

第五章 GSP 動態環境下數學問題的研究

全任重（民 85）認為數學圖解能為學習者帶來靈感。如果能把數學圖解繪製過程，順著邏輯推理的次序，逐步展示出來，則學習者會獲得更多的靈感。

將問題作「特殊化」或「一般化」，有助於問題之探索。本章將運用「特殊化與一般化」的概念，在 GSP 動態環境下，作數學問題的研究。

5.1 「特殊化與一般化」的運用

本節將介紹運用「特殊化與一般化」的概念，於三個主題的數學問題研究：數學定理之間的關聯性、數學問題之間的關聯性、特殊數學問題本身的一般化。三個小節分別使用三個例子來呈現。

5.1.1 由餘式定理所延伸出的幾何定理探討

本小節是運用「特殊化與一般化」的概念，於數學定理之間關聯性的一個例子的呈現。

談幾何非談餘弦定理不可。餘弦定理既承畢式定理於先，又啓內積的概念於後，在幾何學中具樞紐的地位，它的證明值得一提(張海潮，民 93)。

如圖 5.1.1-1，在銳角 $\triangle ABC$ 的三邊上，各作一正方形。相同顏色的長方形，面積皆相等，則 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C$ ，故得証餘弦定理。

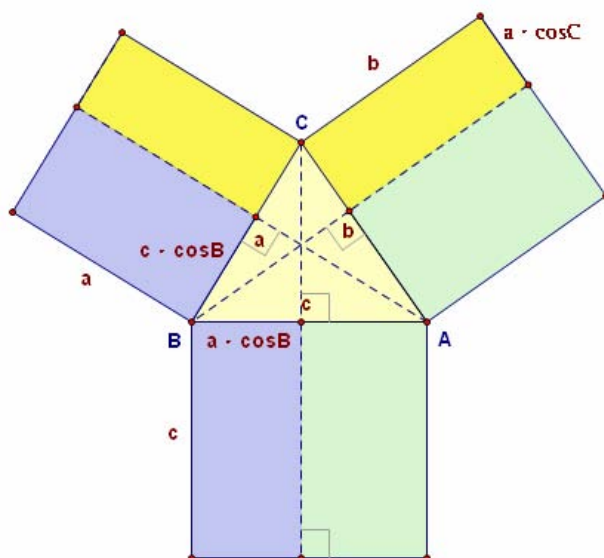


圖 5.1.1-1 圖說證明餘弦定理

如圖 5.1.1-2，當 $\angle C=90^\circ$ ， $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos 90^\circ = 0$ ，則 $a^2 + b^2 = c^2$ （畢式定理）。

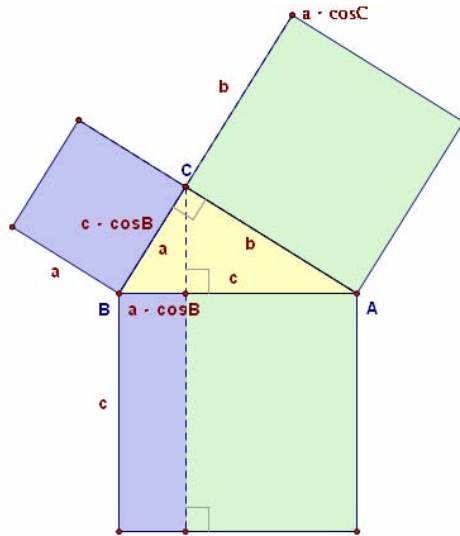


圖 5.1.1-2 圖說證明畢式定理

任意拉動銳角 $\triangle ABC$ 的三個頂點，都不會改變如上所證明的餘弦定理和畢式定理。

接下來，我們作一個特例的討論，將 $\triangle ABC$ 中，使 $\angle B=120^\circ$ ，面積 T ，在三邊各作一個正三角形，面積分別是 $T[A]$ 、 $T[B]$ 、 $T[C]$ ，如圖 5.1.1-3。作出六個 $\triangle ABC$ 的全等形，如圖 5.1.1-4。

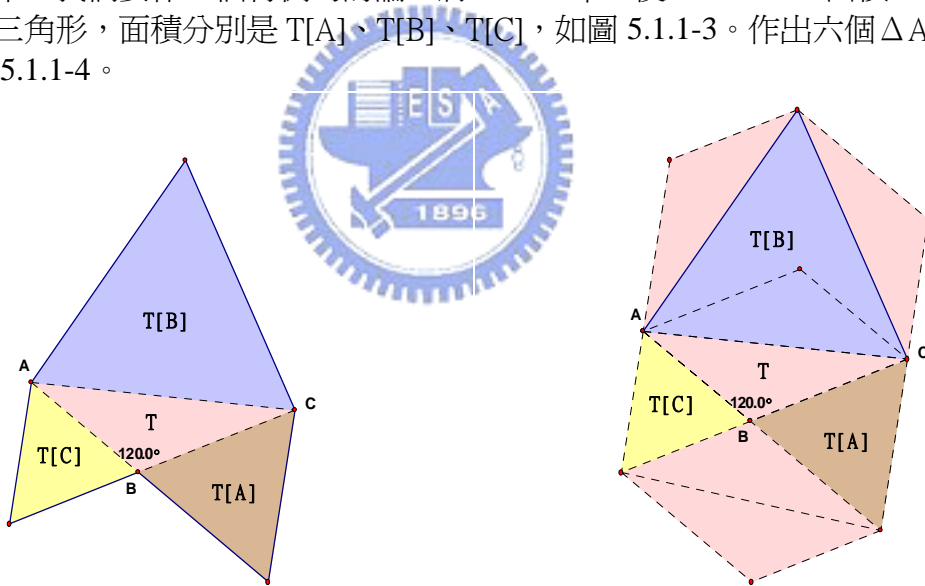


圖 5.1.1-3 Another Pythagorean-like Theorem 特例圖 圖 5.1.1-4 Another Pythagorean-like Theorem 特例圖

說證明 (1)

說證明 (2)

以 C 為中心點，將圖形旋轉成如圖 5.1.1-5。繼續旋轉圖形，會發現圖 5.1.1-6 中的二個六邊形重合。

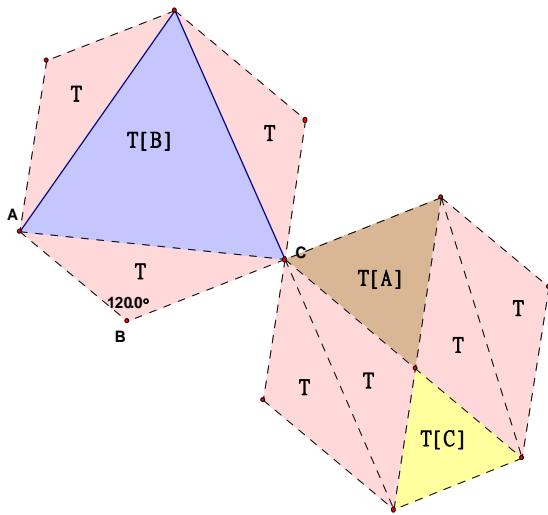


圖 5.1.1-5 Another Pythagorean-like Theorem

特例圖說證明 (3)

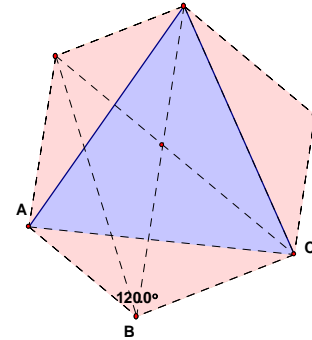


圖 5.1.1-6 Another Pythagorean-like Theorem

特例圖說證明 (4)

於是，我們知道， $\triangle ABC$ 中， $\angle B=120^\circ$ ， $T[B]+3T=T[A]+T[C]+4T$ ，
 $T[B]=T[A]+T[C]+T$

現在，我們把問題一般化， $\triangle ABC$ ，三邊長 a 、 b 、 c ，面積 T ，在三邊各作一個正三角形，面積分別是 $T[A]$ 、 $T[B]$ 、 $T[C]$ ，從 A 作 BC 的垂線如圖 5.1.1-7。

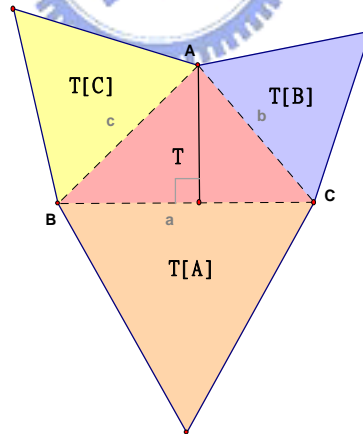


圖 5.1.1-7 Another Pythagorean-like Theorem 一般化證明

觀察下列式子：

$$(a - c \cdot \cos B)^2 + (c \cdot \sin B)^2 = b^2$$

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B = b^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ac \cdot \cos B = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

$$T[A] + T[C] - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}ac \cdot \sin B \cdot \frac{\cos B}{\sin B} = T[B]$$

故能得到通式： $T[A] + T[C] - \sqrt{3}T \cdot \cot B = T[B]$

這也就是所謂的 Another Pythagorean-like Theorem。

5.1.2 由鴿眼翻轉所延伸出的幾何分割問題

本小節是運用「特殊化與一般化」的概念，於數學問題之間的關聯性的一個例子的呈現。

「鴿眼」意指圓圓滾動之眼。其實「鴿眼翻轉」是中古世紀在歐洲鄉間流行的一種遊戲，將一個任意的四邊形，在某種條件的約束下，分割成四個四角形。爲了不讓它散掉，要像如圖 5.1.2-1 所示般，打上一個小動(鴿眼)，用繩子或橡皮筋綁上，爲了讓 A、B、C、D 四點集中在中央，要將四個四角形翻過來重新排列。

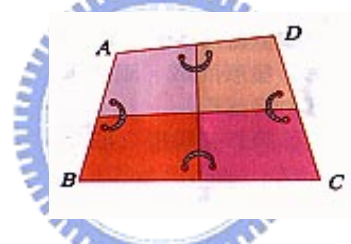


圖 5.1.2-1 鴿眼翻轉示意圖

日本的數學家井上正允將它寫入小學的教材，並且以勞作的方式，實際讓學生剪貼，利用不同顏色的色紙，還創作不少藝術作品呢！之後也因此在日本流行。

在 GSP 中，作一如圖 5.1.2-2 之任意四邊形，並取四邊中，二對邊中點的連線，將四邊形分成四部份，形成四個角 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，其中對頂角 $\angle 1 = \angle 3$ 、 $\angle 2 = \angle 4$ 。開始作鴿眼翻轉，如圖 5.1.2-3、圖 5.1.2-4，可將原任意四邊形，翻轉成如圖 5.1.2-5 的圖形。

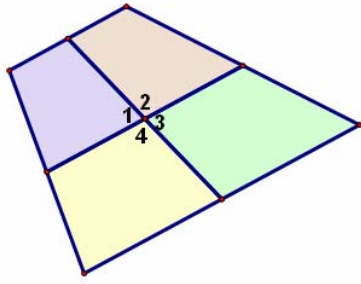


圖 5.1.2-2 鴿眼翻轉動態過程 (1)

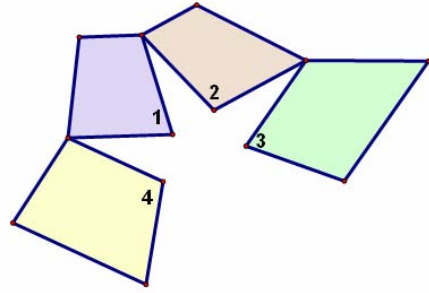


圖 5.1.2-3 鴿眼翻轉動態過程 (2)

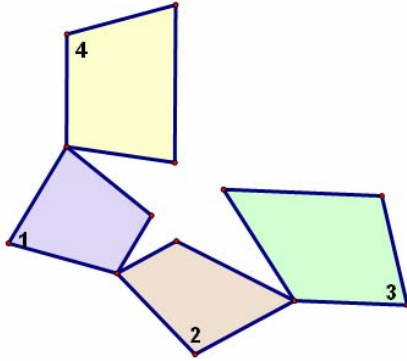


圖 5.1.2-4 鴿眼翻轉動態過程 (3)

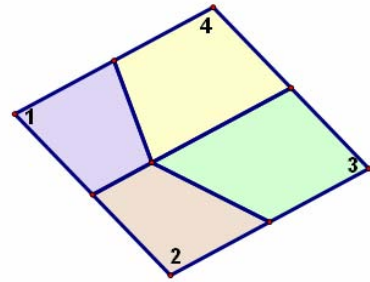


圖 5.1.2-5 鴿眼翻轉動態過程 (4)

因為對頂角 $\angle 1 = \angle 3$ 、 $\angle 2 = \angle 4$ ，經鴿眼翻轉後，是圖 5.1.2-5 四邊形中的二組對角，故新形成的四邊形是平行四邊形。

任意拉動原來四邊形的四個頂點，新形成的四邊形一定是平行四邊形。

現在我們來考慮另一個問題，如圖 5.1.2-6，如何將一個正三角形，切割後拚成一個正方形？

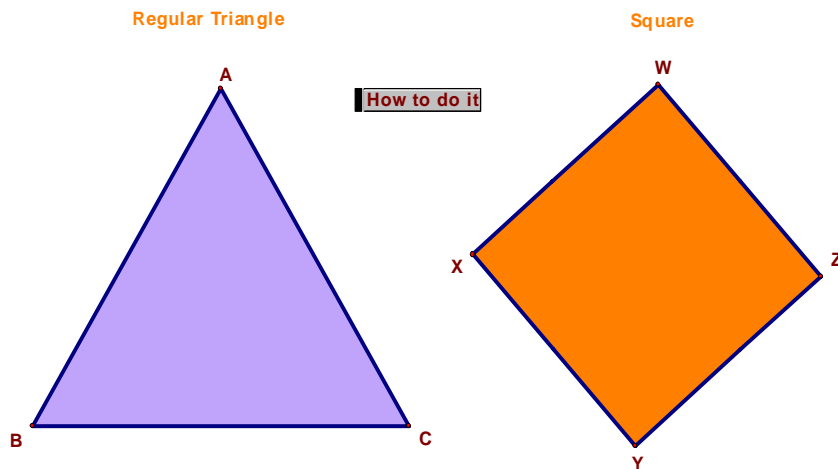


圖 5.1.2-6 正三角形和正方形的互化目標圖

如圖 5.1.2-7，步驟如下：

- (1) 已知一正 $\triangle ABC$ 。
- (2) E 、 F 分別是 \overline{CA} 、 \overline{AB} 的中點，連 \overline{BE} 及 \overline{CF} ，兩線段交於 D 。
- (3) 以 \overline{AC} 為直徑作一小圓。
- (4) 延伸 \overline{BE} 到 G ，使 G 在小圓上。
- (5) 以 \overline{BG} 為直徑作一大圓，大圓和直線 \overline{AC} 相交於 H 、 K 。
- (6) 以 \overline{HK} 為直徑作一中圓，中圓跟 \overline{BC} 相交於 L ，連 \overline{EL} 。
- (7) M 在 \overline{EL} 上，使 \overline{FM} 垂直 \overline{EL} ，連 \overline{FM} 。
- (8) P 在 \overline{BC} 上，使 \overline{DP} 垂直 \overline{EL} ，連 \overline{DP} ， \overline{DP} 跟 \overline{EL} 相交於 N 。
- (9) 於是我們將正三角形 ABC ，切割成四邊形 $AFME$ 、 $FBLM$ 、 $ENPC$ 及 $\triangle NLP$ ，如圖 5.1.2-8。

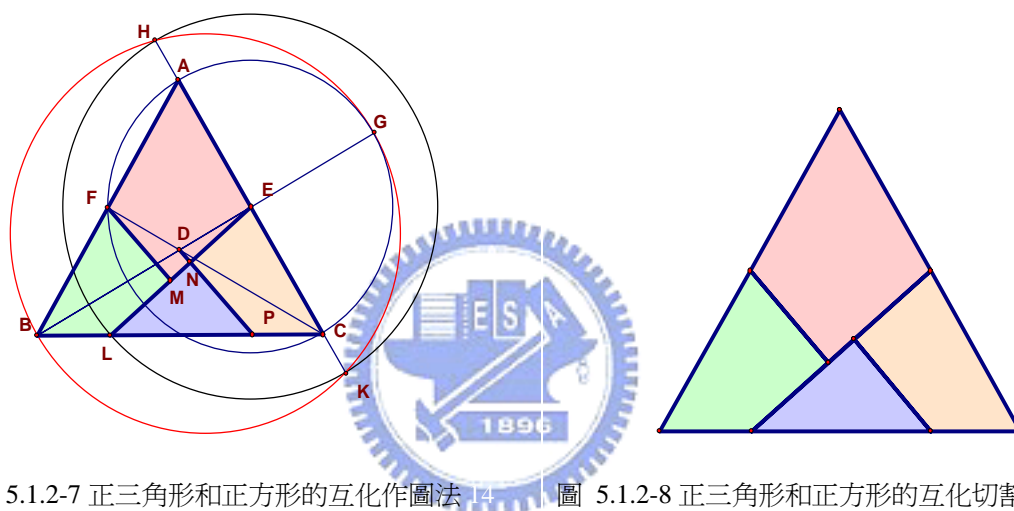


圖 5.1.2-7 正三角形和正方形的互化作圖法 14 圖 5.1.2-8 正三角形和正方形的互化切割完成圖

圖 5.1.2-9、5.1.2-10、5.1.2-11 是正三角形按此四塊切割，變成正方形的動態過程，圖 5.1.2-12 則是完成圖。

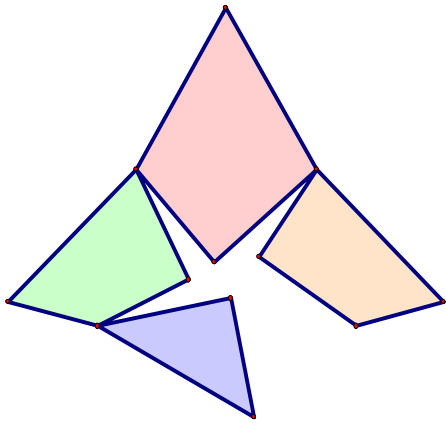


圖 5.1.2-9 正三角形正方形互化動態過程 (1)

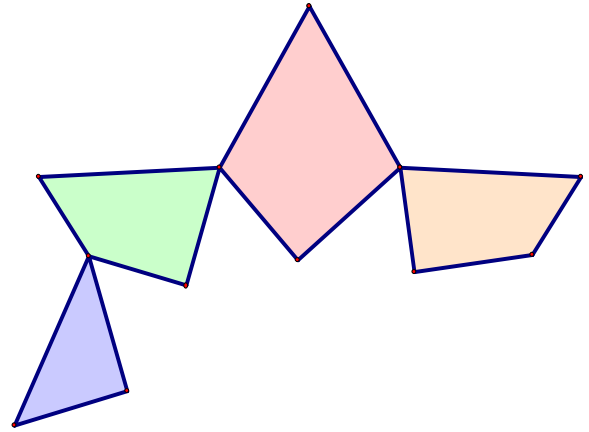


圖 5.1.2-10 正三角形和正方形的互化動態過程 (2)

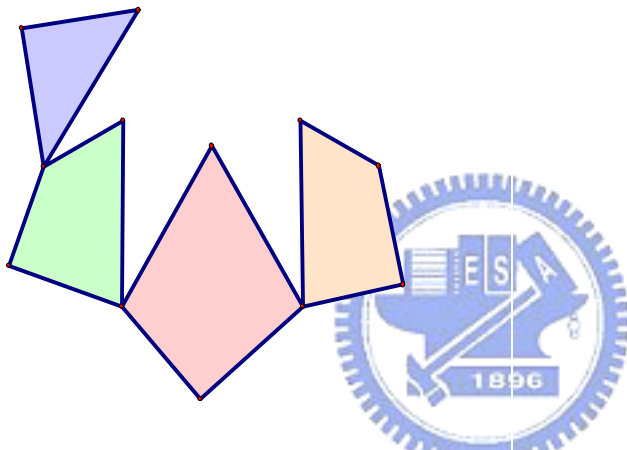


圖 5.1.2-11 正三角形正方形互化動態過程 (3)

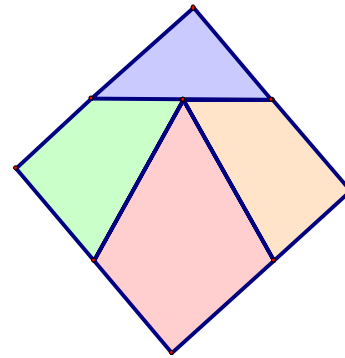


圖 5.1.2-12 正三角形和正方形的互化動態過程 (4)

於是，我們便將一個正三角形，切割後拚成一個正方形！反步驟，則能將正方形切割後，拚成正三角形。

這和「鴿眼翻轉」有何關係呢？將圖 5.1.2-13 中的任意四邊形 $WXYZ$ 的 XYZ 共線，並讓 $\triangle WXZ$ 形成正三角形，如圖 5.1.2-14，便可體會「正三角形和正方形的互化」是「鴿眼翻轉」的一種特例。

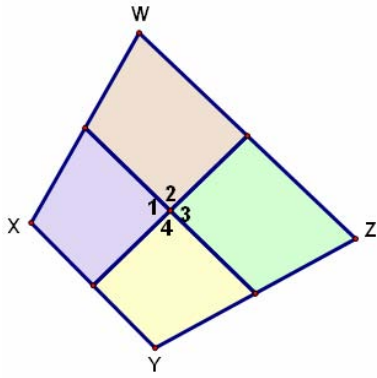


圖 5.1.2-13 「正三角形和正方形的互化」
是「鴿眼翻轉」的一種特例（1）

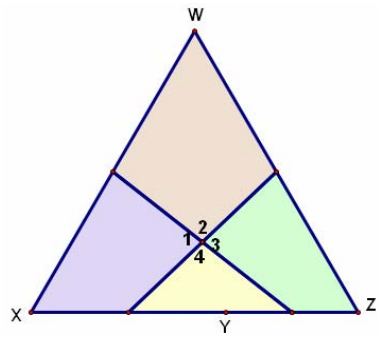


圖 5.1.2-14 「正三角形和正方形的互化」
是「鴿眼翻轉」的一種特例（2）

現在，我們將針對此一特例，作更多的延伸性討論。如圖 5.1.2-15，作任意的 $\triangle ABC$ ，分別取 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點 G 、 F ，在 \overline{BC} 上取動點 D 、 E （但 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ），連接 \overline{DF} ，從 G 、 E 分別作 \overline{DF} 的垂線，將 $\triangle ABC$ 分成四塊區域，經過翻轉後，我們可輕易地發現，新形成的四邊形，一定是矩形，如圖 5.1.2-16 所示。

