第七章 教材製作實例

上一個章節針對了 PowerPoint 環境之下，運用 MathPS 的教材設計視覺化原則。根據這些結果，筆者分別舉出了兩個教材實例，分別為西瓦定理（幾何課程）和乘法公式（代數課程），以作為研究結果的應用與驗證。

第一節 西瓦定理

一、 教材內容

甲、共邊三角形面積比

平面上不共線四點 A、B、C、D，若 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$（延長線）相交於 E，

則 △ABC：△ABD ＝ $\overline{CE}$ ： $\overline{ED}$ 。

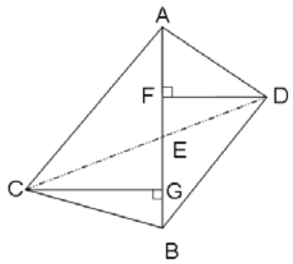


圖 7-1 共邊三角形(1)

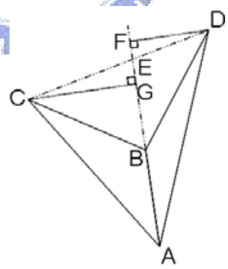


圖 7-2 共邊三角形(2)

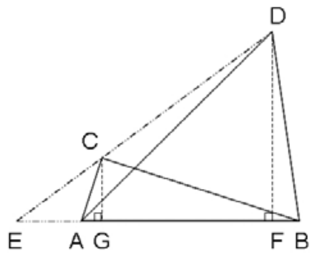


圖 7-3 共邊三角形(3)

「證明」：

如（圖 7-1、圖 7-2、圖 7-3），$\because \Delta CGE \sim \Delta DFE$ ，

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CG}}{\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DF}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$$ 。

證畢。

乙、西瓦定理

在三角形的邊（延長線）上任取一點，連接此點與對頂點，此線稱爲「西瓦線」。若三條西瓦線 $\overline{AX}$ 、 $\overline{BY}$ 、 $\overline{CZ}$ 共點 $\Leftrightarrow a_1 \times b_1 \times c_1 = a_2 \times b_2 \times c_2$ 。

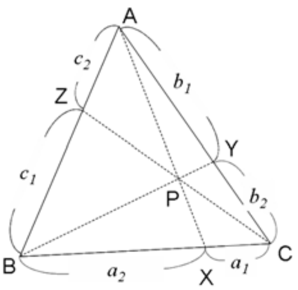


圖 7-4 西瓦線共點。

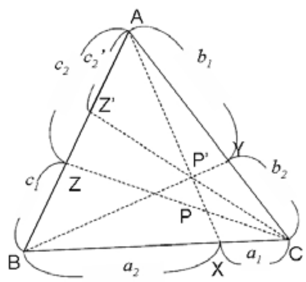


圖 7-5 西瓦線不共點。

「證明」:

(1). $\overline{AX}$ 、 $\overline{BY}$ 、 $\overline{CZ}$ 共點 $\Rightarrow a_1 \times b_1 \times c_1 = a_2 \times b_2 \times c_2$

如（圖 7-4），由共邊三角形面積比性質可得，$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\Delta APC}{\Delta APB}$ 、 $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{\Delta BPA}{\Delta BPC}$ 、 $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{\Delta CPB}{\Delta CPA}$ 。

故 $\dfrac{a_1}{a_2} \times \dfrac{b_1}{b_2} \times \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{\Delta APC}{\Delta APB} \times \dfrac{\Delta BPA}{\Delta BPC} \times \dfrac{\Delta CPA}{\Delta CPB} = 1$ ， $a_1 \times b_1 \times c_1 = a_2 \times b_2 \times c_2$ 。

(2) $a_1 \times b_1 \times c_1 = a_2 \times b_2 \times c_2 \Rightarrow \overline{AX}$ 、 $\overline{BY}$ 、 $\overline{CZ}$ 共點

如（圖 7-5），設 $\overline{CZ}$ 交 $\overline{AX}$ 於P，$\overline{BY}$ 交 $\overline{AX}$ 於P’，連接C，P’交 $\overline{AB}$ 於 Z’。

由已知$a_1\times b_1\times c_1=a_2\times b_2\times c_2$，但由(1).可得，$a_1\times b_1\times c_1=a_2\times b_2\times c_2'$。故$c_2=c_2'$，

即Z、Z’爲同一點、P、P’ 亦爲同一點。$\therefore$ $\overline{\mathrm{AX}}$ 、 $\overline{\mathrm{BY}}$ 、 $\overline{\mathrm{CZ}}$ 共點。證畢。

二、　教學流程

1. 共邊三角形面積比：

此部份的教材內容，主要在於說明兩共邊三角形的面積的比例關係，將兩個三角形之不共用兩頂點連線，與共用邊（延長線）相交之後所形成的兩個分線段，這兩個分線段的比例剛好是這兩個三角形的面積比。比較特別的是，不管兩個三角形共用一邊的情形如何，只要各點的命名相同（共用$\overline{AB}$，C、D相異，且$\overline{AB}$交$\overline{CD}$（延長線）於E），則面積的比例式在文字上的表達是相同的（圖 7-1、圖 7-2、圖 7-3）。

(1). 首先分別由 C、D 兩點向$\overline{AB}$作高$\overline{CG}$ 、 $\overline{FD}$，因此

$\Delta ABC:\Delta ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CG}:\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{FD}=\overline{CG}:\overline{FD}$ 。

(2). 引導學生觀察 ΔCEG 、 ΔDEF ，因爲 $\Delta CEG\sim\Delta DEF$ ，故 $\overline{CG}:\overline{FD}=\overline{CE}:\overline{ED}$ 。

(3). 由上述可得，$\Delta ABC:\Delta ABD=\overline{CE}:\overline{ED}$ 。

這一個結果並非是西瓦定理的一部份，只是在定理的推導過程中，有必要利用到這一個性質，可謂在學習西瓦定理時的前備知識。又訒爲學生的素質不同，所以教師在教授這一個課程時，可考慮是否有必要將這一部份納入課程，所以這一個部份可以當作補充教材，有需要時再進行教學活動即可。

2. 介紹西瓦定理：

介紹西瓦定理的內容，並分別呈現三線交點在於三角形內及三角形外的圖形及公式。此部份的重點，在於讓學生能了解定理的意義與定理公式的規則性，所以由交點在三角形內部的圖形先觀察起，之後再推廣到交點在三角形外。也必須注意各點命名必須一致，也就是讓兩種不同情形之下，公式依然相同。

3. 證明西瓦定理（交點在三角形內）：

先將ΔABC分成三個三角形：ΔPAB、ΔPCA、ΔPCB，分別觀察各組共邊三角形的面積與線段的比例關係（圖 7-4）：

(1). 觀察ΔPAB、ΔPAC，說明$\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=\dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAC}$。（圖 7-2）

(2). 觀察ΔPBA、ΔPBC，說明$\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=\dfrac{\Delta PBC}{\Delta PBA}$。（圖 7-2）

(3). 觀察ΔPCA、ΔPCB，說明$\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=\dfrac{\Delta PCA}{\Delta PCB}$。（圖 7-2）

