

第五章 教育科技融入數學建模教學

資訊科技運用於現代教育已經有近五十年的歷史，隨著資訊科學的長足進步與資訊產品的日漸普及，不管是一般家庭或是學校教室，電腦科技產品的資源與設備已今非昔比了。1980 年間，一種簡單易學的電腦輔助教學程式語言 Logo 與問題解決運動興起，讓現代教育有了一番新面貌。傳統的教育觀念與方法因為電腦科技的發展與教育科技（educational technology）的介入，一場無可避免的教育變革是所有從事教育工作者必須接受的事實。

「數學建模」解決的是人們當下的生活問題，未來社會越來越需要能夠解決問題的人才，雖然科技進步為人類社會創造了更好的生活環境與便利，但同樣的進步社會所遭遇到的問題也越形複雜與多樣。學校教育的主要功能就是使學生為未來的職場工作做好準備，所以提供與訓練學生使用各種畢業後將會碰到的科技是傳統與現代教育共有的特點，差別只在不同的時代學生須具備不同的技能。本章節將討論如何運用電腦科技結合建模教學，充分體驗科技技術所帶來的震撼性。第一節著重於資訊科技軟體以 GSP、Excel 及 Mathematica 的建模應用做介紹並舉例示範，第二節則探討現今高中數學建模課程的教學形式。

5.1 運用「資訊科技」於「數學建模」

廿一世紀的「資訊科技」蓬勃發展，電腦的逐漸普及並且在數學的研究與應用中日益顯現出重要性，培養學生的建模意識與能力在當今的數學教育中已成為具有實質性的重要任務，它既是學生個人能力發展的需要，也是當代科技發展對人才的基本要求之一，數學建模問題要求的是能綜合應用所學到的知識，而同時在建模的分析求解過程中有時需要大量及繁雜的運算與反覆檢驗的時間。因此，

強調電腦的使用，這不僅指在建模過程中使用計算工具，而且指在猜想、爭辯、探索、發現、證明、檢驗中使用計算工具。它的各個環節，如問題假設、抽象簡化、建模求解、檢驗修改、電腦的操作等，在整個建模操作的過程裡其實是代表著不同的思維鍛鍊。

一般課堂中的數學教學著重以演繹證明的方式教導學生數學性質，而忽略了「觀察、測試、實驗」等歸納能力的培養。不同於傳統教室裡的數學課程，數學建模以實際生活中的問題為背景，利用電腦作為輔助計算與實驗工具，不僅是具體呈現抽象的結果，也能夠在操作過程中引起學習動機，刺激思考。

5.1.1 GSP 動態繪圖軟體



GSP—動態幾何繪圖板（The Geometer's Sketchpad），是 1990 年代發展成的電腦環境。這套軟體在美國已經風行多年，深受國外中學教師及學生的喜愛，GSP 是架構在視窗環境下的幾何構圖電腦輔助教學軟體，GSP 不但能節省繪圖時間，更可簡易地構造動態幾何。使學生經由動態幾何圖形的變換及度量，來描述他們所發現的一些平面及空間幾何關係，增強開放式的猜測與研究。提供動態模擬（Animation）、圖形變換（Transformation）及圖形變化時，長度、角度、比例、面積等度量的功能，適合在抽象與複雜的幾何空間裡提供學生具體可操作的實驗環境。以下是一個運用 GSP 軟體的建模實驗過程：

馬祖因為其獨特的閩東文化及戰地風光資源已被政府列為國家風景區，近年不斷吸引國內外的旅遊愛好者前往觀光覽勝。因為早期實施戰地政務的因素，所以馬祖列島的景點常有許多紀念銅像與塑像的樹立，倒也形成一種特有的戰地色彩。其中有一處公園的塑像如圖 5-1-1-1 所示，

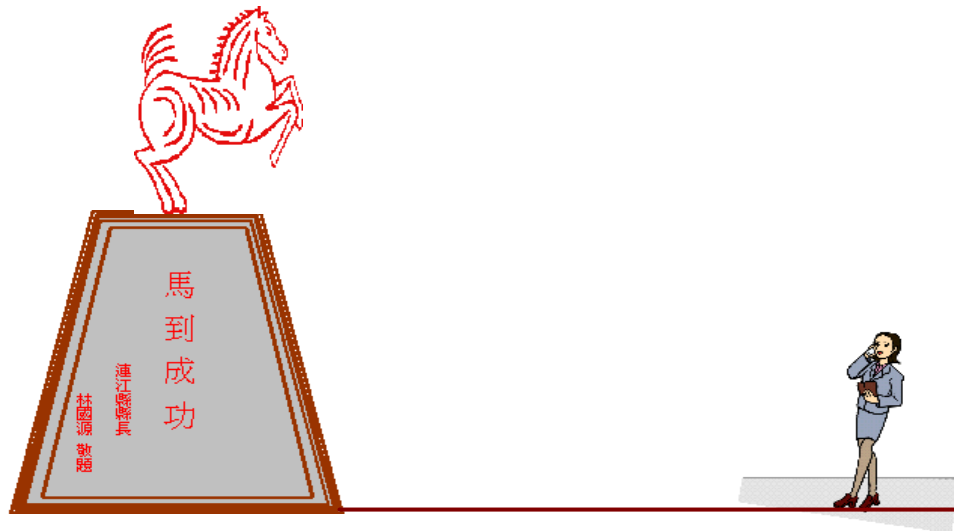


圖 5-1-1-1 公園塑像示意圖

我們想要研究的是當旅遊導覽員帶引觀光客進入景點區遊覽解說時，為使得旅客能有最佳的視角（即塑像的最大視角，視覺上來說就是看得最清楚），應該要怎樣找出旅客的最佳觀賞點？



【解析】：假設遊客的水平視線距離地面為 c 公尺，塑像底座的高度與 c 的差為 h 公尺，如圖 5-1-1-2 示如下；

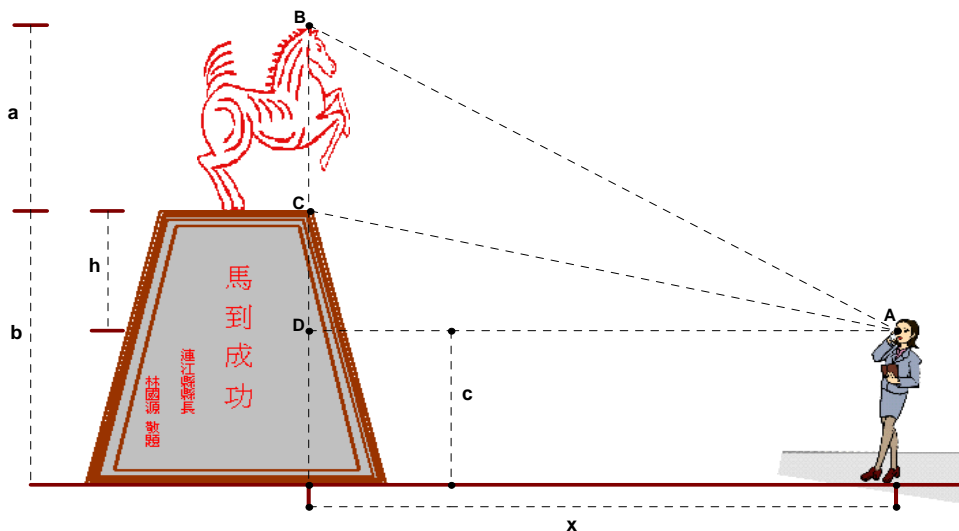


圖 5-1-1-2 公園塑像的最佳視角圖

一個直覺應該是可以被接受的，就是說如果站離塑像很遠那麼視角 $\angle CAB$ 一定很小，但如果距離塑像的底座太近同樣地視角 $\angle CAB$ 一定也會變小；換句話說，一定有一個最佳的距離 $\overline{AD}=x$ 使得視角 $\angle CAB$ 有最大值？現在我們利用 GSP 軟體來做動態模擬，並從中建立起數學模型。

$$\text{由上面的假設得知， } \tan \angle DAB = \frac{a+h}{x}, \quad \tan \angle DAC = \frac{h}{x},$$

$$\text{並由圖形得知 } \tan \angle CAB = \tan(\angle DAB - \angle DAC) = \frac{\tan \angle DAB - \tan \angle DAC}{1 + \tan \angle DAB \cdot \tan \angle DAC}$$

$$= \frac{\frac{a+h}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{a+h}{x} \cdot \frac{h}{x}} = \frac{\frac{a}{x}}{1 + \frac{(a+h)h}{x^2}} = \frac{ax}{x^2 + (a+h)h}$$

其中 a, h 是已知的定值。現在的問題應該是想辦法求出 $\frac{ax}{x^2 + (a+h)h}$ 的極值。

$$\text{令 } y = \tan \angle CAB = \frac{ax}{x^2 + (a+h)h}$$

$$\text{則 } \frac{dy}{dx} = \frac{a[x^2 + (a+h)h] - ax \cdot 2x}{[x^2 + (a+h)h]^2} = \frac{ah(a+h) - ax^2}{[x^2 + (a+h)h]^2}$$

由多項式函數的極值定理得知，

$$\frac{ah(a+h) - ax^2}{[x^2 + (a+h)h]^2} = 0 \quad \text{即；} \quad ah(a+h) - ax^2 = 0$$

所以，當 $x^2 = (a+h)h$ ；即取 $x_0 = \sqrt{(a+h)h}$ 時， $y = \tan \angle CAB$ 有極值出現，又因

為 $x \rightarrow x_0^-$ 時 $\frac{dy}{dx} > 0$ (表示函數遞增) 且 $x \rightarrow x_0^+$ 時 $\frac{dy}{dx} < 0$ (表示函數遞減)，故

此時 $x = x_0 = \sqrt{(a+h)h}$ 是遊客觀賞的最佳駐足點；同時最佳的觀賞視角

$$\angle CAB = \text{Arc tan} \sqrt{(a+h)h}$$

假設我們手邊有一組數據資料為 $a=2$ 公尺， $b=3.2$ 公尺 (注意： $a:b=1:1.6$ 接近黃金比例)，又粗估一般身高 172 公分的人其水平視線與地面的距離約為 160 公分，即 $c=1.6$ 公尺。因此，依上面的數學模型我們得出 $x_0 = \sqrt{3.6 \times 1.6} = 2.4$ 公

尺，也就是說遊客站在離塑像底座約 2 公尺的地方會是一個較佳的欣賞點。請注意！在這裡我們建議的旅客駐足點約為離底座 2 公尺的地方而不是 2.4 公尺，請仔細觀察圖形再想一想為什麼？

5.1.2 Excel 圖表製作與計算功能

數學源於生活而又服務於生活，現代數學是一門研究科學也是一門新興技術。Excel 是一個試算表軟體，針對資料分析、計算和整合，具有超強的功能，可說是目前電腦軟體應用中是一個不可或缺的應用程式。經由資料輸入 Excel 工作表單中透過 Excel 這個應用程式的整合，可以在各種功能的工具選單裡針對問題解決選擇我們所需要的圖表、統計計算與資料的統計性分析；例如：排序或大量記錄的處理，經由 Excel 的整合應用，可以讓各種電腦上的作業以自動化的方式來處理，節省大量的人工計算時間，進而達到資料整理與數據分析的目標。

