C_{r2} \frac{dv_{C_{r2}}(t)}{dt}$$

經整理後得出

$$\frac{d^2 v_{C_{r2}}(t)}{dt^2} + \frac{1}{L_r C_{r2}} v_{C_{r2}}(t) = \frac{1}{L_r C_{r2}} V_{DC} \quad (3.5)$$

或表示為

$$\frac{d^2 v_{C_{r2}}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v_{C_{r2}}(t) = \omega_0^2 V_{DC} \quad (3.6)$$

$$\text{其中 } \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_{r2}}}$$

故(3.6)式之齊次(homogenous solution)解可表示為

$$v_{C_{r2}h}(t) = A \cos \omega_0(t - t_0) + B \sin \omega_0(t - t_0) \quad (3.7)$$

而其特解(particular solution)可表示為

$$v_{C_{r2}p}(t) = V_{DC} \quad (3.8)$$

因此，其通解(general solution)可寫成

$$v_{C_{r2}}(t) = v_{C_{r2}h}(t) + v_{C_{r2}p}(t) = A \cos \omega_0(t - t_0) + B \sin \omega_0(t - t_0) + V_{DC} \quad (3.9)$$

由於在此定義共振電容 C_{r2} 上的初始值

$$v_{C_{r2}}(t_0) = V_{C_{r2}0}$$

$$\text{求得 } A = V_{C_{r2}0} - V_{DC} \quad (3.10)$$

從公式(3.5)及(3.9)得知

$$i_{L_r}(t) = C_{r2}(-A\omega_0 \sin \omega_0(t - t_0) + B\omega_0 \cos \omega_0(t - t_0)) \quad (3.11)$$

在此定義共振電感 L_r 電流的初始值

$$i_{L_r}(t_0) = I_{L_r0}$$

$$\text{因此 } B = \frac{I_{L_r,0}}{C_{r2}\omega_0} = Z_0 I_{L_r,0} \quad (3.12)$$

將公式(3.10)及(3.12)代入(3.9)式中得出

$$v_{C_{r2}}(t) = V_{DC} - (V_{DC} - V_{C_{r2},0}) \cos \omega_0(t - t_0) + Z_0 I_{L_r,0} \sin \omega_0(t - t_0) \quad (3.13)$$

$$\text{其中 } Z_0 = \sqrt{\frac{L_r}{C_{r2}}}$$

同樣地將公式(3.10)及(3.12)代入(3.11)式中得出

$$i_{L_r}(t) = I_{L_r,0} \cos \omega_0(t - t_0) + \frac{V_{DC} - V_{C_{r2},0}}{Z_0} \sin \omega_0(t - t_0) \quad (3.14)$$

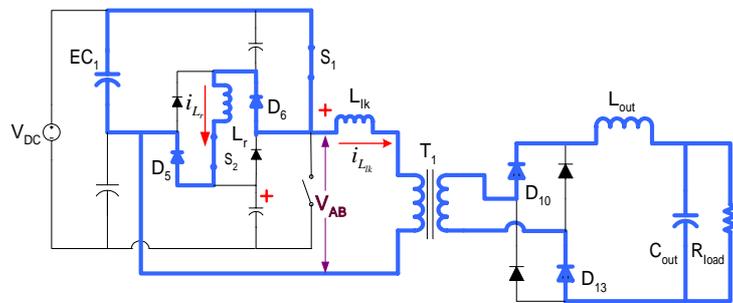
由於共振電感 L_r 電流的初始值為零，因此在該時間區間 $(t_1 - t_2)$ 內，共振電感電流可表示為

$$i_{L_r} = \frac{V_{DC} - V_{C_{r2},0}}{\sqrt{L_r / C_{r2}}} \sin \omega_0(t_2 - t_1) \quad (3.15)$$

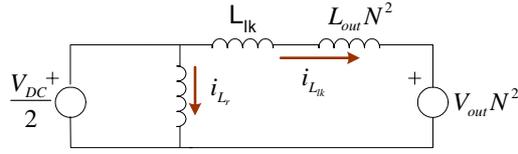
而 $V_{C_{r2},0}$ 為 C_{r2} 在 t_1 時間的初始電壓，由於該電流必須大於流經 I_{lk} 的電流，以確使在當 S_1 截止時， I_{lk} 電流得以連續。

3. 模式 3: $[t_2 - t_3]$

由於共振電流 i_{L_r} 對 C_{r2} 的快速充電，在時間點 t_2 時，跨在 C_{r2} 的電壓達到 $+\frac{V_{DC}}{2}$ ，因此共振現象停止，流經共振電感 L_r 的電流，經由二極體 D_5 流回電容器 EC_1 的負端。



