國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

以電子圓形釘板為輔具的開放式問題數學教學設計研究

Using Electronic Circular Geoboard as an Instructional Aid to Study the Application of Open-ended Approach in Teaching Mathematics

研 究 生：蔡宜璋

指導教授：袁 媛 教授

中 華 民 國 九 十 八 年 七 月

以電子圓形釘板為輔具的開放式問題數學教學設計研究

Using Electronic Circular Geoboard as an Instructional Aid to Study the Application of Open-ended Approach in Teaching Mathematics

研 究 生：蔡宜璋　　　　Student：Yi-Chang Tsai

指導教授：袁　媛　　　　Advisor：Yuan Yuan

國 立 交 通 大 學
理學院網路學習學程
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Degree Program of E-Learning

July 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

以電子圓形釘板為輔具的開放式問題數學教學設計研究

學生：蔡宜璋　　　　　　　　　　指導教授：袁　媛 教授

國立交通大學理學院專班網路學習組

摘　　要

本研究主要是使用由Flash開發的圓形釘板數學電子軟體，依據開放式問題教學模式，對國中學生實施圓形釘板探索數概念的教學活動，來探討開放式問題教學模式在國中數學教學實施的可行性，並從教學歷程中觀察國中學生的解題表現與不同年級的國中學生在接受圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動後，解題表現的差異。

本研究以台北縣某私立完全中學國中部的國中一、二年級兩個班級的學生為研究樣本，兩班學生均接受圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動，並以研究者自行設計之圓形釘板教學個人學習單與團體學習單及數學學習問卷為主要研究工具。教學研究主要發現如下：

一、開放式問題教學模式在國中數學教學上實施是可行的。

二、在實施圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動後，國中學生提出多數的樣式猜測，但個人猜測結果仍十分有限。

三、在實施圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動後，學生發現了「因數與倍數」、「正比與反比」、「互質」、「最大公因數」、「最小公倍數」、「短除法」、「圖形的變化」與「等量公理」的數學概念。

四、不同年級的國中學生在接受圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動後，解題表現有差異。

最後根據研究結果與發現，提出若干建議以做為教師教學改進與未來研究之參考。

關鍵字：開放式問題、圓形釘板、電子教具、國中生

Using Electronic Circular Geoboard as an Instructional Aid to Study the Application of Open-ended Approach in Teaching Mathematics

Student：Yi-Chang Tsai Advisors：Dr. Yuan Yuan

Degree Program of E-Learning of College of Science
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The purpose of this study was, by using the electronic circular geoboard software developed by Flash and open-ended approach, to find out whether the open-ended approach was feasible in teaching basic concepts of number theory to junior high students. Furthermore, by observing the problem-solving performance and the acceptability of the open-ended approach, the study also wanted to find out the differences between students from different grades.

This study was conducted to one junior first and one junior second class respectively at a complete school in Taipei County. All the students learned the basic concepts of number theory by the open-ended approach, and completed the self-designed learning sheets, individually and in a group, and learning questionnaire. And the findings of the study were as follow:

1. The application of open-ended approach in teaching mathematics to junior high students is feasible.
2. During the application, by using the electronic circular geoboard, more pattern conjectures were brought up by students than personal conjectures.
3. By using open-ended approach, students learned the mathematic concepts of the following: divisor and multiple, direct ratio and inverse ratio, relative primes, the greatest common divisor, the least common multiple, short division, graph diversity, and equality axiom.
4. There was difference between two different grades in problem-solving performance.

At the end of this study, some suggestions were made for future application and further study.

Keyword: open-ended questions, circular geoboard, electronic manipulatives, junior high school students

誌　謝

這一路走來要感謝很多人。首先，感謝我的指導教授袁媛博士，她嚴謹做學問的態度，清楚而詳細的指引我的研究方向，並不時給予鼓勵，使我得以順利完成論文，老師的身教言教，讓我衷心感激；同時，也感謝中原大學高欣欣教授與本校的李榮耀教授，在炎炎夏日百忙之中，特別撥空批閱我的論文，指正錯誤並提供寶貴的建議，增廣我的視野。

其次，感謝我的同組同學張世明老師、王智弘老師、謝銘祥老師，大家相互的討論，腦力的激盪，讓我獲益良多。也感謝莊朝淵同學不時的來電鼓勵。對於我的同事翁立衛博士、蔡興祥老師、廖純如老師、李明德老師、陳璽文老師，你們的協助、支持與鼓勵，是我持續研究的動力，感謝你們的愛護。也感謝我服務的學校長官，提供我研究揮灑的空間。更有許多關心我的親朋好友，不時的打氣、加油，謝謝大家！

最後，感謝父親、母親、岳父與岳母的鼓勵與包容，給我最大的信心，更要感謝我的老婆，無怨無悔的付出與一路相挺陪伴，讓我無後顧之憂得以順利完成論文。學業到此告一個段落，但人生另外的研究課題，正要啟航。對於所有關心我、幫助我、愛護我的人，再一次感謝。

宜璋　謹誌

2009 年七月

目錄

表目錄

圖目錄

第一章 緒論

數缺形少直覺，形缺數難入微。

—華羅庚（1910－1985）

第一節 研究動機

根據台灣教育長期追蹤資料庫（Taiwan Education Panel Survey：TEPS）第二十二期的電子報調查結果，超過六成的學生認為「數學問題總是令人頭痛」（其中國中占 64.7%，高中職五專占 63.5%），顯示出數學依舊是多數學生感到頭痛的科目，因此如何讓學生快樂學習數學，相信是許多數學老師的夢想。一直以來，數學是所有學科中最不受學生歡迎的科目，而且學生討厭數學的程度通常會隨著年級的增加而加深，但大部分的學生都表示喜歡「電腦」，並認為利用資訊科技來學習數學，會覺得學數學比以前快樂、也比較有把握（教育部，1998；莊一凡、陳光勳，2004）。在數學教育方面，強調知識統整及資訊融入教學中，試圖應用資訊科技及網際網路資源，協助師生進行相關教學，以尋求數學教育的完善發展。資訊融入教學的目的，是將資訊科技融入課程、教材與教學中，讓資訊成為師生一項不可或缺的教學與學習工具，並使得資訊科技的使用成為在教室中日常活動的一部分，且能延伸資訊科技為一個方法或一種程序，在任何時間、地點來尋求問題的解答（溫嘉榮，2003）。早期 Taylor（1980）認為電腦在教育功用中是扮演教師（tutor）、輔具（tool）與學生（tutee）的角色。近年來教育以學習者為中心，科技的角色逐漸變成學習伙伴（learning partner），學生由「從科技學習」（learning from technology）轉變成「運用科技學習」（learning with technology）（Jonassen, Peck & Wilson, 1999）。

研究顯示，在數學課程中使用教具的學生通常比不使用教具的學生表現得更好（Raphael & Wahlstorm, 1989；Sowell, 1989）。十九世紀的 Pestalozzi 以及後來的 Froebel 與 Montessori 都倡導使用教具，Piajet 的認知發展論則為這種教育概念建立了理論基礎，他認為兒童建構知識的發展過程必須經歷具體運思期（7~11 歲）之後，才能進入形式運思期（11 歲以上），而教具正好提供兒童一個具體的思考媒介（引自王智弘，2006）。隨著資訊科技的進步，結合多媒體系統協助數學學習已呈現一股新的教學潮流 （Najjar, 2001；饒達欽，1991）。張漢宜（2002）也提到，因為科技的革新，數學教具也有了新的變

革。這種教具利用電腦影像模擬出真實教具的模樣，同時提供操弄的介面，讓老師及學生可以透過滑鼠對它進行操作，可以輕鬆營造學習環境，此外還具有不佔空間、容易複製、分享，課堂上易於整理等優點，也是傳統教具所不及的。透過這樣的虛擬教具來輔助學習數學，是未來的趨勢。

科技可以有助於數學教育的主要理由是，它對認知歷程（cognitive processes）的影響—數學思維和理解的本質（Heid, 1997）。數學思維是指人關於數學對象的理性認識過程，亦是人腦和數學對象交互作用並按照一般思維規律認識數學內容的理性活動。廣義的，可理解為包括應用數學工具解決各種實際問題的思考過程（孫名符，1996）。九年一貫數學學習領域的課程目標，強調規律的探討，期望學生達成掌握數、量、形的概念與關係，培養蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等的技能，俾使學生達成「發展形成數學問題與解決數學問題的能力」，並透過數學學習激勵多樣性的獨立思維方式，激盪各種想法，激發創造力（教育部，2001）。黃敏晃（2000）所出版的《規律的尋求》一書中，亦探討到許多數學上的規則、規律，他認為規律的覺察有助於數學的學習。數學家Polya 所提問題的解決策略中，其中有一個步驟即為發現樣式（Look for a pattern），許多學者也認為發現樣式有助於解決問題（曹亮吉，2003；Howden, 1989; Krulik & Rudnick,1989; Rey, 1999; Whimbey & Lochhead, 1999）。綜合以上學者的研究，可見透過樣式的覺察與一般化，進而解決數學問題，一直都是數學學習的要點。謝秀宏（2005）在國中生胚騰推理與數學能力之相關性研究中指出，國三學生的胚騰推理能力大致上明顯優於國一與國二學生，且研究結果驗證了國中階段學生的胚騰推理能力與數學能力應該有顯著的相關。

八十年代以後，全世界數學教育家普遍注意到「問題解決」的重要性，而將數學視為「解題」。認為「問題解決」是一種創造性思考，是一連串自我發現的活動過程，要解決問題，須由學習者親身體驗並建構解題邏輯，不再只是由師長告訴他們「最精彩的解題技巧」（林素微，1998）。日本數學教育趨勢逐漸走向強調個別學生的發展及能在數學討論中提出問題和解決問題，學生應能夠模擬一個數學化的情境和處理它，並和別人合作去解決一個數學問題。基於此目標，整個教育活動是使學生現在的學習連接到未來的學習，強調學生在活動中有自治的能力；發展和整合數學知識的本質；教師能在教室中做適當的決定（鍾靜，2005）。在開放的基礎下，活動過程是開放的，學生透過群體討論去尋求一個較好的解題過程；結果是開放，這一類的問題是有多個正確答案，並非單一的；而發展的方向也是開放的，當學生解題之後，教師可以改變原問題的狀況和條件，布出新的問題。在解決問題中，老師不只是強調求出正確答案，而是注意誘發學生進行數學思考與發展創造

力，能對問題能提出各種不同的觀點（Shimada, 1977；Takeuchi & Sawada, 1984；Christansen & Walter, 1986）。

基於以上的研究動機，本研究旨在應用資訊科技，設計開放式問題的教學活動，提供現職教師一種新的教學模組，進而啓發學生的解題思維，提升學習的動力。

第二節 研究目的與問題

本研究期望使用圓形釘板數學電子軟體，針對國中學生以圓形釘板數學電子軟體當成輔具，設計開放式問題的教學探索活動，並探討此一教學模式在國中實施的可行性及此活動對國中學生解題表現之影響。具體而言，本研究目的有二：

一、探討開放式問題的教學模式在國中數學教學上實施的可行性。

二、依據開放式問題的設計方法，實施圓形釘板的探索活動，以了解其對國中學生解題表現的影響。

依據上述的研究目的，本研究採開放式問題教學的研究設計方式進行，研究對象爲台北縣某私立國中一、二年級兩個班級的學生，使用圓形釘板進行數概念的探索。根據上述研究目的，本研究提出下列三個研究問題：

一、開放式問題教學模式於國中數學教學的可行性如何？有什麼實施上的困難？

二、接受圓形釘板的開放式問題探索活動的國中學生發現了哪些數關係？

三、不同年級的國中學生，其接受圓形釘板的開放式問題探索活動後，發現的數關係有何不同？

第三節 研究限制

研究者基於取樣的便利性，本研究只針對研究者所任教班級進行，而研究結果會因教師與學生特質的不同，而有不同的結論，故本研究結果不宜作過度的推論。

本研究的學習單與數學學習問卷的設計上，由於受限於研究時間、人力及研究取向等客觀因素，研究者只針對任教的國一班級與國二班級各一班之特質作問題的設計。所以，研究結果不能類推到其他年級，不同的領域更因爲性質的差異，無法用同樣的研究結果作推論。

第四節 名詞釋義

爲了使研究更具體明確，本節針對本研究涉及到的重要名詞說明如下：

一、圓形釘板

方形釘板的釘子排列以前、後、左、右等距離排列，在教授三角形的一些類型時，教師們都喜歡使用釘板，讓學生以橡皮圈在釘板上圍出各種大小不同的直角三角形、等腰三角形和不規則三角形。

本研究所指的圓形釘板是指在一個圓周上，每一個釘子排列距離爲相等弧長，如此所形成一個釘板，稱之爲圓形釘板。例如：圖 1-4-1，就是一個釘子數爲 12 的圓形釘板。

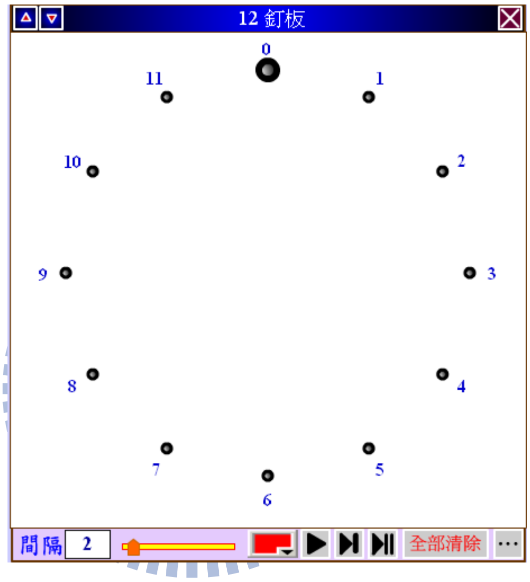


圖 1-4-1 釘子數爲 12 的圓形釘板

二、開放式問題

在數學教室中所探討的數學問題，通常有一個共同的特徵，就是針對該問題先確定一個且只有一個正確答案，問題的設計也要可以清楚分辨答案是正確或錯誤的，並且正確答案必須是唯一的。我們稱這樣的問題是「完整的」或「封閉」的問題。反之，我們稱有多於一個以上正確答案的問題爲「不完全」或「開放式」的問題。例如：12 與 21 的最大公因數是多少？這就是一個封閉的問題。例如：兩個數的最大公因數是 3，則這兩個數可能是多少？這樣就是一個開放式的問題。

第二章 文獻探討

本章旨在探討本研究之相關文獻，做為本研究之理論基礎，並藉以建立本研究之架構。全章共分為三節，第一節為問題解決的探討，第二節為開放式問題教學模式的探討，第三節為數位釘板的探討。

第一節 問題解決的探討

一、問題解決的意義

問題解決是一個所有學生都需要的基本技能，可以從下列幾個報告中得知：美國數學督導學會（National Council of Supervisors of the Mathematics：NCSM，1977）將問題解決列為十項必須精熟的事物之首。NCTM（1980）提出的《行動綱領》（Agenda for Action）即明白表示：問題解決是中學數學的焦點(NCTM，1980，p.1)。NCTM（1989）在 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics 中列出九項目標並清楚闡述數學素養的理念，其中五項是針對學生的，包括：了解數學的價值、學會以數學溝通、學會以數學推理、對自己的能力有信心及成為一個數學解題者。國內外學者對於「問題解決」（problem solving）這個名詞提出許多不同的面向與解釋，但我們可以從其中更進一步了解其內涵。茲將整理如下表 2-1-1：

表 2-1-1 國內外學者對於「問題解決」的定義

學者	問題解決的定義
Polya（1962）	認為問題解決就是「有意識地尋找某一種適當的行動，以便達到一個被清楚意識到但又不能立即達到的目標」。
Gagne's（1965）	認為問題解決是「學習階層中的最終能力」。
Branca（1980）	認為問題解決是「目標、過程及基本技能」。
Mayer（1983）	認為問題解決是從已知敘述到目標敘述的移動過程。而問題解決的思考是朝向某種目標的系列運作。
Mason et al.（1985）	認為問題解決是「數學思考」。

（續後頁）

表 2-1-1（接前頁）

Kahney（1986）	認為問題解決是利用個體已學過的知識技能去滿足情境的需要，以獲致解答的過程。
Stanic & Kilpatrick （1989）	認為問題解決是「脈絡(context)、技能及藝術」，問題解決是「脈絡」，是基於問題及解問題是獲得其它目的的途徑。
Hayes（1989）	認為問題解決是發現一個適當的方法去跨越另一個落差。
張春興（1991）	認為問題解決是個體企圖達到某一目標時，所產生的思考心理歷程。

綜合以上觀點，問題解決可說是個人運用先前知識、技能與理解去滿足新情境的需要，並重組他所擁有的資訊，提出有效的方法解決現在情境與問題目標之間差異的過程。

二、問題解決歷程的探討

問題解決是一個複雜的心智活動，複雜的原因主要可以分成兩方面來談：一、來自解題者和題目本身間的互動；二、解題者和情境的互動。Goldin（1992）指出：數學解題是一連串複雜的心理過程的聚合，此聚合過程發生在於解題者本身和問題之間的互動，根據理論的方針，可能包括下列過程：目標與子目標的建立、語文與句法的處理（processing）、視覺化過程、空間表徵、動覺的編碼（kinestheic encoding）、各種啓思法的使用、長短期記憶的存取、演算法處理（algorithmic processsing）、演算法學習及除錯（debugging）、數學記號的使用、概念學習、察覺結構與結構的相似性、表徵的轉換、面臨僵局的經驗、驚喜的經驗（the “aha” experience）；各種情意與情緒上的（affective/emotional）反應、後設認知、對於數學的信念系統；各人長期、短期對於意義的內在建構、調適、同化與平衡，平衡的同時產生新的意義。在此同時，解題者感受到來自學校、教室、同儕團體、研究者，甚至學校以外的實際情境中的期望，這些來自解題者和社會及文化脈絡（human social and cultural context）的因素，也可能對於解題過程產生更強而有力的影響。

（一）Polya 對問題解決的貢獻

Polya（1945）的《如何解題》是最早針對問題解決這個議題，深入探討解題方法的一本書，本書對於數學教育的影響甚巨。書中的第二部份，可以說是本書的精華，詳述解題步驟的四階段：了解問題（understanding the problem）、擬定計劃（devising a plan）、執行計劃（carrying out the plan）及回顧（looking back）。這個部份的描述是以一個假想的老師和一個假想的學生的對話方式來呈現的，它除了可以看成是老師與學生的對話外，其實也可以看成是解題者本身「自問自答」式的對話，從問答中，一步步接近問題核心的方式。啓思法可以說是本書的另一個重要的核心觀點，Polya提供的這些方法，不但希望閱讀本書的解題者能用之於發現問題的解答，有探索與發現的功能，同時，應更進一步將這些幫助解題的一般性原則內化到個人的思維中，成為一種思考的習慣。

在 Zambo 和 Follman（1994）的文章中，對於文字題的解題文獻進行探討，並指出：問題解決是一個多步驟的過程，在這篇文章中，作者引用 Uprichard, Phillips 和 Soriano 等人的觀點，認為解決問題的模式約可以分成兩大類，一類是處方式的（prescriptive）模式，另一類是描述式的（descriptive）模式。處方式的模式多半是教科書的作者推薦解題者遇到問題時用以解題的模式，而描述式的模式多半是研究者在實際的研究觀察或理論操作中，發現解題者或假設解題者應該遭遇到的解題過程。以下將兩種不同問題解決的處理模式整理如下表 2-1-2 與表 2-1-3。我們可以從表 2-1-2 與表 2-1-3，清楚地看出 1980 年代的數學文字題的解題研究是深受 Polya 的影響。

表 2-1-2 處方式的問題解決步驟的比較

Polya（1945）	**Abbott & Wells（1985a）**	**Bolster 等人（1985）**	**Lowry 等人（1986）**	**Keedy 等人（1985）**	**Phillips 等人（1974,1983）**
了解問題	1.閱讀問題 2.注意事實 3.問自己：問題是什麼？	閱讀問題	注意事實	1.仔細閱讀問題 2.列出資訊 3.選出需要的資訊	1.閱讀問題 2.寫下問題 3.圈選出事實 4.列出已知及未知的事實
擬定計劃	1.做一個圖表 2.選擇運算 3.寫出方程式 4.估算並選擇一個合理的答案	1.選擇運算 2.寫出方程式 3.估算	1.畫一個圖 2.決定使用那一運算 3.寫出方程式	1.圖通常有用 2.選擇一個變數 3.轉換成方程式	1.將問題畫成圖 2.選擇運算 3.寫出方程式 4.估算答案
執行計劃	解方程式	回答問題		解方程式	1.解方程式 2.回答問題
檢查結果	1.檢查答案 2.答案合理嗎？	1.回顧 2.給予一個合理的答案		以問題中的文字來檢查結果	回顧，看看答案是否合理

本表翻譯自 Zambo 和 Follman（1994）

表 2-1-3 描述式問題解決步驟的比較

Webb（1979）	**Romberg & Collis （1985）**	**Sherrill（1983）**	**Kinstch & Greeno（1983）**	**Gagne's（1983）**	**Schoenfeld（1985）**
1.閱讀問題			1.將英文句子轉換成命題	1.將文字問題轉換成數學表達	1.閱讀（read） 2.分析（analyze）
2.將問題畫成圖	1.直接建立模型（direct modeling）	1.畫一個圖	2.產生問題表徵（產生能夠表現出集合之間關係的表徵）		3.探索（explore）
3.寫下方程式	2.寫下開放句子	2.寫方程式			4.計劃（plan）
4.使用演算法（algorithm） 5.計算（counting）	3.使用演算法（algorithm）	3.使用演算法	3.活化執行計算的正確基模	2.實現指示的運算	5.執行（implement）
6.驗証解答				3.讓解答有效	6.驗証（verify）

本表翻譯自 Zambo 和 Follman（1994）

本研究採用處方式的問題解決模式，依據 Polya 的解題步驟：了解問題→擬定計劃→執行計劃→回顧。讓學生接受圓形釘板的探索數概念的開放式問題教學活動，因爲這個部份的是以一個假想的老師和一個假想的學生的對話方式來呈現的，它可以看成是老師與學生的對話也可以看成是解題者本身「自問自答」式的對話，從問答中，一步步接近問題核心的方式。Polya 提供的這些方法，不僅希望解題者能用之於發現問題的解答，有探索與發現的功能，同時，應更進一步希望能幫助解題的一般性原則內化到個人的思維中，成爲一種思考的習慣。

（二）Schoenfeld 的解題架構

Scheonfeld（1985，1992）提出，學生解題行爲的理論架構，包含五個向度：（1）解題的資源、（2）啓思法、（3）監控、（4）信念與情意的因素、（5）實務的問題。其中的第四及第五向度在 Scheonfeld（1985）的文獻中是合併在「世界觀」(worldview)這個類別中。

（1）解題的資源

解題的資源指的是解題者的認知結構，特別是他們所學過的認知風格、數學知識、知識結構、記憶的結構、表徵方式及知識獲取的方式等。人們常常根據經驗、先備知識與其它外來資訊，將問題分類，真正遇到問題的時候，解題者會將注意力集中在問題中的相關元素及判準，並提取相關知識基模，利用類別鑑別（category identification）

的方式形成（formulating）與表徵（representing）問題，而表徵問題的成功與否，便影響是否能成功解題。

（2）啓思法

啓思法方面，Schoenfeld（1979）原則上同意 Polya 的觀點，但他認爲還要加上更高層次的思考方法，建議要考慮到解題者對於數學本身的信念因素。Schoenfeld（1985）指出學生通常在教科書的範例中遇到啓思法，或是觀察他的教師學習使用啓思法，例如：引入適當符號、利用相關問題及建立次目標等。然而，教科書上的範例或是教師在使用這些啓思法的時候，並沒有談論到這些啓思法的一般適用性，因此，雖然學生學到了許多啓思的技巧，但是並不能有效將之應用在解題的過程中。只有一些學生在很多種場合下看到某一種特別的啓思法之後，會把它當成一個常用的技巧。啓思法並不能在一致的基礎下被教導，而且，在使用他們所學到的啓思法時，也會因爲能力的不同而呈現顯著的差異；很自然地，具反思（reflective）特質學生對於啓思法的應用有較好的效果，同時，儲存有大量數學知識的解題者使用啓思法時可以發揮更好的功效。

（3）監控

在 1970 年代，認知發展的文獻、人工智慧及數學教育等領域都曾共同聚焦於自我校正（self-regulation）的議題中（Schoenfeld，1992，p.355），因此，對於監控方面的行爲，有各種不同的名稱描述，例如：後設認知（metacognition）、自我監控（self-monitoring）、自我校正（self-regulation）、狀態評量（state evaluation）及自我批判（self-criticism）等。

Schoenfeld （1981，引自 Garfalo & Lester，1985）已區別出解題過程中，兩種不同的行爲：戰術的（tactical）行爲及管理的（managerial）行爲，戰術的行爲是指演算法（algorithm）的執行及啓思法的使用，而管理的行爲包括：選擇問題的觀點（perspectives）及架構、在思路分歧的時候，選擇要往那一個方向走、決定是否要放棄某一個解法、從某些已放棄或失敗的嘗試中，決定那些概念或原則還有剩餘價值及監控戰術的執行等行爲。

（4）信念與情意的因素

數學解題之情意面向的研究一直被認爲是比較困難與煩雜的（Simon,1982, 引自，McLeod, 1988），他認爲有下列兩個因素：術語的混淆與缺乏堅強的理論。McLeod（1992）認爲還有部份的原因是情意方面的資料，並不容易以問卷的方式所測得。「情意」（affect）

這個字是一個常被用來表示「對於數學學習所有感覺的術語」，McLeod（1992）認爲應該包括下列的主要類別：信念（belief）、態度（attitude）及情緒（emotion）。一般而言，信念與態度是穩定一致的反應，而情緒指的是短暫而密集的反應。

