國 立 交 通 大 學

理學院網路學習學程

碩 士 論 文

數 學 數 位 內 容 研 發 與 網 站 經 營 之 研 究

Development of Digital Contents of Mathematics and

The Research of Mathematical Website Management

研 究 生：李映良

指導教授：陳明璋　博士

中 華 民 國 九 十 四 年 七 月

數學數位內容研發與網站經營之研究

Development of Digital Contents of Mathematics and The Research of Mathematical Website Management

研 究 生：李映良　　Student：Ying Liang Li

指導教授：陳明璋 博士　　Advisor：Ming Jang Chen

國 立 交 通 大 學

理學院網路學習學程

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十四年七月

數學數位內容研發與網站經營之研究

研究生：李映良　　　　　　　　　　　　指導教授：陳明璋 博士

國立交通大學理學院碩士專班網路學習組

摘要

本論文包含兩個部份，第一部份是數位內容的研發，第二部份是數位內容的分享。

在數位內容的研發方面，主要是以遞迴及視覺化的概念，在動態幾何軟體 GSP (The Geometer's Sketchpad ）上，結合其動態呈現的特性，運用「遞迴」、及「特殊化與一般化」的概念，研發數學數位內容。

在數位內容的分享方面，我們架設了一個網站，運用一套人性化的經營的策略，將此一網站發展為一個成功熱門網站。在此一基礎上，未來更可成為一個數學網路學習和互動行為的一個研究平台。

關鍵字：數學數位內容、數學網站經營、動態幾何軟體 GSP、遞迴

Development of Digital Contents of Mathematics and The Research of Mathematical Website Management

Student：Ying Liang Li　　　　Advisor：Ming Jang Chen

Degree Program of E-Learning
National Chiao Tung University

Abstract

This thesis includes two parts, the first part is the development of digital contents of mathematics, and the second part is the sharing of digital contents.

In the development of digital contents of mathematics, it is mainly to adopt the concepts of iteration and vision to combine dynamic geometry software GSP (The Geometer's Sketchpad) with its characteristic of dynamics, to use the concepts of iteration, specialization and generalization to develop digital contents of mathematics.

In the sharing of digital contents, we apply a set of humanized tactics of management to erect a website, and then promote it to a successful hot website. On the basis of this, it will become a researchable platform for mathematics network studying and interaction behavior in the future.

Key words：Digital Contents of Mathematics, Mathematical Website Management, GSP, Iteration

誌謝

在職求學的研究所生涯中，常有課業及工作的雙重壓力，有幸得到指導教授陳明璋博士，二年來辛苦的指導與關懷，不僅給予我許多發揮的空間，在研究態度、方法及專業知識上亦獲得很大的啓發，謹向老師致上最大的謝意。

由衷感謝黃大原教授二年來在課堂上辛勤的指導與鼓勵、專班主任莊祚敏教授爲我們的付出、論文口試委員蕭志如教授的意見，及所有教授認真且精彩的課程內容。

此外，在求學的過程中，感謝洪玉水校長、學校同事時時的叮嚀與關懷，對平時工作有不能兼顧之時，給予體諒與寬容，且鼎力相助。

專班的同學們感情甚篤，有你們的陪伴，讓這段日子，充滿了歡笑，謝謝你們。

最後感謝我的親人，特別是老婆，在我進修的日子中，讓我沒有後顧之憂，能夠全力以赴順利完成學業。

二年的研究所生涯中，要感謝的人很多，無法一一表達，僅向所有關心我、協助我的人，表達最誠摯的謝意。也將本論文獻給我的親人，希望他們能夠和我一起分享這份喜悅與榮耀。

目錄

中文摘要 i
英文摘要 ii
誌謝 iii
目錄 iv
表目錄 vii
圖目錄 viii
第一章　緒論 1
1.1 前言 1
1.2 研究動機 1
1.3 研究方法 2
1.4 論文結構 2
第二章　文獻探討 3
2.1 動態幾何環境的探討 3
2.2 網站經營之相關研究 7
2.2.1 優質教育網站的條件 7
2.2.2 數學網路教學的理論探討 9
第三章　GSP的遞迴功能於數學內容研發之運用 11
3.1 GSP軟體介紹 11
3.2 GSP中的遞迴法則 12
3.2.1 遞迴和數學思考 13
3.2.2 GSP中的遞迴功能 13
3.3 微積分主題的遞迴設計 16
3.3.1 Riemann Sum 16
3.3.2 Arc Length 19
3.3.3 Taylor series 20
3.3.4 牛頓法求根的近似值 22
3.4 圖解收斂無窮等比級數 24
3.5 算數式主題的遞迴設計 26
3.5.1 正多邊形的漸開線 26
3.5.2 Square Root Spiral 27
3.5.3 黃金螺線（ Golden Spiral ） 29

第四章　自我相似圖構圖的研究......30
4.1 動態畢氏樹的製作......30
4.2 自我相似圖形在GSP環境中的動態呈現......37
4.2.1 Levy Curve......37
4.2.2 Dragon Curve......37
4.2.3 Sierpinski Gasket & Carpet......38
4.2.4 Koch Curve......40
4.2.5 Cesaro Curve......41
4.2.6 Peano Curve......42
4.2.7 H Fractal......43
4.2.8 Tree Fractal......44
4.2.9 其它自我相似圖形......45
4.2.10 『二條線』所成自我相似圖的探討......51
第五章　GSP動態環境下數學問題的研究......55
5.1 「特殊化與一般化」的運用......55
5.1.1 由餘式定理所延伸出的幾何定理探討......55
5.1.2 由鴿眼翻轉所延伸出的幾何分割問題......58
5.1.3 凸多邊形各邊n等分點連線所圍面積......63
第六章 數學數位內容網站之經營......74
6.1 架站源起及動機......74
6.1.1 目前數學網站遭遇的困難、問題......74
6.2 網站架構......75
6.2.1 「YLL教學手札」架構......75
6.2.2 「YLL討論網」架構......78
6.3 網站技術的突破......81
6.3.1 線上數學方程式編輯器的架設與運用......81
6.3.2 數學塗鴨板的架設與運用......82
6.3.3 線上數學函數繪圖器的架設與運用......84
6.3.4 其它有利的網站功能......85
6.4 網站經營方式與成果......88
6.4.1 網站經營方式......88
6.4.2 網站成果......91
第七章 討論與展望......95

7.1 討論 95
7.2 展望 95
參考文獻 97
附錄 1：其它的數學數位內容 102
1. Proof Without Words.. 102
1.1 Cauchy-Schwarz Inequality 102
1.2 三角形的全等性質 103
1.3 馬丁加德納（Martin Gardner）的四龜問題.. 107
2 正多邊形的延伸探討 108
2.1 Star Polygon 108
2.2 Complete Graph 110
附錄 2：各章可供操作的數學數位內容檔案列表 112
附錄 3：數學塗鴨板的使用方法與實際應用範例 113
附錄 4：線上數學方程式編輯器的使用方法 115
附錄 5：YLL討論網重要外掛程式簡介 117
附錄 6：線上數學方程式編輯器程式碼修改方法 119

表目錄

表 4.1-1 畢式樹的圖形變化 35
表 4.2.9-1 自我相似圖集 50
表 4.2.10-1 『二條線』所成自我相似圖 51
表附錄 1 各章可供操作的數學數位內容檔案 112
表附錄 2 數學塗鴨板實際應用範例 114

圖目錄

圖 3.2.2-1 圖形式的遞迴例圖 14
圖 3.2.2-2 圖形式的遞迴例圖製作過程 14
圖 3.2.2-3 圖形式的遞迴例圖選單設定 14
圖 3.2.2-4 參數式的遞迴範例（1） 15
圖 3.2.2-4 參數式的遞迴範例（2） 15
圖 3.2.2-5 參數式的遞迴範例（3） 15
圖 3.3.1-1 Riemann sum 16
圖 3.3.1-2 .Upper Riemann Sum範例 17
圖 3.3.1-3 .Upper Riemann Sum增加分割數 17
圖 3.3.1-4 Midpoint Riemann Sum範例 18
圖 3.3.1-5 Midpoint Riemann Sum增加分割數 18
圖 3.3.1-6 .Lower Riemann Sum範例 19
圖 3.3.1-7 Lower Riemann Sum增加分割數 19
圖 3.3.1-8 三種Riemann Sum合併範例 19
圖 3.3.1-9 三種Riemann Sum合併範例二 19
圖 3.3.2-1 Arc Length（ 分割數：3 ） 20
圖 3.3.2-2 Arc Length（ 分割數：10 ） 20
圖 3.3.3-1 Taylor series（ $\sin x$ ） 21
圖 3.3.3-2 Taylor series（ $\sin x$ 範例二 ） 21
圖 3.3.3-3 Taylor series（ $\ln(1+x)$ ） 22
圖 3.3.3-4 Taylor series（ $\ln(1+x)$ 範例二 ） 22
圖 3.3.4-1 牛頓法範例一 23
圖 3.3.4-2 牛頓法範例二 23
圖 3.3.4-3 牛頓法範例三 23
圖 3.3.4-4 牛頓法範例四 23
圖 3.4-1 無窮等比級數範例一（ 1 ） 24
圖 3.4-2 無窮等比級數範例一（ 2 ） 24
圖 3.4-3 無窮等比級數範例一（ 3 ） 25
圖 3.4-4 無窮等比級數範例一（ 4 ） 25
圖 3.4-5 無窮等比級數範例二（ 1 ） 25
圖 3.4-6 無窮等比級數範例二（ 2 ） 25

圖 3.4-7 無窮等比級數範例二（ 3 ）..........26
圖 3.4-8 無窮等比級數範例二（ 4 ）..........26
圖 3.5.1-1 正五邊形漸開線（ 1 ）..........27
圖 3.5.1-2 正五邊形漸開線（ 2 ）..........27
圖 3.5.1-3 正五邊形漸開線（ 3 ）..........27
圖 3.5.1-4 正五邊形漸開線（ 4 ）..........27
圖 3.5.1-5 正五邊形漸開線（ 5 ）..........27
圖 3.5.2-1 Square Root Spiral（ 1 ）..........28
圖 3.5.2-2 Square Root Spiral（ 2 ）..........28
圖 3.5.2-3 Square Root Spiral（ 3 ）..........28
圖 3.5.2-4 Square Root Spiral（ 4 ）..........28
圖 3.5.2-5 Square Root Spiral（ 5 ）..........28
圖 3.5.2-6 Square Root Spiral（ 6 ）..........28
圖 3.5.3-1 黃金縲線（ 1 ）..........29
圖 3.5.3-2 黃金縲線（ 2 ）..........29
圖 3.5.3-3 黃金縲線（ 3 ）..........29
圖 4.1-1 畢氏樹基本圖..........31
圖 4.1-2 畢氏樹..........31
圖 4.1-3 畢氏樹的推廣..........31
圖 4.1-4 按鈕介面製作過程（1）..........31
圖 4.1-5 按鈕介面製作過程（2）..........31
圖 4.1-6 按鈕介面製作過程（3）..........31
圖 4.1-7 畢氏樹基本圖製作過程（1）..........32
圖 4.1-8 畢氏樹基本圖製作過程（2）..........32
圖 4.1-9 畢氏樹基本圖製作過程（3）..........32
圖 4.1-10 畢氏樹遞迴設定（1）..........33
圖 4.1-11 畢氏樹遞迴設定（2）..........33
圖 4.1-12 畢式樹動態介面完成圖..........33
圖 4.1-13 畢式樹說明（1）..........34
圖 4.1-14 畢式樹說明（2）..........34
圖 4.1-15 畢式樹說明（3）..........34
圖 4.1-16 改變畢式樹中基礎三角形度數..........34
圖 4.1-17 60°-90°-30°畢式樹，Step=7..........34

圖 4.1-18　30°-90°-60°畢式樹，Step=7 34
圖 4.1-19 畢式樹正方形面積和說明（1）..36
圖 4.1-20 畢式樹正方形面積和說明（2）..36
圖 4.1-21 畢式樹正方形面積和說明（3）..36
圖 4.2.1-1 Levy Curve基礎圖..37
圖 4.2.1-2 Levy Curve遞迴 1 次...37
圖 4.2.1-3 Levy Curve...37
圖 4.2.2-1 Dragon Curve基礎圖 38
圖 4.2.2-2 Dragon Curve遞迴 1 次 38
圖 4.2.2-3 Dragon Curve 38
圖 4.2.3-1 Sierpinski Gasket基礎圖 38
圖 4.2.3-1 Sierpinski Gasket遞迴 1 次 38
圖 4.2.3-3 Sierpinski Gasket 38
圖 4.2.3-4 Sierpinski Carpet基礎圖..39
圖 4.2.3-4 Sierpinski Carpet遞迴 1 次..39
圖 4.2.3-6 Sierpinski Carpet...39
圖 4.2.3-7 Sierpinski Carpet 立體圖..39
圖 4.2.4-1 Koch Curve基礎圖 40
圖 4.2.4-2 Koch Curve遞迴 1 次 40
圖 4.2.4-3 Koch Curve 40
圖 4.2.4-4 Koch Snowflake 41
圖 4.2.4-5 Koch Antisnowflake 41
圖 4.2.4-6 Koch Snowflake ＆ Antisnowflake 41
圖 4.2.5-1 Cesaro Curve基礎圖 41
圖 4.2.5-2 Cesaro Curve遞迴 1 次 41
圖 4.2.5-3 Cesaro Curve，3：1：3...42
圖 4.2.5-4 Cesaro Curve，30：1：30...42
圖 4.2.5-5 Cesaro Curve的變化（1）...42
圖 4.2.5-6 Cesaro Curve的變化（2）...42
圖 4.2.6-1 Peano Curve基礎圖 43
圖 4.2.6-2 Peano Curve遞迴 1 次 43
圖 4.2.6-3 Peano Curve 43
圖 4.2.6-4 Another Hilbert Curve基礎圖 43

圖 4.2.6-4 Another Hilbert Curve 遞迴 1 次 43
圖 4.2.6-6 Another Hilbert Curve 43
圖 4.2.7-1 H Fractal基礎圖 44
圖 4.2.7-2 H Fractal 遞迴 1 次 44
圖 4.2.7-3 H Fractal 44
圖 4.2.8-1 Tree Fractal基礎 44
圖 4.2.8-2 Tree Fractal（1） 44
圖 4.2.8-3 Tree Fractal（2） 44
圖 4.2.8-4 Tree Fractal基礎圖（四枝幹） 45
圖 4.2.8-5 Tree Fractal變化（1） 45
圖 4.2.8-6 Tree Fractal變化（2） 45
圖 4.2.8-7 Tree Fractal變化（3） 45
圖 4.2.8-8 Tree Fractal變化（4） 45
圖 4.2.9-1 Katherine's Fractal_基礎圖 46
圖 4.2.9-2 Katherine's Fractal遞迴 1 次...46
圖 4.2.9-3 Katherine's Fractal 46
圖 4.2.9-4 Lane's Fractal基礎圖 46
圖 4.2.9-5 Lane's Fractal遞迴 1 次...46
圖 4.2.9-6 Lane's Fractal 46
圖 4.2.9-7 Anderson's Fractal基礎圖...47
圖 4.2.9-8 Anderson's Fractal遞迴 1 次...47
圖 4.2.9-9 Anderson's Fractal 47
圖 4.2.9-10 Hat Curve基礎圖 47
圖 4.2.9-11 Hat Curve遞迴 1 次...47
圖 4.2.9-12 Hat Curve...47
圖 4.2.9-13 Circle-based Fractal基礎圖 48
圖 4.2.9-14 Circle-based Fractal遞迴 1 次 48
圖 4.2.9-15 Circle-based Fractal 48
圖 4.2.9-16 Four-Circle Fractal基礎圖...48
圖 4.2.9-17 Four-Circle Fractal遞迴 1 次...48
圖 4.2.9-18 Four-Circle Fractal...48
圖 4.2.9-19 Grouping of Triominoes基礎圖...49
圖 4.2.9-20 Grouping of Triominoes遞迴 1 次...49

圖 4.2.9-21 Grouping of Triominoes......49
圖 4.2.9-22 Napoleon's Triangle基礎圖......49
圖 4.2.9-23 Napoleon's Triangle遞迴 1 次......49
圖 4.2.9-24 Napoleon's Triangle......49
圖 4.2.10-3 Julia Set......53
圖 5.1.1-1 圖說証明餘弦定理......55
圖 5.1.1-2 圖說証明畢式定理......56
圖 5.1.1-3 Another Pythagorean-like Theorem特例圖說証明（1）......56
圖 5.1.1-4 Another Pythagorean-like Theorem特例圖說証明（2）......56
圖 5.1.1-5 Another Pythagorean-like Theorem特例圖說証明（3）......57
圖 5.1.1-6 Another Pythagorean-like Theorem特例圖說証明（4）......57
圖 5.1.1-7 Another Pythagorean-like Theorem一般化証明......57
圖 5.1.2-1 鴿眼翻轉示意圖......58
圖 5.1.2-2 鴿眼翻轉動態過程（1）......59
圖 5.1.2-3 鴿眼翻轉動態過程（2）......59
圖 5.1.2-4 鴿眼翻轉動態過程（3）......59
圖 5.1.2-5 鴿眼翻轉動態過程（4）......59
圖 5.1.2-6 正三角形和正方形的互化目標圖......59
圖 5.1.2-7 正三角形和正方形的互化作圖法......60
圖 5.1.2-8 正三角形和正方形的互化切割完成圖......60
圖 5.1.2-9 正三角形正方形互化動態過程（1）......61
圖 5.1.2-10 正三角形和正方形的互化動態過程（2）......61
圖 5.1.2-11 正三角形正方形互化動態過程（3）......61
圖 5.1.2-12 正三角形和正方形的互化動態過程（4）......61
圖 5.1.2-13「正三角形和正方形的互化」是「鴿眼翻轉」的一種特例（1）.62
圖 5.1.2-14「正三角形和正方形的互化」是「鴿眼翻轉」的一種特例（2）.62
圖 5.1.2-15 「鴿眼翻轉」特例的討論（1）......62
圖 5.1.2-16 「鴿眼翻轉」特例的討論（2）......62
圖 5.1.2-17 「鴿眼翻轉」特例的討論（3）......63
圖 5.1.2-18 「鴿眼翻轉」特例的討論（4）......63
圖 5.1.2-19 「鴿眼翻轉」特例的討論（5）......63
圖 5.1.2-20 「鴿眼翻轉」特例的討論（6）......63
圖 5.1.3-1 三角形各邊n等分點連線所圍面積......64

圖 5.1.3-2 三角形各邊中點連線所圍面積........65
圖 5.1.3-3 三角形各邊 5 等分點連線所圍面積........65
圖 5.1.3-4 四邊形各邊n等分點連線所圍面積........65
圖 5.1.3-5 四邊形各邊中點連線所圍面積........66
圖 5.1.3-6 四邊形各邊 5 等分點連線所圍面積........66
圖 5.1.3-7 檢驗五邊形的各邊中點連線所圍成的面積（1）........67
圖 5.1.3-8 檢驗五邊形的各邊中點連線所圍成的面積（2）........67
圖 5.1.3-9 五邊形各邊n等分點連線所圍面積........67
圖 5.1.3-10 五邊形各邊n等分點連線所圍面積証明（1）........68
圖 5.1.3-11 五邊形各邊n等分點連線所圍面積証明（2）........68
圖 5.1.3-12 五邊形各邊中點連線所圍面積........69
圖 5.1.3-13 五邊形各邊 5 等分點連線所圍面積........69
圖 5.1.3-14 檢驗六邊形的各邊中點連線所圍成的面積（1）........69
圖 5.1.3-15 檢驗六邊形的各邊中點連線所圍成的面積（2）........69
圖 5.1.3-16 六邊形各邊n等分點連線所圍面積........70
圖 5.1.3-17 六邊形各邊n等分點連線所圍面積証明（1）........70
圖 5.1.3-18 六邊形各邊n等分點連線所圍面積証明（2）........70
圖 5.1.3-19 六邊形各邊中點連線所圍面積........71
圖 5.1.3-20 六邊形各邊 5 等分點連線所圍面積........71
圖 5.1.3-21 九邊形各邊中點連線所圍面積........72
圖 5.1.3-22 九邊形各邊 5 等分點連線所圍面積........72
圖 5.1.3-23 六邊形各邊 4 等分點連線所圍面積........73
圖 5.1.3-24 九邊形各邊 6 等分點連線所圍面積........73
圖 6.2.1-1 YLL教學手札主頁........75
圖 6.2.1- 2YLL教學手札線上發表文章介面........76
圖 6.2.1- 3YLL教學手札網站架構........76
圖 6.2.1-4 YLL教學手札數學筆記........77
圖 6.2.1- 5 YLL教學手札GSP教學集........77
圖 6.2.1- 6 YLL教學手札PHP內容........78
圖 6.2.1-7 YLL教學手札主題討論範例........78
圖 6.2.2-1 YLL討論網發表內容的選單畫面........79
圖 6.2.2-2 YLL討論網數學版面的主要架構圖........79
圖 6.2.2-3 YLL討論網數學版面的分類現狀圖........80

