

## 第二章 文獻探討

本研究主要是設計開發可輔助教師教學並提供學生觀察、探索的「三角形三心」幾何課程電腦輔助教學軟體，並對九年級數學學習表現不佳的學生實施補救教學，以了解並分析對學生數學學習所產生的影響。故本章將針對以上研究目的分析探討相關研究文獻，作為研究設計及結果討論之依據。全章共分四節：第一節是電腦輔助教學的意涵，第二節為幾何認知學習理論，第三節為三角形三心幾何課程分析，第四節為補救教學的意義與設計原則。

### 第一節 電腦輔助教學的意涵

由於電腦與網際網路的蓬勃發展，資訊科技的應用深深影響我們的生活，也正改變學校教師教學方式與學生的學習活動，教師的角色由以往知識的傳授者轉變為知識的啟發與引導者。我國在教育部的推動下，於民國 78 年開始實施「電腦輔助教學發展與推廣計畫」，針對各階段不同需求，積極規劃、開發「好學專輯」等 CAI 軟體，並於民國 86 年開始推動「資訊教育基礎建設計畫」、「國家資訊通信基本建設(NII)人才培育中程發展計畫」與「遠距教學中程發展計畫」，期待未來能全面提升資訊教學軟硬體設備，加速網路建置，推動電腦輔助教學融入各科，使各學校之教材教法與資訊科技相結合，邁入多元化媒體教學，提供啟發式、互動式、雙向交流之學習環境，提升學生創造力與學習效果（教育部全球資訊網，無日期）。其後並於民國 90 年規劃「中小學資訊教育總藍圖」，推動中小學資訊科技融入教學，以培育符合時代需求之國民，計畫以四年的時間來實施總藍圖，其整體願景是「資訊隨手得，主動學習樂；合作創新意，知識伴終生」。並希望教師都能運用資訊科技融入教學，教學活動時間佔上課時間的 20%，教材能夠全面上網，達成「師師用電腦、處處上網路」的目標。（教育部全球資訊網，2001）而在國民中小學九年一貫課程改革中更明白地指出「運用科技與資訊的能力」與「激發主動探索和研究的的精神」為國民教育現階段的課程目標（教育部，2003）。

值此資訊科技應用一日千里之際，教師善用電腦與網際網路來建構良好的教學環境已是身為現代教師所需具備的能力，而在資訊教育中電腦輔助教學佔有重要地位，其活潑的教學設計、多元化的呈現方式及可融入各

科教學的特性，不但能增進教學效果也提供了個別化學習的環境，使得因材施教的理想得以逐漸實現（曾憲雄，1995）。好的電腦輔助數學教學軟體應是很好的概念學習的意義製造和連結器具，近年來電腦科技不斷進步，不論是現行教育政策或實際教學的應用，皆強調資訊科技融入各學科領域，為改善傳統式教學的模式與制度，數學教師應具備電腦輔助教學融入數學領域能力，以下將就電腦輔助教學的意涵、電腦輔助教學的理論基礎與教學策略、電腦輔助教學的研究論述及電腦輔助動態幾何教學環境探討來做說明。

## 一、電腦輔助教學的意義

電腦輔助教學（Computer-Assisted Instruction, 簡稱CAI）是指在教學的過程中，將電腦作為協助教師教學及學生學習的一種教學工具（尹政君，1993）。Hicks和Hyde(1973)認為「電腦輔助教學是一種直接運用電腦交談模式來呈現教材並控制個別化學習環境的教學過程」。趙志揚(1989)則說：「電腦輔助教學為透過電腦科技、結合學習理論以執行教學內涵的一種教學方式。」饒達欽(1990)將之定義為「藉由電腦程式的規劃使得學習內容有序顯示，學習者並可隨機控制學習進度及內容的過程，即稱之電腦輔助教學。」林永吉(1990)則指出：「電腦輔助教學是以電腦作為教學媒體，以協助教師教學，輔助學生學習教材，達到個別化、補救教學或精熟學習的編序教學活動。」

由以上各專家學者的說法可知電腦輔助教學是幫助老師教學和學生學習的工具，並嘗試改進教學的一種方法。其結合學習理論充分運用電腦特性設計教材，以視覺化來呈現教學內容，讓教師能夠較輕易地引起學生學習動機，增強學生對問題內容的了解，也允許學生有主動探索知識的機會，能按照自己的能力和進度進行學習，逐步修正本身對知識的概念及思考的方向，進而建構其所學的知識內容概念和了解。張國恩（2001）也說：「透過電腦輔助教學，學習者多了一個學習管道，電腦輔助教學可以協助老師的教學，幫助學生在教師教學過程中獲得知識。」

## 二、電腦輔助教學的理論基礎與教學策略

電腦輔助教學之學習理論大致包含行為主義、認知理論、社會學習理論、建構主義、遊戲理論及情境學習理論等（王立行，1991；沈中偉，1995；楊秋玲，1997；陳國唐，2004）

(一)、行為主義 (Behaviorism): 電腦輔助教學崛起的年代, 也恰好是行為主義 (Behaviorism) 最領風騷的時期, 行為主義的主要精髓是「刺激」(stimulus)與「反應」(response)的聯結關係模式(S-R association model)。張春興(2001)提到:「Skinner 認為學習要成功, 教學者必須提供足夠的刺激, 並激發學習者提供某種回饋。為了強化刺激與反應之間的聯結關係, 尚須遵守三大定律: 效果律、接近律與練習律。」

1. 效果律 (Law of Effect): 當某一刺激出現時, 個體所有的反應若能得到滿意的效果, 下次就有可能出現相同的反應 (王文琦, 2000)。

2. 接近律 (Law of Continuity): 刺激和反應間聯結的強度, 會隨練習次數的增強而增強 (王文琦, 2000)。

3. 練習律 (Law of Practice): 刺激和反應間聯結的強度, 會隨個體身心的準備程度而異。準備度高, 滿意度則容易提高。此後, 在遇到類似情境時, 個體也較容易產生相同的反應 (王文琦, 2000)。

(二)、認知理論 (Cognitive Theory): 認知理論強調內在的認知歷程, 反對行為主義所提, 將行為界定為外顯的反應。即王立行 (1991) 所提:「強調人類心智的內隱能力 (innate ability), 而非表面的外顯行為 (external behavior)」, 認知理論強調教學必須符合四個原則: 動機原則 (principle of motivation)、結構原則 (principle of structure)、順序原則 (principle of sequence) 與增強原則 (principle of reinforcement)。

(三)、社會學習理論 (Social Learning Theory): 社會學習理論主要由 Bandura 所倡, 他認為學習是經由觀察、模仿而來, 並將學習得到的經驗或是知識, 回饋於周遭生活。教師應提供模擬真實社會情境的學習場所, 讓學生觀察問題的本質及解決的方法, 並練習將所學知識應用在模擬的假想情境, 從嘗試錯誤中不斷修正自己的行為, 從而學習解決問題的策略及能力。這種「非結構化」(unstructured)的社會學習, 正是「模擬式」(simulation) 電腦輔助教學的理論基礎。

(四)、建構主義: 建構主義學者主張知識的獲得不是經由傳達的結果, 而是學習者自己本身在認知的過程當中建構而得, 知識的建立是來自於學習者本身的既有知識與學習情境互動所產生的結果 (郭重吉, 1996), 也就是說學習是主動參與改變認知結構的活動, 學習者在所處的環境中, 以其先備知識為基礎, 對外在事物主動建構以重塑個人的認知結構。所以學習可以說是以舊有知識為基礎逐漸將新知識內化並層層的建構, 當遇到

新舊知識相衝突時，會自我調適，達到學習的效果。

因此教師必須鼓勵探索和營造一個有利於學習者建構知識的情境，鼓勵學習者主動探索和產生問題，並適度地引導學習者自我學習及成長。

(五)、遊戲理論：柏拉圖曾說：「沒有強迫性的學習，能久留於腦海中。如果在教育孩子時，能採用遊戲的方式，我們能看到人類天性的流露了」(王立行, 1991)。許多教育學家窮畢生之力，研究各種學習理論，到最後卻發現，再好的教材或教法，都不如讓孩子從遊戲中快樂地學習。引發學習動機並保持學習興趣，才能培養積極的學習態度，終其一生都受用不盡(Norman, 1981)。而「遊戲式」(gaming)電腦輔助教學正是結合遊戲理論與電腦輔助教學技術的產物。