(a)



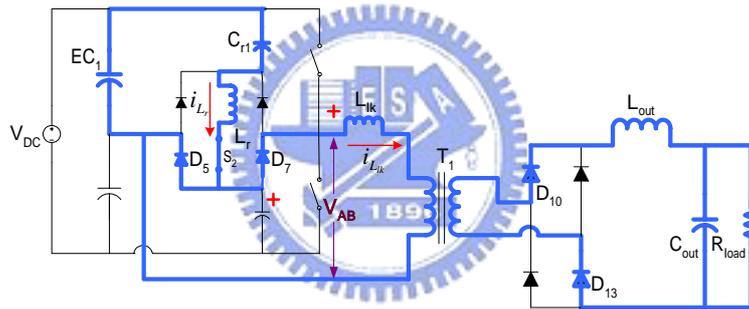
(b)

圖 3.6. t_2 - t_3 時段電路分析模式 3(a) 工作迴路(b) 等效電路

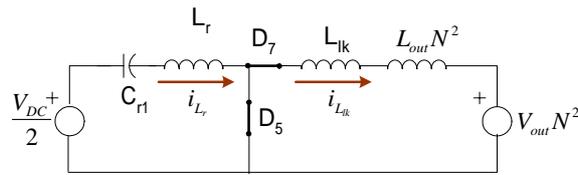
在 t_3 時將 S_1 截止，此區間內 L_r 電感持續儲存能量，且電流約以線性方式增加。該能量將於下一區間內對 C_{r1} 充電，同時隨著二極體 C_7 的順偏， C_{r2} 於該區間內箝制至 $V_{DC}/2$ ，因此可將 S_1 與輔助開關最少的重疊時間定義為

$$t_{\min_on} = (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) \quad (3.16)$$

4. 模式 4: [t_3 - t_4]



(a)



(b)

圖 3.7. t_3 - t_4 時段電路分析模式 4(a) 工作迴路(b) 等效電路

在 t_3 時將 S_1 截止。由於 S_1 的截止，在輸出電感電流連續的條件下， L_r 開始放電並對於 C_{r1} 充電，並在 t_4 結束時將 I_{L_r} 放電至零，由於二極體 D_5 、 D_6 處於導通的狀態，因此變壓器兩端電位被箝制在中性點。

由於 C_3 的電壓已被充電至 V_{DC} ，因此在開關 S_1 截止後，該儲存在 C_3 的能量將會以線性方式放電，同時維持住 3 階層所需電流，使得 S_1 電壓得以

在 S_1 截止後以線性方式上升，其共振電容電壓時間關係式可表為

$$v_C(t) = \frac{V_{DC}}{2} - \left(\frac{V_{DC}}{2} - V_{C_{r1,0}}\right) \cos \omega_0 t_{34} + Z_0 I_{L_{r,0}} \sin \omega_0 t_{34} \quad (3.17)$$

其中 $Z_o = \sqrt{\frac{L_r}{C_{r1}}}$

5. 模式 5 : $[t_4-t_5]$

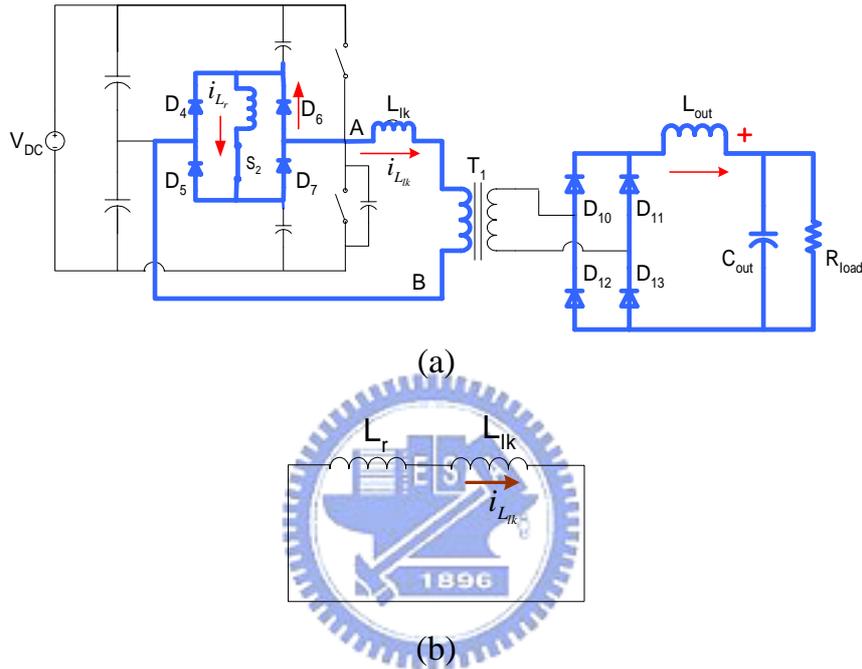
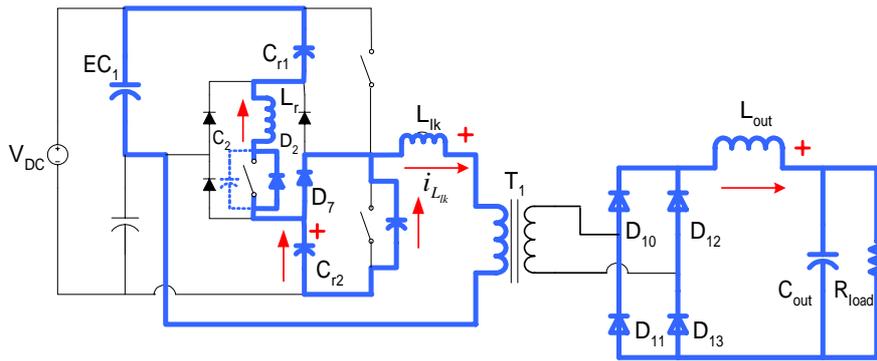