圖 6.3.1-1 線上數學方程式編輯器 82
圖 6.3.1-2 使用網站數學方程式編輯器範例（1） 82
圖 6.3.1-3 使用網站數學方程式編輯器範例（2） 82
圖 6.3.2-1 線上繪圖程式範例（1） 83
圖 6.3.2-2 線上繪圖程式範例（2） 83
圖 6.3.2-3 數學塗鴨板使用介面 83
圖 6.3.2-4 數學塗鴨板使用範例（1） 84
圖 6.3.2-5 數學塗鴨板使用範例（2） 84
圖 6.3.2-6 數學塗鴨板解題歷程的呈現（1） 84
圖 6.3.2-7 數學塗鴨板解題歷程的呈現（2） 84
圖 6.3.3-1 網站上的線上數學函數繪圖器 85
圖 6.3.4-1 YLL教學手札搜尋範例 86
圖 6.3.4-2 YLL討論網搜尋功能範例 86
圖 6.3.4-3 YLL教學手札網友的回饋、討論 86
圖 6.3.4-4 YLL討論網網友的回饋、討論 86
圖 6.3.4-5 網站提供線上貼圖的功能 87
圖 6.3.4-6 網站提供線上播放影片的功能 87
圖 6.3.4-7 我的最愛功能 88
圖 6.3.4-8 精華區功能 88
圖 6.4.1-1 主動e-mail通知站上會員新內容範例 90
圖 6.4.1-2 主題有新發展網站程式主動發信通知 90
圖 6.4.1-3 優良會員個人免費網誌首頁 91
圖 6.4.1-4 優良會員個人免費相簿首頁 91
圖 6.4.2-1 每頁網頁的讀取速度 91
圖 6.4.2-2 有新內容的分區自動以圖示作提示 92
圖 6.4.2-3 未使用友善列印功能畫面 93
圖 6.4.2-4 使用友善列印功能去除網頁底色 93
圖 6.4.2-5 YLL教學手札統計數據 93
圖 6.4.2-6 YLL教學手札在Google的網頁重要評等 94
圖 6.4.2-7 網頁於在Google的搜尋結果 94
圖 6.4.2-8 網頁於在Yahoo的搜尋結果 94
圖附錄 1.1-1 Cauchy-Schwarz Inequality圖說証明（1） 102
圖附錄 1.1-2 Cauchy-Schwarz Inequality圖說証明（2） 102

圖附錄 1.1-3 Cauchy-Schwarz Inequality圖說証明（3）........103
圖附錄 1.1-4 Cauchy-Schwarz Inequality圖說証明（4）........103
圖附錄 1.1-5 Cauchy-Schwarz Inequality圖說証明（5）........103
圖附錄 1.2-1 AAS全等圖說操作介面說明（1）........104
圖附錄 1.2-2 AAS全等圖說操作介面說明（2）........104
圖附錄 1.2.1-1 SSS性質原始三角形........105
圖附錄 1.2.1-2 SSS作圖........105
圖附錄 1.2.2-1 SAS性質原始三角形........105
圖附錄 1.2.2-2 SAS作圖........105
圖附錄 1.2.3-1 ASA性質原始三角形........106
圖附錄 1.2.3-2 ASA作圖........106
圖附錄 1.2.4-1 RHS性質原始三角形........106
圖附錄 1.2.4-2 RHS作圖........106
圖附錄 1.2.5-1 AAS性質原始三角形........107
圖附錄 1.2.5-2 AAS作圖........107
圖附錄 1.3-1 四龜問題路徑（1）........108
圖附錄 1.3-2 四龜問題路徑（2）........108
圖附錄 1.3-3 四龜延伸問題（1）........108
圖附錄 1.3-4 四龜延伸問題（2）........108
圖附錄 1.3-5 四龜延伸問題（3）........108
圖附錄 1.3-6 四龜延伸問題（4）........108
圖附錄 2.1-1 一些Star Polygon的圖形........109
圖附錄 2.1-2 （ ）的圖形........110
圖附錄 2.2-1 Complete Graph........110
圖附錄 2.2-2 重疊的Complete Graph........110
圖附錄 2.2-3 Complete Graph With Hair........111
圖附錄 2.2-4 Complete Graph of Various sizes , with Hair........111
圖附錄 3-1 數學塗鴨板使用方法（1）........113
圖附錄 3-2 數學塗鴨板使用方法（2）........113
圖附錄 3-3 數學塗鴨板使用方法（3）........113
圖附錄 4-1 數學方程式編輯器使用方法（1）........115
圖附錄 4-2 數學方程式編輯器使用方法（2）........115

圖附錄 4-3 數學方程式編輯器使用方法（3）..116
圖附錄 4-4 數學方程式編輯器使用方法（5）..116
圖附錄 4-5 數學方程式編輯器使用方法（4）..116
圖附錄 5-1 關閉 phpBB2 的 HTML 語法功能..119

第一章　緒論

1.1 前言

本研究之數學數位內容研發，皆以GSP軟體爲開發介面，3.1 節中，有GSP軟體的詳細介紹，所有研發出來的數學數位內容，均完整放置於個人網站「YLL教學手札」(http://yll.loxa.edu.tw/)，供教師研究、教學，及協助學生學習之用。網站經營之研究，則以經營二年有餘之網站：「YLL教學手札」、「YLL討論網」(http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/)作爲具體的研究對象，網站上提供了數學數位內容及作爲分享、討論數學內容的網路平台。

1.2 研究動機

在 1960 年代，美國伊利諾大學發展 PLATO (Programmed Logic for Automatic Teaching Operation)系統，首度將電腦應用帶入教育，開啓了電腦輔助教學(Computer Assisted Instruction, CAI)的時代。雖然利用電腦做爲輔助教學工具，已有四十餘年的歷史，然而直到網際網路的發明，才爲電腦輔助學開啓嶄新的一頁[1]。另外個人電腦的普及化，也是近年來電腦輔助學習蓬勃發展的原因之一。1991 年美國 MIT 發展出第一套網路 CAI 系統：Athena，開啓了網路教學的新時代。近年來網路技術的發達，全球資訊網(World Wide Web , WWW)成爲新世紀的媒體寵兒。由於 WWW 可同時呈現文字、影像與聲音等多媒體資訊，用來發展電腦輔助教育非常方便[1]。

1998 年台灣 ADSL 的技術有了重大的突破，傳輸速度大增，而且儲存抉取資料的數量變大，速度也變快，加上視窗軟體的普及化，網路上的內容素材，在短暫的時間內，就能下載呈現在家用電腦[2]，台灣的網路學習時機已逐漸成熟，數學數位內容的研發在此環境下，將能讓更多的教師與學生受益。個人對於數學教學、電腦使用的熱愛，讓我投身於數學數位內容的研發，及數學網站的經營，希望能透過數位的工具軟體，融入數學內容、教材，協助數學內容研究，也使數學變得更簡單、直觀、容易解讀，更期望在此網路蓬勃發展的今天，透過網站的互動，讓自己成長，也造福更多的人。

1.3 研究方法

首先是網站的結構設計，考慮「更新容易」、「互動性」，二大主軸，逐步建構、修改網站內容、介面。更新容易，能減輕網站經營的負擔，讓網站經營較為容易；而互動性方面，Perkowit(1997)指出，網站之所以需要調適有四個原因，其中兩點是：(1)不同的使用者有不同瀏覽的目標。(2)即使同一個使用者，在不同的時間點上也會有不同的需求。同樣的道理，一個數學網站，面對許許多多來自不同地方的人們，每個人都有不一樣的學習風格、學習能力和學習經歷，若網站只是提供制式化的教材，而無法提供回饋或缺乏與人的互動，則會大大降低到訪的興趣。

數學網站的互動，比起其它類型的網站，有其更困難的地方，將在 6.1 節中詳述，站上開發、利用有利互動的功能，作為數學討論的工具，在 6.3 節中，可看到這些技術上的突破、創新。

其次，運用 GSP 軟體，作為研發數學數位內容的介面，透過研究所課程、中學數學教學內容等，發現適合呈現的數學主題；並於設計完成後，於課程和同儕討論、或實際於教學使用，進而發現可以改進之處，最後置於網站上，和更多的老師或學習者，從事互動。

1.4 論文結構

使用動態幾何軟體作數學數位內容的研發，要先了解動態幾何環境的理論基礎，才能開發出適宜的內容，在第二章中，將先作動態幾何環境的理論基礎、教育網站之相關研究的文獻探討，以作為本研究的理論基礎。第三章中，將介紹所使用的 GSP 軟體，並對其遞迴功能作特別的介紹，利用這功能，設計出一系列的數學數位內容，本章有對內容的詳細介紹。第四章，自我相似圖構圖的研究，是個主題式的內容，亦主以 GSP 的遞迴功能，表達出其自我相似的特質。第五章，GSP 動態環境下的數學問題研究，運用 GSP 的動態功能，給數學問題注入新的活力，運用「特殊化與一般化」的概念，協助數學問題的研究。第六章，數學數位內容網站之經營，以經營二年有餘之網站：『YLL 教學手札』、『YLL 討論網』，作為具體的研究平台，提供一個經營數學網站之成功經驗。第七章，討論與展望，是本研究的討論，及提出未來繼續發展的可能性和方向。

第二章　文獻探討

使用動態幾何軟體 GSP，作數學數位內容研發，一則提供研究，一則作爲教師教學、學生學習之用，開發過程中，所把握的原則、精神，均需注意動態幾何環境、使用電腦輔助教學的理論基礎；優質教育網站的條件，則是在架設網站時，不斷地自我檢視的標準，在本章中，將有詳述。

2.1 動態幾何環境的探討

本研究所使用的軟體，是動態幾何軟體 GSP，對於動態幾何環境的了解，及如何利用其優點作研究，自然要有所了解，以下是幾則可供參考的研究結果：

1. 美國數學協會（ the Mathematical Association of America，簡稱 MAA ），於 1997 年出版 Geometry Turned On：Dynamic Software in Learning , Teaching , and Research 一書，書中分析二十六篇研究論文，發現動態幾何軟體具有以下的優點（pp. xi – pp. xiv）：

（1）作圖精確（Accuracy of construction ）：

任何尺規作圖、應用仿射變換的歐式幾何作圖，或者沿一定路徑移動的物體軌跡，都可以由動態幾何軟體精確地作出。

（2）視覺化（Visualization）：

視覺化本身，是強而有力的問題解決工具，加上動態幾何軟體，能讓學習者對自己的視覺圖像作立即且精確的調校，為幾何知識增添一個新的領域。此外，以動態幾何軟體，作爲展示工具可以幫助學習者「看到」幾何性質的一般性。

（3）探索與發現（Exploration and Discovery）：

動態幾何軟體，容許學習者以動態、有效、視覺的方法去測試自己的數學猜想，而且在這過程中學生會更沈浸在學習中。這對體驗幾何性質的關聯，和創造新數學是有助益的。

（4）證明（Proof）：

儘管動態幾何軟體，並不能全然提供證明，但它可以產生實驗性的證據，使學習者深具信心，激發證明性質成立的念頭。

（5）變換（Transformations）：

動態幾何軟體，可以讓學習者見到整個圖像變換的過程，從中可以觀察圖形具備什麼性質，或者所探討的性質是否成立。

（6）作軌跡（Loci）：

動態幾何軟體，內建記錄物體軌跡的功能，非常適合用來展示軌跡如何生成，與顯示軌跡的形狀。

（7）模擬（Simulation）：

動態幾何軟體有拖曳、動態模擬、記錄軌跡、與產生自由點的功能，可以用來模擬許多情境的變化，從中甚至可以得到令人驚喜的結果。

（8）微世界（Micro worlds）：

利用動態幾何軟體所附的特殊程式（如巨集），可以產生新的工具，用以替代歐式幾何的工具，進而探索新幾何領域（如雙曲幾何）。

2. 國際數學教學委員會（the International Commission on Mathematical Instruction，簡稱 ICMI），亦於 1998 年出版 Perspectives on the Teaching of Geometry For the 21st Century 一書， 書中第四章，探討電腦科技與幾何教學（pp. 109 － pp. 158），其中關於對於動態幾何環境下的教學研究結果，可以歸爲下列幾點：

（1）動態幾何環境，可作爲問題解決的豐富環境， 其所提供的視覺證據（visual evidence）是使學習者產生問題與企圖找出解答的催化劑。

（2）動態幾何軟體具有多種模擬的能力， 不但可以作爲幾何探索的工具，還可使直覺、空間感、圖形構造與各種理論之間作連結。

（3）動態幾何環境，可以作爲一種新的環境， 用以設計在觀察實驗和演繹證明間，做連結的創新活動。

（4）動態幾何環境，可以培養學生對數學證明的目的，及本質更充足的鑑賞力。

（5）動態幾何軟體，能輕易作出複雜的幾何圖形，且具有動態的能力，可以降低問題的難度。

3. 數學教育期刊 Educational Studies in Mathematics，在 2000 年的 44 期，對動態幾何軟體對做了一系列的探討， 其中 Hanna（2000）指出，由於動態幾何軟體易於呈現、易於測試猜想， 因此，同時具有促進幾何探索與證明的潛能。

4. 幾何的教學，通常均偏重在形式的演繹及證明上面，但是幾何概念的建構以及從觀察、歸納而發現幾何性質的過程，卻常常被忽略，幾何的許多題材，也因動態圖形的不易顯示，而需要高度的想像才能瞭解。動態幾何軟體工具和教學觀念的發展，使得幾何的教學可以從較直觀的、動態的圖形著手。以下探討動態幾何軟體的特質（林保平，民86）：

（1）尺規作圖及圖形的可變異性

市面上的繪圖軟體很多，而且也提供了非常方便並友善的使用者介面，但其目標是美術繪圖或設計製圖，並未考慮幾何教學的需要，畫一個在幾何課本上出現的幾何圖形不太容易，而且畫出圖形之後，圖形就固定了，無法方便地操作及變異圖形，動態幾何軟體基本上是尺規作圖，且所作的圖形是可操作及可變異的。所有用直尺及圓規能作出的幾何圖形，都能利用它們所提供的作圖工具，仿照直尺或圓規的作圖方法，相當容易地製作出精確的幾何圖形，例如畫點、直線、線段、射線、圓、弧、平行線、垂直線、角平分線.，取出線與線、線與圓、或圓與圓的交點，選取直線形、圓或弧的內部，並能利用這些基本功能的組合，製作較複雜的幾何圖形。由於這些作圖工具均依照幾何的定義而設計，因此圖形精確適合幾何教學。所得的圖形整體或其構成部份，均可在螢幕上，利用滑鼠直接依作圖時的定義，移動其位置或改變形狀，或利用軟體提供的幾何變換（Geometric Transformation）功能，選出變換的基準（例如平移向量、鏡射軸、旋轉或相似中心、放縮的比例、旋轉的角度.等）之後，作平移、旋轉、鏡射、相似等變換。這種幾何作圖及圖形可操作及變異的功能，是動態幾何軟體能成爲臆測、探索幾何性質工具的基本原因。

（2）動態連續變化

當圖形或其某一構成元素改變位置、形狀或被變換時，其改變的過程是漸進及連續的。不只圖形的最終狀態呈現出來，其位置改變過程中的圖形，也連續呈現出來。使用者看到的是一個連續的變動過程。這類軟體使得學生能觀察圖形的連續變換，並由度量工具（量角度、長度、面積、周長、弧長.，顯示點的座標，直線的斜率.）之輔助來發現幾何的不變性質（invariant）。利用這種連續呈現變換過程的特質，以及變換的直觀特性，國小學生也可以學習更多的幾何性質。例如，商高定理的面積關係，就可以經由平移及等積變換（平移及旋轉，或運用切割及拼圖遊戲，或度量面積），相當直觀地在電腦螢幕上讓學生操作，或由電腦自動呈現。

（3）特殊即一般（保持結構）

通常我們因證明需要而畫一個幾何圖形時，我們畫的是一個「特殊」的圖形，但證明過程中一直將它想成「一般」的圖形，證完之後，我們也認定所證明的是具有相同「已知」的任意圖形所擁有的性質。許多學生習於這種特殊圖形，對於證明過程中，圖形所代表的「一般化」性質並不了解（Balacheff,1988），若將圖形改變形狀之後，可能就認為它們是不同的問題。Williams（1979）發現 20% 的學生不明瞭演繹證明的結論係對所有符合「已知」的幾何圖形均成立的，並且只有 31% 的學生了解這個證明的一般化原則，Fischbein（1982）也曾描述相似的結果，只有 24.5% 的學生認為證明過後，對其他特例不必重新檢驗。在動態幾何軟體下所作的幾何圖形，使用者可任意移動圖形的構成元素，而圖形因其構成元素改變相對位置而改變形狀以後，其構成元素間的「幾何結構」保持不變，因此，所得到的是「一般化」的任意圖形（能保持某種固定特質的多種圖形）。例如，若三角形是由三個「自由點」構成，則使用者可移動任一頂點，使此三角形變成等腰△、正△、直角△等，甚至「三點共線」也可看成三角形的一個特例。若利用這個三角形作出三角形的三中線，便可看到三中線交於一點，當改變三角形的形狀時，這三中線仍然維持具有「相交於一點」的這個幾何特質。在畫三角形時，亦可控制其構成元素，使它變成一個一般化的直角三角形、等腰三角形.等。這種能保持某類圖形「特徵性質」的「一般化」幾何圖形，不只能幫助學生了解具有這種『特徵性質』的圖形，在證明過程的『代表性』，也是教學時，十分有用能提供學生觀察、比較、臆測、驗證幾何圖形性質的重要工具。

（4）記錄作圖過程

較強的動態幾何軟體，通常具有記錄操作或作圖過程的功能，當使用者從畫出三點、畫三角形到畫出三邊的垂直平分線，到發現三條垂直平分線交於一點，要經歷一些作圖的過程，這些作圖的過程均可記錄下來，記錄的結果程式，可以當作下次作圖的工具。選出工具，訂出基本元素，就可由軟體作圖，省去重新作圖的過程，所做的圖形與原來的圖一樣，是一個一般化的圖形，上例就可作為畫出三角形外心的工具，同樣的，使用者也可以建立畫內心、垂心、重心.的工具，這些基本工具，又可組合成更複雜的工具，例如，由外心、垂心及重心等工具可構成畫尤拉線的工具，以檢驗這三點是否共線。這使作圖的工程簡化許多，做過一次，以後就可以重複利用。這種記錄作圖過程的功能，在協助教師了解學生解題的思考過程上有很大的助益，教師可以在事後分析學生解題及作圖的思考過程，以利補助教學的進行。

儘管我們不能說，動態幾何軟體適合所有數學內容的研發，但善用其優點，作出適

當的內容，卻已受到多項研究的肯定，它是個新興的數學研究工具，但也是個絕對值得利用的好工具！

2.2 網站經營之相關研究

網站架設之初，便以成為優質教育網站自許，研究成為優質教育網站的條件，並逐步改善網站，這些條件將在 2.2.1 節中陳述。

2.2.1 優質教育網站的條件

Tom Creed 和 Kathryn Plank（1998）認為好的教育網站，不僅要有吸引學生進來學習的特質之外，還需要使學生覺得網站值得他們付出時間與努力，使他們願意繼續使用。因此針對如何建立好的教育網站，Creed 與 Plank 提出了設計教育網站的七個原則。

1. 網頁的下載速度要快（Good course web sites load quickly.）

網站最好能在幾秒內就可以回應給使用者，避免使用者等待的時間太長，而失去使用的耐心。所以不必要的圖片、聲音、動畫和 Java Applet 就盡量不要使用，以免導致網頁下載時間過長，甚至使瀏覽器發生凍結而無法使用。目前有許多教育網站，不必要的圖片過多的情形非常嚴重。另外具動畫效果的 Flash，雖然可以提供外觀炫麗的效果，可是相對佔用頻寬的問題也是很大。翁秉仁（2000）指出，目前在台灣所成立的許多數學教學網站，多數教學網站共通的問題即是：網站經營過份重視外觀炫麗的效果，反而更突出內容的貧乏。

2. 網站要能容易地瀏覽（Good course web sites are easily navigated.）

由於教材網頁，不像書本一樣可以隨意翻頁瀏覽又不會發生迷失現象，教材網頁靠著彼此錯綜複雜的超鏈結連接在一起，當學習者瀏覽網路教材時，很容易迷失。因此好的教育網站在呈現教材時，能夠提供清楚的教材資訊，使學生能獲得教材的整體資訊，不致發生迷失現象。