不管是先前受挫或頓悟的驚喜的經驗（Aha experience），對於之後的學習或解題，都會產生相當程度的影響。Wagner, Rachlin 和 Jensen（1984，引自 McLeod，1992，p.582）的研究指出：曾經在解代數問題時受挫的學生，有時候會在解題時感到煩厭（upset）並且會任意摸索任何可能的答案，不論這些答案是多麼不合理。Mason, Burton 和 Stacey（1982）談到學生解題時所遇到的頓悟驚喜經驗，這種喜悅的來源，能提供學生進行更進一步學習及解題的嘗試。

（5）實務的問題

許多學者，如：Cooney（1985）及 Schoenfeld（1994）等人，對於學生及教師信念的研究中發現，學生及教師對於數學的信念或看法，和數學社群間的數學實務（mathematical practice）有所不同，因此有「學校數學」（school mathematics）一詞的出現，這意謂著中學校園中所學的數學，在實際生活中發揮不了作用，中學校園中傳授數學的方式，和數學社群中數學知識發生情況是不同的。社會實務的議題是指如何將以問題解決爲主的數學教育，能接近實際數學社群中的運作情況。

綜合上述，本研究是使用圓形釘板進行數概念的探索，依據開放式問題的教學活動，因圓形釘板能隨著釘板數與間隔數之不同設定而產生多樣變化，輔助學生透過自行探索發現樣式的變化，啓發學生的解題思維，達到與數學知識的連結。根據以上的探討，本研究圓形釘板輔助教學，主要參考 Polya、Schoenfekd 的解題歷程，加強學習歷程中對相關數學知識或概念的了解，進而產生的圓形釘板的開放式問題教學探索活動歷程。如圖 2-1-1。

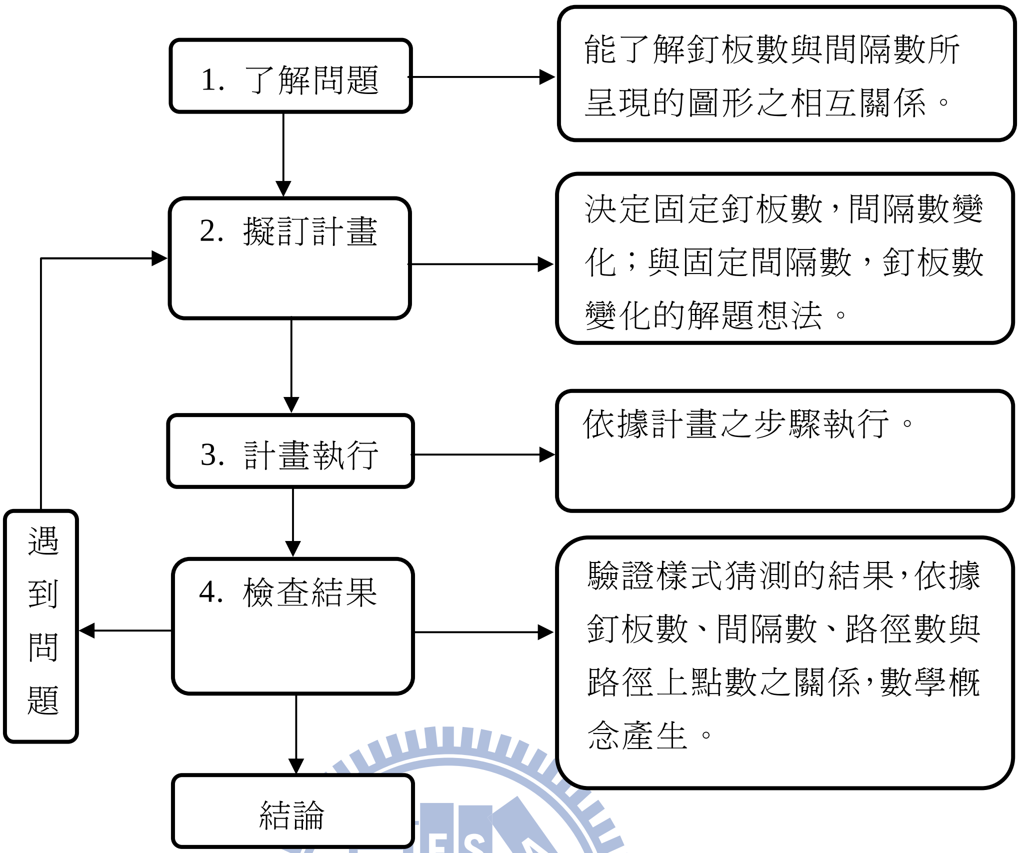


圖 2-1-1 圓形釘板的開放式問題教學探索活動歷程

第二節　開放式問題教學模式的探討

日本數學教育從一九七一年開始爲期六年的「開放式教學模式」計劃，目的是提升日本學生的高階思維能力。經過一連串的研究與實驗，將其實驗過程與實際教學案例寫成了「The Open-Ended Approach：A New Proposal for Teaching Mathematics」(Becker, J. P., & Shimada, 1997)這本書，並經由 NCTM 出版，推廣「開放式教學」的概念。本研究採取「開放式問題」的教學設計，在此針對「開放式問題」做相關探討。

一、何謂開放式問題

傳統數學教育中所使用的問題，在小學和中學裡都有一個共通點：唯一的答案是預先決定好的。問題已經被規劃好，答案不是對就是錯（包括不完整的問題），正確答案只有一個、是獨一無二的。我們把這些問題稱作「完整」或「封閉」的問題。反之，我們將這些有多於一個正確解答的問題稱爲「非完整」或「開放式」問題。

在傳統教學中，學生被要求要知道解答同一個問題的不同方法，而不是專注在找出問題的答案上。從某種意義上來說，學生面對和處理的是開放式問題，因此要求的不應是問題的答案，而是得到答案的方法。所以，不只一種，可能很多種不同的方法都能讓我們得到想要的答案。在這種情況下，如果老師只讓學生探討只有一個解題方法的問題，則學生會產生問題只有一個正確答案的刻板印象，遇到問題時也不會多做思考。

在稱爲開放式方法的教學法中，不完整的問題是之後增加的。如果一個問題有許多正確解答，在解題過程中就能讓學生得到發現新東西的體驗。這可以藉著整理學生以前經驗所得，自身的知識、能力或思考方法來達成。例如：

原　　題：鉛筆一支 10 元，原子筆一支 15 元，小明買了 6 支鉛筆，4 支原子筆，共花了多少錢？　　　（答：120 元）

重新布題：鉛筆一支 10 元，原子筆一支 15 元，小明共花了 120 元，請問小明買了多少支鉛筆與原子筆？

答：

鉛筆數	12	9	6	3	0
原子筆數	0	2	4	6	8

將原來題目作了修正之後，就可能出現多組正確的答案。

二、開放式問題教學模式的研究動機與過程

普遍存於我們腦中的問題是，在數學教育中，如何評估學生高階思維的能力。數學教學中，一系列的知識、能力、觀念、準則和定律均會以漸進的方式傳達給學生知道。教授這系列，並非因爲其中每個獨立環節都是重要的，而是因爲我們期待此系列可以結合每個學生的能力和學習態度，藉此在他們腦中形成一個智能組織（intellectual organization）。雖然個人知識、能力等是構成整體的重要元素，但更需要的是，它們應該被整合進每個學生的智力結構中。因此，爲了知道每個學生可以達到高階思維的程度，我們應觀察他們如何在具體情況中學習到的東西，還有他們如何應付所學沒有按照預想中派上用場的狀況。這樣的觀察說比做容易多了，因爲具體情況需要在自然的情境下發生。這種情況有時候可能自然地結合了教室或學生的日常生活，但大部分時間它只會不經意地出現。

相對地，大部分紙筆測驗是爲了蒐集數據，以便評估封閉式的問題。在這些問題中，所有解答需要的數學條件都完備了，這對學生彌補他們所學的知識和能力是很充分的，並把問題條件作爲方向，採取最適合的找出答案。因此，評估不能超出由他們的知識、技能或能力，並且要依循學習觀念、準則或定律做依據。

因此日本數學教育界提出兩個問題：

1. 哪些學生行爲的例子可以被視爲高階思維的衡量基準？在教室教學時，直接評估高階思維的成果是很難的，哪些學生行爲可以被視爲判斷他們的基準？換句話說，哪些是學生顯現出來的理想行爲模式？
2. 那些被認爲是衡量高階思維的基準，被觀察的學生的行爲，如何和以紙筆測驗或其他工具衡量的成果做連結？

針對第一個問題，研究者發給全日本所有數學教育領導者一份問卷，來蒐集他們對這議題的意見，得到高階思維是「面對問題情境（problem situation）時，學生可以將情境數學化，並適當的處理」或者是「在分析一個問題情境（problem situation）時，學生們可以利用已學習的數學技能，將情境以數學化方式重新解釋，並選擇自己偏好的方法，讓他們能以自己喜歡的思考方式，提出問題中的重要之處」。

爲了蒐集第二個問題的數據，思考如何以上面所提去準備問題情境是必須的。基於下列理由，我們應採用開放式問題：當問題情境的分析的結果是獨一無二的，它可能會發生（一）情境涉及到學生已學習的知識，（二）學生可以用自己喜好的方式思考的空間太少。

這些研究者設計了一些問題，諸如：「棒球比賽的中場成績」或「馬拉

松比賽各隊排名」，並利用一個一般測驗與所設計的問題相互結合。試著在數個小學、國中和高中的學生身上從事實驗研究去探討這些問題。故意在各個層級的學校都使用相同的問題配置，結果顯示這樣的實驗研究對各層級造成了正面影響。我們相信，將這個正面影響的因素歸因於使用開放式問題，這意義是重大的。

在第二個問題的調查中，得到一個負面結果，就是高階目標的成果並不一定需要和用普通測試衡量的成果相同。同時也發現，學生對高階思維的成果的多樣性遠遠超越當初一般測驗所預期的。在第二階段的研究中，擴大小組以便複製第一個問題的結果，並開始研究下一個問題。

3. 知識、能力和思考方式是高階思維的重要元素，但這些元素可以透過額外的教學加以提昇嗎？或者，比起知識、能力等，進步和天份更有關係，但真的是這樣嗎？

爲了回答這個問題，教學實驗（experimental teaching）此時就派上用場。研究者設立了實驗組和對照組，讓兩組先接受預先考試，再要求他們在三到四個月中使用開放式問題兩到三次。老師也以平常的教法教授兩個組別。在教授學期結束之時，兩組都會接受測試，以便檢驗其不同之處。

通常在這種教育實驗中，嚴格並持續地控制實驗狀況是很難的，也不能從數據分析得到最後的結論。然而，可以得到一個概論：教導學生使用開放式問題，可以讓他們更接近高階目標。學生的進步，需要知識和能力作爲高階目標的構成元素。不光靠學生天生的天份，這也和老師是否提供讓學生成長和諮詢的機會、適當地鼓勵學生，有很大的關係。以此發現爲背景，研究者認爲，用學生相異的反應和數學素質去評估他們對開放式問題的反應，可以看作是對高階目標的評估（Becker, J. P., & Shimada, 1997）。

三、以數學活動來說明開放式問題教學與傳統教學的異同

許多方面的思考都和數學有緊密關聯，例如：了解數學理論、解決數學問題、建立一個新理論或是透過數學來解決非數學領域的問題。綜合這些方面的思考，並稱它們作「數學活動」。在整個過程的許多部份上，我們會去思考數學世界和現實世界的關係（就像圖 2-2-1）的意含。這個模型，以胚胎重演論（ontogeny recapitulates phylogeny）的意義來說，可以反映學生學習數學的歷程。

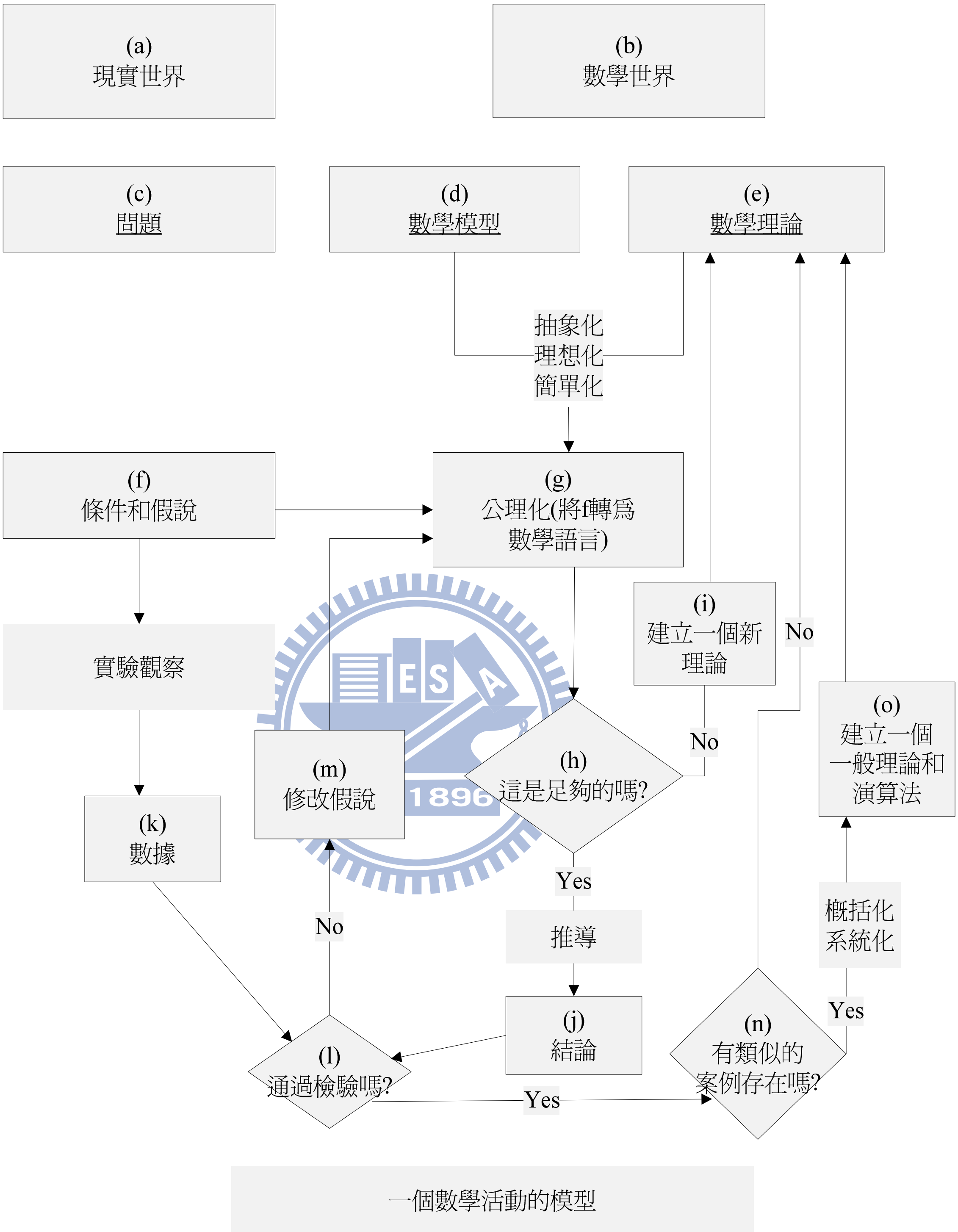


圖 2-2-1 一個數學活動的模型（本圖譯自 Becker, J. P., & Shimada, 1997, p.4）

首先，讓我們假設有兩個世界—（a）現實世界和（b）數學世界，還有（c）要在現實世界解決的問題。在這裡，（a）可能不是物質世界經驗，而是一個和（b）比起來較不抽象的概念世界。

對於（c）而言，（f）的條件和假設應由（a）的經驗來制定，並透過處理程序抽象化、理想化或簡化，將其轉換成數學語言，這樣（e）數學理論就可能適用。這些程序很多都需要用數學處理，這個階段學生嘗試以個人喜歡的思考方式改寫問題，這稱作（g）公理化（axiomatization）。以下是演繹過程說明：

（一）當數學用來處理現實問題，程序通常是由（f）→（g），無視於學生感知過程（awareness of the process）。舉例來說，午休後當老師為了確認小朋友是否在座位上，去計算小朋友的人數，如果他只單純使用有限理論，這樣就不用考慮到每個孩子的個體狀態。

（二）由（g）階段為出發點所做的命題需要暫時性檢驗。我們是否有足夠的、答案符合命題？換句話說，轉換任何（a）命題到公理系統（g）是可能的嗎？如果不是，增加更多符合（f）條件或假說的命題會是必要的。之後在（g）中我們便有足夠的公理（axiom），我們可以做一個（g）命題來對應（a）命題。（g）命題的真實性應該只靠公理系統（g）的演繹來決定。這個演繹，（e）也是使用（g）公理系統。

（三）即使經過縝密檢查，個案仍可能無法如我們所想演繹。在這樣的案例中，我們便需要採取（i）建立新理論。

（四）結論（j），由演繹得來，結合階段（l），用（k）數據驗證，可以得到經驗（a）。如果（f）→（g）中錯誤的部份太多，那麼就可以認為部份假設是錯誤並到（m）修改假說。為了要到階段（f），從程序（e）到（j）也需要持續地以演繹邏輯為基礎。這對於數學論證或數學證明是很重要的。

（五）現在，我們進行到程序中最後一個階段，（f）→（g）→（j）→（l），如果檢驗的結果是肯定的，那麼公理系統（g）就可以被稱作是（f）的數學模型，並且應該被檢驗是否有相似的案例存在。如果沒有相似的案例，結果可以視為是學生個人的（e）數學理論。除此，學生可以藉由了解它們的共通點嘗試將其歸納。學生透過重整它們，將獲得的論點系統化。用此方式，學生可能會繼續（o）建立一個一般理論和演算法。（o）階段的結果也會和（e）結合。經由（i）新理論、（n）類似例子和（o）一般理論的灌輸，數學理論（e）會變得越來越豐富。

讓我們透過圖 2-2-1 思考傳統學習活動：

老師要向班上介紹一個新觀念時，通常會從介紹問題開始，這可以幫助學生找出對新觀念的需求。在學習前，先建立新觀念並帶領他們了解新理論也是很常見的作法。如果介紹的問題是現實世界問題，教學要先將情境或假說轉換成數學語言開始，課程將會從（f）→（g）等等。然而經常是由（g）開始，轉換經由其他人完成（老師或課本的編者）。接著，課程再從（g）→（i）→（j）→（n）而省略（l）。這意味著（g）中使用的模型是個準模型。接著，一般教學可能會進行至（o）。練習中的活動通常都像是符號遊戲。這些階段的共同點是，每個階段的結論是預先決定的，從（n）→（o）會有一個合乎邏輯的解釋。即使是特殊例子，許多老師在教學計劃中會先決定一般理論，此時，其他學生建議的很可能會被老師完全忽略。

相對地，從（f）到（g）抽象化、理想化或簡化的過程以及歸納從（n）到（o）的必須性，在廣義的說法中，它們都是開放的，結果並非預先決定好。在此階段學生的思考，爲了適應現階段狀況，他們要摸索先前學習到的技能，發揮能力、結合能力或修正能力。它也需要去選擇最可能成功的技能來規劃狀況。之後，透過下列演繹可能會重複從（l）到（m）的過程。在這種情況中，學生技能越豐富，他們便能使用更多不同的規劃方法而且規劃品質會越高。此階段，學生需要高能力去整合他們所學。換句話說，學生需要能力來設想新東西，而且如果需要的話，要改變他們的觀念。

從這些想法中，我們可以合理的斷言，活動和過程（f）→（g）→（h）→（j）→（l）→（m）或者是（f）→（g）→（h）→（j）→（l）→（n）→（o）的形式，應和爲大多數學生而設的數學教育計畫相符合。所提議的活動和學校傳統採用的，應該被視爲相互補充，而不是相互取代。爲了提昇這互補關係，學年中最好有一到兩次，成立幾個教學小組，去修改傳統元素，而不是成立大規模分組，這可以提供學生多點機會，由不同觀點找出解答，而此也牽涉到整個程序（f）→（g）→（h）→（j）→（l）→（m）→（g）等。此程序的主要特點是，構想可以根據學生思考情形更動，而不是事先決定好的。這提供他們樣本機會，去主動使用他們已經學會或他們天生就會的知識、技能、觀點和思考方式。

四、開放式問題教學模式的優點與缺點

使用開放式問題教學當然有其優缺點，Sawada 和Toshio（1997）提出開放式教學模式有助於：

1. 學生更積極參與課堂教學活動，並且經常表達自己的想法。
2. 學生擁有更多機會，全面地使用數學知識與技能。

3. 即使成績較差的學生也能以他們自己的方式回答問題。

4. 學生從內心被激發來證明自己有解決問題的方法。

5. 學生累積豐富的經驗，樂於發現並接受別的同學的意見。

但開放式問題教學也有其缺陷：

1. 較難準備一個有意義的數學情境。

2. 對教師來說較難成功地提出問題。有時學生在理解問題的回答與證明上，出現困難。

3. 一些優秀的學生會對自己的回答產生焦慮。

4. 學生會因為在一些問題回答產生困難時，不滿足自己的學習狀況。

當然上述缺陷不是不能克服。在設計教學計畫時，應該首先考慮到如何設計合理的問題？如何在課堂教學中使用這些問題？如何評估學生的活動？在教學活動上要充分發揮開放式教學的優勢，克服有關的缺陷。

五、如何建構開放式問題與設計開放式問題教學計畫

設計一個好的，合適的開放式問題需要考慮許多因素，經過理論與實際上的探索研究，徐斌艳（2000）建議，應遵循以下規則：

1. 準備一個物理情境，其中包括一些可以觀察數學關係的變量。

2. 把幾何定理的證明做一些改變，例如若 P 則 Q 的證明，改成若 P，在圖形上你可以找到哪些元素間的關係？

3. 為學生準備一些與幾何定理相關的幾何圖形，然後為他們畫出與所給圖形相似的其他圖形，要求學生推測一個由這些圖形所引起的定理。

4. 為學生展示一個數字序列或數字表格，要求學生去發現一些數學規則。

5. 為學生展示幾個具體例子，並以其中一個例子為主，要求學生列舉具有相同特徵的其它例子。例如多方塊，經過旋轉、對稱等的變化。

6. 為學生提供一組相類似的練習或問題。要求學生解決問題，然後至少在兩個問題間找出共同性質，越多越好。

7. 為學生提供幾個準數學情境，在這些情境中可以觀察特定的差異，要求他們找出測量差異的方法。

8. 為學生提供一個代數存在架構（如群的架構），以及容易收集數字數據的具體例子，然後要求學生找出接近真實的數學規則。

在設計開放式問題教學計畫，徐斌艳（2000）也提出以下建議：

1. 確定問題是否合適？

（1）這個問題是否有豐富的數學內容？在數學上是否有價值？

（2）解決問題所需要的數學能力，學生程度是否合適？

（3）問題是否具有延伸性，適合在未來數學研究上繼續探索？

2. 編製教學計畫

（1）列出學生對問題可能的答案。

（2）說明使用這問題的意圖。

（3）設計形成問題的一種方法，使學生更易了解問題的意義或意涵。

（4）使問題儘可能吸引學生。

參考上述文獻的流程，本研究圓形釘板探索數概念的開放式問題設計流程為：（f）→（k）→（l）→（m）→（g）

（l）→（n）→（e）。

圓形釘板可以變動釘子數與間隔數，學生因此得到許多數據，學生檢驗原本的假設，如果通過檢驗，尋找類似的例子，產生數學概念。如果沒有通過檢驗，學生須修改假設繼續驗證，產生數學算式。

此程序的主要特點如同上述所言，構想可以根據學生思考情形更動，而不是事先決定好的。因此學生所得到的樣式發現，也隨著每個人解題思維的差異而有所不同。而教學計畫參考學者徐斌艳（2000）建議，

1. 為學生準備圓形釘板數學電子軟體，可以任意變動釘板數（軟體設定 2-50）與間隔數，透過自行連接釘子所產生的圖形，要求學生推測一個由這些圖形所引起的定理。（參考：準備一個物理情境，其中包括一些可以觀察數學關係的變量。）
2. 軟體提供文字記錄模式與資料表，協助學生去發現一些數學規則。（參考：為學生展示一個數字序列或數字表格，要求學生去發現一些數學規則。）
3. 為學生展示釘子數 12，間隔數 1 與 2 的兩個具體例子，要求學生列舉具有相同或不同特徵的其它例子，觀察其中的變化。（參考：為學生展示幾個具體例子，並以其中一個例子為主，要求學生列舉具有相同特徵的其它例子。）
4. 圓形釘板裡面蘊含了許多數的概念，而且可以涵蓋從小學到中學不同年級的學習程度。（參考：這個問題是否有豐富的數學內容？解決問題所需要的數學能力，學生程度是否合適？）
5. 列出學生對問題可能的猜測。（參考：列出學生對問題可能的答案。）

使用開放式問題教學並不是要推翻傳統教學的方法，而是希望在眾多教學法中，提供一個新的元素，讓學生在數學學習上有更多的刺激，並藉此啓發學生的解題思維。

第三節 數位釘板的探討

本節分別就「圓形釘板的數學概念」、「釘板在教學上的應用」與「數位圓形釘板」三方面來探討。

一、圓形釘板的數學概念

圓形釘板是指在一個圓周上，每一個釘子排列距離爲相等弧長，如此所形成一個釘板，稱之爲圓形釘板。美國加州帕羅奧多市 Ventura 小學的數學實驗室中，最廣爲使用也最成功的活動之一就是釘板模型。他們會用到彩色橡皮筋和釘子，讓學生利用釘子數爲 36 或 37 的釘板去發現圖形中，數字不同特性所造成的影響。學生可以製造一些極爲吸引人的釘板模型帶回家。（Perl，2004）以下針對圓形釘板所引發的數學概念做探討。