(4). 由上述結果列式：$\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=\dfrac{\Delta PCA}{\Delta PCB}\times\dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAC}\times\dfrac{\Delta PBC}{\Delta PBA}$，分子分母互消之後，得到$\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=1$。

4. 證明西瓦定理（交點在三角形外）

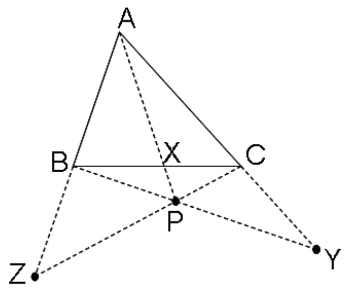


圖 7-6 三條西瓦線共點（三角形外）。

當三條西瓦線相交於三角形之外時，就定理本身的列式上雖然並無改變，但是圖形的線條變得比較多且複雜，因此學生在圖形的觀察上可能造成困擾，此部份爲教師在從事教學時應注意之事項。

(1). 說明各線分點的意義，即使分點在線段的延長線上，亦可成立。

(2). 觀察 ΔPAB 、 ΔPAC ，說明 $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=\dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAC}$ 。（圖 7-1 可對照）

(3). 觀察 ΔPBA 、 ΔPBC ，說明 $\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=\dfrac{\Delta PBC}{\Delta PBA}$ 。（圖 7-2 可對照）

(4). 觀察 ΔPCA 、 ΔPCB ，說明 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=\dfrac{\Delta PCA}{\Delta PCB}$ 。（圖 7-3 可對照）

(5). 由上述結果列式：$\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=\dfrac{\Delta PCA}{\Delta PCB}\times\dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAC}\times\dfrac{\Delta PBC}{\Delta PBA}$ ，分子分母互消之後，得到 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=1$ 。

(5). 與前述之公式（交點在三角形內）作比較，讓學生了解兩個情形之異同。

5. 證明西瓦逆定理

(1). 展示不交於一點的圖形（圖 7-5）（先不顯示 $\overline{CZ'}$），提出錯誤假設

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=1$$ 。

(2). 連接 C、P’並交 $\overline{AB}$ 於 Z’，並由前述已證得之定理可得：

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\times\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=1$$ 。

(3). 比較兩式，Z、Z’應為同一點，定理得證。

三、 投影片設計

由上述課程內容及教學流程，課程應分為四大類：說明西瓦定理、證明西瓦定理、證明西瓦逆定理、共邊三角形面積比。而「介紹西瓦定理」和「證明西瓦定理」都包含了交點在三角形內和三角形外兩種情形，故此部份應有四張投影片；「證明西瓦逆定理」只需要一張投影片；「共邊三角形面積比」有三種不同的圖形，所以有三張投影片。而且此部份屬於補充教材，可視現場教學需要決定是否展示，故這三張投影片放置於最後，並在「證明西瓦定理」的投影片上設定超聯結，以便教學所需隨時能展示這部份的內容。

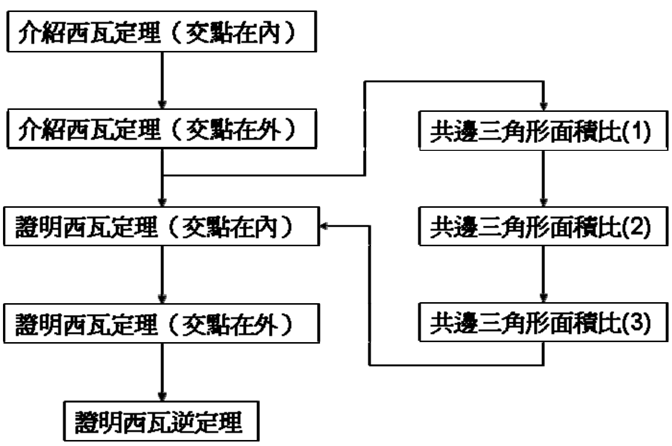


圖 7-7 投影片展示流程。

1.　介紹西瓦定理：

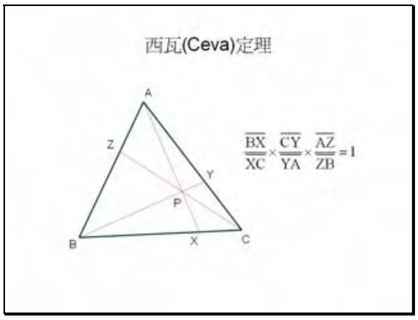


圖 7-8 西瓦介紹投影片(1)

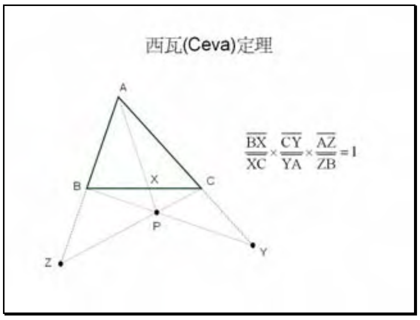


圖 7-9 西瓦介紹投影片(2)

非對稱式平衡對稱構圖：當式子只有單一時，圖形所佔的版面明顯比算式大。圖形所在位置偏中，算式水平置中再偏上一些，以保持左右平衡。上方附上標題，注意標題文字的大小，通常 PowerPoint 預設的標題文字會過大。兩張投影片的內容大部份相同，只是交點的位置有異，因此必須注意這兩張投影片的相同資訊其位置不可改變，以免造成換頁時資訊跳動的感覺。

三角形的外框粗細設定爲 2.25pt，三條西瓦線的粗細以預設的 0.75 即可和外框有分別，並且可設定爲虛線樣式，以增加差別性。爲了不使畫面單調，設定外框的顏色爲綠色，三條西瓦線爲紫色。交點在三角形之外的情形，特定在線段交點處繪製小黑點，以增強交點存在的感覺。

2.　證明西瓦定理

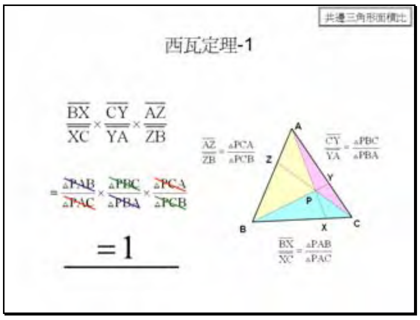


圖 7-10 西瓦定理證明投影片(1)

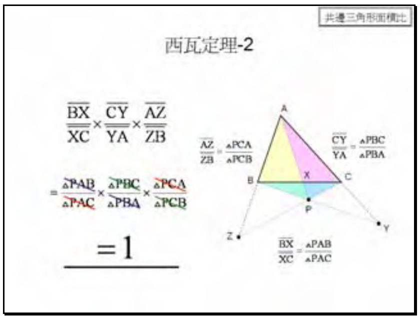


圖 7-11 西瓦定理證明投影片(2)

兩欄式構圖，因為以運算式推導為主，圖形說明為輔，故將文字置於左處。右方圖形整合相關的說明文字，以提高圖像與文字符號的關聯性，降低認知負荷。將各分式所對應的三角形著色，以增強「面」的感覺，協助學生觀察面積的比例關係。所有的文字以黑色表示，表示約分時的刪除線，其顏色和相對應三角形相同即可達到關聯的效果，不需將這一些文字分別設定不同的顏色，以造成視覺上的混亂。

