附錄一：**COMAP** 數學建模課程單元範例

8 CONSORTIUM

Everybody's Problems

Helen Compton and Dan Teague are Instructors of Mathematics at the North Carolina School of Science and Mathematics. Both are Presidential Awardees for North Carolina. You may email them at Compton@odie.ncssm.edu and Teague@odie.ncssm.edu.

Everybody's Problems concerns teaching high school mathematics courses with real-world problems, particularly those that are suitable for students at all levels.

The Computer Problem

Daniel Teague and Helen Compton

Problem Statement

The school board has just decided that every mathematics classroom in your school will be able to purchase a computer for classroom demonstrations. Your teacher has asked you to help determine which computer to buy. The class investigates and finds a "Consumer's Tips" column that rates the different computers from which the teacher can choose.

The consumer guide rates the computers from 0 to 10 on Performance and Affordability. A score of (0, 0) is terrible performance and unaffordable, while a score of (10, 10) is a perfect computer. The computer ratings are shown in **Table 1**.

Which do you think is the best computer?

Table 1. Consumer's Tips Ratings.

Computer	Performance	Affordability
A	6.4	8.5
B	7.3	7.5
C	9.3	3.8
D	8.8	6.0
E	7.3	6.0
F	5.5	9.7

Sample Solutions

There are several ways to determine criteria for establishing which computer is the "best" one. For all methods, the first step is to graph the data. A long list of numbers rarely tells you what you need to know and often makes comparisons difficult. It easier to see the data if they are plotted on a coordinate plane. The farther to the right a point is located, the greater the performance of the computer it represents. The higher on the plot a point is located, the greater the affordability of the computer the point represents. Thus, we want computers that are represented by points which are far to the right and also high up. If there were a computer that was both farthest to the right and highest up, we would certainly pick that one. However, high-performing computers are generally the most expensive and, therefore, least affordable.

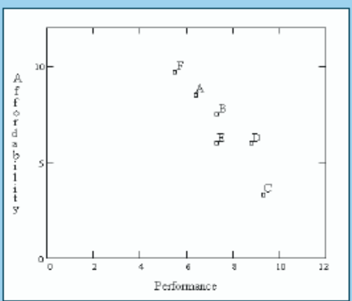


Figure 1. Affordability plotted against Performance.

From the plot in **Figure 1** it is clear that Computer C has the best performance, as rated by Consumer's Tips, while Computer F is the most affordable. Computers A, B, D, and E all have good performance and are reasonably affordable.

Greatest Sum and Greatest Product Solutions

The most common student solution involves the largest "total" measure. Computer A, with a score of 6.4 for Performance and 8.5 for Affordability, produces a total score of 6.4 + 8.5 = 14.9. Students rank the computers according to total scores. If this method is used, the rankings will look like those in **Table 2.**

Table 2. Greatest Sum Comparisons

Computer	Performance	Affordability	Sum
A	6.4	8.5	14.9
B	7.3	7.5	14.8
C	9.3	3.8	13.1
D	8.8	6.0	14.8
E	7.3	6.0	13.3
F	5.5	9.7	15.2

With this criterion, we see that Computers F and A finish first and second, respectively, while Computers B and D tie for third. Some students use the product rather than the sum to determine the "total" score. **Table 3** shows the ranking using product as the criterion. Using this criterion, we find that Computers B, A, and F finish first, second, and third, respectively.

Table 3. Greatest Product Comparisons

Computer	Performance	Affordability	Product
A	6.4	8.5	54.40
B	7.3	7.5	54.75
C	9.3	3.8	35.34
D	8.8	6.0	52.80
E	7.3	6.0	43.80
F	5.5	9.7	53.35

Why choose a product over a sum, or vice versa? Which is the more natural measure? One way to think about this is to consider the geometric aspects of the problem in conjunction with the analytic measures.

Imagine two rectangles, each with one corner at the origin and another corner diagonally opposite at (6, 6) and (4, 8), respectively (**Figure 2**). Which rectangle is the larger? If you consider perimeters, then the larger rectangle is the one with the larger perimeter. This is the sum model. In this case, both rectangles have the same perimeter and so we would consider them to be equally large, and the computers they represent would be equally good.

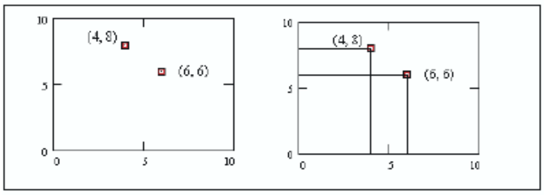


FIGURE 2. LARGEST RECTANGLE FORMULATION OF THE PROBLEM.

However, if you consider areas, then the larger rectangle is the one with the larger area. This is the product model. The rectangle with coordinate (6, 6) would be larger since it has the larger area. Consequently, the computer represented by the point (6, 6) would be the better computer.

THE TV MEASURE

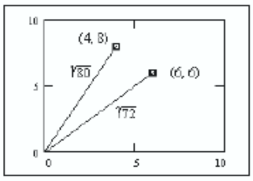


FIGURE 3. TV OR DIAGONAL MEASURE.