3. 網站要能提供最新資訊（Good course web sites contain timely information.）

好的教育網站，能提供最新的資訊，以滿足使用者求知的需求。當網站內容有所更新的時候，使用者也要能很清楚的知道內容變化的情形，過時的資訊或不經常更新、變

動的網站通常無法吸引使用者的注意，甚至會降低使用者學習的意願。因爲網站需要使用者的信賴感，才能使學生在有資訊需求時，可以首先想到要利用該網站，這才是好的網站成功的地方。

4. 網站要能容易識別（Good course web sites are easily identified.）

由於網路上充斥著許許多多的網站，因此好的教育網站要能夠讓學生容易辨別，除了有一個簡單、清楚的網站標題之外，網頁的內容最好能夠統一格式，以帶給使用者熟悉感和親切感。

5. 網站要鼓勵持續使用（Good course web sites encourage sustained use.）

好的教育網站，當然希望使用者能持續使用，然而要能留住使用者的心，使他們能保有高度的興趣是相當困難的。在不違反第一原則的情況下，適度在教材網頁上安插有趣的動畫或圖片可以提高使用者的學習興趣。而一些可產生互動的機制，如教材的線上討論區，可供使用者發問與討論，也都是提高使用者學習興趣的方式之一。

6. 網站要能幫助學生自我學習（Good course web sites put students in control of their own learning.）

由於教育網站大都採取由使用者自我學習，缺乏教師的參與，學生可能因擁有學習上的充分自由而喪失學習目標，例如不知該看哪些教材。因此教育網站系統就必須擔負起教師的輔導責任，適時給予使用者學習上的幫助。

7. 網站要可供列印教材內容（Good course web sites make good printed text.）

雖然教育網站強調線上學習，然而使用者可能會希望能將教材列印出來，以便在離線狀態下也能複習教材，或列印之後可在教材上寫上自己的註解。另外一方面，也許也有使用者尚不能適應在電腦螢幕上學習，習慣看平面教材，因此網站也需要考量到這些使用者的需要，在教材的呈現方式上，要能使使用者能清楚地印出教材內容，例如避免用太深的底色便是其中的關鍵。

Tom Creed 和 Kathryn Plank 所訂定的條件，將作爲 6.4 節中，網站經營方式與成效分析的自我檢測標準之一，期許網站的經營能夠精益求精。

2.2.2 數學網路教學的理論探討

科學家認爲，人類的每一種感官都是接收訊息、改變觀念行爲的最佳利器。心理學家認爲在不同的教學活動中，五官的運用比率，大約視覺占 70%，聽覺占 17%，觸覺占 8%，其餘爲嗅覺及味覺。若利用電腦輔助教學，非正式的研究分析，視覺卻占了 90%，視覺的應用變得非常重要[16]，於是網頁內容的設計，自然應以讓人看得舒服，爲第一要件。

建構網際網路成爲一個理想的學習環境，不可只將學習資源放在網路上而已，必須根據學習理論進行規劃與設計。電腦輔助教學的理論依據可分爲：

1. 行爲理論：學生的學習要有成效，老師必須提供足夠的刺激，並激發學習者提供各種回饋。
2. 認知理論：皮亞傑(Piaget)之認知理論，主張真正的知識，是由內在產生建構，因此學習必須是主動的歷程。
3. 社會理論：主張老師應提供模擬真實社會情境的場所，讓學生觀察問題的本質，及解決的方法，從嚐試錯誤中不斷修正自己的行爲。
4. 遊戲理論：主張「寓教於樂」，引發學習動機，保持學習興趣。[15]

而現今蓬勃發展中的網路教學，可視爲以網路爲媒介，傳遞教學給學習者的革新方法，成爲新一代的遠距教學模式。遠距教學已脫離了以往單向的傳播方式，演變成具備有線上互動功能的教材；透過聊天室或討論區的架構，可以幫助教學者與學習者間的互動，加上各式各樣變化豐富的多媒體網路教材，使網路建構的教學模式，已呈爲新一代的遠距教學的主流[17]。

數學是一門令很多學生極爲傷腦筋的科目，主要原因在於，數學是屬於較抽象的知識。學生在符號表徵的世界(知識)、實體的生活世界(行動)、以及意念思維的世界(省思)之間，無法達到互動的體會與認知。數學教師應該考慮運用現代資訊科技，營造生動的學習環境，幫助學生的數學學習。[15]

傳統電腦輔助數學教學，多半是個人獨自面對電腦所呈現的數學教材進行學習。在學習社群的理念下，電腦輔助學習系統也由個別化轉變成電腦輔助合作學習（Computer Support Collaborative Learning，CSCL)。所謂 CSCL 所指的是以電腦爲工具，營造一種環境，使學習者能辨識、比較，進一步整合不同詮釋角度的知識內含，以建構精緻化的知識體系[16]。

近年來的數學教學，相當注重引導學生澄清題意、合作解題、發表、討論與反思。網路上數學的合作學習，依其互動時間可區分爲非同步 （asynchronous ）與同步（synchronous) 兩種類型。在非同步的環境中，學生可以在不同時間採用電子郵件 (E-mail)、電子佈告欄 (BBS)、討論區或新聞群組軟體 (newsgroups) 等工具進行一對一、一對多的討論。此類合作學習的優點，是學生不必同時上線，且有充分時間，對主題進行思考與意見表達。同步溝通工具，可採用文字爲主的線上聊天室 (on-line chat) ，或以圖形爲主的電子白板 (electronic board)，或以影像與聲音傳送的視訊會議系統 (net-meeting)，溝通的雙方同時上線，可以達到面對面的效果。[18]

『YLL 教學手札』中的數學數位內容研發，與『YLL 討論網』中的經營方式，均是以非同步的環境爲主，提供網路上的數學學習者，一個課後學習的天地，期待幫助更多有心的數學學習者。

第三章　GSP 的遞迴功能於數學內容研發之運用

GSP 從 4.0 版起，比起前版的 3.0，有著很大的改變。其中一個重大的改革就是遞迴（ Iteration ）。GSP 的遞迴功能，能讓研發出的數學數位內容更具吸引力，不管是對於數學內容的研究或數學教材的開發，都是個強大卻容易上手的工具，3.1 節中，將先對介 GSP 作軟體的介紹，3.2 節，說明 GSP 中的遞迴法則，3.3 至 3.5 節中，則利用此法則，於 GSP 中作數學研究之運用。

更甚者，我們將此法則應用於『自我相似圖構圖的研究』，並因主題深具研究價值，將之獨立於第四章中研究。

3.1 GSP 軟體介紹

動態幾何系統（ The Geometer's Sketchpad ），為美國Swarthmore College及Key Curriculum Press（ http://www.keypress.com/ ），在NSF之下產官學合作視覺幾何研究計畫的產品，是一套架構在視窗下，物件導向動態連結的幾何繪圖軟體。它可作為幾何學的研究，與教學的輔助工具，尤其在中學幾何的學習上，深受中學教師與學生的喜愛。它可以當作尺規作圖的電腦版，在教學上能節省繪圖時間，並簡易地構造動態幾何。經由動態幾何圖形的變換及度量，來描述我們可以發現的一些幾何關係，有助於增強開放式的猜測與研究。不僅可由簡易尺規作圖，構造出複雜幾何圖形，更可對固定結構圖形作連續的變化，它也提供動態模擬、圖形變換及圖形改換時，長度、角度、比例、面積等度量的功能。它更可對結構性作圖作巨集建構、文字說明，形成簡易操作鈕，提供使用者幾何學習的良好環境[19]。

且 GSP4 以後的版本，可直接將 GSP 檔存成網頁的格式，在網際網路甚為普及的今日，其發展潛力更是無窮。目前國內已有多所院校開設動態幾何課程，如台灣師大、清華大學、彰化師大、高雄師大、北市師院等，其重要性由此可見。茲將部份研究對 GSP 的描述摘錄如下[20]：

在設計動態幾何輔助學習環境時，可利用幾何作圖軟體動態模擬的特性，並利用該軟體按鈕功能，將物件設計成，可以讓學生主動操作與控制，以呈現物件接近接近真實的旋轉或是變換的情形。在此環境下提供學生，可以控制旋轉或是變換的功能，讓學生對於原先的空間能力，產生增強作用，或是對於原本錯誤的心像，產生衝突的情形，讓學生再次形成正確的心像與變換[21]。

GSP 有超強的繪圖功能，是一個動態幾何建構工具，使用者可以用滑鼠，經由按取

（ Clicking ）或拖曳（ dragging ），輕易的畫出點、線段、射線或圓等基本幾何圖形。而這些圖形也可以整個藉由拖曳的動作、做動態模擬的變換、而幾何關係保持不變。線段、面積、周長、角度都可以測量出，並且可以加以計算。而這些測量值與計算所得的數量，也會跟著圖形變換的改變而改變。此環境內建有直線與圓的方程式，對於一般代數量，也可以藉由幾何測量的數據來製作，故方程式的表徵，是使用文字標籤與測量值的數據來製作。此軟體也可以插入外部物件，所以可以整合其他的軟體，將文字，方程式在文字編輯軟體中完成，再插入於 GSP 檔中，所以這個環境可以顯現出動態、連結與多重表徵的功能[22]。

GSP，提供了基本幾何作圖工具，具有尺規作圖、圖形可變換或動態連續變換、保持結構、記錄作圖過程等特質，因此不僅能提供精確的幾何圖形，更可以協助教師提供方便操作，易於探討圖形性質的教學及學習環境。使用者可以利用滑鼠拖曳點、線等功能，畫出幾何圖形的構成成分，改變幾何圖形的形狀，但圖形的預設幾何關係不改變。螢幕上設計的環境都設有按鈕，只要連續按兩次，便會執行該按鈕預設的功能，學生只要瞭解滑鼠的選取、拖曳及連按等功能，就會操作及探討其內容 [23]。

3.2 GSP 中的遞迴法則

在數學中，給定一個初始值，和一個運算的規則，便能得到下一個值，重覆這過程，便是遞迴。在學校課程中，遞迴出現在以下幾個主題中：

- 微積分（極限和近似值）
- Fractals & Chaos
- 算術式
- 幾何學、藝術和設計
- 數列與級數
- 疊代
- 最優化
- 動態系統、統計力學等

此外，遞迴規則亦經常出現在物理學、化學、生物學中等。

3.2.1 遞迴和數學思考

遞迴對數學思考(或問題解決)的幫助，可從以下幾點思考：

- 推斷結果

如果一個數學問題，我們無法直接算出答案，我們能透過一個規則推斷出答案嗎？
如果可以，遞迴能重覆這規則，直到我們找到答案。

- 逼近答案

如果一個數學問題，我們無法直接算出答案，我們能透過一個規則改善我們對答案的猜測嗎？
如果可以，遞迴能重覆這規則，直到我們逼近答案。

- 切割問題

如果一個數學問題，實在是太難解答，它能夠被分成二個小問題，讓我們從容易的去回答嗎？
如果可以，遞迴能將問題切割到足夠小的部份，讓這小部份能夠被解決，然後我們能從各個被解決的部份，得到我們的答案[24]。

3.2.2 GSP 中的遞迴功能

數學家常用許多的數學方法，來描述遞迴的過程。GSP是個幾何的工具，自然是用幾何的方法，來描述遞迴。GSP中先給定一個initiator（ pre-image objects，比如幾個點，或幾個數字 ），接下來的圖形或運算，都必須根據給定的initiator來遞迴產生。Initiator改變，遞迴的結果，就會跟著改變，我們亦能用數字，來控制產生遞迴的次數。我們把GSP中的遞迴概分成二大類：

1.參數式的遞迴：

在製作遞迴圖形的過程中，需用參數的輔助，經過特定的數學運算，才能製作的圖形，這部份的遞迴製作過程較複雜，稱參數式的遞迴。

2.圖形式的遞迴：

在製作遞迴圖形的過程中，只需設定圖形的改變方式所製作的圖形（例如讓A點於下次的遞迴變成B點），這部份的遞迴製作過程較爲簡單，稱圖形式的遞迴。

而所完成的遞迴檔案，呈現的介面，則主要分成二種方式，分述如下：

1.步驟化：

將所欲呈現的每個步驟，用按鈕的方式，讓操作者可用步驟化的方式，作檔案的操作。

2.自動化：

自動化的呈現方式，主要在表達動畫的效果，這也是GSP的特色之一。

今以建構如圖3.2.2-1的圖形為例，說明圖形式的遞迴。任一三角形，取各邊中點，再連成一個新的三角形，簡單說明製作過程，大部份的圖形式的遞迴，都會用到類似的過程。

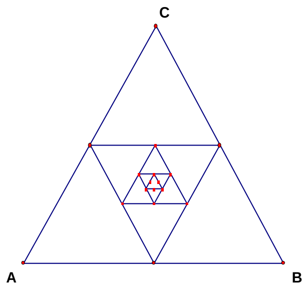


圖 3.2.2-1 圖形式的遞迴例圖

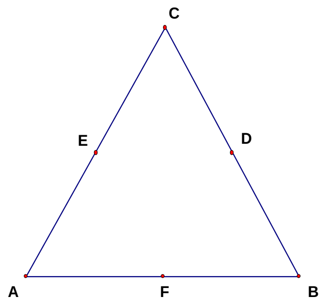


圖 3.2.2-2 圖形式的遞迴例圖製作過程

任意作出ΔABC，及各邊中點 DEF，如圖 3.2.2-2，選取 ABC 三點，按 GSP 上方選單【Transform】/【Iterate】

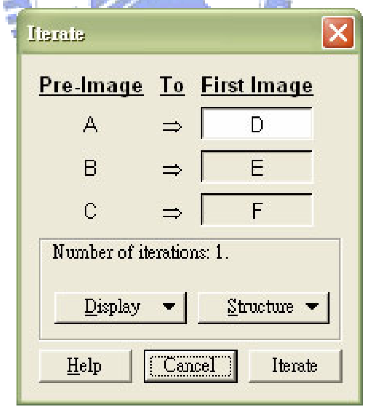


圖 3.2.2-3 圖形式的遞迴例圖選單設定

並作好如圖 3.2.2-3 疊代的設定，產生新ΔDEF，按下【Iterate】即完成了。

GSP 提供一個功能，當我們選取整個圖形，按下鍵盤上的『＋』號，則能增加一次的遞迴；按下鍵盤上的『－』號，則能減少一次的遞迴。改變ΔABC，接下來遞迴產生的三角形，亦將隨著改變。

參數式的遞迴，則以製作一圓內的正 N 邊形為例，作一簡單的介紹，說明製作方法，大部份的參數式的遞迴，都會用到類似的過程。

如圖 3.2.2-4，在圓 O 上，任取一點 A，並作一可改變的參數 t，將 A 點旋轉$\frac{360^{\circ}}{t}$，得到 B 點，如圖 3.2.2-5，選取 A 點及參數 t，按住 Shift 鍵及 GSP 上方選單【Transform】/【Iterate To Depth】，並作好 A＝＞B 的遞迴設定，按下【Iterate】即完成了。

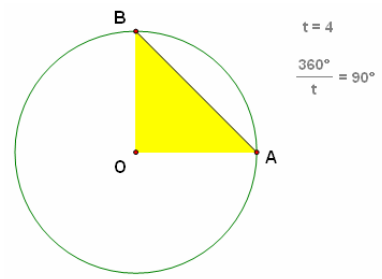


圖 3.2.2-4 參數式的遞迴範例（1）

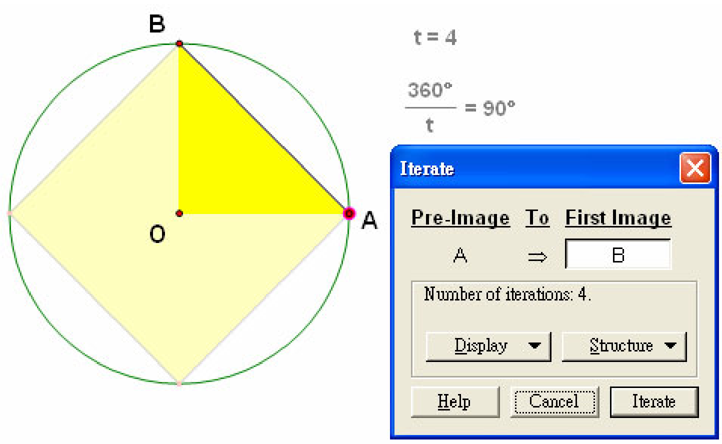


圖 3.2.2-4 參數式的遞迴範例（2）

這時候，當我們選取參數 t，按下鍵盤上的『＋』號，則能增加一次的遞迴；按下鍵盤上的『－』號，則能減少一次的遞迴，只要改變參數 t 的數字，即可改變圓內接正多邊形的邊數，如圖 3.2.2-5 所示。。

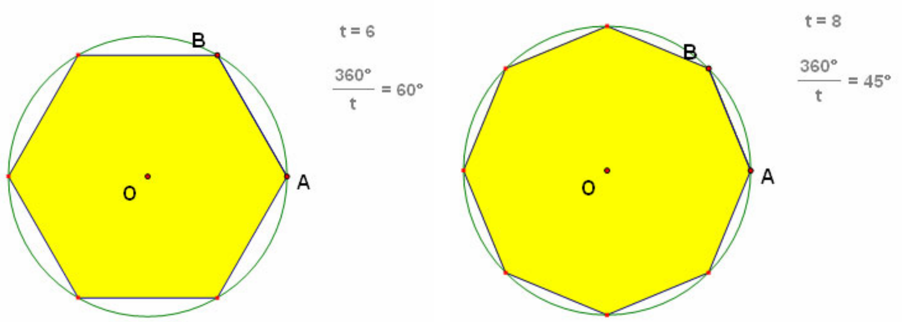


圖 3.2.2-5 參數式的遞迴範例（3）

3.3 微積分主題的遞迴設計

長久以來，對教師而言，微積分的教學，一直有作圖複雜，解釋不易的問題，學生的學習，自然就多了不少的困難度。

為了改善一般學生，對微積分『抽象』的感受，本文參考動態幾何軟體 GSP 的現成範例，運用 GSP 的遞迴功能，再輔以微積分概念的數學函式，來設計幾則微積分教學的主題，並以互動的動態方式呈現，展現微積分的另一番面貌，提供教師教學及學生學習的用途。介紹的主題有『Riemann Sum』、『Cartesian Arc Length』、『Taylor series』、『牛頓法求根的近似值』等，文中將分段一一介紹。

3.3.1 Riemann Sum

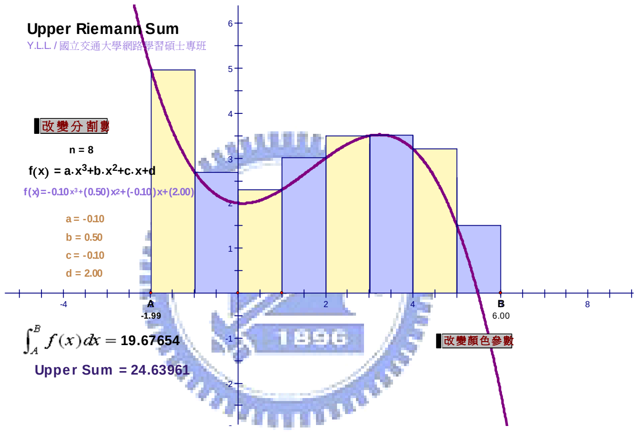


圖 3.3.1-1 Riemann sum

設有一函數f(x)，在x軸上，將封閉曲間[a, b]，用x_1~x_{n-1}共n-1 個點， $a < x_1 < x_2 < \cdots\cdots . < x_{n-1} < b$，分成n等分，以$\Delta x_1$、$\Delta x_2 \cdots\cdots \Delta x_n$來分別表示這n個區間的長度。而 x_k^* 是在第k個區間中的任意點，則

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

稱為函數 f(x)的 Riemann sum。如上圖 3.3.1-1，是一種 Riemann sum 的情形。現以 GSP 為設計平台，設計 Upper Riemann Sum、Midpoint Riemann Sum、Lower Riemann Sum 的動態研究環境，分述如下：

1. Upper Riemann Sum

在函數f(x)的**Riemann sum**中，對每個$[x_{k-1},x_k]$的區間，都各取一個f(x)的最大值M，則所有$M\Delta x_k$的和，就是Upper Riemann Sum。

GSP 檔案製作方法：

Upper Riemann Sum 的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以自動化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一個可任意用輸入數字的方式改變的函數圖形 f(x)，對 x 給定一個固定的區間作 n 等份，其次在 x 值最小的第一個區間，利用特定的數學方法，找出最大的函數值 f(x)，以此區間的範圍和此最大的函數值 f(x)，作出一矩形面積，最後便利用參數式的遞迴功能，產生剩下的所有矩形面積，n 值可用按鈕的方式作任意的加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值改變時，Upper Riemann Sum 的變化。