設定「共邊三角形面積比」投影片的超聯結，並放置於較不明顯處的右上角，以作為課堂需要時，再以超聯結的方式聯結到相關的投影片。約分的刪除線為互動式開關，需要時才顯示。最後的結果也先不顯示，僅顯示底線，等到全部推導完畢才顯示最後結果，為增生認知負荷設計。投影片右側的三個運算式為三個按鈕，以滑鼠按下時顯示相對應的三角形。

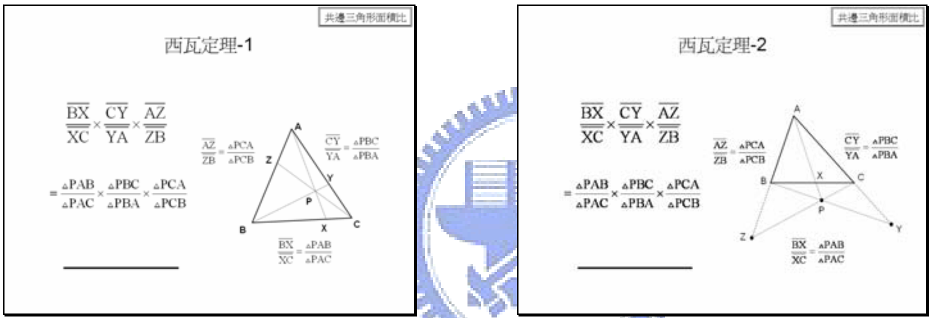


圖 7-12 一開始尚未啟動開關。

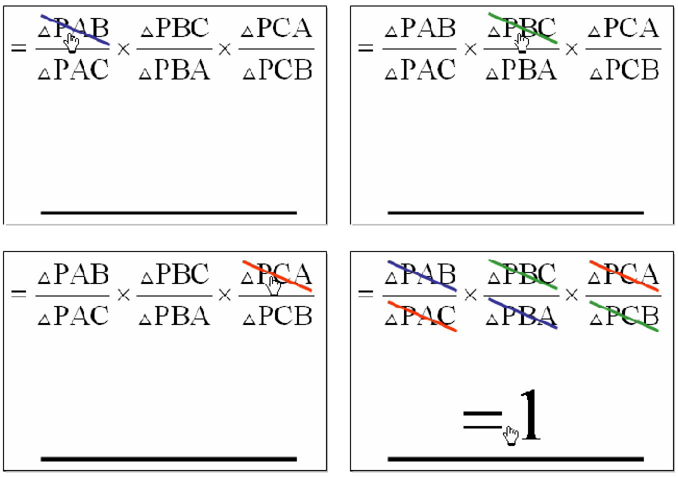


圖 7-13 每一條刪除線及最後的答案皆為單獨的開關。

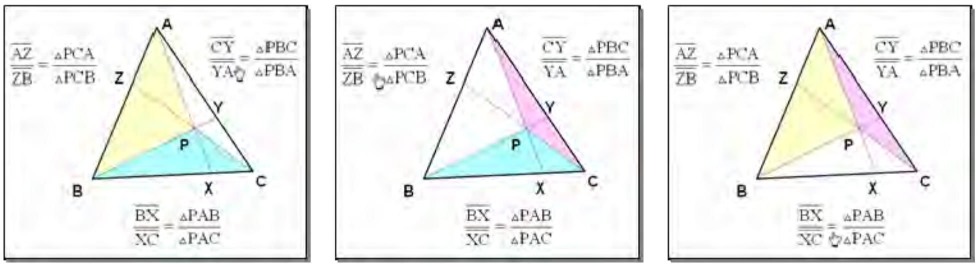


圖 7-14 各算式設定爲對應相關三角形的按鈕。

3. 證明西瓦逆定理

圖形在左側之兩欄式構圖。一開始只顯示矛盾假設之圖形與算式，以互動式按鈕控制 $\overline{CZ'}$ 的呈現，按鈕在 C 點以引導學生之注意。第二條算式其作用在於與第一條算式比較，並非程序性演算，因此在 $\overline{CZ'}$ 呈現時在出現即可。但是其互動按鈕亦設定在第一條算式而不是與 $\overline{CZ'}$ 同時呈現，以免分散注意力。

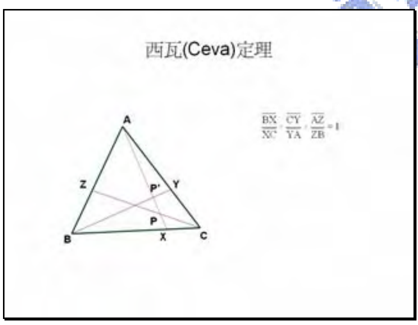


圖 7-15 一開始只顯示矛盾假設。

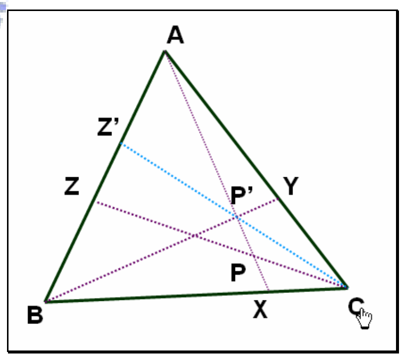


圖 7-16 滑鼠於「C 點」點選之後才顯示 $\overline{CZ'}$。

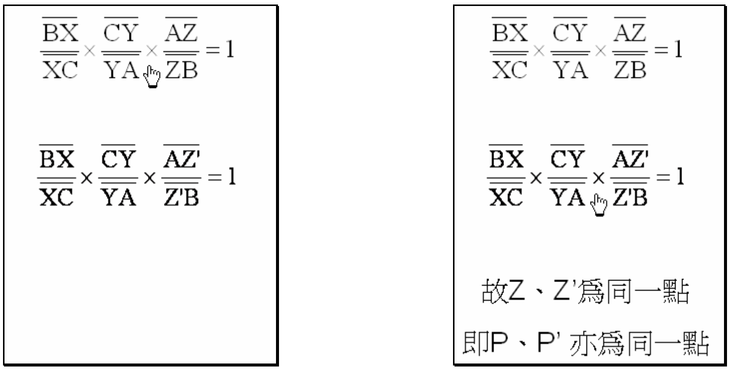


圖 7-17 依序以滑鼠點選以顯示算式。

4. 共邊三角形面積比

三張投影片皆以圖在右側之兩欄式構圖，因為三張投影片為相同內容但是圖形有些許差異，因此必須注意這三張投影片中相同的資訊（標題、算式），其在投影片中的相對位置不可變動。右上方也以一小區塊顯示公式的結果，一方面方便學生記憶公式，一方面也使這三張投影片有整體性。