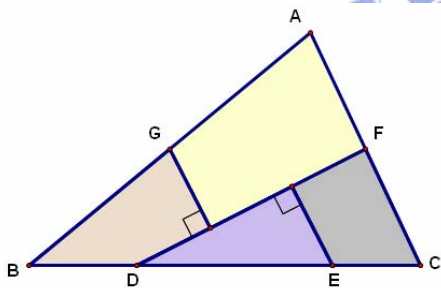


圖 5.1.2-15 「鴿眼翻轉」特例的討論（1）

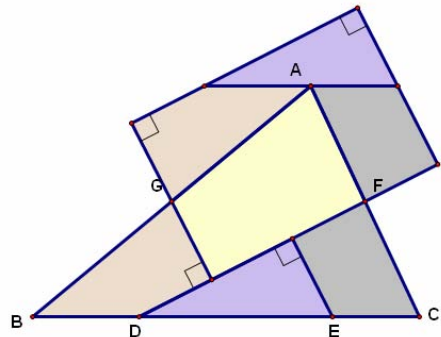


圖 5.1.2-16 「鴿眼翻轉」特例的討論（2）

如圖 5.1.2-17，作任意的 $\triangle ABC$ ，分別取 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點 G 、 F ，在 \overline{BC} 上取動點 D 、 E （但 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ），連接 \overline{DF} ，在 \overline{DF} 上任取二點分別連接 G 、 E ，將 $\triangle ABC$ 分成四塊區域，經過翻轉後，因為 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，新形成的四邊形，一定是梯形，如圖 5.1.2-18 所示。

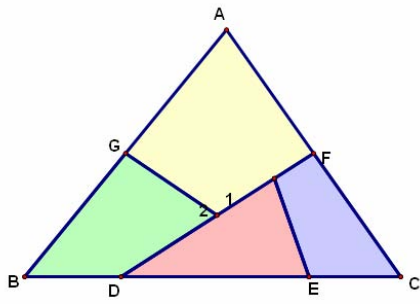


圖 5.1.2-17 「鴿眼翻轉」特例的討論 (3)

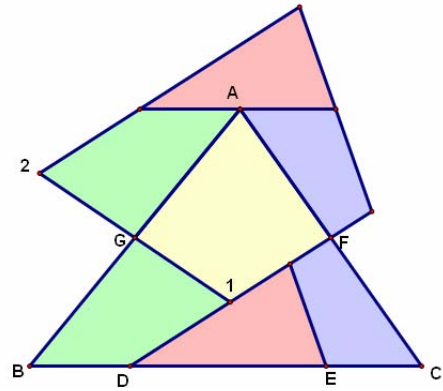


圖 5.1.2-18 「鴿眼翻轉」特例的討論 (4)

如圖 5.1.2-19，作任意的 $\triangle ABC$ ，分別取 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點 G 、 F ，在 \overline{BC} 上取動點 D 、 E （但 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ），連接 \overline{DF} ，在 \overline{DF} 上任取一點 H ，連接 \overline{GH} ，並作 \overline{DF} 上一點 K 使得 \overline{GH} 平行 \overline{KE} ，將 $\triangle ABC$ 分成四塊區域，經過翻轉後，因為 $\angle H = \angle 4$ 、 $\angle K = \angle 3$ ，新形成的四邊形，一定是平行四邊形，如圖 5.1.2-20 所示。

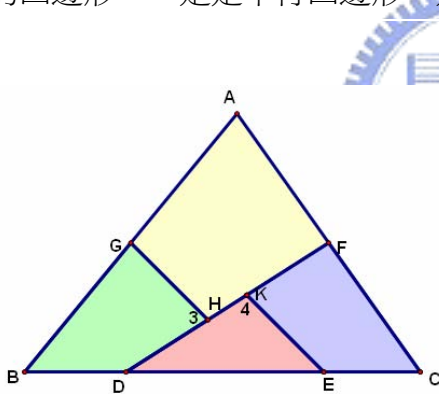


圖 5.1.2-19 「鴿眼翻轉」特例的討論 (5)

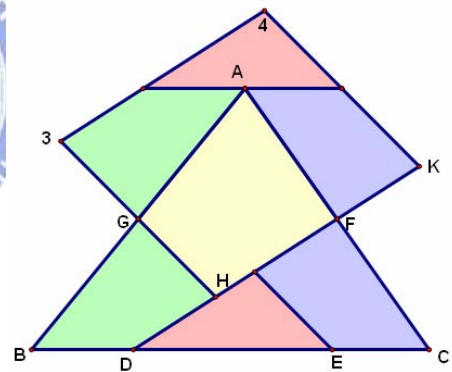


圖 5.1.2-20 「鴿眼翻轉」特例的討論 (6)

5.1.3 凸多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積

本小節是運用「特殊化與一般化」的概念，於特殊數學問題本身的一般化的一個例子的呈現。

我們知道任意三角形、四邊形各邊中點連線，所圍成的新面積和原來面積的比值，分別是 $1/4$ 和 $1/2$ 。在本節裡，我們擬針對任意 X 邊形 ($X \geq 3, X \in \mathbb{Z}$)，在各邊取 $1/n$ 長度的點連線，探討是否也有類似的比值？如果沒有，是否有其它的關係呢？

1. 三角形

如圖 5.1.3-1，任意 $\triangle ABC$ 將三邊長各取 $1/n$ 長度的點 D、E、F 連線，則新舊二個三角形的面積比值 = $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ 。

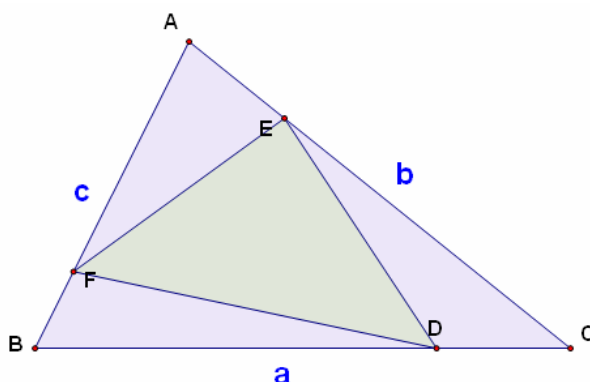


圖 5.1.3-1 三角形各邊 n 等分點連線所圍面積

證明：

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(bc \cdot \sin A) = \frac{1}{2}(ca \cdot \sin B) = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin C) = x$$

$$\triangle DEF = x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) (bc \cdot \sin A + ca \cdot \sin B + ab \cdot \sin C)$$

$$= x - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) (3x)$$

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{x - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) (3x)}{x} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

如圖 5.1.3-2，三角形各邊中點連線所圍面積，即是 $n=2$ 的情形，

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0.25$$

透過 GSP，任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

如圖 5.1.3-3，三角形各邊 5 等分點連線所圍面積，即是 $n=5$ 的情形，

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{25} = 0.52$$

透過 GSP，任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L / 國立交通大學數學系碩士學位班

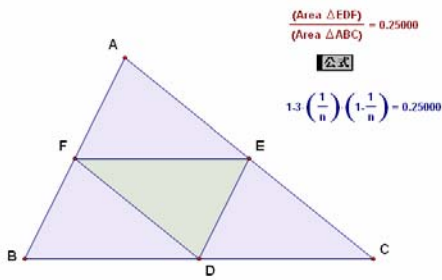


圖 5.1.3-2 三角形各邊中點連線所圍面積

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L / 國立交通大學數學系碩士學位班

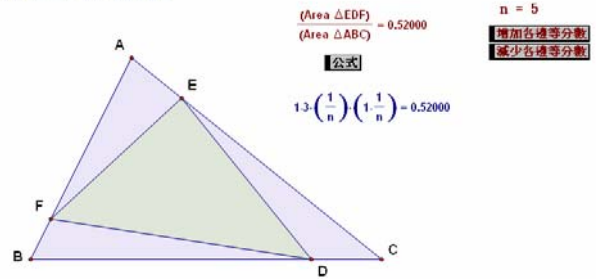


圖 5.1.3-3 三角形各邊 5 等分點連線所圍面積

針對以上討論，可以發現任意拉動原來三角形的三個頂點，並不會改變原本發現的現象。

2. 四邊形

如圖 5.1.3-1，任意四邊形 ABCD 將各邊長各取 $1/n$ 長度的點 E、F、G、H 連線，則

$$\text{新舊二個圖形的面積比值} = \frac{\text{四邊形EFGH}}{\text{四邊形ABCD}} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

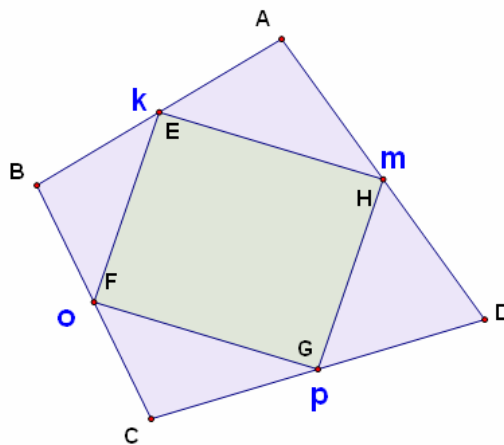


圖 5.1.3-4 四邊形各邊 n 等分點連線所圍面積

證明：

$$\text{四邊形}ABCD = \frac{1}{2}(km \cdot \sin A + op \cdot \sin C) = \frac{1}{2}(ok \cdot \sin B + mp \cdot \sin D) = x$$

$$\text{四邊形}EFGH = x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) (km \cdot \sin A + op \cdot \sin C + ok \cdot \sin B + mp \cdot \sin D)$$

$$= x - \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)(2x)$$

$$\therefore \frac{\text{四邊形EFGH}}{\text{四邊形ABCD}} = \frac{x - \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)(2x)}{x} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

如圖 5.1.3-5，四邊形各邊中點連線所圍面積，即是 $n=2$ 的情形，

$$\therefore \frac{\text{四邊形EFGH}}{\text{四邊形ABCD}} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

透過 GSP，任意改變四邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

如圖 5.1.3-6，四邊形各邊 5 等分點連線所圍面積，即是 $n=5$ 的情形，

$$\therefore \frac{\text{四邊形EFGH}}{\text{四邊形ABCD}} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{25} = 0.68$$

透過 GSP，任意改變四邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

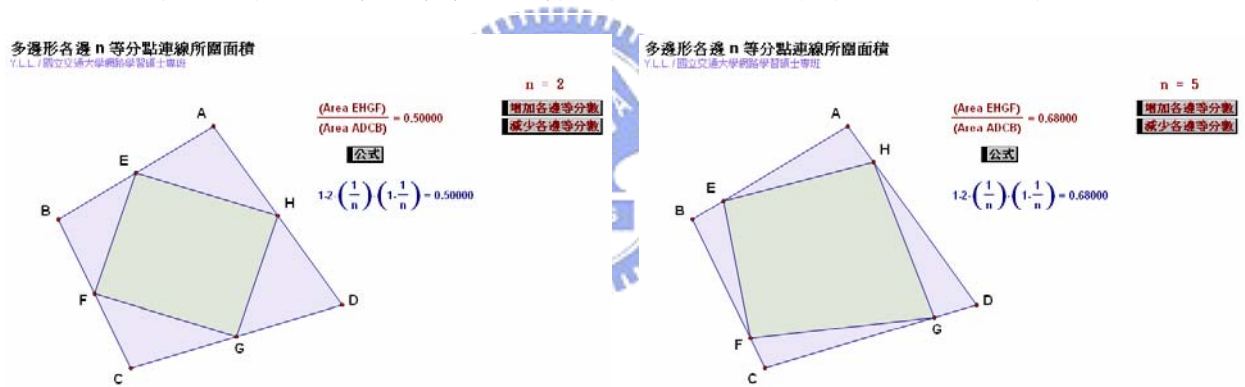


圖 5.1.3-5 四邊形各邊中點連線所圍面積

圖 5.1.3-6 四邊形各邊 5 等分點連線所圍面積

針對以上討論，可以發現任意拉動原來四邊形的各個頂點，並不會改變原本發現的現象。

3. 五邊形

我們利用 GSP 檢驗五邊形的各邊中點連線所圍成的面積，與原來五邊形面積的比值，如圖 5.1.3-7、圖 5.1.3-8，可以看出其比值分別為 0.65485、0.62495，並非定值。

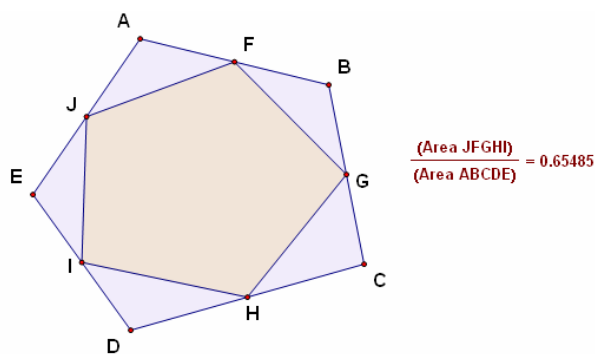


圖 5.1.3-7 檢驗五邊形的各邊中點連線

所圍成的面積 (1)

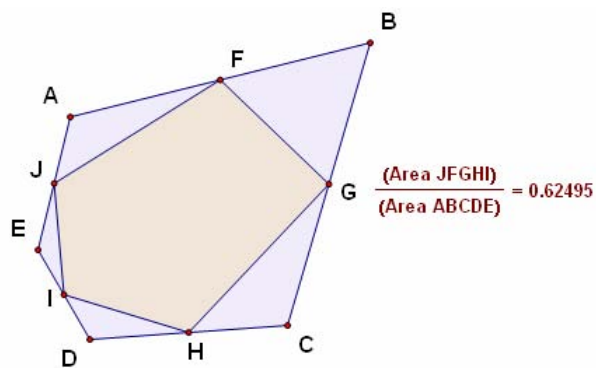


圖 5.1.3-8 檢驗五邊形的各邊中點連線

所圍成的面積 (2)

然而該比值，會不會落在某一範圍之內呢？

如圖 5.1.3-9，任意五邊形 $ABCDE$ 將各邊長各取 $1/n$ 長度的點 F 、 G 、 H 、 I 、 J 連線，則新舊二個圖形的面積比值會在如下的範圍中：

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\text{五邊形 } FGHIJ}{\text{五邊形 } ABCDE} < 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

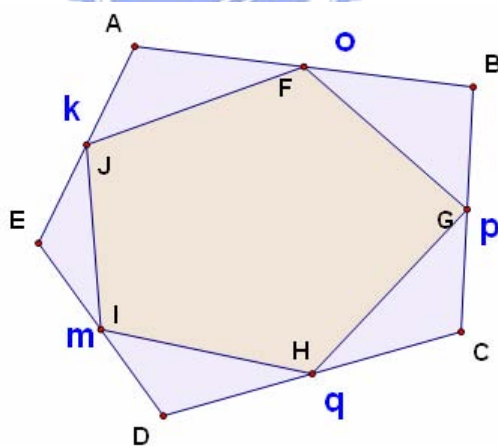


圖 5.1.3-9 五邊形各邊 n 等分點連線所圍面積

證明：

假設五邊形 $ABCDE$ 面積 = 1

五邊形 $FGHIJ$ 面積

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) (ok \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qm \cdot \sin D + mk \cdot \sin E)$$

但如圖 5.1.3-10、圖 5.1.3-11 可知，

$$1 < \frac{1}{2}(no \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qm \cdot \sin D + mn \cdot \sin E) < 2$$

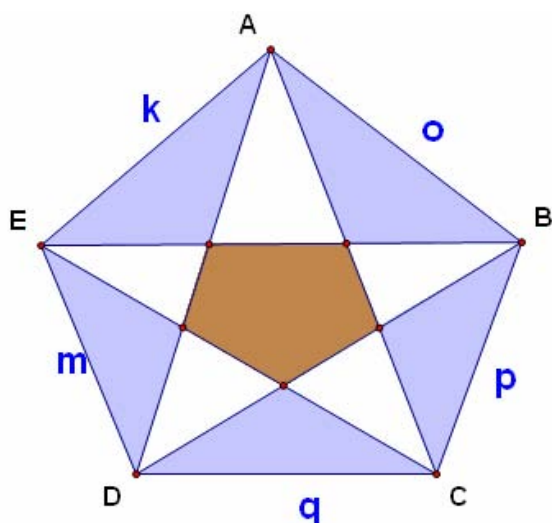


圖 5.1.3-10 五邊形各邊 n 等分點連線

所圍面積證明 (1)

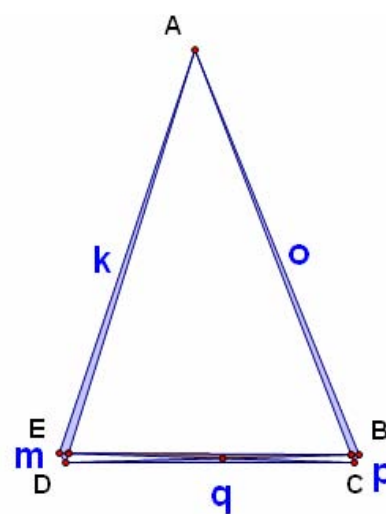


圖 5.1.3-11 五邊形各邊 n 等分點連線

所圍面積證明 (2)

$$\frac{\text{五邊形FGHIJ}}{\text{五邊形ABCDE}} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (ok \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qm \cdot \sin D + km \cdot \sin E)$$

$$\text{故，} 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 2 < \frac{\text{五邊形FGHIJ}}{\text{五邊形ABCDE}} < 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1, \text{得証。}$$

如圖 5.1.3-12，五邊形各邊中點連線所圍面積，即是 n=2 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \frac{\text{五邊形FGHIJ}}{\text{五邊形ABCDE}} < 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

透過 GSP，任意改變五邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

如圖 5.1.3-13，五邊形各邊 5 等分點連線所圍面積，即是 n=5 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{25} = 0.68 < \frac{\text{五邊形FGHIJ}}{\text{五邊形ABCDE}} < 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{21}{25} = 0.84$$

透過 GSP，任意改變五邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L. / 國立交通大學網路學管理碩士專班

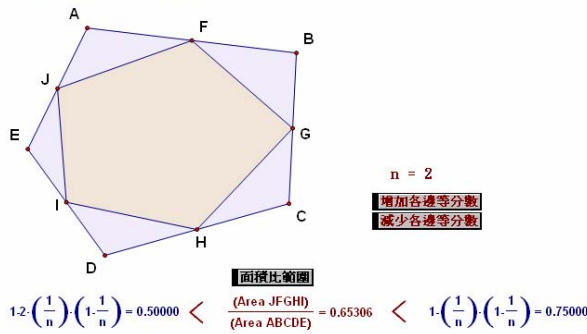


圖 5.1.3-12 五邊形各邊中點連線所圍面積

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L. / 國立交通大學網路學管理碩士專班

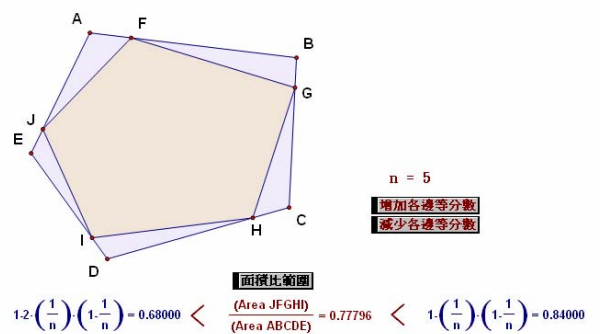


圖 5.1.3-13 五邊形各邊 5 等分點連線所圍面積

針對以上討論，可以發現任意拉動原來五邊形的各個頂點，並不會改變原本發現的現象。

4. 六邊形

我們利用 GSP 檢驗六邊形的各邊中點連線所圍成的面積，與原來六邊形面積的比值，如圖 5.1.3-7、圖 5.1.3-8，可以看出其比值分別為 0.74631、0.77070，並非定值。

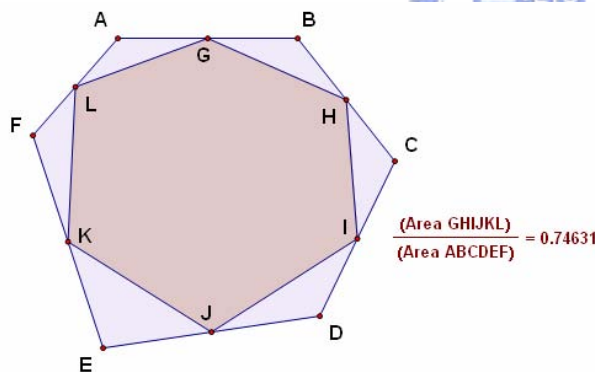


圖 5.1.3-14 檢驗六邊形的各邊中點連線

所圍成的面積 (1)

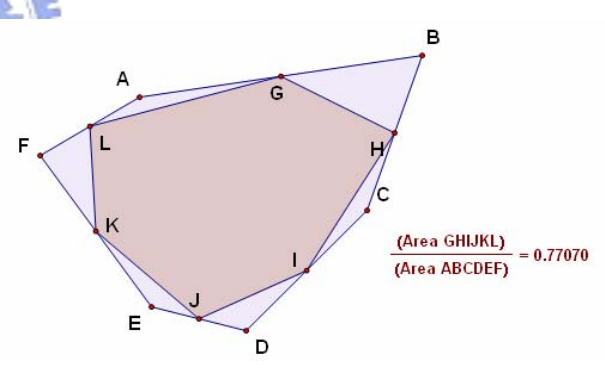


圖 5.1.3-15 檢驗六邊形的各邊中點連線

所圍成的面積 (2)

然而該比值，會不會落在某一範圍之內呢？

如圖 5.1.3-16，任意六邊形 ABCDEF 將各邊長各取 $1/n$ 長度的點 G、H、I、J、K、L 連線，則新舊二個圖形的面積比值會在如下的範圍中：

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\text{六邊形 GHIJKL}}{\text{六邊形 ABCDEF}} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