#### (六)、情境學習理論 (Situated Learning)

所謂的情境學習，是指在一個「擬真」的環境中，由學習者透過主動參與，和環境中的人、事、物互動學習的過程獲得知識，並且強調事實、熟悉、社會性及真實性(王文琦, 2000)。也就是說知識如同工具，是學習者與環境互動的產物，且本質上受活動(activity)、環境脈絡(context)及文化(culture)的影響(Brown, Collins, & Guggid, 1989)。所以學習即是學習者與環境間的互動與協調，知識並在情境中建構，且不能與情境脈絡分離的。

情境學習理論強調知識與技能的學習是透過真實的實際活動，而非以抽象的符號邏輯，因此學習者與真實情境互動程度越高，越有助於學習者習得知識與技能。

電腦輔助教學軟體為達到有效學習的目的，依據不同的學習理論基礎及其適用的場合及對象，而發展出不同之教學策略模式，根據王立行(1991)與王文琦(2000)所做的分類，可區分下列六種：練習式(Drill and Practice)、教導式(Tutorial)、模擬式(Simulation)、遊戲式(Instruction Game)、問題解決式(Problem Solving)與情境式。

#### (一)、練習式 (Drill & practice)

練習式電腦輔助教學所依據的理論基礎為行為主義(Behaviorism)，此教學軟體較注重技巧及熟練性的培養，提供學習者規律且可重覆的練習活動來讓學習者練習某一特定的學習任務，而達到技巧及操作的精熟(洪榮昭, 1992)。練習式教學主要教學活動，是提供學習活動有練習的機會，它的設計原理是基於下列假設(尹玫君, 1993)：

1. 先前所學得的觀念或技能已經發生。
2. 只是補充而非取代正規教學。
3. 教學的過程是依據教學內容邏輯和教學理論，加以組織教材，建立練習模式。
4. 在教學內容的邏輯上存在著對／錯的答案。
5. 在基本的教學單元是：問題—回饋—分支。
6. 自教學的觀點來看，最好的回饋方式是：答對的給予正增強，答錯的給予改正性的回饋。

## (二)、教導式 (Tutorials)

教導式電腦輔助教學所依據的理論基礎為認知理論 (Cognitive Theory)，此教學軟體著重於知識的傳授，主要是將傳統的教材內容或練習直接或間接搬入電腦中，學生藉由電腦螢幕獲得課程內容，再依照學生的學習進度教授學生各種概念和技巧，課程中還需設計評量學生成就、診斷與補救的方法，可以供學生做自我學習的教材，就如同家教在旁指導一般，由電腦系統扮演教師的角色，軟體呈現的過程類似教學講義的編輯。

沈中偉 (1995) 認為運用認知心理學在多媒體電腦輔助學習課程軟體設計與發展上之原則如下：

1. 由於短期記憶的容量有限，為避免認知負荷 (cognitive load)，應提供功能選單 (menu) 與圖示 (icon)，以避免記憶很多操作指令。

2. 一個畫面只呈現一個重要的概念或資訊。重點部份以不同的顏色將其凸顯出來，以吸引學習者的注意力。

3. 呈現重要教材內容時，速度不能太快，需留點時間讓學習者編碼或組織新訊息。

4. 提供反覆練習的機會，使學習者能夠將新訊息予以編碼後，轉化成內部表徵，以利儲存至長期記憶中。

5. 組織教材內容，提供語意網路或認知架構，使學習者進行深層處理 (deep processing)，以利於記憶保留 (retention) 更長久。

6. 學習者可依自己的需求控制學習順序與速度。

7. 瞭解學習者的思維模式 (mental model) 與先備知識。

8. 根據 Paivio 的雙重譯碼 (dual coding) 理論，資訊以視覺心像 (visual images) 與語意編碼和儲存，因此應提供學習者多重的資訊檢索管道，如圖表、圖形、影像、動畫、音效等視聽覺元素，以增加學習者擷取的管道。

9. 呈現多媒體教材前，可使用「前導綱要」或稱作「前導組體」(advance organizer)，將新教材與舊知識相聯結，使得新教材的學習變成有意義，以引起學習動機與促進記憶與學習。

### (三)、模擬式 (Simulation)

模擬式電腦輔助教學所依據的理論基礎為社會學習理論 (Social Learning Theory)，此教學軟體其意義就是要盡可能對實際狀況加以模擬，提供學生探索的學習環境，讓學習者經過了「由做中學」的模擬實驗，形成具體的概念，達成學習目標 (Thomas & Neilson, 1995)。換句話說，模擬式電腦輔助教學是將學習者不易觀察到的實體或現象，以電腦模擬的方式，達成與實際情境相同的教學目的 (顏晴榮, 1998)。通常模擬式的教學，大致可分為下列三種 (洪榮昭, 1992)：

1. 操作性模擬 (Replicable Performance Simulation)：最大的特性就是對某種一系列的行為，重複在最適當的情況下操作，以達成學習目標。

2. 資訊性模擬 (Information Retrieval Simulation)：資訊性模擬沒有明顯的操作目標來做決策練習，它只將有關的現象或系統中進行的原理與規則找出最恰當的解決方式或策略。

3. 狀況性模擬 (Encounter Simulation)：此類模擬是針對一個無法在其他媒體上，表達出現象的發生步驟或順序，此時就可利用電腦來表達出此一過程。

### (四)、教學遊戲式 (Instructional games)

教學遊戲式電腦輔助教學所依據的理論基礎為遊戲理論，Norman (1981) 認為：「讓孩子從遊戲中快樂的學習，能引發學習動機並保持學習興趣，其所培養出積極的學習態度，終其一生都受用不盡。」利用遊戲的方式來呈現教學內容，並盡量利用日常生活中的事物來設計教學遊戲的內容知識，除了能引起學生的注意，帶給學生很大的學習興趣，達到寓教於樂的學習效果外，經由此遊戲，學生還能處理具體或真實情境中較為複雜之問題。

### (五)、問題解決式 (Problem solving)

教學方式經由不斷的演進，教學目標由知識的傳遞轉變為重視學生「問題解決」能力的培養，所謂的「問題」就是一種情境，是一種由於現存與應存狀況之間的差距，未能及時以適當的策略，來加以排除的情境，個人或群體必須進入此一情境中，才算真正發生問題 (吳培安, 1995)。

問題解決式的電腦輔助教學側重於解題過程中學生的學習歷程與培養

學生的思考能力（施良方，1996），其主要是設計一些問題來指導學生如何思考可能的解決方案，幫助學生熟悉解決問題的方法模式，以訓練學生的問題解決與分析能力。此模式常被用於兩種解決問題的教學活動中，如利用已有的或收集到的數據在電腦中求得答案，或是在學校課程中作為補救教學，其最終目的就是希望學生能自主的解決各種問題。

#### （六）、情境式

情境式電腦輔助教學所依據的理論基礎為情境學習理論（Situated Learning）。沈中偉（1995）認為情境式電腦輔助教學是以電腦呈現模擬真實生活的假想情境，鼓勵學習者主動而積極地詮釋知識，激發學習者的思考與解決問題的能力。利用情境學習理論設計電腦輔助學習環境的原則有下列四點：（1）真實情境原則，（2）真實活動原則，（3）主動學習原則，（4）邊際參與原則（邱貴發、鍾邦友，1993）

電腦輔助教學是要建立一個輔助性的教師教學與學生學習環境，因此除了聲光影像的效果外，教學內涵更是重要的一環，故本研究所設計的軟體主要涵蓋上述的行為主義、認知理論、社會學習理論及建構主義的精神與特點，配合教學內容設計，以視覺化來呈現教學內容，提供老師教學和學生學習的工具與環境，讓學生有主動探索知識的機會，進而建構其所學的知識內容概念和了解。

### 三、電腦輔助教學的研究論述

幾十年來，許多國內外的專家學者在電腦輔助教學的相關研究上都貢獻了無數心力，有關電腦輔助教學在教學實務上所產生的成果與建言分述如下：

1. 陳昭雄（1997）、洪榮昭與劉明洲（1999）均認為使用電腦輔助教學的優點為：（1）個別化的教育，（2）降低時空的限制，（3）適應人格的自然發展，（4）充實的教材發展，（5）提供多元媒體教學，（6）提供模擬實驗，（7）合乎經濟效益

2. 在學習效果方面，王萬清（1992）表示：「使用電腦教學可增進學習動機、給予個別指導及提供練習機會等優點」。Bangert-Drowns, Kulik, and Kulik（1985）曾選擇 1968 至 1982 年有關電腦輔助教學成效的文獻共四十二篇進行綜合分析，發現電腦輔助教學對國中及高中學生的學業成就有正向的影響、會影響學生對電腦及學科的態度、對小學生及低成就學生的學習成效較佳、可縮短學生學習知識的時間。

