第一章　數學建模概論

國內的數學教育長期以來往往將學生的「數學能力」等同爲「數學知識」的匯集。進而，部分熱中於理論數學研究的數學教師致力於把數學學習構建成爲一個形而上的哲學形式主義，強調數學的理論知識、公理系統與抽象思維是數學學習的核心。關鍵在於如果第一線的數學教師都無法百分之百窺其精髓的情況之下，數學教育與現實環境的嚴重脫離也就不足爲奇了。

「數學建模」的教學理念強調以「真實情境」的生活問題作爲學生探索知識的起點，學生因爲真實生活的「問題」而引發對問題解決的「需求」，在目標明確的動機下，自然學習意願相對提高。本章節就「數學建模」的理論基礎以及高中數學建模教學的歷史演進與發展引爲論述。

1.1　數學建模及其理論基礎

聯合國教科文組織將西元 2000 年命名爲「世界數學年」（WMT），用一門學科來命名一個年代，在歷史上還是第一次，它反映了當前世界對數學和數學教育的重視。隨著電腦科技的高速發展，快速地擴張了數學研究和應用的領域，數學和其他學科之間的聯繫更加密切，數學思考與數學技術也同時高速地滲入各個領域，發生在現實生活周邊的大量實例使我們強烈地意識到科技文明的今日，數學真的無處不在（張思明，1998）。

數學教育最終目的是希望提供學生解決問題的能力，尤其是「真實世界」中的生活問題；傳統高中數學課程偏重數學抽象理論的教導，課程活動內容通常以教師講授爲主，學生處於被動的知識接收；而知識的終極目標「學以致用」，在傳統以「應試教育」爲學習主軸的中學課程中似乎與此目標有段落差。

以皮亞傑（Piaget，1896-1980）爲代表的建構主義學派觀點認爲，學習者的知識獲得不是唯一透過教師傳授得到的，可以是學習者在一定的情境即社會文化背景下，利用必要的學習資料，透過有意義的活動建構而得（郭重吉，2001）。也就是說學習者是在與周遭環境相互作用的過程中，逐步建構起知識的連結，從而使自身認知架構得到發展的。建構主義學習理論認學習環境中的「情境」必須有助於學生對所學內容的意義建構。也就是說，教師的教學不僅要考慮教學目標，還要把情境創設看作是教學設計的重要內容之一。

布魯納（Jerome S. Bruner, 1915-）是美國著名的心理學家，他爲認知心理學的體系作出了很大的貢獻。他的重要著作《教育的歷程》，對後世的課程及教學改革影響深遠。布魯納的結構課程理論認爲，由於當代科技的迅速發展，學生在學校所學的知識技能已經不敷使用，因此，教學就不僅是要傳授知識技能，更重要的是，要培養他們的智力，發展他們的能力，使得他們能夠成爲適應社會，以及符合科技迅速發展的變化，並且善於解決所面臨到的各種的新問題。

布魯納認爲在學習過程中學生不僅僅是被動的知識接受者，而應該是主動參與知識獲得過程的實踐者，他主張學習知識的歷程中要讓學生學會自己去思考與探究，進而歸納出他自己認爲是正確的結論與最簡潔的方法，教師只要扮演輔導者的角色以便適時提供協助與解疑。

另外，荷蘭的數學教育大師Hans Freudenthal的「現實數學教育」（Realistic Mathematics Education，RME）理論認爲，數學是與「生活」相關的問題解決，「現實數學教育」也主張與真實世界密切相關的情境問題是學校數學教育的重點，因爲，畢竟數學教育的目標不是讓人人都成爲數學的信徒，但要讓人人都有能力與信心用數學來思考與解決生活週遭的問題。

綜合上述觀點，筆者認爲學習者獲得知識的多少是取決於學習者根據自身經驗去建構有關知識的意義的能力，而不是取決於學習者記憶和背誦教師講授內容的能力。數學建模課程正是植基於「學科知識」（content knowledge）的基礎上，藉由外界刺激（真實的情境問題）所提供的訊息讓學生進行一連串具有方向性、