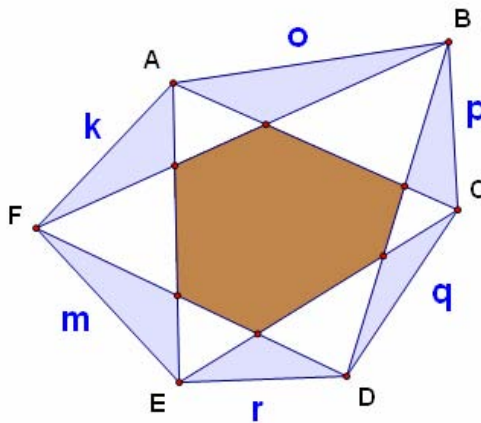


圖 5.1.3-16 六邊形各邊 n 等分點連線所圍面積

證明：

假設六邊形 $ABCDEF$ 面積 = 1

六邊形 $GHIJKL$ 面積

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) (ok \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qr \cdot \sin D + rm \cdot \sin E + km \cdot \sin F)$$

但如圖 5.1.3-17、圖 5.1.3-18 可知，

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} (ok \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qr \cdot \sin D + rm \cdot \sin E + km \cdot \sin F) < 2$$

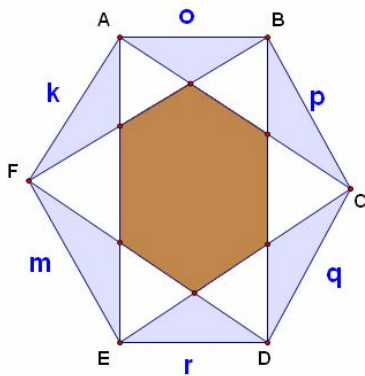


圖 5.1.3-17 六邊形各邊 n 等分點連線

所圍面積證明 (1)

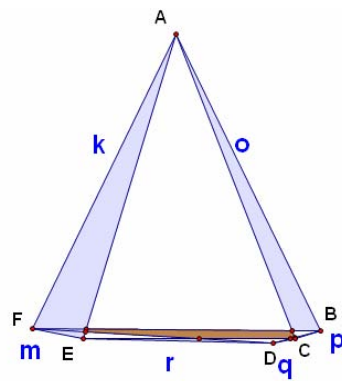


圖 5.1.3-18 六邊形各邊 n 等分點連線

所圍面積證明 (2)

$$\frac{\text{六邊形GHIJKL}}{\text{六邊形ABCDEF}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (ok \cdot \sin A + op \cdot \sin B + pq \cdot \sin C + qr \cdot \sin D + rm \cdot \sin E + km \cdot \sin F)$$

故， $1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 2 < \frac{\text{六邊形GHIJKL}}{\text{六邊形ABCDEF}} < 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ ，得証。

如圖 5.1.3-19，六邊形各邊中點連線所圍面積，即是 $n=2$ 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \frac{\text{六邊形GHIJKL}}{\text{六邊形ABCDEF}} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} = 0.875$$

透過 GSP，任意改變六邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

如圖 5.1.3-20，六邊形各邊 5 等分點連線所圍面積，即是 $n=5$ 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{25} = 0.68 < \frac{\text{六邊形GHIJKL}}{\text{六邊形ABCDEF}} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{23}{25} = 0.92$$

透過 GSP，任意改變六邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L / 國立交通大學數學學士學位

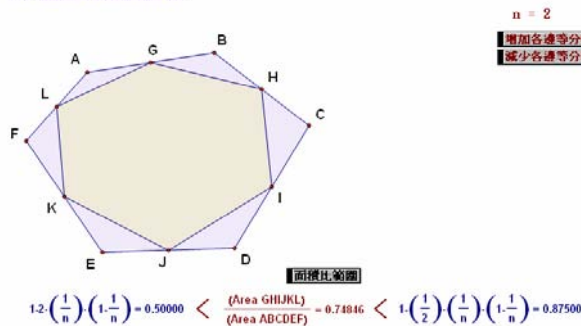


圖 5.1.3-19 六邊形各邊中點連線所圍面積

多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
Y.L.L / 國立交通大學數學學士學位

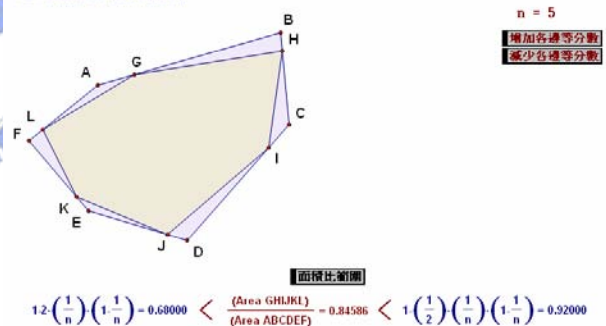


圖 5.1.3-20 六邊形各邊 5 等分點連線所圍面積

針對以上討論，可以發現任意拉動原來六邊形的各個頂點，並不會改變原本發現的現象。

4. X 邊形

有了五邊形和六邊形的結果後，我們大膽將結論推廣至任意 X 邊形

($5 \leq X, X \in \mathbb{Z}$)，任意 X 邊形將各邊長各取 $1/n$ 長度的點連線，則新舊二個圖形的面積比值會在如下的範圍中：

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\text{新}X\text{邊形面積}}{\text{原}X\text{邊形面積}} < 1 - \left(\frac{1}{X-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

經由 GSP 的數學實驗方式，我們得到驗證！一個九邊形的例子如下：

如圖 5.1.3-21，九邊形各邊中點連線所圍面積，即是 n=2 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \frac{\text{新}9\text{邊形面積}}{\text{原}9\text{邊形面積}} < 1 - \left(\frac{1}{9-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{19}{20} = 0.95$$

透過 GSP，任意改變九邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

如圖 5.1.3-22，九邊形各邊 5 等分點連線所圍面積，即是 n=5 的情形，

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{25} = 0.68 < \frac{\text{新}9\text{邊形面積}}{\text{原}9\text{邊形面積}} < 1 - \left(\frac{1}{9-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{121}{125} = 0.968$$

透過 GSP，任意改變九邊形的形狀，並作面積的運算，均能得到相同的結果。

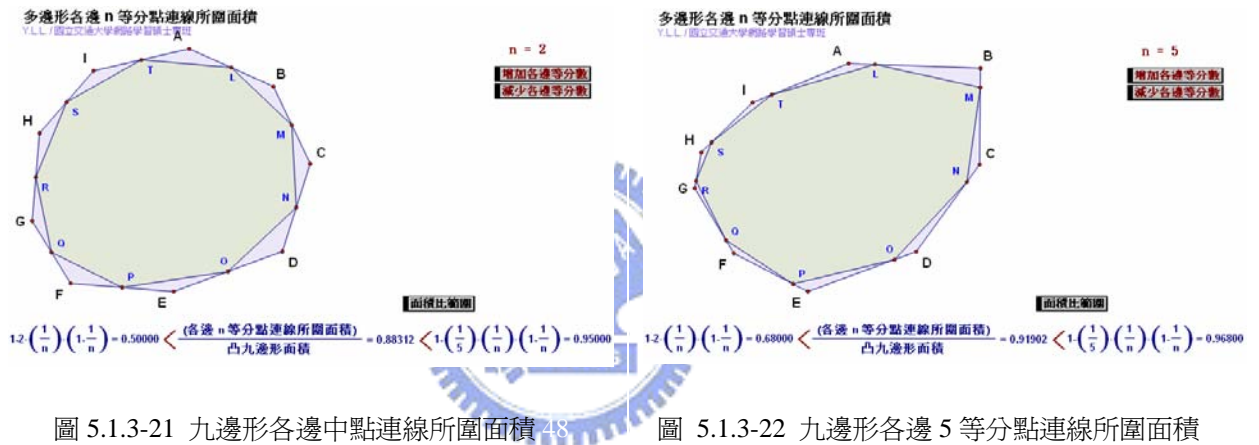


圖 5.1.3-21 九邊形各邊中點連線所圍面積

圖 5.1.3-22 九邊形各邊 5 等分點連線所圍面積

但在這過程中，我們發現，比值範圍的下界 $\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ 和真實的比值，仍有較大的差距，應有改善的空間，於是我們參考既有的數據，同以 GSP 數學實驗的方式得到了如下更為精確的範圍：

$$1 - \left(\sqrt{X-1}\right) \left(\frac{1}{X-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\text{新}X\text{邊形面積}}{\text{原}X\text{邊形面積}} < 1 - \left(\frac{1}{X-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

如圖 5.1.3-23、圖 5.1.3-24，分別是六邊形各邊 4 等分點連線所圍面積、九邊形各邊 6 等分點連線所圍面積的二個例子。

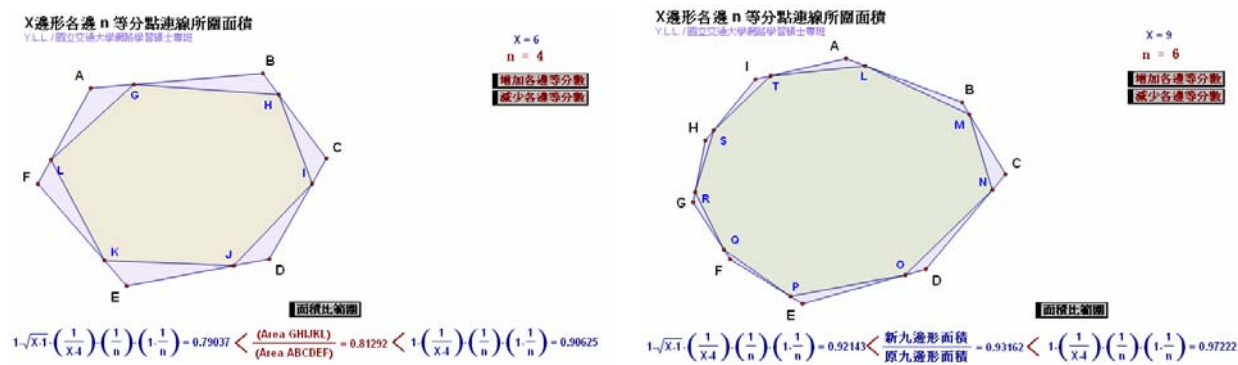


圖 5.1.3-23 六邊形各邊 4 等分點連線所圍面積

圖 5.1.3-24 九邊形各邊 6 等分點連線所圍面積

總結以上證明與 GSP 上的數學實驗，我們得到以下的結論：

(1) 任意 $\triangle ABC$ 將三邊長各取 $1/n$ 長度的點 D、E、F 連線，則新舊二個三角形的面積

$$\text{比值} = \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

(2) 任意四邊形 ABCD 將各邊長各取 $1/n$ 長度的點 E、F、G、H 連線，則新舊二個圖

$$\text{形的面積比值} = \frac{\text{四邊形 EFGH}}{\text{四邊形 ABCD}} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

(3) 任意 X 邊形 ($X \geq 5, X \in \mathbb{Z}$)，將各邊長各取 $1/n$ 長度的點連線，則新舊二個圖形的面積比值，不是定值，且會在如下的範圍中：

$$1 - (\sqrt{X-1}) \left(\frac{1}{X-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\text{新X邊形面積}}{\text{原X邊形面積}} < 1 - \left(\frac{1}{X-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)。$$

這真是個令人驚訝且興奮的發現！

第六章 數學數位內容網站之經營

6.1 架站源起及動機

研究者本身是個中學的數學、電子計算機科教師，自認是個對教學充滿熱情的人，當將自己的教學內容，放在自己的電腦中，已不能滿足自己愛分享的個性時，架站分享的念頭，便油然而生。

高雄縣教育網路中心工作團隊，規劃學校學生所需之網路應用服務的項目與功能。在考量政府財政困難，很難再提撥相關的人力、財力之下，故邀集民間資源共襄盛舉，由該中心依據學校目前所面臨的相關問題，提出功能需求並參與測試工作。民間出錢出力，建立了高雄縣Loxa教育網，網址為：<http://www.Loxa.edu.tw>及<http://www.Loxa.com.tw>均可[54]。民國九十一年七月，透過Loxa教育網，針對有興趣建置個人教學網站的教師，提供「個人網站」的免費服務，寫妥了架站計畫，經過審核，獲得了網頁儲存空間（本服務亦提供對PHP 和JSP 的支援，與資料庫MySQL之存取服務。），與一組網址<http://yll.loxa.edu.tw/>，『YLL教學手札』、『YLL討論網』於焉產生。

6.1.1 目前數學網站遭遇的困難、問題

數學網站的經營，相對於其它種類的網站，又有許多的不同之處。國內有許多內容豐富的數學網站，在當了長久的使用者之後，深覺會有以下三個主要會遭遇的困難或問題：

- 1.若是教師經營的個人數學教學網站，常面臨因為是個人經營，費時費心，卻無法常保內容持續更新，以致無法匯集人氣或長久經營。
- 2.數學討論有數學符號、數學圖形輸入的需求，但於網頁上輸入的困難，是網站經營裡，互動和討論的一大障礙，長久沒看到國內數學網站有具體的解決之道。
- 3.數學解題的答案，可以用網頁的方式表達，但解題歷程的呈現，實是目前數學網站的一大難題。

經營網站之初，爲了與更多的數學同好互動，於是有了討論、分享的需求，但卻也同樣面臨了這樣的困擾，著手思考解決之道，是今日網站小有規模的一大動機，將在本章中具體明白的陳述。

6.2 網站架構

網站主要分成『YLL 教學手札』、『YLL 討論網』二大部份，其中『YLL 討論網』又為『YLL 教學手札』的延伸，本節將對此二大部份作架構的描述。

6.2.1 「YLL 教學手札」架構

「YLL 教學手札」歷經近三年的多次改版，目前以修改 Blog(部落格)的網頁日誌程式，作為主頁，如圖 6.2.1-1，其中一個最大的原因是：『更新容易』。

[YLL教學手札]
真正的幸福，在於對平淡生活的熱愛.....

首頁 | 站務公告 | Gsp教學集 | 數學筆記 | PHP建站工具 | 其它建站工具 | YLL討論網 | 相簿 | 留言 | 登入

[教學]Riemann Sum(微積分上中下和) ☀ 2005年6月28日01:31

部份文章如下：

幾則微積分主題教學的設計

長久以來，對教師而言，微積分的教學，一直有作圖複雜，解釋不易的問題，學生的學習，自然就多了不少的困難度。

為了改善一般學生，對微積分『抽象』的感受，本文參考動態幾何軟體GSP的現成運用GSP的逕迴功能，再輔以微積分概念的數學函式，來設計幾則微積分教學的主題，並以互動的動態方式呈現，展現微積分的另一番面貌，提供教師教學及學生學習的用途。

Riemann Sum

統計數值

日誌：45
評論：22
到訪：71255 [統計]
今日：79
用戶：1 [列表]
在線：3

yll

◀月▶	2005 - 07						▶年▶
日	一	二	三	四	五	六	
3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	30	
31							

最新文章

- [教學]Riemann Sum(微積分上... (2005-6-28)
- [教學]Star Polygon &am... (2005-

圖 6.2.1-1 YLL 教學手札主頁

更新容易，是個極大的優點，網頁更新快，能加強使用者再次的到訪的意願。如圖 6.2.1-2，在使用站長的身份登入網頁後，我們能用直接上傳現成網頁的方式更新網頁，亦能使用類似常用的網頁編輯程式 Frontage 等，使用工具列點選的方式直接編輯、修改要分享的內容、文章，使文章能在任何可使用網路的電腦，快速地修改、更新。

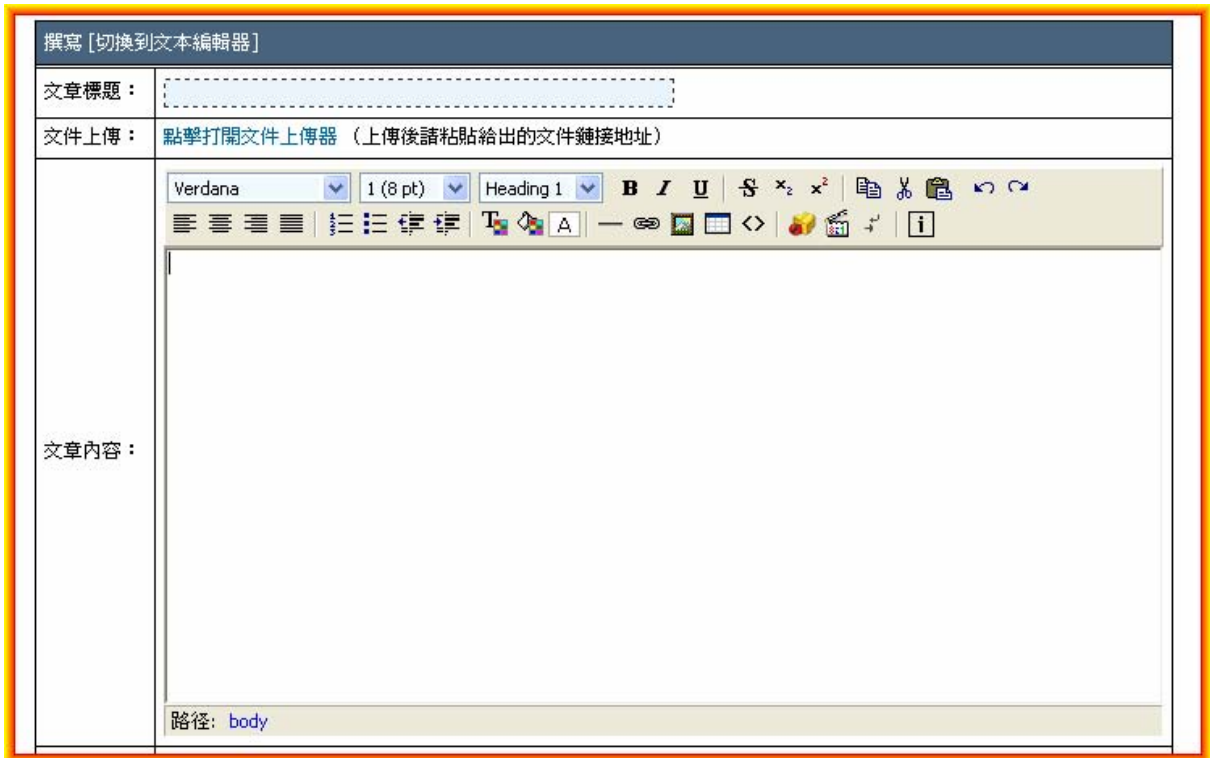


圖 6.2.1- 2YLL 教學手札線上發表文章介面

「YLL 教學手札」的網站架構，如圖 6.2.1-3，主要分成數學教學、站務公告、網站架設、留言板等，分別介紹如下：

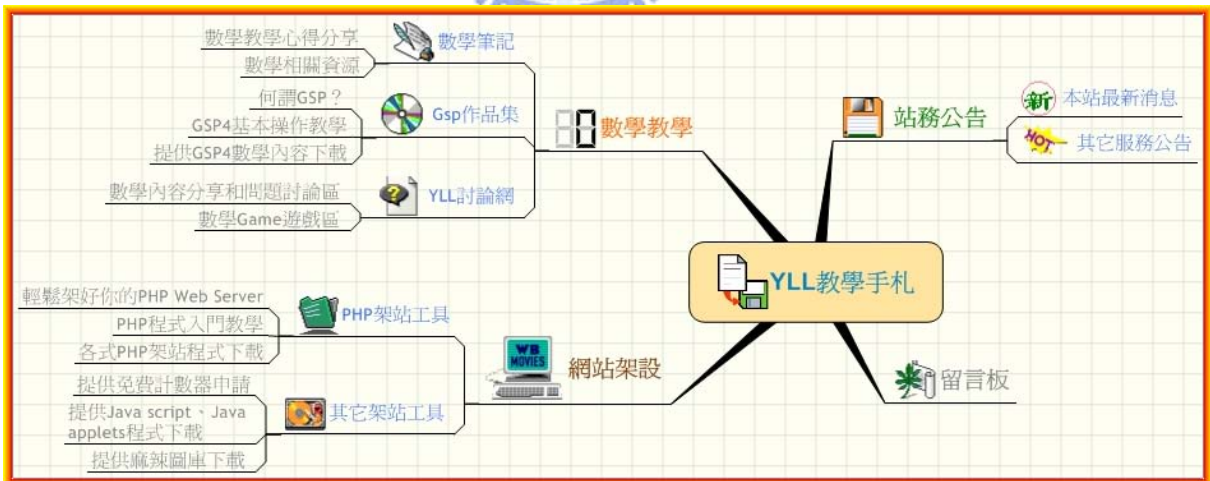


圖 6.2.1- 3YLL 教學手札網站架構

1. 數學教學

數學教學是本站的核心內容，又分成三部份：

(1) 數學筆記

提供數學相關資源、個人數學教學心得分享，如圖 6.2.1-4。

(2) GSP 教學集

本研究三至五章中，所有數學內容均分享於此，提供 GSP 數學數位內容下載、教學及討論，如圖 6.2.1-5，是部份的主題內容分享。



圖 6.2.1-4 YLL 教學手札數學筆記



圖 6.2.1-5 YLL 教學手札 GSP 教學集

(3) YLL 討論網

是「YLL 教學手札」的主要延伸，將詳細介紹於下一小節 6.2.2 中，是數學數位內容分享及問題討論區。

2. 站務公告

是站上所有最新消息的公佈欄，所有有關站務的訊息都會在這裡發佈。

3. 網站架設

數學數位內容分享，一直是架站的本意，但「YLL 教學手札」的架設，歷經多次的改版，本人從不知如何架站，到如今對架站的駕輕就熟，這期間的心路歷程及資源分享，在本區中，提供給同樣想架設網站的老師參考，亦有多項架站工具的分享，雖非立站之初的本意，但卻也因為如此，提高了不少站上的知名度及人氣。分成 PHP 架站工具、其它架站工具二部份，如圖 6.2.1-6，是 PHP 架站工具部份分享的主題。