This discussion may bring up a third measure, which students typically call the "TV" measure. The size of a TV screen is given as the length of the diagonal across the screen. Students familiar with TV advertisements will say that the rectangle with corners at (0, 0) and (4, 8) is larger than the rectangle with corners (0, 0) and (6, 6) because it has the larger diagonal measure, $\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}$ compared to $\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$. (See **Figure 3**.) Using the TV measure, we find that Computer F is the best, followed by Computers D and A (**Table 4**).

GEOMETRIC INTERPRETATIONS

There is another geometric interpretation to the sum, product, and TV measures. First, consider the greatest sum measure. If two computers have the same sum, they are considered equally good. For example, a Computer Q, with a Performance measure (P) of 8 and an Affordability measure (A) of 6, and Computer R, with a Performance measure of 4 and an Affordability measure of 10, would be equally valued. Any two computers for which $P + A = 14$ would be valued equally with these two. If the sum is greater than 14, then it is considered a better computer. Since the equation $P + A = 14$ is the equation of a line in the plane, a geometric interpretation of this measure argues that any

Table 4. TV Measure Comparisons

COMPUTER	PERFORMANCE	AFFORDABILITY	TV MEASURE
A	6.4	8.5	10.64
B	7.3	7.5	10.47
C	9.3	3.8	10.05
D	8.8	6.0	10.65
E	7.3	6.0	9.45
F	5.5	9.7	11.15

Table 5. Closest Distance Comparisons

COMPUTER	PERFORMANCE	AFFORDABILITY	DISTANCE
A	6.4	8.5	3.90
B	7.3	7.5	3.68
C	9.3	3.8	6.24
D	8.8	6.0	4.18
E	7.3	6.0	4.83
F	5.5	9.7	4.51

point in the half-plane above the line is considered better than any computer in the half-plane below the line (**Figure 4a**).

The best computer, then, will be the last point lying above the line $P + A = k$ for the largest possible value of k. From our chart, the largest sum is 15.2, so the line $P + A = 15$ should separate this computer (Computer F) from all others (**Figure 4b**).

The product model works similarly, although the boundary is different. If the product $P \bullet A = k$ is the same for two computers, then the computers are valued equally. The equation $P \bullet A = k$ is not a line in the plane, but a hyperbola. **Figure 5a** shows the graph of $P \bullet A = 54$. Notice that the curve now handicaps

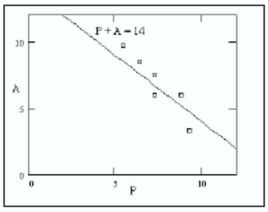


FIGURE 4A. GEOMETRIC VIEW OF THE GREATEST SUM MEASURE.

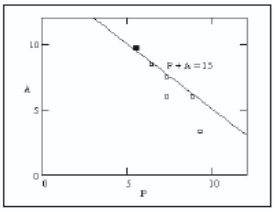


FIGURE 4B. DETERMINING THE "BEST" USING THE GREATEST SUM MEASURE.

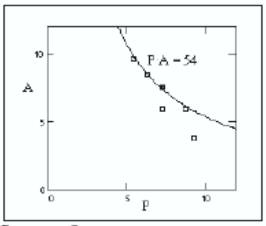


FIGURE 5A. GEOMETRIC VIEW OF THE GREATEST PRODUCT MEASURE.

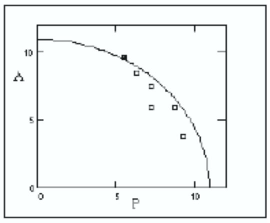


FIGURE 5B. GEOMETRIC VIEW OF THE TV MEASURE.

computers that are very large in one attribute but small in the other. This measure gives the advantage to computers that have a substantial value for both measures.

The TV measure is simply the distance from the origin. The plane is being carved up into concentric circles centered at the origin. The point farthest out is on the circle with greatest radius, shown in Figure 5b.

DISTANCE DEFINITION OF BEST

A perfect computer would be one that had a score of (10, 10). One way to define the best is to determine which computer comes "closest" to being a perfect (10, 10) computer. We can see which computer is closest by measuring the Euclidean distance between their evaluation scores and the best score (10, 10). The distance is given by the value of the expression $\sqrt{(10-\text{Performance})^2+(10-\text{Affordability})^2}$.

For this measure, we want the smallest value. From **Table 5** we see that Computer B is the "best buy" according to the criterion of being the closest to the perfect computer. Computers A and E are second and third on this list.

The distance definition also has a geometric interpretation. Any two points that are the same distance from the point representing our perfect computer (10, 10) are equally valued. The set of points a given distance from a fixed point is a circle. So the distance definition divides the plane into concentric circular regions centered at (10, 10). The point in the circle with the smallest radius represents the "best" computer. (See **Figure 6**.)

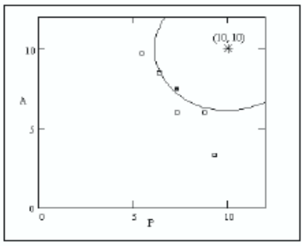


FIGURE 6. GEOMETRIC VIEW OF THE CLOSEST DISTANCE MEASURE.