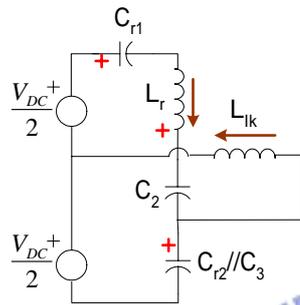
圖 3.8. t_4-t_5 時段電路分析模式 5(a) 工作迴路 (b) 等效電路

在 t_4 時， C_{r1} 兩端電壓上升至 $V_{DC}/2$ ，A點電位可視為 C_{r1} 與 C_{r2} 分壓，由於A和B兩點皆持續被箝制在中性點，因此一次側處於飛輪模式，初極側能量無法傳遞至次極側，初極側電位保持在零電位，由於變壓器輸出端電位維持在零，輸出負載電流則由輸出電感及電容供應。

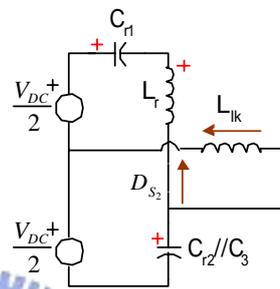
6. 模式 6 : [t₅-t₆]



(a)



(b)



(c)

圖 3.9. t₅-t₆時段電路分析模式 6(a)工作迴路(b)等效電路 1(c)等效電路 2

輔助開關於t₅截止，電感L_r對C₂開始充電，並形成一共振迴路，此時轉換器的等效電路如圖 3.9(b)所示，當v_{C2}開始共振至零後並反轉極性，S₂的內部旁路寄生二極體導通，使儲存在C_{r2}及C_{r1}的能量開始放電，形成由L_r、C_{r1}與C_{r2}組成的共振迴路，直至v_{C2}降至為零。上述此區間的兩個區段估算如下：

第一區段：L_r與S₂的寄生電容C₂共振的 1/4 個時間週期

$$\frac{1}{4} \times (2\pi\sqrt{L_r C_2}) = \frac{\pi}{2} \sqrt{L_r C_2}$$

第二區段：L_r與共振電容C_{r2}及共振電容C_{r1}串聯共振的 1/4 個時間週期，由於

C_{r2}=C_{r1}使得

$$\frac{1}{4} \times (2\pi\sqrt{L_r \cdot 0.5 \cdot C_{r2}}) = \frac{\pi\sqrt{L_r \cdot 0.5 C_{r2}}}{2} = \pi\sqrt{\frac{L_r C_{r2}}{8}}$$

因此在輔助開關截止後，下一次上臂或下臂開關導通前，必須保留的

最短死區時間(Dead Time)以提供共振迴路，共振時間可表為

$$t_{s6} = (t_6 - t_5) \leq \pi \left(\frac{\sqrt{L_r \cdot C_2}}{2} + \sqrt{\frac{L_r \cdot C_{r1}}{8}} \right) \quad (3.18)$$

7. 模式 7: [t₆-t₇]