選擇性及主體性的學習，最後把知識整合到自己原有認知架構內，而有別於傳統數學課程的「單向」過程，更使得數學建模教育在當今世界各先進國家受到普遍的重視與發展。

1.1.1 模型、數學模型

模型（model）：生活中為了某一特定目的將「原型」（prototype）所具有特質屬性的一部分信息經過簡化、精練而構造成的原型替代物(陳理榮，2002)。

數學模型（mathematical model）：對於現實中的原型，為了某個特定目的，作出一些必要的簡化和假設，運用適當的數學工具得到一個數學架構；也可以說，數學模型是利用數學語言（符號、式子與圖像）類比現實的模型。把現實模型抽象、簡化為某種數學架構是數學模型的基本特徵(姜啓源，2001)。它或者能解釋特定現象的現實狀態，或者能預測到對象的未來狀況，或者能提供處理對象的最優決策或控制。

筆者的目的是嘗試在符合現行國內高中課程的教學目標下融入數學建模的課程活動設計，但是考量到學生數學「學科知識」的侷限性，因此在解釋與介紹有關的數學建模概念時儘可能地從學生以具有的先備知識（Preknowledge）內容出發，以實例取代抽象的文字描述。以下是筆者以物理概念中的拋體運動來解釋數學模型的基本內涵。

將物體以一定的初速度沿水平方向拋出，在不考慮空氣阻力的情況之下，此時物體只在重力作用下所做的運動，稱為拋體運動（如圖1-1-1）。

1.圖像化：將文字語言的內容特徵簡化成具體的圖像。

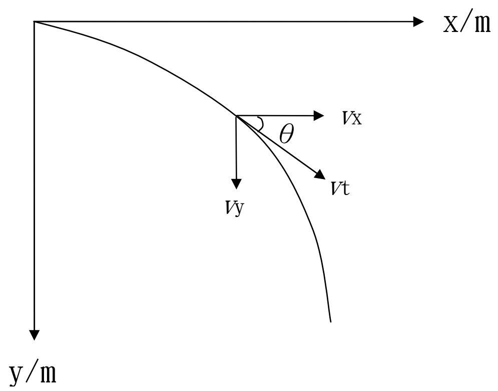

圖 1-1-1 拋體運動的示意圖

2.符號化：將文字信息經過理解與精煉後轉化成符號表徵；V_x = 水平速度、V_y = 鉛直速度、$V_t = t$ 時速度。

3.公式化：拋體運動可以分解爲水平方向的等速直線運動和鉛直方向的自由落體運動；依此，我們就可以分別算出拋體運動在任一時刻 t 的位置座標 (x, y)。取水平方向爲x軸，正向與初速 V_0 的方向相同；鉛直方向爲y軸，正方向向下，拋出點爲原點，得出模型爲：

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = g t \end{cases}$$

t 秒末的速度 V_t 的大小爲：

$$V_t = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} \;;$$

同時 V_t 的方向可以用 V_t 與 x 軸正向的夾角表示：

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

然而，真實世界中實際問題的數學模型通常比想像中要複雜得多，但是建立數學模型的基本精神已經在這個拋體運動的物理過程中顯現了。

1.1.2　何謂數學建模

應用數學解決人類真實生活問題的首要關鍵，是如何使用數學語言來明確表達所要研究的對象，即建立數學模型是將真實世界中的實際問題轉化成爲數學問題(王冬琳，2004)。數學建模（Mathematical Modeling）是把現實世界中的實際問題加以整理，寫成數學模型，求出模型的解，再驗證模型是否合理，並用該數學模型所提供的解答來解釋現實問題，做爲解決現實問題的參考，我們把數學知識的這個應用過程稱爲**數學建模**(蕭志如，2003)。

數學建模是一個複雜、循序漸進的思維過程，它與傳統數學教育中的「數學解題」存在著明顯的差異；對於初學者而言，數學模型是一個較難駕馭的部份，因爲數學模型和我們一般所接觸的數學問題是不同的，傳統數學問題的敘述是嚴謹的、明確的、且通常答案是唯一而確定的；而相對於傳統數學問題來說數學模型所描述的實際問題有時並不十分明確，甚至連答案也都不是唯一！