中學數學建模強調的是培養學生問題解決的能力，尤其是與現實生活息息相關的週遭問題。讓學生從解決問題中親身體驗「做」數學，在探索解決一些日常生活和自然科學中的真實問題環境下與數學親密接觸，更能具體而實際地感受到數學在人類社會裡並不只是一門抽象艱深而又難以駕馭的理論科學，反而因為它的真實應用從而降低了學生對數學學習的恐懼與疏離。

在有意義的環境條件下，具目的性的問題解決（problem solving）是促進學生的推理思考的關鍵性改革方案；以下是筆者結合應用 Excel 套裝軟體所整理設計的高中數學建模課程活動。

【例一】：據 2004 年的參考消息指出，前五屆奧林匹克運動會主辦國的奧運電視轉播權利金的收入如下表，請你根據現有的資料預測 2008 年奧運會的電視轉播權利金收入為多少？

表 5-1-2-1 電視轉播權利金

年份	1988	1992	1996	2000	2004
權利金(億美元)	3.99	6.36	8.95	13.31	14.97

【解析】：我們嘗試利用 Excel 的統計與計算功能來建立數學模型，作為資料分析後的結果預測。

- (1) 進入 Excel 的工作表單開啓一個工作區 (Worksheet)，輸入已有的資料。
- (2) 建立資料散佈圖：點選工具表單的「圖表精靈」(或插入功能中的下拉選單圖表選項) 選取建立 X、Y 散佈圖 (如圖 5-1-2-1)。

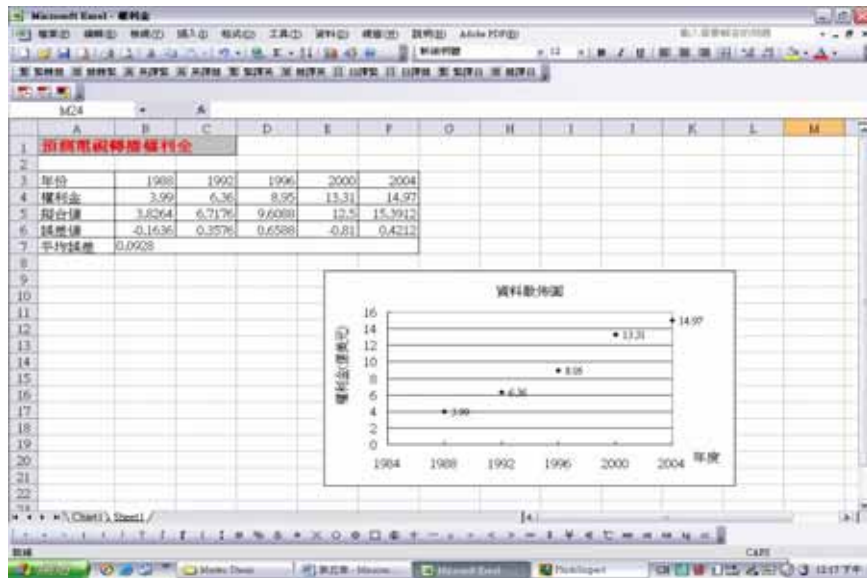


圖 5-1-2-1 Excel 試算表的工作視窗圖

(3) 建立回歸模型：觀察資料圖表的散佈圖，顯然資料點分布於一條近似直線上，在排除特殊情形的變動情況之下，即假設主辦國在 2008 年當時不會因技術問題影響電視轉播，同時社會維持穩定發展，而且願意付出權利金要求取得轉播權的參與國家數目也不會出現極大落差，我們不妨假設未來的趨勢走向與現今情形沒有太多的差異，於是我們可以進行線性擬合。

於工作區中點選上方「圖表」功能，進入下拉選單選取「加上趨勢線」，並在出現對話方塊的顯示區中選擇「線性」選項，圖表呈現如下；

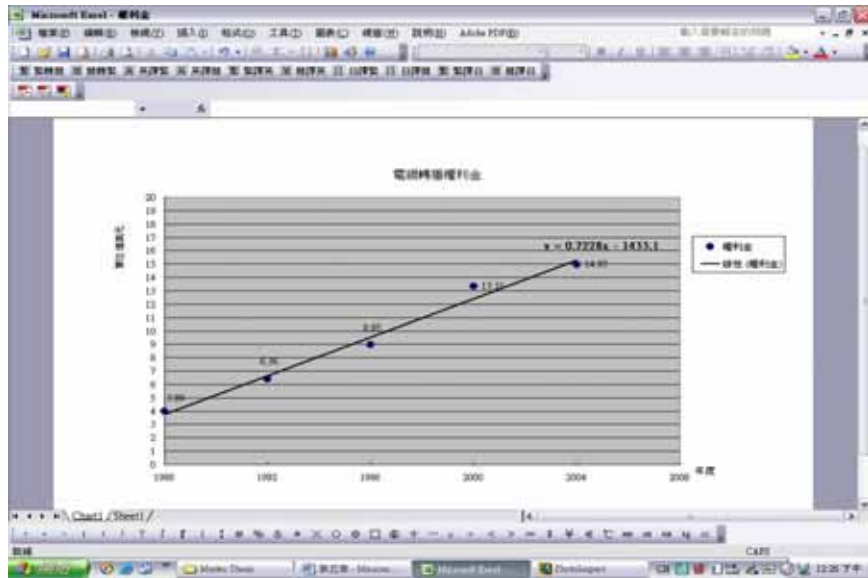


圖 5-1-2-2 Excel 試算表的插入趨勢圖

同時，若在對話方塊中選取「選項」並勾選在「圖表上顯示公式」，則 Excel 試算表的內建公式即同時顯示此份資料的線性方程式：

$$Y = 0.7228X - 1433.1$$

依此；線性擬合方程式告訴我們 2008 年的奧運電視轉播權利金預估收入為

$$\begin{aligned} Y &= 0.7228 \times 2008 - 1433.1 \\ &= 18.2824 \text{ (億美元)} \end{aligned}$$

最後；我們再為此一線性模型的精確度作一些檢驗，將 $X_1 = 1988$ 、 $X_2 = 1992$ 、 $X_3 = 1996$ 、 $X_4 = 2000$ 、 $X_5 = 2004$ 變項數值代入擬合方程式，分別得到擬合的數值為 $Y_1 = 3.8264$ 、 $Y_2 = 6.7176$ 、 $Y_3 = 9.6088$ 、 $Y_4 = 12.5$ 、 $Y_5 = 15.3912$ ；

表 5-1-2-2 電視轉播權利金的擬合值

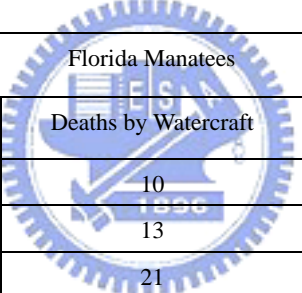
年份	1988	1992	1996	2000	2004
權利金（億美元）	3.99	6.36	8.95	13.31	14.97
擬合值（億美元）	3.8264	6.7176	9.6088	12.5	15.3912
誤差值（億美元）	-0.1636	0.3576	0.6588	-0.81	0.4212
平均誤差值	0.0928				

經過簡單的計算發現擬合值與真實資料的平均誤差為 0.0928 億美元，因此我們將 2008 年的電視轉播權利金收入預估為 18 億美元，應該是一個合理的估計值。

但值得注意的是 Excel 內建 (build-in) 的線性方程式為迴歸直線，其數學相關的理論依據，我們於隨後的例二中再做進一步的說明。

【例二】：美國佛州瀕危海牛處於存續臨界點

美國，維吉尼亞，瑞斯頓；一次全面性的海牛數量分析報告指出，在佛州外海的四個區域中，有兩個區域的海牛數量以健康比率成長；但這種瀕危的海洋哺乳動物在另外兩個區域的數量，不是停滯不前，就是逐漸減少當中。海牛為溫馴的素食動物，移動速度緩慢，目前牠們面臨的威脅包括：因暴露在受污染的紅潮而致死，或遭受船隻與廢棄的漁網所傷，或者，受困防洪水閘門和運河閘門下而窒息死亡。現在；我們手邊有一份因為海上動力船隻而造成佛州外海的海牛死亡的數據資料如下：



Florida Manatees		
Year	Deaths by Watercraft	Number of Registered Watercraft (×1000)
1976	10	437
1977	13	447
1978	21	460
1979	24	481
1980	16	498
1981	24	513
1982	20	512
1983	15	526
1984	34	559
1985	33	585
1986	33	614
1987	39	645
1988	43	675
1989	50	711
1990	47	719
1991	53	719
1992	38	719

(資料來源：*Paul A Kennedy; Selina Vasquea Mathematics and Computer Education; Fall 37,3; Academic Research Library pg.358*)

請你利用以上的資料嘗試建立一個數學模型，觀察海上動力船隻的增加與海牛死亡數量間是否存在有數學關係？並藉由你所建立的數學模型討論 1995 年到 2000 年之間海牛的死亡數量增減情形？同時提出你的預估數值。