例子：

以 f(x)＝－0.5x＋3 為例，將[0,6]平分成 6 等份，可利用此遞迴產生的自動化動態圖形介面方式，呈現 Upper Riemann Sum 的變化，並算出 Upper Sum＝ 10.5 ＞ 9 ＝f(x)在此區間中的實際面積，如圖 3.3.1-2。並不斷動態地增加分割數，平分成 20 等分時，算出 Upper Sum＝ 9.45 ＞ 9 ＝f(x)在此區間中的實際面積，此時的 Upper Sum 已更逼近實際的面積，如圖 3.3.1-3。

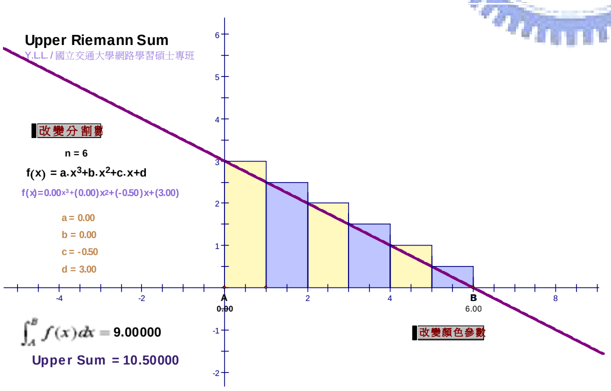


圖 3.3.1-2 .Upper Riemann Sum 範例

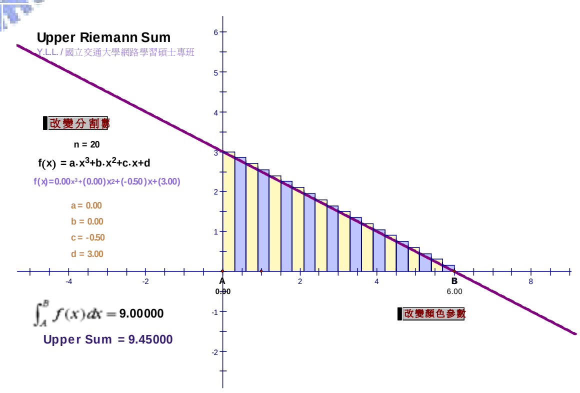


圖 3.3.1-3 .Upper Riemann Sum 增加分割數

2. Midpoint Riemann Sum

在函數f(x)的**Riemann sum**中，對每個$[x_{k-1},x_k]$的區間，都各取一個f(x)的中間值h，則所有$h\Delta x_k$的和，就是Midpoint Riemann Sum。

GSP 檔案製作方法：

Midpoint Riemann Sum 的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以自動

化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一個可任意用輸入數字的方式改變的函數圖形 f(x)，對 x 給定一個固定的區間作 n 等份，其次在 x 值最小的第一個區間，利用特定的數學方法，找出區間正中間的函數值 f(x)，以此區間的範圍和此中間的函數值 f(x)，作出一矩形面積，最後便利用參數式的遞迴功能，產生剩下的所有矩形面積，n 值可用按鈕的方式作任意的加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值改變時，Midpoint Riemann Sum 的變化。

例子：

同以 f(x)＝－0.5x＋3 為例，將[0,6]平分成 6 等份，可利用此遞迴產生的自動化動態圖形介面方式，呈現 Midpoint Riemann Sum 的變化，，並算出 Midpoint Sum＝ 9 ＝f(x)在此區間中的實際面積，如圖 3.3.1-4。並不斷動態地增加分割數，平分成 20 等分時，算出 Midpoint Sum＝ 9 還是等於 f(x)在此區間中的實際面積，如圖 3.3.1-5，分割數的多寡，對此函數而言，雖未造成 Midpoint Sum 的改變，但從視覺的觀點，可明顯感受其逼近函數於此區間面積的情況。

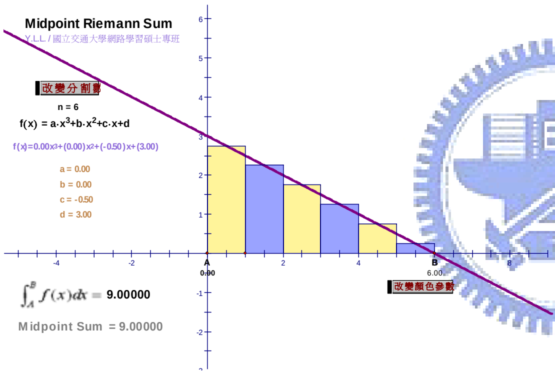


圖 3.3.1-4 Midpoint Riemann Sum 範例

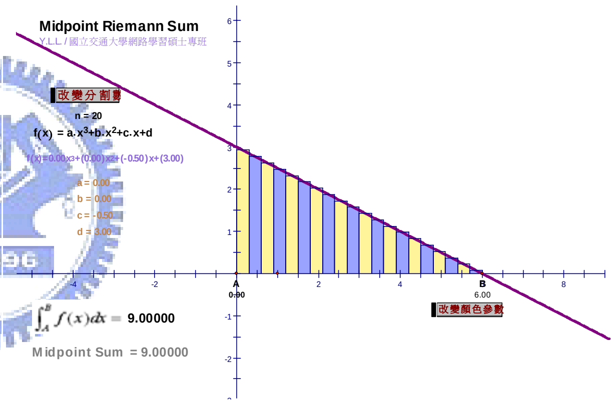


圖 3.3.1-5 Midpoint Riemann Sum 增加分割數

3. Lower Riemann Sum

在函數f(x)的Riemann sum中，對每個$[x_{k-1},x_k]$的區間，都各取一個f(x)的最小值m，則所有 $m\Delta x_k$ 的和，就是Lower Riemann Sum。

GSP 檔案製作方法：

Lower Riemann Sum 的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以自動化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一個可任意用輸入數字的方式改變的函數圖形 f(x)，對 x 給定一個固定的區間作 n 等份，其次在 x 值最小的第一個區間，利用特定的數學方法，找出區間最小的函數值 f(x)，以此區間的範圍和此最小的函數值 f(x)，作出一矩形面積，最後便利用參數式的遞迴功能，產生剩下的所有矩形面積，n 值可用按鈕的方式作任意的加減，隨著

n 值的加減，便可觀察 n 值改變時，Lower Riemann Sum 的變化。

例子：

同以 f(x)＝－0.5x＋3 為例，將[0,6]平分成 6 等份，可利用此遞迴產生的自動化動態圖形介面方式，呈 Lower Riemann Sum 的變化，並算出 Lower Sum＝ 7.5 ＜f(x)在此區間中的小實際面積，如圖 3.3.1-6。並不斷動態地增加分割數，平分成 20 等分時，算出 Lower Sum＝ 8.55 ＜ 9 ＝f(x)在此區間中的實際面積，已更逼近真實的面積，如圖 3.3.1-7。

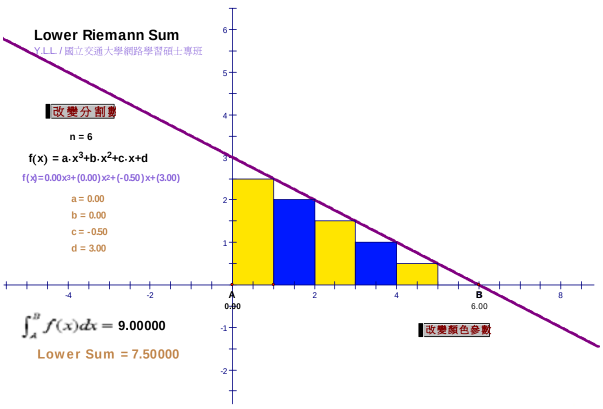


圖 3.3.1-6 .Lower Riemann Sum 範例

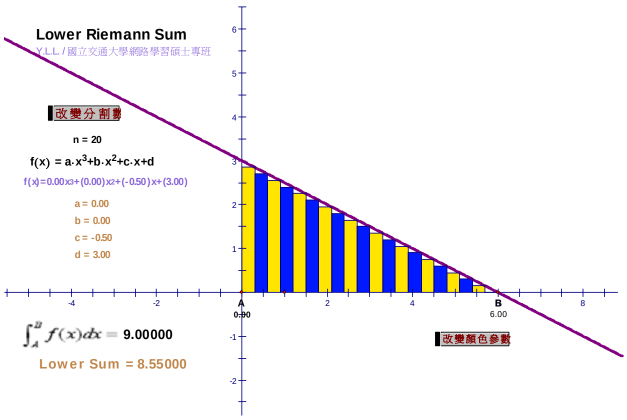


圖 3.3.1-7 Lower Riemann Sum 增加分割數

最後同時比較三種 Riemann Sum，如圖 3.3.1-8。我們亦能任意改變 f(x)，如圖 3.3.1-9，是 $f(x) = -0.1x^3 + 0.5x^2 - 0.1x + 0.8$ 的三種 Riemann Sum 情形。

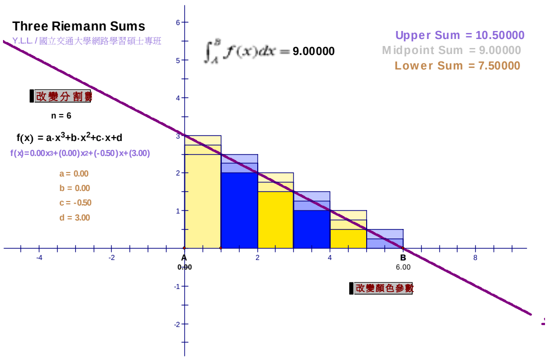


圖 3.3.1-8 三種 Riemann Sum 合併範例

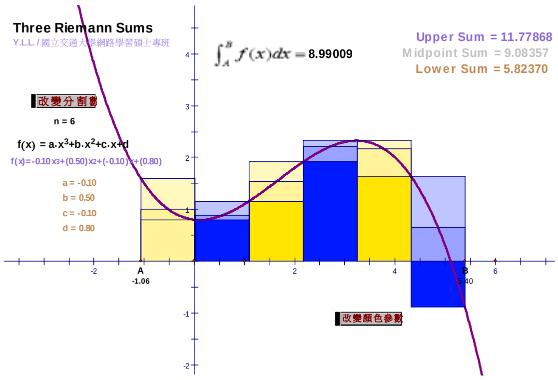


圖 3.3.1-9 三種 Riemann Sum 合併範例二

3.3.2 Arc Length

設有一函數f(x)，則封閉曲間[a, b]內 ，用x_1~x_{n-1}共n－1 個點， $a < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} <$ b，分成n等分，連接 $f(a)$ 、 $f(x_1)$ 、 $f(x_2)$ 、 $f(x_3)$ ...... $f(x_{n-1})$ 、 $f(b)$ 各點，形成n條線

段，這n條線段的和S，即為Arc Length ，當$n\to\infty$，S即是f(x) 在封閉曲間[a, b]內的曲線長。

GSP 檔案製作方法：

Arc Length 的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以自動化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一個可任意用輸入數字的方式改變的函數圖形 f(x)，對 x 給定一個固定的區間作 n 等份，對第一個和第二個等分點，算出對應的 f(x)值，連接第一個和第二個等分點所成座標（x , f(x)），作出一線段，最後便利用參數式的遞迴功能，產生剩下的所有等分點連接線段，n 值可用按鈕的方式作任意的加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值愈大時，視覺上所有線段和和函數弧長的關係。

例子：

圖 3.3.2-1，是 $f(x)=0.5x^4-x^3-2x^2+x+3$，n＝3 的情形；圖 3.3.2-2，是 n＝10 的情形。

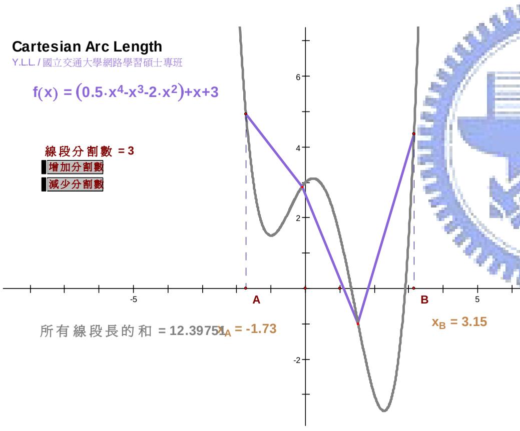


圖 3.3.2-1 Arc Length（ 分割數：3 ）

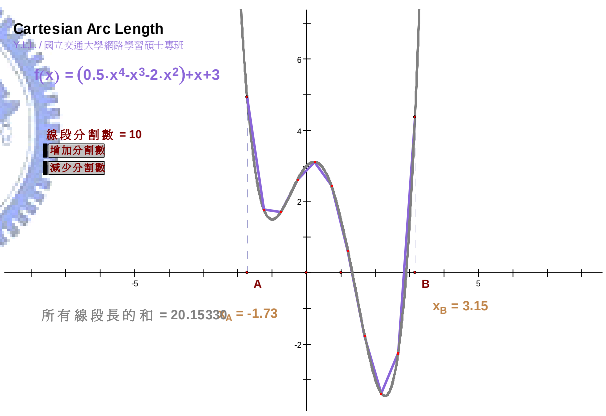


圖 3.3.2-2 Arc Length（ 分割數：10 ）

3.3.3 Taylor series

泰勒展開式（ Taylor series ）為多項式展開的一種方式。一多項式函數 f(x)，在 x = a 的泰勒展開式是：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)^1}{1!}+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!}+\ldots+\frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}+\ldots$$

$$=\sum\frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}\quad \text{for}\quad n = 0, 1, \ldots\ \infty$$

而一多項式函數 f(x) 在 x = a 的 n 階的泰勒展開式$T_n(x)$是：

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} \ldots\ldots \quad (1)$$

GSP 檔案製作方法：

Taylor series 的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以自動化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

給定一個特定的函數 f(x)，先畫出此函數圖形，其次計算出此函數圖形的泰勒展開式 $T_n(x)$ 如上列式子（1），畫出 n=1 時的函數 f(x)的泰勒展開式圖形，再利用特定的數學方法及參數式遞迴功能，產生剩下數個不同 n 值的函數 f(x)的泰勒展開式圖形，n 值可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值愈大時，視覺上函數 f(x)的泰勒展開式圖形和原函數 f(x)的關係。

以下是幾個例子的呈現：

1. $f(x) = \sin x$ ，a=0

$$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

圖 3.3.3-1 是 $T_5(x)$ ，圖 3.3.3-2 是 $T_{10}(x)$ ，和 $f(x) = \sin x$ 比較，我們能清楚地看到，隨著 n 的增加， $T_n(x)$ 就更逼近原式 $\sin x$ 。

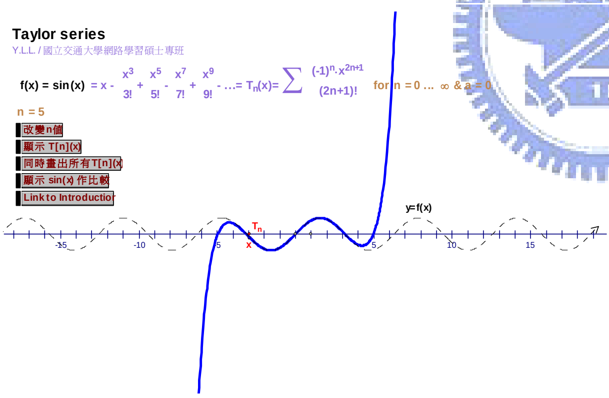


圖 3.3.3-1 Taylor series（ $\sin x$ ）

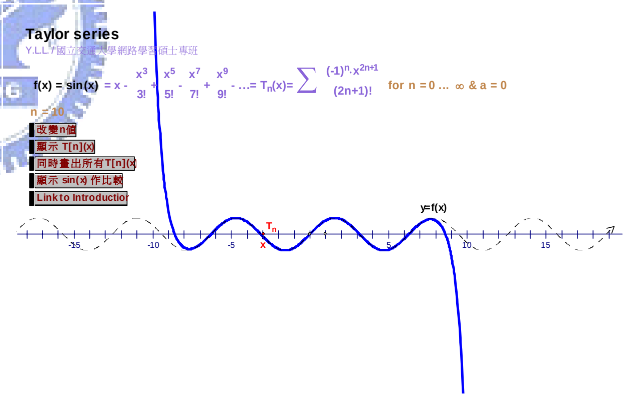


圖 3.3.3-2 Taylor series（ $\sin x$ 範例二 ）

2. $f(x) = \ln(1+x)$ ，a=1

圖 3.3.3-3 是 $T_2(x)$ ，圖 3.3.3-4 是 $T_6(x)$ ，和 $f(x) = \ln(1+x)$ 比較，我們能清楚地看到，隨著 n 的增加， $T_n(x)$ 就更逼近原式。

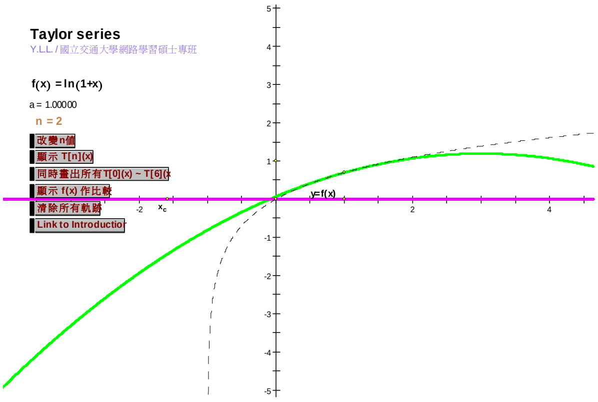


圖 3.3.3-3 Taylor series（ $\ln(1+x)$ ）

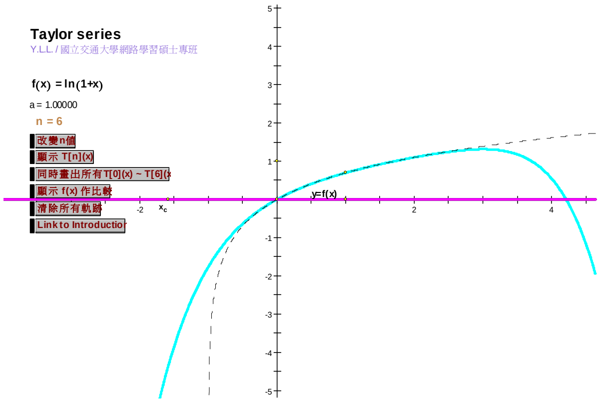


圖 3.3.3-4 Taylor series（ $\ln(1+x)$ 範例二 ）

3.3.4 牛頓法求根的近似值

牛頓法（ Newton's method ），又稱為牛頓－拉夫遜方法（ Newton-Raphson method ），它是一種在實數域和複數域上，近似求解方程式的方法。方法使用函數 f(x) 的泰勒級數的前面幾項，來尋找方程式 f(x) = 0 的根。

選擇一適當的點 x_0 ， 計算相應的 $f(x_0)$ 和切線斜率 $f'(x_0)$ 。然後我們計算，穿過點 $(x_0, f(x_0))$ 並且斜率為 $f'(x_0)$ 的直線，和 x 軸的交點的 x 坐標，也就是求如下方程式的解：

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \ldots\ldots（1）$$

我們將新求得的點的 x 坐標，命名為 x_1 ， 通常 x_1 會比 x_0 更接近方程式 f(x) = 0 的解。因此我們現在可以利用 x_1 ，開始下一輪遞迴。遞迴公式可化簡如下所示：

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

已經證明，如果 f'是連續的， 並且待求的點 x 是孤立的，那麼在點 x 周圍存在一個區域，只要初始值 x_0 位於這個鄰近區域內，那麼牛頓法必定收斂。並且，如果 f'(x)不為 0，那麼牛頓法將具有平方收斂的性能。粗略的說，這意味著每遞迴一次，牛頓法結果的有效數字將增加一倍。

GSP 檔案製作方法：

牛頓法的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

給定一個特定的函數 f(x)，先畫出此函數圖形，選擇一適當的點 x_0 ，畫出座標 $(x_0, f(x_0))$ 及利用上列式子（1）畫出這點的切線，交出新的 x 軸交點的 x_1 坐標，最後利用參數式遞迴的功能，產生不同 n 值的切線和 x_n 點，n 值可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值愈大時，視覺上和計算出的函數 f(x)的牛頓法根的逼近情形。以下是幾個例子的呈現：

圖 3.3.4-1、圖 3.3.4-2、圖 3.3.4-3、圖 3.3.4-4，分別為 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-1$、 $f(x)=2^x$、 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^4-3x^3+2x^2+x+1$、 $f(x)=\sin x$ ，牛頓法執行過程的例子。