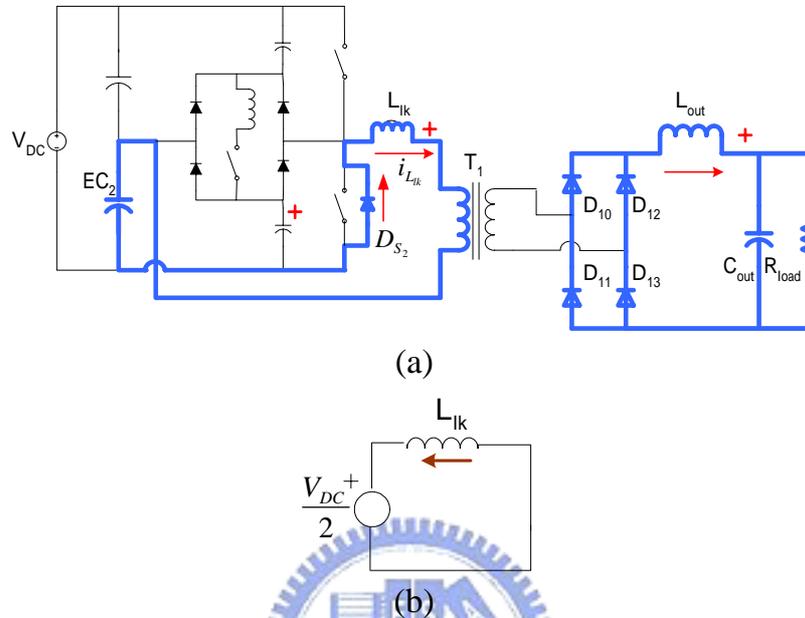


圖 3.10. t₆-t₇時段電路分析模式 7(a)工作迴路(b)等效電路

直到C_{r2}及S₃的旁路電容C₃電荷完全被放盡時，進而使S₃的旁路寄生二極體處於順偏狀態，此時再將S₃開關導通，並可確保開關導通於零電壓狀態。

3.4 小訊號模型推導

根據 3.3 節的分析可以知道輔助 3 階層電路於半橋式直流/直流轉換器於開關導通以及開關截止時的等效電路，接下來將使用狀態平均法來求得

輸入至輸出間的狀態方程式以及小訊號轉移函數 $\frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{d}(s)}$ ，基於分析方便，

在此討論在輸出電感電流處於連續導通模式下，將電路簡化為無隔離的形式，其中r_c及r_L為輸出電容及輸出電感的等效串聯電阻，其如圖 3.11 所示。

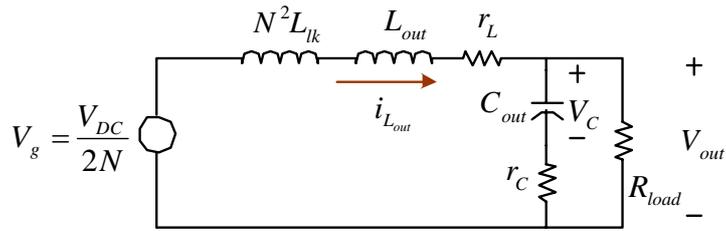


圖 3.11. 無隔離輔助 3 階層電路於半橋式直流/直流轉換器

以下的分析則利用 3.3 節中的各個模式下的等效電路，根據電路的原理分別推導其動態方程式，然後在依據所得出的動態方程式予以平均化之後，再推導出其一完整工作週期下的動態方程式，同時引入輸出電感電流及輸出電容器的電壓為小信號分析觀念，進而求出相關的轉移函數，在求解的過程中，為避免所推導的結果過於複雜而使控制器不易實現，所以在推導的過程中將預設一些合理的假設，從電路狀態可分為六個工作模式分別為能量傳送模式、共振電感共振儲能模式、共振電感線性儲能模式、共振電容共振儲能模式、飛輪模式及漏電感 L_{lk} 共振模式。但由於模式二與三其能量傳遞模式均相同於模式一，因此在此區段時間併入模式一計算，而模式四及模式五均處於飛輪模式，在此併入模式五計算，而模式六及七分分別均處於極為短暫的共振及導通時間，相較於一完整週期下的工作時間，其對系統影響甚小，在此予以忽略不計。