3. 在教學成效方面，洪榮昭（1992）認為對老師而言，電腦可當做教學上的一種媒體，使老師的教學更具功效。吳鐵雄（1983）與陳明仁（1991）亦認為：「電腦輔助教學是突破我國傳統班級教學，適應學生個別差異，提高教學品質的有效途徑之一」。Fulton（1993）提到：「目前美國各級學校普遍使用電腦作為輔助教學的工具，教師們深切體認到，電腦是最新的教學工具，也是激發學生熱忱達成有效學習的極佳媒介」。Shoaf-Grubbs（1995）表示：「電腦可被利用來引起較有效的學習，為教學提供有利的條件，學生可被引導專注於發現與理解的過程，不再視數學為純粹接受與記憶規則與公式的一門學科」。Rieber（1990）指出：「以電腦為基礎的教學能提供運用多樣教學策略的機會，這對於其他媒體而言是很難，甚至是不可能的事。」

4. 針對實施電腦輔助教學所應注意的問題，有學者提出他們的看法與建言，Dreyfus 與 Dreyfus（1984）與尹玫君（1993）均認為讓學生單獨的使用電腦輔助教學，而不佐以其他的教學，對於學生的學業成就表現其效果並不如預期中的好，即電腦輔助教學的優點再多，但教師的角色和地位仍是無法被取代的。單維彰（2004）便說：「有意義的電腦輔助學習工具應該讓學生和教師做更有效率的溝通，讓他們有機會更深入地『知己知彼』。計算工具在教學上的應用應當是增強、而不是取代教師的『人』的經驗和創造力」。邱貴發（1992）指出：「電腦輔助教學成效評量必須針對某個學科的某個單元，不可脫離學科的教材內容；應著重於知識和技能層面，情意層面不需列入；需考慮教材組織方式，及內容文字表達方式；應非常注重個人化與個別化」。邱貴發（1994）還說：「在學習環境中所提供的主動探索的功能，學生若不能掌握學習的方向，將造成誤入歧途的情形，除了無法建立預期的概念知識外，有可能因多次的失敗與挫折而對此環境不再有興趣。是以有研究認為輔助的學習環境應是用來補充教師及教室所受到的限制，扮演輔助學習工具的角色較為合適。」張俊彥與董家莒（2000）也提到：「Clark 認為媒體比較的研究在教育上的意義不大，學者應將電腦輔助教學實徵研究的重心移至探究 CAI 的設計如何配合不同的課程內容與教學策略」。林麗娟（1994）認為電腦輔助的學習方式雖然可以引起學習者的學習興趣，但若這些資訊呈現出來的方式與學習者的認知層次不能配合，或是所提供的影像和所欲傳達的知識訊息無關，則不能真的達成預期的成果。李俊儀（2004）提醒說：「在資訊科技融入數學教學課程設計上，除了要注意軟體開發設計操作介面的一致性外，應在軟體操作這個部分多



安排些時間，讓學生盡快熟悉軟體的操作方式，並用它來解決數學問題」。在林信志(2006)的研究也發現有近七成的教師覺得自己沒有足夠時間發展與實施資訊科技融入教學，這也是實施電腦輔助教學首要面對的問題。

綜合以上所言，應用電腦輔助教學必須能瞭解學生學習的過程，配合學習領域的教材內容與學生的認知層次，再據以設計教與學的活動來達到電腦輔助教學的目的，學生也可從發現中發展概念及建構自己的知識。

#### 四、電腦輔助動態幾何教學環境探討

隨著電腦的出現與快速發展，在網路技術廣泛應用於各個領域的同時，也給學校教育帶來了一場深刻的變革——用電腦輔助教學，改善學習者的認知環境越來越受到重視。傳統的幾何教學偏重演繹、證明的方式帶出幾何性質，忽略以觀察、測試、實驗等歸納方式獲得幾何性質。一些研究者曾經討論過以操作活動為基礎的學習成效性，說明幾何學習活動中應注重幾何圖形結構的觀察與操作，如左台益與梁勇能(2001)建議「幾何教學應適當地融入空間視覺與操作活動以增進學生幾何學習效果」，而 Clements 與 Battista (1992) 也建議在幾何學習上可採用適當的電腦軟體來輔助學習。謝哲仁 (2002) 認為表徵通常是某一特別的結果，學習理論指出圖形表徵至少具備較代數符號為一般學生能夠直觀接受。Usiskin(1987)表示：「幾何是視覺化、畫法與圖形的建構，也是一種表徵數學的工具」。所以設計視覺化、情境化及數值化的電腦環境，以動態呈現各種可能變化，那麼圖形就不止是一份靜態成果的展現而已 (謝哲仁，2002)。因此將幾何概念以圖形的動態方式呈現，不僅學生學習的感覺較直觀具體且可經由觀察構圖或操作物件來發掘、猜測與驗證數學的性質，甚至進而將性質一般化，對教師的教學有輔助的效果，且可進而幫助學生學習。鄭晉昌(1997)也說：「透過視覺，可以擴大個人的知覺經驗，對學習者而言有下列三點益處：(1)視覺經驗較為具體，尤其是動態的視覺經驗可以讓人瞭解整個事件發生的歷程。(2)因為視覺訊息較易處理，因此視覺思考可以讓學習者在學習的過程中，容許有更多的短期記憶的空間進行資訊的處理。(3)視覺經驗較具可探索性，讓學習者更具想像空間，擴展學習的深度。」

國際數學教學委員會 (the International Commission on Mathematical Instruction, 簡稱 ICMI) 於 1998 年出版 *Perspectives on the Teaching of Geometry For the 21st Century* 一書，書中第四章探

討電腦科技與幾何教學，其中關於對於動態幾何環境下的教學研究結果可以歸為下列幾點（引自陳國唐，2004）：

1. 動態幾何環境可作為問題解決的豐富環境，其所提供的視覺證據（visualevidence）是使學習者產生問題與企圖找出解答的催化劑。

2. 動態幾何軟體具有多種模擬的能力，不但可以作為幾何探索的工具，還可使直覺、空間感、圖形構造與各種理論之間作連結。

3. 動態幾何環境可以作為一種新的環境，用以設計在觀察實驗和演繹證明間做連結的創新活動。

4. 動態幾何環境可以培養學生對數學證明的目的及本質更充足的鑑賞力。

5. 動態幾何軟體能輕易作出複雜的幾何圖形，且具有動態的能力，可以降低問題的難度。

由以上論述，再加上 Lannin（2003）提醒很多學生可能只使用一些例子去測試與檢查就說自己推理正確，而郭亮偉（2005）也說：「幾何證明的過程中，所畫出的圖形是一個特殊的圖形，許多學生對於證明過程中，圖形所代表的一般化性質並不瞭解。若將圖形改變形狀後，可能就認為是不同的問題」，所以研究者設計電腦軟體來輔助幾何教學，經由圖形可隨意操弄性期待學生藉由觀察、臆測、歸納與推理在視覺化的動態環境下「看到」幾何性質的一般性，並提升學習者幾何學習的效果與學習態度。

## 第二節 幾何認知學習理論

### 一、Piaget 理論

Piaget 的研究中指出兒童幾何概念思考的發展是依照一明確的方向，最初發展的是拓樸性幾何概念（topological），接著是投影性幾何概念（Projective）與歐幾里德性幾何概念（Euclidean）（謝貞秀、張英傑，2003；洪明賢，2003）。

1. 拓樸性概念階段：此一階段的兒童相當於運思前期認知發展階段（約3歲6個月~4歲），僅能掌握拓樸性的圖形概念，即只能注意到圖形的內或外，及封閉的曲線而已，而完全忽略邊長、角度、大小等相對的關係，例如要求兒童仿畫正方形或長方形，則往往繪畫成渾圓的形狀，或線條凹凸不直，甚至畫成近乎圓的形狀。

2. 投影性概念階段：此一階段的兒童相當於運思前期到具體運思期的認知發展階段（約4歲~7、8歲），此階段兒童對於外界的認知，自己所在觀點的視覺比其他條件佔更優越的地位，凡經由視覺所承認的事物，他們

才認為是真實的存在。例如正方形紙張一旦拿開，放在相隔一段距離的遠處，在兒童的心目中則認為變成了菱形、梯形，且變小了，但如果再把它拿回原來位置，兒童卻又認為形狀極大小都會回復到原來的大小。

3. 歐幾里得性概念階段：此一階段（約5歲以後）的兒童具有長度及距離保留能力，特別是長度保留能力之後，自然能發展出測量的概念，以最靠近自己的、最熟悉的工具（自己的手或軀體）來測量，皮亞傑將此種策略稱為「手的遷移」及「軀幹遷移」。以後隨著認知發展，兒童漸會使用量尺工具來輔助測量，面積保留概念大約也在此階段發展。根據皮亞傑的說法在小學低年級，兒童的圖形概念大部分都已發展到歐幾里得幾何概念階段。