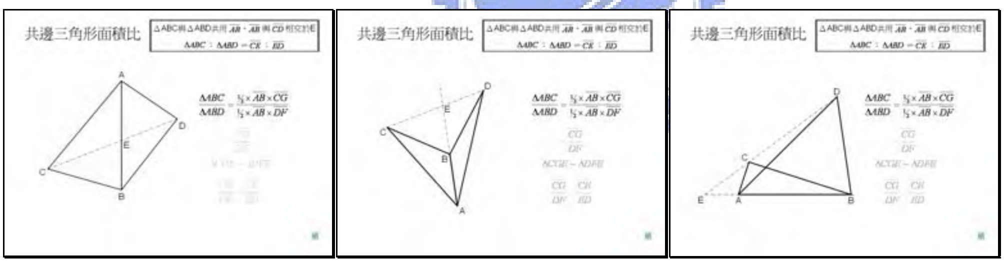


圖 7-18 共邊三角形之三種情形。

投影片右側的算式顯示方式以第五章中所提及的「互式文字閱覽(2)」呈現，並加上顯示約分的刪除線。圖形的顯示皆以互動式按鈕設計，其呈現的設計如下：

(1) C、D 在 $\overline{AB}$ 的兩側，且 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E：

一開始只顯示四邊形和其對角線（如 圖 7-19 所示），分別點選C、D以顯示垂線 $\overline{CG}$ 、 $\overline{DF}$ 及代表垂足的符號。將動畫效果變更為「擦去」，可產生類似線段描繪的效果。

圖 7-19 分別點選「C 點」、「D 點」，顯示$\overline{CG}$ 、 $\overline{DF}$ 。

說明$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CG}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EG}}$時，是利用$\Delta CEG \sim \Delta DEF$ ，故有必要將這兩個三角形突顯出來。此部份以「關開（off-on）」作三角形顯示的控制，起初並不顯示是避免一下子呈現過多的資訊，而等到必要時在黑白線條上呈現兩個填滿顏色的三角形，此時學生的注意力都在三角形上，以利教師作相似三角形性質的說明。

圖 7-20 以「關開（off-on）」顯示ΔCEG和ΔDEF 。

(2) C、D 在$\overline{AB}$的兩側，且$\overline{CD}$交$\overline{AB}$的延長線於 E：

與前一張投影片大同小異，只是構圖時要多繪製一條$\overline{AB}$的延長線。$\overline{AB}$延長線的虛線樣式最好同於$\overline{CD}$，而兩條垂線再以不同的樣式展現。

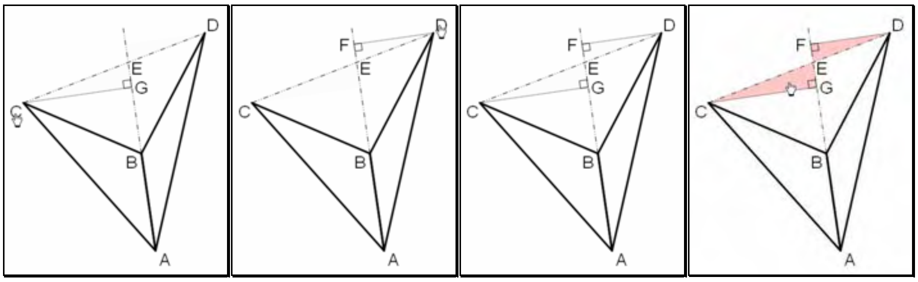


圖 7-21 共邊三角形面積比投影片(2)。

(3) C、D 在$\overline{AB}$的同側，且$\overline{CD}$交$\overline{AB}$的延長線於 E：

由於條件中的兩個三角形本身就有重疊的情形，故有必要再以的互動式按鈕的方式顯示ΔABC及ΔABD。可設定點選「A 點」時顯示ΔABC；點選「B 點」時顯示ΔABD。不用「關開（off-on）」的原因，是因爲兩個三角形重疊，若使用這一項功能，將使得兩個按鈕重疊，則教師在操作投影片時將會產生困擾。顯示垂線的方式與前一張投影片的方法相同，皆以互動式按鈕設定，並將動畫效果改爲「擦去」。

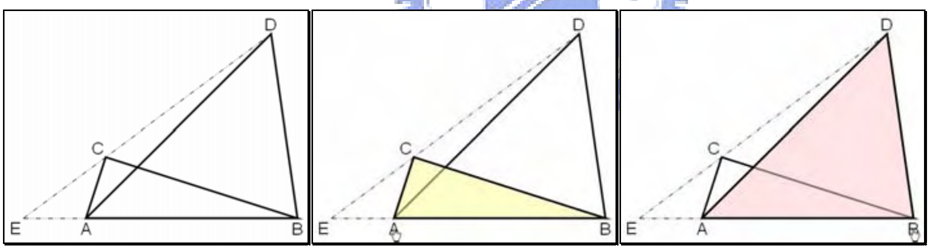


圖 7-22 互動式顯示ΔABC及ΔABD。

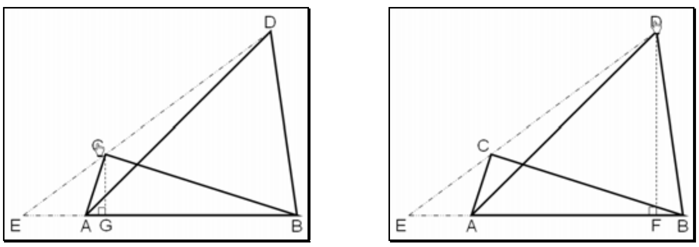
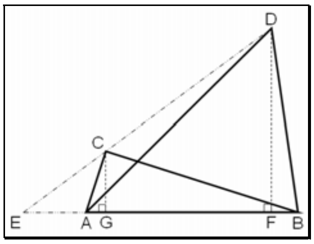


圖 7-23 互動式顯示垂線$\overline{CG}$及$\overline{DF}$。

當C、D在$\overline{AB}$的同側時，比較特別的是在說明$\frac{\overline{DF}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EG}}$時，其$\Delta CEG \sim \Delta DEF$

的部份其視覺上干擾的線段不少，所以有必要再將這兩個三角形突顯出來。因爲這一個三角形的面積範圍涵蓋了 ΔABC 及 ΔABD，故也是以點選「E 點」顯示 ΔEDF 的方式，而不採用「關開（off-on）」。



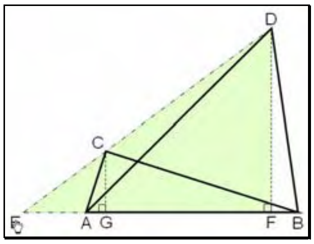


圖 7-24 顯示 ΔEDF ，以方便說明比例關係。

第二節 乘法公式

一、 教材內容

1. 二項式展開：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

公式推導：$(a+b)(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=ac+ad+bc+bd$

例 1：$41\times 53=(40+1)\times(50+3)=40\times 50+40\times 3+1\times 50+1\times 3$

例 2：$(x+2)(x+3)=x^2+2\times x+3\times x+2\times 3=x^2+5x+6$

2. 和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

公式推導：$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$

例：$10.6^2=(10+0.6)^2=10^2+2\times10\times0.6+0.6^2=100+12+0.36=112.36$

3. 差的平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

公式推導：$(a-b)^2=(a-b)\times(a-b)=a^2-ab-ba+b^2$

例 1：$9.9^2=(10-0.1)^2=10^2-2\times10\times0.1+0.1^2=100-2+0.01=98.01$

例 2：$98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=10000-400+4=9604$

4. 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

公式推導：$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

例 1：$2502\times2498=(2500+2)\times(2500-2)=2500^2-2^2=6249996$

例 2：$100.3\times99.7=(100+0.3)\times(100-0.3)=100^2-0.3^2=9999.91$

二、　教學流程

這一個單元的教材，以面積的關係推導各乘法公式。所以主要在於如何引導學生觀察圖形之間的變化，與公式證明完成之後，如何應用？

1. 二項式展開：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(1). 觀察長$(a+b)$、寬$(c+d)$的矩形，如（圖七－26）所示，上方的矩形面積爲$(a+b)\times c$、下方的矩形面積爲$(a+b)\times d$。