再來將每一個電路狀態在不同的模式下，以狀態變數方程式來表示

1. 模式 1 : [0 - $d_1 T_s$] 能量傳送模式

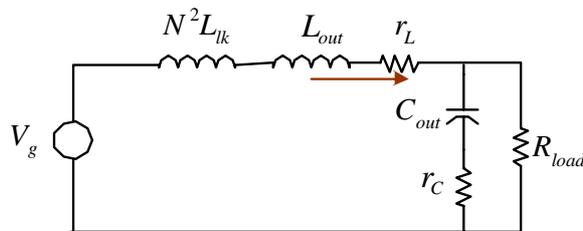


圖 3.12. 模式 1 等效電路

由圖 3.12，根據克希荷夫電壓(KVL)、電流(KCL)方程式可以得到以下狀態

方程式：

$$V_g = (N^2 L_{lk} + L_{out}) \frac{di_{L_{out}}}{dt} + r_L i_{L_{out}} + v_{out} \quad (3.19)$$

$$v_{out} = r_C C_{out} \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad (3.20)$$

$$\text{由於 } v_{out} = (i_{L_{out}} - C_{out} \frac{dv_C}{dt}) R_{load} \quad (3.21)$$

將(3.21)式代入(3.20)式中經整理後可得出

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{R_{load}}{C_{out} (R_{load} + r_C)} i_{L_{out}} - \frac{1}{C_{out} (R_{load} + r_C)} v_C \quad (3.22)$$

將(3.19)式 $\frac{di_{L_{out}}}{dt}$ 移項至等號的左邊，並將(3.22)式代入經整理得出

$$\frac{di_{L_{out}}}{dt} = -\frac{R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L}{(N^2 L_{lk} + L_{out})(R_{load} + r_C)} i_{L_{out}} - \frac{R_{load}}{(N^2 L_{lk} + L_{out})(R_{load} + r_C)} v_C + \frac{1}{(N^2 L_{lk} + L_{out})} V_g \quad (3.23)$$

並將(3.22)式代入(3.21)整理得出

$$v_{out} = \frac{R_{load} r_C}{R_{load} + r_C} i_{L_{out}} + \frac{R_{load}}{R_{load} + r_C} v_C \quad (3.24)$$

因此將以上狀態方程式表示成矩陣的形式：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} i_{L_{out}} \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} i_{L_{out}} \\ v_C \end{bmatrix} + B_1 v_g = A_1 x + B_1 v_g \quad (3.25)$$

$$v_{out} = C_1 x \quad (3.26)$$

$$\text{其中 } A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L}{(N^2 L_{lk} + L_{out})(R_{load} + r_C)} & -\frac{R_{load}}{(N^2 L_{lk} + L_{out})(R_{load} + r_C)} \\ \frac{R_{load}}{C_{out} (R_{load} + r_C)} & \frac{-1}{C_{out} (R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{(N^2 L_{lk} + L_{out})} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\text{以及 } C_1 = \begin{bmatrix} \frac{R_{load} r_C}{(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

2. 模式 4 : [(1-d₁)T_s - T_s] 飛輪模式

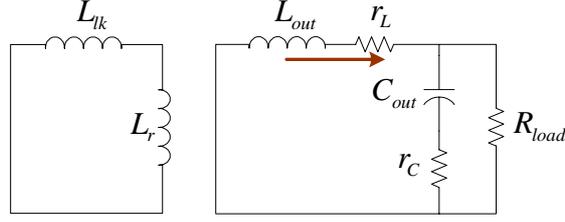


圖 3.13. 模式 4 等效電路

同樣根據圖 3.13，根據克希荷夫電壓(KVL)、電流(KCL)方程式可以得到以下狀態方程式：

$$0 = L_{out} \frac{di_{L_{out}}}{dt} + r_L i_{L_{out}} + v_{out} \quad (3.30)$$

$$v_{out} = r_L C_{out} \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad (3.31)$$

$$\text{由於 } v_{out} = (i_{L_{out}} - C_{out} \frac{dv_C}{dt}) R_{load} \quad (3.32)$$

將(3.32)式代入(3.31)式中經整理後可得出

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{R_{load}}{C_{out} (R_{load} + r_C)} i_{L_{out}} - \frac{1}{C_{out} (R_{load} + r_C)} v_C \quad (3.33)$$

將(3.30)式 $\frac{di_{L_{out}}}{dt}$ 移項至等號的左邊，並將(3.33)式代入經整理得出

$$\frac{di_{L_{out}}}{dt} = -\frac{R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L}{L_{out} (R_{load} + r_C)} i_{L_{out}} - \frac{R_{load}}{L_{out} (R_{load} + r_C)} v_C \quad (3.34)$$

並將(3.33)式代入(3.32)整理得出

$$v_{out} = \frac{R_{load} r_C}{R_{load} + r_C} i_{L_{out}} + \frac{R_{load}}{R_{load} + r_C} v_C \quad (3.35)$$