REFLECTIONS ON THE SOLUTIONS

The different solutions presented here are all reasonable and valid ways to compare items, and all can be generalized for situations in which more than two attributes are considered. Complications can arise if the scales for each attribute are different, so all individual measures should be normalized before beginning. In this example, both scores ranged from 0 to 10. The sum, product, and TV measures have difficulty when high values of one attribute are "good," but low values of another attribute are "good." The consumer's guide solved this problem by using an Affordability scale rather than price. The distance measure can handle this complication easily. We can measure the distance from our given values to the coordinates of our "Ideal" object. The shortest distance is the one we want and indicates the object that is most like the ideal. For example, new-model running shoes are constantly being added to every manufacturer's line while older models are eliminated. Ten years ago one of us found the "perfect" shoe. Unfortunately, that shoe is no longer manufactured. So now we purchase the shoe whose ratings for cushioning, flexibility, stability, and weight come "closest" to the old shoes. ❑

REFERENCES

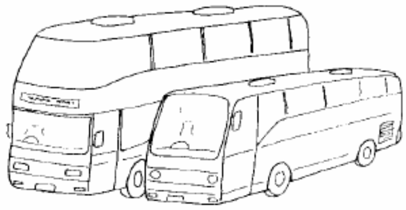
Burrill, Gail. et. al. 1992. Data Analysis and Statistics Across the Curriculum. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series: Grades 9–12*. Reston: VA. National Council of Teachers of Mathematics.

Teague, Daniel J. 1993. How Large Is It? *Student Math Notes*. Reston: VA. National Council of Teachers of Mathematics.

附錄二：英國“中學數學建模及數學知識應用”課程範例

ACTIVITY 16.4 *Linear Programming*

Linear Programming was developed during the *Second World War* to solve complicated optimisation problems.



Sample Problem

To find the best (cheapest) way to organise coaches for a school trip for **560** people (pupils and staff).

The coach firm contacted has two types of coaches:

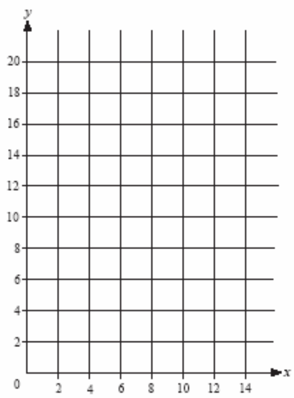
Coach type	*Capacity*	*Cost per hour*	*No. available*
Double decker	60	£50	6
Single decker	40	£40	15

Method

Let x = no. of double deckers and y = number of single deckers.

1. The firm has only 6 double deckers, so $0 \le x \le 6$.
   Write down a similar constraint for y.

2. (a) What is the total number of passengers who can be carried in x double deckers and y single deckers?
   (b) Write down the appropriate inequality to be satisfied.



3. On an appropriate set of axes, similar to those opposite, illustrate all three inequalities on a graph by first drawing $x = 0$, $x = 6$, etc.

4. The boundaries of these lines define the *feasible region*, in which all the inequalities are satisfied.
   Show this region by shading.

5. The cost, C is given by the formula $C = 50x + 40y$.
   Lines given by C = constant are straight, parallel lines.
   (a) Draw $C = 1000$, $C = 900$, $C = 800$, etc. on your graph.
   (b) At what point will C reach its minimum value inside, or on, the boundary of the feasible region?
   (c) What is the optimum (best) solution to the problem?

附錄三：大陸地區 2004 年高教社杯全國大學生數學建模競賽題目

奧運會臨時超市網點設計

2008 年北京奧運會的建設工作已經進入全面設計和實施階段。奧運會期間，在比賽主場館的周邊地區需要建設由小型商亭構建的臨時商業網點，稱爲迷你超市（Mini Supermarket, 以下記做 MS）網，以滿足觀眾、遊客、從業人員等在奧運會期間的購物需求，主要經營食品、奧運紀念品、旅遊用品、文體用品和小日用品等。在比賽主場館周邊地區設置的這種 MS，在地點、大小類型和總量方面有三個基本要求：滿足奧運會期間的購物需求、分佈基本均衡和商業上贏利。

圖 1 給出了比賽主場館的規劃圖。作爲真實地圖的簡化，在圖 2 中僅保留了與本問題有關的地區及相關部分：道路（白色爲行人穿越道）、公車站、地下鐵站、計程車站、私車泊車場、餐飲部門等,其中標有 A1-A10、B1-B6、C1-C4 的黃色區域是規定的設計 MS 網點的 20 個商區。

爲了得到人流量的規律，一個可供選擇的方法，是在已經建設好的某運動場（圖 3）透過對預演的運動會的問卷調查，了解觀眾（購物主體）的出行和用餐的需求模式和購物慾望。假設我們在某運動場舉辦了三次運動會，並透過對觀眾的問卷調查采集了相關數據，在附錄中給出。

1. 請你按以下步驟對圖 2 的 20 個商區設計 MS 網點：
2. 根據附錄中給出的問卷調查數據，找出觀眾在出行、用餐和購物等方面所反映的規律。
3. 假定奧運會期間（指某一天）每位觀眾平均出行兩次，一次爲進出場館，一次爲餐飲，並且出行均採取最短路徑。依據 1 的結果，測算圖 2 中 20 個商區的人流量分佈（用百分比表示）。

4. 如果有兩種大小不同規模的 MS 類型供選擇，給出圖 2 中 20 個商區內 MS 網點的設計方案（即每個商區內不同類型 MS 的個數），以滿足上述三個基本要求。