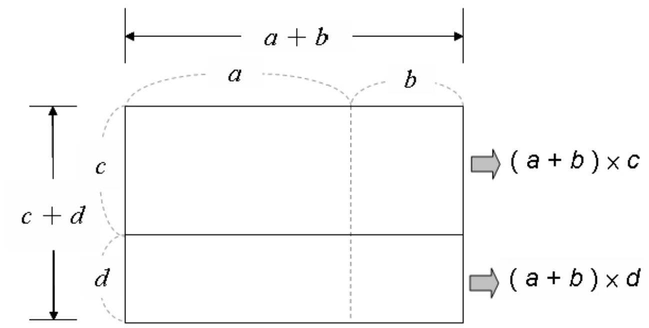


圖 7-25 二項式展開(1)。

(2). 上方的矩形可分解爲兩部份：ac、ab，亦即$(a+b)\times c=ac+bc$。同理，下方的矩形可分解爲兩部份：ad、bd，亦即$(a+b)\times d=ad+bd$。

(3). 由圖形可得知，長方形的面積即爲四塊小長方形面積和：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

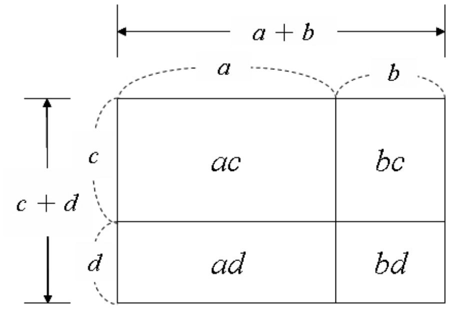


圖 7-26 二項式展開(2)。

(4). 公式應用：將上述公式中的各項變數代換，$a=x$，$b=2$，$c=x$，$d=3$。則$(a+b)(c+d)=(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+2\times3=x^2+5x+6$ 。

(5). 繪製一個長爲$x+3$、寬爲$x+2$的長方形，計算各區塊的面積，和所得結果對照。

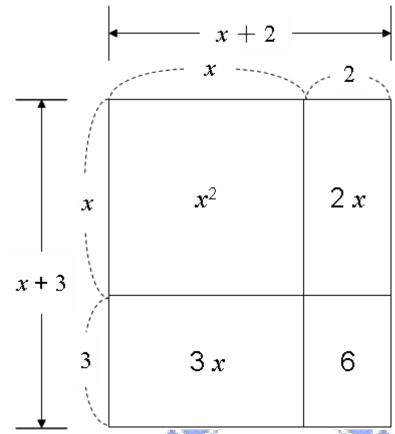


圖 7-27 二項式展開應用。

2. 和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(1). 繪製一個邊長爲$a+b$的正方形，並將其面積分割，計算各區塊的面積。觀察圖形可得知，正方形面積即爲二小塊正方形（a^2和b^2）及二塊等大小的長方形（ab）的面積總和，即$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。

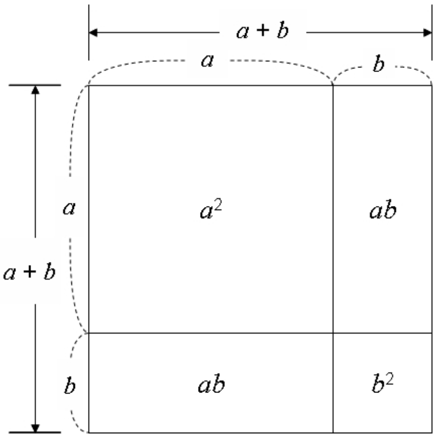


圖 7-28 和的平方。

(2). 利用二項式展開公式驗證：

$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

(3). 公式應用：欲求10.6^2的值時，可將 10.6 分解爲 10＋0.6，再利用上述公式：$10.6^2=(10+0.6)^2=10^2+2\times10\times0.6+0.6^2=100+12+0.36=112.36$ 。

3. 差的平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(1). 繪製一個邊長爲a的正方形，並在邊上取一長度爲b之分線段，並將正方形分割成四塊。如 圖 7-29 所示。

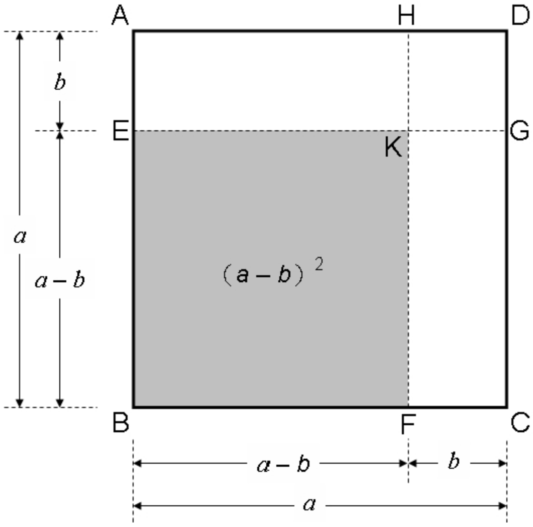


圖 7-29 差的平方。

(2). 觀察上圖，長方形 AEGD＝長方形 HFCD＝ab，且兩個長方形重疊的部份爲正方形 HKGD＝b^2 。

(3). 因此正方形 EBFK 的面積$(a-b)^2$＝正方形 ABCD 的面積－長方形 AEGD 的面積－長方形 HFCD 的面積＋正方形 HKGD 的面積。即 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

(4) 公式應用 1：計算9.9^2時，可將 9.9 拆解爲 10－0.1，因此應用公式：
$9.9^2 = (10-0.1)^2 = 10^2 - 2\times 10\times 0.1 + 0.1^2 = 100 - 2 + 0.01 = 98.01$ 。

(5) 公式應用 2：欲求98^2 ，亦可利用公式
$98^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 2\times 100\times 2 + 2^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$ 。

(6). 上述公式應用時，若因爲學生初次接觸此單元，對於公式不熟悉時，可在旁邊展示公式，以作爲提示之用。

4. 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(1). 繪製一個邊長爲a的正方形，並在邊上取一長度爲b之分線段，並將正方形分割成四塊。則正方形ABCD的面積就是a^2，正方形HKGD的面積就是b^2，因此（正方形ABCD）－（正方形HKGD）＝a^2-b^2，如 圖 7-30 所示。