首先，先定義名稱並做假設，方便後面的說明。

路　　　徑：從一開始的釘子，我們稱爲起始釘子（數字設定爲 0），經過多次間隔，最後又回到起始釘子，這樣稱爲完成一次「路徑」。

繞經的圈數：從一開始的釘子，變化間隔數，每經過起始釘子一次，稱繞經圈數一次。

例如：釘子數 12，間隔數 5，0→5→10→・→3→8→・→1→6→11→・→4→9→・→2→7→S　繞經 5 圈

（・表示經過起始釘子，S 表示回到終點）。

我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。

（一）圖形的變化

開啓一個釘子數爲 12 的釘板，變化間隔數從 1 到 11，觀察圖形的變化，我們可以發現：

1. 當間隔數爲 1 與 11 時，圖形爲一多邊形。
2. 當釘子數不能被間隔數（除了間隔數 1 與 11）整除時，圖形爲星形。
3. 當兩個間隔數的和爲釘子數時，所產生的圖形是相同的。
4. 間隔數和圓形大小之間的關聯。選擇的間隔數越大，勾出的圓形就會越小，反之亦然。

從圓形釘板的操作，學生可以觀察到圖形的變化，並發現許多現象。研究者在介紹多邊形課程時，曾提出七角星形要如何畫出來，多半學生無法馬上回答。如果能透過這樣的圖形觀察與實際操作，相信多角星形的畫法對學生都可以迎刃而解。

（二）因數與倍數、互質、最大公因數

開啓一個釘子數爲 12 的釘板，變化間隔數從 1 到 11，觀察圖形的變化，我們可以發現：

1. 當繞經圈數爲 1，表示該間隔數爲釘子數的因數，釘子數爲間隔數的倍數。
2. 當繞經圈數不爲 1，表示該間隔數不爲釘子數的因數。
3. 當繞經圈數不爲 1，且與間隔數相等，即路徑數爲 1，表示釘子數與間隔數互質。（ $(a,b)=1=c$ ）
4. 當繞經圈數不爲 1，且與間隔數不相等，即路徑數不爲 1，表示釘子數與間隔數的最大公因數爲路徑數。（ $(a,b)=c$ ）

（三）檢驗質數

開啓一個釘子數爲 13 的釘板，變化間隔數從 1 到 12，觀察路徑的變化，我們可以發現：

間隔數從 1 到 12 的路徑數均爲 1，表示該釘子數爲質數。

（四）短除法

開啓一個釘子數爲 12 的釘板，變化間隔數從 1 到 12，觀察圖形的變化，我們可以發現：

釘子數、間隔數、路徑數、路徑上點數、繞經圈數有一定關連。

$$\begin{array}{r|ll} \text{路徑數} & \text{釘子數} & \text{間隔數} \\ \hline & \text{路徑上的點數} & \text{繞經的圈數} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} c & a & b \\ \hline & d & e \end{array}$$

（五）同餘類

開啓一個釘子數爲 12 的釘板，間隔數爲 3，觀察路徑的變化，我們可以發現：

如果間隔數是釘子數的因數，則每一條路徑上的點，構成一個同餘類。觀察： 1: 0→3→6→9→S　繞經 1 圈

2: 1→4→7→10→S　繞經 1 圈

3: 2→5→8→11→S　繞經 1 圈

三條路徑上的點除以 3，餘數均相同，我們發現同餘的概念。

（六）其他的概念發現

1. 釘子數＝路徑數×路徑上的點數（ $a = c \times d$ ）。
2. 間隔數＝路徑數×繞經的圈數（ $b = c \times e$ ）。
3. 釘子數×繞經的圈數＝間隔數×路徑上的點數　（ $a \times e = b \times d$ ）。
4. 正比與反比的概念。
5. 釘子數與間隔數的最小公倍數＝路徑數、路徑上的點數與繞經圈數的最小公倍數（ $[a,b] = [c,d,e]$ ）。

（七）圓形釘板布題

1. 製作一個擁有一條路徑和三個繞經圈數的星形。
2. 製作一個擁有四條路徑，每條路徑有五個繞經圈數的星形。

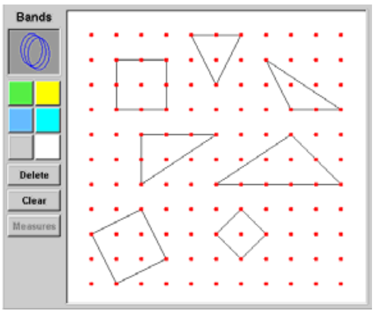
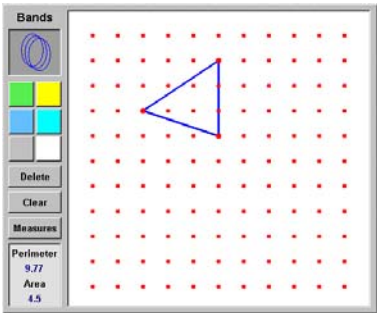
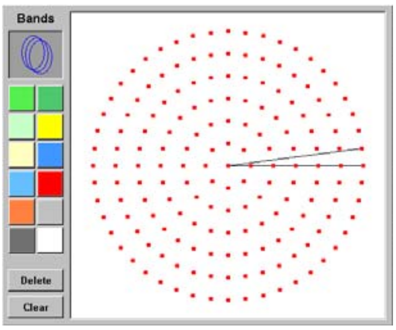
圓形釘板是一個很優良的數學教材，裡面蘊含了許多數的概念，而且可以涵蓋從小學到中學不同年級的學習程度，只要教師設計合適的學習活動，學生一定能夠從中探索許多數學概念。但普遍存在的問題是，一般圓形釘板的實體教具在課堂中使用與收拾不便，且無法隨時更換釘子數的多寡，釘板太小，教師解說也不易。因此，本研究採用圓形釘板數學電子軟體爲輔具探索數概念，設計開放式問題教學活動，以觀察學生的解題表現。

二、釘板在教學上的應用

釘板是小學數學課常用的教具之一。在教授三角形的一些類型時，教師們都喜歡使用釘板，讓學生以橡皮圈在釘板上圍出各種大小不同的直角三角形、等腰三角形和不規則三角形。這種類型的釘板，幾乎都是以上下左右間隔相等的釘子排列，不僅可以針對三角形教學，對於一些四邊形或是其他的幾何圖形均可以使用此釘板教學，讓學生透過實際操作、探索、嘗試錯誤的

學習中，慢慢建立數學的幾何的概念。在 NCTM 的網站上我們可以找到許多從幼稚園到十二年級釘板的教學應用，整理如下表 2-3-1：

表 2-3-1 NCTM 從「幼稚園到十二年級」釘板的教學應用

階段	教學目標	教學應用
幼稚園到二年級	1. 使用釘板說明說明面積、周長與有理數的概念。 2. 使用釘板說明立體圖形。	1. 認識三角形與正方形：三角形著綠色，正方形著黃色。 
三年級到十二級	1. 使用長方形排列的釘板，認識坐標系統。 2. 使用釘板配合等量的概念說明立體圖形。 3. 使用長方形排列的釘板，認識坐標系統。 4. 使用釘板配合等量的概念說明立體圖形。	1. 做一個三角形只接觸 5 根釘子，並量測周長與面積。  2. 利用圓形排列釘板製作 30 度角與 52.5 度角與 105 度角。 

早期的釘板教學都是利用實體教具，教師先將大型釘板移至教室中，上課時配合課程內容加以應用說明，學生則發給小型釘板與數條橡皮筋或繩索，讓學生在課堂中實際操作，課後再一一回收教具，以便下次教學時使用。釘板實體教具的使用上諸多不便，使用釘板時，一個活動完成之後必須將釘板上的橡皮筋或繩索卸除，才能進行下一個活動，並且活動的設計也受限於釘板的實際大小。這些問題都或多或少影響教學活動的進行，浪費寶貴的學習時光。

如今資訊科技發達，是否可以利用科技改良我們的教具？是否可以藉由科技的幫助，使我們的教具更便於使用？可不可以讓新的教具更有彈性足以解決更多的問題？可不可以有「一次設計」而能常常「方便使用」的教具呢？我們在 NCTM 的網站上看到了虛擬教具的發展，透過軟體設計，讓釘板教學更加豐富，教師省去了教具的製作與設計時間，讓教師更專注於教學內容的豐富與深入。

三、數位圓形釘板

在學習因數倍數時，國外經常使用到兩種圓形的釘板，一般是在正方形的木板上畫一個大圓，通常是將 36 及 37 支鐵釘等距離的釘在圓周上（36 and 37 circular geoboards），學生以繩索在釘子上等間距的纏繞，不同的間距將產生不同的幾何圖形，再藉由觀察每一圈纏繞的釘子數可以發現一些有趣的因數倍數潛藏在其中。36 是合成數，37 是質數，用這兩個釘板來探索因數倍數的關係是一個趣味性十足又頗有深度的教學活動（Perl，2004）。如圖 2-3-1。

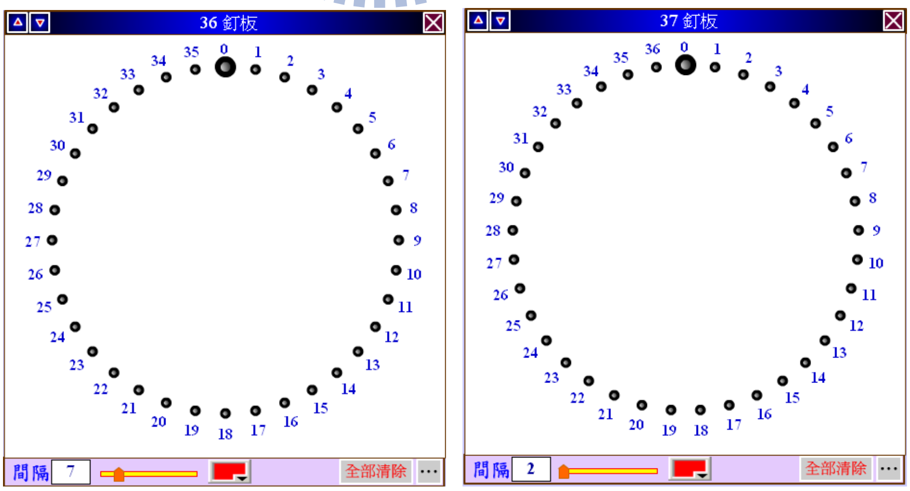


圖 2-3-1 36 與 37 釘板

在 On-Math Volume3, Number1, Fall 2004 有一篇釘板教學「Discovering Stars & Building Star Boards」，教學對象是七年級的學生，在一般的數學課堂上，作者設計星形的學習單，讓學生透過在圓形釘板上的以不同的釘子數，不同的間隔數，在連接過程中去發現其中樣式的關係性，藉此建立一些數學

的概念，並實際完成學生個人獨特的星形釘板。學生在整個活動過程中，可以學習到多邊形、正多邊形、內接多邊形、五邊形以及六邊形的幾何的部分，在數的概念上，因爲所有釘板上的點都要全部連結，且間隔數不同模組也需要連結，學生學習到「路徑」的概念，並從活動過程中，體驗問題解決的方法與同儕之間的互動（Stegemoller, Stegemoller & Willett, 2004）。

Lavy（2004，2006）利用 MWPB（MicroWorld Project Builder）的電腦環境—使用 Logo-based 語言，針對兩位七年級的學生，在課後探索數學（針與線）的問題。使用的程式軟體一樣是產生類似圓形釘板的環境。學生輸入 n 與 k，軟體會呈現 n 個頂點，每隔 k 個間隔依序連線，一直到所有頂點都連線完成。兩位七年級的學生反覆的操作不同的輸入值，以便探索其中數學的樣式。研究者以電腦化環境結合合作學習的方式針對兩位學生探索的過程中，應用質性分析，分析學生推理論證的過程。研究結果顯示，兩位學生透過螢幕所呈現星形與正多邊形做討論，彼此在探索中的討論與爭辯中，呈現出基本論證的概念，研究者將其區分成四種類型：basic、compund、elaborated 以及 general presented-as-specific，並以此作爲數學證明之前的基礎論證研究。

國內很少見到老師們使用這種圓形釘板來教學，而不常使用的原因應是這個活動有一些先天性的限制：

1. 釘板太小，不適合全班共同觀看討論。
2. 釘子的數目受限制，想要使用不同數目的釘子時，就必須製造一片該數目的釘板。
3. 以繩索纏繞帶來操作不便和拆卸費時。
4. 每一次都要拆卸繩索之後才能進行下一個活動，很難比較先後圖形的差別，除非有許多相同的釘板。

因此本研究將資訊科技融入進來，以軟體實作一個圓形電子釘板，預期達到的是：

1. 搭配單槍投影機，釘板可以很大，適合課堂討論。
2. 釘子數可以自由設定，不會侷限在某一個數目。
3. 以滑鼠代替繩索，輕輕點擊就可操作，可以快速清除。
4. 可以繪製出許多釘板，使得操作的結果得以保留，有利於比較多次操作的異同。

依據開放式問題教學模式設計數概念的探索活動，觀察國中學生在此教學模式下所產生的解題想法，並瞭解不同年級的國中學生，接受相同的教學活動，解題表現是否有差異？

第三章 研究設計

本研究基於研究目的以及考量方法論的適切性，採取行動研究方法進行研究。研究者設計一圓形釘板探索數概念的開放式問題教學活動，本章針對相關活動設計與研究方法進行探討，全章分成四節。第一節爲研究方法與研究流程，第二節爲研究對象，第三節爲研究工具，第四節爲資料分析。

第一節 研究方法與研究流程

本研究採行動研究的方式，使用圓形釘板進行數概念的探索，配合開放式問題的教學模式，藉以了解學生解題思維的形成。教育行動研究是一個繼續不斷反省的歷程，每一個循環歷程均可能包括瞭解和分析一個須加以改善的問題、有系統地研擬行動方案策略、執行行動方案策略並檢視其成效及進一步澄清所產生的新問題或新工作情境，接著便進入下一個行動反省循環(蔡清田，2000)。行動研究具有的批判理論精神，提供「教師即研究者」實踐的基礎與原則，其研究模式爲計劃、行動、觀察、反省不斷循環的探究過程(王振興，1997)。依此原則，本研究架構如圖3-1-1所示，重視教學活動實施時之即時問題及反思後的回饋，立即修正調整出較合適之教學活動。

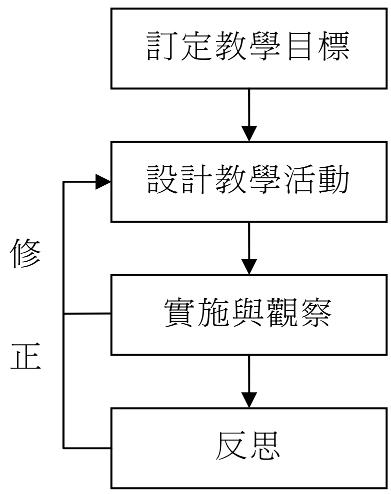


圖 3-1-1 研究架構

研究對象爲台北縣某私立完全中學國中部國一與國二學生各一班。國一與國二學生均已學過因數、倍數、質數、互質、最大公因數、最小公倍數、正比、反比與短除法等概念，但同餘概念爲高一的課程內容，故本研究對象多未學習過此概念。分組依據爲學生的上學期數學成績，分組方式採異質性分組，每組5-6人，每班均分成十組。兩班所使用的軟體與實施的教學內容均相同。2009年5月1日，兩班學生第一次填寫「數學學習問卷」（見附件一），於2009年5月5日，國一學生實施教學活動，2009年5月6日，國二學生實施教學活動。2009年5月11日，兩班學生第二次填寫相同的「數學學習問卷」。在教學活動中，研究者兼具教師的角色，主要引導教學活動的進行，當學生遇到數學概念相關問題，以開放式的問答協助學生觀念釐清並進一步探索，若有學生發生電腦操作上的問題，無力解決時，才會給予適時的指引。並商請兩位數學老師（李老師，陳老師）擔任觀察者，於教學活動進行期間，協同觀察記錄。教學設計與學習單（見附件二）。第一堂課，由研究者先行說明軟體使用與操作方式，確認學生操作無礙後，發下學習單，讓學生自行探索學習；第二堂課分組討論與報告，學生爲教學活動的主角，研究者僅作總結或對於錯誤的概念或結果，加以修正。教學活動進行同時，架設ＤＶ攝影機拍攝教學過程。國一學生教學活動實施後，研究者依據學生學習狀況調整教學活動之設計，以作爲國二學生教學實施之依據。兩次教學活動結束後，蒐集教學活動的學習單予以整理分析，加上研究者在教學活動中的觀察與兩位觀察者的紀錄，俾以評估教學設計的可行性。詳細流程圖如圖3-1-2。

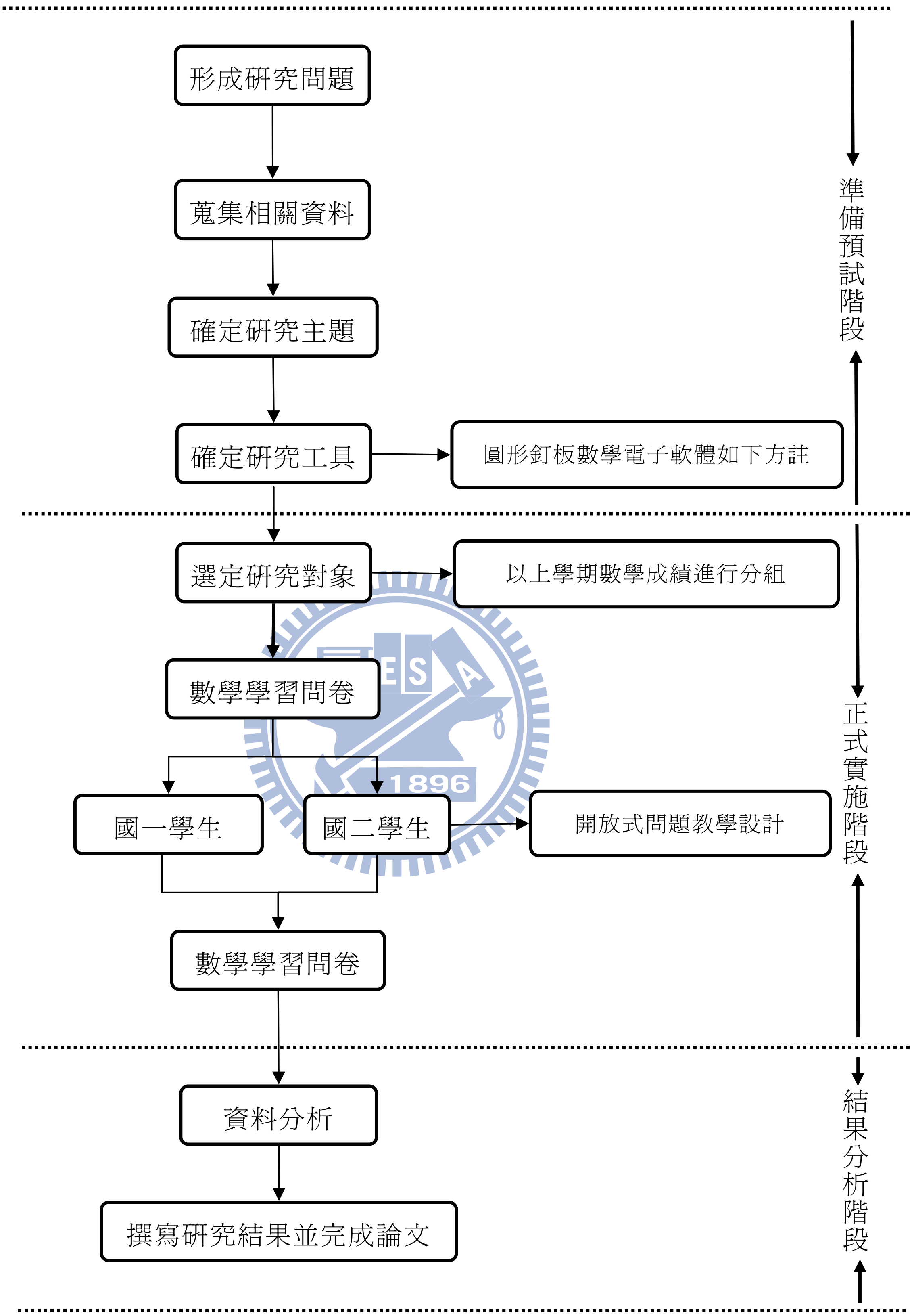


圖 3-1-2 研究流程圖

註：研究工具包含軟體、活動設計、問卷、學習單

第二節 研究對象

本研究選取台北縣某私立完全中學國中部「國一」與「國二」學生各一班為教學活動實施的研究對象。該校採取常態男女合班的模式教學，且該校為完全中學，因此國中部上課時間配合高中部上課時間，每節課為五十分鐘，每節下課十分鐘。該校位於市中心，且為私立完全中學，學生家長社經背景普遍較佳，學生入學條件參酌小學成績優異者優先，超過入學名額時，採抽籤選取。因此學生入學時程度普遍優於當地一般公立國中同年級學生。有效樣本的選取，排除當天請假學生，各班人數與有效受測學生人數，如表 3-2-1。

表 3-2-1 研究樣本人數統計表

年級	人數（男生，女生）	有效樣本（男生，女生）
國一	（28，24）	（28，24）
國二	（25，27）	（25，27）
合計	（53，51）	（53，51）

擔任本研究教學活動的教師即為研究者本人，具有十三年的數學科教學經驗，對於電腦輔助教學有較深入的研究與興趣，國一與國二兩班都是同一位教師進行教學活動，且兩班均為研究者任教班級，學生對於施教者不陌生。本研究使用圓形釘板數學電子軟體，學生於電腦自行操作前均接受教師教學指引，按部就班的熟悉數學電子軟體的操作方式。

第三節　研究工具

一、數學學習問卷（見附件一）

（一）目的

本問卷目的在於了解學生對於數學學習上的看法與感想。實施問卷時間為開放式問題教學活動前、後，且問卷內容一致，藉以了解學生在活動前後的態度變化情形。

（二）預試

「數學學習問卷」請國一與國二學生各一位（非參與活動學生）先行填寫問卷內容，確認問題清楚，沒有語意不清的情形且適合國中學生閱讀。

（三）內容

「數學學習問卷」共有 13 個問題，主要分成四個面向。第一是對數學的感受，第二是對數學解題的看法，第三是對數學學習的看法，最後是上數學課的想法。

（四）分析

待蒐集到學生問卷後，以 SPSS 12.0 統計軟體進行 Cronbach Alpha 係數分析來檢定問卷信度。

二、圓形釘板數學電子軟體

（一）「圓形釘板」數學電子軟體的選用

「圓形釘板」數學電子軟體為張世明老師藉由軟體 Flash MX 2004 設計開發，研究者在確定研究方向後與張世明老師洽詢並得到應允與授權使用「圓形釘板」數學電子軟體，進行相關數概念的教學探索活動。為了評估此軟體，張老師針對此數學教學軟體的使用及概念呈現，經過多位使用後的老師建議對該軟體已做了修正。

（二）軟體介面與使用說明

本軟體介面與使用說明分成四部分，第一部份是主畫面；第二部份是釘板，區分為學生版與教師版；第三部份是文字版面；第四部份是視窗版面。

1. 主畫面（如圖 3-3-1）：只有一個調整器和兩個按鈕。

圖 3-3-1 主畫面

表 3-3-1 主畫面元件功能列表

元　件	功　　能
釘子數：12	拖曳橘色指標設定板子上釘子的數量，再按一下『新釘板』按鈕，即可產生一片釘板。 設定範圍 2~50。
新釘板	產生一個指定釘子數量新的釘板
資料表	顯示資料表視窗