Piaget 理論的研究重點在建構幾何概念，探究幾何概念形成的運思過程，各階段發展主要與年齡有關，注重發展的過程。在位向性階段尚未有線段和角度的保留概念，投影性階段則有線段的保留概念，但沒有角度的保留概念，直到歐幾里得性階段的兒童才具備有線段長短、角度大小或面的大小的保留概念。

## 二、van Hiele 理論

### （一）van Hiele 五層次幾何學習理論

荷蘭數學教育家 Dina van Hiele-Geldof 和 Pierre M. van Hiele 夫婦根據完形心理學的結構論及皮亞傑的認知論，在歷經多年的深入研究後，於1957年提出一個幾何學習的模型。此套幾何學習理論主要解釋學生在學習幾何時所產生困難的地方。依據該理論，學生之幾何思考可以分為以下五個層次 (van Hiele, 1986)：

#### 1. 層次1：視覺層次 (visualization)

這個層次的學生可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形，透過視覺觀察各種具體實物，以它們的外形輪廓來辨認圖形，但此階段學生雖能依據幾何體的外觀，說出各種形狀，例如：三角形，正方形，圓形等，卻不能瞭解其真正意義，例如：旋轉的正方形即不認為是正方形。劉好（1998）建議這階段的學童宜多安排感官操作的活動，讓學童透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動獲得幾何圖形的正確概念。

#### 2. 層次2：分析層次 (analysis)

這個層次的學生已經具有辨別圖形特徵的能力，他們能從圖形的構成要素以及構成要素之間的關係分析圖形，並且可以利用實際操作，如摺疊、尺量、角度測量或格子觀察的方式，發現某一群圖形的共有性質或規則，例如可以發現三角形有三個邊，四邊形有四個角，概念的必要性質已經建立。劉好（1998）指出此階段的學生，宜安排一些製作及檢驗的活動，使

其從中獲得圖形的性質。

### 3. 層次 3：非形式演繹層次(informal deduction)

這層次的學生不但能夠了解、掌握、運用構成圖形的各種要素，並且可以透過非正式論證把先前發現的性質作邏輯性聯結，更進一步能探求各種幾何圖形的內在屬性關係以及各圖形之間的包含關係，並可使用定義去理解及發現其中的特性，但還不能作有系統的證明。如看到四邊形兩雙對邊相等，不必將所有屬性均描述出來即能確認是平行四邊形，而且在了解圖形內在關係後，可以建立長方形是平行四邊形的一種；平行四邊形中，若有一個角為直角時，此四邊形即為長方形等概念。

### 4. 層次 4：形式演繹層次(formal deduction)

對於這一層次的學生而言，可以用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。他們可以在一個公設系統中建立幾何理論，知道幾何圖形之充分必要條件，發現正逆命題間的差異性，例如：正五邊形各邊長均相等，但邊長均相等的五邊形不一定是正五邊形。

### 5. 層次 5：嚴密系統層次(rigor)

達到這個層次的人，可以在不同的公理系統中建立定理，並且分析或比較這些系統的特性。例如能區別歐氏幾何與非歐幾何的差異，也可了解抽象推理幾何，甚至可自創一種幾何公設系統，一般人很難達到這個層次，即使是以數學為專業者亦不容易達成。

## (二) van Hiele 理論的特性

van Hiele 提出了這五個幾何思考層次的主要特性，其說明如下：

### 1. 次序性(Sequential)

學生的層次發展是循序漸進的，必須先具有較低層次的概念，才能發展較高層次的概念。

### 2. 進展性(Advancement)

層次的進階是經由於教導或有效的學習經驗，而非因為其年齡增長而發展，但也沒有任何一種教學法可以讓學生跳過任何一個層次，另外也有一些情況會阻礙各層次間的轉換，當討論主題已經降到較低層次而仍不能理解時(如討論正方形和長方形的包含關係時)，學習將無法發生，亦不宜強行灌輸。

### 3. 內在與外在(Intrinsic and Extrinsic)

在前一個層次是外在的物件，在下一層次則會成為內在的物件，例如在層次 0 時，圖形的外貌被接受，但其圖形的構成要素，則要到下一層次

才會被分析，而這時圖形的外貌則會變成一個內在的理解。

#### 4. 語言專屬性(Linguistics)

在每一層次所使用的符號語言及以及這些符號的關聯系統都不盡相同，在某個層次被視為正確的符號語言在下一層次則可能是錯的，因此每發展到新的層次即必須作修正。

#### 5. 不配合性(Mismatch)

學生所屬的層次和教師教學設計的層次若不同，則所期望的學習歷程或教學效果就不會發生，例如教學過程中語彙的使用，若屬較高的一個層次，則將導致學生完全無法理解且無法思考，亦無法達到學習目標。

### (三) van Hiele 五階段學習模式

van Hiele 認為上述各層次間的學習，主要依靠教學的組織與方法，因此從某一層次進階到下一層次間的過程，教學活動扮演著極重要的角色，而且正確的教學活動可以使進階更為容易(Wu, 1994)。為幫助教師教導學童學習得更有效率，van Hiele 提出五階段學習模式(five-phase learning model)，依照其理論架構，教師在教學的過程中應該理解並注意到學童的幾何思考層次，才能設計適當的課程幫助學童們發展到更高階的幾何思考層次。這五階段學習模式分別說明如下：

#### 1. 第一階段：學前諮詢(Information)

教師在教學之前，先與學生雙向溝通，教師經由觀察與發問，來了解學生已經具備那些知識，藉以作為教學準備之參考。

#### 2. 第二階段：引導學習方向(Guided Orientation)

教師引導學生探索、操作，在學生探索的活動過程中，教師宜有計劃的依序引導學生，使其了解幾何的概念，清楚整個學習的方向。

#### 3. 第三階段：解說(Explication)

此階段的學生，已逐漸了解幾何圖形的關係，教師引導學生討論學習主要內容，學生們在課堂上學習透過討論去表達他們所觀察到的結構，老師隨時注意討論所使用的習慣措詞，讓學生能用正確合適的語言符號表達結構的相關性，使其幾何概念提升到理解的層次。

#### 4. 第四階段：自由探索(Free Orientation)

進入這個學習階段，學習的範圍是大多數學生知道的，教師可以選擇適當的教材以及幾何問題，鼓勵學生思考與解答這些幾何問題。學生們在不同的方式上遭遇更多複雜且有許多步驟的課題，當他們靠自己解決這個課題時，他們獲得了經驗與課題間的關連性。

## 5. 第五階段：統整(Integration)

發展到此階段，老師能夠藉由給予學生一個有關他們學習過的東西之通盤概念，來幫助學生將學習到的幾何概念與知識統整起來。老師的職責在鼓勵與啟發學生理解與應用幾何概念，來解各種有關的問題，並能夠內化吸收且統一宗旨和關係，加以轉變成一套新的思考模式。

### (四) van Hiele 理論的實徵研究

由於 van Hiele 理論認為幾何思考的發展是與教學者的教導有關，而非隨著年齡增長自然地提升，是以 Van Hiele 幾何思考層次正深深的影響國內幾何學習課程的編排（戴瑋伶，2004）。van Hiele 認為教師可以幫助學生透過觀察幾何形體的結構，瞭解其中的關係，進而產生更高層次的思考。Baynes(1998)的研究認為 van Hiele 幾何思考層次具有階層性且能正確的描述學生的幾何思考與學習狀況。Mayberry(1983)認為學生在不同的概念會有不同的幾何思考層次。Usiskin(1982)曾發展一套 van Hiele 幾何思考層次測驗，結果發現層次 5 不是不存在就是不可測驗的，而其他層次都可由測驗測出。他的研究結果發現 van Hiele 幾何思考層次對於同時間施測的標準幾何內容是個良好的預測指標，該研究也證實 van Hiele 的理論可以用來解釋學生在幾何課中所遇到的困難和表現。林軍治(1992)發現從學生在 van Hiele 幾何思考層次的分佈來看，在小學生中，不同的年級有顯著的不同，但是性別上並沒有差異，而思考層次越高的兒童越傾向於場地獨立性。陳天宏（2003）建議在教授幾何圖形時可參考 van Hiele 的發展層次來進行教學。此外，利用 van Hiele 的五階段學習模式理論，Wu(1994)發現對於我國師範學生的非歐幾何學的數學成就，比採用傳統的講授式教學法，更能產生較高的幾何思考層次，而其幾何成就也比採用傳統教學法顯著來得高，而林永發(1998)認為 van Hiele 理論和學生的幾何臆測理論型態基本上是相容的，足以刻畫學生的幾何臆測思維型態；其中層次 1 的學生能做視覺式的臆測，層次 2 的學生能做分析式的臆測，層次 3 的學生能作命題式的臆測。