4. 留言板

站上每個分享出來的教學主題，都有獨立討論的機制，這在 6.3.3 節中有詳述，本留言板區提供的是，獨立於教學主題外的心得分享或討論，如圖 6.2.1-7。



圖 6.2.1-6 YLL 教學手札 PHP 內容



圖 6.2.1-7 YLL 教學手札主題討論範例

6.2.2 「YLL 討論網」架構

「YLL 討論網」成立之初，即以數學內容分享與討論為目標，但不斷有網友要求除了數學區之外，希望成立其它非數學的版面，長久下來，非數學區的成立，亦造就了站上的更多的人氣，也相對成就了更多數學內容的分享和討論，這部份將在 6.4.2 節中有詳細的描述。目前的非數學區主要分：心情札記、學科討論區、板上玩 Game 特區、貼圖區、麻辣笑話、影音館、值得分享的好文章、命理大街、布袋戲專區、電腦的教學和問題區...等，本研究主要於數學區的陳述，所以將偏重於數學區作架構的介紹。

網站同樣考慮『更新容易』為最高原則，主程式使用 phpBB2 的論壇程式修改而成，在登入之後，能使用類似常用的網頁編輯程式 Frontage 等，使用工具列點選的方式直接編輯、修改要分享的內容、文章，使文章能在任何可使用網路的電腦，快速地修改、更新。圖 6.2.2-1，是網站發表內容的選單畫面。

圖 6.2.2-2，是「YLL 討論網」數學版面的主要架構圖，主要分成六大部份：

1. 數學 Game 遊戲區

精選好玩的數學 Game，提供或介紹給大家遊戲，版內亦可作遊戲內容的討論，子版面：數學笑話、數學猜謎、趣味數學，休閒數學是本區的主要精神。

2. 數學及時、求救區

本區提供大家問數學回家功課，或任何數學問題，站上一群熱心的數學版主群，會將本區的數學問題以最速件處理，盡快會在第一時間給發問者回答！子版面：國小數學問題、國中數學問題、高中數學問題、大學以上數學問題，供發問者主動將問題分類，或版主群於回答後，將問題歸檔。

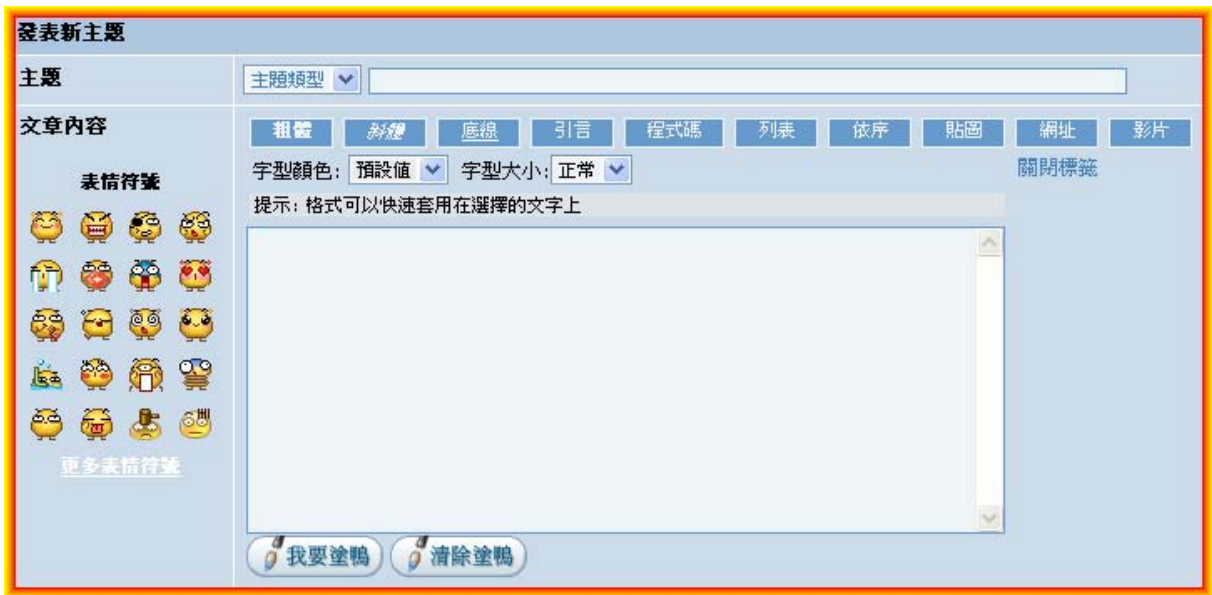


圖 6.2.2-1 YLL 討論網發表內容的選單畫面

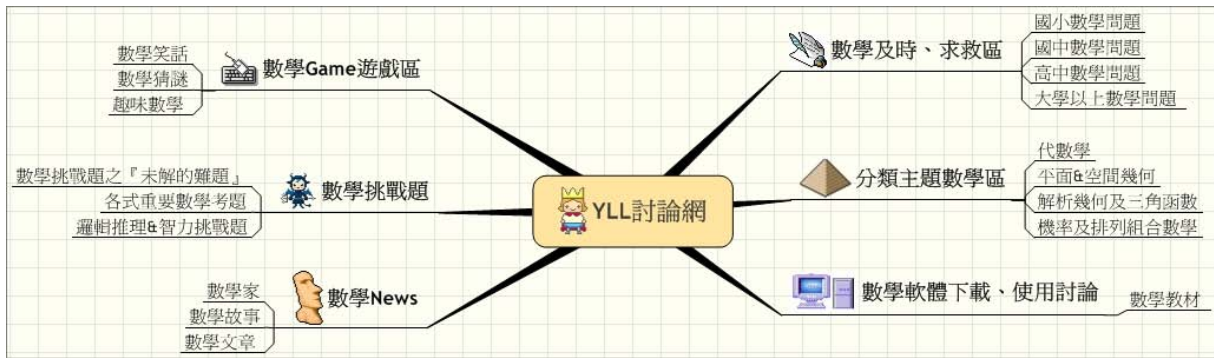


圖 6.2.2-2 YLL 討論網數學版面的主要架構圖

下圖 6.2.2-3，是網站數學版面的分類現狀圖。

主題	文章	最後發表
數學Game遊戲區 I do and I understand, I see and I remember, Do Math and you can do anything. 精選好玩的數學Game，讓數學更有趣。 子版面： 數學笑話 ， 數學猜謎 ， 趣味數學 版面管理員 J+W數學管理版主群	72	731
【數學及時、求救區】 本區的數學問題將以最速件處理！不是會員亦能討論！ 回家功課有問題嗎？快到這問吧，請盡量按國小、國中、高中、大學等分區提問！歡迎高手幫忙解答！ 子版面： 國小數學問題 ， 國中數學問題 ， 高中數學問題 ， 大學以上數學問題 版面管理員 J+W數學管理版主群	296	1155
數學挑戰題 數學，如果正確地看它，不但擁有真理，而且也具有至高的美。~羅素 你有難題嗎？快點來考考大家吧！ 子版面： 數學挑戰題之『未解的難題』 ， 各式重要數學考題 ， 邏輯推理&智力挑戰題 版面管理員 J+W數學管理版主群	847	6433
分類主題數學區 請按分類主題分享、討論數學，謝謝大家！ 子版面： 代數學 ， 平面&空間幾何 ， 解析幾何及三角函數 ， 機率及排列組合數學 版面管理員 J+W數學管理版主群	3	5
數學News 數學之所以沒用，是因為我們知道的太少。 數學的新新聞、舊新聞、小故事、數學史...有關數學的文章，都歡迎貼在這喔。 子版面： 數學家 ， 數學故事 ， 數學文章 版面管理員 J+W數學管理版主群	5	11
數學軟體下載、使用討論 歡迎提供數學好用軟體下載及分享討論 子版面： 數學教材 版面管理員 J+W數學管理版主群	17	79

將所有版面標示為已閱讀

圖 6.2.2-3 YLL 討論網數學版面的分類現狀圖

3. 數學挑戰題

本區提供大家互相出題考驗的空間，讓大家都能當出題者，是切磋數學的好地方。子版面：數學挑戰題之『未解的難題』、各式重要數學考題、邏輯推理&智力挑戰題，其中「邏輯推理&智力挑戰題」題目有趣，多數站上朋友反應熱烈，是很好的邏輯思考訓練題。

4. 分類主題數學區

本區按數學主題分類數學文章和內容，也方便使用者索引之用。子版面：代數學、平面&空間幾何、解析幾何及三角函數、機率及排列組合數學等，視分享情況逐漸增加子分區中。

5. 數學 News

本區提供數學的新新聞、舊新聞、小故事、數學史、數學家等有關數學的文章。子版面：數學家、數學故事、數學文章等，數學的歷史是本區的主要精神。

6. 數學軟體下載、使用討論

數學軟體的介紹、範例說明與討論、試用版下載等。子版面：數學教材。分享使用軟體製作的數學教材，是分享的園地。

6.3 網站技術的突破

針對 6.1 節中，數學網站的經營，三個主要會遭遇的困難或問題的第二、三個問題，於本節中，在自己的網站作出了技術的突破，將陳述於以下二個小節，6.3.3 節則介紹站上其它有利討論的功能。

6.3.1 線上數學方程式編輯器的架設與運用

數學討論，是網站中一個互動的重要功能，但數學的討論，有別於其它主題，除了一般打字的需求外，常爲了要打出一個數學式子而苦惱，數學討論有數學符號、數學圖形輸入的需求，但於網頁上輸入的困難，是網站經營裡，互動和討論的一大障礙，長久沒看到國內數學網站有具體的解決之道。

網站上參考「交大應數數學交流網」(<http://forum.math.nctu.edu.tw/>)，使用Design Science開發的軟體WebEQ (<http://www.mathtype.com/en/products/webeg/>)，用java和php等網頁程式語言，作成線上數學方程式編輯器，結合在網頁上，使數學符號的輸入，可輕鬆地用滑鼠按、點就完成，非常方便。



圖 6.3.1-1 線上數學方程式編輯器

使用如圖 6.3.1-1 的輸入介面，打好所需要的方程式後，按下「插入方程式」按鈕，即可由程式自動產生 MathML 程式碼，將所需方程式直接貼在網頁上。圖 6.3.1-2、6.3.1-3 是二個使用者，使用站上數學方程式編輯器，所打出來的數學問題或解答。

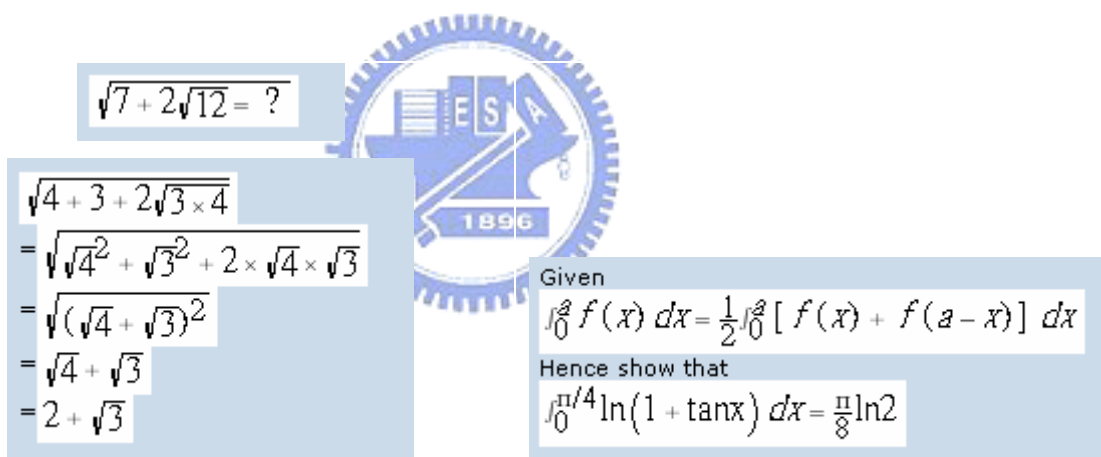


圖 6.3.1-2 使用網站數學方程式編輯器範例 (1)

圖 6.3.1-3 使用網站數學方程式編輯器範例 (2)

6.3.2 數學塗鴨板的架設與運用

線上數學圖形輸入的需求，則又是另一個令人頭痛的問題。FokHei在其個人網站「FokHei Studio」(<http://fokhei.go.to/>)，提供一個強大的免費flash繪圖程式，如圖 6.3.2-1、6.3.2-2，是使用該繪圖程式畫出的圖案。網站上使用「CreativeCrap BBS」(<http://www.creativecrap.com/bbs/>) 提供之「Flash Paint Mod」，將FokHei的繪圖程式整合至網頁的互動功能上，應用於數學圖形的繪製上，該算是一種創意的運用，稱其為「數學塗鴨板」。



圖 6.3.2-1 線上繪圖程式範例 (1)



圖 6.3.2-2 線上繪圖程式範例 (2)

如圖 6.3.2-3，是 FokHei 的線上繪圖工具，功能強大，用來繪製數學圖形，雖不能達一般數學繪圖軟體如 GSP 的精確，但對欲描述數學問題，而想有個工具的使用者而言，卻已是個很好的工具。

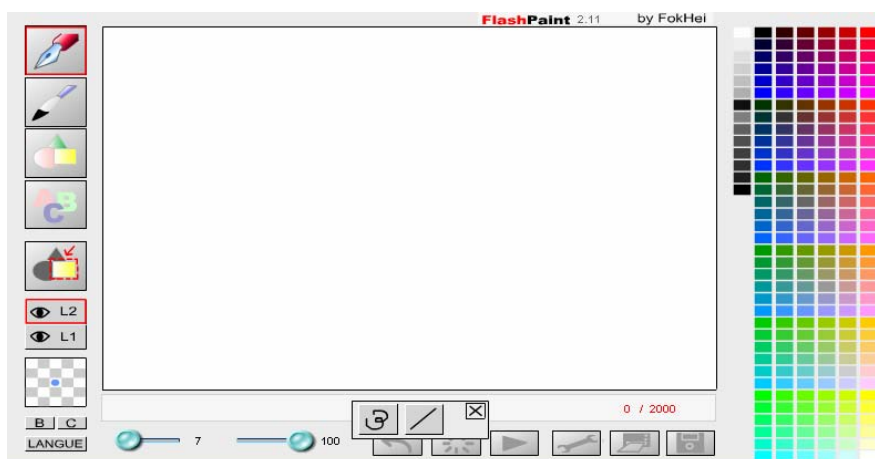


圖 6.3.2-3 數學塗鴨板使用介面

二個使用範例如下，一提問者的問題：「一條圓鏈上 7 個珠子，用最少刀數(直線數)，可將 7 個珠子全部分開，求最少刀數(直線數)？」，圖 6.3.2-4 是另一使用者使用「數學塗鴨板」所畫出的答案。圖 6.3.2-5 是一使用者提問的附圖，同樣是使用「數學塗鴨板」所繪，其問題是：「將正整數 1~16，填入 4x4 的的正方格子中，先固定 1~4，再填入其他數字，使其縱、橫、斜四數的和都相等。」

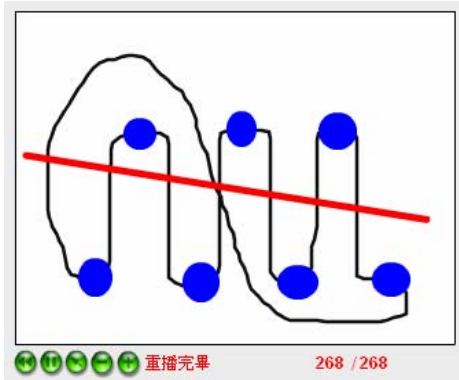


圖 6.3.2-4 數學塗鴨板使用範例 (1)



圖 6.3.2-5 數學塗鴨板使用範例 (2)

針對數學網站的經營的第三個主要會遭遇的困難或問題：數學解題的答案，可以用網頁的方式表達，但解題歷程的呈現，實是目前數學網站的一大難題。「數學塗鴨板」還有個紀錄繪圖過程的功能，能用播放的方式觀看，對於一些需要看解題歷程的學習者而言，無疑又是個強大、有用的學習工具。圖 6.3.2-6、6.3.2-7 是解一題二元一次聯立方程式的動態過程，就好比老師在黑板寫的板書一樣，但多了能夠重覆播放，提供進度落後的學習者反覆觀看之用。

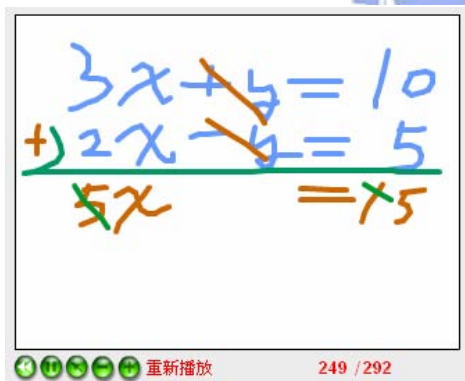


圖 6.3.2-6 數學塗鴨板解題歷程的呈現 (1)

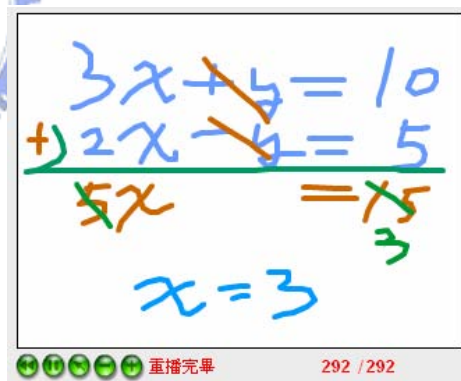


圖 6.3.2-7 數學塗鴨板解題歷程的呈現 (2)

6.3.3 線上數學函數繪圖器的架設與運用

對一個沒有數學軟體的學生而言，想電腦畫出一個數學函數圖形是不可能的，更別說將他的函數圖形畫出來，在網站上和眾人一同分享、討論。網站上將 Math Online (<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/>) 的線上數學函數繪圖器，整合至網站上，讓使用者可以在網路上，使用此數學函數繪圖器，將所需函數圖形畫出，並貼上網站供教學、討論之用。

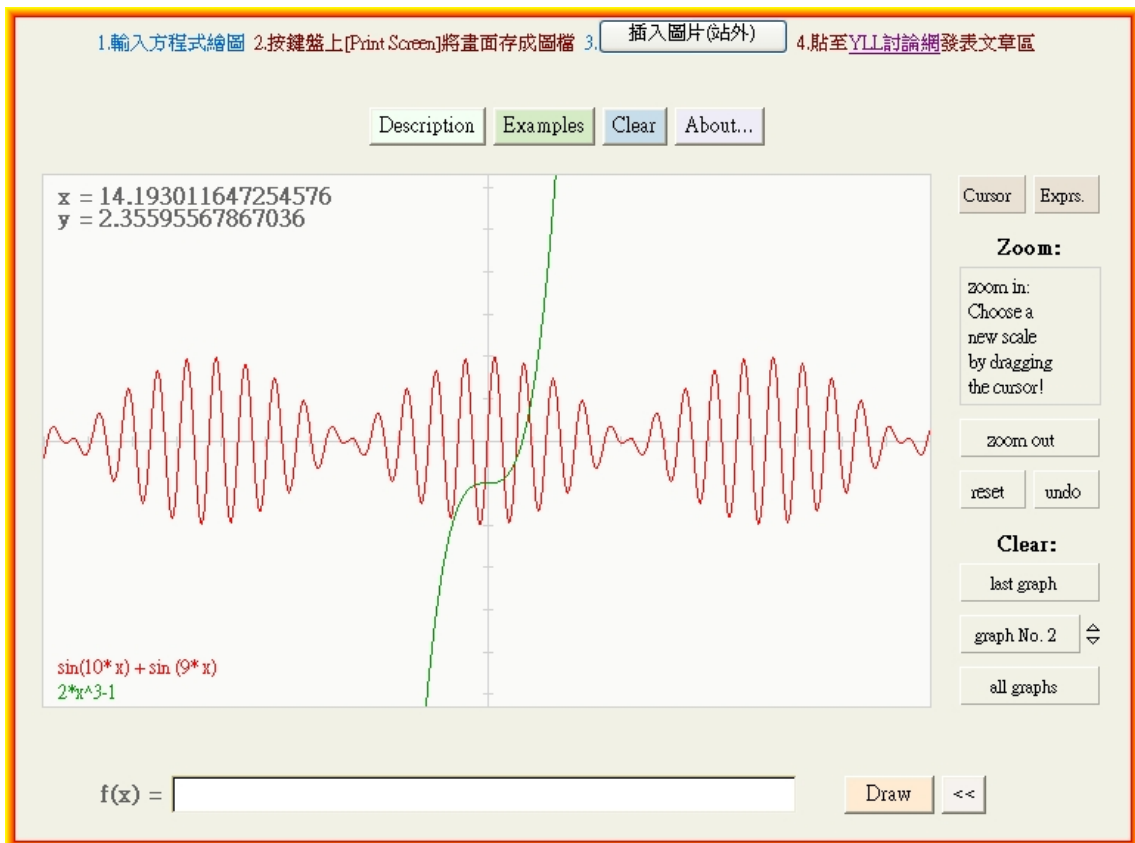


圖 6.3.3-1 網站上的線上數學函數繪圖器

圖 6.3.3-1 是網站上的線上數學函數繪圖器，在「 $f(x) =$ 」的輸入欄中，輸入所要畫的數學函數式，按下「Draw」，便能畫出對應的圖形，配合網站上的貼圖程式，便能將所繪的數學函數圖形，發表至網站上，實是一大線上的數學利器。

同時輸入多個數學函數式，可觀察函數交線情形，並可將圖形放大，做更局部的觀察。

6.3.4 其它有利的網站功能

其它站上使用者使用率高，且評價好的功能，將於本小節中陳述。

1. 完整的站內文章搜尋功能

『YLL 教學手札』、『YLL 討論網』均有完整的文章搜尋功能，提供使用者使用，圖 6.3.4-1、6.3.4-2 分別是二站的一個搜尋結果，尤其如今文章眾多，更突顯站內搜尋功能的重要性和方便性。



圖 6.3.4-1 YLL 教學手札搜尋範例



圖 6.3.4-2 YLL 討論網搜尋功能範例

2. 主題的回覆互動功能

目前數學網站普遍存在的一個大問題是，站長獨立經營網站，將自己的教學作品分享出來，網友們針對站長所發表的文章，只能觀看，心中有些疑問想要發問，或覺得站長的教學很好，想要鼓勵或發表心得，都無法作到。『YLL 教學手札』、『YLL 討論網』亦同樣考慮到這點，提供主題的回覆互動功能，解決此一問題，圖 6.3.4-3、6.3.4-4 分別是二站的一個教學主題，網友們的回饋或討論。