（1）使用說明：

① 拖曳橘色調整器，設定好所需釘子數量，再按一下『新釘板』，畫面上就會產生一個指定釘子數量新的釘板。

② 學生可以同時產生多個釘板，針對問題作不同的操作、探索、觀察；老師可用來作多樣性的呈現，以便於和學生討論、歸納（如圖 3-3-2）。

③ 按『資料表』可以顯示資料表視窗。資料表一開始是空白的，必須由完成操作的釘板中按下『傳送到資料表』按鈕，表中才會顯示彙集的操作記錄。

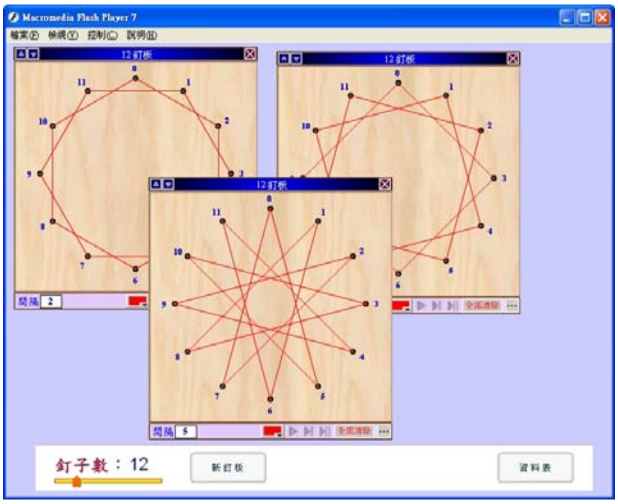


圖 3-3-2 多個釘板呈現

2. 釘板：學生版（如圖 3-3-3）僅能手動操作，教師版提供自動功能（如圖 3-3-4）。

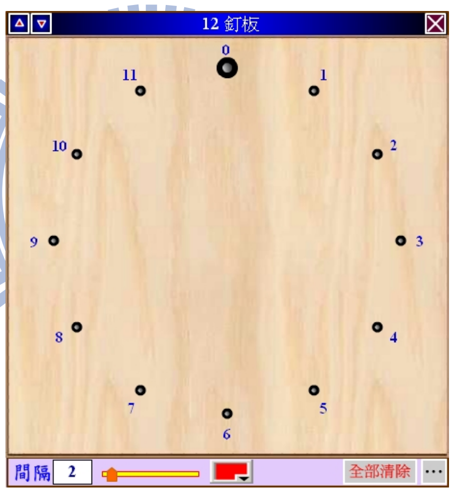


圖 3-3-3 學生版的圓形釘板畫面

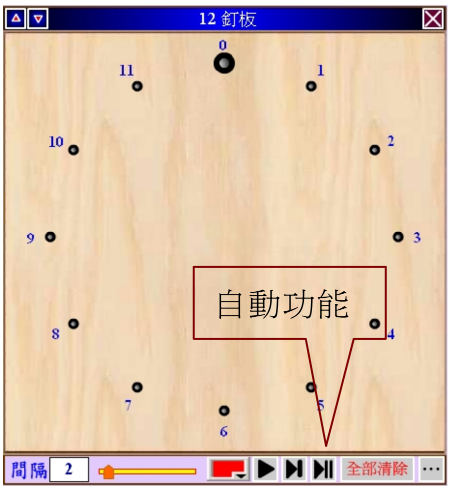


圖 3-3-4 教師版的圓形釘板畫面

表 3-3-2 學生版基本元件功能

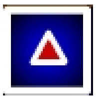
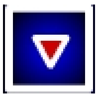
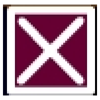
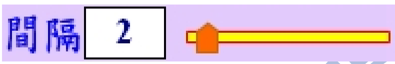
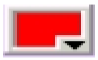
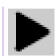
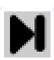
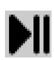
元　件	功　　能
	按住標題藍色區域可以移動整個釘板，並且將它置於最上一層。
	放大顯示整個釘板。 當按鈕顏色變成灰色時，無法使用。
	縮小顯示整個釘板。 當按鈕顏色變成灰色時，無法使用。
	關閉、清除釘板。
	預先設定想要連線的間隔數。當開始畫上連接線時，此元件會隱藏，禁止中途改變設定。設定範圍：1~釘子數減 1。
	設定連線的顏色。按色塊會彈出顏色表供選擇。
	切換顯示與不顯示文字紀錄及相關數值列表。
	按住最下方淺紫色空白區域可以移動整個釘板，並且將它置於最上一層。

表 3-3-3 教師版增加的元件功能

元　件	功　　能
	自動連線到下一個釘點。
	自動完成一條路徑（path）。 從起點開始依指定間隔連線，連回起點時結束。
	自動完成所有路徑。

（1） 使用說明：

① 先拖曳橘色調整器，設定好預定的間隔數。

② 將滑鼠移入釘版中央區域，此時第一個『起點』的釘子會閃爍。

③ 將滑鼠指標（手指形狀）接觸閃爍的釘子，按一下滑鼠左鍵，可拖曳出指定顏色的線段，隨著滑鼠移動。

④ 滑鼠行經釘點時，該釘點會變大，此時可以嘗試按滑鼠左鍵釘住連線，但是只有符合所設定的間隔數時，才能成功釘住。

⑤ 重複④，依指定間隔，將所經過的釘點一一連線。當再次回到起點時，即代表完成一條路徑（path）。

⑥ 若尚有未經連線的釘子，則下一個『起點』會閃爍。重複④至⑤，直到所有的釘點都被連線。

⑦ 教師版可以在任何時刻使用自動功能。

⑧ 視需要顯示文字紀錄，觀察操作的過程。

3. 文字版面：顯示釘板上的操作紀錄（如圖 3-3-5）。

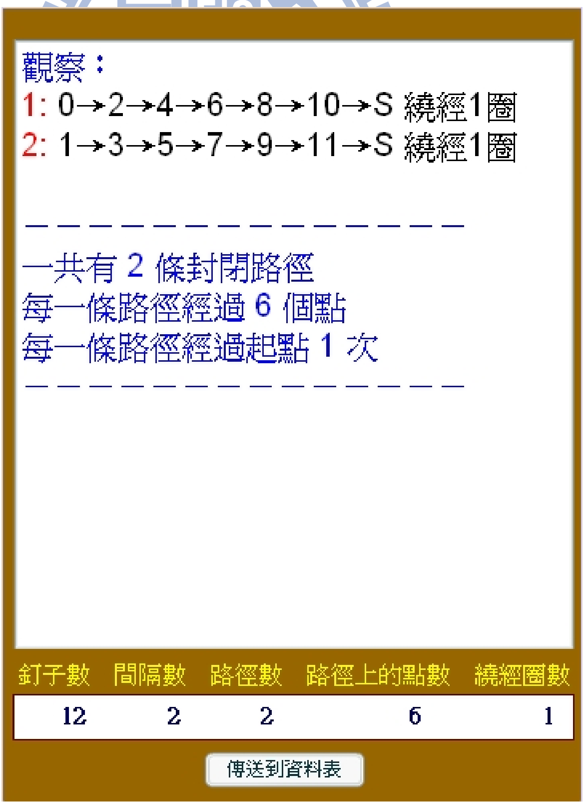


圖 3-3-5 文字版面之操作紀錄

表 3-3-4 文字版面元件功能列表

元　件	功　　能
傳送到資料表	將數值紀錄傳送到資料表，以便於討論。
已經傳送	當資料已經傳送之後，傳送按鈕失效，轉變爲『已經傳送』。

（1）符號及使用說明：

① 以 6 釘板，間隔 4 爲例：第一筆紀錄爲『1: 0→4→・→2→S』。其中紅色的 1 表示第一條路徑；第一個『・』代表繞經起點（並非連接起點）；最後一個『S』代表回到起點（stop），完成一條路徑（path）。

② 同上例，路徑中出現一個『・』和一個『S』，代表這一條路徑（path）中一共經過兩次起點，即繞經起點的次數爲 2。

③ 當操作完成，按『傳送到資料表』按鈕，可以將操作紀錄傳至資料表視窗，以便於進行進一步的探索活動。

4. 資料表視窗：彙整操作紀錄，以便於觀察比較、問題探討（如圖 3-3-6）。


資料表

釘子數	間隔數	路徑數	路徑上點數	繞經圈數
12	2	2	6	1
12	3	3	4	1
12	4	4	3	1
12	5	1	12	5
12	6	6	2	1
12	7	1	12	7

清除資料

圖 3-3-6 資料表視窗

表 3-3-5 資料表視窗元件功能列表

元　件	功　　能
	按住標題藍色區域可以移動資料表視窗，並且將它置於最上一層。
	清除資料表中的操作紀錄。
	暫時關閉資料表視窗(並不會刪除資料)。

（1）使用說明：

① 資料表一開始是空白的，必須由完成操作的釘板中按下『傳送到資料表』按鈕，表中才會顯示彙集的操作記錄。

② 建議每一次只針對相同釘子數的釘板進行資料彙集討論。

③ 當改變釘子數時應將資料清除並重新彙整，避免過多的資料堆疊在一起，干擾探索活動的進行。

三、圓形釘板數學電子軟體教學活動設計（見附件二）因學習單屬活動設計內容（如下內容）

（一）目的

本課程的構思配合數學教育學習領域中的「因數、最大公因數、質數、互質、同餘類」等課題，並在內容上作出增潤與延伸，引導學生相互交流意見，以切合照顧學生的學習需要，並觀察學生的解題策略及歸納分析能力，希望藉此提升學生學習數學的興趣。

（二）時間

兩節課（每節課 50 分鐘，共 100 分鐘）

（三）內容

圓形釘板數學電子軟體教學活動設計，包括教學簡介、設計構思、學習目標、活動流程與學習單。

四、圓形釘板的開放式問題教學探索活動中學生可能的樣式發現

依據文獻，圓形釘板的開放式問題教學模式學生可能的樣式發現，詳見表 3-3-6。

表 3-3-6 學生可能的樣式發現與數學聯想

我們假設『釘子數為 a ，間隔數為 b ，路徑數為 c ，路徑上的點數為 d ，繞經的圈數為 e 』。

	學生可能的樣式發現	學生可能的數學聯想
1	釘子數＝路徑數×路徑上的點數。 $a = c \times d$	正比與反比的概念，因數與倍數的概念。
2	固定釘子數，檢驗所有間隔數，若路徑數均為 1，此釘子數必為質數。	質數的概念。
3	路徑數與路徑上的點數必為釘子數的因數；反之，釘子數必為路徑數與路徑上點數的倍數。	因數與倍數的概念。
4	路徑數是釘子數與間隔數的最大公因數 $(a,b) = c$	最大公因數的概念。
5	只要路徑數是 1，釘子數與間隔數必互質。 $(a,b) = 1 = c$	互質的概念。
6	釘子數、間隔數、路徑數、路徑上點數、繞經圈數有一定關連。 $c\,\underline{)\,a \quad b}$ $\quad\ d \quad e$	短除法的概念。
7	如果固定釘子數，兩個間隔數相加等於釘子數，則此兩圖形相同。	加法反元素的概念
8	如果間隔數是釘子數的因數，則每一條路徑上的點，構成一個同餘類。	同餘類的概念。
9	間隔數越接近釘子數的一半，裡面所圍出的圖形越小；反之，越大。	圖形變化
10	間隔數＝路徑數×繞經的圈數。 $b = c \times e$	正比與反比的概念，因數與倍數的概念。
11	釘子數×繞經圈數＝間隔數×路徑上的點數。 $a \times e = b \times d$	等量公理。
12	釘子數與間隔數的最小公倍數＝路徑數、路徑上的點數與繞經圈數的最小公倍數。 （$[a,b] = [c,d,e]$）。	最小公倍數的概念。

五、研究信度與效度問題處理

行動研究的效度是對計畫介入的問題是否作了真正的解決，而信度是基於研究計畫的目標，研究者在一段時間內，使用相同的技術，對所蒐集的資料是否一致的考量（劉祥通，2008）。

本研究採用以下三種方法來提高資料分析的信度：

1. 低推論的描述：本研究直接引用受試者的原始資料，以儘量減低推論所產生的錯誤。
2. 使用視聽器材輔助記錄資料：研究者以DV錄影錄下整個教學活動的歷程，並作成逐字稿。
3. 研究者邀請兩位數學老師擔任教學活動實施時候的觀察員，並定期與指導教授針對資料的處理、分析與討論，使本研究不至於過份主觀與偏頗。

本研究資料分析的效度採用三角檢核法（triangulation），即採用多種蒐集資料的方法（數學學習問卷、圓形釘板個人學習單、圓形釘板團體學習單、DV錄影），來蒐集多種資料（觀察記錄、問卷結果、回饋記錄），及由多位主試者（研究者、兩位觀察員、指導教授）來加以分析，以達到多重資料檢核，而減少研究者主觀的影響（黃瑞琴，1991）。

第四節 資料分析

本研究是將圓形釘板數學電子軟體當作教學輔具，針對國一與國二學生採取開放式問題的教學探索研究。在教學活動進行前、後各實施一次「數學學習問卷」。教學活動的第一堂課，採取個人探索學習，第二堂課分組進行團體討論，兩堂課均配合學習單輔助學習結果記錄。爲周全教學之紀錄，以便觀察研究對象之學習歷程，研究者取得研究對象之同意，於教學活動進行時，以DV 攝影機拍攝教學過程，並將影帶轉錄成 wmv電腦檔案格式，全程記錄教學過程中師生或同學之間的互動，並聲明所有拍攝內容僅供本研究使用。另外，在進行教學活動時，研究者就特殊狀況做即時紀錄，並商請兩位數學老師協同記錄；而教學錄影帶在轉成電子檔案後，配合所蒐集學生學習單與問卷同時分析，依此撰寫研究結果。

本研究的資料來源爲現場錄影、觀察資料、問卷資料、文件資料。現場錄影可以提供研究者詳實的資料訊息，觀察資料主要是研究者的觀察記錄與兩位協同老師的觀察記錄，問卷資料則得自於兩班學生的「數學學習問卷」，問卷完成後以統計軟體 SPSS 進行問卷信度的檢核，文件資料主要是學生的學習單與回饋單，學生學習單樣式的發現數目配合研究者自編的表 3-3-6 逐一分析與判斷。資料除了作爲分析之用外，並據此進行三角檢核，以考驗研究者的發現。

資料是以代碼的方式呈現，其規格說明如下：

（一）觀察資料一共六碼，第一碼爲國字表示資料種類，第二碼表示觀察人的身份，三四碼表示月份，五六碼表示日期。如：「觀研0501」代表5月1日研究者的觀察資料，「觀李0501」代表5月1日李老師的觀察資料。

（二）文件資料一共九碼，第一碼爲國字表示資料種類，第二碼表示身份，第三碼表示年級，四五碼表示學生座號，六七碼表示月份，八九碼表示日期。如：「單S7010501」代表國一（七年級）的1號學生5月1日的學習單資料，「回S8020502」代表國二（八年級）的2號學生5月2日的回饋單資料。

（三）爲了存真，學生的學習單或是回饋單，若有錯別字，研究者亦不更改。

整個教學活動所得到錄影檔，研究者節錄部分內容於研究中討論，而檔案將以wmv檔案來建檔，並將其存檔於本研究論文所附的CD中。

第四章　研究結果與討論

本章就使用圓形釘板進行數概念的探索，依據開放式問題的教學模式，分析教學活動後對學生學習狀況和解題思維的影響。全章共分爲三節，第一節就研究對象在教學歷程與前後數學學習態度之問卷結果與學習單的回饋，討論開放式問題教學模式對學生在數學學習上的影響；第二節就研究對象之學習單的回饋與教學歷程，探討接受圓形釘板的開放式問題教學探索活動後，學生產生的解題想法；第三節爲不同年級學生在接受圓形釘板教學探索活動後，解題思維的差異。

第一節　開放式問題教學模式對學生在數學學習上的影響

研究對象爲國中一、二年級學生，所有學生從國小開始接觸電腦，均具備基本資訊能力，對於電腦的使用並不陌生。此次所使用的圓形釘板數學電子軟體，操作簡單，並不會造成學生在電腦操作上的困難。本節研究者觀察學生學習歷程，將就圓形釘板的開放式問題教學探索活動實施概況、前後數學學習態度之問卷結果與在國中階段實施開放式問題教學探索活動的困難等三方面加以說明。爲使研究方便記錄與描述，並保護個人隱私，學生姓名均以代碼呈現。

一、圓形釘板的開放式問題教學探索活動實施概況

（一）圓形釘板的輔助教學吸引學生的目光

傳統數學課的上課方式多半是採單向灌輸的講述教學，注重演算技巧的熟練，而輕忽雙向互動的教學；教學流於標準化而未能適應個別差異；缺乏能引發學生對數學產生興趣的內部機制（黃政傑，1996；譚寧君，1996；鄭毓信、梁貫成，1998）。當把學生帶到電腦教室，並開始說明圓形釘板軟體操作方法，研究者觀察到學生眼睛一亮，對於新的事物充滿好奇，許多學生迫不及待的開始自行操作。學生一次次的改變釘子數與間隔數，不斷地反覆操弄中，觀察圖形變化與發現樣式。可見虛擬教具可以增加學生的學習動機和集中力（Clements & McMillen, 1996；Reimer & Moyer, 2005；Leathrum, 2001）。雖然軟體不若電腦遊戲吸引學生，但透過軟體操作學習數學，與往常平淡無趣的數學課相比，學生此時上課興奮的情緒在兩個年級課室中都能明顯感受到。學生的回饋單與觀察員也反映此現象。

※教材新奇，吸引同學。　＜觀李0505＞

※S7380511：覺得蠻好玩的，用出來的圖形很漂亮。　＜回S7380511＞

（二）開放式問題教學模式需要老師的引導與鼓勵

學生對於接觸到圓形釘板數學電子軟體充滿了新鮮感，但是對於接下來的學習卻感到不安。長久以來，在數學課堂上，學生習慣以聽講為主軸的課程安排，突然改變成主動學習的方式，讓許多學生倍感壓力，心裡誠惶誠恐。

※S：老師，這練習是要我們求什麼？答案會有幾個？

T：整個教學活動，妳可以儘量的探索發現，沒有一定的標準答案，就妳的觀察，把所有發現一一寫下，並試著聯想妳所學過的『數』概念的知識。

＜觀研0505＞

老師適時的引導能夠化解學生莫名的緊張，並且正向的鼓勵可以提升學生繼續探索的意願。課間來回的巡視，給予學生及時的協助與說明，幫助學生積極思考所有的發現與概念的連結。

※老師適時的提供數學方面的引導。　＜觀李0505＞

※巡視各位學生操作的情況，重視個別差異，並不斷提醒學生「沒有一定的標準答案」，使學生能積極的思考答案，對每位學生回饋的答案相當重視。

＜觀陳0505＞

（三）圓形釘板開放式問題教學模式刺激學生學習

在一般的數學課堂上，學生多半採取被動的聽講，教師的提問通常反應是：一片寂靜或是少部分學生回答。回答的同學，多半是高學習成就的學生。對於大部分的學生，教學者弄不清楚學生到底學會了沒有或是懂了多少？圓形釘板的開放式問題教學活動，每一位學生都可以自行操作軟體，配合學習單或固定釘子數，變動間隔數；或固定間隔數，變動釘子數；或隨學生的思維任意改變，去探索發現圖形的變化？有幾條封閉的路徑？路徑上的點數有多少…？每一位學生，不分程度高低，都能主動的參與其中。程度高者，或許會多一些樣式發現並能連結數學概念；程度低者，也不會因為無聊或聽不懂而放棄學習。如同 Nohda（2000）所述開放式問題不論在結果、過程及方法上都是開放的。學生在接受圓形釘板開放式問題教學活動，普遍感到有趣。Mason, Burton 和 Stacey（1982）談到學生解題時所遇到的頓悟驚喜經驗，這種喜悅的來源，能提供學生進行更進一步學習及解題的嘗試。

※S8420511：這樣不一樣的教學方式很特別，而且還蠻好玩的。

＜回S8420511＞

※S8470511：用電腦上數學其實還挺有趣的，當自己發現一個奇妙的（釘子數）關係時，心裡十分開心，非常有成就感。 ＜回S8470511＞

（四）開放式問題教學促使學生分組討論熱絡

Bird（1992）認為學校應該提供小組活動的機會以產生生動活潑的討論。小組活動使得每個學生能完全參與活動和討論，並且使學生發展他們的領導才能，能使學生從另外一個學生那裡學到東西，並且勇於去冒險。本次教學活動，研究者採異質性分組，每組5-6人，讓學生彼此分享探索的發現。透過討論，學生有主動思考的機會，能夠以不同方式表達自己的數學想法，接受別人的質疑，也能去分析他人的意見正確與否，做自我反思與檢驗，經由思考與內化後，進而提昇自己的解題層次（劉祥通，2008）。在教學現場，研究者觀察到部分小組討論的對話：

※S1：我發現了 $a=c\times d$，所以 c 與 d 成反比。

S2：好爛哦，這也可以寫。

S1：可以，老師說只要是發現都可以寫，

S1：接著是 $b\div c=e$，然後 b 和 c 成正比。

S2：對，這個我也有找到。

S1：然後 $b+c=a$。

S3：咦，這個不對吧，你看我操作所出現的資料表資料…。

S2：c 一定是 a 因數，a 一定是 c 倍數。 ＜觀研0505＞

※S1：b 不能整除 a 的話，最後的 e 一定不是1。

S2：那這要怎麼寫？

S1：嗯，這我不知道要怎麼說？

T：要不要考慮將所有情況一一討論？

S3：我們來試試看吧！ ＜觀研0506＞

※S1：c 是 b 的因數…。

S2：c 哪是 b 的因數呀。

S1：譬如說這個是12，那個是2，3，4，6…？

S2：妳不能只用一兩個例子要說明所有，我來操作看看。

S1：我說如果嘛… ＜觀研0506＞

在開放式的教學中，討論過程是開放的，學生可以提出自己的看法，亦可以質疑別人的意見，經過不斷的討論與驗證，提昇自己的數學思考能力。活動實施後所蒐集到的學生回饋單裡反映出學生喜愛分組討論的氛圍。

※S7060511：感覺上這樣用電腦操作，小組討論，比較好理解，也比較輕鬆！！！對於我這個數學笨蛋來說，好像比較有幫助。 <回S7060511>

※S8400511：雖然我發現的不多，但能跟同學一起討論出結果是一件有意義的事，讓我學到不同的東西。 <回S8400511>

※S8510511：我覺得小組討論真的很有用，當進行第一份學習單時，我都不知要幹嘛，結果小組討論後，不僅學習到別人的發現也能確定自己的發現，所以學習不能閉門造車。 <回S8510511>

研究者在活動中觀察到，許多小組的成員中，有部分學生具備領導統御的特質，能夠有效的進行討論並吸引同學注意，對於小組成員的發現，逐一驗證，這是在一般課堂上不易察覺的現象。透過分組討論，一方面讓所有同學可以聆聽其他同學的發現，刺激學生批判的能力，另一方面可以達到同儕互動的效果。

圖 4-1-1 學生熱烈討論的情形

※國一班級異質分組之小組討論熱烈，有顯著的效果（互助合作）且好奇心較為強烈的學生，有較多的發現。 ＜觀陳0505＞

※國二班級小組討論的集思廣益，讓不少學生有所啟發，且資料表的使用較為提升。 ＜觀陳0506＞

（五）開放式問題教學活動中能有利教師觀察學生的解題想法

一般而言，學生在解題上的策略，除了計算題的演練之外，教師都不易察覺，透過圓形釘板輔助教學與所搭配的學習單，我們可以發

現學生的解題想法。

1. 出現由繁到簡的解題思維

研究者在教學現場觀察到許多學生對數概念的探索，從一開始選用釘子數很大的數目（軟體設計限制釘子數從2到50），不管間隔數訂多少，一次次的連接，浪費了許多觀察的時間。雖然觀察到圖形的變化，但對於過程中的發現，助益甚少。

※S7520505：我覺得用50釘板，28間隔，超累的，會讓人眼花撩亂。

＜單S7520505＞

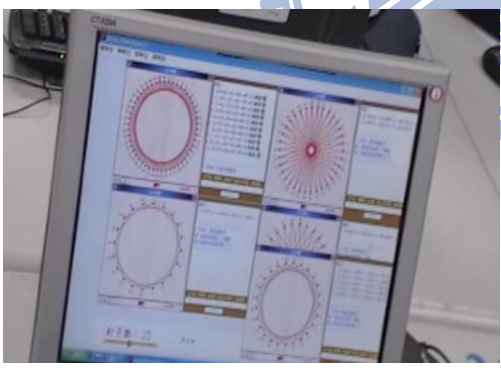
※S8050506：釘子數越多，外面的三角形越小，內部的圖形越像圓形。

＜單S8050506＞

經過幾次嘗試後，學生才開始改變策略，從釘子數較少的部分開始探索。

2. 使用文字記錄模式與資料表

透過研究者在教學現場與DV錄影觀察中發現，學生使用文字記錄模式與資料表協助歸納的頻率很高。經過多次的操弄，學生發現觀察上的不便，充分運用圓形釘板軟體中文字記錄模式與資料表的特性，俾完成學習單。如圖4-1-2。



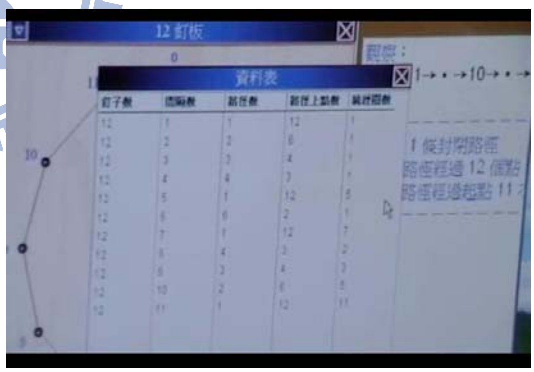


圖 4-1-2 使用文字記錄模式與資料表

3. 列表尋找樣式

經DV錄影觀察與蒐集到兩班學生104份的學習單上，可以發現許多學生樣式的歸納是列表分析得來，然後再透過軟體不斷驗證，最後經過學生思考，記錄樣式發現與所連結到的數學概念。圖4-1-3爲學生列表的狀況。

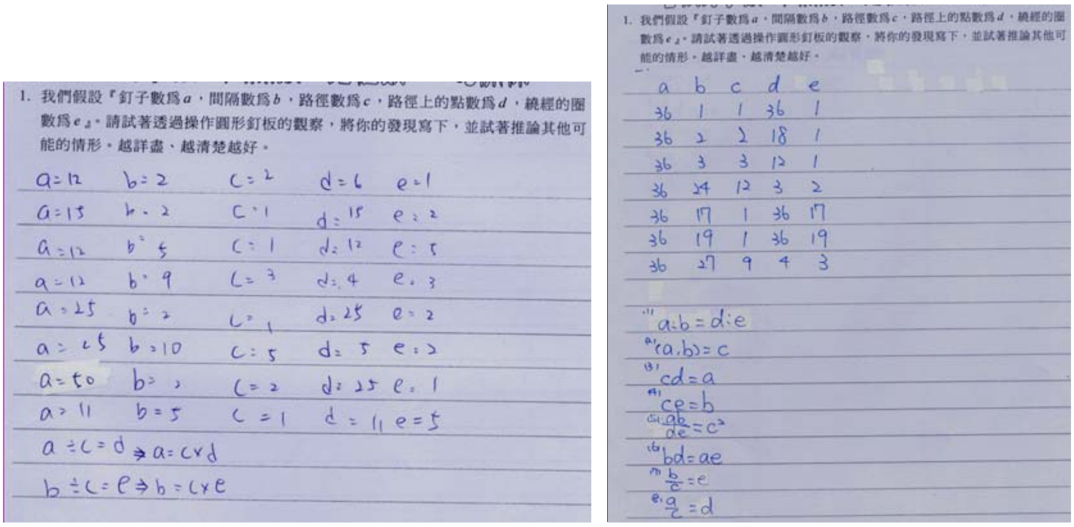


圖 4-1-3 列表尋找樣式

Schoenfeld（1985）指出學生通常在教科書的範例中遇到啓思法，或是觀察他的教師學習使用啓思法。然而，教科書上的範例或是教師在使用這些啓思法的時候，並沒有談論到這些啓思法的一般適用性。因此，雖然學生學到了許多啓思的技巧，但是並不能有效將之應用在解題的過程中。綜合以上觀察，我們察覺學生的解題想法，正如蔡清田（2000）指出運用開放性教學法可以激盪出學生多元解題策略。