由以上研究報告得知 van Hiele 幾何思考層次理論對於提昇學童的幾何概念是有所幫助的，能引導學童的學習能力，尤其在教師適當的指示及教導下對於學童的學習有明顯的助益。大部份研究者均支持 van Hiele 模式的五個層次的合理性：從直觀的辨別到分析再進階到抽象的證明階段，它可合理的解釋兒童幾何概念發展的階層，也可評估學生的幾何能力，而且幾何概念的發展受到教學影響遠超過年齡因素（謝貞秀、張英傑，2003）。

### 三、Duval 幾何認知理解模式

Duval(1995)發現，雖然幾何圖形可以提供學生認知上的直觀，但卻常常無法幫助學生對問題的解答獲得一些關鍵性的啟發與洞察，因此他認為幾何認知理解方式因人而異，故提出四種認知理解方式，要注意的是，這四種認知理解方式，並沒有優劣之分，都能提供學習者對於圖形的認知思考方式，其說明如下：

#### (一) 知覺性理解 (perceptual apprehension)

知覺性的理解是個體認知到圖形的組織法則與繪圖線索，並將這些訊息組織成一個整體性的辨識，以知覺性理解方式所產生的心像與視網膜圖像不同，因為也許視網膜上的圖形改變了，但是圖形的組織、性質卻仍然相同。知覺性理解後的心像保留了被整合過的法則與線索，但也可能伴隨著某些錯誤。另外，知覺性的理解也包含了構成幾何圖形之子圖辨識及其命名(例如長方形被對角線分割出的兩個直角三角形)。

#### (二) 構圖性理解(sequential apprehension)

當我們在構圖的過程、或是描述該圖形的結構時必須對圖形作構圖性的理解，所謂構圖性理解，即是在構圖的過程中，圖形的不同單位元件會依著特別的次序出現。構圖性理解是個體構造一個圖形或是描述其結構的一種認知歷程。個體對於圖形的基本組織之理解並不是依賴視覺的法則與線索，而是構圖工具限制與數學性質之理解，因此，個體若不了解相關的數學性質與作圖工具之限制，將無法完成目標圖形，可見數學知識與經驗是構圖性理解的關鍵。

#### (三) 論述性理解(discursive apprehension)

論述性理解是個體透過語言或文字來描述一個圖形所具有的性質，或是利用文字語言的陳述來進行推理的認知歷程，對於同一個圖形而言，每個人所見的脈絡與性質都不盡相同，對於圖形的說明能顯示出個體對圖形的理解程度。

#### (四) 操作性理解(operative apprehension)

操作性理解是個體轉換心像或實體圖像的一種認知歷程，這些變換在心智中或實體世界中操作，提供個體對於圖形之啟思，在幾何問題中，一種或數種操作能使圖形呈現出解決之道，這也是一種對問題的洞察方式，而變更圖形的方式則大致分為下列幾種

1. 分解組合圖形(The mereologic way)
2. 放大縮小圖形(The optic way)

### 3. 平移旋轉圖形(The place way)

這些操作可使圖形具有啟發性的功能，故可以在操作的過程中，突顯出圖形的變化而得到某個證明步驟或解題的靈感。

幾何處理的不僅是「數」的問題，還處理「形」的問題，包括圖形的辨識與操弄，教育部（2003）最新頒布的「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」中，有關「幾何」主題教學也都漸漸的強調操作、實驗、探索、觀察、歸納與邏輯推理而獲得幾何性質的學習過程，從 van Hiele 的幾何學習理論觀點來看，視覺層次是學生進行幾何思考首要發展的層次，經由學習而進入分析層次，從 Duval 幾何認知理解模式瞭解知覺性理解與操作性理解能幫助學生對於幾何圖形的認知思考，因此若能藉由電腦媒體直觀的操控圖形，將能引領學生進入幾何世界並能輔助建構其幾何概念。林保平（1996）也建議讓學生從觀察、實驗、猜測、歸納動態連續變換的圖形中不變的性質。本研究考慮現階段教師在「三角形三心」幾何教學的困境與研究者九年的教學經驗，運用 Flash 設計互動的動態幾何軟體來幫助教師解決這些困難，依 Duval 幾何認知理解模式觀點，提供學生知覺性理解、構圖性理解、論述性理解與操作性理解的學習環境，經由軟體的操作協助教師順利的進行幾何教學活動，讓學生可以觀察、歸納及推理，進而發現圖形的規律性質，從而瞭解到軟體所要呈現的幾何的概念，且將 van Hiele 五階段學習模式與動態遞迴的數學了解理論套用於教學活動當中，在教學的過程中理解並注意到學生的幾何思考層次，適時幫助學生發展到更高階的幾何思考層次，以提昇學生學習成效，增加學習數學的信心。

## 第三節 三角形三心幾何課程分析

### 一、三角形三心教材地位分析

教育部於 92 年底公布「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」，延續了「九年一貫課程暫行綱要」以學生為主體的理念與精神，強調「數學教學應注重數、量、形的聯繫，讓學生在實作、實測與直覺中，獲得數、量、形及其相互關係的概念，並逐步抽象化與程序化成為精鍊有效的數學語言」，因此透過教學活動的設計讓學生在觀察、歸納與一般化的活動中發現幾何圖形間的性質與關聯並進而對數學產生興趣將是教師當前最大的課題與挑戰。



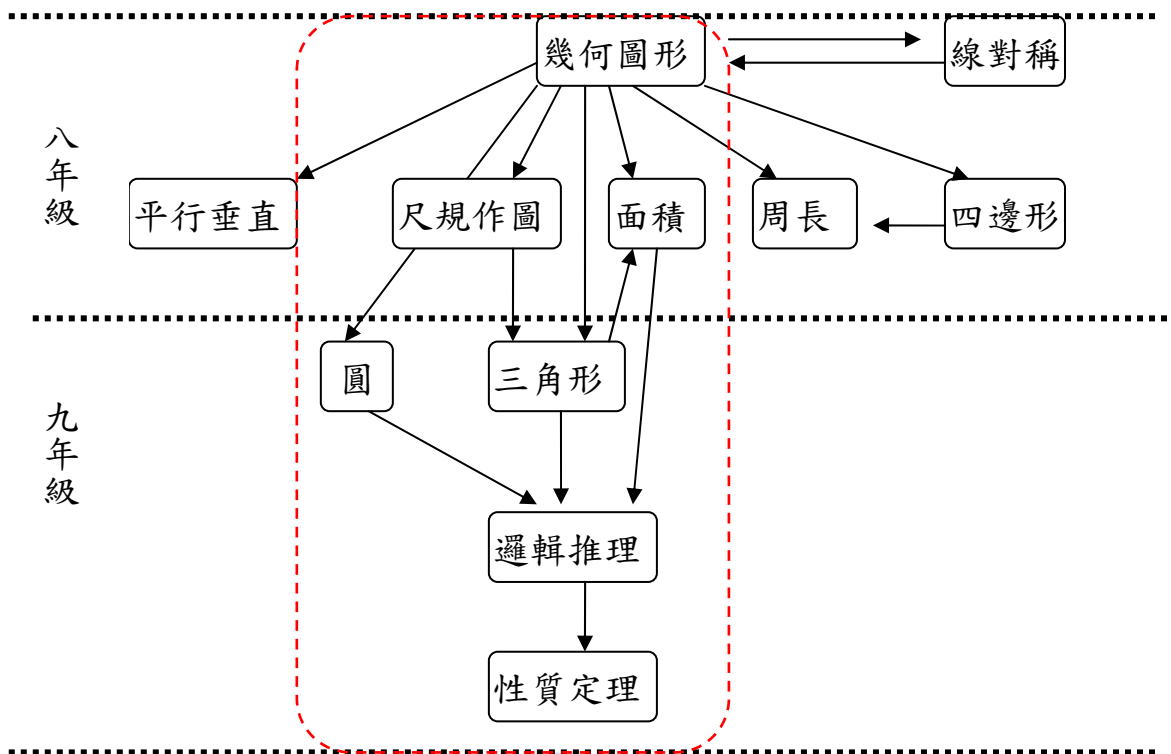


圖 2-3-1 國中階段幾何學習主題架構圖

在七年級至九年級國中幾何課程中，除了觀察歸納各種幾何圖形所形成的性質外，學習的內容也由非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理，進而發展代數結構。基於「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」(教育部，2003)國民中學階段三個教學目標之一：「能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理」，故研究者先以「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」(教育部，2003)所定的國中幾何主題能力指標及其演繹出的分年細目與詮釋作分析，參考目前仍在使用的87年版「九年一貫課程暫行綱要數學學習領域」所編寫的民間版數學教科書，訂出國中階段幾何學習主題架構圖(如上圖2-3-1)，並依92年「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」能力指標與分年細目討論「三角形三心」在圓與三角形課程的內涵關係(如下圖2-3-2、下表2-3-1)。