【解析】：

(1) 建立統計圖表

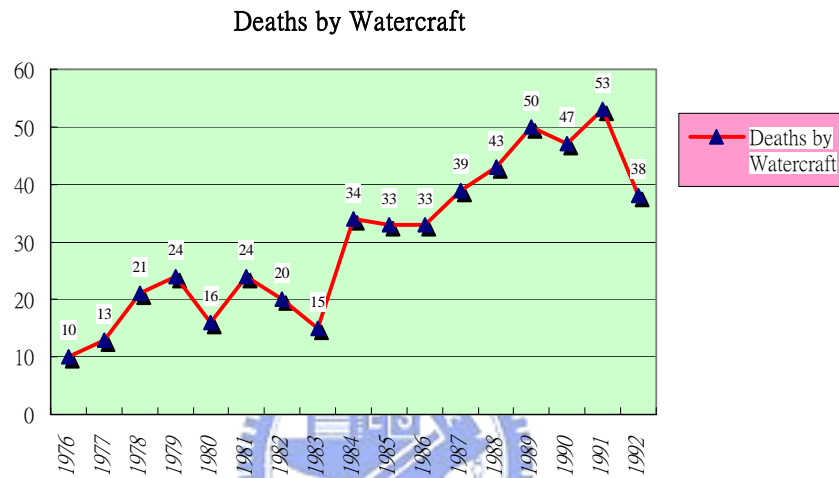


圖 5-1-2-3 歷年海牛死亡數量折線圖

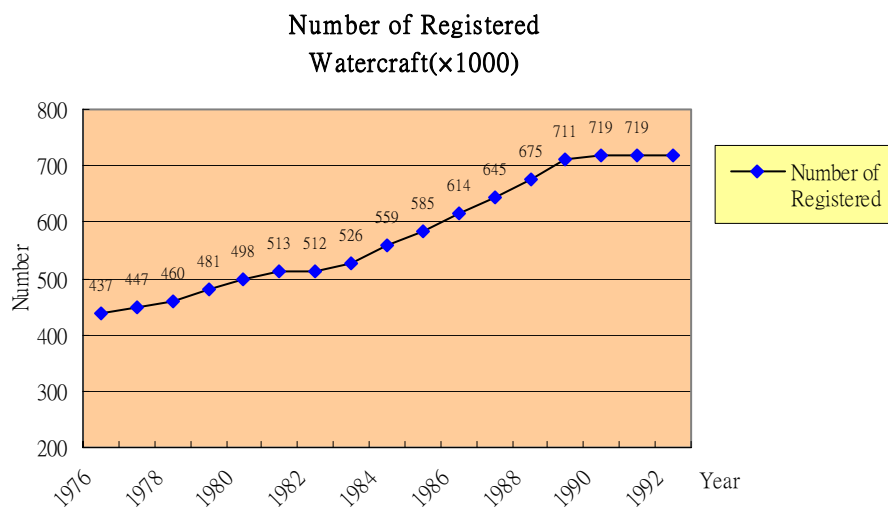


圖 5-1-2-4 歷年海上動力船隻數量統計圖

Rectangle frequency diagram

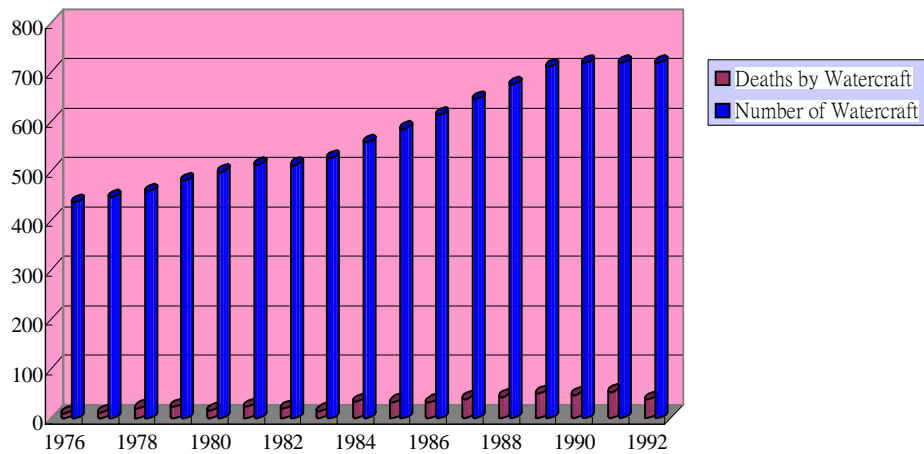


圖 5-1-2-5 歷年海牛死亡數量與海上動力船隻數量統計長條圖

從以上三個統計圖表中我們獲得的信息為，除了 1983~1984 年及 1991~1992 年外，海牛死亡數量有逐年增加趨勢；而且海上動力船隻的數目也呈每年遞增，至 1990 年以後動力船隻的成長數量則明顯減少。同時由兩者的次數分配長條圖中，我們也可以初步觀察出海牛死亡數量與動力船隻增加的數目有著統計學上的相關性，而經由 Excel 的內建統計公式，我們取得兩者的相關係數（correlation coefficient）為 0.94，證實了我們前面的觀察應該是合理的。

(2) 判讀資料、尋找關係並建立線性模型

由下表資料顯示 1983~1984 年及 1991~1992 年的海牛死亡統計數量相較於其他年度的死亡數量出現較大的數量上差異，當然我們可以合理地懷疑其中必有某一些特殊因素造成如此大的落差，例如：發生重大海洋污染事件、該年的氣候出現異常、漁民濫捕、甚或海上交通的頻率出現急遽改變...等等。因此，考量在不失一般性的原則之下，我們考慮將此二數據資料排除以避免因為極端值而影響算術平均數的可信度。

在資料中我們觀察得知歷年的海牛死亡數量的增減情形如下表所示；現在我們嘗試建立出一個線性關係式以做為預測模型的基礎。

表 5-1-2-3 由 Excel 試算表建立線性模型（海牛死亡數量）

Year	x	Amount(y)	Difference	y=1.71*x+10
1976	0	10		10
1977	1	13	3	12
1978	2	21	8	13
1979	3	24	3	15
1980	4	16	-8	17
1981	5	24	8	19
1982	6	20	-4	20
1983	7	15	-5	22
1984	8	34	19	24
1985	9	33	-1	25
1986	10	33	0	27
1987	11	39	6	29
1988	12	43	4	31
1989	13	50	7	32
1990	14	47	-3	34
1991	15	53	6	36
1992	16	38	-15	37
Average			1.71	

於是得到的線性關係式：

$$y = 1.71x + 10$$

並依此關係式預測出 1993 年以後到 2000 年內的海牛死亡數量的預估值如下：

表 5-1-2-4 線性模型之預估值（海牛死亡數量）

Year	x	y=1.71*x+10
1993	17	39
1994	18	41
1995	19	42
1996	20	44
1997	21	46
1998	22	48
1999	23	49
2000	24	51

利用 Excel 試算表的圖表功能我們將海牛死亡數量的原始資料與預估值整理成如下圖 5-1-2-6，由圖表觀察，我們建立的線性模型顯然與實際數值資料有較明顯的誤差；換句話說，線性關係模型不適用於解釋我們想要預測的現象。

預估海牛死亡量的趨勢圖
(The amount of deaths by Watercraft)

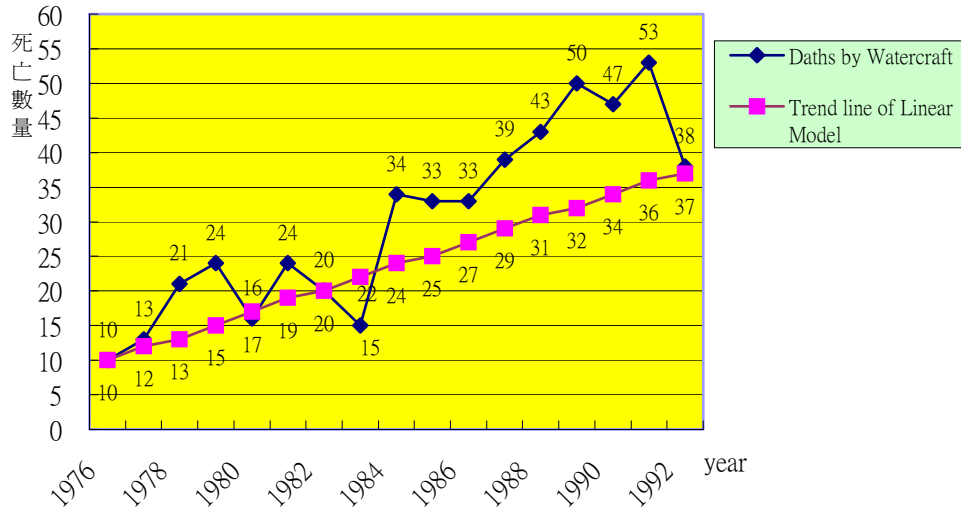


圖 5-1-2-6 預估海牛死亡數量的趨勢圖（線性模型）

現在我們運用相同的方式，可以同時建立一個線性模型來預估海上動力船隻數量的成長，藉由資料整理得以下表格。

表 5-1-2-5 由 Excel 試算表建立線性模型（動力船隻登記數量）

Year	x	Amount(y)	Difference	$y=17.63*x+437$
1976	0	437		437
1977	1	447	10	455
1978	2	460	13	472
1979	3	481	21	490
1980	4	498	17	508
1981	5	513	15	525
1982	6	512	-1	543
1983	7	526	14	560
1984	8	559	33	578
1985	9	585	26	596
1986	10	614	29	613
1987	11	645	31	631
1988	12	675	30	649
1989	13	711	36	666
1990	14	719	8	684
1991	15	719	0	701
1992	16	719	0	719
Average			17.63	

取各年度間海上動力船隻增加數量的平均值，我們得到的關係式為：

$$y = 17.63x + 437$$

因此，我們可以得出 1993 到 2000 年內動力船隻數量的成長預估值，

表 5-1-2-6 線性模型之預估值（動力船隻成長數量）

Year	x	Y=17.63*x+437
1993	17	737
1994	18	754
1995	19	772
1996	20	790
1997	21	807
1998	22	825
1999	23	842
2000	24	860

同時 Excel 試算表的圖表功能也清楚地將海上動力船隻數量的成長趨勢，顯示如下圖 5-1-2-7；

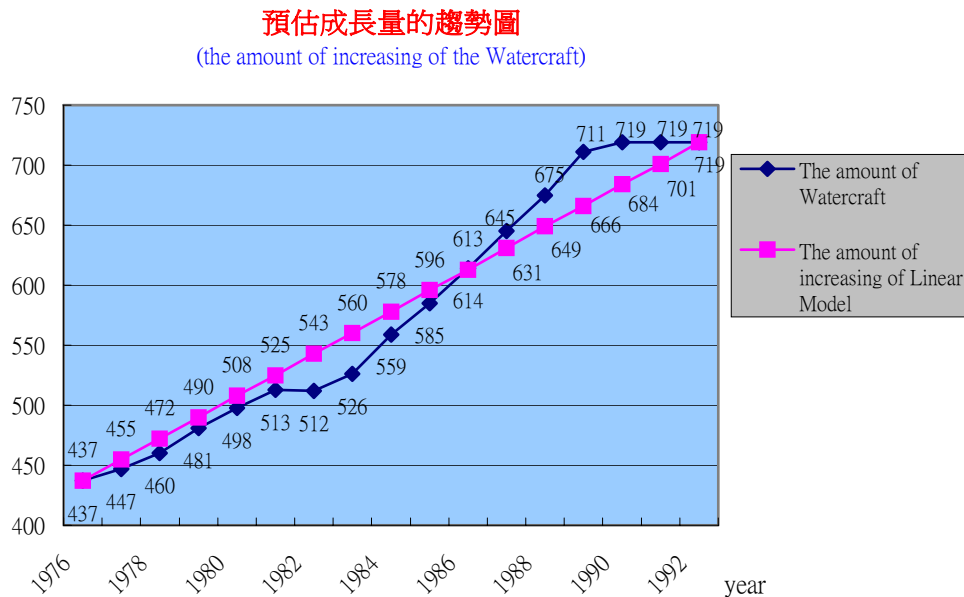


圖 5-1-2-7 預估海上動力船隻數量成長的趨勢圖（線性模型）

(3) 建立指數模型

另一方面，或許我們會考量到這樣的線性模型（無論是死亡數量與船隻成長數量的預估）是否與真實的發展曲線大致符合，還是有其他的思考角度可以重新建立我們的模型？我們不妨做以下的思考

$$\frac{\text{下一年度的死亡數量}}{\text{當年度的死亡數量}} - 1 = \text{死亡數量年增率}$$

經由現有的每年海牛死亡數量資料我們利用 Excel 的函數功能計算出各個年度的死亡“年增率”如下圖表所示，並取其幾何平均數作為平均年增率的參考值。

表 5-1-2-7 由 Excel 試算表建立指數模型（海牛死亡數量）

Year	x	Amount(y)	Quotients	y=10*(1.09)^x
1976	0	10		10
1977	1	13	1.300	11
1978	2	21	1.615	12
1979	3	24	1.143	13
1980	4	16	0.667	14
1981	5	24	1.500	15
1982	6	20	0.833	17
1983	7	15	0.750	18
1984	8	34	2.267	20
1985	9	33	0.971	22
1986	10	33	1.000	24
1987	11	39	1.182	26
1988	12	43	1.103	28
1989	13	50	1.163	31
1990	14	47	0.940	33
1991	15	53	1.128	36
1992	16	38	0.717	40
Geomean			1.09	