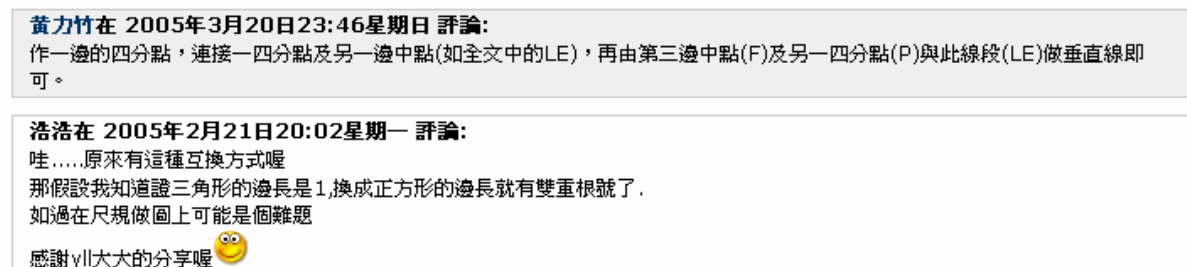


圖 6.3.4-3 YLL 教學手札網友的回饋、討論

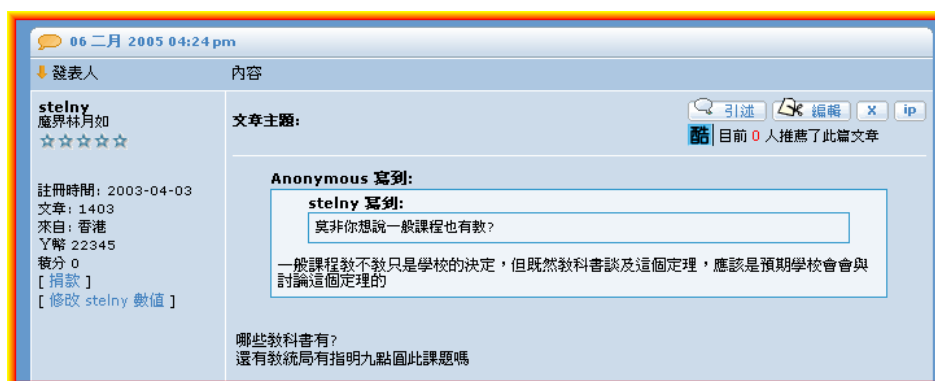


圖 6.3.4-4 YLL 討論網網友的回饋、討論

3. 貼圖和加入影片的功能

當文字不足以表達一個問題、內容時，適當的圖片或影片，正是一個提供內容者或發問、解答者所迫切需要的好工具。針對互動性極強的『YLL 討論網』，對所有使用者提供方便的「貼圖」、「插入影片」的功能，目前使用情況良好，也更添使用者願意線上討論及教學的意願。圖 6.3.4-5、6.3.4-6，分別是站上一則貼圖和插入影片的範例。

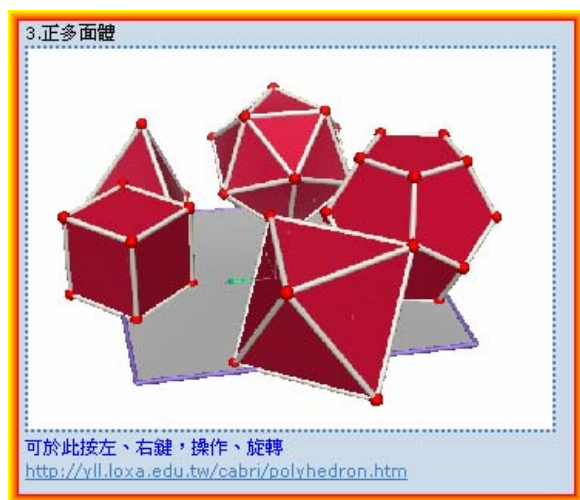


圖 6.3.4-5 網站提供線上貼圖的功能

圖 6.3.4-6 網站提供線上播放影片的功能

4. 我的最愛和精華區

網站上內容眾多，提供針對個人的功能是必要的，「我的最愛」功能，讓註冊的使用者，能將喜愛的內容，加上註記、列入最愛，於想再看時，只要按下「我的最愛」連結，便能再度觀看，圖 6.3.4-7，是加入最愛的連結及「我的最愛」的呈現方式。

對於新來訪者而言，能讓他們在最短的時間，進入網站的重點內容，熟悉站上呈現方式的一個好方式，就是提供「精華區」的功能，亦是針對各主題版面的一個好的整理版面方式，且文章列入精華，能鼓勵內容提供者提供好的內容，圖 6.3.4-8，「數學 Game 遊戲區」的精華區部份內容。



圖 6.3.4-7 我的最愛功能

圖 6.3.4-8 精華區功能

6.4 網站經營方式與成果

本節將分成二部份，對網站的經營理念、方式，作具體的描述，並作網站成果的介紹。



6.4.1 網站經營方式

本小節列舉幾則有效的經營方式，介紹如下：

1. 建立更新容易的網站

網站架設之初，唯一的理念就是「分享」。我能將我所有的數學內容，在網站上作資源的分享，造福更多的老師和學習者，這是大多數架設數學網站的想法，也是目前國內大部份數學網站的現狀。但時間一久，漸漸覺得一個人的時間有限，能分享的內容更有限，於是網頁更新的速度愈來愈慢，使人們到訪網站的意願亦愈來愈低，更新緩慢，是犯了經營網站的大忌。於是更新網頁程式，使內容更新容易，是我作的第一項努力，這部份如前面 6.2 節已作介紹。

2. 開發特有的內容和網站技術

當網站的內容完全沒有價值，或內容可被其他同性質的網站取代時，訪客是不可能

長久留在網站上的，豐富的內容對一個網站來說是絕對必要的，「只有這網站上有」，會是一個網站的成功原因之一，網站上的數學內容，如同三、四、五章所述，多具有原創性，絕不是他站所能取代，這是網站特有內容對一個網站的重要性。同樣地，網站能在線上直接打入數學方程式、畫出數學圖形、函數圖形，對使用者而言，是一大吸引力，這些網站技術的使用，已在 6.3 節中介紹。

3. 建立作者群制度

6.1.1 節中提及的，數學網站常有的三個主要會遭遇的困難或問題，其中第一個問題：「若是教師經營的個人數學教學網站，常面臨因為是個人經營，費時費心，卻無法常保內容持續更新，以致無法匯集人氣或長久經營。」針對此點，有了該找有志一同的人們，來合作的想法油然而生，且不限於身旁的老師，而是網路上廣大的人們。建立一個好的網站制度，架設適當的網頁程式，建立註冊會員制度，『讓每個人都能是作者』，讓到訪的網友，都能是內容提供者，並挑選表現良好的會員，給他特殊的權力，成為版面管理者，加強會員向心力，自己的角色則轉化成網站管理者，事實也證明「作者群」的制度是成功的，網站轉型為這種經營方式時，找到了一條光明的大道，深深發現合作的力量是多麼的大，於是網站的數學內容，便源源不絕地產生，在 6.4.2 小節中，有成果的介紹。



4. 化被動為主動

網站的內容，基本上是被動的，等待著訪客的到來，是大多數網站的共通性。網站上主動 e-mail 通知站上會員新內容，如圖 6.4.1-1 是一個範例，加強會員再次到訪的意願，且會員可主動訂閱有興趣主題的發展，主題有新發展時，網站程式會主動發信通知，如圖 6.4.1-2，化被動為主動，讓網站更具人氣。

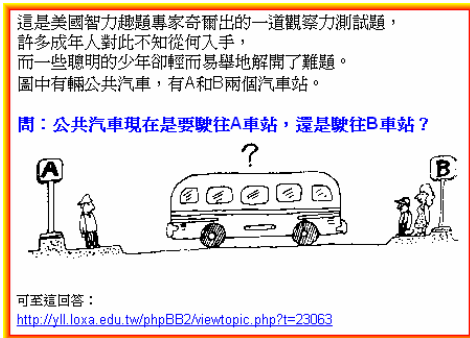


圖 6.4.1-1 主動 e-mail 通知站上會員新內容範例



圖 6.4.1-2 主題有新發展網站程式主動發信通知

5. 多元化的經營

網站經營一段時間後，漸漸有會員希望增加非數學內容的意見反應，讓網站內容不僅止於數學，這念頭曾讓我掙扎許久。增加其它類別的網頁內容，多元化的經營網站，是否會降低數學網頁的專業性？適量的多元化，我想是其中最大的原則，不可讓數學網站的主體性被取代，在此原則之下，網站的多元化是成功的。或許一個訪客初始到訪網站的本意，不是想來閱讀、學習數學，但他一定會注意到這裡的數學，等到有一天，他想討論、學習數學，他一定會想起這裡的數學，網站上這類的會員屢見不鮮，也讓網站的數學內容更蓬勃地發展。



6. 提供優良會員專有福利

對於持續提供數學文章內容、積極參與數學討論，且在網站上註冊、停留超過二個月時間的優良會員，免費提供網誌和相簿的服務。這項專有福利，實是一大鼓勵會員持續到訪的利器，對他們而言，這不但是他們可以學習、討論的園地，更是他們生活的地方，能在這寫心情、貼照片，更進而交到有同樣興趣的朋友等。



圖 6.4.1-3 優良會員個人免費網誌首頁



圖 6.4.1-4 優良會員個人免費相簿首頁

幾則有效的網站經營方式，是網站成立近三年來，不斷調整網站狀態，所累積的心得，具體的網站經營方式評估，則還有更多研究、努力的空間。

6.4.2 網站成果

1. 優質教育網站條件的自我檢視

2.2.1 節中，Creed 與 Plank 提出了設計教育網站的七個原則，本節將首先針對這七個原則，自行檢視網站的表現狀況。

(1) 網頁的下載速度要快(Good course web sites load quickly.)

網站主機架設在學術網路上，有極佳的頻寬，且把握適量圖片、聲音、動畫和 Java 程式等的原則，每頁網頁的讀取大多都能在一秒內完成，圖 6.4.2-1 是站上一個測試網頁完成速度的一個小程式所得出的數據。

8 reads, 1 writes, processed in 0.0955030s

圖 6.4.2-1 每頁網頁的讀取速度

(2) 網站要能容易地瀏覽(Good course web sites are easily navigated.)

站上所有內容按主題分區、分類，且透過版主群制度的建立，每日皆有固定版主整理、分類，並過濾不適宜的內容、討論，訪客很容易進入特定的主題進行分區發表內容、閱讀或討論。

(3) 網站要能提供最新資訊(Good course web sites contain timely information.)

成立數學新聞專區，隨時提供新知，並主動刪除過時資訊，且訪客以註冊會員身份登入，針對每位會員有新內容的分區，將自動以圖示作提示，如圖 6.4.2-2 所示。



圖 6.4.2-2 有新內容的分區自動以圖示作提示

(4) 網站要能容易識別(Good course web sites are easily identified.)

「YLL 教學手札」、「YLL 討論網」均以「YLL」為名，YLL 雖是我英文姓名的縮寫，但當初命名的第一考量，即以好記、不和他站重覆為原則，目前只要在各大搜尋引擎打入「YLL」三個英文字，不論大小寫，皆可輕易找到本站。

(5) 網站要鼓勵持續使用(Good course web sites encourage sustained use.)

建立優良會員制度，鼓勵長久在網站上分享內容的會員，可加入站上的優良會員，享受特殊福利。

(6) 網站要能幫助學生自我學習(Good course web sites put students in control of their own learning.)

網站兼具內容和討論的功能，學生如對網站內容或自己本身有數學問題，可輕易地隨時發問，網站已聚集許多熱心解答的數學愛好者，有助於學生自我學習。

(7) 網站要可供列印教材內容(Good course web sites make good printed text.)

網站考量到使用者有列印教材內容的需要，提供方便列印的功能，能自動去除不必要的網頁資訊、深色的網頁底色，方便任何想列印網頁內容的使用者。圖 6.4.2-3 是原始網頁，圖 6.4.2-4 是按下「友善列印」之後去除網頁底色，方便列印的畫面。



圖 6.4.2-3 未使用友善列印功能畫面



圖 6.4.2-4 使用友善列印功能去除網頁底色

針對以上 Creed 與 Plank 提出的設計教育網站的七個原則，已盡力不斷檢視該改進的地方，且持續思考更好的方式，以期讓網站有更好的表現。

2. 網站數值統計

(1) 「YLL 教學手札」部份

網站自 2004 年 10 月 24 日改版以來，採當日同一 IP 只計算一次的訪客數統計，截至 2005 年 7 月 3 日為止，共 252 天，平均每日訪客數為 282 人次，共計 71257 人次，如圖 6.4.2-5。



Google 搜尋的基礎是一種名為「Page Rank」的技術（Page 為創辦人之名，非指網頁）。這個技術是以其他網站連結的數目，來決定網站的知名度，如果由一個網頁連結到另一個網頁，可視為一票，則某一網頁贏得的票愈多，在搜尋結果中就排在愈前面。因此，當你在 Google 輸入查詢後，搜尋引擎會先找到含有查詢字眼的網頁，再依 Page Rank 技術排序[46]。以 2005 年 7 月 3 日的數據來說，「YLL 教學手札」在 Google 的網頁重要評等 PageRank，得到 5/10 的高分數，高過國內大多數主要知名的數學網站，如圖 6.4.2-6。

訪問摘要			
訪問總次數	71257	平均每天	282
今日訪問數	81		

圖 6.4.2-5 YLL 教學手札統計數據



圖 6.4.2-6 YLL 教學手札在 Google 的網頁重要評等

(2) 「YLL 討論網」部份

統計至 2005 年 7 月 3 日為止，數學文章數共 20372 篇（網站全部文章數 71755 篇，且每日刪除過期文章及不合版面的文章），訪客 1435627 人次，常態性會員 5991 人（網站自動刪除二個月內未發表文章會員及超過半年未再登入會員），平均每日訪客數為 1263 人次，網站人氣堪稱興盛。

3. 網站於知名搜尋引擎的表現

網站於知名搜尋引擎輸入相關的關鍵字，如「數學網站」、「數學討論」等，都能於搜尋結果的第一頁中即找到。

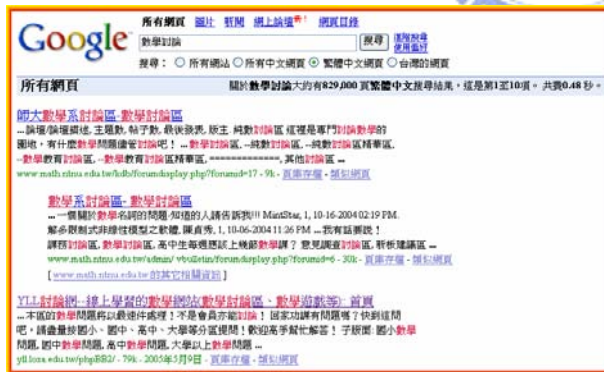


圖 6.4.2-7 網頁於在 Google 的搜尋結果



圖 6.4.2-8 網頁於在 Yahoo 的搜尋結果

圖 6.4.2-7、圖 6.4.2-8 分別是網頁於在 Google、Yahoo 中搜尋「數學討論」的結果畫面。

第七章 討論與展望

7.1 討論

我們使用 GSP，運用「遞迴」、「特殊化與一般化」的概念，開發了許多的數學數位內容。架設了一個成功熱門的數學網站，完成『即時』技術整合：方程式編輯器、塗鴨板、函數繪圖器等，並完成數學網路學習和行動研究之平台架構。

近年來，數學軟體隨著電腦科技的發展，如雨後春筍地不斷出現，且功能正逐漸增強，我們能以比以往容易的方式，製作出數學數位內容。學習這些軟體的使用，幫助自己、他人作數學的研究，或製作數學數位教材，協助學生學習數學，這個重要性亦將與日增，透過本研究的介紹，我們能發現 GSP 是個功能強大，低成本且使用容易的數學軟體，可協助創造許多互動性強的優質數位內容，應用廣範，能發展的數學內容範圍，小至小學，大至研究所的數學內容，都有其發揮的空間，的確是個值得推廣使用的數學數位內容研發工具。

本研究所提供的數學數位內容，均透過研究所課程上同儕的討論，或實際的教學，而不斷改進，另外，網站上網友的回饋，也是個重要的意見來源，一個人的能力永遠都是有限的，任何事情只有分享、合作才能真正找到出路。架設一個數學網站，分享自己所有的數學數位內容，可以讓更多的人使用，對研究的數學主題而言，可以讓主題透過分享，得到繼續討論、研究的可能；對一份數學數位教材而言，可以造福更多的老師、學生、學習者，減少重覆開發相同教材所浪費的時間。本研究提供有效的數學數位內容，和一個數學數位內容網站經營的成功經驗，給更多有相同需求、目標的研究者及教師們參考，更豐富網路上的數學數位內容，造福更多對數學有興趣的學習者。

7.2 展望

有愈來愈多的人，在網路上學習各式各樣的知識，數學的學習也透過網路，而不斷持續著，本研究提供的數學數位內容及架設的數學網站，均已得到了多數造訪網友的肯定，也有愈來愈多的網站，將本站加入推薦站，相關成果已於 6.4.2 節中表達。本研究是持續的，網站也將永續經營，透過網站的互動，將有助於我發展更多的數學內容。因研究主題的因素，本研究未加入利用其它非 GSP 的數學軟體開發的數學內容，這部份的努力，將是未來可以期待的目標。

本研究的網站經營成果，是透過具體的網站數值統計來陳述，更有說服力的網站研究，將可透過線上問卷和更多專業的方式來進行。開發更有利的線上數學討論工具，及更適切的數學數位內容，為推動資訊科技融入教學盡一分心力，成就更適性化數學內容、網站，亦將是未來主要努力的目標，也期待能得到最好的成果。



參考文獻

第一章 緒論

- [1] 林信男 (民 89)。適性化學習網站之研究：以高中數學為例。國立交通大學資訊科學研究所論文。
- [2] 李政豐 (民 92)。資訊科技融入數學教學模組實務的研究。國立交通大學網路學習碩士專班論文。
- [3] Mike Perkowitz, Oren Etzioni, *Adaptive Web Sites: an AI Challenge*, In Proceedings of the 15th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 16-23, Nagoya, Japan, 1997.

第二章 相關文獻探討

- [4] King, J. R., & Schattschneider D. (Eds.). (1997). *Geometry turned on : Dynamic software in learning, teaching, and research*. The Mathematical Association Of America.
- [5] Mammana, C. & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. The International Commission on Mathematical Instruction., 109-158.
- [6] Hanna, G. (2000). *Proof, explanation and exploration : An overview*. Educational Studies in Mathematics, 44, 5-23.
- [7] 陳國唐 (民 93)。建構動態數學學習環境之研究。國立交通大學網路學習碩士專班論文，9-11。
- [8] 李偵生 (民 91)。發展數學科 GSP 教學模組之行動研究—以商高定理為例。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文，14-16。
- [9] Balacheff, N. (1988). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*, in Pimm(ed.). *Mathematics Teachers and Children*. Hodder and Stoughton, London, 216-238.
- [10] Williams, E. (1979). *An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof*. Unpublished doctoral Dissertation. University of Alberta. Edmonton, Canada.
- Fischbein, E. (1982). *Intuition and Proof*. For the Learning of Mathematics 3(2),9-18,24.
- [11] 林保平 (民 86)。動態幾何教學的電腦輔助教材研究。八五年度國科會研究計畫報

告，計畫編號：85-2511-S-133-004。台北市立師院。

- [12] 林信男 (民 89)。適性化學習網站之研究：以高中數學為例。國立交通大學資訊科學研究所論文。
- [13] 翁秉仁，從台灣數學網站談起，
http://www.math.ntu.edu.tw/library/website/web_00_05_19.htm (accessed April 17, 2005)。
- [14] Tom Creed & Kathryn Plank, *Seven Principles for Good Course Web Site Design*,
The National Teaching & Learning Forum Volume 7, pages 8-10, November 1998.
- [15] 盧憲基 (民 93)。高中數學之網路教學研究—以雄中 ET 數位學園網路開課為例。
國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- [16] 洪榮昭、劉明洲 (民 86)。電腦輔助教學之設計原理與應用。台北：師大書苑。
- [17] 張彥宇 (民 92)。運用資訊融入教學之研究—以 K12 數位學校建置高中英文重補
修課程為例。國立高雄師範大學教學碩士班碩士論文。
- [18] 廖桂菁 (2003)。情境式網路學習環境互動行為分析：以高中地球科學線上學習為
例。師大學報，科學教育類，民 92 年，48(1)，91-116。

第三章 GSP 的遞迴功能於數學內容研發之運用

- [19] 李信昌，數學應用軟體介紹，<http://www.mathland.idv.tw/soft/mathsoft.htm>(accessed April 17, 2005)。
- [20] 顏貽隆 (民 92)。建構互動式學習環境實務之研究。國立交通大學網路學習碩士專
班論文，14-15。
- [21] 左台益，梁勇能 (民 90)。國二學生空間能力與 *van Hiele* 幾何思考層次相關性研究。
師大學報，46 (1,2)，1-20。
- [22] 左台益，蔡志能 (民 90)。高中生建構橢圓多重表徵之認知特性。科學教育月刊，
9 (3)，281-297。
- [23] 林星秀 (民 90)。高雄市國二函數課程 GSP 輔助教學成效之研究。國立高雄師大碩
士論文。
- [24] Nicholas J. (2004). *Iteration and Dynamic Geometry: Beyond Common Fractals
with The Geometry's Sketchpad*. Session 142 ,NCTM Philadelphia.
- [25] Eric W. Weisstein. *Riemann Sum*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html> (accessed April 17, 2005) .
- [26] Eric W. Weisstein. *Arc Length*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource.

- <http://mathworld.wolfram.com/ArcLength.html> (accessed April 17, 2005) .
- [27] Eric W. Weisstein. "Newton's Method. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html> (accessed April 17, 2005) .
- [28] Cindy C. , Ralph P. & Scott S. *Exploring Calculus*. Key Curriculum Press.
- [29] Roger B. Nelson(2000). A Geometry Series. *Proof Without Words II*, p111.
- [30] Shannon Umberger. *Spirals*.
<http://iwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2000/Umberger/EMAT6690smu/Essay2smu/Essay2smu.html>
 (accessed April 17, 2005) .