闡明你的方法的科學性，並說明你的結果是貼近實際的。

說明：

1. 商業上用“商圈”來描述商店的覆蓋範圍。影響商店選址的主要原素是商圈內的人流量及購物慾望。
2. 爲簡化起見，假定國家體育場（鳥巢）容量爲 10 萬人，國家體育館容量爲 6 萬人，國家游泳中心（水立方）容量爲 4 萬人。三個場館的每個看台容量均爲 1 萬人，退場門對準一個商區，各商區面積相同。

圖 1 （A：國家體育場， B:國家體育館，C: 國家游泳中心）


建模结构图
A 区 - 国家体育场（鸟巢）
B 区 - 国家体育馆
C 区 - 国家游泳中心（水立方）
公交西
公交车
出 租
大屯路
私 车
C1
C2
C4
C3
中 餐
B1
B2
B3
B6
B5
B4
A1
A2
A3
A4
A10
A5
A9
A8
A7
A6
公交北
成府路
地铁西
商场
西 餐
公交南
地铁东

圖 2

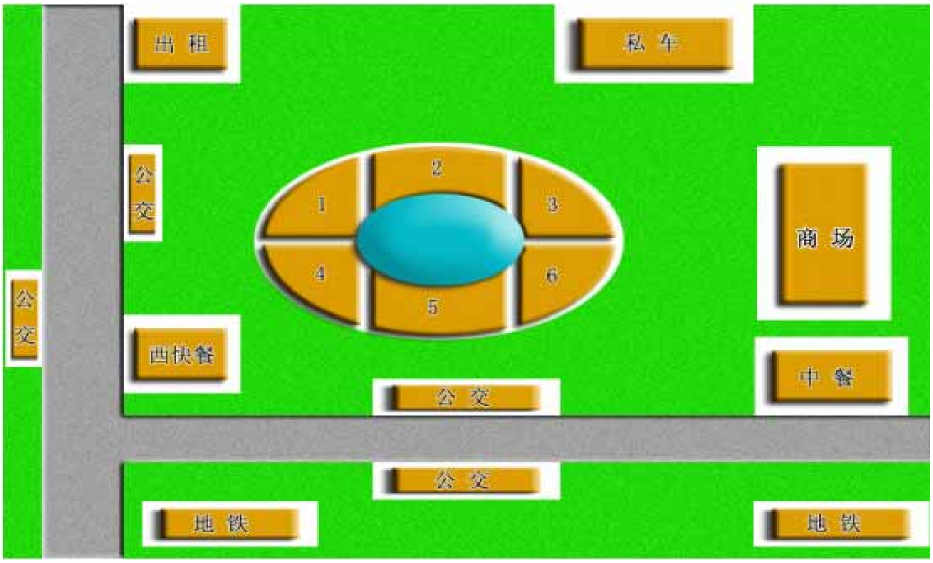

出 租
私 车
公交
1
2
3
4
5
6
商 场
公交
西快餐
中 餐
公 交
公 交
地 铁
地 铁

圖 3

附錄四：台北市東適性學區數學建模專題課程計畫

臺北市立永春高級中學九十三學年度第一學期

數學資優專題班實施計畫

一、依據：臺北市九十三學年度高中職社區化合作專案適性學習系統辦理項目計畫書。

二、目的：

（1）知識經濟時代創意才是國家經濟發展的來源，數學學習不單是定理、推論與證明，應運用數學知識（簡單的數學理論與概念）分析生活中的數學問題、創新問題的解決技巧；簡而言之，就數學學習而言，我們希望數學課程就是應用數學「工具」以解決真實生活中問題的一種學習活動。

（2）為鼓勵學生去探索、猜想與發現，以培養學生的創造能力，首先是要讓學生具有積極的探索態度、猜想與發現的慾望；由生活中的教材引導學生去探索、猜想和發現，培養學生「抽絲剝繭」的分析習慣，啟發學生的思考組織能力，並對問題提出疑問，進而解決問題。

一、 課程規劃：

（1）課程內容及上課時間：每週四下午 4:00-6:00

週次	日期	課程內容
三	93.9.16	認識 Mathematical modeling
四	93.9.23	數學建模競賽初步
五	93.9.30	課程一：如何減少浪費報紙（一）
六	93.10.7	課程一：如何減少浪費報紙（二）
八	93.10.21	課程二：小老闆賺大錢（一）
九	93.10.28	課程二：小老闆賺大錢（二）
十	93.11.4	課程二：小老闆賺大錢（三）
十二	93.11.18	專題演講
十四	93.12.2	課程三：園遊會（一）
十五	93.12.9	課程三：園遊會（二）
十六	93.12.16	課程三：園遊會（三）
十七	93.12.23	讀物導讀
十八	93.12.30	專題演講
十九	94.1.6	期末成果展

（2）學生來源：適性學習社區各高中高一學生，每校兩名。

（3）上課人數：各班人數以二十人為原則，依報名先後次序額滿截止。

（4）聯絡人：特教組洪錚蓉組長，聯絡電話：(02) 27272983 分機 16

二、 評鑑與獎勵：

（1）依各組期末成果展（數學作文、數學模型）給予評分。
（2）學習成績經評量及格者，得頒給修習證明，全勤給予獎勵。

三、 經費來源：由臺北市九十三學年度高中職社區化經費項下支應。

臺北市立永春高級中學九十三學年度第一學期

數學資優專題研究班報名表

校名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　＿＿＿年＿＿＿班＿＿＿號　姓名＿＿＿＿＿＿

家長簽章：　　　　　　　　　　電　　話：

備註：

一、 報名表填妥後，本校學生請於九月十日（星期五）中午十二時三十分前交至教務處特教組；友校學生請先交至各校教務處彙整後，於九月十日（星期五）中午十二時三十分前傳真（02）27282520至永春高中特教組報名。