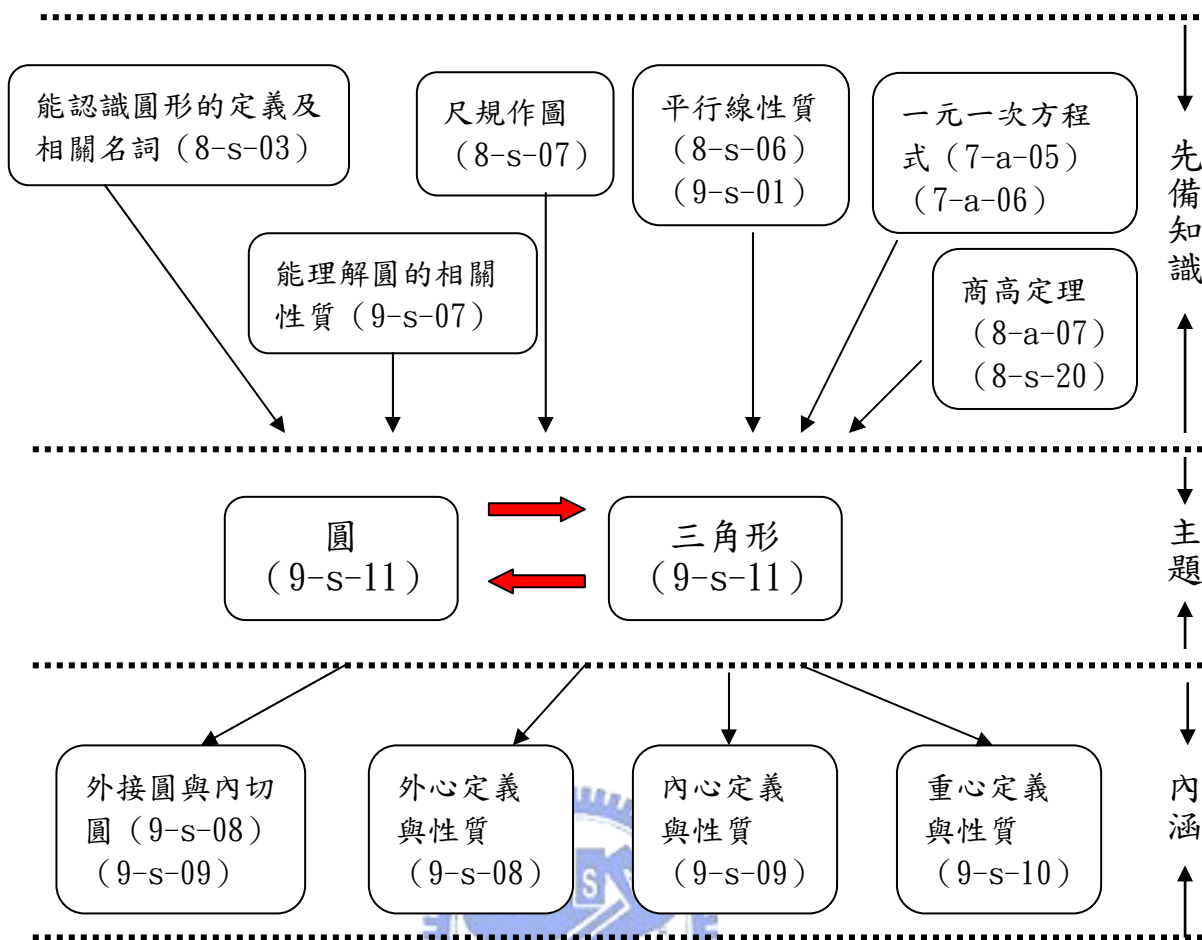


圖 2-3-2 圓與三角形關係學習架構

表 2-3-1 圓與三角形關係詮釋的分年細目與能力指標

分年細目	內容	能力指標
7-a-05	能以等量公理來解一元一次方程式，並作驗算。	A-3-02、 A-3-08
7-a-06	能利用移項法則來解一元一次方程式，並作驗算。	A-3-08
8-s-03	能認識圓形的定義及相關名詞。	S-4-01
8-s-06	能具體說明兩平行線間距離處處相等。	S-4-06
8-s-07	能熟練基本尺規作圖。	S-4-07
8-s-20	能由面積關係導出直角三角形三邊的關係。	S-4-05、 A-4-03
9-s-01	能根據平行線截線性質作推理。	S-4-11、 S-4-15
9-s-07	能理解圓的相關性質。	S-4-14

(續後頁)

表 2-3-1 圓與三角形關係詮釋的分年細目與能力指標（接前頁）

8-s-20	能由面積關係導出直角三角形三邊的關係。	S-4-05、 A-4-03
9-s-01	能根據平行線截線性質作推理。	S-4-11、 S-4-15
9-s-07	能理解圓的相關性質。	S-4-14
9-s-08	能理解三角形外心的定義和相關性質。	S-4-13、 S-4-14、 S-4-15
9-s-09	能理解三角形內心的定義和相關性質。	S-4-13、 S-4-14、 S-4-15
9-s-10	能理解三角形重心的定義和相關性質。	S-4-15
9-s-11	能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。	S-4-15

任何數學的學習，課前的先備知識是很必要的，若以圓與三角形關係學習架構來看本研究實施補救教學所要達成的教學目標，則下表 2-3-2 說明了教學目標與先備知識相對應的關係。

表 2-3-2 補救教學教學目標與先備知識分析

主題	教學目標	先備知識
外心	三角形三條垂直平分線必相交於同一點，這個點即為三角形的外心	尺規作圖、中垂線性質、中垂線逆性質
	理解三角形的外心至三頂點等距離，此距離即為外接圓半徑	中垂線性質
	瞭解圓內接三角形任兩邊中垂線的交點（外心）即為圓心所在	中垂線性質
	理解圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形必為直角三角形（即直徑所對的圓周角必是直角），反之圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為直徑	圓心角、圓周角
	理解直角三角形斜邊中點到三頂點等距離	中垂線性質
	圓內接直角三角形中，外接圓半徑 $R = \text{斜邊} \div 2$	商高定理

表 2-3-2 補救教學教學目標與先備知識分析 (接前頁)

	三角形三條角平分線必相交於同一點，這個點即為三角形的內心	尺規作圖、角平分線性質、角平分線逆性質
	理解三角形的內心至三邊等距離，此距離即為內切圓半徑	角平分線性質
內心	瞭解圓外切三角形任兩角平分線的交點（內心）即為圓心所在	角平分線性質
	圓外切直角三角形中，內切圓半徑 $r = (\text{兩股和一斜邊}) \div 2$	切線長性質
	若 $\triangle ABC$ 周長 $s$ ，內切圓半徑 $r$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積	等量公理、移項法則
	$= \frac{1}{2}rs$	
	三角形三條中線必相交於同一點，這個點稱為三角形的重心	尺規作圖
重心	理解三角形的重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍	三角形兩邊中點連線性質、相似形定義
	理解三角形三條中線將三角形面積六等份	平行線性質
	理解正三角形三心共點	等腰三角形性質

因研究者設計的電腦輔助教學軟體在展示三中垂線、三角平分線與三中線時會有尺規作圖痕跡，故學生應先具備尺規作圖的先備知識才能瞭解其意義；而瞭解等量公理與移項法則是為了解一元一次方程式做準備；在中垂線性質中，學生要瞭解的是中垂線上任一點到兩端等距離；角平分線性質要瞭解的是角平分線上任一點到兩邊等距離；平行線性質要瞭解的是兩平行線距離處處相等，延伸的知識為兩三角形底相同時，若高相等則面積相等；由於本教學範圍常會佈題於直角三角形，所以掌握瞭解商高定理是很必要的；至於瞭解切線長性質：兩切線長會等長，有助於理解內切圓半徑公式  $r = (\text{兩股和一斜邊}) \div 2$  的由來；瞭解圓心角與圓周角的關係除了能理解圓內接直角三角形與斜邊為直徑的對應關係外，對於瞭解有關外