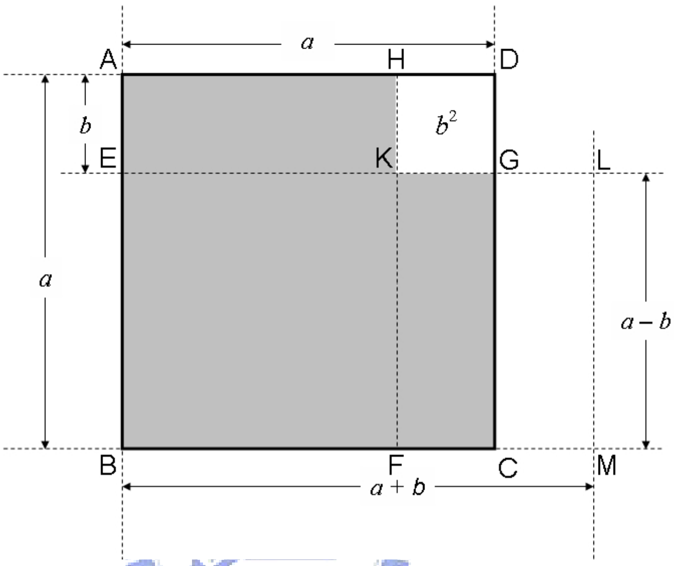


圖 7-30 平方差(1)。

(2). 觀察上方的長方形 AEKH，它的寬爲 b、長卻變成$a-b$，剛好是下方長方形 EBCG 的寬，故可將之拼接至長方形 EBCG 的旁邊，形成長方形 EBML。

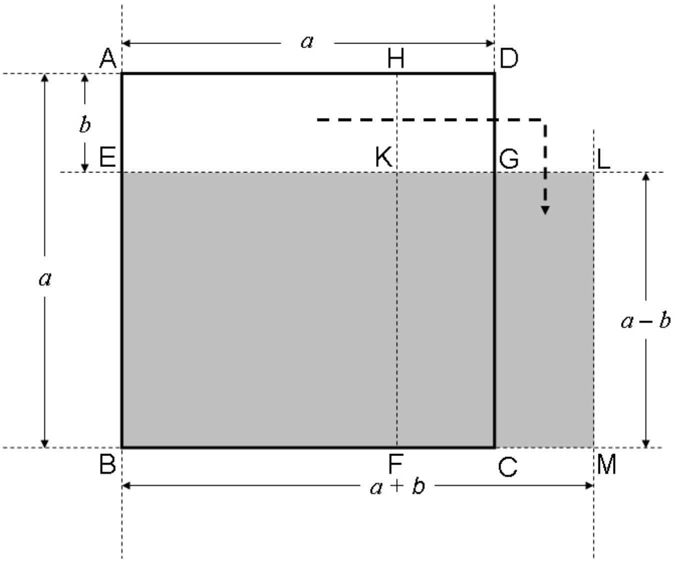


圖 7-31 平方差(2)。

(3) 公式應用 1：計算2502×2498時，可將其拆解為
$(2500+2)\times(2500-2)$，因此應用公式：

$(2500+2)\times(2500-2) = 2500^2 - 2^2 = 6250000 - 4 = 6249996$。

(3) 公式應用 2：計算100.3×99.7時，可將其拆解為
$(100+0.3)\times(100-0.3)$，因此應用公式：

$(100+0.3)\times(100-0.3) = 100^2 - 0.3^2 = 10000 - 0.09 = 9999.91$。

三、 投影片設計

課程安排順序以直線式進行，四個公式都是搭配圖形說明與公式推導，然後再以實例增強概念。

1. 二項式展開：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

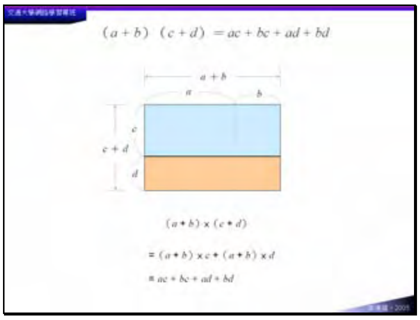


圖 7-32 二項式展開投影片(1)。

置頂標題，上下兩欄式構圖。上方的長方形分割成上下兩個區塊，而各別又分成兩部份。表示面積的文字以互動式按鈕分兩次呈現。

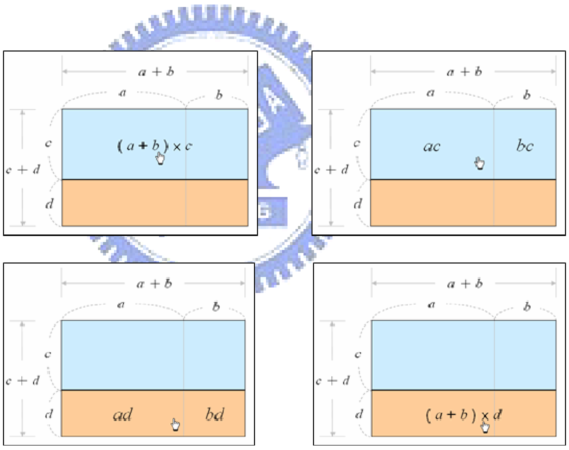


圖 7-33 二項式展開投影片(2)。

文字導覽以互動式按鈕顯示色塊，且色塊搭配上方圖形的顏色，以達到聯結的效果。另外並顯示分配律的線條，以說明分配律的過程。

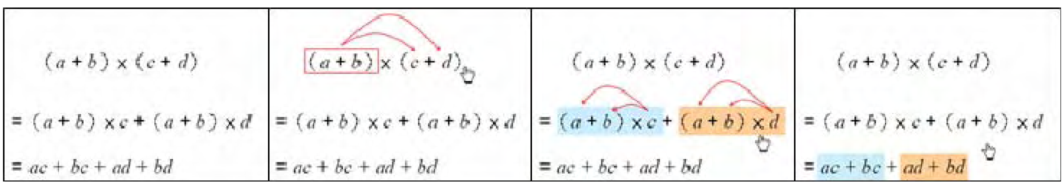


圖 7-34 二項式展開投影片(3)。

2.　二項式展開應用 (1)：$41 \times 53 = (40+1) \times (50+3)$

上方使用相同的標題，一方面是爲了視覺上與前一張投影片有統一的效果，另一方面也有提示公式的作用。左右兩欄式構圖，右側爲互動式文字導覽；左側則以直式運算式說明乘法與二項式展開之關係，並以互動式按鈕說明直式乘法之意義。