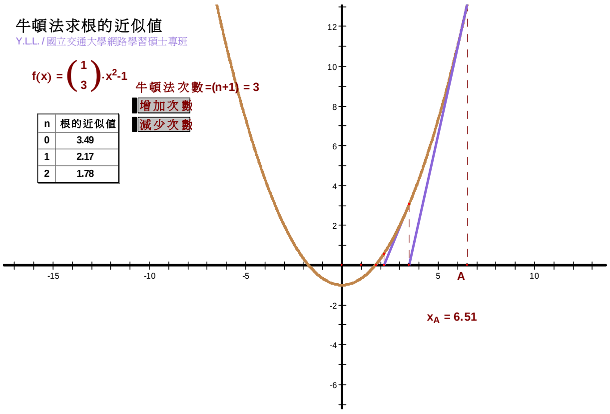


圖 3.3.4-1 牛頓法範例一

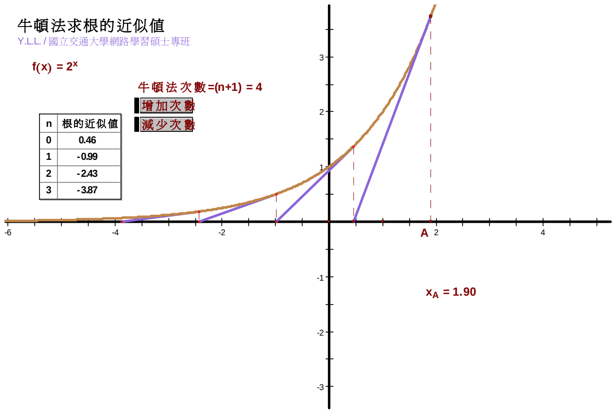


圖 3.3.4-2 牛頓法範例二

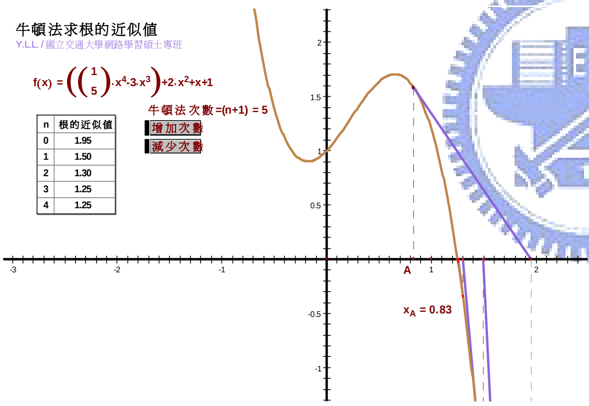


圖 3.3.4-3 牛頓法範例三

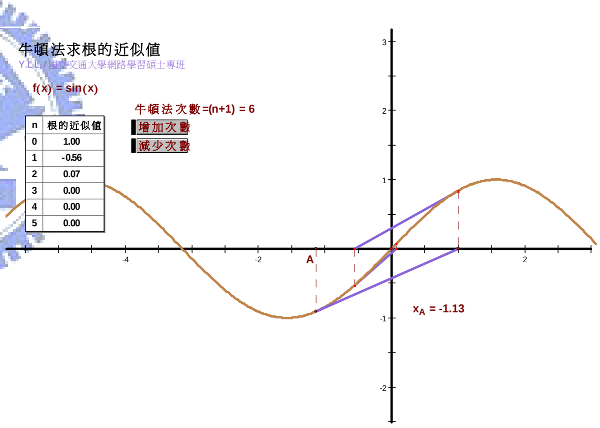


圖 3.3.4-4 牛頓法範例四

這是個資訊的時代，配合電腦來輔助教學，已是現今 e 世代的學生，更容易了解、獲得知識的方式，對數學來說是如此，對『微積分』而言更是如此。本文提供『Riemann Sum』、『Cartesian Arc Length』、『Taylor series』、『牛頓法求根的近似值』等四個主題的教學介面，配合文章和動態的 GSP 檔案，期待能幫助更多的教師、學生。

檔案提供給幾位教師，作為微積分教學時之輔助教材，均得到不錯的效果。但實質的教學成效，仍有更多的研究空間。

3.4 圖解收斂無窮等比級數

等比級數 $S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$，其中 a_1 是首項，r 是公比。當 $n \to \infty$，$0 \le |r| < 1$，$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$，是為收斂之無窮等比級數。

圖解收斂無窮等比級數的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

如圖 3.4-1，畫出一正 ΔABC，假設 ΔABC 面積為 1，將 ΔABC 面積四等分，則圖色部份面積為 $\dfrac{1}{4}$，接下來用遞迴功能不斷將最上方的三角形四等分，並將其中一塊圖色，如圖 3.4-2，圖色部份面積為 $\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$，圖 3.4-3，圖色部份面積為 $\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$。

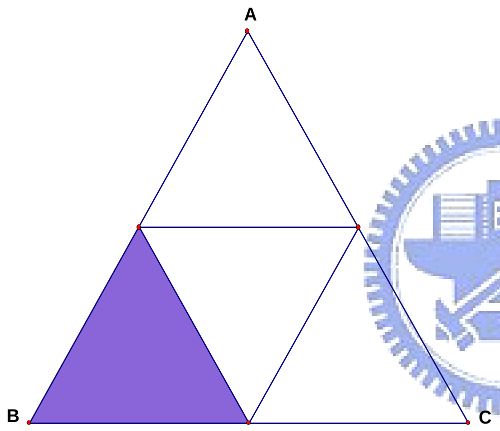


圖 3.4-1 無窮等比級數範例一（ 1 ）

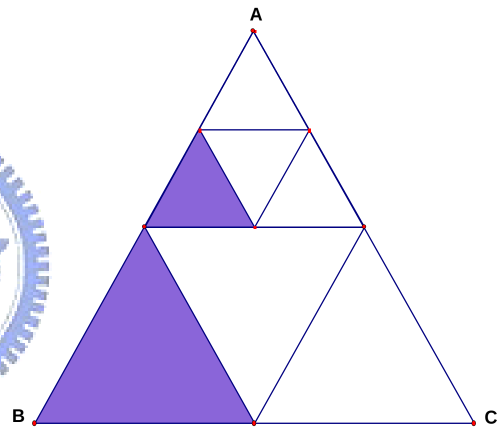


圖 3.4-2 無窮等比級數範例一（ 2 ）

產生新圖形的次數，可用按鈕的方式作加減，隨著次數的加減，便可觀察新圖形數愈大時，視覺上的無窮等比級數情形。當繼續按此原則下去，直到分割成無窮小的三角形，如圖 3.4-4，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\ldots\ldots=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$$ 。

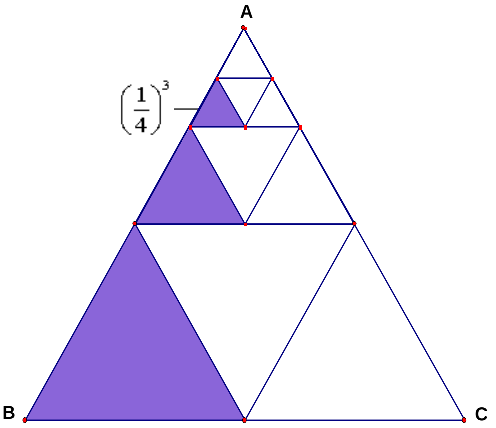


圖 3.4-3 無窮等比級數範例一（ 3 ）

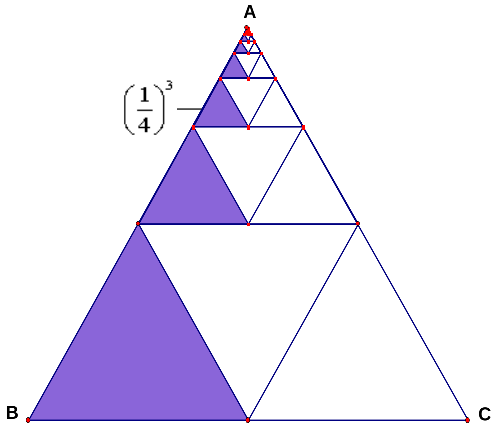


圖 3.4-4 無窮等比級數範例一（ 4 ）

同樣的製作方法，如圖 3.4-5，假設正方形 ABCD 面積為 1，將正方形 ABCD 面積四等分，則圖色部份面積為$\frac{3}{4}$。圖 3.4-6，圖色部份面積為$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$，圖 3.4-7，圖色部份面積為$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$。

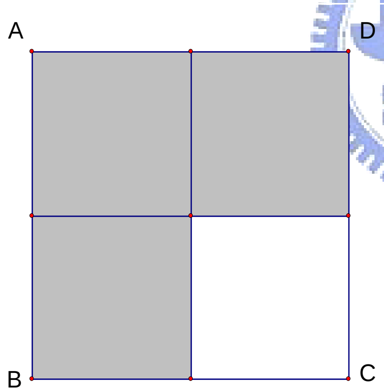


圖 3.4-5 無窮等比級數範例二（ 1 ）

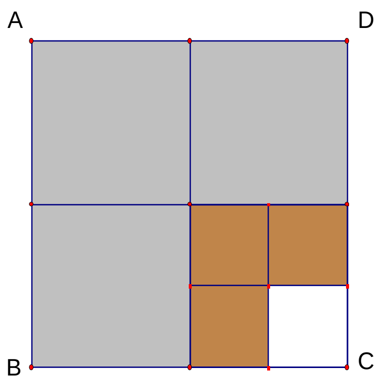


圖 3.4-6 無窮等比級數範例二（ 2 ）

當繼續按此原則下去，直到分割成無窮小的正方形，如圖 3.4-8，

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots..=1=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$$ 。

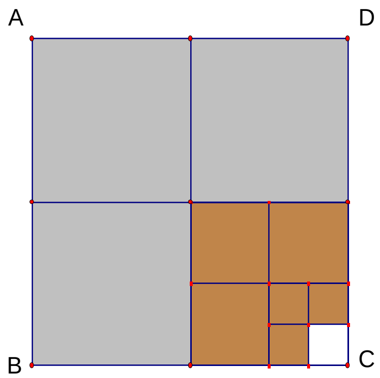


圖 3.4-7 無窮等比級數範例二（ 3 ）

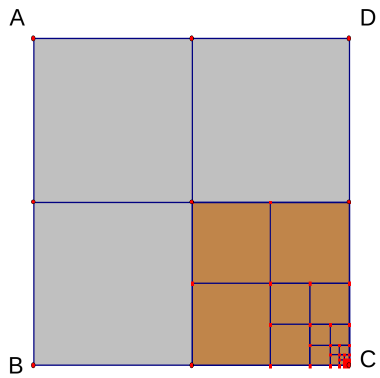


圖 3.4-8 無窮等比級數範例二（ 4 ）

3.5 算數式主題的遞迴設計

本小節將介紹「正多邊形的漸開線」、「Square Root Spiral」、「黃金螺線」等，以算數式遞迴，製作出的特殊平面曲線設計。

3.5.1 正多邊形的漸開線

『漸開線』的意思就是：假如你將一條線繞著一個多邊形，一頭固定，一頭向外拉開，則拉開的這個線頭所走的軌跡，就是漸開線。亦可爲繞於一多邊形或圓形之緊索上之一點，該點向外伸開時所形成之軌跡。

正多邊形的漸開線的 GSP 檔案中，主要是以參數式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先利用參數式遞迴功能製作一個正 n 邊形，邊數 n 可用按鈕的方式作加減。其次以正 n 邊形的某一頂點 A 爲中心，以相鄰的另一頂點 B 爲圓心，以參數式遞迴的方式作出可用按鈕控制漸開線次數 m 的介面。隨著 m 值的加減，便可觀察 m 值不同時，視覺上、實際上正多邊形漸開線的相關性質。

例子：

今以正五邊形作介紹，如圖 3.5.1-1，固定 A 點，Q 是向外拉開 $\overset{\frown}{AP}$ 的一點，以 B 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑作一圓，交 $\overleftrightarrow{QB}$ 於 P 得 $\overset{\frown}{AP}$；圖 3.5.1-2，逆時針旋轉 Q 點，至下一點正五邊形的頂點，用相同的方法，拉長 $\overset{\frown}{AP}$；圖 3.5.1-3、3.5.1-4、3.5.1-5 分別是拉開三、四、五次的正五邊形漸開線 $\overset{\frown}{AP}$ 。

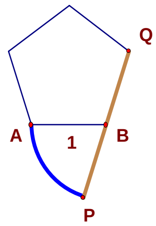


圖 3.5.1-1 正五邊形漸開線（ 1 ）

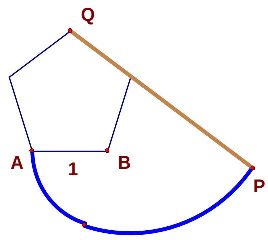


圖 3.5.1-2 正五邊形漸開線（ 2 ）

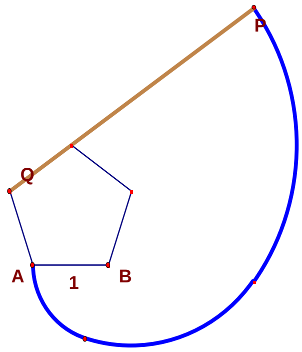


圖 3.5.1-3 正五邊形漸開線（ 3 ）

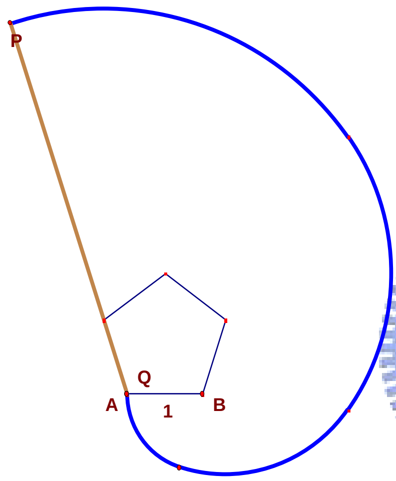


圖 3.5.1-4 正五邊形漸開線（ 4 ）

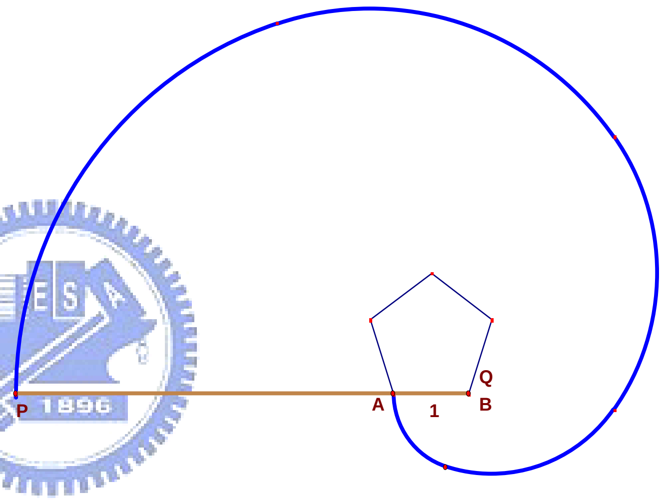


圖 3.5.1-5 正五邊形漸開線（ 5 ）

在正n邊形中，邊長爲 1，作m次漸開線$\overset{\frown}{AP}$，則

$$\overset{\frown}{AP} = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{1}{n} + \ldots\ldots + 2\pi \cdot m \cdot \frac{1}{n}$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + 3\ldots. + m)$$
$$= \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)\pi}{n}$$

3.5.2 Square Root Spiral

Square Root Spiral 指的是，以一腰長爲 1 的等腰直角三角形爲基準，再以此三角形斜邊及長度 1 的邊爲二股，作一新的直角三角形，按此原則，不斷作出新的直角三角形，則所有長度爲 1 的股，所形成的螺線，稱 Square Root Spiral，如圖 3.5.2-6 所示。

Square Root Spiral 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的

介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一腰長爲 1 的等腰直角三角形，今以此等腰直角三角形的斜邊爲一股，長度爲 1 的線段爲另一股，再作一個直角三角形，接下來以圖形式遞迴的方式，不斷地產生 n 個新的直角三角形，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Square Root Spiral 的相關性質。

Square Root Spiral 由最原始的等腰直角三角形(腰長 1)構成，如圖 3.5.2-1 開始，第一個直角三角形斜邊長 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ；如圖 3.5.2-2，以圖 3.5.2-1 直角三角形斜邊爲底，作一高爲 1 的第二個直角三角形，則第二個直角三角形斜邊長 $\sqrt{(\sqrt{2}^2)+1^2}=\sqrt{3}$ ；以此類推，圖 3.5.2-3、圖 3.5.2-4、圖 3.5.2-5、圖 3.5.2-6 的最後一個直角三角形斜邊長，分別爲 $\sqrt{4}$ 、$\sqrt{5}$ 、$\sqrt{20}$ 、$\sqrt{30}$ 。

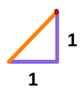


圖 3.5.2-1 Square Root Spiral（ 1 ）

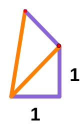


圖 3.5.2-2 Square Root Spiral（ 2 ）

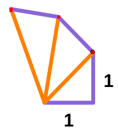


圖 3.5.2-3 Square Root Spiral（ 3 ）

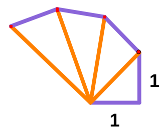


圖 3.5.2-4 Square Root Spiral（ 4 ）

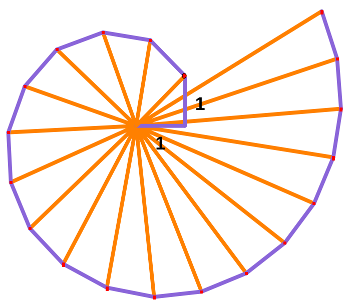


圖 3.5.2-5 Square Root Spiral（ 5 ）

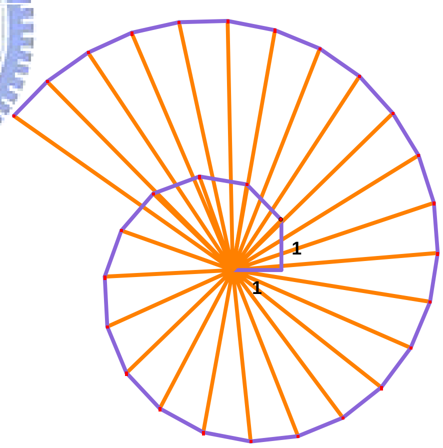


圖 3.5.2-6 Square Root Spiral（ 6 ）

若 N_i 代表 Square Root Spiral 中，第 i 個直角三角形的斜邊長，則

$N_i=\sqrt{{N_{i-1}}^2+1^2}$ ，$i\geq 1$ ，$N_0=1$

3.5.3 黃金縲線（ Golden Spiral ）

黃金縲線，簡單的說，便是以黃金比例的原則所成的縲線，將詳述如下。

黃金縲線的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

首先製作一黃金矩形，然後以矩形短邊爲邊長作一正方形，產生一個四分之一的圓弧，接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 n 個新的正方形和四分之一圓弧，所有圓弧所成縲線，即爲黃金縲線，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上黃金縲線的相關性質。

如圖 3.5.3-1，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，矩形 ABCD 是黃金矩形，也就是說 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，作正方形 ABFE，以 E 爲圓心，作 $\overset{\frown}{AF}$。$\frac{\overline{CD}}{\overline{FC}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，則矩形 FCDE 亦爲黃金矩形，用同樣的方法，我們能作出如圖 3.5.3-2 的曲線。