為釐清幾何平均數的疑慮我們於此稍作說明；

假設有三個年度且每一年的成長率分別為 p_1, p_2, p_3 ；

第一年 $\xrightarrow{p_1}$ 第二年 $\xrightarrow{p_2}$ 第三年 $\xrightarrow{p_3}$ 第四年

若第一年(基期年)的值為 p ，則第二年的值為 $p + p \cdot p_1 = p(1 + p_1)$ ，

第三年的值為 $p(1 + p_1) + p(1 + p_1) \cdot p_2 = p(1 + p_1)(1 + p_2)$ ，

第四年的值為 $p(1 + p_1)(1 + p_2) + p(1 + p_1)(1 + p_2) \cdot p_3$

$$= p(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)；$$

設平均年增率為 r ，得 $p(1 + r)^3 = p(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)$

$$\Rightarrow (1 + r)^3 = (1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)$$

$$\Rightarrow (1 + r) = \sqrt[3]{(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)} - 1$$

於是我們得到一個指數模型的關係式為

$$y = 10(1.09)^x$$

依此指數關係式整理出 1993 年後到 2000 年間的各個年度的預測值，

表 5-1-2-8 指數模型之預估值（海牛死亡數量）

Year	x	$y=10*(1.09)^x$
1993	17	43
1994	18	47
1995	19	51
1996	20	56
1997	21	61
1998	22	67
1999	23	73
2000	24	79

藉由 Excel 圖表功能，我們可以清楚地將每年海牛死亡數量原始資料的分布圖（Scatter plot）與指數模型所預測的每年海牛的死亡數量趨勢圖加以比較如下圖；如同前面所建立的線性模型，我們不難發現指數模型的預估值或許較佳，但就誤差值的範圍而言，仍與真實數據有段差距。

預估海牛死亡量的趨勢圖
(The amount of deaths by Watercraft)

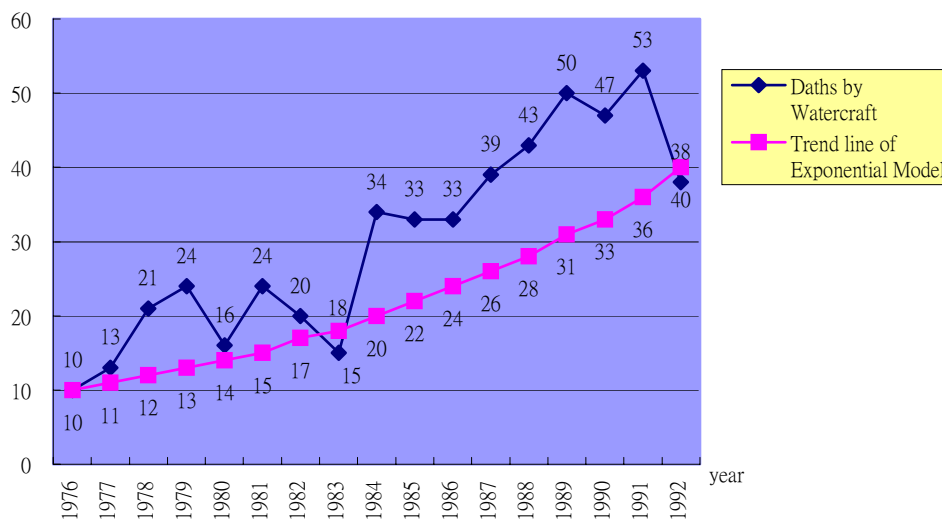


圖 5-1-2-8 預估海牛死亡數量的趨勢圖（指數模型）

同理，我們一樣整理出海上動力船隻成長數量的指數模型與預測的趨勢圖，

表 5-1-2-9 由 Excel 試算表建立指數模型（動力船隻登記數量）

Year	x	Amount(y)	Quotients	$y=437*(1.03)^x$
1976	0	437		437
1977	1	447	1.023	450
1978	2	460	1.029	464
1979	3	481	1.046	478
1980	4	498	1.035	492
1981	5	513	1.030	507
1982	6	512	0.998	522
1983	7	526	1.027	537
1984	8	559	1.063	554
1985	9	585	1.047	570
1986	10	614	1.050	587
1987	11	645	1.050	605
1988	12	675	1.047	623
1989	13	711	1.053	642
1990	14	719	1.011	661
1991	15	719	1.000	681
1992	16	719	1.000	701
Geomean			1.03	

取各年度之間的幾何平均值（船隻成長量的平均年增率），我們可以得到以下的指數關係式



$$y = 437(1.03)^x$$

依此指數關係式整理出 1993 年後到 2000 年間海上動力船隻的成長數量預測，

表 5-1-2-10 指數模型之預估值（動力船隻成長數量）

Year	x	$y=437*(1.03)^x$
1993	17	722
1994	18	744
1995	19	766
1996	20	789
1997	21	813
1998	22	837
1999	23	862
2000	24	888

利用 Excel 圖表功能我們同樣將船隻數量原始資料的分布圖與指數模型所預測的成長趨勢圖加以比較如下

海上動力船隻預估成長量的趨勢圖
(the amount of increasing of the Watercraft)

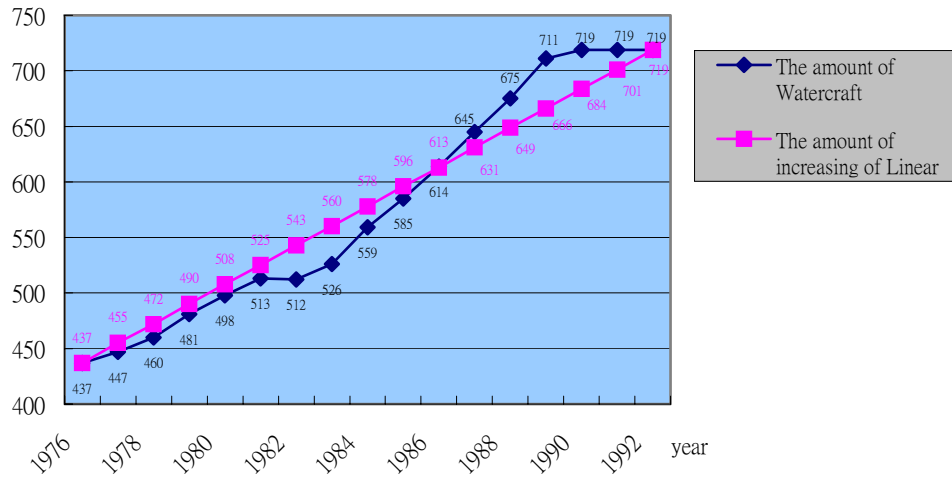


圖 5-1-2-9 預估海上動力船隻數量成長的趨勢圖（指數模型）

爲了檢驗兩種模型的差異程度，我們也針對個別情況將兩種模型比較如下

指數與線性模型預估成長的比較
(The amount of the deaths by Watercraft)

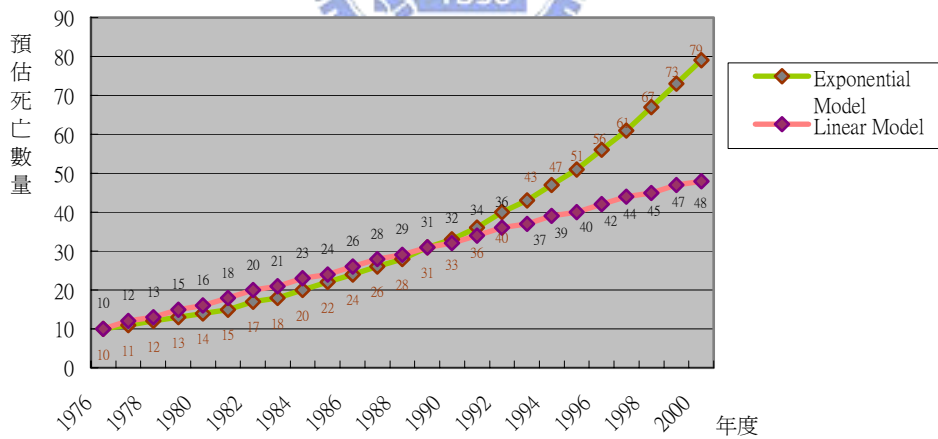


圖 5-1-2-10 線性及指數模型對海牛死亡數量預估值之比較

指數與線性模型預估成長的比較 (The increasing of the amount of Watercraft)

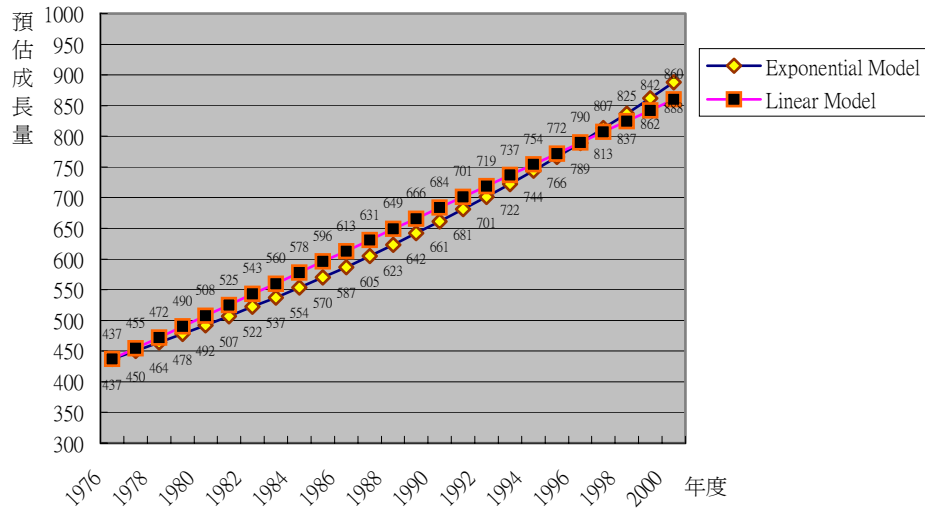


圖 5-1-2-11 線性及指數模型對海上動力船隻數量預估值之比較

從上圖我們發現在短期間（short term）內，線性模型與指數模型對同一對象的預估值不會出現很大的差距，但長期間（long term）之後就有明顯的差異了。因此，適當的選擇模型也是建模過程中悠關最後模型檢驗成功與否的重要關鍵。

建模的目的則是希望藉由不同模型之間與原始資料的差異程度，合理地選擇出我們的最佳方案模型，當然我們目前僅就現有的模型中經由解釋與共同討論後，就兩者之間的優劣作一個初步的比較分析，並期望藉由所建立的數學模型能對真實的情境發展做出較為合理的預測。

至此，線性模型與指數模型分別提供了我們對資料判讀的不同解釋方向，然而真實世界的複雜現象有時並非能輕易地解釋或預測的到，但透過確認關係（Identify the problem）、形成數學模型（Formulate a mathematical model）、運用分析（Apply mathematical analysis）到最後引出結論並做出預測（Draw conclusions, Make predictions）；這整個活動的過程卻是貼近真實生活的一種學習，期間有數學的思考活動、電腦軟體輔助工具的學習、套裝軟體的應用以及團隊的合作學習與分工。

美國數學教師協會（NCTM）的“學校數學課程標準與評估”對高中數學建模課程做了一明確的敘述如下：*In the Principle and Standards for School*

Mathematics (NCTM 2000), a mathematical model is defined as “... a mathematical representation of the elements and relationships within an idealized version of a complex phenomenon; they are used to clarify understanding of the phenomenon and to solve problems; “to model” includes not only representation, but also acting up the representation and interpreting the meaning of Ones actions within the mathematical model and with respect to the phenomenon being modeled (pp.98-99). “Perhaps the best way to describe Mathematical Modeling is to illustrate it with a real-word example.