第四章 自我相似圖構圖的研究

- [31] 吳文成 (2003) 。 碎形Fractal 。 <http://alumni.nctu.edu.tw/~sinner/complex/fractals/> (accessed April 17, 2005) .
- [32] Magdy M. I. & Robert J. K.. *Generating Fractals Based on Spatial Organizations*. Illinois Institute of Technology College of Architecture, Chicago, IL USA.
- [33] Michael P. L.. *Constructing Fractals in Geometer's SketchPad*.
- [34] Harold M. H. & George S. (1993) . *Fractals : a user's guide for the natural sciences*. Oxford University Press.
- [35] Hans L. (1991) . *Fractals : endlessly repeated geometrical figures*. Princeton University Press, New Jersey.
- [36] Eric W. Weisstein. "Fractal." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html> (accessed April 17, 2005) .
- [37] Michael F. B. (1993) . *Fractals Everywhere*. Academic Press.

第五章 GSP 動態環境下的數學問題研究

- [38] 全任重 (民 85) 。 圓規、直尺與 *Cari-geometry* 。 數學傳播，20(1)，3-14。
- [39] 顏貽隆 (民 92) 。 建構互動式學習環境實務之研究。國立交通大學網路學習碩士專班論文。
- [40] 李政豐 (民 92) 。 資訊科技融入數學教學模組實務的研究。國立交通大學網路學習碩士專班論文。
- [41] Claudi Alsina(2004).Mathematics Magazine, Feb 2004,77,1.Academic Research Library p30.
- [42] 張海潮(民 93) 。 畢式定理和餘弦定理的證明。數學傳播季刊，28(3)，46-47。

- [43] Mathematics Without Words : Another Pythagorean-like Theorem(2004). The College Mathematics Journal, Vol.35,No.3,p215.
- [44] 廖菁芬。平面幾何切割問題的學習～鴿眼翻轉的探討。
http://www.hle.com.tw/bookmark/jhs_ma/02/07.htm (accessed January 16, 2005) .
- [45] 王文光(民 93)。凸多邊形各邊中點連線所圍的面積。數學傳播季刊，28(4)，41-45。

第六章 數學數位內容網站之經營

- [46] 吳燕惠，你，今天Google了嗎？<http://www.ieatpe.org.tw/magazine/139e.htm> (accessed January 16, 2005) .
- [47] 李俊佳 (民 92)。網路學習系統評估模式之研究。中原大學資訊管理研究所論文。
- [48] 尹玫君、劉藎藎 (民86)。遠距教學理論與文獻探討。台南師院初等教育學報，10，頁21-80
- [49] 何祖鳳、陳俊榮和陳銘欽 (1998)。網路教學系統評估準則之研究。遠距教育，7，頁20-29。
- [50] 吳明隆 (民87)。以網路為主的教學環境(Web-based instruction)內涵及規劃原則。教育部電算中心簡訊，8712。
- [51] 周倩、楊台恩 (民87)。電腦網路特質及其相關問題初探。社教雙月刊，84，頁17-20。
- [52] 林奇賢 (民87)。網路學習環境之設計及應用。資訊與教育，67，頁24-50。
- [53] 曹汝民 (民90)。非同步網路教學網站評鑑指標發展之研究。國立台北科技大學技術及職業教育研究所碩士論文。
- [54] 汪正中 (民 91)。高雄縣國小學生使用「LOXA 教育網」之現況與滿意度調查研究。國立高雄師範大學工業科技教育學系碩士學位論文，9-16。
- [55] Tom Creed & Kathryn Plank, *Seven Principles for Good Course Web Site Design*, The National Teaching & Learning Forum Volume 7, pages 8-10, November 1998.

附錄

[56] 蔡聰明 (民 89)。 *數學的發現趣談*。台北市，三民。

[57] Eric W. Weisstein. , *Star Polygon*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource.

<http://mathworld.wolfram.com/StarPolygon.html> (accessed April 17, 2005) .

[58] Eric W. Weisstein. *Complete Graph*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource.

<http://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html> (accessed April 17, 2005) .



附錄 1：其它的數學數位內容

以下補充一些未納入論文本文的數學內容，內容本身所包含的數學知識有深有淺，但這裡的重點在於強調內容數位化後，所呈現的視覺、動態效果，而不作繁雜的數學計算和證明。

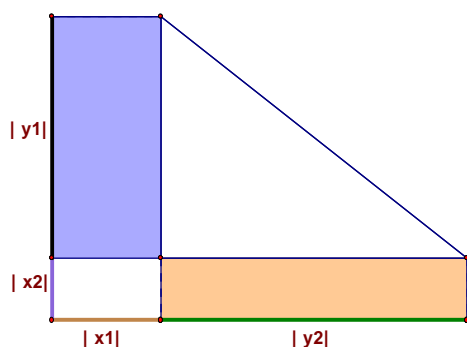
1. Proof Without Words

數學教師常常用盡心思，把數學公式證明得嚴謹而周全，這當然是數學教育中，一項重要的訓練，也是學生必備的基本素養之一。然而難以從直觀的角度，來理解抽象的數學公式，卻也是高中學生學習數學的困難之一[40]。

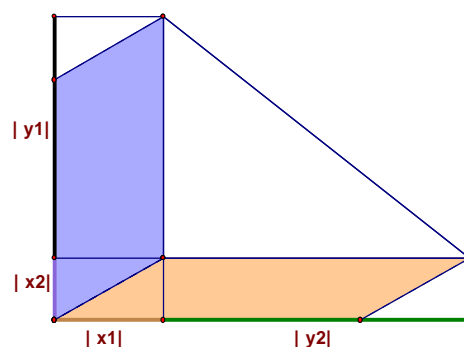
在數學中，一個公式或定理的證明，有各種方式，其中的『圖說證明』(Proof Without Words)，具有直觀、輕巧、雅緻之趣(蔡聰明，民 89)。幾何圖形具有直觀易明的優點，諺云：「一個圖勝過千言萬語」，這就是圖說證明之最佳寫照。1975 年，美國數學協會(The Mathematical Association of America，簡稱 MAA) 在其出刊的「Mathematics Magazine」期刊中，推出「Proof Without Words」專欄，是圖說證明再度受到重視的明証。該專欄至今已三十餘年，歷久不衰，且深受各界好評，目前已由 Roger B. Nelson 教授二度集結成單行本，更加圖顯「Proof Without Words」的獨特魅力[39]。

1.1 Cauchy-Schwarz Inequality

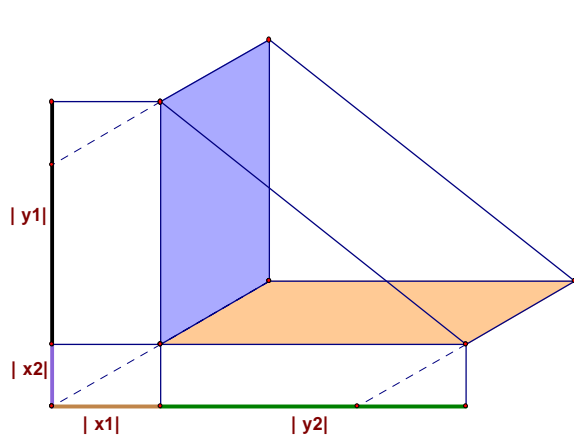
如圖附錄 1.1-1，有顏色部份長方形面積和 $|x_1||y_1| + |x_2||y_2|$ ，經如圖附錄 1.1-2、圖附錄 1.1-3、圖附錄 1.1-4 三步驟的動態轉換，有顏色部份長方形面積和仍為 $|x_1||y_1| + |x_2||y_2|$ 。



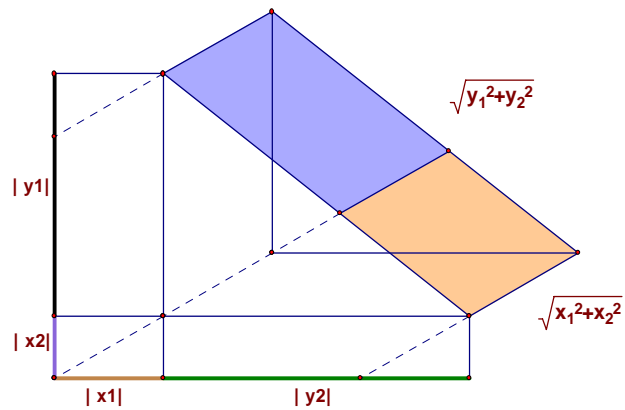
圖附錄 1.1-1 Cauchy-Schwarz Inequality 圖說證明(1)



圖附錄 1.1-2 Cauchy-Schwarz Inequality 圖說證明(2)

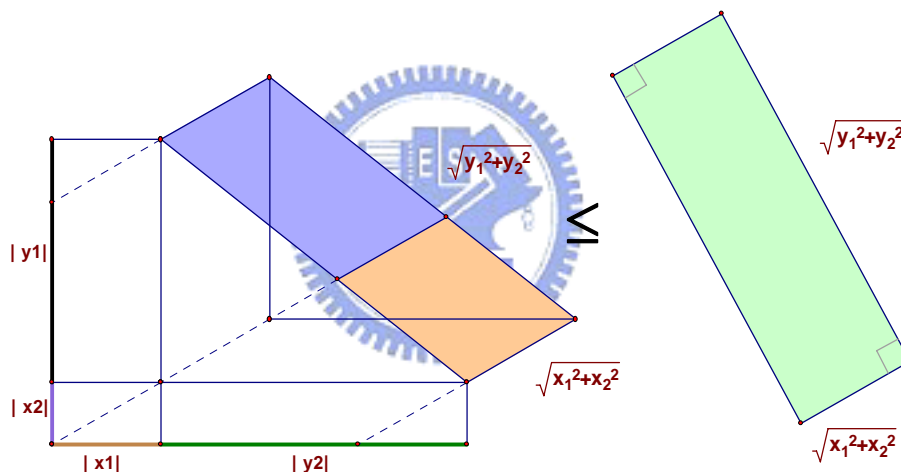


圖附錄 1.1-3 Cauchy-Schwarz Inequality 圖說證明 (3)



圖附錄 1.1-4 Cauchy-Schwarz Inequality 圖說證明 (4)

最後，由圖附錄 1.1-5，我們可知 $x_1y_1 + x_2y_2 \leq |x_1||y_1| + |x_2||y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ 。
故得證 Cauchy-Schwarz Inequality。



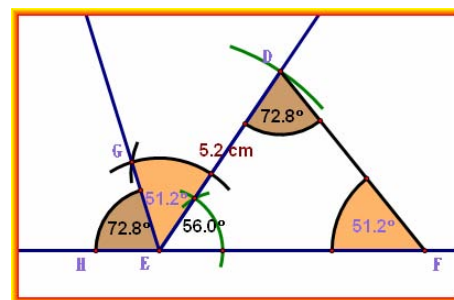
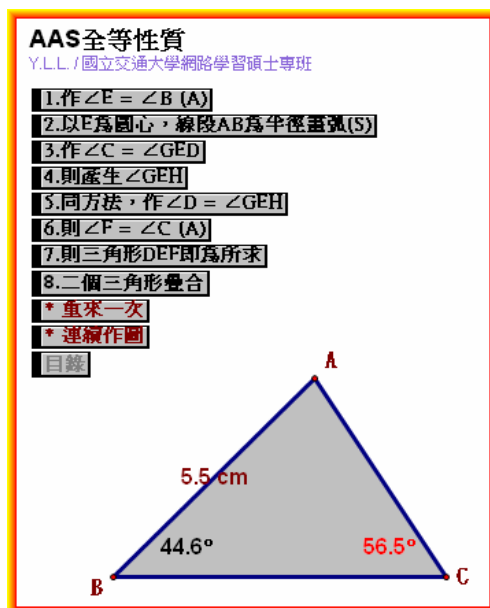
圖附錄 1.1-5 Cauchy-Schwarz Inequality 圖說證明 (5)

1.2 三角形的全等性質

三角形的五個全等性質：SSS、SAS、ASA、RHS、AAS，可用來作許多的幾何證明，但性質本身，卻不容易體會。透過 GSP 製作可供操作的介面，任意改變原始三角形，分別作五種性質的作圖方法，產生新三角形，再將二個三角形重疊，用視覺的方式來說明它們全等，可達到幫助了解全等性質及其作圖方法的功效。

今以 AAS 的操作的介面為例，任意改變 $\triangle ABC$ 的大小，如圖附錄 1.2-1，按順序按下 1~6 的按鈕，並同時作 AAS 的作圖說明，可得到如圖附錄 1.2-2 的 $\triangle DEF$ ，按下 7~8 的按鈕，可將二個三角形重合，以動態圖說的方式證明 AAS 全等性質，按下『重來一次』按鈕，將圖形恢復至最初狀態。

再次改變 $\triangle ABC$ 的大小，這次按下『連續作圖』，可以連續動態圖說的方式證明 AAS 全等性質。



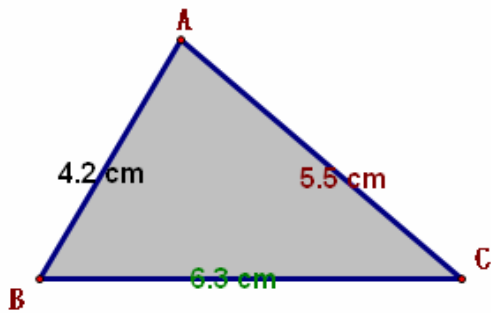
圖附錄 1.2-1 AAS 全等圖說操作介面說明 (1)

圖附錄 1.2-2 AAS 全等圖說操作介面說明 (2)

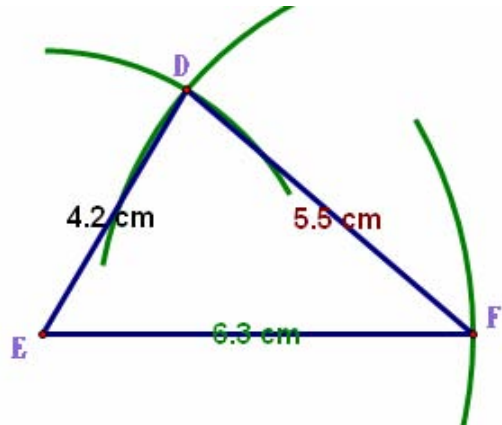
類似的操作方法，可用於 SSS、SAS、ASA、RHS 全等性質的圖說證明。

1.2.1 SSS 全等性質

任意二個三角形，若三邊對應相等，則二個三角形全等。如圖附錄 1.2.1-1 的 $\triangle ABC$ ，提供可操作的 SSS 作圖方法，得到如圖附錄 1.2.1-2 之 $\triangle DEF$ ，並將 $\triangle DEF$ 移至 $\triangle ABC$ 上，可以發現它們完全重合。任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，操作檔案，均能得到二個三角形完全重合的結果，以視覺的方式，了解 SSS 全等性質及 SSS 作圖方法。



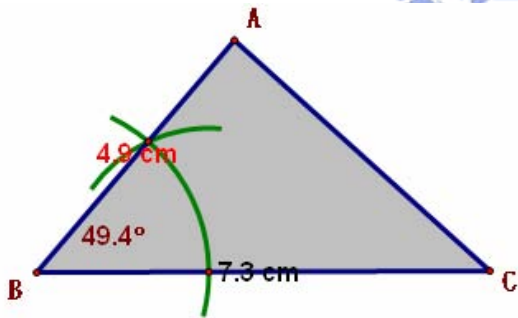
圖附錄 1.2.1-1 SSS 性質原始三角形



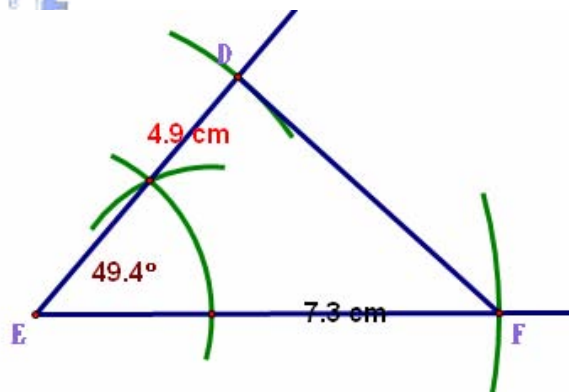
圖附錄 1.2.1-2 SSS 作圖

1.2.2 .SAS 全等性質

任意二個三角形，若二邊一夾角對應相等，則二個三角形全等。如圖附錄 1.2.2-1 的 $\triangle ABC$ ，提供可操作的 SAS 作圖方法，得到如圖附錄 1.2.2-2 之 $\triangle DEF$ ，並將 $\triangle DEF$ 移至 $\triangle ABC$ 上，可以發現它們完全重合。任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，操作檔案，均能得到二個三角形完全重合的結果，以視覺的方式，了解 SAS 全等性質及 SAS 作圖方法。



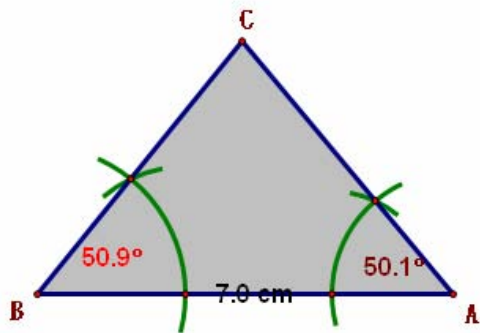
圖附錄 1.2.2-1 SAS 性質原始三角形



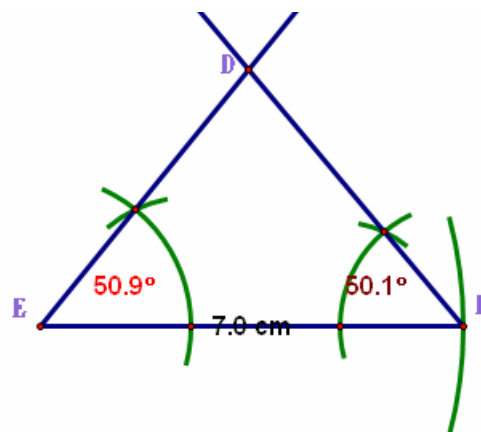
圖附錄 1.2.2-2 SAS 作圖

1.2.3 .ASA 全等性質

任意二個三角形，若二角一夾邊對應相等，則二個三角形全等。如圖附錄 1.2.3-1 的 $\triangle ABC$ ，提供可操作的 ASA 作圖方法，得到如圖附錄 1.2.3-2 之 $\triangle DEF$ ，並將 $\triangle DEF$ 移至 $\triangle ABC$ 上，可以發現它們完全重合。任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，操作檔案，均能得到二個三角形完全重合的結果，以視覺的方式，了解 ASA 全等性質及 ASA 作圖方法。



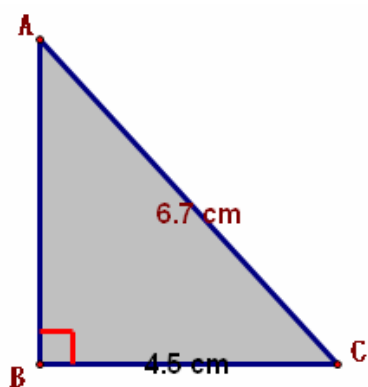
圖附錄 1.2.3-1 ASA 性質原始三角形



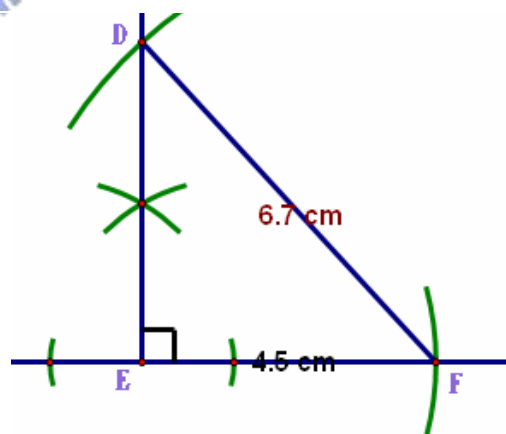
圖附錄 1.2.3-2 ASA 作圖

1.2.4 .RHS 全等性質

任意二個直角三角形，若斜邊和一股對應相等，則二個三角形全等。如圖附錄 1.2.4-1 的 $\triangle ABC$ ，提供可操作的 RHS 作圖方法，得到如圖附錄 1.2.4-2 之 $\triangle DEF$ ，並將 $\triangle DEF$ 移至 $\triangle ABC$ 上，可以發現它們完全重合。任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，操作檔案，均能得到二個三角形完全重合的結果，以視覺的方式，了解 RHS 全等性質及 RHS 作圖方法。



圖附錄 1.2.4-1 RHS 性質原始三角形

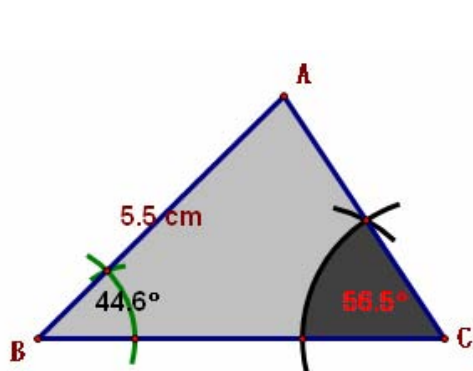


圖附錄 1.2.4-2 RHS 作圖

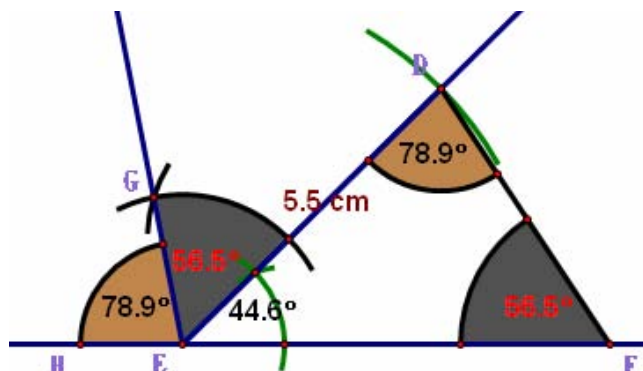
1.2.5 .AAS 全等性質

任意二個直角三角形，若二角一鄰邊對應相等，則二個三角形全等。如圖附錄 1.2.5-1 的 $\triangle ABC$ ，提供可操作的 AAS 作圖方法，得到如圖附錄 1.2.5-2 之 $\triangle DEF$ ，並將 $\triangle DEF$