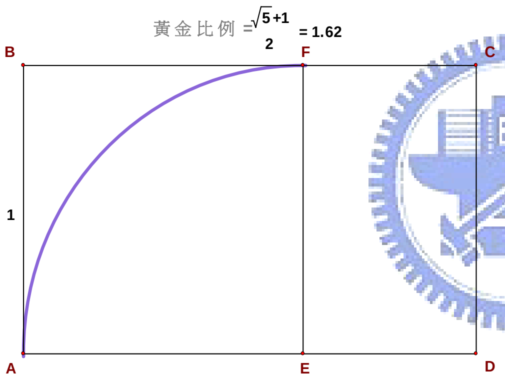


圖 3.5.3-1 黃金縲線（ 1 ）

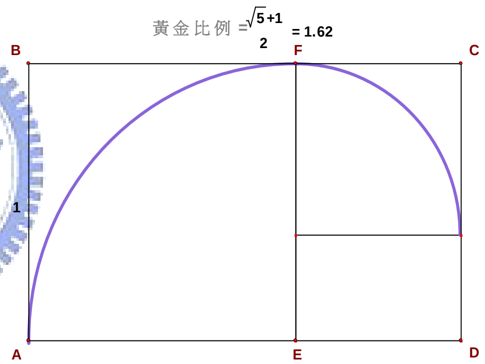


圖 3.5.3-2 黃金縲線（ 2 ）

圖 3.5.3-3 是使用同樣方法九次之後，所產生的情形，圖中的曲線，便是黃金縲線（ Golden Spiral ）。

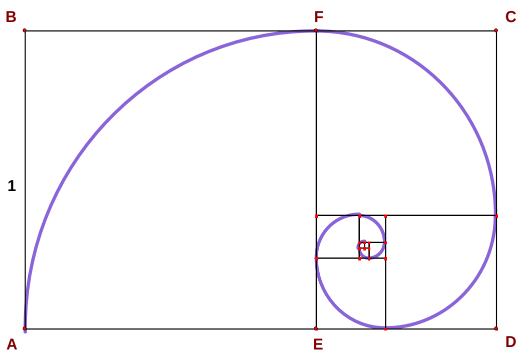


圖 3.5.3-3 黃金縲線（ 3 ）

第四章　自我相似圖構圖的研究

自我相似 (Self-Similarity)是指一個圖形的局部形狀和其整體形狀，在幾何結構上具有相似的特性，在許多理論及應用科學上有廣泛的研究，同時亦可視為藝術設計。自我相似圖的構圖法，主要是運用疊代的概念，重複的以「型」取代基本結構，如 MRCM (Multiple Reduction Copy Machine) 以多鏡頭影印機的概念出發，以影印的的範圍當作基準，重複影印；又如 L-system 運用語法呈現疊代關係；在如 IFS (Iterated Function System) 則以數學函數疊代計算等。

本章則運用動態幾何軟體 GSP 的遞迴功能，來設計自我相似性的圖形，並以互動的動態方式呈現，展現自我相似圖的多重面貌，提供教學及欣賞用途。設計主題有傳統的碎形，例如：Pythagorean Tree 等二十幾種構圖；以及運用線複製法則 (Line-based duplication) 的概念，以線段當作型用來描述幾何轉換，產生類似吸子(Attractor)現象的自我相似圖形。

畢氏樹（Pythagorean Trees）是一種以「線段和向量」為出發點，透過用 GSP 的動態環境，不斷自我取代而成的外觀像一顆大樹的圖形，如圖 4.1-2 所示。然局部細看，也有很多相似的小樹，這樣的現象會隨著距離的更接近，而一直重複，這就是所謂的自我相似性（self similarity）。 本章將對 Pythagorean Trees 的製作做詳細介紹。只要初具 GSP 能力，就能依步驟輕易上手。本章在 GSP 中探討的，便是這種用線段和向量，不斷自我遞迴取代而成的自我相似圖形，這在 GSP 中能得到很好的動態發揮。

相較於其它研究 Self-Similarity 的環境，如 Java、C 及各式自行撰寫的程式，GSP 內建進階遞迴(Iterate To Depth)的功能，能在較短時間內做出動態的呈現，是個極佳的研究環境。

4.1 動態畢氏樹的製作

畢達哥拉斯（Pythagoras）在西元前六世紀便提出了畢氏定理，即直角三角形的斜邊平方為其餘兩邊的平方和 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$，如圖 4.1-1 所示。我們以此為出發點，將這些圖形作自我相似的處理，便可以形成很漂亮的圖案，如圖 4.1-2 所示，稱為作畢氏樹（Pythagorean Trees），但原本 Pythagorean Trees 中的三角形 ABC，限定為直角三角形，我們將此直角三角形推廣為任意三角形，作更多的變化，如圖 4.1-3，便是一例。今以推廣的畢式樹的製作過程為例，讓對 GSP 有興趣的大家，能依樣畫葫蘆，做出令人驚艷的成果。

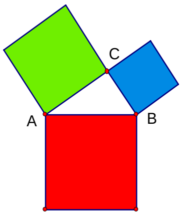


圖 4.1-1 畢氏樹基本圖

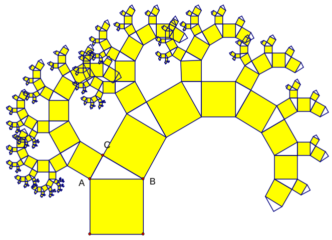


圖 4.1-2 畢氏樹

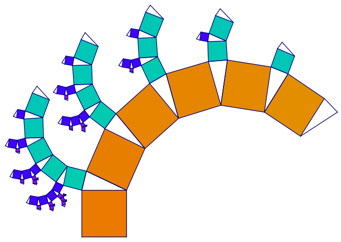


圖 4.1-3 畢氏樹的推廣

因爲想用「動態」的方式來呈現，藉由按鈕，便能自動產生自我相似圖形；我們分別從「製作按鈕介面」、「製作基礎圖形 Initiator」、「以按鈕介面完成動態自我相似圖形」等項目來說明。

1. **製作「按鈕介面」**

（1）作一射線$\overrightarrow{AB}$，並在其上任作一點C，如圖 4.1-4 所示。

圖 4.1-4 按鈕介面製作過程（1）

（2）依次選擇點 A、B、C，按上方選單「Measure/ Ratio」，測出$\frac{AC}{AB}$之值，並在$\frac{AC}{AB}$上按右鍵，將名稱改成「Step」，單位改成只取整數。

（3）依次選擇點 A、B，按上方選單「Transform/Mark Vector」，快按 C 點二次，以 C 爲中心點，選取 C 點，按上方選單「Transform/Translate」，產生 D 點。依次選擇點 B、A，按上方選單「Transform/Mark Vector」，快按 C 點二次，以 C 爲中心點，選取 C 點，按上方選單「Transform/Translate」，產生 E 點，如圖 4.1-5 所示。

圖 4.1-5 按鈕介面製作過程（2）

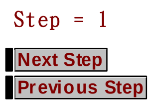


圖 4.1-6 按鈕介面製作過程（3）

（4）依次選擇點 C、D，按上方選單「Edit/ Action Buttons/ Movement」，產生一按鈕，在按鈕上按右鍵，將名稱改成「Next Step」。依次選擇點 C、E，按上方選單「Edit/

Action Buttons/ Movement」，產生一按鈕，在按鈕上按右鍵，將名稱改成「Previous Step」。於是我們按下「Next Step」按鈕，則「Step」＋1，按下「Previous Step」按鈕，則「Step」－1，如圖 4.1-6 便是完成的「按鈕介面」。

2. 製作基礎圖形 Initiator

（1）作一線段 $\overline{FG}$ ，並以此作成一正方形 FGHI，如圖 4.1-7 所示。

（2）另作一線段 $\overline{KL}$ ，在其上找一點 M，並將 M 點名稱改爲『調整三角形邊長』。依次選擇點 K、L、M，按上方選單「Transform/ Mark Ratio」，快按正方形 FGHI 上的 I 點二次，以 I 爲中心點，選取 H 點，按上方選單「Transform/ Dilate」，在 $\overline{HI}$ 上產生 J 點。於是我們可以拉動 M 點，來控制 J 點在 $\overline{HI}$ 上的移動，如圖 4.1-8 所示。

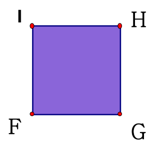


圖 4.1-7 畢氏樹基本圖製作過程（1）

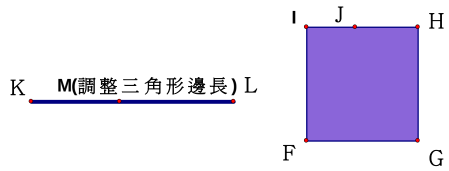


圖 4.1-8 畢氏樹基本圖製作過程（2）

（3）作一圓 O，在圓上作一∠POQ，依次選擇點 P、O、Q，按上方選單「Transform/ Mark Angle」，快按正方形 FGHI 上的 I 點二次，以 I 爲中心點，選取 J 點，按上方選單「Transform/ Rotate」，產生 R 點，連接 $\overline{IR}$ 、 $\overline{RH}$ 。至此我們可以拉動 P 點，來控制 R 點的轉動；拉動 M 點，來改變 ΔRHI 的邊長，如圖 4.1-9 所示。

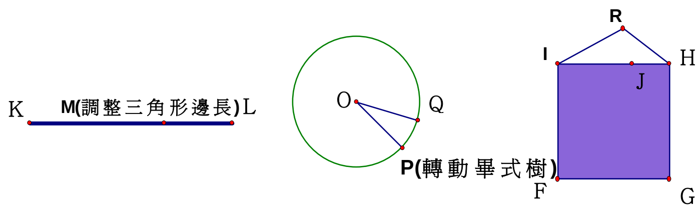


圖 4.1-9 畢氏樹基本圖製作過程（3）

3. 以「按鈕介面」來完成動態的自我相似圖形：

（1）因爲我們想讓產生的畢式樹有顏色上的變化，依次選擇點 I、R，按上方選單「Measure / Distance」，產生 $\overline{IR}$ 的距離。選取此 $\overline{IR}$ 的距離及正方形 FGHI 內部的顏色部份，按上方選單「Display/ Color/ Parametric/ OK」，則待會產生的相似正方形的顏色，就會因所對應 $\overline{IR}$ 長度的不同而改變。

（2）選取 F、G 二點及「按鈕介面」 中的「Step=1」參數，按住 Shift 鍵，按上方選單「Transform/ Iterate To Depth」，作好如圖 4.1-10 的設定，按下「Structure/ Add New Map」，作好如圖 4.1-11 的設定，按下「Iterate」即完成了。

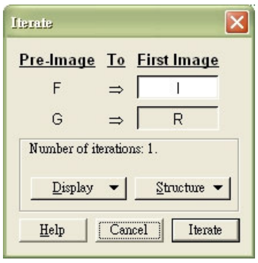


圖 4.1-10 畢氏樹遞迴設定（1）

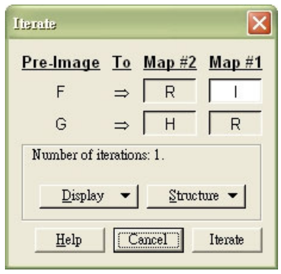


圖 4.1-11 畢氏樹遞迴設定（2）

隱藏了部份不需的資訊後的完成圖，如圖 4.1-12 所示，我們可以用「Next Step」、「Previous Step」按鈕，來觀察整個圖形的變化。新增的「Swing It」按鈕（製作 P 點在圓 O 上的動點按鈕即可），讓畢式樹能自行動態的轉動：

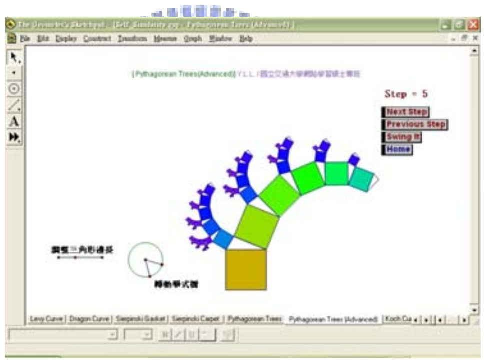


圖 4.1-12 畢式樹動態介面完成圖

Step 0：圖 4.1-13 中三角形為任意三角形

Step 1：分別在三角形兩邊上，以兩邊為邊長做正方形，並在新正方形上，同時做原三角形的相似形，如圖 4.1-14 所示；

接著重複疊代下去， Step = 9 的畢式樹如圖 4.1-15 所示。

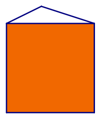


圖 4.1-13 畢式樹說明（1）

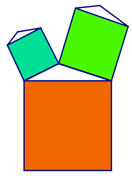


圖 4.1-14 畢式樹說明（2）

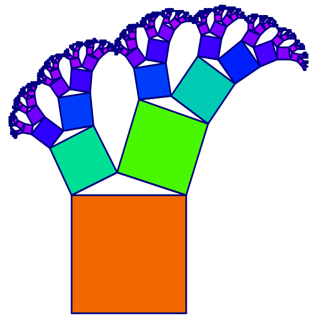


圖 4.1-15 畢式樹說明（3）

今對畢式樹的討論如下：

畢式樹是以其中的三角形為基礎，改變三個的度數，便改變三角形狀，也就能得到的不同畢式樹：

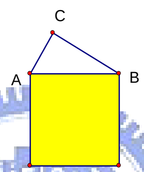


圖 4.1-16 改變畢式樹中基礎三角形度數

如圖 4.1-16，ΔABC 中，∠A=a，∠B=b，∠C=c，今若固定三角形中∠C 的度數， 例如∠C=90°，則 30°-90°-60°和 60°-90°-30°二種三角形所產生的畢式樹，是二個對稱的左右對稱同型的圖形。如下圖 4.1-17、4.1-18：

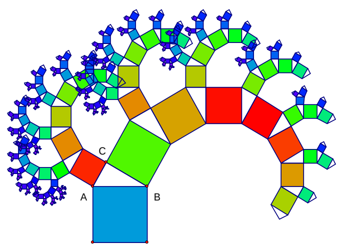


圖 4.1-17 60°-90°-30°畢式樹，Step=7

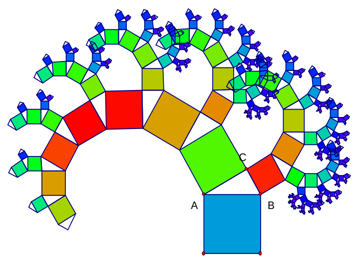
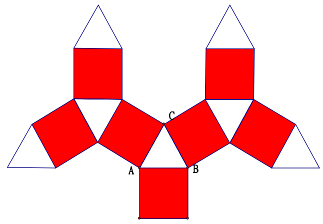
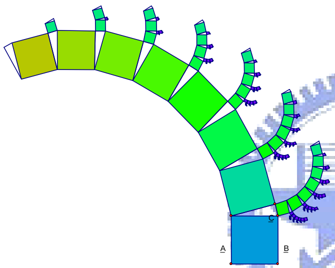
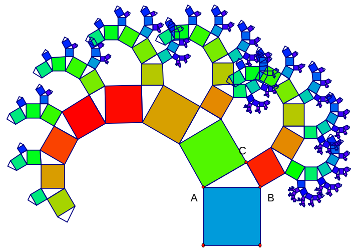
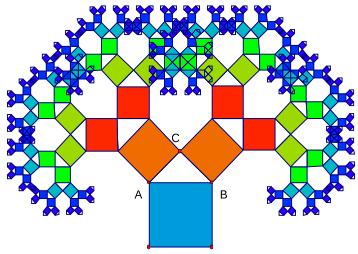
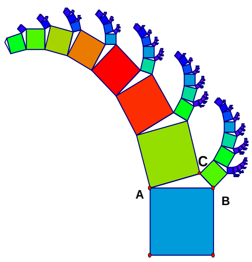
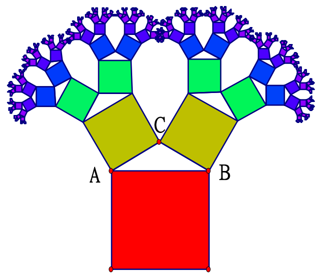


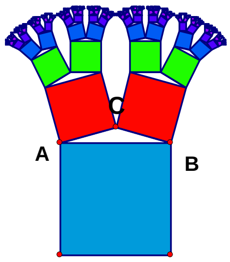
圖 4.1-18 30°-90°-60°畢式樹，Step=7

同理 a+b=180°-c=常數 k，b=k-a，則 a-c-(b-k)和(b-k)-c-a 二種三角形所產生的畢式樹，亦是二個對稱的左右對稱同型的圖形，在下面的討論中，同型的圖形，我們都將只列入其中一種。

今將∠C 固定(∠C 是三個角中最大的一個角)，並由小到大排列，觀察畢式樹的圖形變化，如表 4.1-1 中所示：

表 4.1-1 畢式樹的圖形變化

<table>
<tr><th>∠C
度數</th><th colspan="2">畢式樹形狀</th></tr>
<tr><td>60°</td><td colspan="2">
60°-60°-60°畢式樹，Step=2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">90°</td><td>
15°-90°-75°畢式樹，Step=7</td><td>
30°-90°-60°畢式樹，Step=7</td></tr>
<tr><td colspan="2">
45°-90°-45°畢式樹，Step=7</td></tr>
<tr><td>120°</td><td>
15°-120°-45°畢式樹，Step=7</td><td>
30°-120°-30°畢式樹，Step=7</td></tr>
</table>

∠C 度數	畢式樹形狀
150°	 15°-150°-15°畢式樹，Step=7

如圖 4.1-19 所示，在 Step=0 時，ΔABC 是直角三角形，若正方形 ABDE 的面積是 1，則因 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ ，得 Step=1 時所有正方形面積和是 2，如圖 4.1-20 所示。仿前，如圖圖 4.1-21，在 Step=3 時的所有正方形面積和是 4；同理，在 Step = n 時，所有正方形面積和則是 n+1。

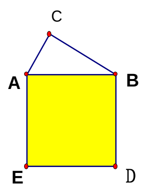


圖 4.1-19 畢式樹正方形面積和說明（1）

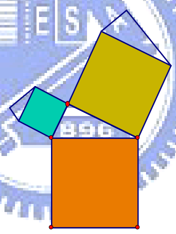


圖 4.1-20 畢式樹正方形面積和說明（2）

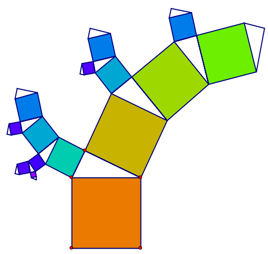


圖 4.1-21 畢式樹正方形面積和說明（3）

以類似於構作 Pythagorean Trees 的操作方法，針對適當的基本圖形，可以做出本文裏的各個圖形；然各圖形有其個別特殊製作之處，在範例中作扼要的說明。

4.2 自我相似圖形在 GSP 環境中的動態呈現

在本節中，將在 GSP 環境中，構作若干具有自我相似性的圖形，分成十個小節作個別的討論。

4.2.1 Levy Curve

由法國數學家 Paul Levy 首先提出；

Levy Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一條線段開始，

Step 0：以這條線段為底邊（斜邊），製作一個等腰直角三角形，然後拿掉這個三角形的底邊，如圖 4.2.1-1 所示。

Step 1：將曲線中的每一個線段，都重複 Step 0 的動作，如圖 4.2.1-2；

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Levy Curve，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Levy Curve 的相關性質。Step=10 的 Levy Curve 如圖 4.2.1-3 所示。

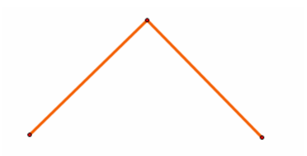


圖 4.2.1-1 Levy Curve 基礎圖

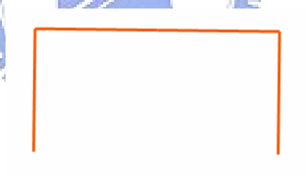


圖 4.2.1-2 Levy Curve 遞迴 1 次

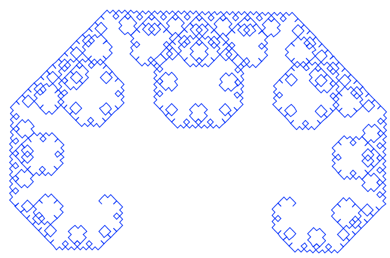


圖 4.2.1-3 Levy Curve

4.2.2 Dragon Curve

Dragon Curve 是將 Levy Curve 作一點小變化而到；是 Martin Gardner 於 1967 年投稿於 Scientific American 的數學遊戲之一，Mandelbrot 稱之為 "Harter-Heighway" Dragon Curve.