因此將以上狀態方程式表示成矩陣的形式：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{L_{out}} \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} i_{L_{out}} \\ v_C \end{bmatrix} + B_2 v_g = A_2 x + B_2 v_g \quad (3.36)$$

$$v_{out} = C_2 x \quad (3.37)$$

$$\text{其中 } A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_{load}r_C + R_{load}r_L + r_Cr_L}{L_{out}(R_{load} + r_C)} & -\frac{R_{load}}{L_{out}(R_{load} + r_C)} \\ \frac{R_{load}}{C_{out}(R_{load} + r_C)} & \frac{-1}{C_{out}(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\text{以及 } C_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_{load}r_C}{(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

利用責任週期將狀態方程式平均

由以上分析可以知道，兩個主要Mode分別佔據整個切換週期 T_S 的工作週期為模式 1： d_1T_S ，模式 4： $(1-d_1)T_S$ ，因此利用狀態空間平均法，將上述所推得的獨立動態方程式予以平均，由於此平均後的狀態方程式為非線性的方程式，因此利用小信號分析，使其達到線性化的狀態，並再利用拉普拉斯分析(Laplace)，可推導出其工作週期至輸出及輸入對輸出之間的轉移函數，根據以上原則，可得以下狀態方程式。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_g \\ &= [A_1d_1 + A_2(1-d_1)]x + [B_1d_1 + B_2(1-d_1)]v_g \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\text{及 } v_o = [C_1d_1 + C_2(1-d_1)]x \quad (3.42)$$

首先將訊號變數定義為：

小寫字母乃用以代表穩態值加上小訊號值，

$$\text{例如：} \quad v_o = V_o + \tilde{v}_o \quad (3.43)$$

$$x = X + \tilde{x} \quad (3.44)$$

$$\text{及 } d = D + \tilde{d} \quad (3.45)$$

雖然輸入電壓可表示為 $v_g = V_g + \tilde{v}_g$ ，但通常我們的目的在於討論工作週期 \tilde{d} 至輸出 \tilde{v}_o 的關係根據，為使分析較為單純，因此假設輸入電壓的小訊號為零，也就是在此僅假設

$$v_g = V_g \quad (3.46)$$

將(3.43)~(3.46)式代入(3.41)式中得出下式，其中 \dot{X} 在穩態上，可視為零。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_g \\ &= \left[A_1(D_1 + \tilde{d}_1) + A_2(1 - (D_1 + \tilde{d}_1)) \right] [X + \tilde{x}] \\ &\quad + \left[B_1(D_1 + \tilde{d}_1) + B_2(1 - (D_1 + \tilde{d}_1)) \right] [V_g] \end{aligned} \quad (3.47)$$

經整理後為

$$\tilde{\dot{x}} = AX + BV_g + A\tilde{x} + \left[(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_g \right] \tilde{d} + (H.O.T) \quad (3.48)$$

其中

$$A = A_1 D_1 + A_2 (1 - D_1) \quad (3.49)$$

$$B = B_1 D_1 + B_2 (1 - D_1) \quad (3.50)$$

(H.O.T)表示為含有 \tilde{x} 及 \tilde{d} 的多次項，在此忽略不計。

分別由(3.27)式、(3.28)式、(3.38)式及(3.39)式得知 $A_1 = A_2$ 及 $B_2 = 0$ ，因此代入上式後經整理後得出

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L)}{L_{out}(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{L_{out}(R_{load} + r_C)} \\ \frac{R_{load}}{C_{out}(R_{load} + r_C)} & -1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$B = \begin{bmatrix} D_1 \\ (N^2 L_{lk} + L_{out}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

根據(3.47)式其穩態解可表示為

$$AX + BV_g = 0 \quad (3.53)$$

接下來，試著找出 i_{Lf} 穩態直流的方程式，其穩態解表示如下：

$$-\frac{(R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L)(L_{out} + N^2 L_{lk})}{R_{load} + r_C} I_{L_{out}} - \frac{R_{load}(L_{out} + N^2 L_{lk})}{R_{load} + r_C} V_C + D_1 L_{out} V_g = 0 \quad (3.54)$$

經整理得出

$$I_{L_{out}} = \frac{D_1 (R_{load} + r_C) L_{out}}{(R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L)(L_{out} + N^2 L_{lk} - N^2 L_{lk} D_1)} V_g - \frac{R_{load}}{(R_{load} r_C + R_{load} r_L + r_C r_L)} V_C \quad (3.55)$$

由於負載阻抗往往比電感及電容的等效串聯阻抗要來的大很多，也就是說：

$$R_{load} \gg (r_L + r_C) \quad (3.56)$$

因此在忽略變壓器漏電感的條件下，(3.51)式可簡化為

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r_C + r_L}{L_{out}} & -\frac{1}{L_{out}} \\ \frac{1}{C_{out}} & \frac{-1}{C_{out} R_{load}} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