心角度的計算也很有幫助；至於正三角形三心共點，除了透過軟體的操弄可以很明顯的發現外，具備等腰三角形頂角角平分線即是底邊中垂線的先備知識有助於理解正三角形三心共點。

在 van Hiele 五階段學習模式的第一階段：「學前諮詢(Information)」中表示「了解學生已經具備那些知識，可作為教學準備之參考」。同樣的，掌握「三角形三心」應有的先備知識對於瞭解學生學習上的困難並加以提醒與補救是進行教學活動很重要的一環，因此研究者在進行實驗前特別分析與了解學生學習前應有的先備知識以利掌握學生的學習狀況。

## 二、三角形三心相關研究

檢索國家圖書館——全國博碩士論文資訊網 (<http://etds.ncl.edu.tw/theabs/index.jsp>) 發現以「三角形三心」為研究主題或為部分研究主題共有三篇，以下將相關研究依研究主題、研究設計及研究結果表列如下表 2-3-3：

表 2-3-3 三角形三心相關研究論文

研究者	研究主題	研究設計	研究結果
粘憲昌 (2003)	以三角形的三心為內容，分別探討學生在詮釋導向與探索導向的學習任務中所呈現的學習特徵與學習成效	以彰化縣國中三年級共89名學生為對象，分兩組各自實施九堂課的，探討國三學生幾何概念學習特徵與學習成效。	「詮釋」導向與「探索」導向的三角形的三心幾何教學在解題、學習品質、動機、信念、互動、成就測驗皆有提升，但後者在動機、信念、互動、成就測驗等向度提升情形有顯著差異。

(續後頁)

表 2-3-3 三角形三心相關研究論文（接前頁）

<p>郭昭慧 (2004)</p>	<p>國中三角幾何GSP輔助教學之學習成效研究</p>	<p>以高雄縣某國中一年級兩班共80人為對象，一班為實驗組，另一班為控制組，實驗組實施GSP電腦輔助教學，控制組實施傳統講述教學，實驗教學六節課，內容為國中一年級三角幾何課程，探討兩組學生三角幾何學習成就及數學學習態度之改變。</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 實驗組全體學生數學學習成就的改變顯著優於控制組。</li> <li>2. 實驗組中分群學生在數學學習成效上，明顯優於控制組中分群學生；但兩組的高、低分群學生與控制組高、低分群學生無顯著差異。</li> <li>3. 實驗組的學生在圖形表徵的試題答對率優於控制組；但代數表徵的試題答對率並未因GSP輔助教學而提升。</li> <li>4. 實驗組與控制組數學學習態度的改變無顯著差異；但兩組學生大部分在數學學習態度的改變上皆呈現正成長，唯有控制組的低分群學生呈現負成長。</li> <li>5. 實驗組學生對於採用電腦輔助教學持肯定的態度，尤其是中分群的學生給予較多的肯定。</li> </ol>
<p>呂益昇 (2005)</p>	<p>國三學生三角形外心與內心概念學習之困難因素及類比教學實驗的探討</p>	<p>以桃園縣某國中三年級共39人為對象，根據教學目標，設計「概念與論證的問答題」診斷學習困難，配合選擇題與事後訪談分析學習困難的原因，以「類比遷移」、「局部推理與模仿」的教學策略來做補救教學實驗，並探討教學策略的成</p>	<p>國三學生「外心與內心概念」學習困難的主要原因有：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 未能以正確、完整的數學語言或符號描述圖形或數學專有名詞。</li> <li>2. 未能將所學的知識整理成有系統的概念幫助學習。</li> <li>3. 論證觀念不完整，文字表徵與形式論證的能力不足。</li> </ol>



（續後頁）

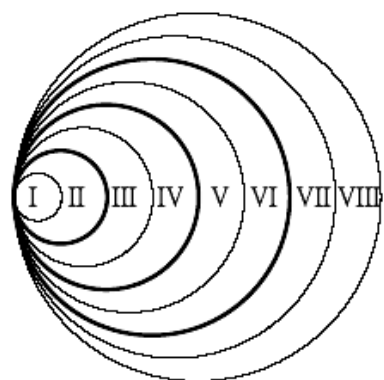
表 2-3-3 三角形三心相關研究論文（接前頁）

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 效。教學後選取9人進行半結構式的訪談，以瞭解學生對教學實驗的感受及成效。 | 4. 缺少相關的解題經驗，沒有主動繪製參照圖的習慣。<br>5. 未熟悉預備知識，缺乏利用已知性質推理的能力。<br>「設計有系統的教材進行類比遷移」、「局部推理與模仿」等教學策略能有效的協助學生解決學習困難。 |
|--------------------------------------|---|

由上述研究中可發現以探索導向的教學方式對學生在動機、信念、互動、成就測驗是有顯著提升，而採用電腦輔助教學對學生的學習成就是有助益的，尤其是在圖形表徵的問題上更凸顯其優點，因此研究者利用 Flash 設計以三角形三心教學目標為內涵的電腦輔助教學軟體，在教學方式與講義編寫上融入觀察、探索的活動，讓學生能藉由圖形的操弄提高主動繪製參照圖的習慣，提升三角形三心學習成就。

#### 四、數學了解成長的動態理論

在教學活動進行中學生學習了解的過程該如何來描述呢？Kieren 與 Pirie(1992)提出的數學了解成長的動態理論(A Dynamic Theory of Growth of Mathematical Understanding) 提供描述學生概念改變的了解過程，其結構如下圖 2-3-3，該理論認為數學了解的發展是動態 (dynamic)、非線性 (nonlinear)、遞迴 (recursive) 的過程，在這過程當中，每個了解的階層都會被之後的階層所包含，而後面的階層都可回到前面的任何階層，也就是說當學生在數學了解的過程當中面臨困難而無法解決時，學生會試著回到前一個階層尋求了解與幫助，而這樣來回的過程，會讓學生對問題有更深入清楚的了解，這個理論可用於分析學生學習某一數學概念的理解情形。研究者依據這個理論，將它應用在「三角形三心」教學目標「瞭解三角形外心的位置變化」上，舉例說明如下表 2-3-4。



- I. Primitive Knowing
- II. Image Making
- III. Image Having
- IV. Property noticing
- V. Formalizing
- VI. Observing
- VII. Structuring
- VIII. Inventizing

圖 2-3-3 數學了解成長的動態理論模型（引自陳正明，2002）

表 2-3-4 三角形三心的動態了解模式範例

階層名稱	階層特徵說明	學習三角形三心的特徵
起始知識	學習者要學習某一數學課程時，腦海中已具備的知識。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能利用尺規作圖作中垂線。</li> <li>2. 了解中垂線性質與中垂線逆性質。</li> </ol>
心像製作	學習者要能夠與先前的知識做區別，並且以新的方式來運用。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能利用尺規作圖畫出特定三角形三邊中垂線，觀察相交情況。</li> <li>2. 剪多個三角形，利用摺紙摺出三角形三邊中垂線，觀察相交情況。</li> <li>3. 透過軟體操弄特定三角形展示三邊中垂線，觀察相交情況。</li> </ol>
形成心像	學習者可以使用心像，而不需靠外在活動，並能清楚說明所觀察到的規律現象。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能說出三角形三邊中垂線交於一點。</li> <li>2. 能了解任意銳角三角形三中垂線的交點位置在三角形內部，直角三角形在斜邊上，鈍角三角形在外部。</li> </ol>
注意性質	學習者可以注意到心像的各面向關連性，並能清楚記錄或建構相關的性質。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能注意到三中垂線的交點到三頂點等距離，且注意到可以三中垂線的交點當圓心畫通過三頂點的圓。</li> <li>2. 能注意到直角三角形三中垂線的交點在斜邊中點上。</li> </ol>

（續後頁）



表 2-3-4 三角形三心的動態了解模式範例（接前頁）

形式化	學習者能思考第四階層所注意到的性質並加以抽象化，並能作形式化的說明。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能理解每一個三角形都可畫一圓通過三頂點，此圓稱為外接圓。</li> <li>2. 能理解三角形三中垂線的交點為外接圓的圓心，稱為外心。</li> <li>3. 能理解三角形的外心至三頂點等距離，此距離即為外接圓半徑。</li> </ol>
觀察	學習者能會和之前注意的性質、先前的心像的特徵做比較，並作抽象化與形式化的思考。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。</li> <li>2. 察覺直角三角形中，外接圓半徑 <math>R = \text{斜邊} \div 2</math>。</li> </ol>
結構化	學習者經由邏輯或數學論點驗證形式觀察的結果。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生能運用邏輯思考或相關定理來證明自己的觀察。</li> </ol>
創造	學習者在有完整的結構瞭解下突破先前概念而創造新的問題，形成全新的概念。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 藉由外心的位置進而設想三角形角平分線交點與三中線交點位置關係，全盤掌握三心位置。</li> </ol>