Dragon Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一條線段開始，

Step 0：以這條線段為底邊（斜邊），製作一個等腰直角三角形，然後拿掉這個三角形的底邊，如圖 4.2.2-1 所示。

Step 1：將曲線中的每一個線段都重複 Step 0，但是依序改變等腰直角三角形的生成方

向。

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Dragon Curve，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Dragon Curve 的相關性質。圖 4.2.2-3 是 Step=10 的 Dragon Curve。

圖 4.2.2-1 Dragon Curve 基礎圖

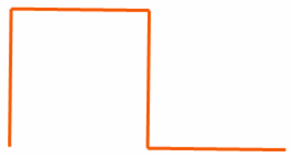


圖 4.2.2-2 Dragon Curve 遞迴 1 次

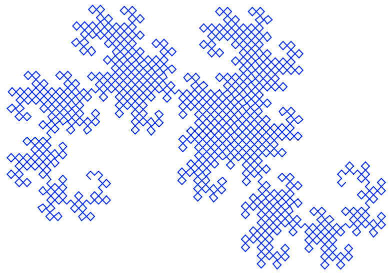


圖 4.2.2-3 Dragon Curve

4.2.3 Sierpinski Gasket & Carpet

由波蘭數學家 W. Sierpinski 於 1916 年提出。從一個實心的正三角開始：

Sierpinski Gasket 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

Step 0：將三角形每一邊的中點連線，會分割成四個小正三角形，我們把中央的正三角形拿掉，會剩下其餘的三個正三角形，如圖 4.2.3-1：

Step 1：將每一個實心的小角形都重複 Step 0

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Sierpinski Gasket，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Sierpinski Gasket 的相關性質。圖 4.2.3-3 是 Step=5 的 Sierpinski Gasket。

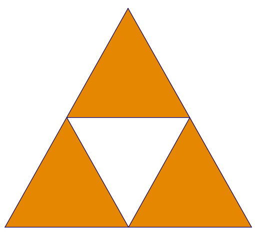


圖 4.2.3-1 Sierpinski GaskeT 基礎圖

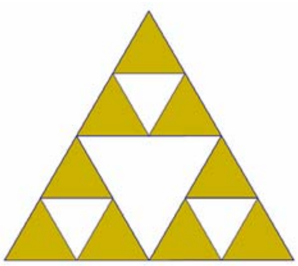


圖 4.2.3-1 Sierpinski Gasket 遞迴 1 次

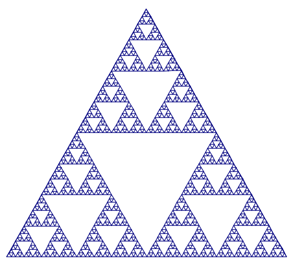


圖 4.2.3-3 Sierpinski Gasket

Sierpinski 後來又提出了另一個 Sierpinski Carpet 的圖形。

Sierpinski Carpet 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一個實心的正三角開始，

Step 0：將正方形分成相同的九個小正方形，我們把中央的正方形拿掉，會剩下其餘的

八個正三角形，如圖 4.2.3-4：

Step 1：將每一個實心的小正方形都重複 Step 0

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Sierpinski Carpet，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Sierpinski Carpet 的相關性質。圖 4.2.3-6 是 Step=3 的 Sierpinski Carpet。

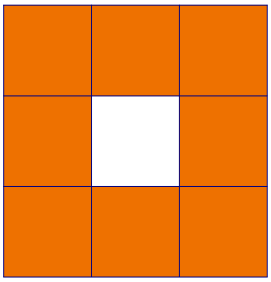


圖 4.2.3-4 Sierpinski Carpet 基礎圖

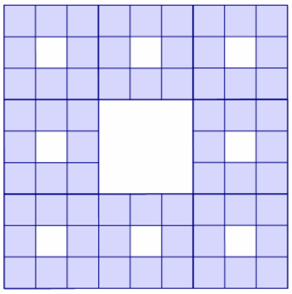


圖 4.2.3-4 Sierpinski Carpet 遞迴 1 次

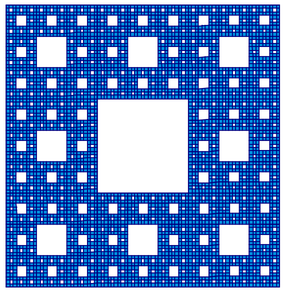


圖 4.2.3-6 Sierpinski Carpet

將 Sierpinski Carpet 以立體的正六面體來呈現，可如圖 4.2.3-7 所示，產生更美麗的變化。

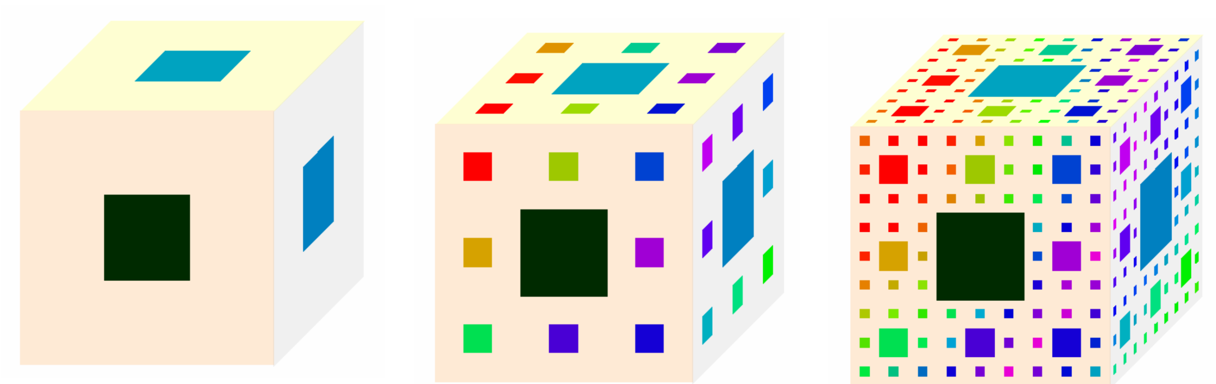


圖 4.2.3-7 Sierpinski Carpet 立體圖

4.2.4 Koch Curve

由瑞典數學家 Helge von Koch 於 1904 年提出；由於這種曲線的片段很像雪花的結晶體， 所以又叫做 Snowflake Curve。 在這個過程中，數學家們發展出了一套以 Initiators and Generators 為出發點的碎形繪製法，提供了碎形圖形的多樣性。許多類似於 Koch curve 的曲線都是由相互接合的線段所組成，它們的複雜性就像是大自然中的海岸線那般。

Koch Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一段單位長度的線段開始，

Step 0：將這條線段分成三等份，然後以中間的線段為底邊，製作一個三邊等長的三角形，然後拿掉這個正三角形的底邊（此時，$L=(4/3)^1$），如圖 4.2.4-1 所示：

Step 1：將曲線中的每一個線段都重複Step 0（此時，$L=(4/3)^2$）；

Step 2：重複Step 1（此時，$L=(4/3)^3$）。

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生Step n的Koch Curve，次數n可用按鈕的方式作加減，隨著n值的加減，便可觀察n值不同時，視覺上、實際上Koch Curve的相關性質。此時，$L=(4/3)^n$，圖 4.2.4-3 是Step=3 的Koch Curve。

圖 4.2.4-1 Koch Curve 基礎圖

圖 4.2.4-2 Koch Curve 遞迴 1 次

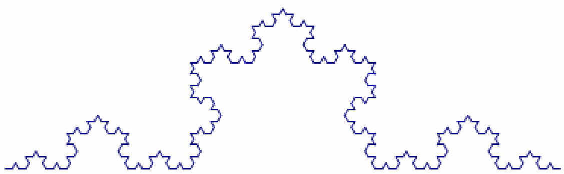


圖 4.2.4-3 Koch Curve

在上圖中，我們可以清楚的看見 Koch Curve 有四個相同的組成結構，但是再仔細觀察會發現，其實有十六個相同的小結構，而實際上上圖的 Koch Curve 是由有六十四個相同的小結構所組成的，當重複無限次的疊代步驟之後，你會發現任一個小結構放大之後都會與其他的結構相似，而且此時的 Koch Curve 是連續卻不可微分的（無法求其任一點的唯一切線），雖然圖形是限定在一個等腰三角形的狹幅區域之內，但是它的線段總長度卻是無限長。

如果我們把三段 Koch Curve 接合成一個正三角形，便會形成雪花的結晶體，我們稱作 Koch Snowflake， Step=3 的 Koch Snowflake 如圖 4.2.4-4 所示。如果我們把三段 Koch Curve 顛倒曲線彎曲的方向，並接合成一個正三角形，稱作 Koch Antisnowflake， Step=3 的 Koch Antisnowflake 如圖 4.2.4-5 所示。如同時作 Koch Snowflake 及 Koch Antisnowflake，

可得一漂亮的花紋， Step=4 的圖形如圖 4.2.4-6 所示。

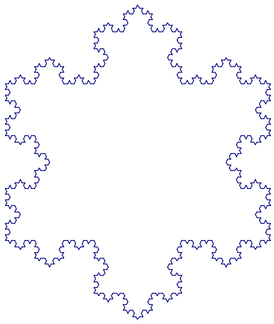


圖 4.2.4-4 Koch Snowflake

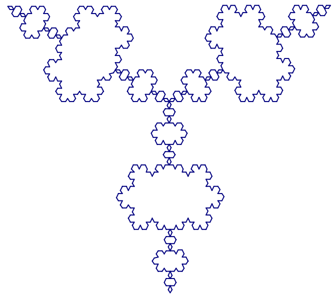


圖 4.2.4-5 Koch Antisnowflake

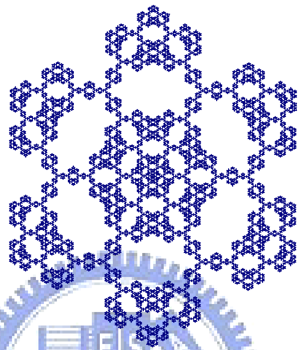


圖 4.2.4-6 Koch Snowflake & Antisnowflake

4.2.5 Cesaro Curve

Cesaro Curve 是 Koch curve 的簡單變化之一。產生 Cesaro Curve 比例 3：1：3 的方法如下：

Cesaro Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一條線段開始；

Step 0：將這條線段分成比例為 3：1：3 的三部份，然後以中間的線段為底邊，以兩端線段的長度為腰長製作一個等腰銳角三角形，然後拿掉這個三角形的底邊，如圖 4.2.5-1 示；

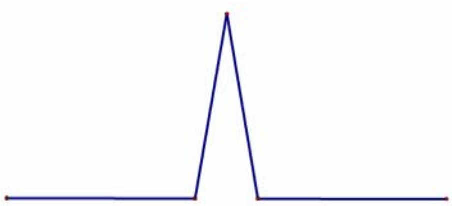


圖 4.2.5-1 Cesaro Curve 基礎圖

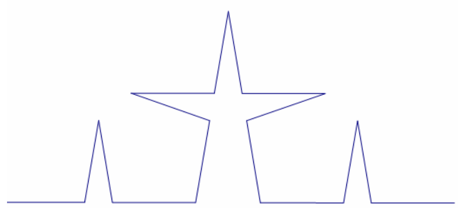


圖 4.2.5-2 Cesaro Curve 遞迴 1 次

Step 1：將曲線中的每一個線段都重複 Step 0 的動作。

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Cesaro Curve，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Cesaro Curve 的相關性質。圖 4.2.5-3 是 Step=5 的 Cesaro Curve。 若將 Step 0 中的線段分成比例為 30：1：30，圖 4.2.5-4 是 Step=5 的圖形。

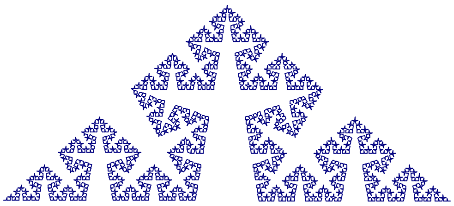


圖 4.2.5-3 Cesaro Curve，3：1：3

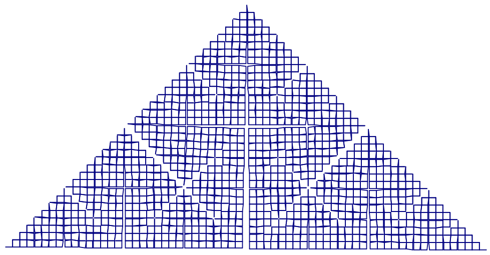


圖 4.2.5-4 Cesaro Curve，30：1：30

我們發現從 Koch Curve 與 Cesaro Curve，可以有許多的變化；於是在 GSP 中作了任意調整初始線段比例的介面，拉動中間的控制點，便可拉動整個圖形，動態地觀察其中的變化，圖 4.2.5-5、4.2.5-6 即為其中的二種變化。

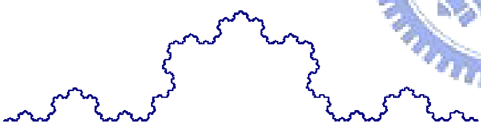


圖 4.2.5-5 Cesaro Curve 的變化（1）

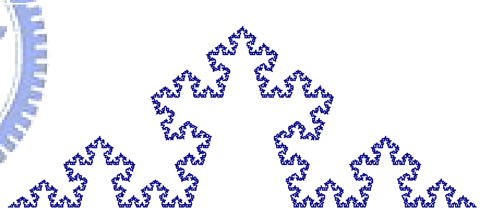


圖 4.2.5-6 Cesaro Curve 的變化（2）

4.2.6 Peano Curve

G. Peano (1890)與 D. Hilbert (1891)分別發現了能夠填滿平面的曲線，或者說他們發現了某種在有限的平面區域中曲線最有效率的「伸展」方式；以生物的觀點來說，如果有機體必須有效的運用所處的有限空間，它們很有可能是採取這樣的組織結構。

Peano Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一條線段開始；

Step 0：分成三等份，依照圖 4.2.6-1 所示而變化，其中每一個線段都是在端點上互相結合的，而並非交錯分割

Step 1：將曲線中的每一個線段都重複 Step 0。

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Peano Curve，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Peano Curve 的相關性質。圖 4.2.6-3 是 Step=2 的 Peano Curve。

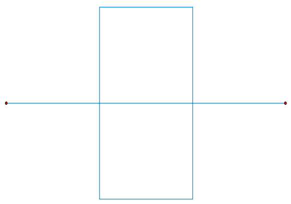


圖 4.2.6-1 Peano Curve 基礎圖

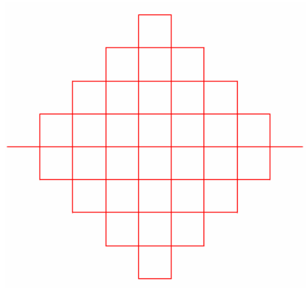


圖 4.2.6-2 Peano Curve 遞迴 1 次

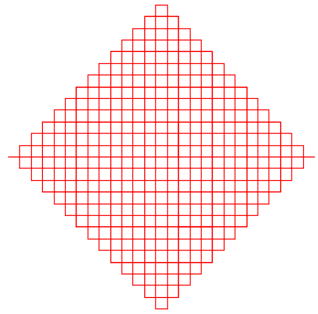


圖 4.2.6-3 Peano Curve

Another Hilbert Curve 是一種以圖 4.2.6-4 爲單位，而以自我相似方式產生的圖形：

Step 0：畫出如圖的圖形，其中各線段長度均相同。

Step 1：將每一條線段都重複 Step 0；

圖 4.2.6-6 是 Step=3 的 Another Hilbert Curve。

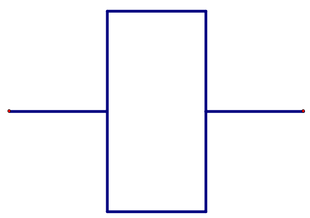


圖 4.2.6-4 Another Hilbert Curve 基礎圖

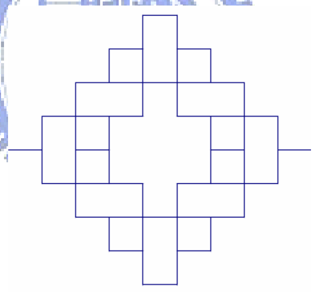


圖 4.2.6-4 Another Hilbert Curve 遞迴 1 次

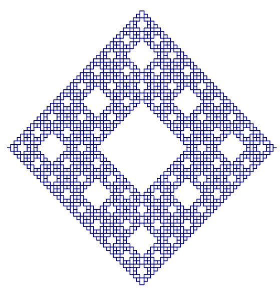


圖 4.2.6-6 Another Hilbert Curve

4.2.7 H Fractal

以一種狀似 H 形爲單位，而以自我相似方式產生的圖形。

H Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

從一條線段開始；

Step 0：從線段端點的垂直方向，延伸出特定長度的線段，如圖 4.2.7-1 所示；

Step 1：將上個步驟所延伸的每一個線段都重複 Step 0；

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 H Fractal，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 H Fractal 的相關性質。圖

4.2.7-3 是 Step=5 的 H Fractal。

圖 4.2.7-1 H Fractal 基礎圖

圖 4.2.7-2 H Fractal 遞迴 1 次

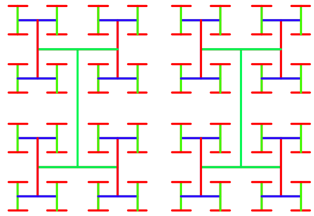


圖 4.2.7-3 H Fractal

4.2.8 Tree Fractal

我們可以從 H Fractal 發展出典型的（Binary）Tree Fractal，其關鍵點在於 H Fractal 中的角度的變化，但是我們必須先在 H Fractal 圖形的中央多畫出一條線段，以代替 Tree Fractal 的樹幹。

Tree Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

畫出一條垂直線段；

Step 0：從線段上方端點，延伸出二條可調整長度、旋轉角度的線段，如圖 4.2.8-1 所示。

Step 1：將上個步驟所延伸的每一個線段都重複 Step 0.

接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的 Tree Fractal，次數 n 可用按鈕的方式作加減，隨著 n 值的加減，便可觀察 n 值不同時，視覺上、實際上 Tree Fractal 的相關性質。圖 4.2.8-2 是調整 Step 0 中的二條線段，為垂直原線段的角度，並適當調整長度，Step=5 的 Tree Fractal，我們會發現它就成了 H Fractal；圖 4.2.8-3 是改變角度和長度之後的一種 Tree Fractal.

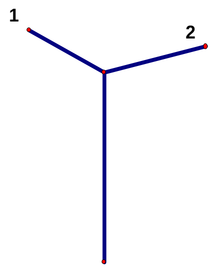


圖 4.2.8-1 Tree Fractal 基礎

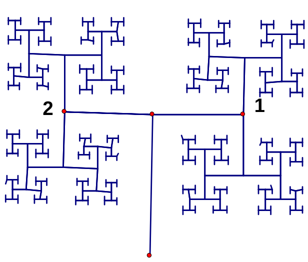


圖 4.2.8-2 Tree Fractal（1）

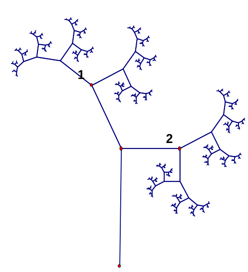


圖 4.2.8-3 Tree Fractal（2）

將產生 Tree Fractal Basic 的方法中，Step 0 的二條線段，增加為四條線段，如圖 4.2.8-4

所示，我們將能得到更多的變化。圖 4.2.8-5、4.2.8-6、4.2.8-7、4.2.8-8、等四圖是 Step=5 的 Tree Fractal 幾種美麗的變化：

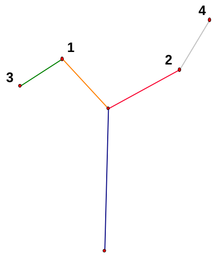


圖 4.2.8-4 Tree Fractal 基礎圖（四枝幹）

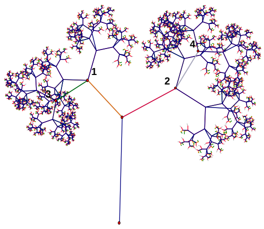


圖 4.2.8-5 Tree Fractal 變化（1）

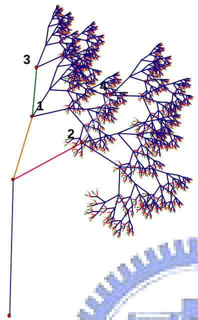


圖 4.2.8-6 Tree Fractal 變化（2）

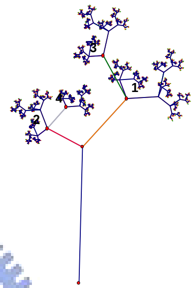


圖 4.2.8-7 Tree Fractal 變化（3）

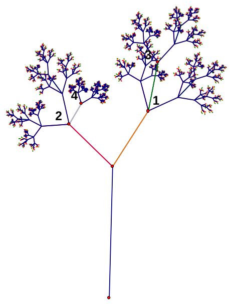


圖 4.2.8-8 Tree Fractal 變化（4）

4.2.9 其它自我相似圖形

更多的自我相似圖形，均能使用 GSP 來作動態地呈現，在本小節中，便只列出圖形的基礎圖形(我們稱『Initiator』)，及所生成的自我相似圖形，讓大家用欣賞的角度來看看更多自我相似圖形的美。

1. Katherine's Fractal

Katherine's Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-1 的 K 形為單位，其中 $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CE}$，接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。圖 4.2.9-3 是 Step=4 的 Katherine's Fractal。