一般的認知中，認為藉由真實的資料（非經過設計的數據資料）則學生的數學經驗將吸引他們持續探索，且在統計的概念、展現、和操作之下為數學關係的理解提供良機(Helen M. Doerr, 2003)；這樣經驗亦為學生在數學脈絡中扮演了一個強有力的角色，當他們埋頭致力於一個有真實情境的現實的問題同時，也參與了他們社會化的過程。

因此，賦予數學學習活動真實而具體的經驗，得以使學生提煉出更複雜的意義與概念，進而引領學生進入更高階的數學思考，以富含技術性(technology-rich)及活動導向(activities-based)為主體的數學建模課程是數學教育改革的新契機(NCTM, 2000)。

同時，研究顯示在真實的背景條件下數學建模提供給學生的是現實情境中的經驗與有意義的活動，而不是僅僅當成一些無關緊要和程序性的工作(Kennedy, P. A., Chavkin, N. F., & Raffled, P.,1995)。從佛洛依德的心理學角度來說這種由真實經驗中所發展的數學學習活動，對現實主義的數學教育研究而言是具優勢的。

此建模課程活動的設計是為具有高一、高二數學知識的學生為主要對象，所以在整個活動設計的過程中我們著重於訓練學生對資料的整理、判讀、關係式的尋找、形成數學系統、分析、選擇最佳模型、引出結論而做成預測；但考量此年級學生數學知識的局限性，對所建模形的統計誤差我們並不特別強調，而事實上此一活動設計是具有延伸性的，當學生的課程到達目前國內的高三程度時，他們

對統計知識有較多的涉獵，諸如：相關係數、變異係數、最佳迴歸直線...等等，屆時再配合課程設計做進一步的模型檢驗，使學生的數學知識能串連在同一課程活動的設計範圍之內，應該是一種符合學習理論架構的好方案。

(4) 建立迴歸直線模型

在建立迴歸直線模型（最適合直線）之前，我們對迴歸直線的相關數學理論先做進一步的說明。

【甲】：最小平方法的基本概念解釋

所謂最小平方法，就是對給定的有限多個數對 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ， (x_3, y_3) ， \dots ， (x_n, y_n) ，要求一個線性函數 $y = f(x) = a + bx$ ，使得誤差的平方和

$$E(a, b) = \sum_{k=1}^n [y_k - (a + bx_k)]^2 \text{ 有最小值}$$

其幾何意義如下圖 5-1-2-13 所示

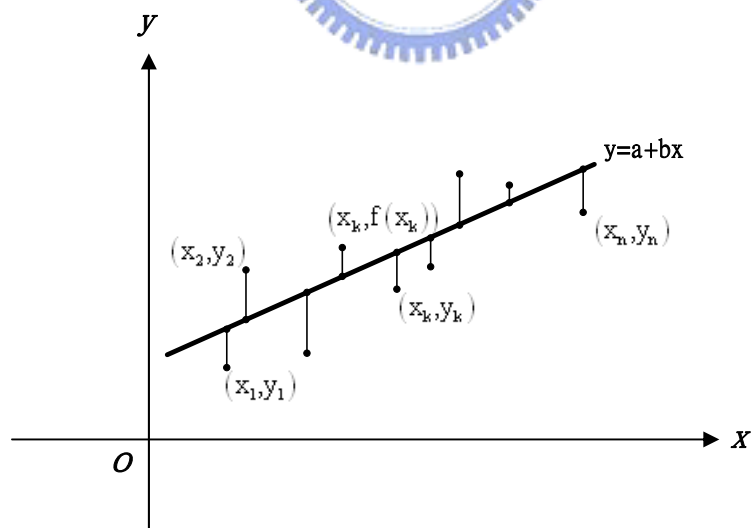


圖 5-1-2-12 最小平方法的幾何意義圖示

此時所求得的直線稱為迴歸直線（最適合直線）。

【乙】：如何求出迴歸直線 $y = a + bx$ 的係數 a 與 b ？

定義：設 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , $\dots\dots(x_n, y_n)$ 表示 n 個數對資料；則

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}} ; S_y = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n-1}} \text{ 分別代表變數 } x \text{ 與 } y \text{ 的樣本標準差；}$$

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y} \text{ 或 } r = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - \bar{x}}{S_x}\right) \left(\frac{y_k - \bar{y}}{S_y}\right)}{n-1} \text{ 表示 } x \text{ 與 } y \text{ 的相關係數。}$$

$$\text{由 } S_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}} \Leftrightarrow (n-1)S_x^2 = \sum_{k=1}^n (x_k)^2 - 2\bar{x} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + n(\bar{x})^2$$

$$\text{得知 } \sum_{k=1}^n (x_k)^2 = (n-1)S_x^2 + n(\bar{x})^2 ; \text{同理 } \sum_{k=1}^n (y_k)^2 = (n-1)S_y^2 + n(\bar{y})^2 ;$$

$$\text{又因爲 } r = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y} \Leftrightarrow r = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k y_k - \bar{x}y_k - x_k \bar{y} + \bar{x}\bar{y})}{(n-1)S_x S_y}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (x_k y_k) = (n-1)rS_x S_y + n\bar{x}\bar{y}$$

$$\text{於是 } E(a, b) = \sum_{k=1}^n [y_k - (a + bx_k)]^2 = \sum_{k=1}^n [a^2 + 2abx_k + b^2x_k^2 - 2ay_k - 2bx_k y_k + y_k^2]$$

$$= \sum_{k=1}^n a^2 + 2ab \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + b^2 \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2\right) - 2a \left(\sum_{k=1}^n y_k\right) - 2b \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right) + \sum_{k=1}^n (y_k)^2$$

$$\text{由前述的定義中已知 } \sum_{k=1}^n (x_k)^2 = (n-1)S_x^2 + n(\bar{x})^2 ;$$

$$\sum_{k=1}^n (y_k)^2 = (n-1)S_y^2 + n(\bar{y})^2 ;$$

$$\sum_{k=1}^n (x_k y_k) = (n-1)rS_x S_y + n\bar{x}\bar{y} ; \text{代入上式整理得}$$

$$E(a, b) = na^2 + 2abn\bar{x} + b^2 \left[(n-1)S_x^2 + n(\bar{x})^2 \right] - 2an\bar{y} - 2b \left[(n-1)rS_x S_y + n\bar{x}\bar{y} \right] +$$

$$\left[(n-1)S_y^2 + n(\bar{y})^2 \right]$$

$$= n \left[a^2 + 2ab\bar{x} + b^2(\bar{x})^2 - 2\bar{y}(a + b\bar{x}) + (\bar{y})^2 \right] + (n-1) \left[b^2 S_x^2 - 2brS_x S_y + S_y^2 \right]$$

$$= n(a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + (n-1)[b^2S_x^2 - 2brS_xS_y + r^2S_y^2 + (1-r^2)S_y^2]$$

$$= n(a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + (n-1)[(bS_x - rS_y)^2 + (1-r^2)S_y^2]$$

顯然；當 $\begin{cases} a + b\bar{x} - \bar{y} = 0 \\ bS_x - rS_y = 0 \end{cases}$ 成立時， $E(a,b)$ 有最小值 $(n-1)(1-r^2)S_y^2$ ；同時由聯立

式解得
$$a = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x}, \quad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

所以迴歸直線的方程式為 $y = a + bx = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x} + r\frac{S_y}{S_x}x \Leftrightarrow y - \bar{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$ ；

依此迴歸直線的方程式我們可以由 x 值來預估出相應的 y 。

下圖 5-1-2-12 中的黑色實線為迴歸直線（最適合直線）的模型：

$$y = 2.4191x + 8.4044$$

目的是希望藉此讓學生比較出不同的數學模型在預測上所存在的差異。

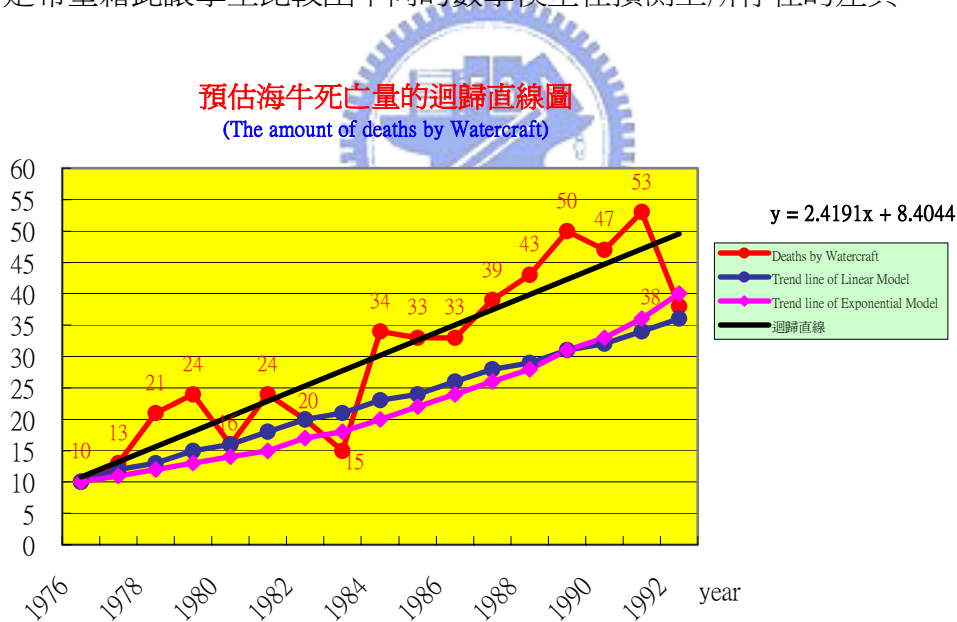


圖 5-1-2-13 預估海牛死亡數量之迴歸直線圖

5.1.3 Mathematica 軟體的結合應用

Mathematica是一套整合數字以及符號運算的數學工具軟體，它是由複雜理論的發明者Stephen Wolfram於1988年推出的高科技電腦運算軟體產品；其特色為具有高階的演算方法和豐富的數學函數庫，不但可以做數字的計算，還可處理符號運算，以及繪製各領域專業函數圖形。結合具有強大功能、操作簡單、又非常容易學習的數學軟體作為數學建模的輔助工具，筆者認為可以減少學生因為數學專門知識的不足而產生的困境，同時使用數學軟體輔助數學建模的好處是讓問題解決者將時間花在問題思考上而非計算，而且Mathematica精確的數值運算結果及內建龐大的數學知識庫提供了精確的數據資料，有利於模型的建立。