二、數學學習問卷與學習單的回饋之整理與分析

本研究對象爲國一與國二學生各一班共104位學生，兩班學生在教學活動實施前、後均接受「數學學習問卷」，並在教學活動中搭配學習單學習。本研究採Cronbach Alpha係數來檢定問卷信度。經SPSS 12.0 軟體分析後，本研究「數學學習問卷」前測平均信度爲.636，後測平均信度爲.684。依據Cuieford（1965）認爲Cronbach Alpha大於.7者爲高信度，介於.7和.35之間爲尚可，若小於.35者爲低信度，應予以拒絕，由此顯示本研究問卷之信度檢定結果尚可。

（一）從「數學學習問卷」前測結果說明學生的數學學習態度

「數學學習問卷」共有13個問題，主要分成四個面向。第一是對數學的感受，第二是對數學解題的看法，第三是對數學學習的看法，最後是上數學課的想法。在對數學感受上，喜歡數學的比例在兩班的學生都佔了一半，但自認數學很好的學生，都不到三成。此調查結果顯示，大部分學生並不討厭數學，但要說自己數學很好，卻多所保留。根據國際數學與科學成就趨勢研究（Trends in International Mathematics and Science Study：TIMSS）在2003年臺灣國中二年級（八年級）學生數學自信的表現中顯示，臺灣學生顯示有高數學自信的人數百分比（26%）

遠低於國際平均水準（40%），排名倒數第二。有低數學自信的人數百分比（44%）遠高於國際平均水準（22%），排名高居第二。換句話說，臺灣國中二年級學生相當缺乏自信心。本研究調查結果與上述國際調查結果雷同。在數學解題的看法上，兩班學生對於「問題4：數學問題的解法通常只有一種。」幾乎均表示不同意，顯見學生並沒有解題方法唯一的看法。對於「問題9：如果會做的話，數學問題通常可以在短時間內解出。」兩班學生有七成以上表示同意，大部分學生相信，數學問題如果短時間做不出來，這個問題一定不會。在對數學學習的看法上，兩班學生對於「問題8：數學學習可以讓人思考更靈活。」有超過八成的學生同意。學生普遍認爲，數學是可以促進思考能力。對於「問題6：只有聰明的少數人才能學好數學。」，不到兩成學生同意，表示學生認爲只要肯努力，還是可以把數學學好的。在上數學課的想法上，七成以上的學生喜歡老師用電腦輔助教學。八成以上的學生，喜歡分組討論的方式來討論數學，學生認爲透過討論，收穫更多。小孩的認知發展潛能，如果只靠自己努力，只能有限的發展，但是如果得到較有知識者，像同儕、家教或老師的指導，則能達到超越性的發展（谷瑞勉，1999）。

（二）經過教學活動後學生在「數學學習問卷」後測結果的說明

經過開放式教學活動實施後，對所有參與活動的學生再做了一次「數學學習問卷」。13個問題中，在「問題3：數學問題通常只有一個標準答案。」兩個年級的學生對於同意部分都有下降，國二學生下降的幅度有8%。在「問題6：只有聰明的少數人才能學好數學。」兩個年級的學生對於同意部分也都有下降，國一學生下降的幅度有6%。顯見經過教學活動後，對於少部分學生的數學學習有些許改變。其他問題的前後測變化，有增有減，整體而言，本問卷學生前後測的變化不大。「數學學習問卷」的整理如表 4-1-1。

表 4-1-1 數學學習問卷同意部分的整理

	問卷內容	國一學生前測同意百分比	國一學生後測同意百分比	國二學生前測同意百分比	國二學生後測同意百分比
對數學的感受	1. 我喜歡數學。	50%	50%	58%	60%
	2. 我的數學很好。	33%	27%	17%	15%
對數學解題的看法	3. 數學問題通常只有一個標準答案。	21%	19%	25%	17%
	4. 數學問題的解法通常只有一種。	0%	2%	0%	4%
	9. 如果會做的話，數學問題通常可以在短時間內解出。	77%	73%	85%	85%
對數學學習的看法	5. 數學的學習多半是計算及公式的記憶。	40%	46%	54%	50%
	6. 只有聰明的少數人才能學好數學。	23%	17%	13%	12%
	7. 數學學習對日常生活沒有幫助。	21%	15%	19%	21%
	8. 數學學習可以讓人思考更靈活。	88%	85%	88%	90%
	10.數學問題通常很抽象難懂。	48%	50%	44%	44%
上數學課的想法	11.我對上數學課沒有興趣。	42%	40%	33%	35%
	12.我喜歡數學老師使用電腦來上數學課。	71%	75%	69%	62%
	13.我喜歡小組討論的方式來學習數學。	83%	87%	92%	87%

從問卷整理的結果顯示，學生接受了圓形釘板開放式問題的探索教學活動後，在數學學習問卷之前後測變化不大。根據Dillon和Morris（1996）的看法，他們認爲態度是對於某些事物，具有一致以及穩定的信仰、感覺、以及傾向，而且態度能預測行爲以及能透過學習以及經驗而逐漸發展。Aiken（1976）分析影響數學態度形成的主要原因包括：學生的性別因素、人格因素、社會因素、教師及教學因素及課程因素。因此短期教學的介入，對於態度的改變，助益不大。想要改變數學學習態度，仍須長期耕耘。

（三）學習單的回饋

學生接受了圓形釘板的開放式問題探索教學活動後，普遍反應熱烈，許多學生都希望下次能再有類似的教學活動。學生的期待就是老師教學的動力。以下是學習單回饋的整理：

1. 學生對於這樣不同的經驗感到新奇，透過開放式問題教學模式，發現到自己學習上的不足，雖然覺得辛苦，卻渴望能再有機會體驗類似課程。如圖 4-1-4 及 4-1-5。

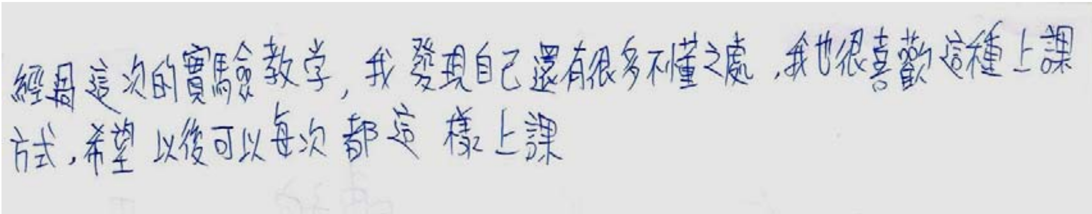

經過這次的實驗教学，我發現自己還有很多不懂之處，我也很喜歡這種上課方式，希望以後可以每次都這樣上課

圖 4-1-4 回 S8150511

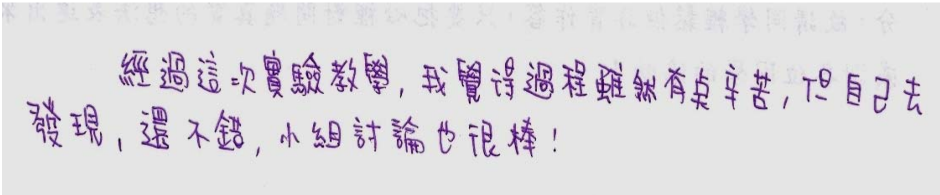

經過這次實驗教學，我覺得過程雖然有点辛苦，但自己去發現，還不錯，小組討論也很棒！

圖 4-1-5 回 S8330511

2. 學生發現操作簡易的數學軟體輔助學習，也可以產生許多數學概念，啓發了學生學習興趣。開放式問題的學習方式，雖然與過去數學學習經驗不同，卻讓學生更有收穫。如圖 4-1-6 及 4-1-7。

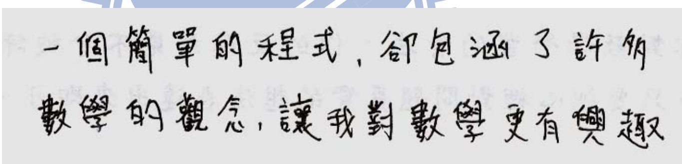

一個簡單的程式，卻包涵了許多數學的觀念，讓我對數學更有興趣

圖 4-1-6 回 S8160511

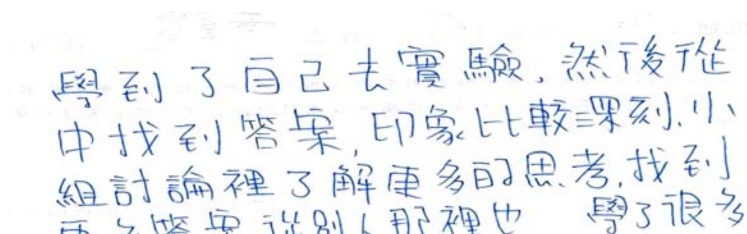

學到了自己去實驗，然後從中找到答案，印象比較深刻，小組討論裡了解更多的思考，找到更多答案，從別人那裡也學了很多

圖 4-1-7 回 S8490511

三、在國中階段實施開放式問題教學探索活動的困難

（一）時間配置的調整與學習單的改良

本研究在對國一學生實施教學活動後發現，時間的配置需做調整。在軟體操作說明的時間由原本 10 分鐘應調整爲 20 分鐘，讓學生完全了解問題，並確實熟悉軟體的操作方式。在學生分組討論的時間分配上，應由原本 10 分鐘調整成 20 分鐘，讓小組成員有充裕時間討論，並完整寫下討論結果。在分組報告時間可以

從原本 30 分鐘調整爲 20 分鐘，以上時間的調整，較符合本研究的時間配置。在國二實施教學活動時，時間配置做了改變，讓整個活動能更順利的完成，並可以讓研究者針對學生的分享做總結與進一步延伸。其次在學習單上，本研究第一份學習單有 4 頁，主要有兩個問題，應將兩個問題合併成一個，縮短學生須要閱讀文字題的時間，俾使學生有多一些時間進行探索。觀察員亦是如此看法。

※學習單的內容：學習單（一）的第三、四題相似，若能合併以減少作答時，相信學生答案會更為豐富。 ＜觀陳0505＞

（二）樣式發現與數學概念的連結仍須加強

透過錄影的觀察與學習單整理發現，學生在接受圓形釘板的開放式問題探索教學時，經過研究者在教學現場不斷的提醒要將所發現的數學概念文字化，且在學習單上也有提示，但學生所呈現的結果並不理想。學生一般能夠發現樣式，並可以將其發現的樣式寫成數學式，諸如：$a=c\times d$ 、 $b=c\times e\cdots$等，但要將其數學概念寫出，如：釘子數是路徑數的倍數，釘子數與間隔數的最大公因數是路徑數…等的學生就不多了。研究者建議，應該在教學實驗前，先行複習相關數學觀念，並在教學過程中，不時有一些數學概念的提示與引導，啓發學生的解題思維。且在平日數學教學上，對於學生數學寫作能力，應多花時間培養。將寫作融入數學課室中是培養學生發展數學概念性理解的方法之一（Countryman, 1992）。Reys（1994）也指出透過數學寫作可以有效地幫助學生歸納、組織與統整數學概念與技能。

（三）教學計畫與準備應更周延

本次研究在電腦教室實施，事先與電腦組長請教整體硬體設備的狀況，並事先經過測試，一切準備就緒。但是當教學活動開始實施，仍遭遇到一些問題。例如伺服器的軟體下載有同時間流量的限制，導致學生在軟體取得上，延誤了一些時間，這是研究者事先未能防範的問題，活動進行有些許延誤。研究者馬上調整教學計畫的時間配置，使學生心理上不至恐慌，並經由配套的措施，讓教學活動順利進行。研究者檢討，對於硬體設備可能遭遇的狀況，應該有更多的思考與準備，諸如多一些備用電腦，或商請其他人員搭配協助等等，期使教學活動能更加流暢、順利。

綜合以上的觀察，我們可以發現開放式問題教學模式對學生數學學習上有正面的幫助，學生接受到不同以往的教學模式，從一開始不適應，到能自行探索發現，並經過討論、分享的過程，慢慢樂在其中也歡喜體驗這樣的教學經驗。學生普遍認爲這樣的學習活動是很不一樣，也從中得到很多收穫，期待有下一次的類似教學活動。開放式問題教學活動，實行上難免有些困難，例如：時間上的掌控，課室中學生的秩序，老師追問的技巧，題目的選取與設計…等，雖然困難重重，但不斷的檢討與改進，就能慢慢發揮教學的效能。研究者認爲，因爲升學主義，課業的進度壓力，或許無法經常性的實施開放式問題教學活動，但適時在學期中安排一到兩次類似活動，不僅可以活化學生的學習興趣，也能刺激學生的思考。

第二節　教學實施後學生產生的解題想法

教學的兩節課，共100分鐘。研究者搭配學習單，對學生進行開放式問題的探索教學。以下針對教學活動實施後，兩班學生所產生的解題想法，逐一整理與討論。

一、學生接受圓形釘板的開放式問題探索活動後之成果

（一）老師猜測與學生樣式發現的整理

依據文獻中，學者徐斌艳（2000）的建議，編製教學計畫須列出學生對問題可能的答案。表 4-2-1 是在教學活動實施之前老師猜測學生在教學活動中學生可能的樣式發現與學生經過教學活動實施後實際的樣式發現的整理。

國二學生總共有 9 個樣式發現，國一學生也有 9 個樣式發現。兩個年級學生的樣式發現中，國二學生與國一學生樣式發現的差異在於國二學生多發現了短除法的應用，而國一學生多發現了最小公倍數。其餘發現的項目均相同。但與老師的 12 個猜測中，有兩個猜測都沒有人發現，少的是第 2 個與第 8 個。

第 2 個猜測是「固定釘子數，檢驗所有間隔數，若路徑數均爲 1，此釘子數必爲質數。」這項目兩班學生均無人發現，研究者認爲質數的概念在小學均已教授過，沒有學生發現這個現象，可能的原因有二。其一，檢驗質數需要每個間隔數逐一連接，學生在不斷探索中，要能觀察到此現象，費時費力，不是相當有耐性且細心的學生不易找到此規律；其二，在一開始介紹軟體操作說明時，研究者並沒有特別強調

質數與合數的部分，期望學生透過自行探索發現。因爲沒有確切的指引，可能未能引導學生發現此現象。

第 8 個猜測是「如果間隔數是釘子數的因數，則每一條路徑上的點，構成一個同餘類。」此項目也沒有學生發現。研究者認爲，因爲同餘類在國中課程中沒有介紹，學生不清楚這樣的現象與數學概念之間的關連，因此可以理解學生未能發現此樣式。但這也是開放式問題教學模式的迷人之處，對於一些未曾學習過的樣式，教師應多鼓勵學生將新發現，嘗試著以自己的話說出來，不一定要像數學家能有嚴謹完整的證明，但是清楚、有條理的說明白，相信這樣的訓練對於解題思維的提升有很大的幫助。

表 4-2-1 老師猜測與學生實際樣式發現的項目整理

我們假設『釘子數為 a ，間隔數為 b ，路徑數為 c ，路徑上的點數為 d ，繞經的圈數為 e 』。

	老師猜測學生可能的樣式發現	國二學生的樣式發現	國一學生的樣式發現
1	釘子數＝路徑數×路徑上的點數。（正比與反比） $a=c\times d$	✓	✓
2	固定釘子數，檢驗所有間隔數，若路徑數均為 1，此釘子數必為質數。		
3	路徑數與路徑上的點數必為釘子數的因數；反之，釘子數必為路徑數與路徑上點數的倍數。	✓	✓
4	路徑數是釘子數與間隔數的最大公因數 $(a,b)=c$	✓	✓
5	只要路徑數是 1，釘子數與間隔數必互質。 $(a,b)=1=c$	✓	✓
6	釘子數、間隔數、路徑數、路徑上點數、繞經圈數有一定關連。（短除法） $\begin{array}{l} c\,\underline{)\;a\quad b} \\ \quad\;\; d\quad e \end{array}$	✓	
7	如果固定釘子數，兩個間隔數相加等於釘子數，則此兩圖形相同。	✓	✓
8	如果間隔數是釘子數的因數，則每一條路徑上的點，構成一個同餘類。		
9	間隔數越接近釘子數的一半，所呈現之裡面的圖形越小；反之，越大。	✓	✓
10	間隔數＝路徑數×繞經的圈數。 $b=c\times e$	✓	✓
11	釘子數×繞經圈數＝間隔數×路徑上的點數。 $a\times e=b\times d$	✓	✓
12	釘子數與間隔數的最小公倍數＝路徑數、路徑上點數與繞經圈數的最小公倍數（ $[a,b]=[c,d,e]$ ）。		✓

（二）學生個人學習單的解題想法

在經過了圓形釘板的開放式問題探索活動後，研究者蒐集了104位學生的個人學習單。透過研究者教學現場的紀錄、事後DV錄影的觀察與學生個人學習單的整理，討論學生個人的解題想法。

1. 因數與倍數、正比與反比

「發現 1 ：釘子數＝路徑數×路徑上的點數。 $a = c \times d$ 」

「發現 3 ：路徑數與路徑上的點數必爲釘子數的因數；反之，釘子數必爲路徑數與路徑上點數的倍數。」

「發現 10：間隔數＝路徑數×繞經的圈數。 $b = c \times e$ 」

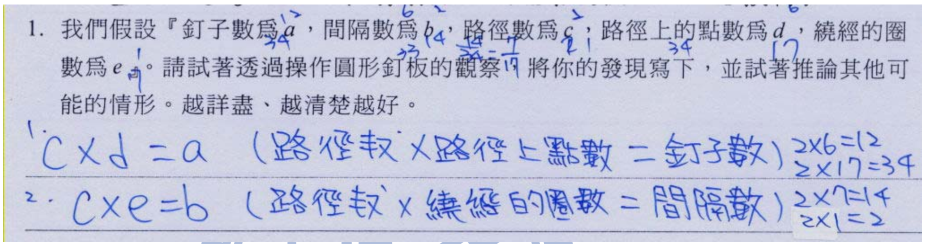
「發現 11：釘子數×繞經圈數＝間隔數×路徑上的點數。

$a \times e = b \times d$ 」

我們將以上這四個樣式發現一起討論。這四個樣式發現主要的數學概念是因數與倍數、正比與反比。寫出了 $a = c \times d$ 、 $b = c \times e$ 的式子，也可能發現 $a \times e = b \times d$ 關係式。

學生的樣式發現如下：

※S7140505 的樣式發現


1. 我們假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

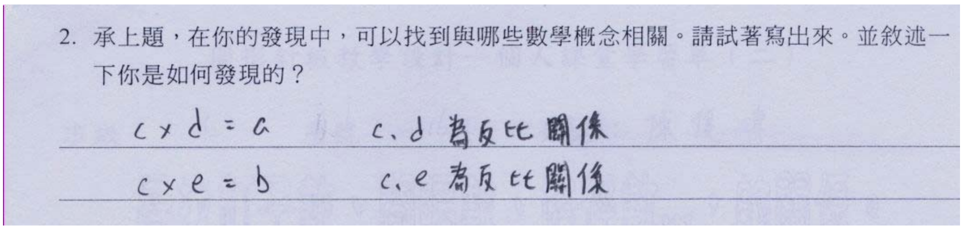
1. $C \times d = a$ （路徑數 x 路徑上點數 = 釘子數） $2\times6=12$ $2\times17=34$

2. $C \times e = b$ （路徑數 x 繞經的圈數 = 間隔數） $2\times7=14$ $2\times1=2$

圖 4-2-1 單 S7140505

S7140505單純的發現 $a = c \times d$ 與 $b = c \times e$ 關係，相關的數學概念並沒有提到。

※S8160506 的樣式發現


2. 承上題，在你的發現中，可以找到與哪些數學概念相關。請試著寫出來。並敘述一下你是如何發現的？

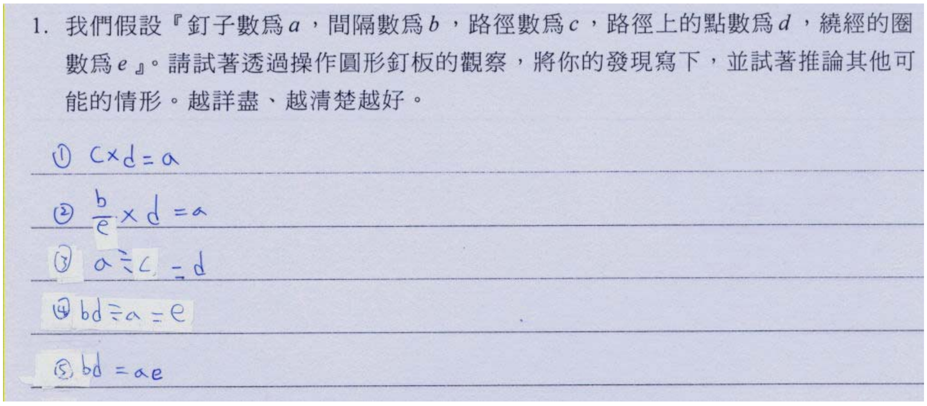
$c \times d = a$　c、d 為反比關係

$c \times e = b$　c、e 為反比關係

圖 4-2-2 單 S8160506

S8160506清楚的把 $a = c \times d$ 與 $b = c \times e$ 關係寫出，並提到反比的概念。

※S7270505 的樣式發現



1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

① $c \times d = a$

② $\frac{b}{e} \times d = a$

③ $a \div c = d$

④ $bd \div a = e$

⑤ $bd = ae$

圖 4-2-3 單 S7270505

S7270505完整的把 $a = c \times d$ 、 $b = c \times e$ 、 $a \times e = b \times d$ 關係都寫出來，但在數學概念的方面卻隻字未提。