數學建模具有高度的技術性，建模的過程就如同藝術家雕塑作品般，不同的欣賞角度與不同的思考方向都可能成就不同的作品。就數學建模而言，對同一現象可以有不同的模型來描述從而會得到不同的答案，更且這些答案不會只有一個是對的，而其他是錯的，差別只在於模型與實際現象的「合適」（fitting）與否？一般而言，以下幾個過程是建立數學模型的必要操作（process）：

一、問題的理解、解釋

真實世界中的各式各樣問題往往都是用文字形式來表達的，而且其中所隱匿的相互關聯卻不是明白地清晰表述，更別說用文字直接表達出數學形式的量與形關係。因此，進行數學建模的第一階段，就必需閱讀問題本身，充分了解問題隱含的內在聯繫，理解問題的內容與實質。

二、抽象分析、簡化、提煉變量

問題通常是複雜的，數學建模的關鍵在於如何有效地掌握住問題的主要方向，以進行數學分析，通過抽象、簡化、確定與問題密切相關的信息，去除非主要的因素，將重要的量形關係與相關的變量提煉出來，對問題予以表徵。此一過程要求建模者要具有紮實的數學基礎，豐富的想像力與針對現象的觀察能力。

三、適當的假設、建立數學模型

在假設的基礎上，利用適當的數學工具來表示各變量之間的數學關係，建立相應的數學架構。此一階段盡量用簡單的數學工具如方程組、函數、不等式、圖形、統計圖表等，形成一個暫時性的待解純數學問題。簡言之，這個過程的進行實際上是將一個文字型式的問題翻譯成為數學問題的轉化操作。

四、求解數學模型，得出數學結論

利用數學知識系統對模型（數學問題）進行分析、求解或證明，得出結論。此一階段的過程也最能突顯數學建模與傳統數學解題的差異性，因為求解模型通常不是單一數學領域者能完全勝任的，更且真實生活中的問題通常是複雜且需要龐大的運算，因此數學建模的模型求解與電腦輔助工具的結合是相得益彰的。

五、利用結論解釋、驗證、預測現實問題

將模型分析結果與實際情形進行比較，以此來驗證模型的準確性、合理性和適用性。如果模型與實際較吻合，則要對計算結果給出其實際含義，並進行解釋。如果模型與實際吻合較差,則應該修改假設，再次重複建模過程。

值得注意的是，我們從數學模型得到結論的主要目的是解決實際問題，因而當用它來解決實際問題時，所使用的語言一般情況下是非數學工作者所能完全理解的。此時，過多、過深地使用數學語言將會影響模型的使用效果，因此使用比較通俗的語言來解釋數學上的結論，使得數學模型能為更多的人所接受。