移至 $\triangle ABC$ 上，可以發現它們完全重合。任意改變 $\triangle ABC$ 的形狀，操作檔案，均能得到二個三角形完全重合的結果，以視覺的方式，了解 AAS 全等性質及 AAS 作圖方法。



圖附錄 1.2.5-1 AAS 性質原始三角形



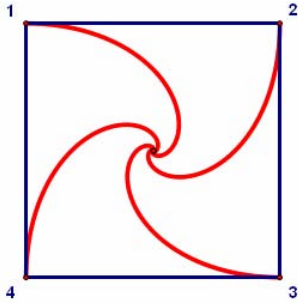
圖附錄 1.2.5-2 AAS 作圖

1.3 馬丁加德納 (Martin Gardner) 的四龜問題

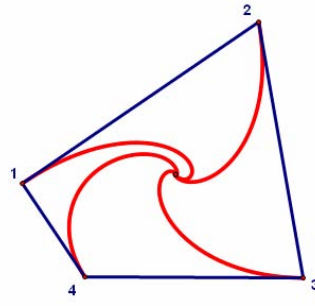
有四隻烏龜站在邊長為 2 米的正方形四個角上。這四隻烏龜有一個共同特點，1 號龜總是朝 2 號爬，2 號朝 3 號爬，3 號朝 4 號爬，4 號朝 1 號爬。現 4 隻烏龜均以每秒 1 cm 同時開始勻速爬動。

- (1) 請問經過多少時間它們才能在哪裡碰頭呢？
- (2) 每隻烏龜爬過多遠的距離後碰頭？

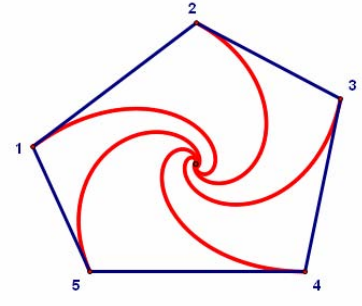
從物理學相對運動的觀點來看，1 號龜的行進方向，始終和 2 號龜的行進方向保持垂直，且他們都是等速每秒 1 cm 運動，最後必相遇於正方形對角線的交點，因為原本 1 號龜和 2 號龜的距離是 2 米 = 200cm，這也就是每隻烏龜將爬過的距離，所以他們相遇的時間便是 $\frac{200}{1} = 200$ 秒。我們能在 GSP 中作出動態的模擬畫面，如圖附錄 1.3-1 所示，是他們的行動軌跡。



圖附錄 1.3-1 四龜問題路徑 (1)

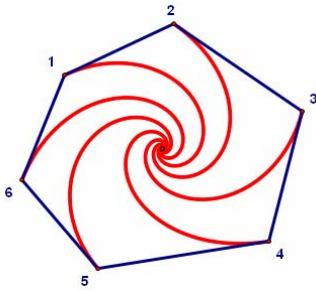


圖附錄 1.3-2 四龜問題路徑 (2)

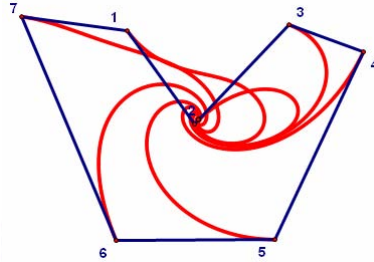


圖附錄 1.3-3 四龜延伸問題 (1)

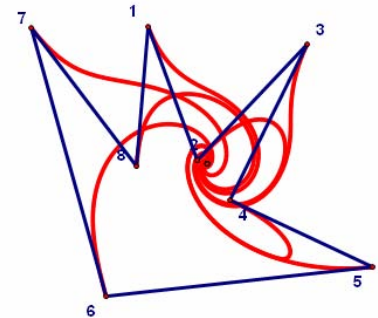
如果將正方形改成任意四邊形，則將得到如圖附錄 1.3-2 的行動軌跡。增加烏龜的數目，圖附錄 1.3-3、圖附錄 1.3-4、圖附錄 1.3-5、圖附錄 1.3-6，分別是任意五、六、七、八邊形的行動軌跡。



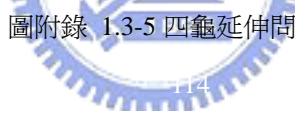
圖附錄 1.3-4 四龜延伸問題 (2)



圖附錄 1.3-5 四龜延伸問題 (3)



圖附錄 1.3-6 四龜延伸問題 (4)



2 正多邊形的延伸探討

針對正多邊形上每個頂點，作不同方式的連線，便會產生不同的圖形，本節將於 GSP 中開發製作的介面，分別介紹 Star Polygon、Complete Graph。

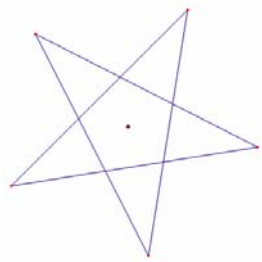
2.1 Star Polygon

一個 Star Polygon $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ ($p, q \in \mathbb{N}$)，所代表的意義是，以 p 個點平分一圓周，以任一點為基準，每隔 q 個點作二點的連線，所成的圖形。

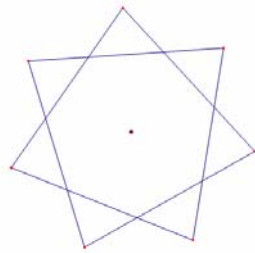
如果 $q = \frac{p}{2}$ ，所得圖形是 q 條交於圓心的直徑，這不在我們的討論範圍內，且

$\left\{ \frac{p}{q} \right\} \equiv \left\{ \frac{p}{p-q} \right\}$ ，故限制 $q < \frac{p}{2}$ ，可略去重覆圖形的討論。如圖附錄 2.1-1 是一些 Star

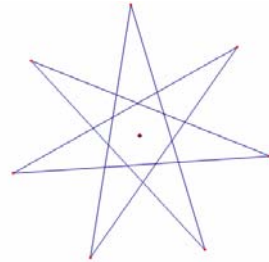
Polygon 的圖形。



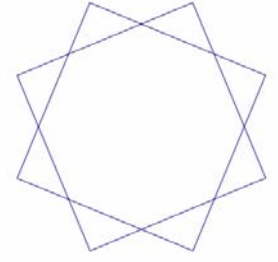
$$\left\{ \frac{5}{2} \right\}$$



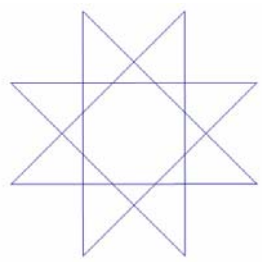
$$\left\{ \frac{7}{2} \right\}$$



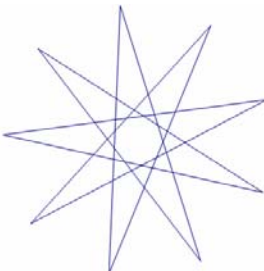
$$\left\{ \frac{7}{3} \right\}$$



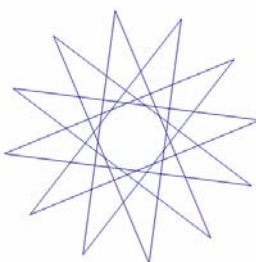
$$\left\{ \frac{8}{2} \right\}$$



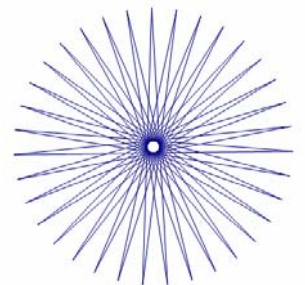
$$\left\{ \frac{8}{3} \right\}$$



$$\left\{ \frac{9}{4} \right\}$$



$$\left\{ \frac{12}{5} \right\}$$

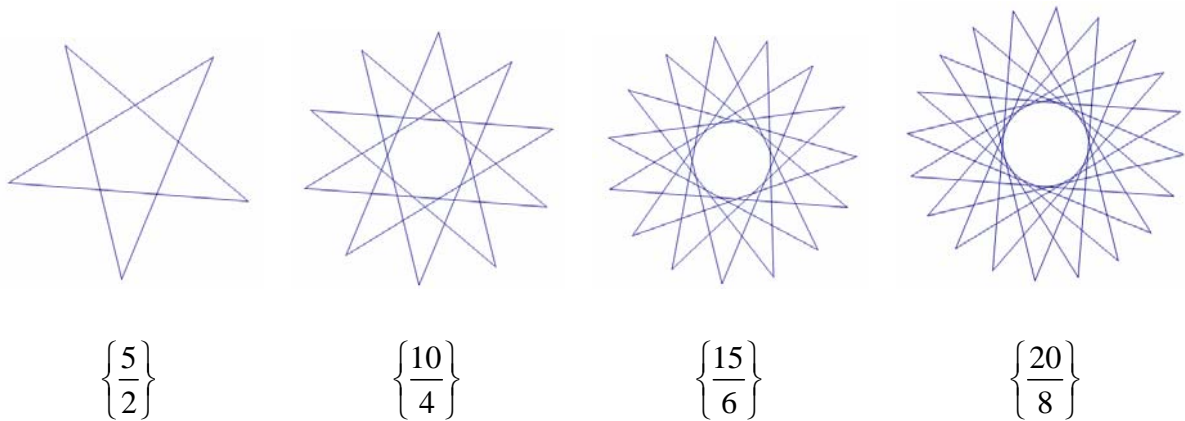


$$\left\{ \frac{35}{17} \right\}$$

圖附錄 2.1-1 一些 Star Polygon 的圖形

如果 $p' = np$, $q' = nq$ ($n \in \mathbb{N}$), 則 $\left\{ \frac{p'}{q'} \right\}$ 所代表的圖形是 n 個 $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ 的圖形各旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$

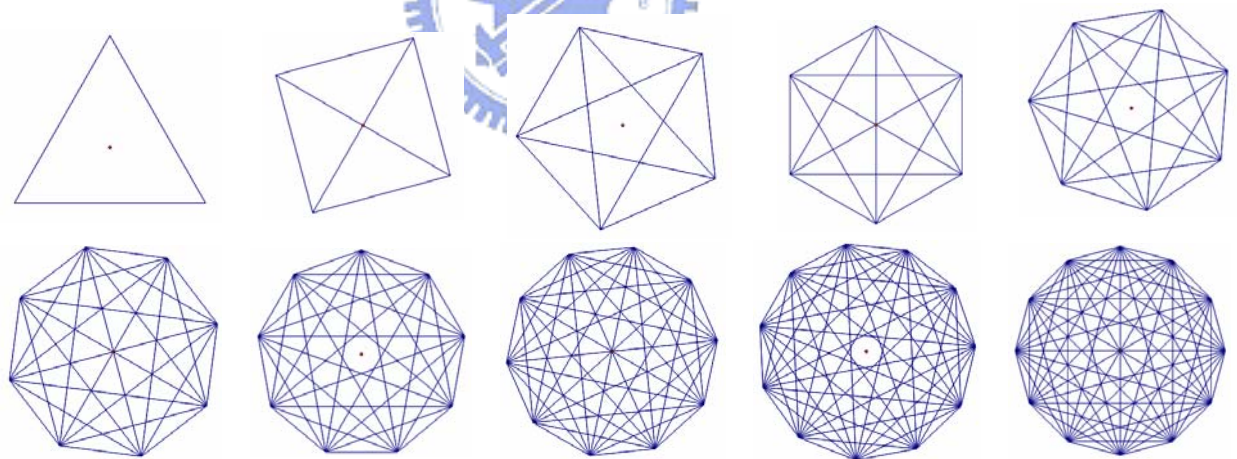
而成, 如圖附錄 2.1-2 分別是 $\left\{ \frac{5n}{2n} \right\}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) 的圖形。



圖附錄 2.1-2 $\left\{ \frac{5n}{2n} \right\}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) 的圖形

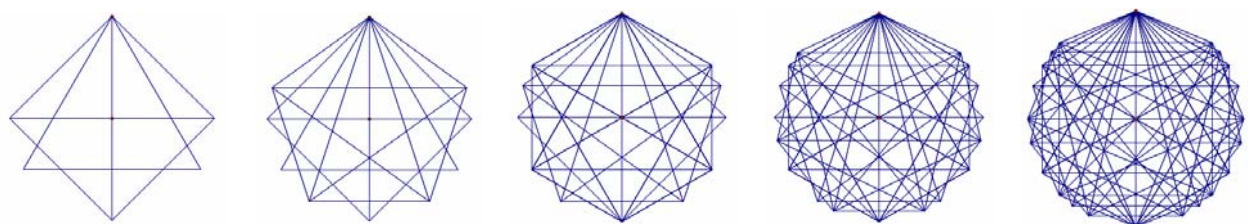
2.2 Complete Graph

一個類似 Star Polygon 的主題是 Complete Graph。一個 Complete Graph 所代表的意義是，以 n 個點平分一圓周，對每一個點作其它各點連線，所成的圖形。一個 Complete Graph 會有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線，如圖附錄 2.2-1 是一些 Complete Graph 的圖形。



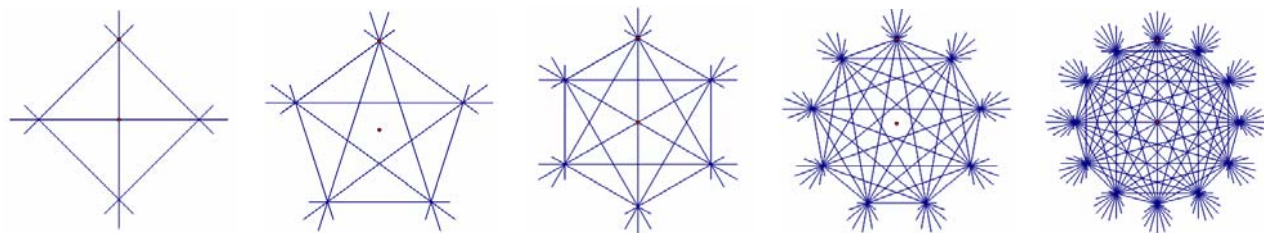
圖附錄 2.2-1 Complete Graph

將 $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ 的 Complete Graph 重疊於一頂點，可得如圖附錄 2.2-2 的圖形。



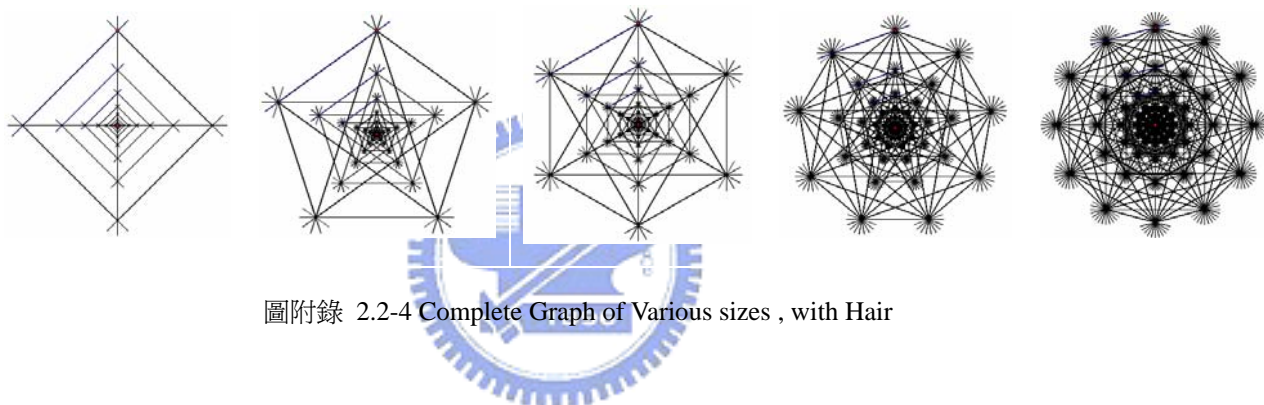
圖附錄 2.2-2 重疊的 Complete Graph

將 Complete Graph 中的每條直線稍向外延伸，便好像長了頭髮的 Complete Graph，稱爲 Complete Graph With Hair，如圖附錄 2.2-3 所示。



圖附錄 2.2-3 Complete Graph With Hair

結合數個大小不同的 Complete Graph With Hair 重疊於圓心，可得到美麗的變化，稱 Complete Graph of Various sizes , with Hair，如圖附錄 2.2-4 所示。



圖附錄 2.2-4 Complete Graph of Various sizes , with Hair

綜合以上討論，Star Polygon 與 Complete Graph 真可謂正多邊形的二種美麗又有趣的大變身！

附錄 2：各章可供操作的數學數位內容檔案列表

各章可供操作的數學數位內容檔案名稱，按章節列表，如表附錄 1，可於論文所附光碟中，開啓檔案，對應章節閱讀，或至「YLL教學手札」(<http://yll.loxa.edu.tw>)，隨時查看更新內容、檔案：

表附錄 1 各章可供操作的數學數位內容檔案

檔案名稱	對應章節內容（或檔案說明）
Riemann_Sum.gsp	3.3.1 Riemann Sum
Arc_Length.gsp	3.3.2 Arc Length
Taylor_Series.gsp	3.3.3 Taylor series
牛頓法.gsp	3.3.4 牛頓法求根的近似值
圖解無窮等比級數.gsp	3.4 圖解無窮等比級數
正多邊形的漸開線.gsp	3.5.1 正多邊形的漸開線
Square_Root_Spiral.gsp	3.5.2 Square Root Spiral
黃金縲線.gsp	3.5.3 黃金縲線
Self_Similarity.gsp	第四章 自我相似圖構圖的研究
由餘式定理所延伸出的幾何定理探討.gsp	5.1.1 由餘式定理所延伸出的幾何定理探討
由鴿眼翻轉所延伸出的幾何分割問題.gsp	5.1.2 由鴿眼翻轉所延伸出的幾何分割問題
凸多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積.gsp	5.1.3 凸多邊形各邊 n 等分點連線所圍面積
任意四邊形中點連線圖形.gsp	附錄 1：其它的數學數位內容
Cauchy_Schwarz_Inequality.gsp	附錄 1：其它的數學數位內容
三角形的全等性質.gsp	附錄 1：其它的數學數位內容
四龜問題.gsp	附錄 1：其它的數學數位內容
Star_Polygon&Complete_Graph.gsp	附錄 1：其它的數學數位內容

附檔名gsp的檔案為GSP的檔案，可於Key Curriculum Press
 (<http://www.keypress.com/>) 下載GSP試用版軟體，方可操作論文中所有GSP的檔案。

附錄 3：數學塗鴨板的使用方法與實際應用範例

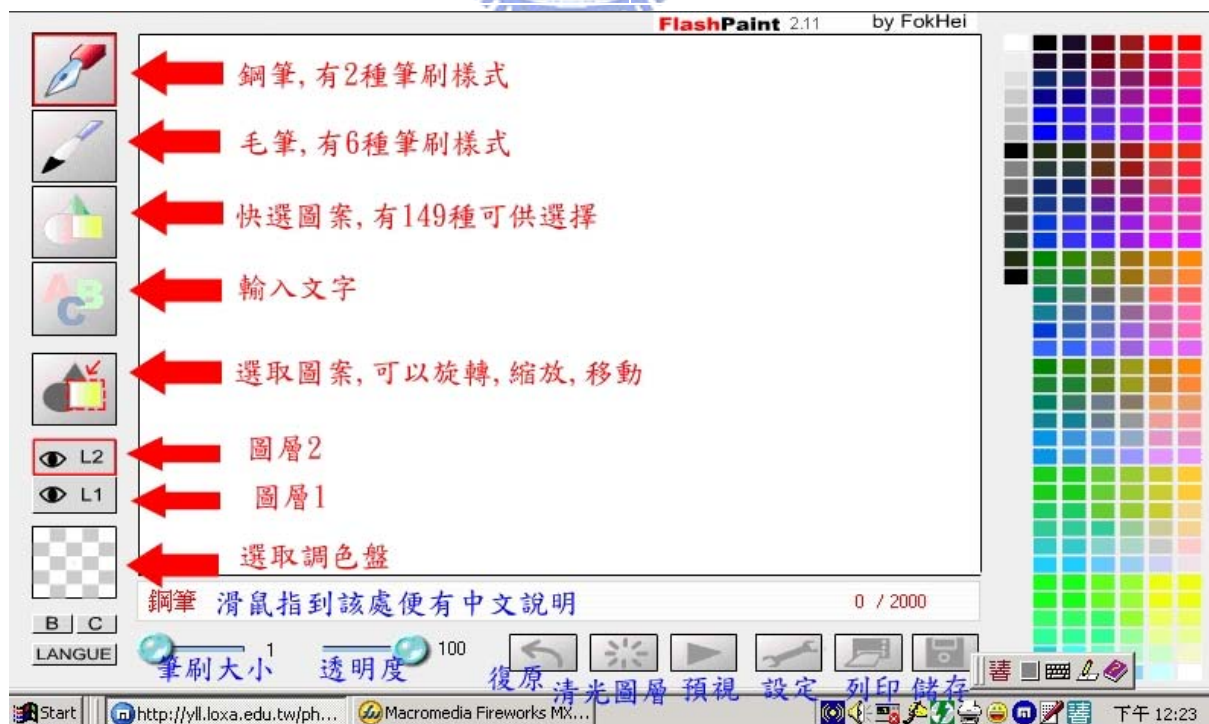
針對網站上數學塗鴨板的使用方法，介紹如下。如圖附錄 3-1，於發表文章介面，按下「我要塗鴨」，會產生如圖附錄 3-3 的繪圖介面新視窗，如圖中介紹，主要功能有：鋼筆（有 2 種筆刷樣式）、毛筆（有 6 種筆刷樣式）、快選圖案（有 149 種可選擇）、輸入文字、圖案旋轉縮放移動、圖層、調色盤、改變筆刷大小、調整透明度、復原、清光圖層、預視、設定、列印、儲存等。使用以上工具於繪圖完成後，按下右下角的「儲存」圖示，便可將繪圖儲存，如圖附錄 3-2，按下確定儲存圖示，便可將所需數學繪圖，加入發表的文章之中，讓所有數學繪圖，透過此數學塗鴨板，於網站上完成，而不再需要任何其它的工具，實是數學討論的一大利器。



圖附錄 3-1 數學塗鴨板使用方法 (1)