由上述說明可知，透過 Kieren 與 Pirie (1992) 提出的「數學了解成長的動態理論」，我們不僅可以了解學生概念的改變情況與成長過程，也能針對學生學習困難適時給予學生協助，幫助學生確實了解所面對的數學概念與問題，掌握學生應學習的數學概念與達到教師授課的教學目標。

#### 第四節 補救教學的意義與設計原則

##### 一、補救教學的意義與方法

補救教學是一種「評量—教學—再評量」的循環歷程。就理想上而言，期望補救教學實施一段時期後，學生能跟得上原班級的教學進度（杜正治，1993；林建平，1997；郭生玉，1995；楊坤堂，1993；引自張新仁、邱上真、李素慧，1999）。實施補救教學前要先選定有需要的學生，再設計教學活動進行教學，其後再給予評量以了解學習狀況。補救教學具有事後幫助

的功能，大多是在對未達成教學目標者，或學習有困難者幫助他再學習(陳長春，1992)。數學補救教學常用的方法有：(1) 合作學習法。(2) 直接教學法。(3) 認知結構激發法。(4) 問題解決法。(5) 多媒體教學(孟瑛如，2004)。補救教學的對象為低成就學生，在學業表現部分，低成就學生的特徵包括：(1) 在測驗的表現上，呈現低的基本作答技巧；(2) 學業成績表現較差；(3) 在閱讀或數學的程度比一般的學生來得低；(4) 被留級或有學業方面的挫折；(5) 經常找藉口不交作業或遲交，或是向同學拷貝作業(張新仁，2001)。

因此，了解學生學習的困難點是進行補救教學的首要任務，再據此設計相關補救課程與補救教學活動，透過再次評量獲得學習狀況，期望能幫助學生學習以跟上原班級的教學進度。

## 二、補救教學的設計原則

Otto, McMenemy and Smith (1973) 表示成功的補救教學應遵循下列準則：(1) 獲得學習者合作；(2) 根據學生的學習程度教學；(3) 循序漸進、小步驟進行；(4) 提供回饋和安排增強；(5) 使學習和教材有意義；(6) 協助記憶；(7) 鼓勵同儕間建立良好的友誼關係；(8) 維持強烈的學習動機；(9) 提供充分的練習機會；(10) 建立成功的經驗(引自吳吉昌，1995)

張新仁(2001)在進行國內補救教學相關研究後對於實施補救教學提出7點建議：

1. 教學策略宜重視個別差異的需求：需要接受補救教學的對象，本身也存在個別差異。如果每次接受補救教學的對象人數過多，擔任教學的老師便不易顧及個別程度和需要，故人數不宜多，以便能顧及個別差異。

2. 教學策略宜擷取指導教學策略的精華並輔以教學多媒體：指導教學法強調學習環境的高度結構化，包括教材內容按由易至難、由簡而繁的原則安排。在教學流程設計上強調複習以往學習內容、組織教材、小步驟教學、示範與模仿、提供多樣化練習、立即檢查是否學會、提供增強與回饋、建立成功經驗等。此外，提供教學多媒體，可增加學習活動的變化和趣味。

3. 提供多元而適配的課程類型組合：如在原有班級上可實施小組或個別導生式課程，隨時補救課堂上學習困難之處；對於額外需要加強的部分，可根據對象實施補救教學之課程與教學，設計全面額外加強的補充式課程或強調不同教法的補償式課程。

4. 補救教學評量方式宜適配：大多研究都採用「課程本位評量」方式，

以了解學生是否真正學會補救的內容，並作為進一步補救教學的依據。此外，動態評量方式則結合了教學設計在內，也可視為「套裝學習材料型態」。

5. 輔以德育修練作為有效的介入過程：通常低成就學生不僅學業表現差，易伴隨日常行為表現不佳，或行為偏差。因此，國外學者提出以「行為管理」作為有效實施補救教學策略的介入過程。國內學校不仿思考將德育作為補充式課程，以輔助學生開智慧。

6. 訓練實施補救教學的師資：並非任何老師都會實施補救教學。建議在中等教育學程選修科中增設「補救教學課程與教學設計」，以便逐步訓練學習如何有效實施補救教學。

7. 鼓勵編製補救教學適用的教材：目前普通班教師授課時數過重，無力另行編製或改編合用的補救教學教材。建議教育當局建立制度，鼓勵有經驗的教師編製教材教具或電腦輔助教學軟體，以解決大力推廣補救教學的主要困擾。

綜合以上所述，研究者在實施補救教學實驗的過程中，盡可能依循上述補救教學原則來進行（如下表2-4-1），並以直接教學法及多媒體教學作為實施補救教學的主要方法，配合講義的問題引導，藉由電腦軟體所呈現的圖形表徵，讓學生在觀察與操弄中達到學習的效果。

表2-4-1 本研究補救教學實驗與補救教學設計原則的檢核

補救教學設計原則	本研究補救教學實施情況
獲得學習者合作	依學生意願參加本研究補救教學，以獲得學生合作參與
根據學生的學習程度教學	透過學生段考成績與前測了解學習狀況，在教學活動中盡可能作個別指導
Otto, 循序漸進、小步驟進行 McMenemy	研究者依教學目標採由簡至繁、由易到難循序漸進編定補救教學講義
and Smith 提供回饋和安排增強 (1973)	學生藉由軟體觀察與操作獲得即時回饋，而研究者也可藉由走動觀察中給予學生回饋和增強學習信心與態度
使學習和教材有意義	依能力指標與分年細目設定教學目標，據此編定補救教學講義，搭配電腦軟體的操弄與課後作業的書寫使學習和教材有意義

(續後頁)

表2-4-1 本研究補救教學實驗與補救教學設計原則的檢核（接前頁）

協助記憶	在研究者編定的補救教學講義中，每個問題後會接有「說明」與「結論」，「說明」是希望學生經由操弄電腦軟體加強概念學習，「結論」則具體呈現教學目標，均是希望幫助學生記憶
鼓勵同儕間建立良好的友誼關係	鼓勵好朋友一起參與補救教學，教學活動中也支持互相幫忙學習，希望達到互相打氣與支持學習的效果
維持強烈的學習動機	除了適時口頭讚美外，也隨時給予信心喊話
提供充分的練習機會	教學活動中提供時間練習與操弄電腦軟體，並有課後作業做練習
建立成功的經驗	藉由走動觀察中給予學生適時回饋，幫助建立成功的經驗
教學策略宜重視個別差異的需求	教學活動中多詢問學生學習狀況，並於課後作業繳交後做個別指導
教學策略宜擷取指導教學策略的精華並輔以教學多媒體	教學上符合上述補救教學原則並輔以電腦媒體的操弄
提供多元而適配的課程類型組合	除了在普通教室利用黑板做教學外，需要補救加強者，設計補救教學講義搭配電腦媒體的操弄來進行學習
張新仁 (2001)	補救教學評量方式宜適配
輔以德育修練作為有效的介入過程	本研究依學習目標訂定評量題目，作為評定學生學習狀況的參考
訓練實施補救教學的師資	補救教學實施過程中，是當給予學生關懷，除了加強師生關係外，也能防止偏差行為發生
鼓勵編製補救教學適用的教材	本研究實施補救教學的教師為研究者本身，透過相關文獻的閱讀，了解補救教學的意義、教學設計原則與實施方法
	本研究編有補救教學講義三份、配合的課後作業三份、電腦輔助教學軟體兩份

鑑於上表 2-4-1 補救教學設計原則，本研究在實施補救教學前除了徵詢學生意願與了解學生的學習程度據此編定補救教學講義，使學習和教材

有意義外，研究者也透過相關文獻的閱讀，了解補救教學的意義、教學設計原則與實施方法，教學過程中重視個別差異的需求作適時指導，並設計電腦軟體輔以資訊科技融入教學，提供充分的練習機會並利用走動觀察機會給予學生回饋和建立成功的經驗，以增強其學習信心與態度，維持其強烈的學習動機，並隨時給予學生關懷，鼓勵同學互相幫忙學習，以維持師生良好互動關係，防止偏差行為發生，最後再給予學生依學習目標訂定的成就測驗題目評量，作為分析評定學生學習狀況的參考，做為研究者了解學生在經由電腦輔助補救教學後學習成就與學習態度改變情況，並據此寫下結論與建議。