最後，我們以一個循環的流程圖 1-1-2 來概括整個數學建模的過程。

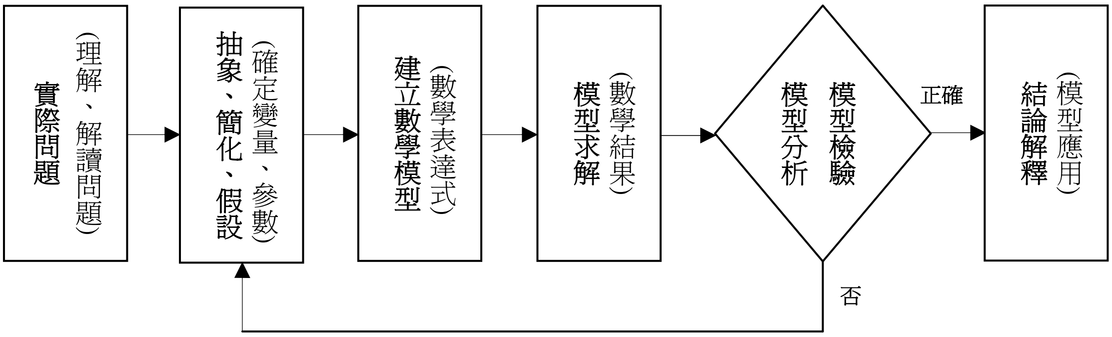

圖 1-1-2 建模操作過程的循環流程圖

1.2 問題解決與數學建模

現代數學教學中，已越來越強調學生主動探索，強調數學教學應該是學生思維活動的教學，重視學生思考的學習方法。而「問題」是誘發思維的直接動因，因此要把學生置於問題之中，鼓勵學生積極、主動地嘗試探究，並從中獲得大量的，各式各樣的體驗，促進學生分析問題，解決問題能力的提升(張波，2005)。特別是近年來，美國、英國、日本等相繼提出了“問題解決作為學校數學教育的核心”這一觀點，主要是強調分析問題、解決問題的整個思維過程；從資料的蒐集整理，到明確目標、製訂計畫，再到嘗試探究、發現解決，獲得一般結論。強調學生的獨立學習與研究的精神，因而受到了世界各國的重視。可以說，“問題解決”是幫助學生學會學習，學會思考的重要方法。

1.2.1 問題解決、解應用問題與數學建模的關係

「教育」是人類社會科技文明傳承與發展的基礎，基於這樣的認知之下體驗到未來真實世界的複雜性與日俱增，如何教育學生「問題解決」能力，是當前各

個先進國家教育改革與學校課程發展的重要議題。

“問題解決（problem solving）”是二十世紀八十年代初以美國數學教育界爲代表提出的一句口號。至今，這一口號已日益顯示其歷史的必然性和內在的合理性。“問題解決”主張“以問題解決作爲學校數學教育的中心”(NCTM, 2000)，這與對數學知識的強調相比，表明了數學教育思想的根本轉變，即“幫助學生學會數學的思維，從而提升解決問題的能力”應作爲學校數學教育的主要目標 (錢昌本，2002)。“問題解決”的思想實質上是對傳統數學教育思想，特別是“傳授式”教學方法和“學用脫離”嚴重傾向的直接否定。

臺灣數學建模學會秘書長東吳大學數學系蕭志如教授，在一篇 2003 年學會內部的電子郵件資料裡，很貼切地詮釋了上述概念彼此間的差異；引述如下：

一、 普通的應用問題；請用數學符號表現出下列敘述：有3個家庭，每家有1～6人，3家人數總合不大於15人。

答： 令這3家人數分別為 x_1, x_2, x_3，

則 $1 \le x_1, x_2, x_3 \le 6$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 = 15$.

二、 數學建模題；請用數學符號表現出下列敘述：有3位同學要共同分掉100元，每位同學所得的錢與座位無關。

答： 令1，2，3分別代表這3位同學，Π 為這3位同學的所有可能排列所成的集合。

任給一個排列 $\pi \in \Pi$，定義 $f\left(i, \pi(i)\right)$ 為 i 同學坐在 $\pi(i)$ 時所分到的錢；

取一固定的排列 $\pi^* \in \Pi$ 則對任一 $i \in \{1, 2, 3\}$，我們有

$$f\left(i, \pi(i)\right) = f\left(i, \pi^*(i)\right) \text{，} \forall \pi \in \Pi$$

且
$$\sum_{i=1}^{3} f\left(i, \pi(i)\right) = 100.$$

可能有人會認為第一題也是數學建模題，我把它叫做普通應用問題，因為幾乎所有的中上程度的高中生都會回答！用認知心理學的說法就是，第一題的答案

已經存在高中生的「認知基模」（schema）裡了！用電腦來比喻的話，就是燒錄在永久記憶體了！既然是已經存在的就不必「建」了！但是絕大部分台灣的高中學生在學過排列組合後，仍然無法回答第2題。本人4年來費盡心力辦理「高中高職數學作文競賽」，其目的就是在激發學生回答第2題的潛力。

引此觀之，中學數學應用問題與數學建模都是爲了培養學生應用數學解決實際問題的能力，從步驟上看也有許多相似之處；然而，兩者存在有著層次上的差別，存在著「質」上的差異，中學數學應用問題是數學專家和命題者經過精心加工後抽提出來的，問題比較明確，問題中給出的條件一般而言是充分的；而數學建模的問題直接來自實際，問題中的條件往往是不充分的，有時甚至要求同學自己動手來蒐集數據，數學建模比數學應用問題更能貼近日常生活和實際，具有更高的科研價值。