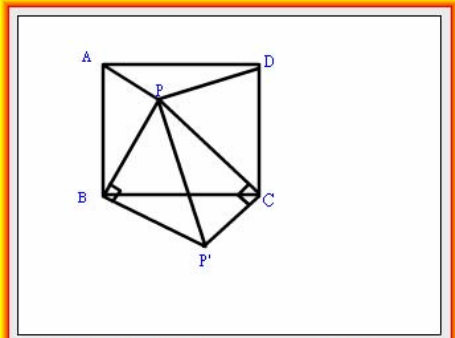
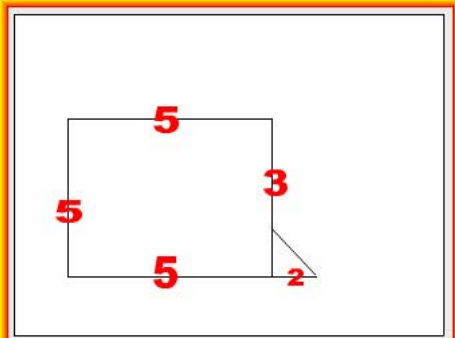
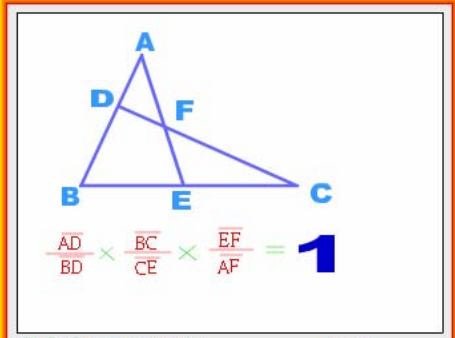
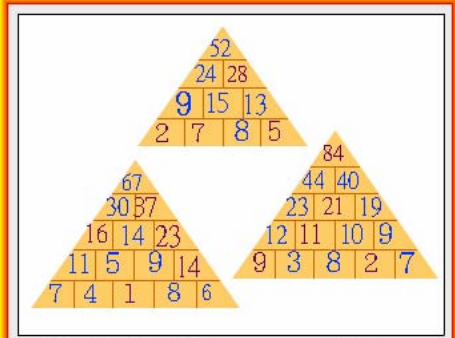
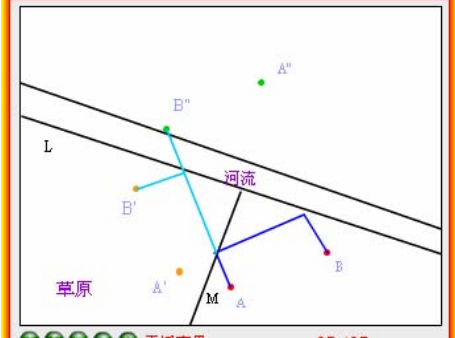
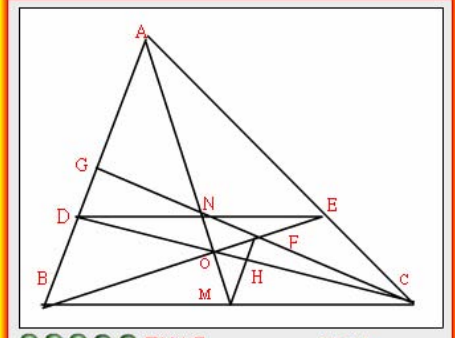
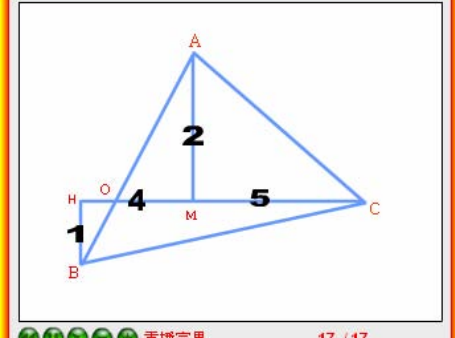
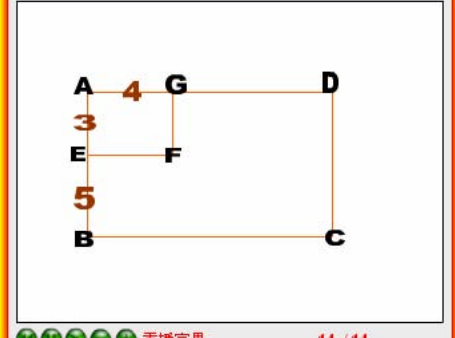
圖附錄 3-2 數學塗鴨板使用方法 (2)



圖附錄 3-3 數學塗鴨板使用方法 (3)

以下補充一些，網站上數學文章或問題的實際應用範例，如表附錄 2 所示。

表附錄 2 數學塗鴨板實際應用範例

 <p>重播完畢 22 / 22</p>	 <p>重播完畢 9 / 9</p>
 $\frac{AD}{BD} \times \frac{BC}{CE} \times \frac{EF}{AF} = 1$ <p>重播完畢 33 / 33</p>	 <p>重播完畢 81 / 81</p>
 <p>重播完畢 25 / 25</p>	 <p>重播完畢 21 / 21</p>
 <p>重播完畢 17 / 17</p>	 <p>重播完畢 14 / 14</p>

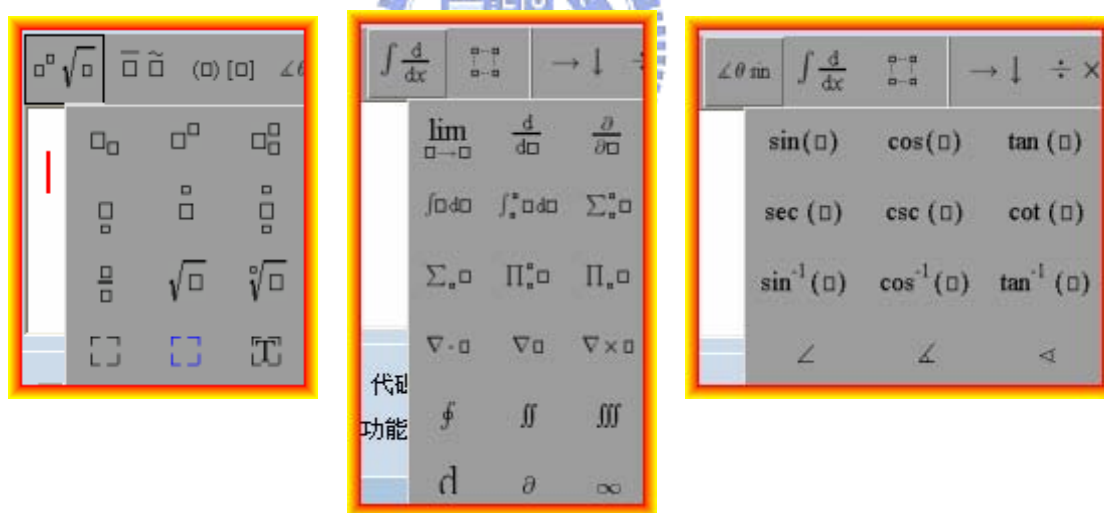
附錄 4：線上數學方程式編輯器的使用方法

針對網站上數學方程式編輯器的使用方法，介紹如下。如圖附錄 4-1，進入發表文章介面，便會見到數學方程式編輯器。



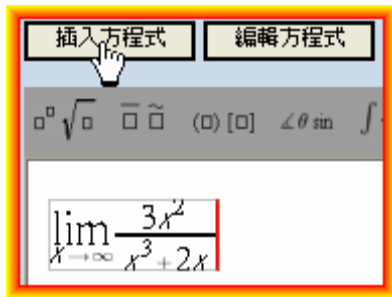
圖附錄 4-1 數學方程式編輯器使用方法 (1)

按下上方的功能列，能出現所需的數學方程式符號，如圖附錄 4-2，是部份的功能選單。

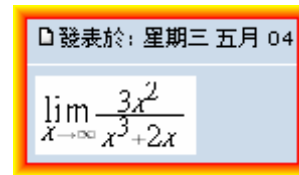


圖附錄 4-2 數學方程式編輯器使用方法 (2)

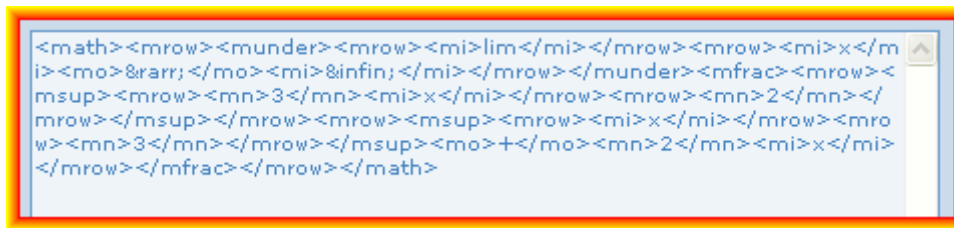
使用此功能列，用滑鼠點選，便可輕易輸入所需數學方程式符號，如圖附錄 4-3，輸入完畢時，按下「插入方程式」按鈕，便可自動加入 MathML 的網頁語法於發表文章中，如圖附錄 4-5，再由後端 java 程式處理，便可在發表文章時，作正確的顯示，如圖附錄 4-4，是程式輸出於網頁後的情形。



圖附錄 4-3 數學方程式編輯器使用方法 (3)



圖附錄 4-4 數學方程式編輯器使用方法 (5)



圖附錄 4-5 數學方程式編輯器使用方法 (4)

唯使用上要注意，使用方程式時，每打一行式子，就按「插入方程式」按鈕一次，不可輸入很多行數學式子後，才按「插入方程式」，以免顯示錯誤！



附錄 5：YLL 討論網重要外掛程式簡介

「YLL 討論網」主程式使用 phpBB2 的論壇程式，但欲造就現今多功能的狀態，需作許多的程式修改，也就是一般所謂的外掛程式，以下將對文章中主要提及的功能，作外掛程式的簡介，並提供程式修改方式或功能介紹的網址連結：

1. 線上數學方程式編輯器

簡介：提供於網頁中，直接輸入數學方程式的介面，詳如 6.3.1 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=18096>

2. 數學塗鴨板

簡介：提供於網頁中，直接畫出數學圖形或寫出解題過程的介面，詳如 6.3.2 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=16702>

3. 線上數學函數繪圖器

簡介：提供於網頁中，直接畫出數學函數圖形的介面，詳如 6.3.3 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=25378>



4. 撥放影片功能

簡介：提供於網頁中，直接撥放影片的介面，詳如 6.3.4 節中所述。

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=9944>

5. 子版面

簡介：讓討論區的分類，能以子版面來處理，作更細項的分類。

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=33019>

6. 精華區

簡介：優良文章，能加入精華區，提供精華區管理、觀看介面，詳如 6.3.4 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=5639>

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=18226>

7. 友善列印

簡介：除去文章畫面中不必要的資訊，及去除網頁背景色，方便列印，詳如 6.4.2 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=234>

8. 我的最愛

簡介：對每個註冊使用者，提供將所喜愛的文章，加入最愛的功能，方便閱讀，詳如 6.3.4 節中所述。

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=13961>

<http://www.phpbb.com/phpBB/viewtopic.php?t=73503>

9. 會員 Blog

簡介：對網站上的優良會員，提供免費的網誌，詳如 6.4.1 節中所述。

<http://yll.loxa.edu.tw/phpBB2/viewtopic.php?t=25860>

10. 會員相簿

簡介：對網站上的優良會員，提供免費的相簿，詳如 6.4.1 節中所述。

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=22791>



11. 推薦文章

簡介：每個註冊使用者，能對文章作出推薦，鼓勵發文者。

<http://phpbb-tw.net/phpbb/viewtopic.php?t=10117>

附錄 6：線上數學方程式編輯器程式碼修改方法

「YLL討論網」主程式使用phpBB2 的論壇程式，可至竹貓星球 (<http://phpbb-tw.net/phpbb/>) 免費下載安裝使用，網站上線上數學方程式編輯器，參考「交大應數數學交流網」(<http://forum.math.nctu.edu.tw/>)，使用Design Science開發的軟體WebEQ (<http://www.mathtype.com/en/products/webeq/>)，用java和php等網頁程式語言，作成線上數學方程式編輯器，結合在網頁上，使數學符號的輸入，可輕鬆地用滑鼠按、點就完成，非常方便。

以下便就如何架設數學方程式編輯器，於 phpBB2 的論壇程式上，作詳細的說明：

1.上傳 WebEQ 程式檔

至WebEQ官方網站 (<http://www.mathtype.com/en/products/webeq/>)，下載WebEQ試用版主程式，將其中免費的classes目錄下所有檔案，放至phpBB2 的目錄下。

2. 關閉 phpBB2 的 HTML 語法功能

進入 phpBB2 的後台管理介面，將 HTML 語法功能關閉，如圖附錄 5-1 所示。

會員及版面基本設定	
票選項目的最高限制數目	<input type="text" value="25"/>
允許使用 HTML 語法	<input type="radio"/> 是 <input checked="" type="radio"/> 否
允許使用的 HTML 標籤 以逗點區隔 HTML 標籤	<input type="text"/>

圖附錄 5-1 關閉 phpBB2 的 HTML 語法功能

3. 修改 phpBB2 程式碼

看到「之後，加上」，程式碼必須加在「尋找」語法的最後一行的下面。

看到「之前，加上」，程式碼必須加在「尋找」語法的最上一行的上面。

看到「在最後，加上」，程式碼必須加在所有程式碼的最後面。

看到「取代為」，在「尋找」語法找到的程式碼，必須完全的取代成「取代為」語法中的程式碼。

(1) 開啓 templates/你的風格目錄/posting_body.tpl

「尋找」

```

bbcode = new Array();
bbtags = new
Array('[b],[/b],[i],[/i],[u],[/u],[quote],[/quote],[code],[/code],[list],[/list],[list=],[/lis
t],[img],[/img],[url],[/url],[scroll],[/scroll],[fade],[/fade],[glow=red],[/glow],[shado
w=red],[/shadow],[stream],[/stream],[flash],[/flash],[highlight=red],[/highlight]');
imageTag = false;

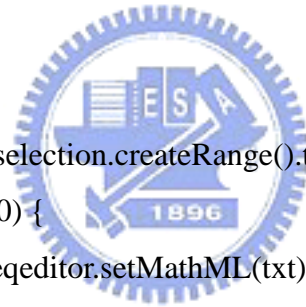
```

「之後，加上」

```

w = 500; h = 250;
var winl = (screen.width - w) / 2;
var wint = (screen.height - h) / 2;
winprops =
'height='+h+',width='+w+',top='+wint+',left='+winl+',scrollbars=yes,resizable=yes,toolbar=no
';
function editEQ() {
    if (document.selection) {
        txt = document.selection.createRange().text;
        if (txt.length != 0) {
            document.eqeditor.setMathML(txt);
        }
    }
}

```



```

function insertMML() {
    var msg = document.eqeditor.getPackedMathML();
    insertAtCaret(document.post.message, msg);
}
function insertAtCaret (textEl, text) {
    if (textEl.createTextRange && textEl.caretPos) {
        var caretPos = textEl.caretPos;
        caretPos.text =caretPos.text.charAt(caretPos.text.length - 1) == '?'  text + ': text;
    } else
        textEl.value  = text;
}

```

```
}
```

「尋找」

```
<tr>
  <td colspan="9"><span class="gen">
    <textarea name="message" rows="15" cols="35" wrap="virtual"
style="width:450px" tabindex="3" class="post" onselect="storeCaret(this);"
onclick="storeCaret(this);" onkeyup="storeCaret(this);">{MESSAGE}</textarea>
  </span></td>
</tr>
</table><br>
```

「之後，加上」

```
<br>
<input type="button" value="插入方程式" onclick="insertMML();
document.post.message.focus();"><span>&nbsp;</span><input type="button" value="編輯方
程式" onclick="editEQ();"><span>&nbsp;</span><br><br>
<applet codebase="/classes" code="webeq3.editor.InputControl" height="150"
width="650" name="eqeditor" MAYSCRIPT>
  <param name="eq" value="">
</applet>
```

「尋找」

```
{TOPIC_REVIEW_BOX}
```

「之前，加上」

```
<script>
var numOfApplets = document.applets.length;

for (i = 0; i < numOfApplets; i++) {
  if (document.applets[i].name != "eqeditor") {
    document.applets[i].width = document.applets[i].preferredWidth()+8;
    document.applets[i].height = document.applets[i].preferredHeight()+8;
  }
}
```

```
}  
</script>
```

(2) 開啓 **templates/你的風格目錄/viewtopic_body.tpl**

「在最後，加上」

```
<script>  
var numOfApplets = document.applets.length;  
  
for (i = 0; i < numOfApplets; i++) {  
    if (document.applets[i].name != "eqeditor") {  
        document.applets[i].width = document.applets[i].preferredWidth()+8;  
        document.applets[i].height = document.applets[i].preferredHeight()+8;  
    }  
}  
</script>
```



(3) 開啓 **templates/你的風格目錄/posting_topic_review.tpl**

「在最後，加上」

```
<script>  
var numOfApplets = document.applets.length;  
  
for (i = 0; i < numOfApplets; i++) {  
    if (document.applets[i].name != "eqeditor") {  
        document.applets[i].width = document.applets[i].preferredWidth()+8;  
        document.applets[i].height = document.applets[i].preferredHeight()+8;  
    }  
}  
</script>
```

(4) 開啓 **includes/topic_review.php**

「尋找」

```
'MESSAGE' => $message,
```

「取代為」


```
'MESSAGE' => insertAppletTag($message),
```

(5) 開啓 `posting.php`

「尋找」

```
include($phpbb_root_path . 'includes/functions_post.'.$phpEx);
```

「之後，加上」

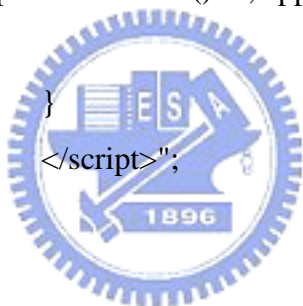
```
function insertAppletTag($text) {  
    $strans = array("&lt;" => "<", "&gt;" => ">");  
    $count = 0;  
    $pointer = 0;  
    $tagBeginIdx = strpos($text, "&lt;math&gt;", $pointer);  
    $return = "";  
  
    while (is_integer($tagBeginIdx)) {  
        $return = $return . substr(substr($text, $pointer, $tagBeginIdx-$pointer), $strans);  
        $tagEndIdx = strpos($text, "&lt;/math&gt;", $tagBeginIdx+1);  
        if (is_integer($tagEndIdx)) {  
            $count++;  
            $return = $return . "<APPLET CODEBASE=\"./classes\"  
CODE=\"webeq3.ViewerControl\" ALIGN=CENTER NAME=eq MAYSCRIPT>" .  
            "<PARAM NAME=eq VALUE=\"\" . substr(substr($text, $tagBeginIdx,  
$tagEndIdx-$tagBeginIdx+13), $strans) . \">\" .  
            "<PARAM NAME=ALIGN VALUE=\"CENTER\">" .  
            "<PARAM NAME=VALIGN VALUE=\"CENTER\">" .  
            "<PARAM NAME=SELECTION VALUE=\"TRUE\">" .  
            "</APPLET>";  
        } else break;  
        $pointer = $tagEndIdx+13;  
        $tagBeginIdx = strpos($text, "&lt;math&gt;", $pointer);  
    }  
    $return = $return . substr($text, $pointer, strlen($text)-$pointer);  
    if ($count > 0) {  
        $return = $return . "\n" . "  

```

```

<script>
function checkApplet(appletName, handler) {
    if (document && document.applets[appletName] &&
appletName != \"eqeditor\") {
        var f = new Function(handler);
        f(document.applets[appletName]);
    } else {
        setTimeout(checkApplet, 1000, appletName,
handler);
    }
}
for (i = 0; i < document.applets.length; i++) {
    checkApplet( document.applets[i].name, function
(applet) { applet.width = applet.preferredWidth()+8; applet.height =
applet.preferredHeight()+8; } );
}
</script>";
}

return $return;
}

```



「尋找」

```
$template->assign_vars(array(
```

```
    'TOPIC_TITLE' => $preview_subject,
```

「之前，加上」

```
    $preview_message = insertAppletTag($preview_message);
```

(6) 開啓 **viewtopic.php**

「尋找」

```
include($phpbb_root_path . 'includes/bbcode.'.$phpEx);
```

「之後，加上」

```
function insertAppletTag($text) {
```

```
    $strans = array("&lt;" => "<", "&gt;" => ">");
```

```

$count = 0;
$pointer = 0;
$tagBeginIdx = strpos ($text, "&lt;math&gt;", $pointer);
$return = "";

while (is_integer($tagBeginIdx)) {
    $return = $return . strstr(substr($text, $pointer, $tagBeginIdx-$pointer), $trans);
    $tagEndIdx = strpos ($text, "&lt;/math&gt;", $tagBeginIdx+1);
    if (is_integer($tagEndIdx)) {
        $count++;
        $return = $return . "<APPLET CODEBASE=\"./classes\"
CODE=\"webeq3.ViewerControl\" ALIGN=CENTER NAME=eq width=650 height=150
MAYSCRIPT>" .
        "<PARAM NAME=eq VALUE=\"\" . strstr(substr($text, $tagBeginIdx,
$tagEndIdx-$tagBeginIdx+13), $trans) . \">\" .
        "<PARAM NAME=ALIGN VALUE=\"CENTER\">" .
        "<PARAM NAME=VALIGN VALUE=\"CENTER\">" .
        "<PARAM NAME=SELECTION VALUE=\"TRUE\">" .
        "</APPLET>";
    } else break;
    $pointer = $tagEndIdx+13;
    $tagBeginIdx = strpos ($text, "&lt;math&gt;", $pointer);
}
$return = $return . substr($text, $pointer, strlen($text)-$pointer);
if ($count > 0) {
    $return = $return . "\n" . "
        <script>
        function checkApplet(appletName, handler) {
            if (document && document.applets[appletName] &&
appletName != \"eqeditor\") {
                var f = new Function(handler);
                f(document.applets[appletName]);
            } else {

```

```

        setTimeout(checkApplet, 1000, appletName,
handler);
    }
}
for (i = 0; i < document.applets.length; i++) {
    checkApplet( document.applets[i].name, function
(applet) { applet.width = applet.preferredWidth()+8; applet.height =
applet.preferredHeight()+8; } );
}
</script>";
}

return $return;
}

```

「尋找」

'MESSAGE' => \$message,

「取代為」

'MESSAGE' => insertAppletTag(\$message),



4. 完工！