二、 請先報名，確定開班後再通知上課。

附錄五：台北市高中教師數學建模研習營

台北市九十二年度高中教師數學建模研習營

Mathematics
Modeling Our World

指導教授：康明昌 教授
蕭志如 教授

主辦單位：台北市政府教育局
台灣數學建模與創意學會

承辦單位：台北市立永春高級中學

台北市九十二年度高中教師數學建模研習營

壹、計畫緣起：

聯合國教科文組織將西元 2000 年命名為「數學年」，用一門學科來命名一個年代，在歷史上還是第一次，它反映了世界對數學和數學教育的重視。隨著電腦科技的高速發展，極大地擴張了數學研究和應用的領域，數學和其他學科的聯繫更加密切，數學方法或數學技術高速滲入各行各業，發生在身邊的大量實例會使我們強烈地意識到數學的無處不在。

當今台灣的數學教育政策從建構式數學到九年一貫教材內容，爭論未休；而家長們普遍將數學教育的目標簡化為在“考試中得高分”就認為已達成學習數學的目標，如此淺化的俗世價值在這「科技世紀」裡將對臺灣造成何種的具體傷害，在可見的未來不言可喻。

知識經濟時代創意才是國家經濟發展的來源，數學學習不單是定理、推論與證明，運用數學知識（簡單的數學理論與概念）分析生活中的數學問題、創新問題的解決技巧；簡而言之，就數學學習而言，我們希望數學課程就是應用數學「工具」以解決真實生活中問題的一種學習活動。

台灣要進入國際競爭舞台必須培養下一代的創造力以發展知識經濟，數學建模不啻為數學教育的新思維，在落後美國 18 年、落後中國 12 年的狀況下，我們該如何落實台灣的數學建模教育，有待一群數學教育工作者們貢獻良策。

貳、主辦單位：台北市政府教育局
台灣數學建模與創意學會

參、承辦單位：台北市立永春高級中學

肆、參加人員：台北市公私立高中、高職數學教師

伍、時間與地點

時間：民國 九十三 年 二 月 二十五 日（星期三）

地點：台北市立永春高級中學（台北市信義區松山路 654 號）

陸、參加研習人員於研習期間以公假辦理，全程參與者給予六小時研習時數及台灣數學建模與創意學會研習證書。

柒、研習課程表

時間	課程內容	地點
8:50~9:00	報到	行政大樓四樓會議室
9:00~9:10	開幕式 教育局長官、朱校長	四樓會議室
9:10~10:00	專題演講:何謂數學建模 中正大學教務長 吳志揚教授	四樓會議室
10:20~12:00	專題演講: 創造性問題解決（CPS）的教學法用在數學建模的教學 東吳大學數學系 蕭志如教授	四樓會議室
12:00~13:00	午餐	四樓會議室
13:00~13:50	連續三年擔任數學建模競賽評審的大學教授分享評審心得	四樓會議室
14:00~14:50	數學建模競賽得獎隊伍分享數學建模的過程及老師如何指導學生。 師大附中 嚴宗增老師	四樓會議室
14:50~15:10	休息茶敘	四樓會議室

15:10~16:00	綜合討論(Q&A)、閉幕式 康明昌教授、朱校長	四樓會議室

捌、報名方式:

①本研習營之其他相關訊息，請上本校網頁瀏覽。
網址：http://www.ycsh.tp.edu.tw/

②本研習營之參加人員報名作業一律以傳真為主；填妥相關報名表後請傳真至（02）2728-2520 陳倉翊 組長

③為便利研習營之各項作業、資料、膳食統計，請參加人員於九十三年二月二十三日下午三點前完成報名手續。

玖、經費：由局內年度相關經費項下支應。

台北市九十二年度高中教師數學建模研習營
報名表

校名			
聯絡地址			
聯絡人		聯絡電話	
聯絡人 E-mail			
參加人員姓名		任教科目	
午餐	□葷 □素		

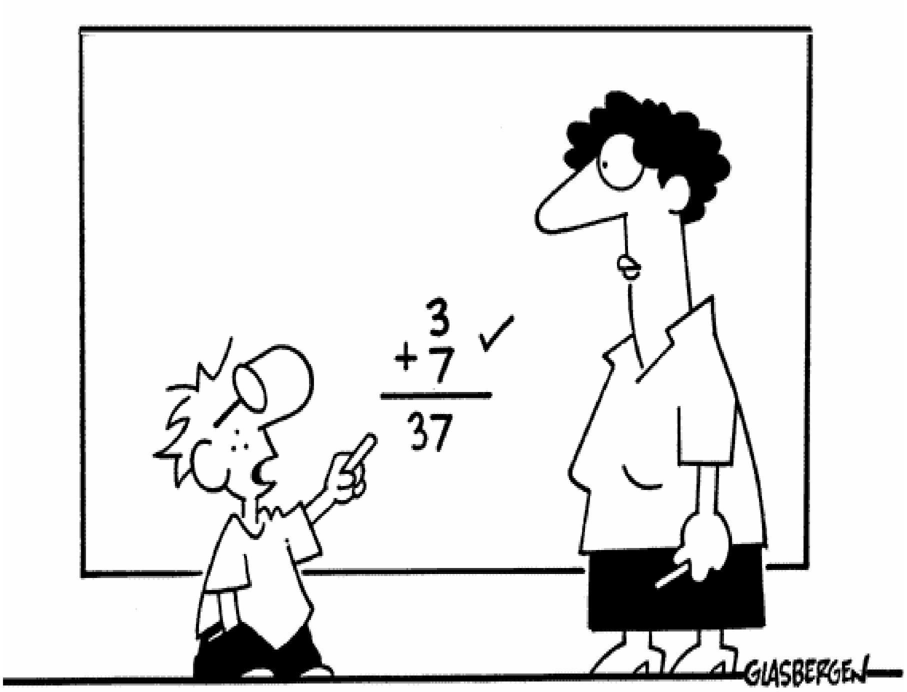
校長： 教務主任： 承辦人員：

附錄六：第二屆「全國高中高職數學作文」競賽金牌作品

第二屆全國高中高職數學作文競賽

題目：歐盟的研究

報名編號：A1



"In the corporate world they pay you big bucks for thinking outside of the box!"

校　　名：台北市立永春高級中學

組　　員：蔡仲桓 蔡鎮宇 盧偉民 李則佑

指導教師：林國源

第二屆全國高中高職數學作文競賽指定題目

題目：歐盟的研究

2004 年 5 月 1 日，愛沙尼亞、拉脫維亞、立陶宛、波蘭、捷克、斯洛伐克、匈牙利、斯洛汶尼亞、馬爾它和塞浦路斯１０國正式加入歐盟，這是歐盟歷史上最大規模的擴大，歐盟成為一個由二十五國、四億五千五百萬人口組成的共同體。

台灣的年輕人有必要對這個新興的勢力有所了解，請各位同學上網查詢所有有關歐盟的歷史、地理、文化、政治、經濟、社會福利…等，挑一個你們有興趣的專題，深入研究後，以數學符號、平面座標、統計圖表…等數學工具來表達你們的研究成果。以下的例題僅供參考，同學們可以自由的自訂有關歐盟的題目。

A、如果你們對歐盟的歷史演變有興趣，你們可以用任意多個二維座標，X-軸代表時間，Y-軸代表你們有興趣深入了解的事物，如人口、土地面積、…，然後看看你們能從這些「數學型」看出什麼結論？例如，預測還要多久，新加入的十個窮國，人口會不會大遷移？跑掉多少人？

B、假設台灣商人(或者製造業者，由同學們自己決定)想要在歐盟設個台灣前進歐盟的發展據點，請你們用數學圖表、二維座標…等數學工具，將歐盟各加盟國的交通、人力品質、語言…，清楚的表示出來後，告訴評審你們覺得設在哪裡最好？

C、研究什麼是歐元？歐盟有哪幾國加入歐元區了？還有哪些歐盟的國家不願意加入歐元？歐盟有哪些國家沒資格加入歐元區？以數學工具解釋英國加不加入歐元區會有何影響。

D、把歐盟寫成一個 25 個元素所成的集合，討論子集合在社會福利、經濟…上對歐盟的影響(邊際貢獻)，然後量化各國的影響力。

註：今年的題目特別容易。其實，數學作文競賽的目的只是在讓同學們學習如何用數學的圖表、算術、邏輯…等工具，來模型化真實事界、敘述真實的世界，只要你的數學模型與真實世界很接近，不必用到很繁雜的數學公式，一樣是個很值得鼓勵的作品，我們相信任何類組的同學都能做得很好！

壹、問題摘要

2004 年五月一號，歐洲大陸成了世界的焦點，歐盟實現了其歷史上規模最大的一次擴充，在原有 15 個成員國的基礎上又增加了 10 個成員國，歐洲大陸有四分之三的面積屬於歐盟，歐盟的總人口也增加到四億五千萬，比美國和俄羅斯加起來的人口還多，擴充後的歐盟經濟實力和美國旗鼓相當，占到了世界的三分之一，歐盟成為世界上綜合實力最強的國際聯合體。

然而，新加入的成員國也面臨外資投資、物價和成本上漲的影響，以及資訊科技產業發展的挑戰。新成員的財富水準目前只有歐盟平均水準的三分之一，合計經濟產出僅達歐盟整體的 5%左右。為了達成歐盟東擴計畫，歐盟近十年來不斷督導新成員進行政治、經濟、環保、人權等改革，期盼能符合歐盟內規；此外，歐盟也在 2004-06 年預算中，提撥 410 億歐元給予新成員國。

貳、問題提出

歐盟在資金上撥出 410 億歐元來資助新進歐盟的十國，而我們的興趣是要如何對 410 億歐元作出適當、合理的分配；嘗試建立一個適當的數學模型，並藉由搜集所得之資料，參考新加入十國的近年平均國民所得、人口數、失業率、國內生產總值，以及對歐盟內部出口值，