而在傳統數學觀和教學觀的影響下，我們目前的數學教學，強調靜態數學知識的獲得如：數學概念、命題、算法、解題技巧等，注重對數學結果的理解、記憶，認爲教學中解題的目的是“基本知識的消化和基本技能的強化”，從而形成單一性的“數學”式練習與機械操練爲主的模式(錢昌本，2002)。這種靜態式接受數學結果的教學，制約了學生的才智發展，也無法培養起學生探究解決問題的態度和行爲。

教學中解題的目的不是追求問題的終結，而是追求解題過程本身的認知實踐；因此在教學中創造條件讓學生在“尋求思路、擬定解答方案、實現方案及評估與應用”的過程中親身參與認知實踐，去探究未知的事物，去解決未知的問題，並從中去獲取知識和發展智能，就是數學建模教育所強調的過程勝於結果。

綜合上述觀點，筆者認爲問題解決、解應用問題與數學建模的關係可以由下圖1-2-1表示出相互間的關聯性：

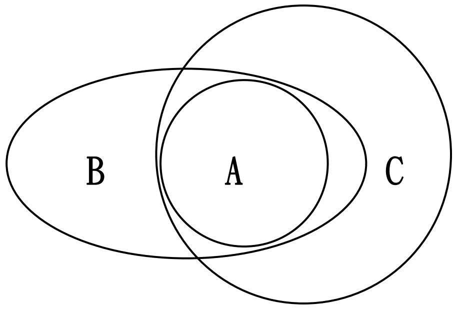

圖1-2-1 問題解決、解應用問題與數學建模相互關係示意圖

1.2.2 高中數學建模的歷史演進與發展

十九世紀末期，科學技術逐漸成爲社會和文化發展的主要原因。特別是二十世紀五十年代以後，各國在總結經濟發展的經驗時發現，教育是促進經濟增長的重要原素，社會需要越來越多有知識的技術勞動者。社會對未來勞動者有一定技術知識的需求，迫使教育要進行改革；同時，因爲各國普及教育年限的延長，使得學校教育成爲技術培養的最佳環境(丁爾升，1997)。

另一方面，在現代社會生活中數學解決真實世界實際問題的功效，表現得更具體。尤其是應用數學的快速發展，進一步突顯了數學實用性的本質。基於此，十九世紀末二十世紀初，由德國數學家克萊茵（F. Klein, 1849-1925）和英國數學教育家貝利（J. Perry, 1850-1920）在英國發起並領導的數學教學改革提出，“數學教育必須重視應用”，強調數學「服務」於生活，明確區隔出技術實用目的的觀點。由此，數學教育內容從過去主要的純數學，逐漸向“以問題爲導向的應用數學”轉變的趨向靠攏，技術實用主義數學教育觀的影響一直沿續至今。例如，當前的數學教育特別強調問題解決，認爲數學建模是培養學生問題解決能力的重要途徑；計算機數學、統計、機率、線性規劃等應用數學的內容越來越多地被引進高中數學課程內，充分說明了技術實用主義對今天的數學教育的深遠影響。

至此，新一波的「數學教育新思維」在資訊科技與網路技術迅速發展的支持下於世界各國蔓延開來。「數學建模」的教學方法與課程活動則普遍地被教育工作者研究與設計，為使學生掌握紮實的基礎理論知識與具有應用理論知識去解決實際問題的能力，一個改變傳統數學教育的思考方式於焉產生。

美國從1985年開始就由COMAP（The Consortium for Mathematics and Its Applications）主辦全國性的「大學生數學建模競賽」Mathematical Contest of Modeling（簡稱MCM），1999年COMAP將此項活動往下延伸，開始辦理全美國高中生的數學建模競賽簡稱（HiMCM），COMAP這個組織的贊助單位包含了許多國家級的學術研究機構與政府部門，其中甚至還包含了美國的國家安全局（National Security Agency），可見美國各界極為重視數學建模的教育。中國大陸也從1992年開始由中國民間的「中國工業與應用數學學會」主辦全國性的大學生數學建模競賽簡稱（CMCM），1994年起改由中共的「國家教委高教司」和中國工業與應用數學學會共同舉辦，每年一次(蕭志如，2003)。