而其反矩陣可表示為

$$A^{-1} = \frac{1}{\frac{r_C + r_L}{L_{out}} \cdot \frac{1}{C_{out} R_{load}} - \frac{1}{L_{out}} \cdot \frac{-1}{C_{out}}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_{out} R_{load}} & \frac{1}{L_{out}} \\ -\frac{1}{C_{out}} & -\frac{r_C + r_L}{L_{out}} \end{bmatrix} = \frac{L_{out} C_{out} R_{load}}{r_C + r_L + R_{load}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_{out} R_{load}} & \frac{1}{L_{out}} \\ -\frac{1}{C_{out}} & -\frac{r_C + r_L}{L_{out}} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

同樣根據上述條件(3.52)式可改寫為

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L_{out}} \\ 0 \end{bmatrix} D \quad (3.59)$$

而(3.55)式改寫為

$$I_{L_{out}} = \frac{1}{(r_C + r_L)} (D_1 V_g - V_C) \quad (3.60)$$

接下來，試著找出 V_C 穩態直流的方程式，其穩態解表示如下：

$$\frac{R_{load}}{C_{out} (R_{load} + r_C)} I_{L_{out}} - \frac{1}{C_{out} (R_{load} + r_C)} V_C = 0 \quad (3.61)$$

亦即輸出電容電壓穩態直流的方程式可表示為

$$V_C = R_{load} I_{L_{out}} \quad (3.62)$$

相同的將(3.54)~(3.57)式代入(3.53)中得出

$$V_{out} + \tilde{v}_{out} = CX + C\tilde{x} + [(C_1 - C_2)X] \tilde{d} \quad (3.63)$$

$$\text{其中 } C = C_1 D_1 + C_2 (1 - D_1) \quad (3.64)$$

根據(3.29)以及(3.40)得出

$$C = \begin{bmatrix} \frac{R_{load} r_C}{(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

利用(3.63)式中令所有的小訊號及微分項均零，亦即輸出電壓穩態直流的方程式可表示為

$$V_{out} = CX \quad (3.66)$$

接下來，試著找出 V_{out} 穩態直流的方程式，根據(3.53)代入(3.66)式其穩態解表示如下：

$$V_{out} = -CA^{-1}BV_g \quad (3.67)$$

因此輸入及輸出的穩態直流轉移函數可由上式得出，接下來分別將(3.58)式、(3.59)式及(3.65)代入上式

$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_g} &= -\frac{L_{out} C_{out} R_{load}}{r_C + r_l + R_{load}} \begin{bmatrix} \frac{R_{load} r_C}{(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_{out} R_{load}} & \frac{1}{L_{out}} \\ -\frac{1}{C_{out}} & \frac{r_C + r_L}{L_{out}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ L_{out} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{L_{out} C_{out} R_{load}}{r_C + r_l + R_{load}} \begin{bmatrix} \frac{R_{load} r_C}{(R_{load} + r_C)} & \frac{R_{load}}{(R_{load} + r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-D}{L_{out} C_{out} R_{load}} \\ \frac{D}{L_{out} C_{out}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{L_{out} C_{out} R_{load}}{r_C + r_l + R_{load}} \left(\frac{Dr_C}{(R_{load} + r_C)L_{out} C_{out}} + \frac{DR_{load}}{(R_{load} + r_C)L_{out} C_{out}} \right) \\ &= \frac{R_{load}}{r_C + r_l + R_{load}} D \approx D \end{aligned} \quad (3.68)$$

根據(3.76)式輸出電壓穩態直流的方程式可表示為

$$V_{out} = \frac{R_{load} r_C}{R_{load} + r_C} I_{L_{out}} + \frac{R_{load}}{R_{load} + r_C} V_C \quad (3.69)$$

於(3.59)僅考慮小訊號擾動並將直流成分移除，可以得到小訊號狀態方程式，並將其表示為

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_{DC}] \tilde{d} \quad (3.70)$$

使用拉氏(Laplace)轉換求出轉換方程式 $\frac{\tilde{i}_{L_{out}}(s)}{\tilde{d}(s)}$ 及 $\frac{\tilde{v}_C(s)}{\tilde{d}(s)}$ 將上式改寫為

$$s\tilde{x}(s) = A\tilde{x}(s) + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_g] \tilde{d}(s) \quad (3.71)$$