給出十國的權重數值以公平分配410億歐元，並協助十國更快融入歐盟成員國的標準。

叁、新加入國家之各項參考數據

圖表（一）：

指標／國家	人口（萬）	平均國民所得（歐元）	國內生產總值（億歐元）	對歐盟內部出口值（%）	失業率（%）
波蘭	3860	9410	1967	69	20
捷克	1300	13700	633	75	7.30
匈牙利	1200	12250	580	75	5 .6
斯洛伐克	540	11200	228	59	19.40
立陶宛	348	8960	134	48	13.10
拉脫維亞	235	7750	85	61	13.10
斯洛汶尼亞	200	16210	209	59	6.40
愛沙尼亞	136	9420	62	69	12.40

附注：①表中各項數據均為2003年資料。②十個新加入成員國中的塞普勒斯、馬爾它二國，因無完整資料可供參考，故將其略去。③資料來源: http://w2kdmz1.moea.gov.tw

肆、模型假設

1.）首先先忽略國家，而只針對圖表中各個參考因素彼此間的相對重要性加以討論並配分。

2.）假設以$C_1 \sim C_5$來分別代表上列圖表（一）的五個參考因素；人口（C_1）、平均所得（C_2）、總生產（C_3）、出口值（C_4）、失業率（C_5）。

3.）將五個參考因素$C_1 \sim C_5$兩兩相互比較，對比時採用相對尺度，以盡量減低性質不同的諸因素產生相互比較的困難，更而提高準確

度（採用 Saaty 等人提出的 1－9 尺度）見圖表（二）。

圖表（二）：因素等級量化值

尺度	兩兩相互比較
1	同樣重要
3	有點重要
5	重要
7	重要很多
9	重要很多得多
2、4、6、8	彼此的影響之比介於上述兩個相鄰之間

4.）假設我們的團隊小組是歐盟組織中的財政規劃與經濟潛能評估專門委員會中的決策核心成員，成員具有財經專業知識的背景，透過專業能力與圖表（一）的參考數據，小組成員個別提出五個參考因素 $C_1 \sim C_5$ 兩兩相互比較的尺度分數，但是為了避免主觀的人為因素左右相對尺度給分的客觀性，我們求取決策核心成員的平均數作為各國最後的因素等級量化值。

5.）假設決策核心成員所模擬出的參考因素 $C_1 \sim C_5$ 兩兩相互比較的等級量化值如下矩陣所示；為方便計將其稱為**判斷矩陣**。

$$C = \left(c_{ij}\right)_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/5 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 1/3 \\ 5 & 1/2 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 3 & 1/2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{；顯然 } c_{ii} = 1 \text{ 且 } c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}}$$

伍、模型建立

首先我們由**判斷矩陣** C 以簡便算法(和法)的計算來決定出參考因素 $C_1 \sim C_5$ 的權重向量 w；以 $w_i, i=1,2,3,4,5$ 表示各別因素的權值，則

$$0 < w_i < 1 \quad ；且 \quad \sum_{i=1}^{5} w_i = 1$$

做法是把矩陣 C 的每一行的每個元素除以該行的和，再取各列的平均值；得到

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0.075, 0.258, 0.242, 0.142, 0.283)$$

其次；我們將各個國家對 $C_1 \sim C_5$ 五個參考因素做同樣的計算；即分別求出各個國家對單一 $C_i, i=1,2,\ldots 5$ 的**判斷矩陣**。

例如：對人口(C_1)來說，假設決策核心成員覺得人口愈多，應該分配愈多的資源，圖表（三）是我們團隊小組的模擬配分；

圖表（三）：

尺度（配分）	國與國間兩兩比較
1	國 m 跟國 n 多 1 -- 400 萬人
2	國 m 跟國 n 多 400 萬 -- 800 萬人
3	國 m 跟國 n 多 800 萬 -- 1200 萬人
⋮	………………
9	國 m 跟國 n 多 3200 萬-- 3600 萬人

那麼對於人口(C_1)所做的**判斷矩陣**看起來應該是這樣的

	波蘭	捷克	匈牙利	斯洛伐克	….	….	….	愛沙尼亞
波蘭	1	6	7	8				9
捷克	1/6	1	5/4	2				3
匈牙利	1/7	4/5	1	3/2				3
斯洛伐克	1/8	1/2	2/3	1				1

……					⋮
……					⋮
愛沙尼亞	1/9	1/3	1/3	1	1

將其表示成矩陣形式 $J_{ci}, i=1,2,3,.......8$；所以我們得到

$$J_{C1} = \left(j_{mn}\right)_{8\times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 9 \\ 1/6 & 1 & 5/4 & 2 & \cdots & 3 \\ 1/7 & 4/5 & 1 & 3/2 & \cdots & 3 \\ 1/8 & 1/2 & 2/3 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/9 & 1/3 & 1/3 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ ；同理，

利用簡便算法(和法)與試算表（Excel）的計算功能我們可以得出

$W(C_1) = (0.427, 0.111, 0.091, 0.049, 0.027, 0.150, 0.056, 0.089)$；

依此類推，經由決策核心成員針對 $C_2 \sim C_5$ 的不同屬性給定模擬專家評分標準，從而分別得到 $J_{C2}, J_{C3}, J_{C4}, J_{C5}$ 的判斷矩陣，並同時模擬算出