1.2.3 國內外高中數學建模課程簡介

由於高科技技術的出現把科技文明進程大步的向前推進，人類社會不斷向新技術革命挑戰；世界各國之間基於高科技的經濟競爭日趨激烈，任何一個國家想要在這一波的知識競爭之中取得優勢而佔領先機，關鍵在於如何掌握新科學技術和培養高素質人才；數學學科在發展新技術以及培養高科技人力和提升國民素質中，因於現代實用數學教育主張的風潮引領下占有特殊重要地位。

二十世紀的後期，世界各國一直對數學教育進行改革，各國家更把數學教育的發展和改革看成是新世紀中能否在科學技術與經濟的激烈競爭中戰勝對手的一個重要環節。1980年美國全國教師聯合會（NCTM）在一份指導性的文件《行

動議程》（An Agenda for Action）中指出“必須把問題解決作爲中學數學教學的核心”這裡的“問題解決（Problem Solving）”主要是指用數學理論和方法解決實際問題的能力。因此《行動議程》的精神實質上來說是在數學教育中加強應用數學解決實際問題的能力培養，它不但使得數學教育順應了當前數學發展的特點，同時也彌補了過去數學教育中，將數學理解爲訓練人們科學思維的工具，在課堂上單純地進行練習、演算的抽象思考活動，忽視數學與其他學科之間的聯繫；因此“問題解決”已經成爲國際數學教育的新興潮流。

美國 COMAP 學會在國家安全局的經費支援下，結合了國內數學學者、數學教育學者及中小學的數學教師，花了四年的時間編輯了一套適用於中學階段九~十二年級學生的數學建模叢書 Mathematics：Modeling Our World 共三冊。同時經由超過七十位現場試驗教師以及來自都市、郊區、鄉村的五千個學生，以及來自全國各地的私立學校師生參加各冊的課程領域實驗教學，並給予評論；如同書中序言“並非每一個人都將成爲一位數學家，但是每一個人都需要理解並且在真實生活的過程中使用數學（Not everyone will become a mathematician, but every one needs to understand and apply mathematics in real life.）”明白地闡述了編輯意旨。

另外，英國一個全國性的“提升數學成績研究計畫”（Raising Achievement in Mathematics Project）組織，進行了許多有關中學數學知識應用的研究工作，並開展了許多課程活動，同時也出版相關的資料；例如，英國Exeter大學的“數學教學革新中心”（Centre for Innovation in Mathematics Teaching），就爲中學數學建模及數學知識應用編寫了二百四十多個不同能力層次使用的課程活動教材，其中一個關於線性規劃的活動題材設計爲透過如何調度校車接送師生來融入高中數學線性規劃及其圖解法的學習，活動設計內容包含了問題的提出、模型的建立、要求學生求解的問題等，而同時該活動教材的單元內容中也附帶了教師的教學指導。

1982年，英國數學教育的指導文件《Cockcroft報告》指出“應將問題解決作爲課程論的重要組成部分”，強調“數學只有在解決各種實際問題的情況下才是有用的”(葉其孝，2002)。日本的數學教育界近年也普遍認爲要把數學教育的重點放在問題解決上，並且把提高問題解決的能力納入了1994年實施的《中小學課程改善方案》。

1988年召開的第六屆國際數學教育大會就把“問題解決、數學建模和應用”列入大會的七大研討課題主軸之一，與會學者認爲“問題解決、數學建模和應用”必須成爲從中學到大學所有學生的數學課程的一部份 (劉來福，曾文藝；2002) 。中國大陸，國家教委基礎教育課程教材研究中心在1993年組織過數學建模教育專題講習班，並出版了有關問題解決的“問題集”，近年來有關文章也大量地出現在各專業雜誌與中學教育期刊中。

數學建模可以看成是問題解決的一部份，它是作爲問題解決的一種模式；數學建模在問題解決的過程裡中表現了對原始問題的分析、假設、抽象的數學加工過程；它幾乎完整地表現了學數學和用數學的關連。