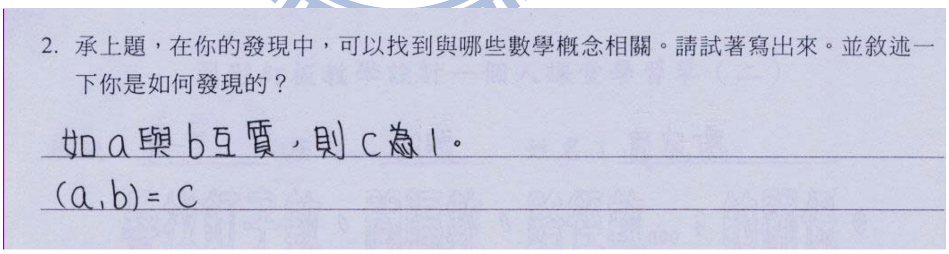
2. 最大公因數與互質

「發現 4 ：路徑數是釘子數與間隔數的最大公因數。$(a,b) = c$ 」

「發現 5 ：路徑數是 1，釘子數與間隔數必互質。$(a,b) = 1 = c$ 」

這兩個樣式發現的數學概念是最大公因數與互質。兩者的基本概念很類似，主要判斷是路徑數是否爲 1（ c 是否爲 1)。學生的樣式發現如下：

※S7390505 的樣式發現（一）



2. 承上題，在你的發現中，可以找到與哪些數學概念相關。請試著寫出來。並敘述一下你是如何發現的？

如 a 與 b 互質，則 c 為 1。

$(a,b) = c$

圖 4-2-4 單 S7390505（一）

S7390505清楚的寫出最大公因數與互質的發現。

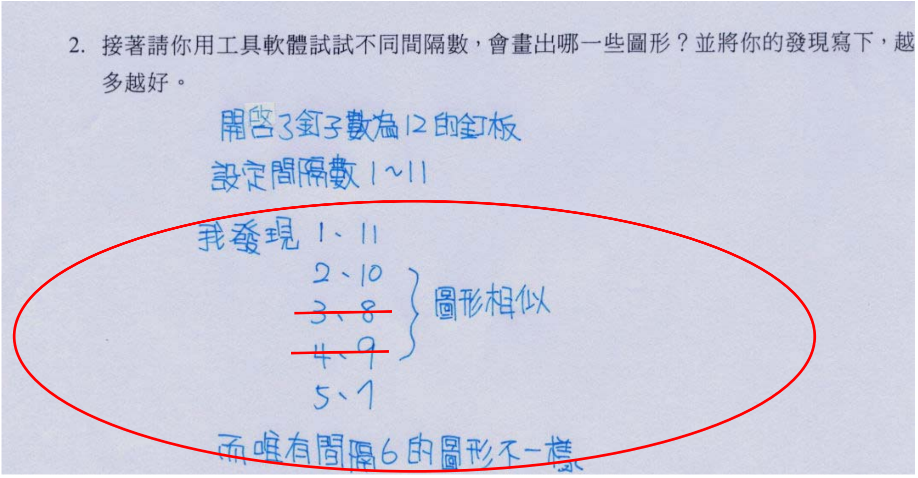
3. 圖形的變化

「發現 7 ：如果固定釘子數，兩個間隔數相加等於釘子數，則此兩圖形相同。」

「發現 9 ：間隔數越接近釘子數的一半，所呈現之裡面的圖形越小；反之，越大。」

以上兩個樣式發現是圖形的變化。學生的樣式發現如下：

※S7010505 的樣式發現



2. 接著請你用工具軟體試試不同間隔數，會畫出哪一些圖形？並將你的發現寫下，越多越好。

開啟了釘子數為12的釘板

設定間隔數 1~11

我發現 1、11

2、10

~~3、8~~

~~4、9~~

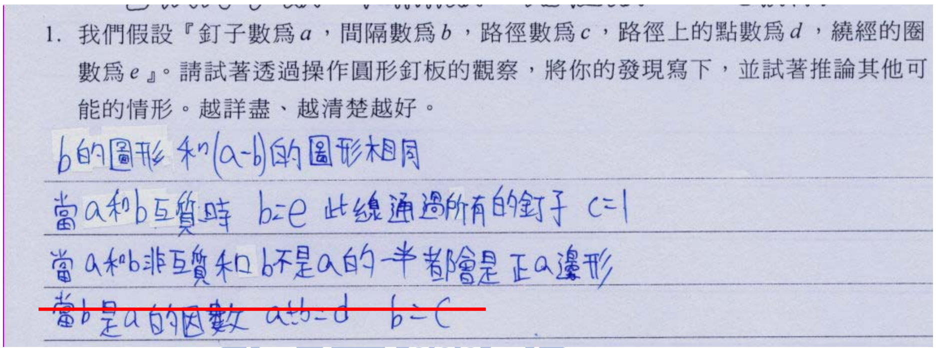
5、7

圖形相似

而唯有間隔6的圖形不一樣

圖 4-2-5 單 S7010505

※ S7030505 的樣式發現



1. 我們假設『釘子數為 *a*，間隔數為 *b*，路徑數為 *c*，路徑上的點數為 *d*，繞經的圈數為 *e*』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

b的圖形 和(a-b)的圖形相同

當a和b互質時 b=e 此線通過所有的釘子 c=1

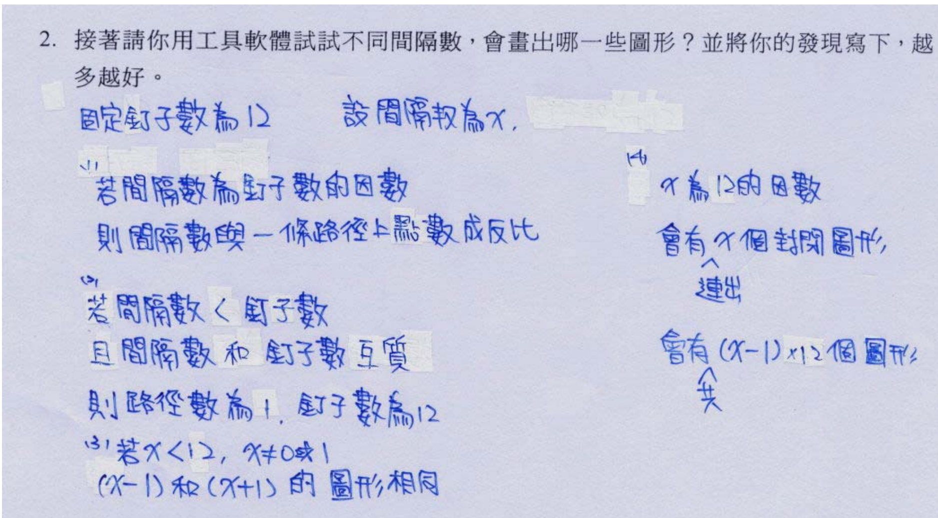
當a和b非互質和b不是a的一半都會是正a邊形

~~當b是a的因數 a÷b=d b=c~~

圖 4-2-6 單 S7030505

S7030505不僅發現圖形的變化，關於互質與因數的概念都有提及。

※S7070505 的樣式發現



2. 接著請你用工具軟體試試不同間隔數，會畫出哪一些圖形？並將你的發現寫下，越多越好。

固定釘子數為12　設間隔數為x.

(1) 若間隔數為釘子數的因數

則間隔數與一條路徑上點數成反比

(2) 若間隔數 < 釘子數

且間隔數和釘子數互質

則路徑數為1，釘子數為12

(3) 若x<12，x≠0或1

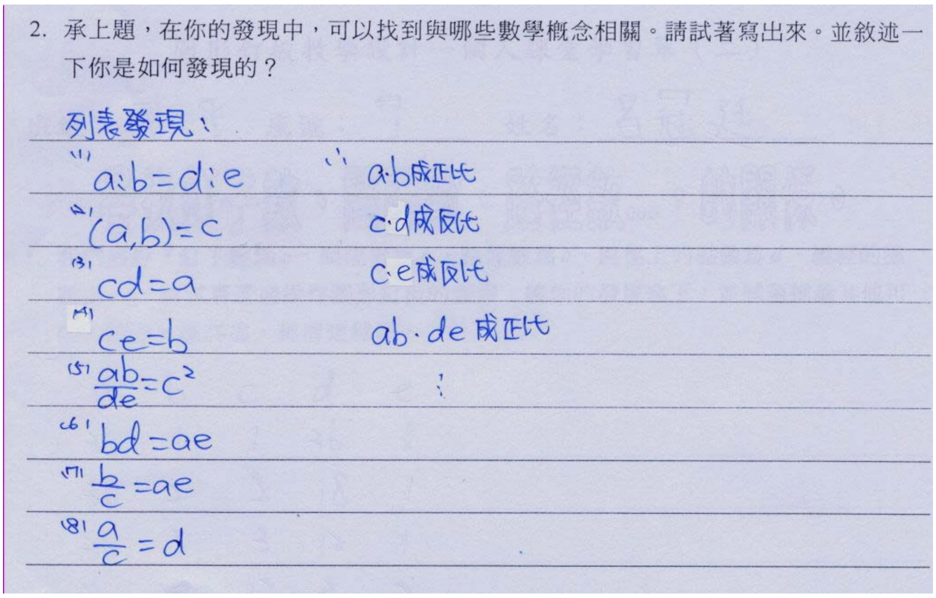
(x−1)和(x+1)的圖形相同

(4) x為12的因數

會有x個封閉圖形

連出

會有(x−1)×12個圖形



2. 承上題，在你的發現中，可以找到與哪些數學概念相關。請試著寫出來。並敘述一下你是如何發現的？

列表發現：

(1) $a:b=d:e$ (1) $a \cdot b$成正比

(2) $(a,b)=c$ $c \cdot d$成反比

(3) $cd=a$ $c \cdot e$成反比

(4) $ce=b$ $ab \cdot de$ 成正比

(5) $\frac{ab}{de}=c^2$ ⋮

(6) $bd=ae$

(7) $\frac{b}{c}=ae$

(8) $\frac{a}{c}=d$

圖 4-2-7 單 S7070505

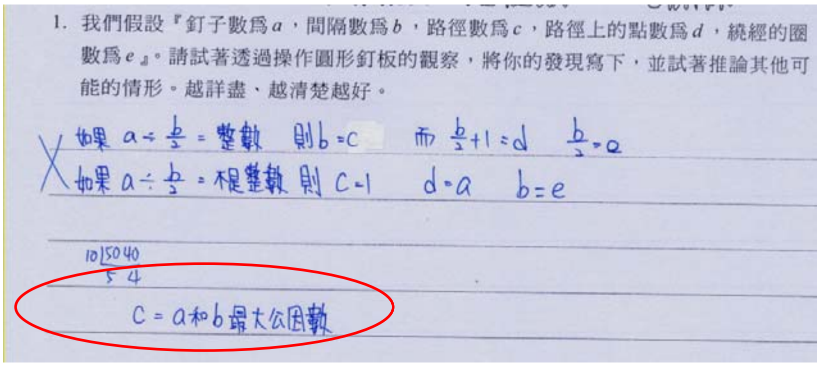
S7070505有許多樣式發現，在此教學活動中是發現最多的一位學生。他發現了因數與倍數、正比與反比、圖形的變化、最大公因數與互質等數學概念，且描述清楚，在DV錄影的分組討論觀察中，發現該生具有領導統御的特質，可以很快的集合同學進入討論議題。該生的上學期數學學業成績為班級第四名。從本研究顯示，這樣的探索活動對未來數學科展人才的選取有相當的助益。

4. 短除法

「發現 6 ：釘子數、間隔數、路徑數、路徑上點數、繞經圈數有一定關連。（短除法） $\begin{array}{r|ll} c) & a & b \\ \hline & d & e \end{array}$」

短除法是國小課程就教授過的數學概念，但在此教學實驗中，發現的學生數很少，可能因為涉及的變數太多，學生不易發覺。以下是學生的樣式發現。

※S8130506 的樣式發現


1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

如果 $a \div \frac{b}{2}$ = 整數 則 $b=c$ 而 $\frac{b}{2}+1=d$ $\frac{b}{2}=a$

如果 $a \div \frac{b}{2}$ = 不是整數 則 $c=1$ $d=a$ $b=e$

10|50 40
5 4

c = a 和 b 最大公因數

圖 4-2-8 單 S8130506

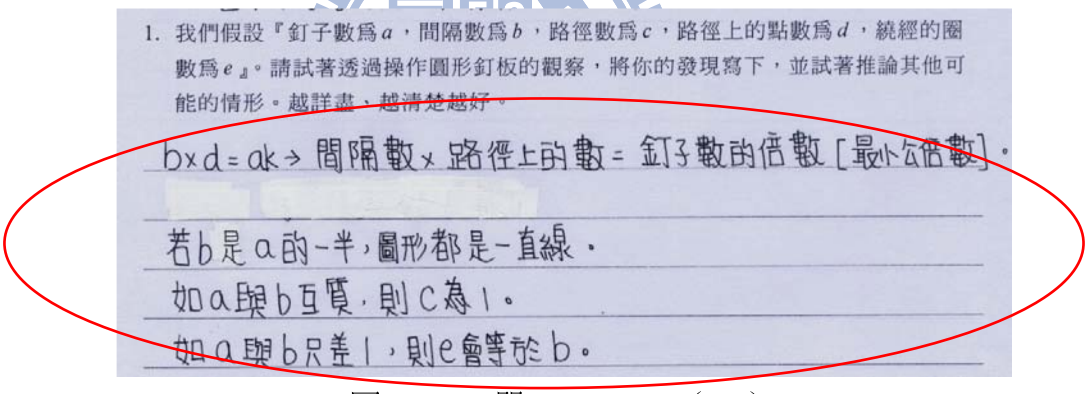
S8130506使用了短除法，也發現了最大公因數。

5. 最小公倍數

「發現 12 ：釘子數與間隔數的最小公倍數＝路徑數、路徑上點數與繞經圈數的最小公倍數（$[a,b]=[c,d,e]$）。」

這個樣式發現是因數與倍數的應用，學生的樣式發現如下：

※S7390505 的樣式發現（二）


1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

$b \times d = ak$ → 間隔數 × 路徑上的數 = 釘子數的倍數 [最小公倍數]。

若 b 是 a 的一半，圖形都是一直線。

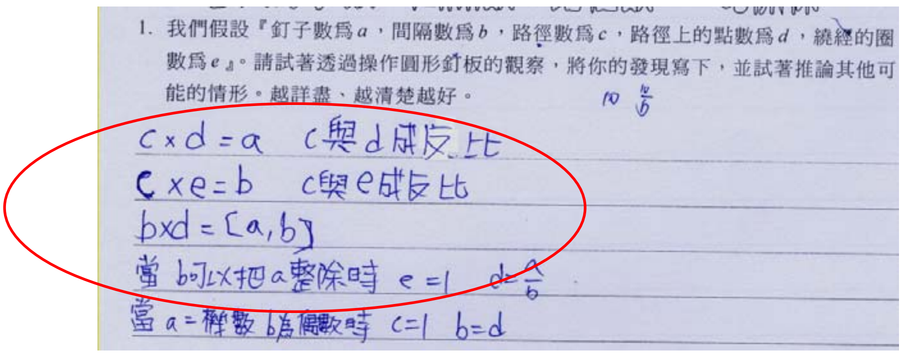
如 a 與 b 互質，則 c 為 1。

如 a 與 b 只差 1，則 e 會等於 b。

圖 4-2-9 單 S7390505（二）

S7390505清楚的寫出互質的發現，且最小公倍數的概念也呈現。

※S7300505 的樣式發現


1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

$c \times d = a$ c 與 d 成反比

$c \times e = b$ c 與 e 成反比

$b \times d = [a,b]$

當 b 可以把 a 整除時 $e=1$ $d=\frac{a}{b}$

當 a = 質數 b 為偶數時 $c=1$ $b=d$

圖 4-2-10 單 S7300505

S7300505寫出了反比與最小公倍數的概念。

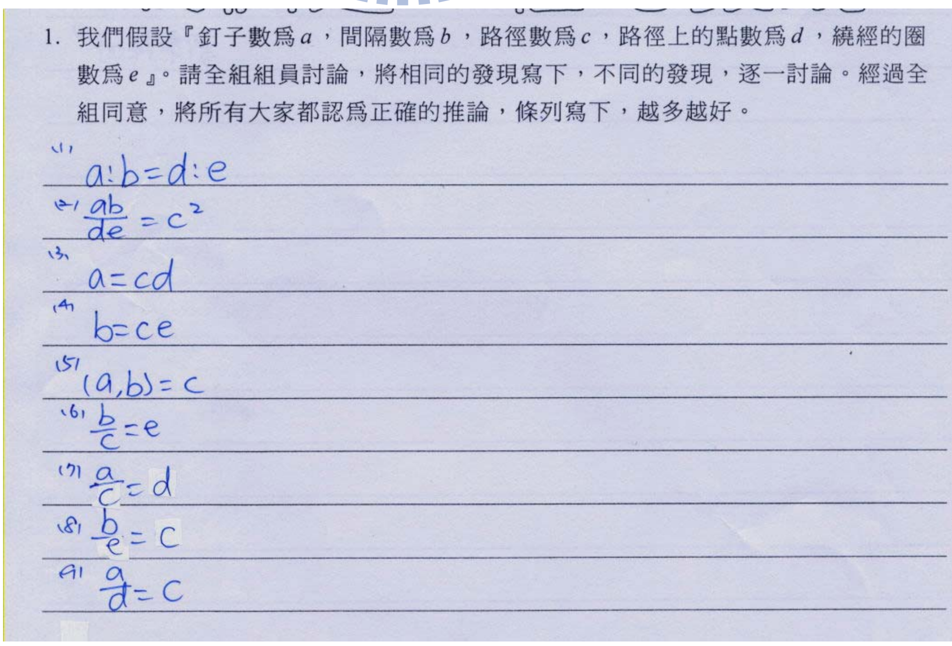
從以上學生的學習單顯示，對於樣式的發現，學生較能清楚的寫出，但對於相關的數學概念連結，只有少數的同學能提到。NCTM（1989, 2000）曾指出，數學課程應該包含語言和表徵能力的發展以溝通數學想法，故所有學生應能夠反應、澄清他們對於數學概念及想法的思考過程，並能以口述及寫作的方式將數學想法表達出來。而在許多的研究報告中也指出，溝通是數學教育的一個主要部分，而其中也特別強調在數學學習中「數學寫作」應該被視為必要的溝通技巧之一（Lindquist & Elliott, 1996; NCTM, 1989, 2000）。因此加強學生平日數學寫作的練習是有必要的。

（三）學生團體學習單的解題想法

本研究對象為一班國一學生，一班國二學生，兩班均為 52 人。學生分組依據為上學期數學成績，分組方式採異質性分組，每組 5-6 人，每班均分成十組。在分組活動中，各組有一份團體學習單，其內容與個人學習單雷同，旨在讓學生相互討論與意見交流，透過討論，學生學習歸納分析的能力，並培養傾聽他人意見的雅量進而延續探索研究的興趣。在經過分組討論後，研究者蒐集了 20 組學生的團體學習單。透過團體學習單與事後 DV 錄影的觀察，討論學生團體的解題想法。

1. 國一學生團體討論的解題想法

國一學生的團體討論有兩組的結果較為豐富，研究者將兩組的團體學習單一一列出。如圖 4-2-11，圖 4-2-12。


1. 我們假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。請全組組員討論，將相同的發現寫下，不同的發現，逐一討論。經過全組同意，將所有大家都認為正確的推論，條列寫下，越多越好。

(1) $a:b=d:e$

(2) $\frac{ab}{de}=c^2$

(3) $a=cd$

(4) $b=ce$

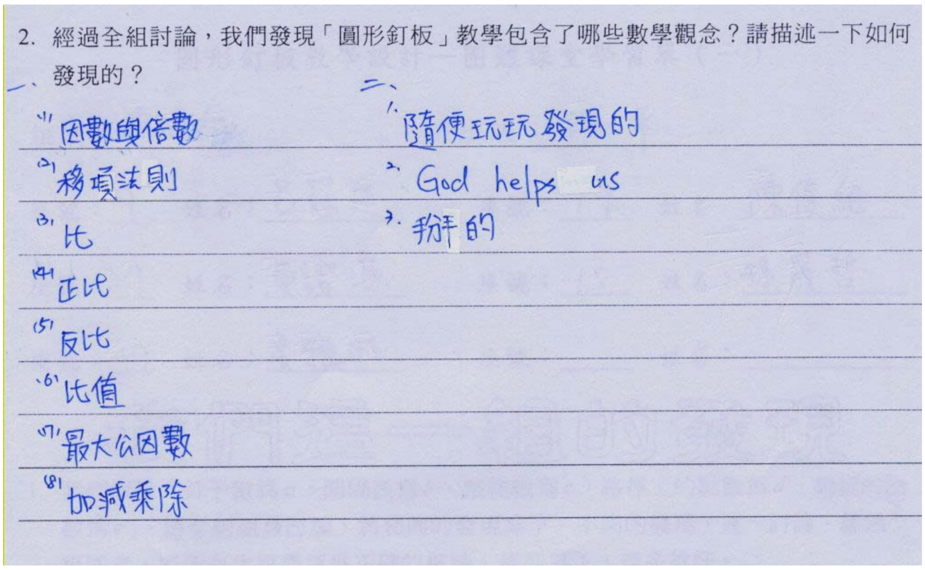
(5) $(a,b)=c$

(6) $\frac{b}{c}=e$

(7) $\frac{a}{c}=d$

(8) $\frac{b}{e}=c$

(9) $\frac{a}{d}=c$

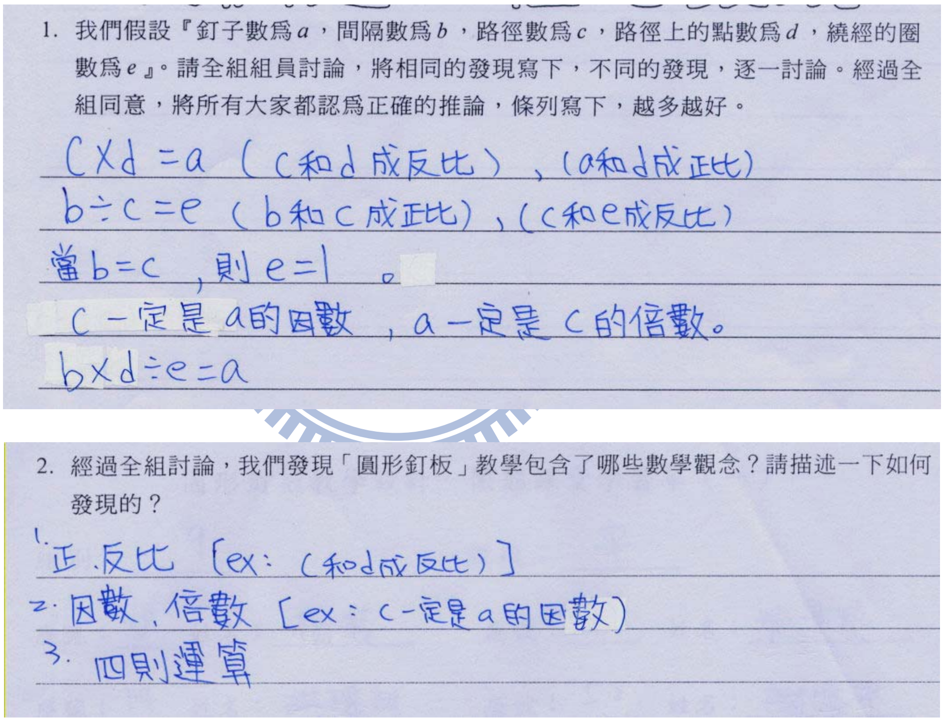


2. 經過全組討論，我們發現「圓形釘板」教學包含了哪些數學觀念？請描述一下如何發現的？

一、
(1)因數與倍數
(2)移項法則
(3)比
(4)正比
(5)反比
(6)比值
(7)最大公因數
(8)加減乘除

二、
1.隨便玩玩發現的
2. God helps us
3. 掰的

圖 4-2-11 國一學生第四組的樣式發現



1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請全組組員討論，將相同的發現寫下，不同的發現，逐一討論。經過全組同意，將所有大家都認爲正確的推論，條列寫下，越多越好。

$c \times d = a$（c和d成反比），（a和d成正比）
$b \div c = e$（b和c成正比），（c和e成反比）
當 $b=c$，則 $e=1$。
c一定是a的因數，a一定是c的倍數。
$b \times d \div e = a$

2. 經過全組討論，我們發現「圓形釘板」教學包含了哪些數學觀念？請描述一下如何發現的？

1. 正.反比 [ex:（c和d成反比）]
2. 因數.倍數 [ex:c一定是a的因數）
3. 四則運算

圖 4-2-12 國一學生第九組的樣式發現

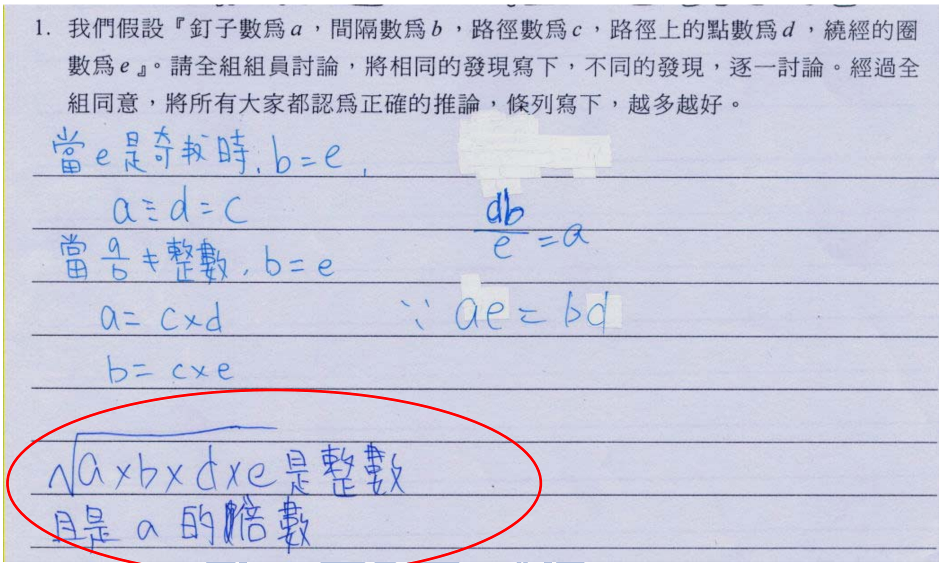
列出這兩組團體學習單，主要意旨在顯示國一學生經過團體討論後，不僅能將發現的式子完整的寫出，且能清楚的寫出數學概念，這與個人學習單有明顯的差異。個人學習單的書寫，幾乎都是以寫出數學算式爲主，極少部分的同學才把相關數學概念寫出來。經過同儕討論，相互的驗證，不僅數學式子條列清楚，相關概念也描述詳細。例如：學生寫到 $c \times d = a$，並且把正比與反比，因數與倍數的概念都有提到。

2. 國二學生團體討論的解題想法

由 DV 錄影與觀察員的紀錄顯示，國二學生在團體討論時比起國一學生的表現，稍嫌遜色。

※小組討論時，有部分學生仍單兵作戰，需經提醒才加入討論。　＜觀陳 0506＞

在團體學習單的樣式發現整理上，也顯示如此。但是國二學生團體學習單中，有兩組的部分結果與國一學生的樣式發現稍有不同，研究者將兩組的團體學習單列出。如圖 4-2-13 及 4-2-14。


1. 我們假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。請全組組員討論，將相同的發現寫下，不同的發現，逐一討論。經過全組同意，將所有大家都認為正確的推論，條列寫下，越多越好。