$W(C_2) = (0.174, 0.143, 0.130, 0.144, 0.101, 0.125, 0.102, 0.110)$；

$W(C_3) = (0.041, 0.078, 0.083, 0.112, 0.124, 0.148, 0.103, 0.331)$；

$W(C_4) = (0.362, 0.045, 0.013, 0.096, 0.181, 0.136, 0.034, 0.133)$；

$W(C_5) = (0.056, 0.053, 0.054, 0.039, 0.401, 0.167, 0.167, 0.056)$。

以矩陣表示成： $W = \left(\tilde{w}_{ik}\right)_{5\times 8}$

$$= \begin{bmatrix} 0.427 & 0.111 & 0.091 & 0.049 & 0.027 & 0.150 & 0.056 & 0.089 \\ 0.174 & 0.143 & 0.130 & 0.144 & 0.101 & 0.125 & 0.102 & 0.110 \\ 0.041 & 0.078 & 0.083 & 0.112 & 0.124 & 0.148 & 0.103 & 0.331 \\ 0.362 & 0.045 & 0.013 & 0.096 & 0.181 & 0.136 & 0.034 & 0.133 \\ 0.056 & 0.053 & 0.054 & 0.039 & 0.401 & 0.167 & 0.167 & 0.056 \end{bmatrix}$$

最後;我們將引用前述所得之結果來決定出各個國家的綜合評價分數

D_k，其計算方式為：

$$D_k = \sum_{i=1}^{5} (w_i) \cdot (\tilde{w}_{ik}) ; \quad k = 1, 2, 3, ...8$$

得到一個列矩陣 $(0.154, 0.085, 0.078, 0.093, 0.197, 0.146, 0.108, 0.150)$，

可視為各個國家所對應的綜合評價分數，依此;我們團隊小組建議歐

盟可將補助經額 410 億歐元依下表所列作為最佳分配方案。

國家	分配的補助金額（單位：億歐元）
波蘭	63.14
捷克	34.85
匈牙利	31.98
斯洛伐克	38.13
立陶宛	80.77
拉脫維亞	59.86
斯洛汶尼亞	44.28
愛沙尼亞	61.50

陸、模型檢討

1.）整個建模的過程當中，我們團隊小組發現針對 $C_1 \sim C_5$ 五個參考因素做所謂的專家評分是引起我們小組討論與爭執最多的部分，換句話說我們認為此一模型的適用與否很重要的關鍵因素是繫於整個專家評分系統的可信度上。

2.）從小組的模擬實驗中，我們覺得專家評分方式事實上仍帶有主觀的成份，而且可以被人為因素所操控，因為你必須決定 Attribute 的

重要性並配分。

3.）我們由判斷矩陣的簡便算法(和法)所得的列向量作為比較權重值，其實是有必要作更進一步的探討；但受限於團隊小組目前的數學知識與能力我們在現有的參考資料中無法對相關理論有更多的理解，但我們對如何求出一個最佳的判斷矩陣？是否只有唯一的求法？最佳的判斷矩陣一定具有某一特性！希望再有機會深入研究。

4.）綜合評價分數 $D_k\left(0.154,0.085,0.078,0.093,0.197,0.146,0.108,0.150\right)$ 為方便計算，我們將其數值取到小數點第三位，因此與最佳分配方案中的金額的分配產生約 1% 誤差。

柒、結論與感想

人們在現實的生活和實際工作中，為了達到預定的目標或對生活中的各項資源作有效的分配，都會面臨如何選擇與分配的困擾，而且影響我們作出選擇與分配的不確定因素通常是一堆雜亂無章的信息，藉由這一次的參與建模過程著實讓我們體會到數學的〝用處〞！

然而對照於現行高中的課程，我們覺得偏重講述的教學雖然可以使我們獲得科學知識，但卻不足以培養在真實世界中，應用知識解決問題的技巧和能力，也無法提升創造力。創造能力不單只是天生的，更須經由創造思考教學活動的啟迪，使創造力得以發芽、成長及茁壯；建模競賽過程不啻為「學以致用」的最佳寫照，只可惜在正常的課堂中我們少有機會接

觸到如此真實的數學。

此次參賽的過程中，從問題的提出→探討→聚焦→鎖定，其實是讓我們對整體的歐盟作了一遍更清楚的了解，而建模過程中的資料收集→整理→分析→嘗試建立模型→失敗→再失敗→資料參閱→雛型出現→小組討論→理解→任務分工→ ……… 有太多的學習是我們團隊小組的全新體驗；姑且不論模型的良窳與否，單就這些日子的學習經驗與傳統課堂中數學學習，大異其趣卻是始料未及的事。

捌、參考資料

1. 陳理榮（1999）主編。*數學建模導論*，北京郵電大學出版。
2. 李尚志（1996）主編。*數學建模競賽教程*，江蘇教育出版社。
3. 姜啟源（1996）主編。*數學模型*，*新竹*，凡異出版社。
4. 林文偉。*淺談固有值問題*$Ax=\lambda x$*數值解法*，數學傳播季刊。
5. 網頁資料：http://www.21maths.com/2003/index.asp
6. 網頁資料：http://mat.gsia.cmu.edu/mstc/multiple/node4.html
7. 網頁資料：http://www.math.montana.edu