【例一】：臺灣是個海島型的國家，地狹人稠，資料顯示台灣地區每一平方公里的人口密度在世界排名屬於高密度國家的地區；而台灣居住人口的地方因城鄉發展的差異造成人口的居住分佈極不均衡，居住人口的過度集中相對地衍生出許多的問題。近年來由於城鄉交通與經濟各項建設的均衡發展，都市人口有減緩的趨勢，現在，我們想了解台灣地區未來幾年人口可能分佈百分比的情況，由內政部統計局的網頁資料得知2005年大台北地區（新竹以北）的人口佔台灣總人口數約40%，我們想要知道十年後大台北地區的居住人口流動情形將有何變化？

首先，我們查得近年大台北地區人口的移動資料為：每年移出大台北地區的人口數約有2%。同時約有1%的大台北地區以外的人口遷入。在這裡我們著重的是有關人口的移動的情形，因此為了簡化模型的建立，我們做了以下的假設。

- (1) 社會發展型態維持相對穩定，大量的人口遷移機會相對減低。
- (2) 地方政府的社會福利政策沒有重大的差異性。
- (3) 出生率與死亡率對人口分佈的百分比影響微乎其微。

由以上的已知條件與假設，利用馬可夫（Markov's Matrix）矩陣我們建立出問題的數學模型：

$$\begin{bmatrix} t_n \\ 1-t_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{bmatrix} ; \text{ 其中 } A^n = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.01 \\ 0.02 & 0.99 \end{bmatrix} \text{ 為轉移矩陣}$$

t_n ：代表 n 年後大台北地區的人口百分比。

現在的問題就只是想辦法解出矩陣 A 的幕次方 A^k 了。關於幕次方 A^k 的計算當然可以由矩陣的乘法運算性質一步一步地直接計算，但是當 k 值很大時，僅靠人為方式的運算顯然曠日費時也容易產生失誤而導致數據偏差，甚而左右了最後模型的準確性。**Mathematica** 具有強大的數學運算功能，我們現在只要應用它的計算能力得出數值（如下圖 5-1-3-1），問題就迎刃而解了。

```

Mathematica 4 - [Untitled-1 *]
File Edit Cell Format Input Kernel Front Window Help

Untitled-1 *

In[2]:= MatrixForm[A = {{0.98, 0.01}, {0.02, 0.99}}]
Out[2]/MatrixForm=
  ( 0.98  0.01 )
  ( 0.02  0.99 )

In[3]:= MatrixPower[A, 10] // MatrixForm
Out[3]/MatrixForm=
  ( 0.824949  0.0875253 )
  ( 0.175051  0.912475 )

In[4]:= MatrixForm[T = {{0.4}, {0.6}}]
Out[4]/MatrixForm=
  ( 0.4 )
  ( 0.6 )

In[5]:= A.T // MatrixForm
Out[5]/MatrixForm=
  ( 0.398 )
  ( 0.602 )
  
```

圖 5-1-3-1 利用 Mathematica 作矩陣運算

由 Mathematica 的運算功能解得 $t_n = 0.398 = 39.8\%$ ；我們可以大致將這個數學模型所呈現的訊息解讀為：在上述的假設條件之下，十年後大台北地區的人口居住比率只約略比現今的百分比 40% 稍微下降一點點而已；因此，我們可以大膽地藉由此一模型預測，除非政策上有重大的改變，否則十年後大台北地區的人口擁擠程度不會有太大的改善。

數學建模的過程中對資料的趨勢判讀是很重要的一環，正確的判讀可以讓我們在隨後的模型建立中降低因為資料誤判（或是資料的蒐集不齊全、甚至資料的代表性不足）而產生的模型誤差甚至是模型的無法適用（unfitting）。所以，重要的是如何正確地研判出資料（訊息）的發展並選擇合適的數學模型作為預測的基礎，從而建立起合於假設條件下的數據資料，最後演繹歸納出合理的數學模型。

數學建模涉及到資料的解譯與使用，Lehrer, R. 與 Schauble, L. 二位教育學者將其定義為“對問題提出一個多重建構過程、發展問題的屬性、測量並組織其特性，最後去蕪存菁進而呈現出關係模型(Lehrer, R., & Schauble, L., 2004)。”然而這樣的課程實踐在中學的課程中並不常見，即便在高中的課程內也僅限於課本中的一些零散例子，致使學生對建模的相關策略少有發展。

數學建模的過程是艱辛且繁雜的，從解釋闡明問題到確立變數，抽象為數學關係而建立初步模型，進而檢驗模型的可靠性；這些過程中不免需要經由數據資料的代入或是猜測資料的發展趨勢來鞏固初始模型的可延續性。因此，借助套裝軟體的強大功能與計算的快速能力，幫助我們迅速並有效地檢驗出模型的缺失或是提供正確的解釋，對整個建模結果的影響可說是舉足輕重。然而這裡我要強調一點，軟體的功能僅在於輔助性質，因為畢竟最終模型的好壞仍是決定在數學的關係式能否適切而又有說服力。

【例二】：假設我們有某一數據資料為：

表 5-1-3-1 數據資料表

x	0	0.2	0.3	0.52	0.64	0.7	1.0
y	0.3	0.45	0.47	0.50	0.38	0.33	0.24

我們利用 Mathematica 的曲線擬合功能來嘗試找出資料的發展趨勢。其操作過程如下：

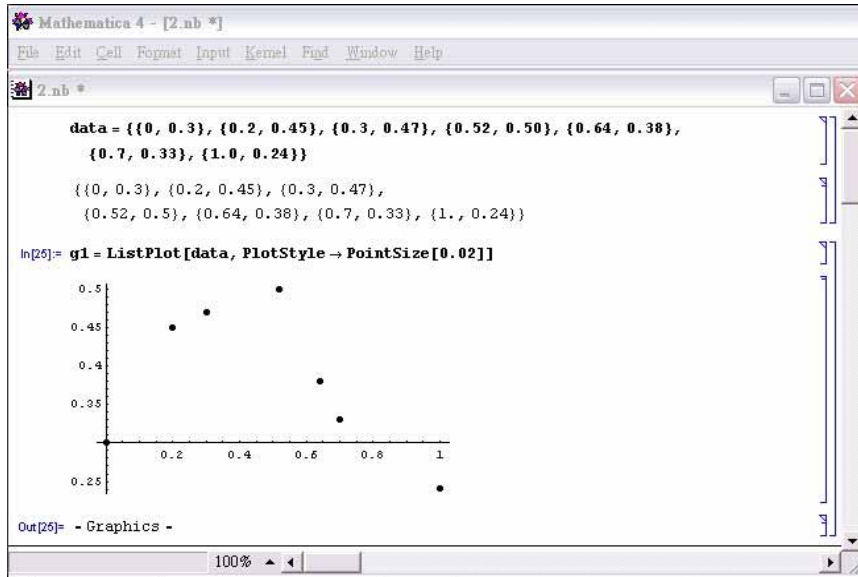


圖 5-1-3-2 利用 Mathematica 作數據資料的擬合

從散佈圖形中我們發現資料的發展顯然不是呈線性趨勢，也就是說，我們可以預測它的發展趨勢比較傾向於某一種曲線。現在不妨利用 Mathematica 的擬合功能來做出較佳的預測曲線。

以下是利用二次與三次函數的曲線來分別作出原始資料的擬合，如圖 5-1-3-3 所示；結果很清楚地告訴我們由三次多項式函數，圖 5-1-3-4 所逼近的擬合值顯然與實際數據的誤差較小。

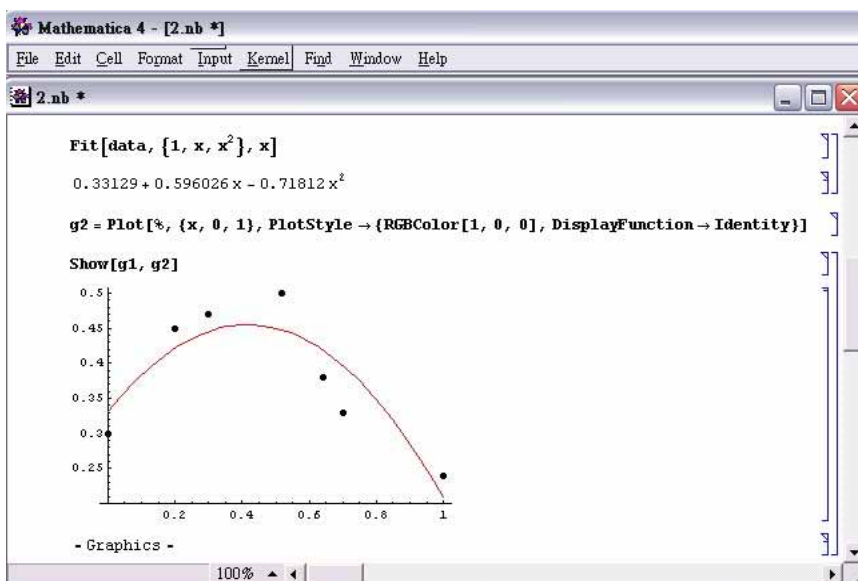


圖 5-1-3-3 利用 Mathematica 作數據資料的二次函數擬合

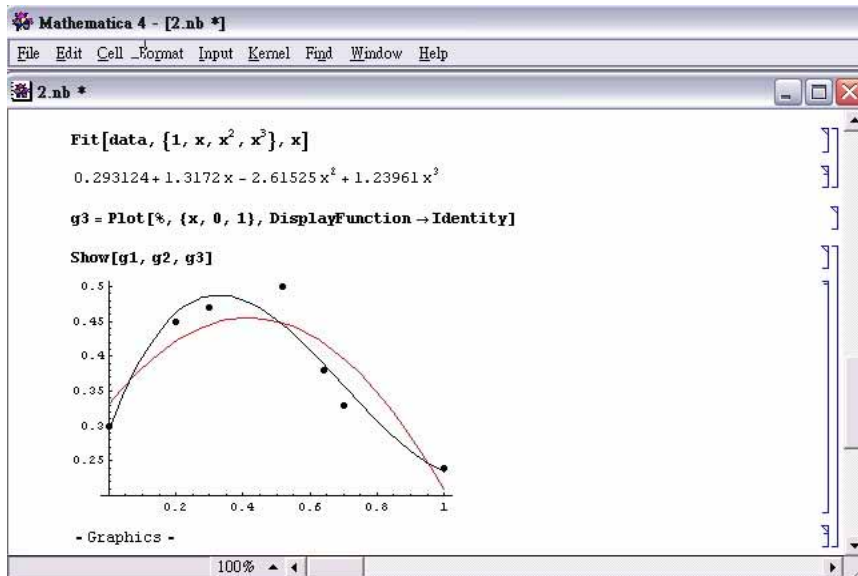


圖 5-1-3-4 利用 Mathematica 作數據資料的三次函數擬合

也就是說以

$$y = 1.23961x^3 - 2.61525x^2 + 1.3172x + 0.293124$$

三次多項式函數作為中間插值與後續資料預估會得到較佳的模擬數據，如此也能使得整個模型的可靠性大為增加。



5.2 建模課程的教學形式與示例


數學建模的目的不只是為了給學生增加一堆數學課外知識而已，而是著重於培養學生的數學應用意識、活化數學知識的能力、提升數學素質。因此，在國內當前的高中數學課程架構之下，本節將針對數學建模與正常教學的結合和切入提出筆者個人的觀點與實踐的經驗。