當 e 是奇數時, $b=e$,

$a=d=c$

$\frac{db}{e}=a$

當 $\frac{a}{b}\neq$ 整數, $b=e$

$a=c\times d$

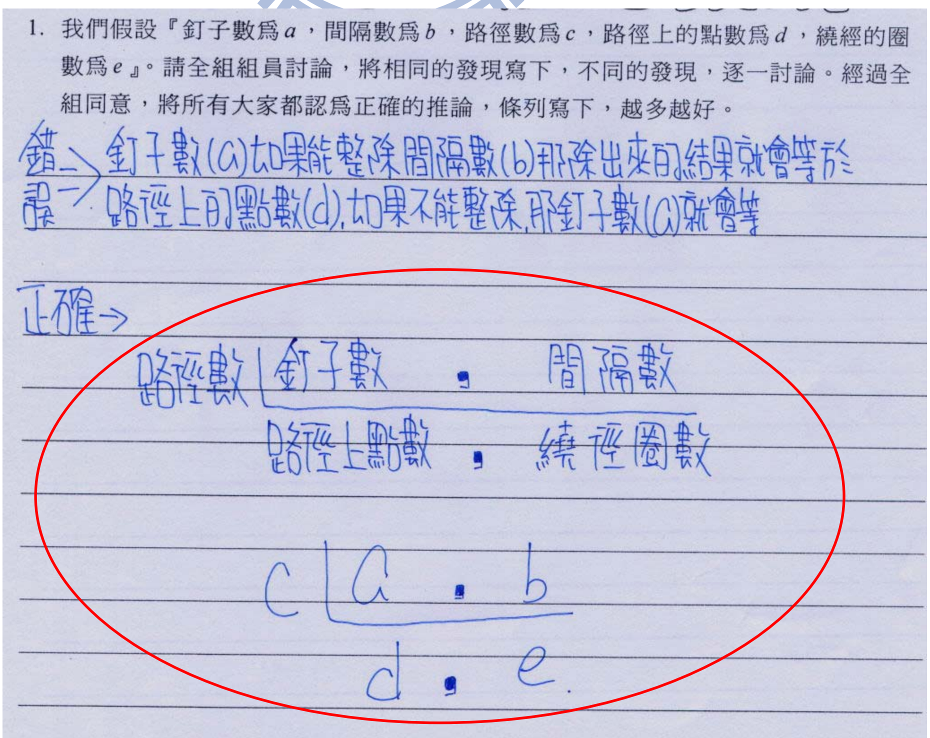
$\because ae=bd$

$b=c\times e$

$\sqrt{a\times b\times d\times e}$ 是整數

且是 a 的倍數

圖 4-2-13 國二學生第三組的樣式發現


1. 我們假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。請全組組員討論，將相同的發現寫下，不同的發現，逐一討論。經過全組同意，將所有大家都認為正確的推論，條列寫下，越多越好。

錯誤→ 釘子數(a)如果能整除間隔數(b)那除出來的結果就會等於路徑上的點數(d),如果不能整除,那釘子數(a)就會等

正確→

路徑數 | 釘子數 : 間隔數

路徑上點數 : 繞徑圈數

c | a : b

d : e

圖 4-2-14 國二學生第六組的樣式發現

國二學生第三組的樣式發現中有利用到根號的表示，第六組的樣式發現中，正確的寫出短除法。這與國一學生的發現有明顯不同。對於國一學生而言，因爲尚未學習到根號課程，所以不會發現，能夠理解。但是短除法屬於國小課程部分，國一學生未能發現，值得探討。

二、學習單的整理分析

實施教學活動的兩節課，共100分鐘。研究者搭配學習單，對學生進行開放式問題的教學。將蒐集的個人與團體學習單做一整理，整理如下：

（一）國一學生與國二學生個人與團體樣式發現項目數量的整理

國一學生與國二學生個人與團體樣式發現項目數量的整理如表 4-2-2 及表 4-2-3。由以下兩個表中，我們發現國一學生與國二學生經過此教學活動有許多現象值得探討。

1. 國一學生總共發現樣式次數累積爲 90 次，比國二學生發現樣式的累積 75 次還要多 15 次，研究者發現國一學生比國二學生多的樣式發現部分幾乎都是與「正比」或「反比」相關的部分，可能是國一學生剛學習過此單元，記憶猶新。在探索發現樣式的次數累積自然有優勢。

2. 在整理團體分組討論的學習單時，兩個班級的團體分組樣式發現都比原本學生個人樣式發現項目的數量少了很多，研究者認爲原因有二。第一，因爲小組討論時間較爲緊迫，小組討論尚未能將所有組員的發現一一驗證釐清，因此不敢貿然將發現寫下，導致樣式發現次數減少。第二，部分學生未能將自己的樣式發現在小組討論時提出一併討論，可能對自己的信心不足，致使團體發現樣式不多。

3. 兩個班級的學習單中，發現數目最多的部份是「因數與倍數」與「圖形的變化」兩部分，其餘的發現數目都不多，尤其對於「互質」與「最大公因數」幾乎都少於 5 人發現。研究者分析，開放式問題的教學模式對於學生而言，是一個新的教學模式，學生剛開始接觸，難免感到焦慮與不安，因此在探索上信心不足，並不能確定自己的發現是正確的。學生能夠察覺圖形的變化，應該是資訊科技融入的原因。Skemp（1987）指出，視覺符號系統是一種空間性質的抽象，傾向個人思考，但具有統合功能，可以顯示整個概念結構的外貌，且同時傳達很多概念，讓學習的感覺較直觀具體、有探索性。而動態的視覺效果更可讓學生在認知上省去處理資訊的負擔，並增

進認知的想像力，藉由直接操作物件的結果，可以測試一些假設，或尋求行動後所產生的不變性，進而建立高階抽象的代數表徵。此種有意義的學習，跳脫灌輸與模仿等傳統形式的學習，透過多元表徵的相關性理解，其數學資源庫（resource）的建立更形豐富穩固，對於問題解決的策略，有著更多的選擇與聯結 (謝哲仁，2002)。圓形釘板數學電子軟體，可以設定釘子數從 2 到 50，間隔數也可以自訂，整個畫面連接起來，圖形很美觀，學生易於發現圖形的變化。對於其他樣式發現數目的缺乏，若能有更充裕的時間，應可改善。顯見實施此類活動要有充足的時間。

九年一貫的數學能力指標在解題能力上特別提到，「能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。蒐集這些資料，觀察這些資料有什麼規則，猜測這些規則的原理和關係，用你猜測的規則或原理來檢驗那些還沒檢查過的案例是不是都如此，然後推演、驗證跟論證。」（教育部，2001）可見猜測與驗證的能力是做爲解題能力的基礎，學生在此方面仍須加強。

表 4-2-2 國一學生個人與團體樣式發現項目數量的整理

國一學生的發現			52 位學生個人和團體觀察結果的摘要										
觀察發現	規則編號	學生的觀察(規則)	團體組別編號										學生的發現數目
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
正比與反比	1	釘子數＝路徑數×路徑上的點數。 $a=c\times d$				＊	＊				＊	＊	10
因數與倍數	2	路徑數與路徑上的點數必為釘子數的因數；反之，釘子數必為路徑數與路徑上點數的倍數。	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	36
最大公因數	3	路徑數是釘子數與間隔數的最大公因數 $(a,b)=c$				＊							2
互質	4	只要路徑數是 1，釘子數與間隔數必互質。$(a,b)=1=c$							＊				4
圖形變化	5	如果固定釘子數，兩個間隔數相加等於釘子數，則此兩圖形相同。											7
	6	間隔數越接近釘子數的一半，所呈現之裡面的圖形越小；反之，越大。											11
正比與反比	7	間隔數＝路徑數×繞經的圈數。 $b=c\times e$			＊	＊	＊		＊		＊		14
等量公理	8	釘子數×繞經圈數＝間隔數×路徑上的點數。 $a\times e=b\times d$			＊	＊	＊		＊	＊	＊	＊	4
最小公倍數	9	釘子數與間隔數的最小公倍數＝路徑數、路徑上的點數與繞經圈數的最小公倍數（$[a,b]=[c,d,e]$）。											2
各組發現的規則總數			1	1	3	5	4	1	4	2	4	3	90

表 4-2-3 國二學生個人與團體樣式發現項目數量的整理

國二學生的發現			52 位學生個人和團體觀察結果的摘要										
觀察發現	規則編號	學生的觀察(規則)	團體組別編號										學生的發現數目
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
正比與反比	1	釘子數＝路徑數×路徑上的點數。 $a = c \times d$											4
因數與倍數	2	路徑數與路徑上的點數必爲釘子數的因數；反之，釘子數必爲路徑數與路徑上點數的倍數。		＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊		35
最大公因數	3	路徑數是釘子數與間隔數的最大公因數 $(a,b) = c$										＊	2
互質	4	只要路徑數是 1，釘子數與間隔數必互質。$(a,b) = 1 = c$										＊	1
短除法	5	釘子數、間隔數、路徑數、路徑上點數、繞經圈數有一定關連。（短除法） $c \,\underline{)\, a \quad b}$ $d \quad e$						＊					1
圖形變化	6	如果固定釘子數，兩個間隔數相加等於釘子數，則此兩圖形相同。									＊	＊	7
	7	間隔數越接近釘子數的一半，所呈現之裡面的圖形越小；反之，越大。											15
正比與反比	8	間隔數＝路徑數×繞經的圈數。 $b = c \times e$	＊	＊	＊	＊	＊	＊		＊			6
等量公理	9	釘子數×繞經圈數＝間隔數×路徑上的點數。 $a \times e = b \times d$			＊	＊	＊						4
各組發現的規則總數			1	2	3	3	3	3	1	2	2	3	75

（二）實施「圓形釘板的開放式問題教學模式」之結果

在傳統教學中，學生被要求要知道解答同一個問題的不同方法，而不是專注在找出問題的答案上。從某種意義上來說，學生面對和處理的是開放式問題，因此要求的不應是問題的答案，而是得到答案的方法。在開放式問題的教學模式下，如果一個問題有許多正確解答，在解題過程中就能讓學生得到發現新東西的體驗。這可以藉著整理學生以前經驗所得，自身的知識、能力或思考方法來達成。

在此次的開放式教學活動中，學生接觸了圓形釘板數學電子軟體的輔具，透過軟體工具幫助學生對數概念的探索，配合學習單，研究者採用開放式問題的教學模式，讓學生主動學習，並適時的給予引導。從學習單的整理與錄影的觀察中發現，學生普遍感受到主動學習與傳統教學的差異，並且在自我探索上與小組討論中有了許多寶貴的經驗與心得。以下爲個人學習單樣式發現數目的統計，如表4-2-4。

表 4-2-4 國一學生與國二學生樣式發現數目的百分比

百分比 / 發現個數	國一學生樣式發現個數/全部國一學生樣式發現個數之百分比	國二學生樣式發現個數/全部國二學生樣式發現個數之百分比
0 個	13.5%	11.5%
1 個	40.4%	44.2%
2 個	21.2%	36.5%
3 個	15.4%	5.8%
4 個	7.7%	0.0%
5 個	0.0%	1.9%
6 個	0.0%	0.0%
7 個	1.9%	0.0%

兩班學生都有超過 1/10 的學生沒有樣式發現，透過 DV 錄影與學習單的觀察發現這些學生在探索中用了很多時間在觀察，但沒有紀錄觀察的結果，或是推論結果並不正確，因此最後判定發現是 0 個；兩班學生中，2/5 的學生有 1 個樣式發現，其樣式發現數目較少的原因也幾乎是論述不完整或錯誤。這兩班的學生在此次的開放式教學活動中，超過 60%的學生樣式的發現數目是落在 1-2 個。國一有一位學生發現了 7 個樣式，國二有一位學生發現了 5 個樣式，這兩位學生經研究者了解，上學期數學學業成績都在班級前 30%。研究者推論，該開放式教學活動對於數學學業成績較佳者，應該會有多一些樣式的發現。

第三節　教學實施後不同年級學生解題表現的異同

本節針對兩個不同年級的國中學生，接受了圓形釘板的開放式教學探索活動後，所產生解題表現的異同，作一整理與討論。

一、個人學習單部分

（一）相同的部分

1. 兩個年級的學生對於「質數」的概念與「同餘類」的概念均無人發現。
2. 兩個年級的學生在個人學習單的描述上都很簡略，能夠完整且清楚的把發現的現象與數學概念連結得很好的同學不多。大部分學生個人學習單的書寫，都是零碎的，或是語意不甚清楚，甚至錯別字也很多。
3. 研究者在教學現場的紀錄與 DV錄影的觀察中發現，兩班學生在圓形釘板的教學歷程中，使用軟體中文字記錄模式與資料表功能協助觀察的頻率都很高，顯示學生對軟體的操作熟悉且知道利用表單尋找規律。如圖4-3-1。

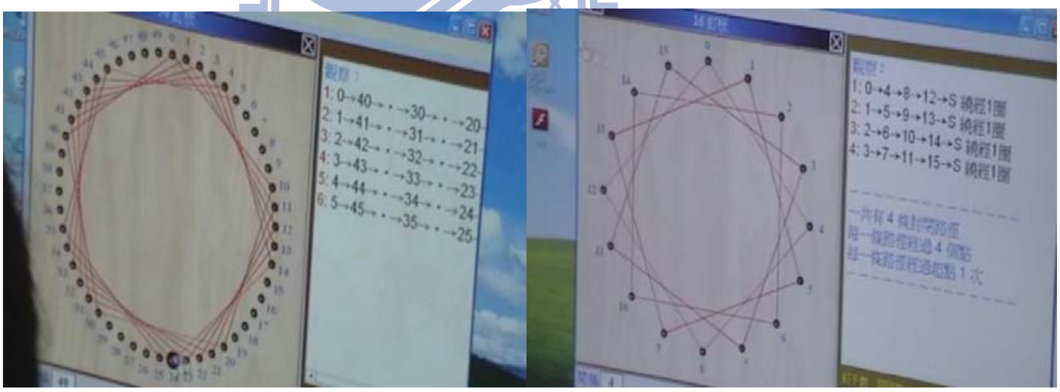
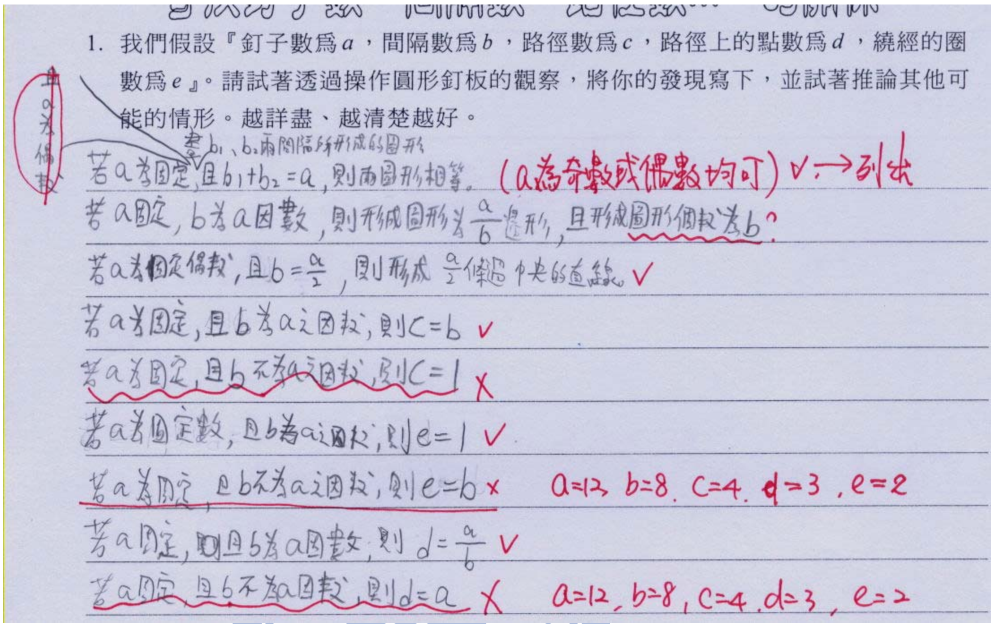


圖 4-3-1 學生利用表單找規律

4. 由個人學習單樣式發現的項目整理中，兩個年級的學生每班都有近七成的學生發現了「因數與倍數」的關係，顯示此次開放式教學活動的主要數學概念，學生能掌握到。但在其他相關「數」的概念探索上，兩班學生的樣式發現都較缺乏，可見這個問題還可以有更多探索的空間。

5. 經由學習單的整理，兩班學生在觀察的推論上，驗證的能力有待加強。學生觀察到許多現象，但是在學習單上呈現出許多錯誤的推論或不完整的猜測結果。如圖 4-3-2。學生以討論方式歸納結論，把a以奇偶數討論，但討論不完全，且固定a值，將b區分成a的因數與不是a的因數來討論，可惜最後推論不正確。但學生能想到用討論方式去條列結果，仍值得鼓勵。



1. 我們假設『釘子數爲 a，間隔數爲 b，路徑數爲 c，路徑上的點數爲 d，繞經的圈數爲 e』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

若b_1、b_2兩間隔所形成的圖形

若a為固定，且$b_1+b_2=a$，則兩圖形相等。(a為奇數或偶數均可) V→列出

若a固定，b為a因數，則形成圖形為$\frac{a}{b}$邊形，且形成圖形個數為b?

若a為固定偶數，且$b=\frac{a}{2}$，則形成$\frac{a}{2}$條通過中央的直線 V

若a為固定，且b為a之因數，則$c=b$ V

若a為固定，且b不為a之因數，則$c=1$ X

若a為固定數，且b為a之因數，則$e=1$ V

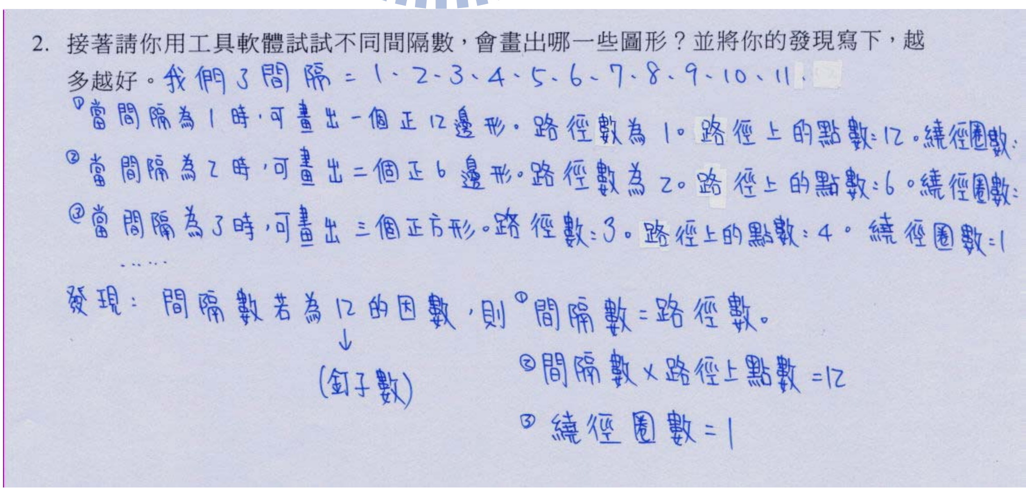
若a為固定，且b不為a之因數，則$e=b$ X $a=12$ $b=8$. $c=4$. $d=3$，$e=2$

若a固定，且b為a因數，則$d=\frac{a}{b}$ V

若a固定，且b不為a因數，則$d=a$ X $a=12$, $b=8$, $c=4$, $d=3$, $e=2$

圖 4-3-2 學生錯誤的推論

如圖4-3-3，學生歸納得很好，可惜只考慮了間隔數爲釘子數的因數部分，至於間隔數不爲釘子數的部分卻沒有分析整理。



2. 接著請你用工具軟體試試不同間隔數，會畫出哪一些圖形？並將你的發現寫下，越多越好。我們了間隔=1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、

①當間隔為1時，可畫出一個正12邊形。路徑數為1。路徑上的點數:12。繞徑圈數:

②當間隔為2時，可畫出二個正6邊形。路徑數為2。路徑上的點數:6。繞徑圈數:

③當間隔為3時，可畫出三個正方形。路徑數:3。路徑上的點數:4。繞徑圈數=1

……

發現：間隔數若為12的因數，則①間隔數=路徑數。

(釘子數) ②間隔數×路徑上點數=12

③繞徑圈數=1

圖 4-3-3 學生不完整的猜測

（二）相異的部分

1. 國一學生在進行本次開放式教學活動前，剛剛學習過正比與反比的單元。在此次教學活動的發現上，國一學生較能將正比與反比的概

念寫出來。對於國二學生，正比與反比的課程已經學習過一段時間，能夠將其概念寫出來的同學相對較少。對於數學的學習，理解是一個重要課題。誠如Brownell（1935）所主張「有意義的學習」，若要讓所學的知識可以長長久久的，就必須讓學生充分理解而且將他們所學的基本數學觀念意義化。因此，唯有讓學生在學習的過程中充分了解概念，才能讓學生輕鬆而有效地學習數學，進而學以致用。

2. 國二學生學習過等差數列，有部分學生提到，但也未能清楚描述。國一學生尚未接觸到等差數列課程，此部分無人提到。
3. 國二學生有發現到短除法的概念，國一學生無人發現。
4. 國一學生有發現最小公倍數的概念，國二學生無人發現。

二、團體學習單部分

（一）相同的部分

1. 兩個年級的學生在團體學習單的描述上有好幾組的發現都很貧乏。根據學生的說法，因爲分組討論時間不夠充裕，幾乎都用在相互討論上，因此書寫的部分省略許多。從DV錄影觀察到，分享報告的內容的確較爲充分。
2. 兩個年級學生的團體學習單發現項目與個人學習單所發現的項目都少了許多，缺少的部分以「圖形的變化」這一項最爲明顯。

（二）相異的部分

1. 國一學生在團體學單的呈現上，第四組與第九組清楚的把樣式發現的部分與數學概念，詳實的紀錄。國二學生的團體學習單均只記錄了樣式的發現，數學概念的連結未能寫出來。
2. 國二學生團體學習單有提到短除法的概念，並且清楚的寫出。國一學生團體學習單無任何一組發現。
3. 國二學生團體學習單有提到根號的概念。國一學生因尚未學習到根號課程，故此推論從缺。

本節主要從學生個人學習單、團體學習單、研究者在教學現場的紀錄與事後 DV錄影的觀察中去察覺不同年級學生在接受了圓形釘板的開放式教學探索活動後，所產生解題表現的異同。結果顯示，不同年級學生在接受圓形釘板的開放式問題教學探索活動後，解題表現的確有差異。因爲不同年級學生所學習過的數學概念之差異，在解題思維上也反映出來。然兩班學生均是第一次接受開放式問題教學的探索活動，其心情難免緊張與不安，影響表現

的結果。在發現的項目整理上：學生發現了「因數與倍數的概念」、「正比與反比的概念」、「最大公因數的概念」、「最小公倍數的概念」、「互質的概念」、「短除法」、「等量公理」與「圖形的變化」；在學習單的書寫上：學生習慣寫簡體字，不時發現錯別字，正確的書寫數學式子但常缺乏完整的數學概念描述，驗證往往不夠嚴謹…等，研究者認爲本次研究收穫仍是豐富。經由此次教學研究的歷程，顯示學生有許多觀察發現與猜測結果，但對於驗證部分往往未能周全。臆測、檢驗、驗證的能力培養都是九年一貫數學學習領域的目標，在開放式問題教學模式下，我們還有更多努力的空間。

第五章 結論與建議

本研究主要針對國中學生以圓形釘板探索數概念，依據開放式問題的教學模式設計教學活動，並探討此一教學模式在國中實施的可行性及國中學生在進行此學習活動的解題表現。以下依據研究結果歸納結論，並提出建議，作爲未來相關研究之參考。

第一節 結論

本節主要根據教學後的分析結果進行歸納：

一、開放式問題教學設計在國中階段的實施是可行的

以圓形釘板爲輔具，探索數概念的開放式教學活動，對學生是一個新鮮，不一樣的學習歷程。所有學生，不分程度高低，都能主動參與其中。異質性分組討論，學生都顯得異常興奮與熱絡，且在分組討論中發現，部分學生具備領導統御的特質。透過圓形釘板輔助教學與所搭配的學習單，我們可以發現學生的解題想法。想法有三：（1）出現由繁到簡的解題思維，（2）使用文字記錄模式與資料表，（3）列表尋找樣式。在開放式的學習氛圍上，學生感覺雖然辛苦，卻渴望能再有機會體驗類似課程。

二、分組討論激發學生提出多數的樣式猜測，但個人猜測結果仍十分有限

（一）兩個年級學生各自都有 9 個樣式的猜測結果，差別在國二學生有發現短除法的應用，國一學生未發現；而國一學生發現了最小公倍數的概念，國二學生未發現。兩個年級都未發現「質數」與「同餘類」的樣式，樣式發現數目最多的部份是「因數與倍數」與「圖形的變化」兩部分，其餘的發現數目都不多。

（二）兩個年級發現的數學概念有：「因數與倍數」、「正比與反比」、「互質」、「最大公因數」、「最小公倍數」、「圖形的變化」、「短除法」。但細看個人樣式發現數目，多數只有 1-2 個，顯示猜測與驗證能力仍須加強。

三、兩個年級解題表現的共同性如下：

個人學習單部分

（一）兩個年級的學生在個人學習單的描述上都很簡略，簡體字與錯別字不少。

（二）兩班學生在觀察的推論上，驗證的能力有待加強。學生觀察到許多象，但是在學習單上呈現出許多錯誤的推論與不完整的猜測結果。

團體學習單部分

（一）兩個年級的學生在團體學習單的描述上有好幾組的樣式發現都很貧乏。

（二）兩個年級學生的團體學習單發現項目比該組個人學習單發現的項目都少了許多，缺少的部分以「圖形的變化」這一項最爲明顯。

四、兩個年級解題表現的相異性如下：

個人學習單部分

（一）國一學生較多人發現了正比與反比的概念，而國二學生卻很少人發現。顯示剛學習過的單元學生記憶深刻，即使年級較高，課程學習時間較久，仍不復記憶。

（二）國二學生有發現到短除法及等差數列的概念，國一學生無人發現。雖然國二學生才有學到等差數列的概念，但國二學生在此部分的描述並不完整，僅單純寫下名稱，沒有多做說明。