移項後得出

$$\tilde{x}(s) = [sI - A]^{-1} \cdot [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_g] \tilde{d}(s) \quad (3.72)$$

從上式可以得出工作週期對輸出電感電流的轉移函數及工作週期對輸出電壓的轉移函數，在忽略變壓器漏感及 $R_{load} \gg (r_L + r_C)$ 的前提下，使得

$$A = A_1 = A_2 \quad (3.73)$$

以及 $C = C_1 = C_2$

因此將工作週期對輸出電感電流的轉移函數表示為

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{i}_{L_{out}}(s)}{\tilde{d}(s)} &= [sI - A]^{-1} [B_1 V_g] \quad (3.74) \\ &= \begin{bmatrix} s + \frac{r_C + r_L}{L_{out}} & \frac{1}{L_{out}} \\ -\frac{1}{C_{out}} & s + \frac{1}{C_{out} R_{load}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{out}} \\ 0 \end{pmatrix} V_g \\ &= \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{r_L + r_C}{L_{out}} + \frac{1}{C_{out} R_{load}} \right) + \frac{1}{L_{out} C_{out}} \left(\frac{r_C + r_L}{R_{load}} + 1 \right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{out}} \left(s + \frac{1}{C_{out} R_{load}} \right) \\ \frac{1}{L_{out} C_{out}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{V_{DC}}{R_{load}} \frac{1 + sR_{load}C_{out}}{L_{out} C_{out} \left[s^2 + s \left(\frac{1}{C_{out} R_{load}} + \frac{r_C + r_L}{L_{out}} \right) + \frac{1}{L_{out} C_{out}} \right]} \end{aligned}$$

或表示為

$$\frac{\tilde{i}_{L_{out}}(s)}{\tilde{d}(s)} \approx \frac{V_{out}}{R_{load} D} \frac{1 + sR_{load}C_{out}}{\Delta(s)/\omega_0^2} \quad (3.75)$$

$$\text{其中 } \Delta(s) = \frac{1}{F_p} = s^2 + \frac{w_0}{Q}s + w_0^2, \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{out}C_{out}}}, \quad Q = \frac{1}{w_0} \frac{1}{\frac{L_{out}}{R_{load}} + (r_C + r_L)C_{out}}$$

再來於(3.63)僅考慮小訊號擾動並將直流成分移除，可以得到輸出電壓的小訊號狀態方程式，並將其表示為

$$\tilde{v}_{out} = C\tilde{x} + [(C_1 - C_2)X]\tilde{d} \quad (3.76)$$

使用拉氏(Laplace)轉換求出轉換方程式 $\frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{d}_1(s)}$

$$\tilde{v}_{out}(s) = C\tilde{x}(s) + [(C_1 - C_2)X]\tilde{d}(s) \quad (3.77)$$

將(3.80)式代入上式後得出

$$\frac{\tilde{v}_{out}(s)}{\tilde{d}(s)} = C[sI - A]^{-1} \cdot [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_g] + [(C_1 - C_2)X] \quad (3.78)$$

同樣地在忽略變壓器漏感及 $R_{load} \gg (r_L + r_C)$ 的前提下，將工作週期對輸出電壓的轉移函數表示為

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}_{out}(s)}{\tilde{d}(s)} &= C[sI - A]^{-1} \cdot [B_1 V_g] \quad (3.79) \\ &= [r_C \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{r_C + r_L}{L_{out}} & \frac{1}{L_{out}} \\ -\frac{1}{C_{out}} & s + \frac{1}{C_{out} R_{load}} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ L_{out} \\ 0 \end{bmatrix} V_g \right) \\ &= V_g \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{r_l + r_C}{L_{out}} + \frac{1}{C_{out} R_{load}} \right) + \frac{1}{L_{out} C_{out}} \left(\frac{r_C + r_L}{R_{load}} + 1 \right)} \left(\frac{1 + sr_C C_{out}}{L_{out} C_{out}} \right) \quad (3.80) \\ &\approx V_g \frac{1 + sr_C C_{out}}{L_{out} C_{out} \left[s^2 + s \left(\frac{1}{C_{out} R_{load}} + \frac{r_C + r_L}{L_{out}} \right) + \frac{1}{L_{out} C_{out}} \right]} \end{aligned}$$

或表示為

$$\frac{\tilde{v}_{out}(s)}{\tilde{d}(s)} \approx \frac{V_{out}}{D} \frac{1 + sr_C C_{out}}{\Delta(s)/\omega_0^2} = V_{DC} \frac{1}{N} \frac{1 + sr_C C_{out}}{\Delta(s)/\omega_0^2} \quad (3.81)$$