“切入”是指教師可以把一些較小範圍的數學應用和數學建模活動的問題，經過適當的過程分解後，融入到正常教學的局部環節上去讓學生參與體驗數學建模的過程，即所謂的“化整為零”以達到“細水長流”。比如在新知識的引入、複習舊課程時穿插介紹一個數學應用或數學建模的問題，先在課堂上讓學生

思考甚或小組討論方式完成初步的“問題數學化”過程(例如建立起相應的方程式或不等式)，而將問題的具體求解過程留到課外時間去完成；較大範圍或難度稍高的問題筆者建議可與寒暑假作業和小論文寫作結合，讓學生有較為充裕的時間去完成。

另外，在數學建模的示例中，筆者所要嘗試的是藉由一道與學生現實生活貼近且又真實的建模問題，展現出數學建模的學習可以是相容於正常的教學內容，同時過程中除了基本的數學知識的應用外學生體驗到數學的“真實性”則顯現出數學建模與傳統課堂中數學學習的最大差別。

5.2.1 現階段的建模課程教學形式



數學學習包括學生對環境的積極反映和自主探究，即數學教育應為數學學習創造適當的建構環境和經驗基礎，培養學生積極自發地探索數學，關注學生的動機和態度，抵禦學習的消極原素，透過學生生來就有的好奇心，發揚其創造精神，使其自我表現，獲得廣泛的數學經驗，促進學生自我的全面發展。理想的數學建模課程是安排一個“理論探究與學習實踐相結合”的主題活動，活動中所探究的問題源於社會生活，過程中充滿了思考、試探、操作、實驗，而探索的結果卻能真實地於現實社會生活中獲得解釋與實踐。

隨著社會的發展，筆者覺得現今高中數學教材中的數學知識需要適當更新；就筆者個人的了解近來為了因應大學的多元入學方案實施，國內多所大專院校的科系在進行申請、推甄名額的第二階段(面試)篩選資格時，採用一些有別於傳統口試或實作方式，替代以數學建模的觀念及題目，測試學生的問題解決能力進而作為甄選參考，範圍涵蓋了數學、管理、金融等相關科系。

其次，限於大環境的諸多因素與現行高中課程時數的安排，目前在國內各中

學的數學課程中想要將數學建模課程納入成為課程領域或專題的授課方式，則還有一段很長的路要走；這一點與現今英、美、荷蘭……等國家早已將數學應用、問題解決、數學建模列入國家課程標準當中且實施多年，相較之下彼此的差別不言可喻。況且，即便課程時數的安排問題得到技術上的克服，但伴隨而來的問題諸如，教材編輯、測驗評量、教師訓練、專業提升、家長支持與否……等等，都是考驗學校行政團隊的一大挑戰。

當下唯一能作的就是結合常態教學的課程內容融入數學建模，在適切的情境下“切入”應用和建模的素材，或以數學應用和數學建模為主題的課外活動以及寒暑假的作業報告。以下是筆者在九十三年暑假時，規定給個人任教班級學生的暑假作業，希望能引領學生體會數學與生活的結合是如何地具體呈現。

【問題提出】：行動電話是現代都市人必備的通訊工具，市面上的電信服務業者為招攬客戶，各種優惠方案與通話費率的計算也不相同；例如：A業者強力促銷網內互撥有免費時數、B業者有通話費率的優惠時段、C業者強調月租費可抵當月的通話費，促銷手法林林總總。

1. 請就市面現有的服務廠商中，依通話費率、月租費、簡訊費用、語音服務費用……等相關費用明細資料蒐集製表。
2. 請依你個人的通話習慣（最多通話時段）單就每月的通話費用為主要考量，從收集的廠商資料中做出一個最佳選擇？
3. 阿凱希望每月的通訊費用控制在 600 元以下，但又希望獲得最多通話時間！你能否幫阿凱規劃出一個最優選擇的模型？
4. PHS宣稱免月租費且通話費用較其他業者來得便宜，但目前通話範圍僅限於新竹以北；小胖是一位業務員，因工作關係需時常往來台北—新竹兩地，他現有C業者的手機門號，而每月的平均通話時間（撥出）為180—240分鐘，為了“節省開銷”他想新申請一隻PHS手機，且保留原有手機門號方便舊客戶聯繫，請小組成員合作用Excel來模擬出一個試算模型，分析小胖想法的合理性？

另外，教育部為落實高中職社區化充分整合社區教育資源，建構適性學習社區，以全面提昇高級中等教育品質，強化學校及社區互動關係，為終身學習社區奠定基礎之目標，特訂定高中職社區化建構適性學習社區實施補助方案，編列補助款，訂定實施補助規定，責成各地方主管教育行政機關審查高中職依規定研提之建構適性學習社區合作計畫，核給補助款，並依權責進行督導、輔導及考核。

適性學習社區合作計畫，係指高中職在所規劃的地理範圍內，經過教育需求評估，充分整合社區教育資源，以合作分工方式，建構完整的適性學習系統網絡，讓各種學習需求之學生，均能透過完備的課程及輔導，提高學習成效，並增加自我實現之機會。筆者所服務的台北市立永春高中自九十二學年起就藉由此一計畫開辦了假日數學資優潛能班，課程內容著重於高中數學知識的充實與加深加廣；延續此一計畫永春高中於九十三年度加入數學資優專題班，因應適性學習社區合作計畫中的創意課程之研發與推動的意旨，數學建模專題課程經由此一管道得以一展面貌讓東適性社區內的學生了解並接觸其核心價值。



5.2.2 高中數學建模示例

紙上談兵

問題提出：

足球運動是近年來風靡世界各國，不論是職業性的足球賽事，或是引起全球球迷關注的“世界杯”大賽，現場觀看與透過電視轉播欣賞的觀眾，少說也有好幾億人！可見此一運動的潛在商業市場是一個兵家必爭的熱門運動項目。足球比賽中最吸引人的鏡頭當然就是選手起腳射門而且進球的那一瞬間，只要欣賞過足球比賽的人都應該同意足球場上精采的破門進球是多麼的艱難！因此在拼鬥激烈又戰術多變的球場上，選手要如何捉住稍縱即逝的射門時機？同時掌握最佳的起腳位置？這不只是選手個人技術與經驗的展現，教練團的戰術與科學分析更能有效地幫助選手提高進球的機率。

問題假設：

顯然，當選手起腳的位置對球門所張的角度越大時，射門進球的機率也相對較高，為了簡化我們建立數學模型的困擾，這裡先對問題作一些假設：

1. 將足球視為一個在平面上作直線運動的質點。
2. 選手起腳射門時不考慮對方防守球員的影響。
3. 選手在球場上的行進路線是直線方向（水平、鉛直、斜線）。

模型建立

我們嘗試利用 GSP 軟體建立一個足球場的模型方便我們針對問題的情境做一些相關的分析與探索。

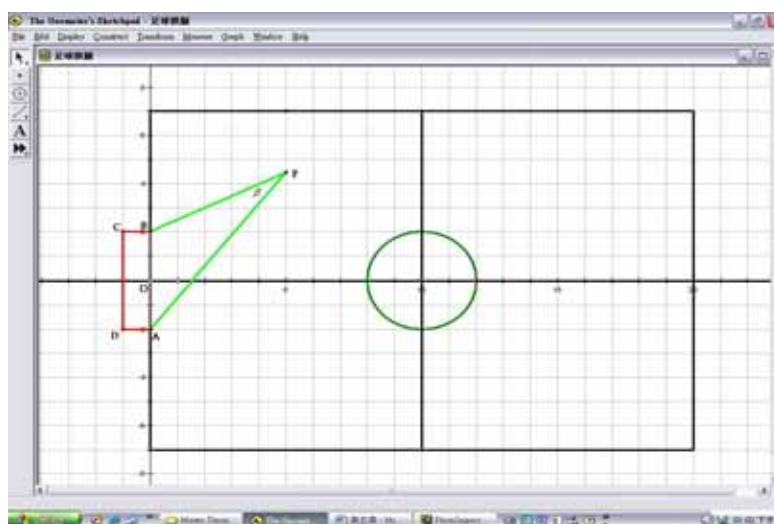


圖 5-2-2-1 以 GSP 繪製足球場地模型

現在；我們要做的就是根據假設建立相關的數學模型：

(1) 假設球員的行進路線平行於底線，且與底線的距離 \overline{EP} 為 a ，則點 $P(a, y)$

表示選手的射門位置，令 $\angle APB = \beta$ ， $\angle BPE = \alpha$ ， $\overline{AB} = 2d$ ；由下圖得知

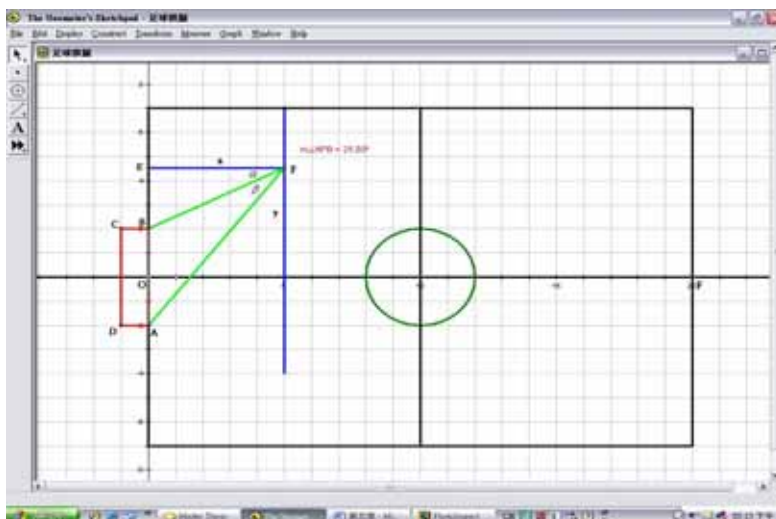


圖 5-2-2-2 模擬水平移動時的射門角度

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{y + d}{a}, \text{ 即 } \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{y + d}{a};$$

$$\because \tan \alpha = \frac{y - d}{a}, \text{ 化簡整理成 } \tan \beta = \frac{2ad}{a^2 + y^2 - d^2} \leq \frac{2ad}{a^2 - d^2},$$