（三）國一學生有發現到最小公倍數的概念，國二學生無人發現。

團體學習單部分

（一）國一學生在團體學單的呈現上，有兩組清楚的把樣式發現的部分與數學概念，詳實的紀錄。國二學生的團體學習單均只記錄了樣式發現，數學概念的連結未能寫出來。

（二）國二學生在團體學習單有提到短除法與根號的概念，並且清楚的寫出完整的樣式。國一學生團體學習單無任何一組發現。

第二節 建議

本節根據研究者在整個研究的經歷與感受，在教學及未來研究上提出下列幾點建議。

一、教學上的建議

（一） 開放式問題教學模式，學生需要較長的思考時間，建議欲實施此教學模式，時間配置及安排上應妥善規劃。本次活動只有 100 分鐘，似有不足，使得學生無法進行充份討論。礙於一般學期課程的進度壓力，建議此類活動可在暑期輔導時間實施。暑期輔導期間，一般學校較沒有課程進度壓力，教學時間使用多元，學生在暑期輔導期間上課態度較輕鬆，不似學期間的緊繃，此時進行開放式問題教學模式，一方面提供不同的數學課室學習經驗，刺激學生的數學思考；另一方面，教師可以充分準備布題與練習追問技巧，提升教師自我專業。

（二） 本研究在教學現場與錄影觀察發現，部分學生在分組討論時，能夠迅速的引導同學進入討論的主題，對於同學每一個提案都能逐一驗證做出結論並適切的與同儕互動，充分展現領導統御的特質，且該類學生樣式發現豐富。建議圓形釘板的開放式教學模式適合當成徵選數學競賽學生的教學活動，藉此羅織數學人才。

（三） 本研究的研究結果顯示，學生在樣式的探索發現上，發現數目普遍不多；在樣式發現與數學概念的連結上需要加強，建議未來研究應先針對研究主題的數學概念加強，且在平日的數學課程中增加數學寫作訓練，經過一段時間的練習後，再進行教學活動，俾使學生能將個人的數學想法順利書寫表達。

二、未來相關研究的建議

（一） 本研究非隨機選取國一與國二兩班學生為教學活動實施對象，且教學時間只有兩節課，因此有樣本過小與教學研究時間過短的研究限制，未來有意從事相關研究的研究者可以針對這兩個問題改善，以取得更具代表性的研究結果。

（二） 本研究的研究結果顯示，國一與國二學生在圓形釘板輔助教學中已經可以找到「因數與倍數」、「正比與反比」、「互質」、「最大公因數」、「最小公倍數」、「等量公理」、「圖形的變化」與「短除法」的發現。九年一貫課程指標，將國小六年級與國一學生、國二學生與國三學生各視爲同一階段，因此建議未來研究可以針對國小六年級學生與國三學生實施圓形釘板開放式教學探索活動，了解九年一貫的階段分類上，不同階段的學生，解題表現的差異。

（三） 本研究的研究結果顯示，開放性問題教學模式在國中階段實施是可行的。本研究是以圓形釘板探索數概念的教學活動爲主，建議未來研究可以不同主題來設計開放式教學活動在國中階段實施，以進一步獲得開放式問題教學模式的實證研究資料，並鼓勵更多教師從事此類教學活動設計，以提升學生解題的思維。

參考文獻

中文部分

王全世（2000）。**資訊科技融入教學之意義與內涵**。資訊教育，80，23-31。

王振興（1997）。**《等待》兒童~一位國小自然科教師的教學研究**。國立台東師範學院國民教育研究所碩士論文。

王智弘（2006）。**多方塊虛擬教具的開發與教學研究**。國立交通大學理學院網路學習碩士專班碩士論文，未出版，新竹。

谷瑞勉譯（1999）。**鷹架兒童的學習-維高斯基與幼兒教育**。台北：心理。取自 http://content.edu.tw/primary/math/ch_dc/page/88/math.doc。

林素微（1998）。實作評量在數學教學上的應用。收錄於台南師範學院主編，**國小教學評量的反省與前瞻**（頁 89-105）。台南，台南師範學院。

孫名符等（1996）。**數學教育學原理**。台北：建宏出版社。

徐斌艳（2000）。**基于开放式问题的数学教学模式研究**。外国教育资料，2000年第 6 期，17-22。

張春興（2001）。**現代心理學**。台北市：東華出版社。

張漢宜（2002）。教導兒童學習數學的新工具－虛擬教具。**國教輔導**，42，11633-11637頁。

教育部（1998）。**資訊科技融入數學科實地教學實驗計畫**。2009年3月7日，

教育部（2001）。**九年一貫課程暫行綱要數學學習領域**。台北：作者。

曹亮吉（2003）。**阿草的數學聖杯－探索無所不在的胚騰**。台北市：天下遠見。

莊一凡、陳光勳（2004）。國小教師實行資訊融入數學科教學現況調查分析之研究。**國立臺北師範學院學報**，17（1），頁1-24。

黃政傑主編（1996）。**數理科教學法**。台北：師大書苑。

黃敏晃（2000）。**規律的尋求**。台北市：心理出版社。

黃瑞琴（1991）。**質的教育研究法**。台北：心理出版社。

溫嘉榮（2003）。**教師如何將資訊融入學科成為教學工具**。75-81。

劉祥通（2008）。**開放式教學策略在國小數學教室施行可能性之研究**。雲林縣97年度推動精進課堂教學能力子計畫一國民小學產出型行動研究工作坊實施計劃。2009年7月10日，取自 http://tw.class.urlifelinks.com/class/?csid=css000000055884&id=model7&cl=1204097814-758-5701&mode=con&m7k=1223900444-8985-4202&_ulinktreeid=

蔡清田（2000）。**教育行動研究**。台北：五南。
鄭毓信、梁貫成編著（1998）。**認知科學建構主義與數學教育─數學學習心理學的現代研究**。上海：上海教育出版社。
謝秀宏（2005）。**國中生胚騰推理與數學能力之相關性研究**。國立中央大學數學研究所碩士論文，未出版，中壢。
謝哲仁（2002）。動態電腦幾何教學建構之設計實例與理論探析。**革新國民中小學數學教育**，225－258 頁。高雄：復文出版社。
鍾靜（2005）。**討論式數學教學的理論與實務**。九十四年發表於國家教育院籌備處之學術研討會。
譚寧君（1996）。解題導向的數學教育。載於黃政傑主編，**數學科教材教法**，19-43。
饒達欽、廖光成（1991）。**數位影像交談系統─DVI多媒體技術**。http://www.edu.tw/dep/docs/iecai52/ba008.htm

英文部分

Abbott, J. S., & Wells, D. W. (1985a). *Mathematics today: Level 6*. Orlando, FL:Harcourt Brace Jovanovich.
Aiken, L. R. (1976). Update on attitudes and other affective variables in learning mathematics. *Review of Educational Research, 46*, 293-311.
Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.) (1997). *The Open-Ended Approach-A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Bird, M. D. (1992). *Correspondence with U. S. Department of Education*. Office of Educational Research and Improvement, Baltimore, MD: University of Maryland Baltimore County.
Bolster, L. C., et al. (1985). *Inviation to Mathematics*. Glenview, IL: Scott Foresman and Company Publishers.
Branca, N. A. (1980). Problem Solving as a Goal, Process, and Basic Skill. *In Problem Solving in School Mathematics*. 1980 Yearbook of NCTM. Reston. Virginia：NCTM.
Brownell, W. A. (1935). Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic. In Reeve (Ed.), *The Teaching of Arithmetic* (pp. 19-51). Reston, VA: NCTM.
Christansen, B. & Walter, G. (1986). Task and activity. In Christansen, B. et al (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. The Netherlands: D. Reidel.
Clements, D. H. & McMillen, S. (1996). Rethinking "Concrete" Manipulatives.

Teaching Children Mathematics. 2(5), 270-279.

Cooney, T. (1985). A beginning teacher's view of problem-solving studies. *Journal for Research in Mathematical Education*, 16(4), 324-336.

Countryman, J. (1992). *Writing to Learn Mathematics*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Cuieford, J. P. (1965). Fundamental statistics in psychology and education. 4th edition, New York: McGraw Hill.

Dillon, A., and Morris, M.G. (1996). User acceptance of information technology: Theories and models. *Annual Review of Information Science and Technology* 31:3-32.

Gagne, R. M. (1965). The Psychological Basis of Science—A Process Approach. AAAS miscellaneous publication, 65-68.

Gagne, R. M. (1983). Some issues in the phychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education , 14* , 7-18.

Goldin, G. A.(1992). Meta-analysis of problem-solving studies：A critical esponse. *Journal for Research in Mathematical Education*, 23(3), 274-283.

Hayes, J. (1989).*The complete problem solver*. New York: Erlbaum.

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education, 106(1),* 5-61.

Hodgson, T. (2006). Applets and Algebra in the Middle Grades. *ON-Math*. 4(1). Retrieved April 8, 2006 from: http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=7437&page=1

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36* (6), 6-11.

Jonassen, D., Peck, K., & Wilson, B. (1999). *Learning with technology：a constructivist perspective.* Upper Saddle River, NJ：Merrill/ Prentice Hall.

Journal of Online Mathematics and its Applications Web site. (2006). Retrieved April 8, 2006 from: http://mathdl.maa.org/mathDL/4/

Kahney, H. (1986). *Problem solving: A cognitive approach*. Milton Keynes: Open University Press.

Keedy, M. L., Bittinger, M. L., Smith, S. A. & Orfan, L. J. (1985). *Algebra*. Menio Park, CA: Addison Wesiey Publishing Company.

Kinstch, W., & Greeno, J. G. (1983). Understanding and solving arithmetic problems. *Psychological Review , 92* , 109-129.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A handbook for senior high school teachers*. Boston, MA: Allyn and Bacon.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior,* 25(2), 153-169.

Lavy, I., & Leron, U. (2004). The emergence of mathematical collaboration in an interactive computerized environment. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 9(1), 1–23.

Leathrum, T. (2001). Writing Mathlets I: A Call to Math Professionals. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. 1(2). Retrieved April 8, 2006 from:http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=460

Lester, F. K. (1985). Research in Mathematical problem solving in R.J. Shumway(Ed.).*Research in mathematics education.* Reston VA: National Council Mathematics.

Lindquist, M. M., & Elliott, P. C. (1996). Communication - an imperative for change: A conversation with Mary Lindquist. In P. C. Elliot & M. J. Kenney (Eds.), 76 *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 1-10). Reston , VA : NCTM.

Lowry, D. W., Ockenga, E. G., & Rucker, W. E. (1986). *Heath Pre-Algebra*. Lexington, MA: D. C. Heath and Company.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.

Mayer, R. E. (1983). Thinking, Problem Solving, cognition. New York: W.H. Freeman and Company.

McLeod, D. B. (1988). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 65-97. New York:Macmillan.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A econceptualization. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (A project of the National Council of Teachers of Mathematics). New York: Macmillan.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J. & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics. 8(6)*, 372-377.

Najjar, L. J. (2001). Principles of educational multimedia user interface design.In R. W. Swezey & D. H. Andrews (Eds.), Readings in training and simulation: A 30-year perspective (pp. 146-158). Santa Monica, CA: Human Factors and Ergonomics Society.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). *Position paper on Basic mathematical skills*. Arithmetic Teacher, 25(1),19-22.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action：Reconmmendations for school mathematics of the 1980's*. Palo Alto A:Dale Seymour Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nohda, N. (2000). *A Study of "Open-Approach" Method in School Mathematics Teaching.* Paper presented at the 10th ICME, Makuhari, Japan.

Perl, T. (2004). Activites for junior high school mathmatics. *String sculpture in the mathematics laboratory* (pp. 43-50).

Phillips, E. R., Upruchard, A. E., & Blair, R. C. (1983). Investigating variables related to sex differences in students' abilities to solve word problems in algebra. *Focus on Learning Problems in Mathmatics , 5* , 47-61.

Phillips, E. R., Upruchard, A. E., & Johnson, H. (1974). The correlation of selected mathematical measures with problem solving ability. *Florida Journal of Education Research, 16* , 3-11.

Polya, G. (1945). *How to sole it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). Mathematical discovery. New York：Wiley.

Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education. 20(2)*, 173-190.

Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third-Graders Learn About Fractions Using Virtual Manipulatives: A Classroom Study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 42(1), 5-25.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School*, 1(2), 114- 120.

Reys, B. J. (1999). *Problem solving*(2nd). Reston, VA:The National Council of Teacher of Mathematics.

Romberg, T. A., & Collis, K. F. (1985). Congnitive functioning and performance on addition and subtraction word problems. *Journal for research in*

Mathematics Education , *16* , 375-382.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. *In*: Becker, J. & Shimada, S. (Eds.), *The Open-Ended Approach: a new proposal for teaching mathematics* (pp.1-9). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Hamdbook of research on mathematics teaching and learning (334-370).* New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). Mathematical thinking and problem solving.Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersy, U.S.A.

Sherrill, J. M. (1983). Solving textbook mathematical work problems. *Alberta Journal of Education Research, 29* , 140-152.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of learning mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(5)*, 498-505.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In R.Charles & E. Silver(Eds.), *The teaching and assessing of problem solving*, 1-22 Reston,VA：NCTM.

Stegemoller, B., & Stegemoller, B., & Willett, D. B. (2004). Discovering stars & building star boards. On-Math, 3(1), Retrieved December 29, 2004, from the World Wide Web: http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=6736

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap - Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: The Free Press.

Takeuchi, Y. & Sawada, T. (1984). *From problem to problem*. Tokyo: Toyokan.

Taylor, R. (1980). *The computer in the school: Tutor, tool, tutee.* New York：Teachers' College Press.

Wagner, S., Rachlin, S. L. & Jensen, R. J. (1984). *Algebra Learning Project: Final report.* Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Webb, N. L. (1979). Processes, conceptual knoledge, and mathematical problem-solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education* , *10* , 83-92.

Whimbey, A. & Lochhead J. (1999). *Problem solving and comprehension*(6th). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Zambo, R. & Follma,n J. (1994). Gender-related differences in problem solving at the 6th and the 8th grade levels. *Focus on Learning Problems in Mathematics* , 16(2), 21-38.

附件一 數學學習問卷

班級：______ 座號：_____ 姓名：____________ 性別：____

這份問卷主要是想了解你對數學學習的看法，你的反應意見不會被評分，故請同學輕鬆但詳實作答，只要把心裡對問題真實的想法表達出來即可。感謝各位同學的協助！

問卷內容（一）:（下列問題都是單選題，請同學勾選最適合的選項。）

1 、我喜歡數學。 □ 同意 □ 不同意

2 、我的數學很好。 □ 同意 □ 不同意

3 、數學問題通常只有一個標準答案。 □ 同意 □ 不同意

4 、數學問題的解法通常只有一種。 □ 同意 □ 不同意

5 、數學的學習多半是計算及公式的記憶。 □ 同意 □ 不同意

6 、只有聰明的少數人才能學好數學。 □ 同意 □ 不同意

7 、數學學習對日常生活沒有幫助。 □ 同意 □ 不同意

8 、數學學習可以讓人思考更靈活。 □ 同意 □ 不同意

9 、如果會做的話，數學問題通常可以在短時間內解出。

□ 同意 □ 不同意

10、數學問題通常很抽象難懂。 □ 同意 □ 不同意

11、我對上數學課沒有興趣。 □ 同意 □ 不同意

12、我喜歡數學老師使用電腦來上數學課。 □ 同意 □ 不同意

13、我喜歡小組討論的方式來學習數學。 □ 同意 □ 不同意

非常謝謝您填寫此問卷

附件二 圓形釘板數學電子軟體教學設計及學習單

圓形釘板教學設計—（使用電子軟體部份）

一、 課程簡介：

課程設計	圓形釘板的教學應用
設 計 者	蔡宜璋老師
指 導 者	袁　媛教授
學習領域	數學教育
學習範疇	因數、最大公因數、質數、互質、同餘類
試用年級	（五年級至十年級）
實施模式	全班開放式問題學習（合作學習）
實施時間	兩節課，共 100 分鐘

二、 設計構思：

本課程的構思配合數學教育學習領域中的「因數、最大公因數、質數、互質、同餘類」課題，並在內容上作出增潤與延伸，引導學生相互交流意見，以切合照顧學生的學習需要，並觀察學生的解題策略及歸納分析能力，希望藉此提升學生學習數學的興趣。

第一節課（**50** 分鐘）:

第一部份：圓形釘板的講解與操作：（著重於老師講解部份）（**10** 分鐘）

課程單元	設計構思（著重於老師操作引導）
第一部份 活動一：「圓形釘板數學電子軟體的使用方式」。	說明「圓形釘板數學電子軟體」的使用方式，詳細說明其中每個部分的意義，將釘子數、間隔數、路徑數與資料表都逐一說明。鼓勵學生多嘗試與操弄，熟悉操作方式，並從活動中多觀察，思考其中的變化，進而能從中推論出數學概念。

第二部份：圓形釘板的操作及完成學習單：（著重於個別學生部份）（**40** 分鐘）

課程單元	設計構思（著重於學生自我操作部分）
第二部份 活動二：「固定釘子數，變化間隔數」;「固定間隔數，變化釘子數」。 活動三：假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。觀察其中的變化，推論其中的關係。	由活動二與活動三，觀察學生的學習狀況與處理分析模式。

第二節課（50 分鐘）：

第三部份：學生分組討論：（10 分鐘）

課程單元	設計構思（著重於學生團體討論部分）
第三部份 活動四：「分組討論」。	將學生分組，讓學生相互討論與意見交流，透過討論，學生學習歸納分析的能力，並培養傾聽他人意見的雅量進而延續探索研究的興趣。

第四部份：學生分組報告（30 分鐘）

課程單元	設計構思（著重於學生表達部分）
第四部份 活動五：「分組報告」。	請各組派代表報告學習發現，訓練學生完整表達的能力。

第五部份：團體討論（10 分鐘）

課程單元	設計構思（著重於團體互動部分）
第五部份 活動六：「團體討論」。	針對各組報告，激發學生批判的能力，必要時老師做問題的延伸思考。

三、 學習目標：

（一） 學習領域方面：

1. 培養學生的觀察與組織的能力。
2. 啓發學生分析與歸納的能力。

（二） 思維方面：學生能

1. 從圓形釘板活動中，學習與應用。
2. 從觀察中，歸納與分析找出規律（pattern）。
3. 從討論中，學習聆聽不同的意見，發展出自己的解題策略。

4. 從實際的操作中，滿足他們的好奇心和喜歡接受挑戰的特性。

四、 學習資源：

學習單、電腦、圓形釘板數學電子軟體

五、 教學程序：

課程規劃			
第一節（50 分鐘）			
老師的引導、問題及活動	學生活動	備註	使用時間
1、開啓圓形釘板，老師講解每一個元件的使用方式，包括產生新釘板，設定間隔數，拖曳的方式，清除的方法，視窗大小的調整，線條顏色的選擇，文字版面說明，資料表說明。	1、了解圓形釘板操作方式與每一個名稱的意義。	1、實際讓學生操作一下軟體，確認學生在操作上沒有問題。	10
2、分兩次不同時間發下個人學習單一與個人學習單二，請學生多嘗試操作並完成學習單。請學生寫下操作中觀察到的事情，越豐富越好。	2、從實際操作與觀察中，試著找出釘子數、間隔數路徑數、路徑上的點數、繞經的圈數，中間的關連性，並嘗試與數學觀念連結。（個人工作）	2、發給每位學生個人學習單一。 3、蒐集學生的個人學習單一。 4、發給每位學生個人學習單二。 5、蒐集學生的個人學習單二。	20 20

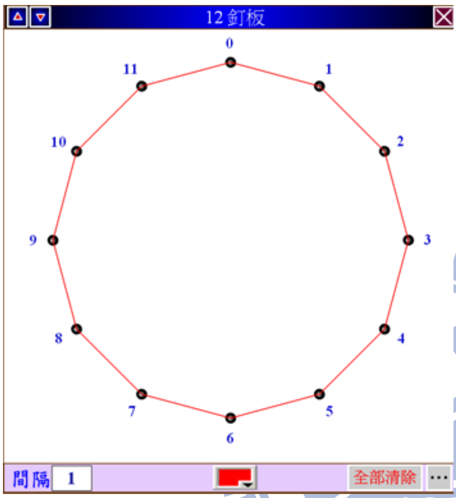
課程規劃（延續）			
第二節（50 分鐘）			
老師的引導、問題及活動	學生活動	備註	使用時間
1、各組討論且完成團體學習單，並推派報告代表。	1、各組討論並找出不同規則。(團體工作) 2、規則由不同觀點歸納出。	1、發給每組一份新的團體學習單一。 2、蒐集各組的團體學習單一。	10
2、請介紹你們該組討論出來的結果。	3、每組輪流發表他們的結果。	3、在白板上顯示各組討論的結果。	30
3、一起討論相似的發現。 4、我們透過圓形釘板發現釘子數、間隔數、路徑數、路徑上的點數，彼此之間的關係。能夠包含哪些數學概念？ 5、還有哪些現象是我們沒發現的？如果需要的話，老師應提供延伸思考。	4、學生為什麼可以有條理地思考？ 5、學生聆聽解釋。 6、學生總結他們的發現。	4、謹慎檢查學生各組的調查結果，以免有所遺落或重複。	10

圓形釘板教學設計—個人課堂學習單一

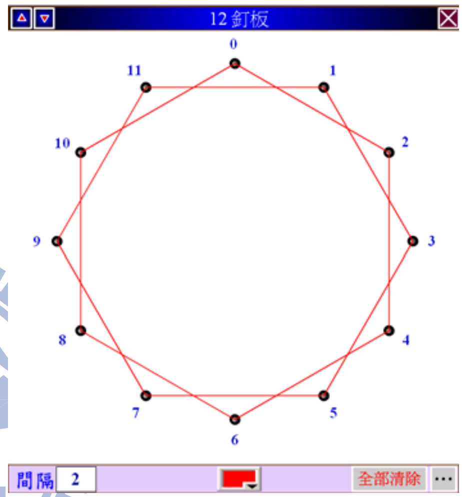
班級：__________ 座號：_________ 姓名：__________________

固定釘子數，變化間隔數

1. 開啓釘子數爲 12 的釘板，設定間隔數爲 1，由 0 號釘子開始，每隔 1 支釘子連線，直到回到起點爲止，會得到一個 12 邊形（圖一），如果改變間隔數爲 2，則可以畫出兩個 6 邊形（圖二）。



（圖一）



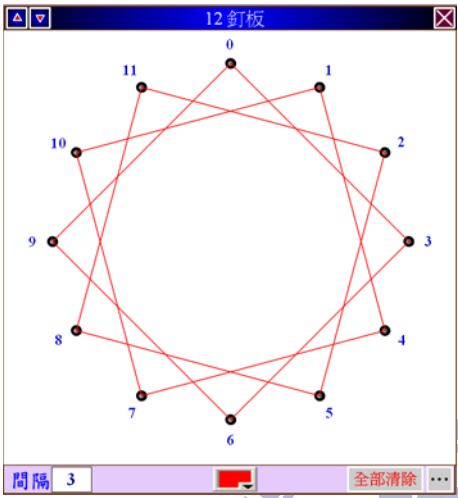
（圖二）

2. 接著請你用工具軟體試試不同間隔數，會畫出哪一些圖形？並將你的發現寫下，越多越好。

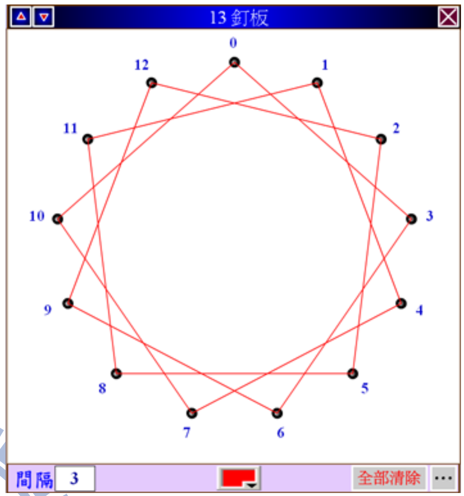
3. 你可以自訂釘子數，依照題 1 方式，變化間隔數，看看有什麼發現？將你的發現寫下，越多越好。（請寫出你使用的釘子數，間隔數。可以有很多）

固定間隔數，變化釘子數

4. 開啓釘子數爲 12 的釘板，設定間隔數爲 3，由 0 號釘子開始，每隔 3 支釘子連線，直到回到起點爲止，會得到如（圖三），如果改變釘子數爲 13 的釘板，設定間隔數爲 3，由 0 號釘子開始，每隔 3 支釘子連線，直到回到起點爲止，會得到如（圖四）。



（圖三）



（圖四）

5. 接著請你用工具軟體試試不同釘子數但間隔數相同，會畫出哪一些圖形？並將你的發現寫下，越多越好。

6. 你可以自訂間隔數，依照題 4 方式，變化釘子數，看看有什麼發現？將你的發現寫下，越多越好。（請寫出你使用的釘子數，間隔數。可以有很多）

圓形釘板教學設計—個人課堂學習單（二）

班級：__________ 座號：__________ 姓名：__________________

尋找釘子數、間隔數、路徑數…，的關係。

1. 我們假設『釘子數為 a ，間隔數為 b ，路徑數為 c ，路徑上的點數為 d ，繞經的圈數為 e 』。請試著透過操作圓形釘板的觀察，將你的發現寫下，並試著推論其他可能的情形。越詳盡、越清楚越好。

2. 承上題，在你的發現中，可以找到與哪些數學概念相關。請試著寫出來。並敘述一下你是如何發現的？

圓形釘板教學設計—團體課堂學習單（一）

組別：__________ 班級：__________

座號：___ 姓名：_________ 座號：_____ 姓名：___________

座號：___ 姓名：_________ 座號：_____ 姓名：___________

座號：___ 姓名：_________ 座號：_____ 姓名：___________

我們這一組的發現

1. 我們假設『釘子數為 a，間隔數為 b，路徑數為 c，路徑上的點數為 d，繞經的圈數為 e』。請全組組員討論，將相同的發現寫下，不同的發現，逐一討論。經過全組同意，將所有大家都認為正確的推論，條列寫下，越多越好。

2. 經過全組討論，我們發現「圓形釘板」教學包含了哪些數學觀念？請描述一下如何發現的？