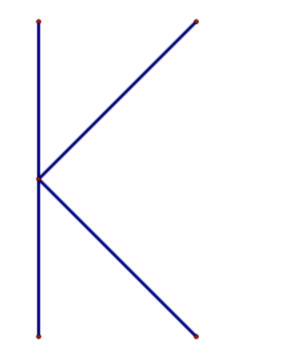


圖 4.2.9-1 Katherine's Fractal 基礎圖

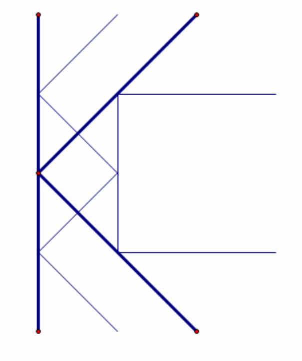


圖 4.2.9-2 Katherine's Fractal 遞迴 1 次

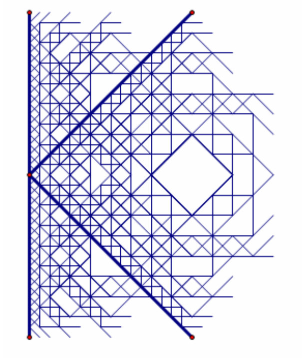


圖 4.2.9-3 Katherine's Fractal

2. Lane's Fractal

Lane's Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以五角星形並加上數條線段爲單位，如圖 4.2.9-4 所示；將突出五角星形的5 個線段都重複Step 0；接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生Step n的自我相似圖，次數n可用按鈕的方式作加減。Step=3 的Lane's Fractal如圖 4.2.9-6 所示。

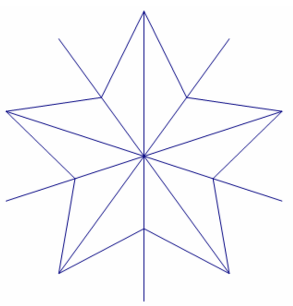


圖 4.2.9-4 Lane's Fractal基礎圖

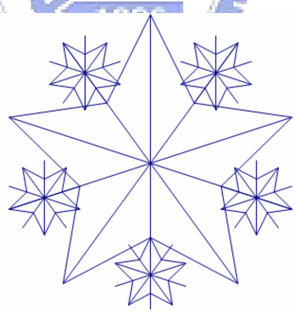


圖 4.2.9-5 Lane's Fractal遞迴一次

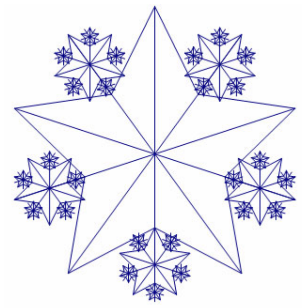


圖 4.2.9-6 Lane's Fractal

3. Anderson's Fractal

Anderson's Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-7 爲單位，將較矮的三角形形的三邊都重複 Step 0，接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=5 的 Anderson's Fractal 如圖 4.2.9-9 所示。

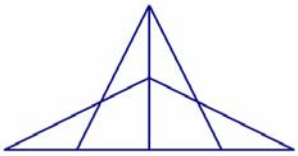


圖 4.2.9-7 Anderson's Fractal 基礎圖

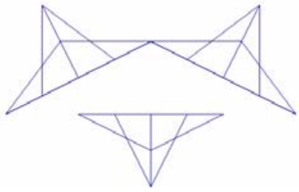


圖 4.2.9-8 Anderson's Fractal 遞迴一次

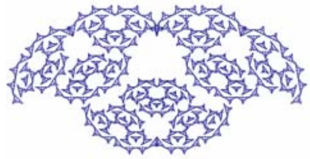


圖 4.2.9-9 Anderson's Fractal

4. Hat Curve

Hat Curve 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以形如帽子的圖 4.2.9-10 為單位，其中各線段長度均相同；將 5 個線段都重複 Step 0；接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=4 的 Hat Curve 如圖 4.2.9-12 所示。

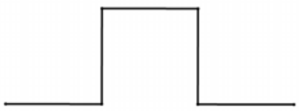


圖 4.2.9-10 Hat Curve 基礎圖

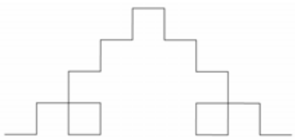


圖 4.2.9-11 Hat Curve 遞迴一次

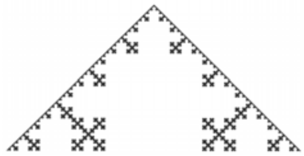


圖 4.2.9-12 Hat Curve

5. Circle-based Fractal

Circle-based Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-13 為單位，一個大圓中有二個小圓，其中小圓直徑等於大圓半徑；接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=4 的 Circle-based Fractal.如圖 4.2.9-15 所示。

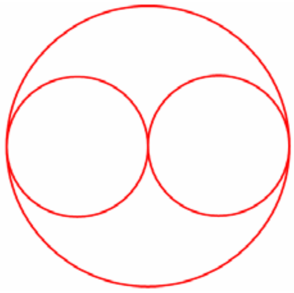


圖 4.2.9-13 Circle-based Fractal 基礎圖

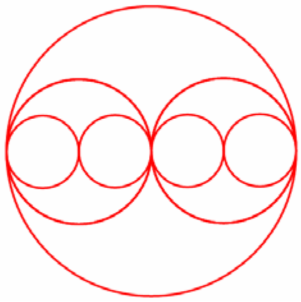


圖 4.2.9-14 Circle-based Fractal 遞迴一次

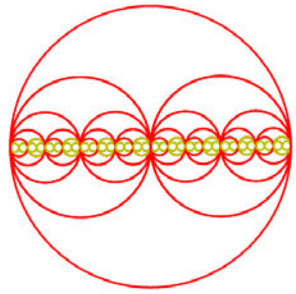


圖 4.2.9-15 Circle-based Fractal

6. Four-Circle Fractal

Four-Circle Fractal 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-16 為單位，一個大圓中有四個小圓，其中小圓直徑等於大圓半徑；接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=3 的 Four-Circle Fractal 如圖 4.2.9-18 所示。

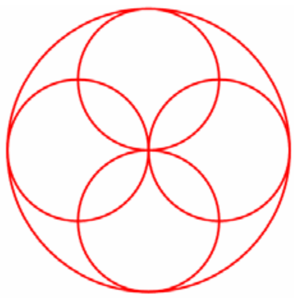


圖 4.2.9-16 Four-Circle Fractal 基礎圖

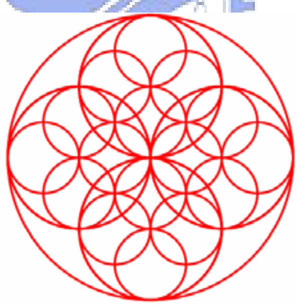


圖 4.2.9-17 Four-Circle Fractal 遞迴一次

圖 4.2.9-18 Four-Circle Fractal

7. Grouping of Triominoes

Grouping of Triominoes 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-19 為單位，一個大 L 型中有四個小 L 型全等；接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=3 的 Grouping of Triominoes 如圖 4.2.9-21 所示。

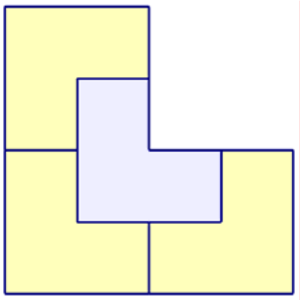


圖 4.2.9-19 Grouping of Triominoes 基礎圖

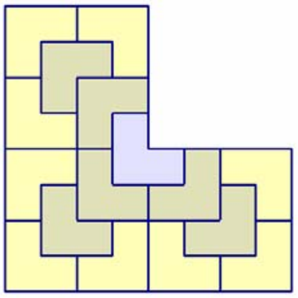


圖 4.2.9-20 Grouping of Triominoes 遞迴一次

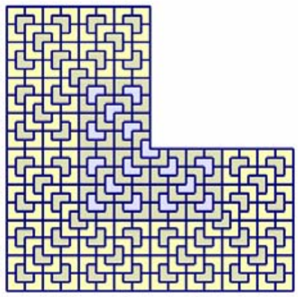


圖 4.2.9-21 Grouping of Triominoes

8. Napoleon's Triangle

Napoleon's Triangle 的 GSP 檔案中，主要是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。利用遞迴功能製作的過程簡介如下：

以圖 4.2.9-22 爲單位，其中$\triangle ABC$是任意三角形，並在三邊上各作一正三角形；將三個正三角形的邊上，都補上$\triangle ABC$和另二個正三角形。接下來以圖形式遞迴的方式，不斷產生 Step n 的自我相似圖，次數 n 可用按鈕的方式作加減。Step=2 的 Napoleon's Triangle 如圖 4.2.9-24 所示。Napoleon's triangle 能填滿一個平面。

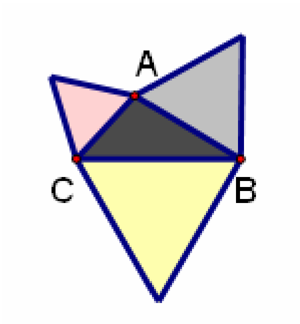


圖 4.2.9-22 Napoleon's Triangle 基礎圖

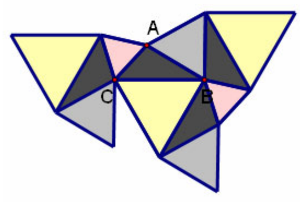


圖 4.2.9-23 Napoleon's Triangle 遞迴一次

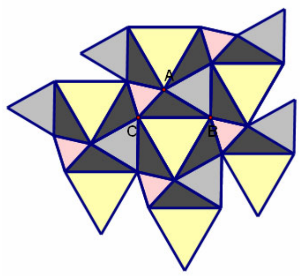
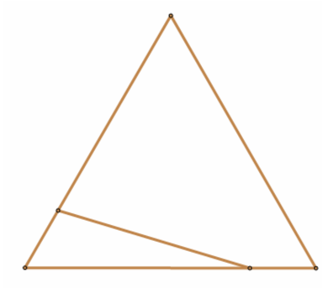
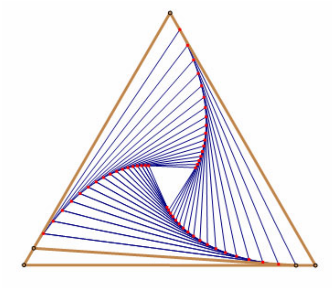
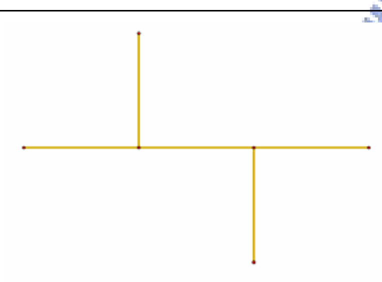
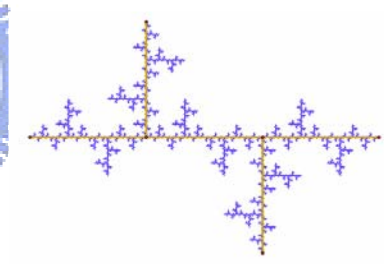
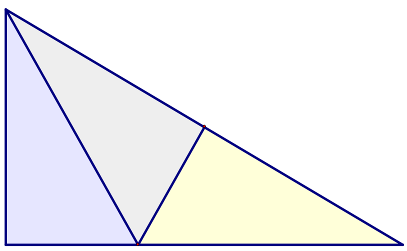
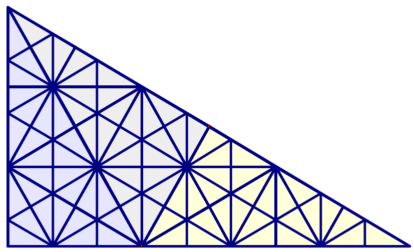
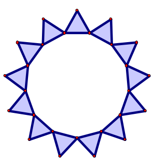
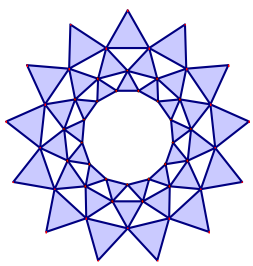


圖 4.2.9-24 Napoleon's Triangle

9. 自我相似圖集

更多的自我相似圖集，如表格 4.2.9-1 所示，同樣是以圖形式的遞迴方法製作，並以步驟化的介面呈現。

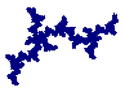
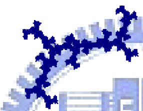
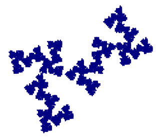
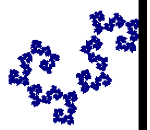
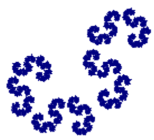
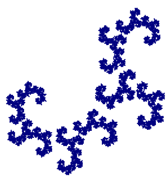
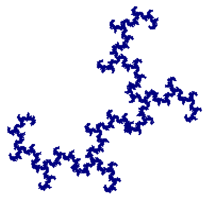
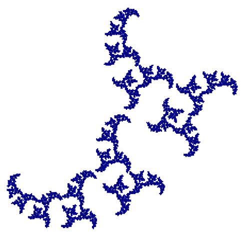
表 4.2.9-1　自我相似圖集

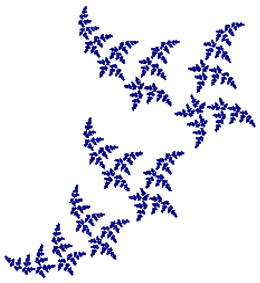
Initiator	自我相似圖形
	
	
	
	

4.2.10 『二條線』所成自我相似圖的探討

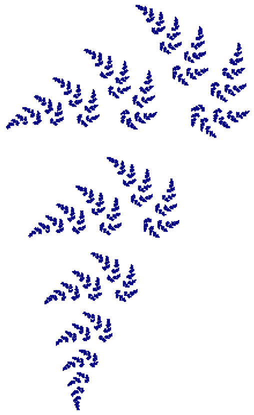
接下來，我們要討論一個有趣的問題，以「線段」爲出發點的自我相似圖形，最小的單位便是『二條線』！。『二條線』能作出什麼呢？Levy Curve、 Dragon Curve 是二個明顯的例子，接下來我們要討論的便是『二條線』的各種可能。在這裡，我們利用「基準線」來控制圖形的變化，利用「基準線」調整下一次線段生成的比例，和下一次線段生成的旋轉角度。今調整下一次線段生成的比例，固定爲原二條線的 60%，Stp=10，變動下一次線段生成的「各種旋轉角度」。二條線和基準線形成二個函數，作平移、旋轉、縮放，形成自我相似，所成的圖形如表 4.2.10-1：

表 4.2.10-1 『二條線』所成自我相似圖

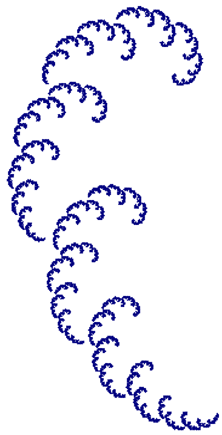
 基準線轉動 15°	 基準線轉動 30°	 基準線轉動 45°	 基準線轉動 60°
 基準線轉動 75°	 基準線轉動 90°	 基準線轉動 105°	 基準線轉動 120°



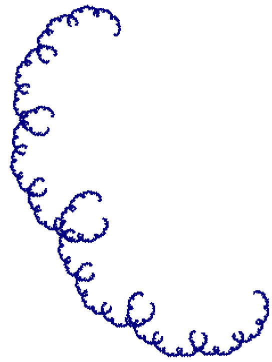
基準線轉動 135°



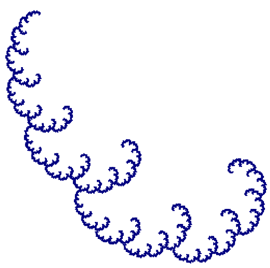
基準線轉動 150°



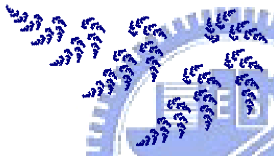
基準線轉動 165°



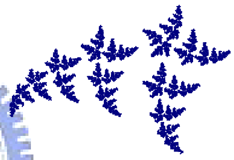
基準線轉動 180°



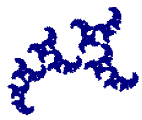
基準線轉動 195°



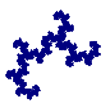
基準線轉動 210°



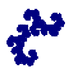
基準線轉動 225°



基準線轉動 240°



基準線轉動 255°

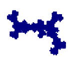


基準線轉動 270°

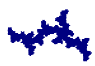
基準線轉動 285°

基準線轉動 300°

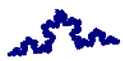
基準線轉動 315°



基準線轉動 330°



基準線轉動 345°



基準線轉動 360°

表 4.2.10-1 是在基準線每變動 15°，Step=10，共 24 個『二條線』所成的自我相似圖形。至於調整下一次線段生成的比例，固定爲原二條線的 60%的原因是，新生成的線段，必需比原線段短，才能收斂爲固定的圖形。『二條線』的變化，令人驚艷！圖 4.3.10-3 是 Julia Set 的四種圖形表現，我們更發現『二條線』所成自我相似圖，和 Julia Set 的圖形有許多相似之處。

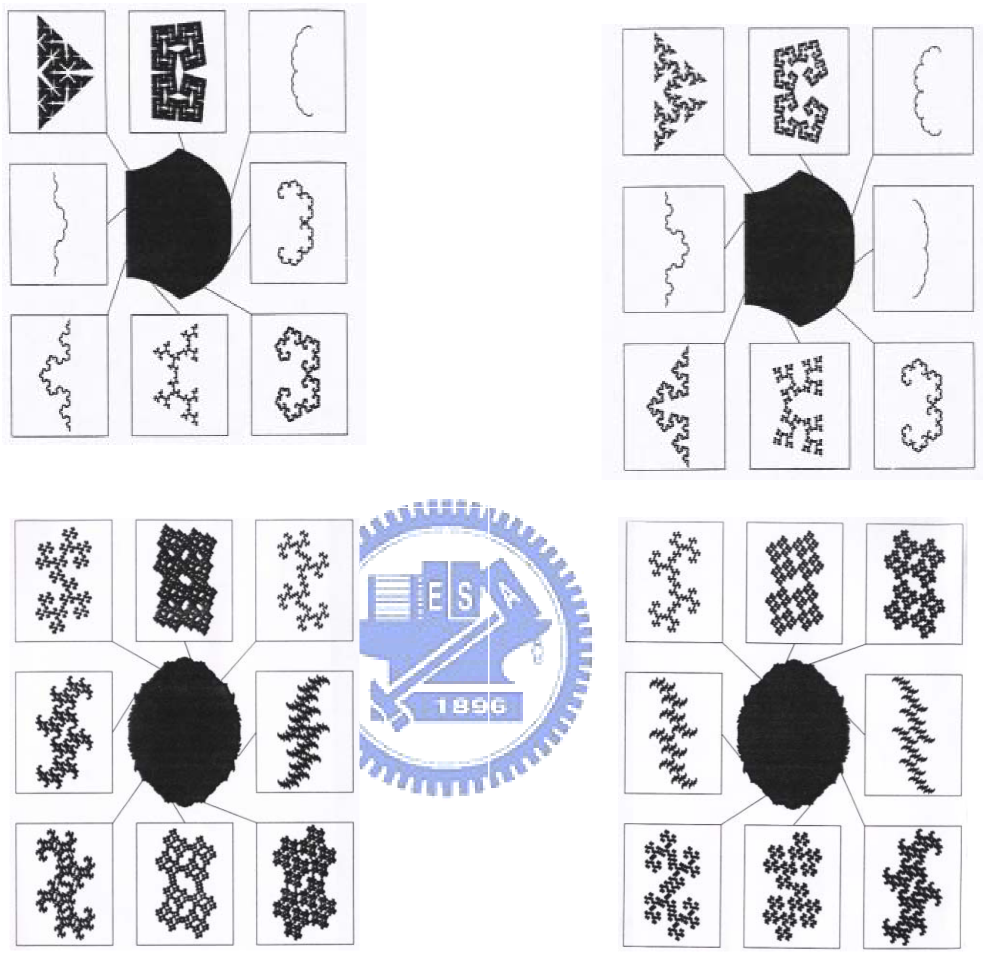


圖 4.2.10-3 Julia Set

在大自然中，充滿了『自我相似』(Self-Similarity)，如 4.2.8 節中的 Tree Fractal，簡單的圖形，經過特定的變化，就能長出各式不同的樹。舉凡各式動植物、自然現象等，都存在著『自我相似』，它讓我們『看』到了數學的和自然的美麗，更讓人覺得，數學其實也是可以讓更多人欣賞的。它是個有趣的主題，但以往想從事研究，均需鑽研艱深的程式語言，透過本章的介紹，讓我們都能使用 GSP 作動態的呈現。

自我相似圖形，看似複雜，其實不然，它主要由基礎圖形 Initiator 而成，若再加入「基準線」控制圖形的變化，便有更多的可能，4.2.10 中『二條線』的變化，就是個明顯的例子。縱觀全文，我們透過適當點的選取，使用 GSP 中深層遞迴(Iterate To Depth)功能，每一個 Step 的自我相似，其實都只用到了『旋轉』+『水平和垂直方向等比例縮

放』的精神，產生新的自我相似圖形，這是嚴格的自我相似(Strict Self_Similarity)的定義，未等比例縮放的自我相似，則不在本章的討論範圍之內，也就是本章的例子，也只是個自我相似圖的子集合，更深的討論，則還有更多的努力空間。