其中 a, d 為定值，所以當 $y^2 = 0$ (若且唯若 $y = 0$) 時， $\tan \beta$ 有最大值，此時點 $P(a, y) = P(a, 0)$ 是落在球場中線 OF 上。

(2) 假設球員的行進路線平行於球場的中線 OF ，且與中線的距離 HQ 為 b ，則點 $Q(x, -b)$ 表選手的射門進攻位置，令 $\angle AQB = \beta$ ， $\angle AQB = \alpha$ ， $\overline{AB} = 2d$ ；

由下圖得知

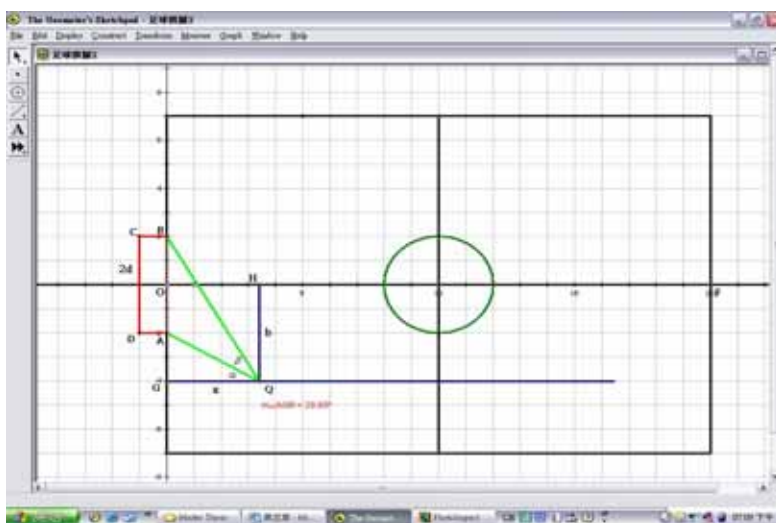


圖 5-2-2-3 模擬鉛直移動時的射門角度

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{b+d}{x}, \text{ 即 } \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{b+d}{x}$$

$$\because \tan \alpha = \frac{b-d}{x}, \text{ 化簡整理成 } \tan \beta = \frac{2dx}{x^2 + b^2 - d^2} = \frac{2d}{x + \frac{b^2 - d^2}{x}},$$

其中 b, d 為定值。由算術平均數 \geq 幾何平均數，推得

$$x + \frac{b^2 - d^2}{x} \geq 2\sqrt{b^2 - d^2}; \text{ 若且唯若 } x = \frac{b^2 - d^2}{x},$$

即 $x = \sqrt{b^2 - d^2}$ 時， $\tan \beta$ 有最大值，此時 Q 點座標為 $(\sqrt{b^2 - d^2}, -b)$ 。再仔細觀察

不難發現此時 Q 點位置落於等軸雙曲線

$$y^2 - x^2 = d^2 \text{ 上。}$$

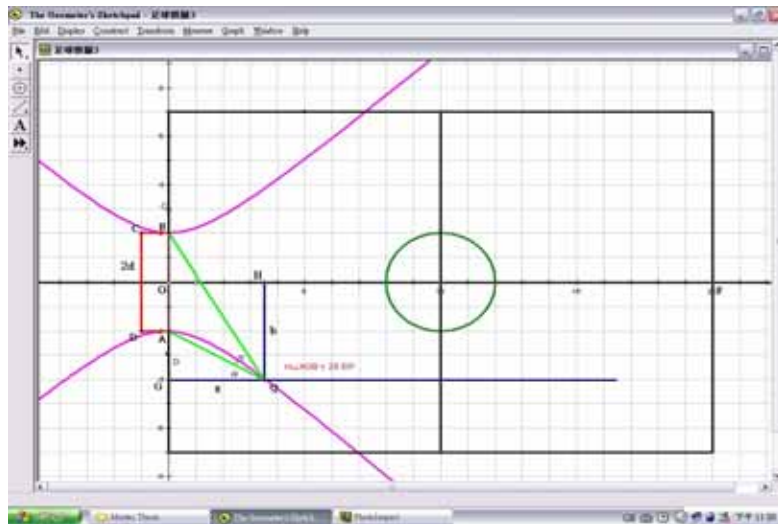


圖 5-2-2-4 等軸雙曲線 $y^2 - x^2 = d^2$

- (3) 假設球員的行進路線沿著一條斜直線 $y = mx + k$ ；則當選手的位置在 $R(x, mx + k)$ 時，起腳射門的角度為 β （如下圖 5-2-2-5）；

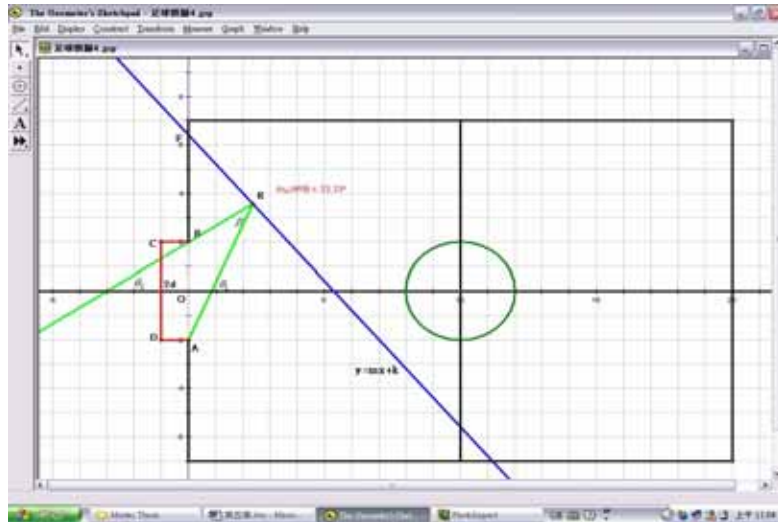


圖 5-2-2-5 模擬沿斜線方向行進時的射門角度

且 \overline{RA} ， \overline{RB} 與球場中線（ x 軸）的夾角分別為 θ_1 ， θ_2 ，所以 $\beta = \theta_1 - \theta_2$ ，則

$$\tan \beta = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2}$$

其中

$$\tan \theta_1 = \frac{mx + k + d}{x}, \tan \theta_2 = \frac{mx + k - d}{x} ; \text{整理得出}$$

$$\tan \beta = \frac{2d}{(1+m^2)x + \frac{k^2-d^2}{x} + 2km}$$

由算幾不等式得知，當 $(1+m^2)x = \frac{k^2-d^2}{x}$ ，即 $x = \sqrt{\frac{k^2-d^2}{1+m^2}}$ 時， $\tan \beta$ 有最大值。

此時起腳射門點 R 的座標位置為 $\left(\sqrt{\frac{k^2-d^2}{1+m^2}}, m\sqrt{\frac{k^2-d^2}{1+m^2}} + k \right)$ ；同時得出此時 R 點

與底邊上的 F 點（直線與 y 軸交點）距離為 $\sqrt{k^2-d^2}$ 。

模型應用

經由國際足總（FIFA）的官方網站資料，搜尋得知一個標準的足球比賽場地規格長度為 100 公尺~110 公尺，寬度為 64 公尺~75 公尺，足球門寬為 7.32 公尺；台北的中山足球場為天然草皮，長度 110 公尺、寬 70 公尺均合乎國際標準。

為了方便，我們就以中山足球場的場地規格作為模型的數據模擬對象，同時

具體驗證出一些數據，好讓我們能夠比較真實地感受到模型的存在。從上述的模型中得知，當選手移動的方向平行於底線時最佳的射門點應該會落在球場的中線上，此時如果越接近球門自然射門的角度越大，問題在於足球規則中規定在罰球區內（罰球區是以底線的中心雙向伸延出一個 40.32 公尺長及 16.50 公尺寬的長方面積）守門員能以手接觸皮球；以務實的戰術來說離底線 16.50 公尺起腳當然會比較保險的射門距離。此時最佳射角為

$$\tan \beta = \frac{2ad}{a^2 + y^2 - d^2} \leq \frac{2ad}{a^2 - d^2} ; \text{其中，令 } a = 16.5, d = 3.66, y = 0$$

$$\Rightarrow \tan \beta \approx \frac{120.78}{258.85} \approx 0.466 ; \text{此時 } \beta \approx 25^\circ。$$

當選手移動的方向平行於邊線時，此時模型告訴我們最佳的射門點應該會落在等軸雙曲線 $y^2 - x^2 = 3.66^2$ 的軌跡上。



結論解釋

藉由以上的數學模型，似乎打破了一般傳統中直覺認為在足球比賽中選手的攻擊位置越靠近球門越容易入球（射角越大）的觀念。而事實上通過我們所建立的模型，可以清楚地發現如果將足球場分割成三塊攻擊區域，如下圖；

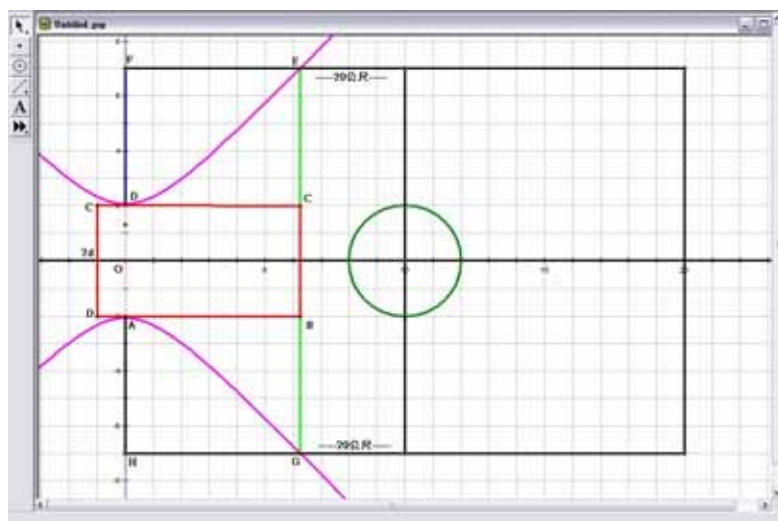


圖 5-2-2-6 模擬足球場上的最佳射門區域

因此，足球比賽中最佳的進攻策略為，盤球過中場約 20 公尺後再配合戰術展開攻勢。如果在區域 *ABCD* 內發動射門攻勢時，選手應該儘量往球場的中線靠近，且愈逼近球門射角愈大。如果在兩邊區域 *CEFD*（區域 *ABGH*）內發動攻勢時，最佳的起腳射門點則分布於雙曲線的軌道上。

