

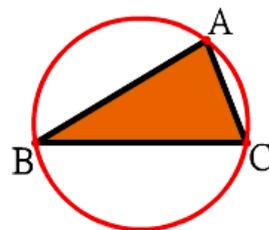
附錄二 「三角形三心」教學活動講義與課後作業

2.1 「相見歡——認識三角形三心」講義

一、外心定義：如下圖，若有一個圓通過 $\triangle ABC$ 三頂點，則這個圓稱為 $\triangle ABC$ 的外接圓，三角形稱為圓內接三角形，外接圓的圓心稱為外心。

問題一：如何畫外接圓？找_____與_____

問題二：外心（外接圓圓心）如何找？_____



● 先備知識：

中垂線性質：一線段的中垂線上任一點到此線段兩端等距離。

中垂線逆性質：與一線段兩端等距離的點必在此線段的中垂線上。

● 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察三角形三邊中垂線是否會交於一點？請描繪三個你認為不同的三角形於下面並說明理由或想法。



2. 透過軟體的操弄，觀察三角形三邊中垂線的交點可否當作外心來畫外接圓？請說明理由或想法。

● 結論：三角形三中垂線必相交於同一點，此點即為三角形的外心。

問題三：外心到三角形_____等距離，此距離為外接圓的_____。

● 說明：

1. 透過軟體的操弄，你是否觀察到外心到三角形三頂點等距離？請說明理由或想法。

2. 運用外心到三角形三頂點等距離的特性，請舉生活例子說明之並請描繪於軟體上與同學分享。

- 結論：三角形的外心至三頂點等距離，此距離即為外接圓半徑。

問題四：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫_____個外接圓，任意一個圓可畫出_____個內接三角形。

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察任意一個三角形可以做出幾個不同的外心並進而畫出外接圓？請說明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，觀察任意一個圓可以做出幾個不同的內接三角形？請說明理由或想法。

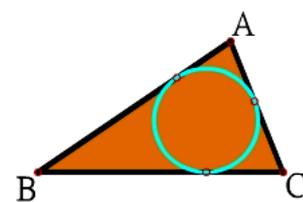
3. 透過軟體的操弄，觀察圓內接三角形任兩邊中垂線的交點是否即為圓心所在？請說明理由或想法。

- 結論：1. 圓內接三角形任兩邊中垂線的交點（外心）即為圓心所在。 2. 任意一個三角形可畫出一個外接圓，任意一個圓可畫出無限多個內接三角形。

二、內心定義：如下圖，若有一個圓與 $\triangle ABC$ 三邊相切，則這個圓稱為 $\triangle ABC$ 的內切圓，三角形稱為圓外切三角形，內切圓的圓心稱為內心。

問題一：如何畫內切圓？找_____與_____

問題二：內心（內切圓圓心）如何找？_____



- 先備知識：

角平分線性質：角平分線上任一點到此角的兩邊等距離。

角平分線逆性質：到一角兩邊等距離的點必在此角的角平分線上。

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察三角形三角平分線是否會交於一點？請描繪三個你認為不同的三角形於下面並說明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，觀察三角形三角平分線的交點可否當作內心來畫內切圓？

- 結論：三角形三角平分線必交於同一點，此點即為三角形的內心。

問題三：內心到三角形_____等距離，此距離為內切圓的_____。

● 說明：

1. 透過軟體的操弄，你是否觀察到內心到三角形三邊等距離？請說明理由或想法。

2. 運用內心到三角形三邊等距離的特性，請舉生活例子說明之並請描繪於軟體上與同學分享。

● 結論：三角形的內心至三邊等距離，此距離即為內切圓半徑。

問題四：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫_____個內切圓，任意一個圓可畫出_____個外切三角形。

● 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察任意一個三角形可以做出幾個不同的內心並進而畫出內切圓？請說明理由或想法。

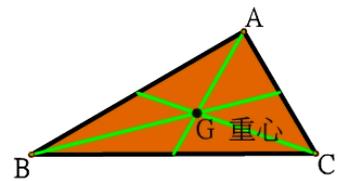
2. 透過軟體的操弄，觀察任意一個圓可以做出幾個不同的外切三角形？請說明理由或想法。

3. 透過軟體的操弄，觀察圓外切三角形任兩角平分線的交點是否即為圓心所在？請說明理由或想法。

結論：1. 圓外切三角形任兩角平分線的交點（內心）即為圓心所在。
 2. 任意一個三角形可畫_____個內切圓，任意一個圓可畫出_____個外切三角形

三、重心定義：如下圖，任意 $\triangle ABC$ 的三條中線交於一點 G ，則此 G 點稱為 $\triangle ABC$ 的重心。

問題一：重心如何找？_____



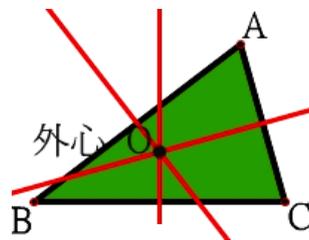
● 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察三角形三中線是否會交於一點？請描繪三個你認為不同的三角形於下面並說明理由或想法。