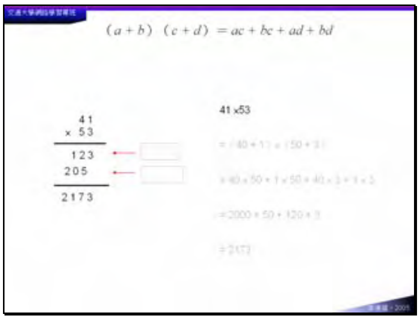


圖 7-35 二項式展開應用投影片。

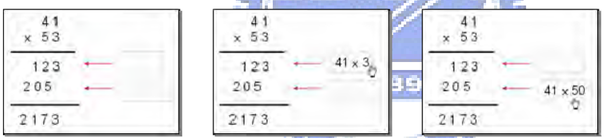


圖 7-36 直式乘法之互動式說明。

3.　二項式展開應用 (2)：$(x+2) \times (x+3)$

兩欄式構圖，右側列運算式，以互動式文字導覽呈現。左側的圖形面積，分別設定互動式關開（off-on），以分別顯示各小區塊之面積。

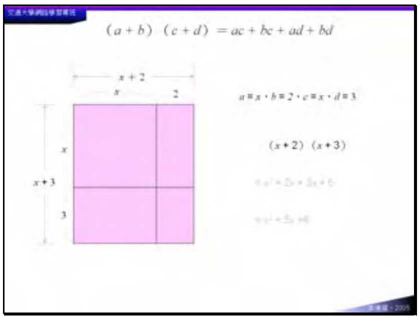


圖 7-37 二項式展開應用(2)投影片。

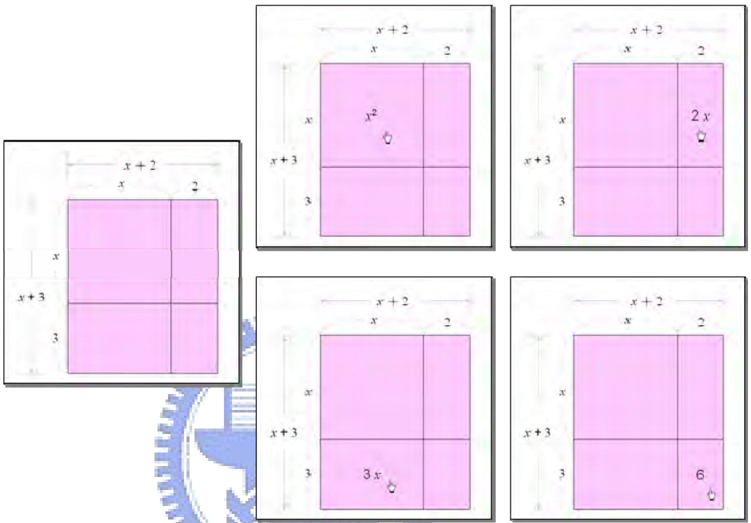


圖 7-38 二項式展開應用(2)，面積之互動式 off-on。

4. 和的平方：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

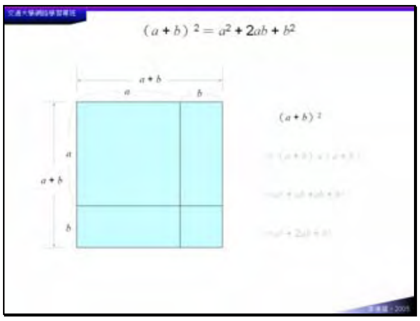


圖 7-39 和的平方。

設計原則與上一張投影片類似，右側算式的呈現方式相同，並多了表示分配律的線條。

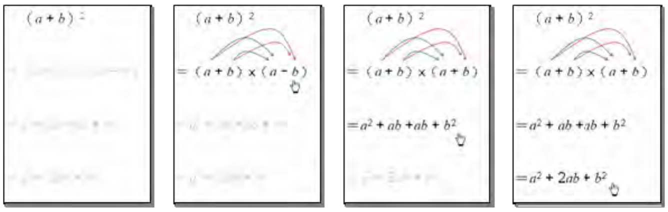


圖 7-40 「和的平方」公式推導之互動式呈現。

左側的圖形依然以互動式關開（off-on），呈現各小塊面積的值，以驗證公式的正確。

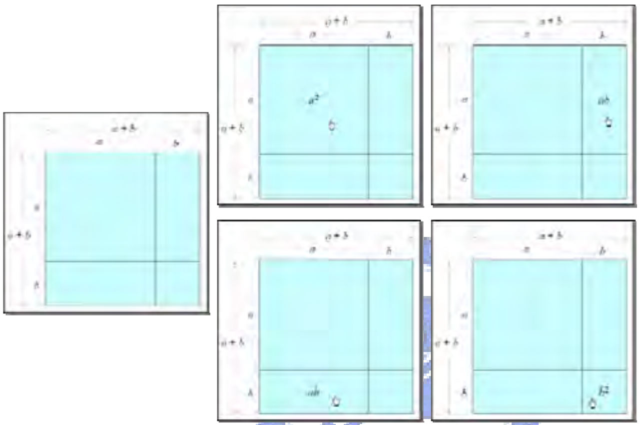


圖 7-41 「和的平方」面積之互動式 off-on。

5. 和的平方公式應用：$10.6^2 = (10+0.6)^2$

上方置頂標題顯示公式，各運算式之呈現以互動式文字導覽的方式。並搭配互動式提示公式的按鈕，以便有必要時顯示提示的公式。

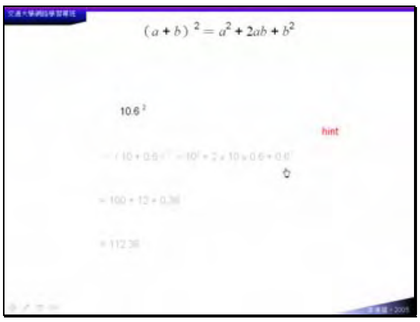


圖 7-42 「和的平方」公式應用。

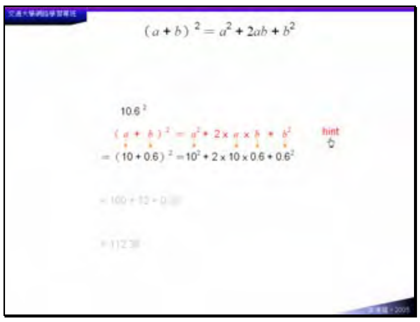


圖 7-43 「和的平方」公式提示。

6. 差的平方：$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

左側大正方形並標示相關長度與面積分割線，右側兩個長方形方框，以備上方長方形平移時，放置與比較用。

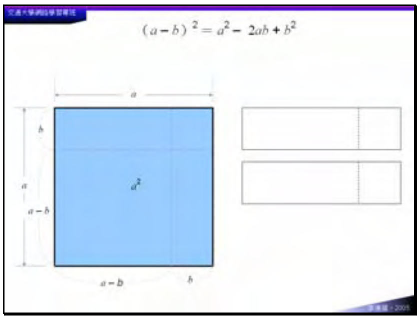


圖 7-44 「差的平方」投影片。

點擊上方長方形以顯示面積“ab”，再次點擊之後長方形平移至左側空白方框，並顯示表示移動軌跡之箭頭，以保留圖形平移之訊息。

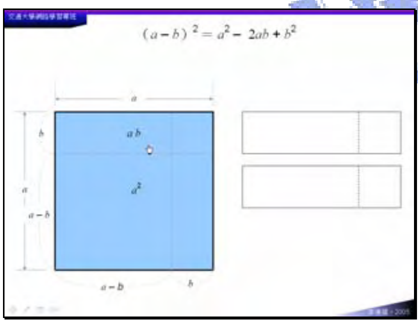


圖 7-45 顯示長方形公式。

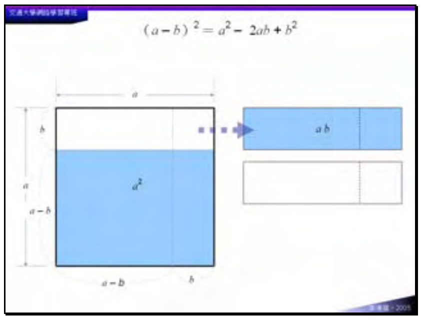


圖 7-46 圖形平移。

點擊下方左側之長方形，將之平移至右側方框中。並點擊文字“a^2”，將之轉變成$(a-b)^2$，以表示$(a-b)^2$是將原本的正方形“a^2”去掉兩塊長方形面積所得。