2.2 「超級任務——三角形三心位置追追追」講義

一、外心：如下圖一，外心為三角形三邊三中垂線的交點。



圖一

問題一：外心位在三角形何處？_____

● 說明：

1. 透過軟體的操弄，從三角形三內角的度數的改變，觀察外心在三角形位置上的變化並說明描繪於下。

2. 透過軟體的操弄，請觀察直角三角形斜邊中點是否到三頂點等距離？請說明理由或想法。

- 結論：三角形為銳角三角形時，外心在三角形內部；
三角形為直角三角形時，外心在斜邊中點上；
三角形為鈍角三角形時，外心在三角形外部。
直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。

問題二：圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為_____，即外接圓半徑為直角三角形斜邊_____。

● 先備知識：

圓周角度數等於所對弧度數的一半。

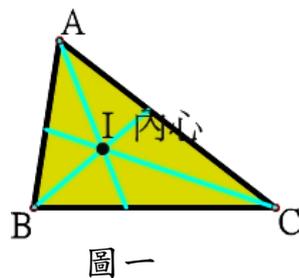
● 說明：

1. 透過軟體的操弄，請觀察內接直角三角形斜邊與外接圓直徑有何關係？請說明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，請觀察內接三角形的一邊為直徑時，此三角形是否為直角三角形？請說明理由或想法。

- 結論：1. 圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形必為直角三角形，反之圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為直徑。
2. 圓內接直角三角形中，外接圓半徑 $R = \text{斜邊} \div 2$

二、內心：如下圖一，內心為三角形三內角平分線的交點。



問題一：內心位在三角形何處？_____

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，從三角形三內角的度數的改變，觀察內心在三角形位置上的變化並說明描繪於下。

- 結論：內心必在三角形內部。

問題二：在直角三角形中，內切圓半徑 $r =$ _____。

- 先備知識：

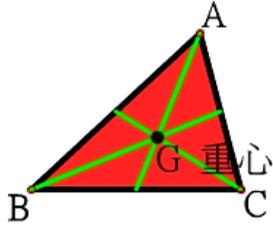
切線長性質：兩切線長等長。

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察圓外切直角三角形兩股和與斜邊有何關係？請說明理由或想法。

- 結論：圓外切直角三角形中，內切圓半徑 $r = (\text{兩股和一斜邊}) \div 2$

三、重心：如下圖一，重心為三角形三中線的交點。



圖一

問題一：重心位在三角形何處？_____

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，從三角形三內角的度數的改變，觀察重心在三角形位置上的變化並說明描繪於下。



- 結論：重心必在三角形內部。

問題二：重心在任一中線上的比例關係為何？_____

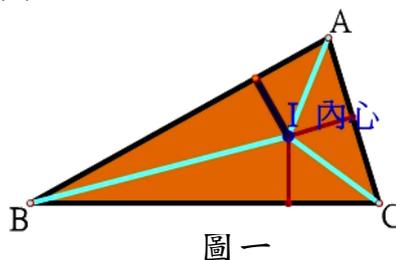
- 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察重心在任一中線上的是否有固定的比例位置並說明描繪於下。

結論：三角形重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍

2.3 「特搜任務——三角形的切割」講義

一、如下圖一，三角形三頂點與內心的連線將 $\triangle ABC$ 分成三個小三角形，分別為 $\triangle ABI$ 、 $\triangle BCI$ 與 $\triangle ACI$ 。



問題一：若定三個小三角形 $\triangle ABI$ 、 $\triangle BCI$ 與 $\triangle ACI$ 的底分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 與 \overline{CA} ，則其高為何？_____

問題二： $\triangle ABC$ 的面積=_____

● 說明：

1. 由之前說明知道內心到三角形三邊等距離，此距離為內切圓的半徑，所以 $\triangle ABI$ 以 \overline{AB} 為底則其高為何？ $\triangle BCI$ 以 \overline{BC} 為底則其高為何？ $\triangle ACI$ 以 \overline{CA} 為底則其高為何？是否都等長？

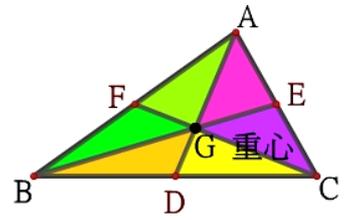
2. (1) 透過軟體的操弄，將 $\triangle ABI$ 、 $\triangle BCI$ 與 $\triangle ACI$ 的底 \overline{AB} 、 \overline{BC} 與 \overline{CA} 合在同一水平線上。

(2) 將三個三角形的頂點 I 合在一起，形成另一個三角形，請說明此三角形與原 $\triangle ABC$ 面積有何關係？

(3) 新三角形面積為何？

- 結論：若 $\triangle ABC$ 周長 s ，內切圓半徑 r ，則 $\triangle ABC$ 的面積 = $\frac{1}{2}rs$ 。

二、如下圖二，三角形三中線將三角形分成六個小三角形。



圖二

問題三：六塊小三角形的面積有何關係？_____

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，移動任一小三角形的頂點或邊，觀察六塊小三角形的面積有何關係？請說明理由或想法。



- 結論：三角形三條中線將三角形面積六等份。

問題四：等腰三角形的三心位置有何關係？_____

正三角形的三心位置有何關係？_____

- 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察等腰三角形外心、內心與重心必在什麼線上？請說明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，觀察正三角形外心、內心與重心位置有何關係？請說明理由或想法。

- 結論：(1) 等腰三角形的三心位置必在底邊中垂線（中線）上或頂角平分線上。(2) 正三角形三心共點