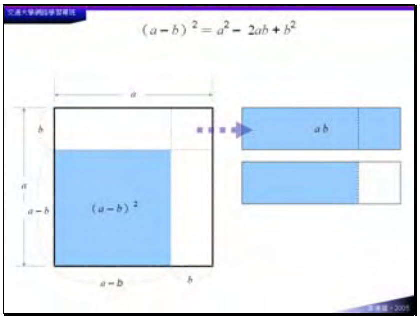


圖 7-47 將a^2變成$(a-b)^2$。

在右側的兩個對齊長方形，可以很明白的看出下方的長方形補上一塊面積即和上面的長方形等面積“ab”，而這一塊即是“b^2”。因此在此空格上設計一互動式開關，點擊之後即顯示此方格之面積。但是必須以不同顏色表示，以免造成視覺上群化之效果，將此塊面積視爲原本正方形的一部份。

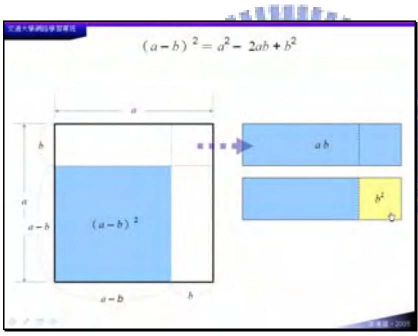


圖 7-48 補上b^2之後，上方長方形面積相等。

由此便可以說明，正方形“a^2”必須另外補上“b^2”之後，就可以減去兩個“ab”，然後剩下的面積“$(a-b)^2$”。

7. 差的平方公式應用：9.9^2、98^2

上方置頂標題顯示公式，兩組算式以左右兩欄配置，並以互動式文字導覽呈現，並設計“hint”開關顯示公式提示。

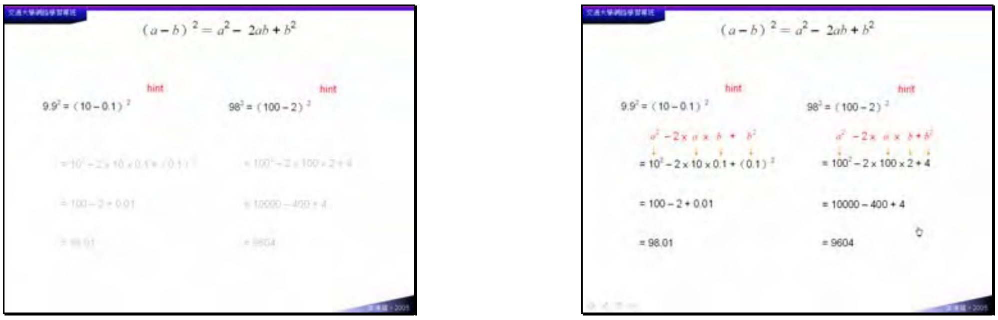


圖 7-49 差的平方公式應用投影片。

8. 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

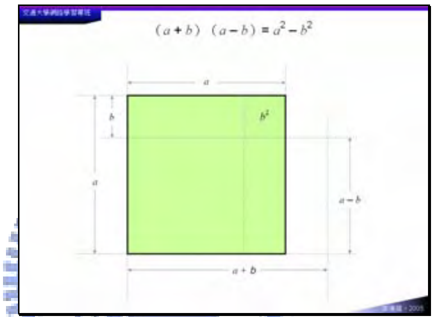


圖 7-50 平方差投影片。

以正方形表示a^2，正方形的右上角切割出一小塊正方形b^2。以互動式開關的方式“關掉”這一小塊正方形，以表示“a^2-b^2”，另外為了防止訊息消失得太快，而使得學習者未注意到關掉的面積為何，因此有必要使得“b^2”能再次呈現。

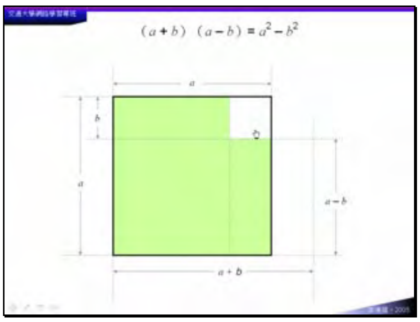


圖 7-51 “關掉” b^2。

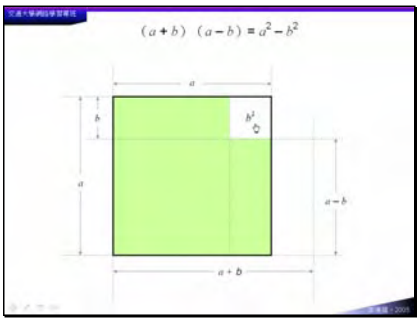


圖 7-52 再次顯示“b^2”。

將上方“$(a-b)\times b$”的長方形平移旋轉至右側預留的空格中，則整塊面積將形成$(a+b)\times(a-b)$的長方形，如此便可表示$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

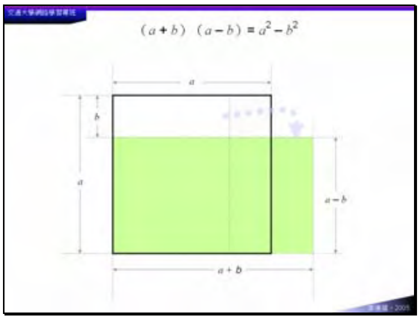


圖 7-53 平移長方形。

9. 平方差公式應用：2502×2498、100.3×99.7

兩欄式構圖，互動式文字閱覽。

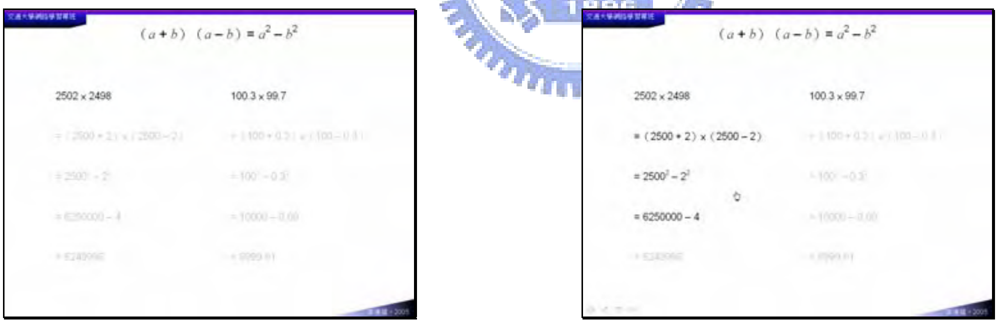


圖 7-54 平方差公式應用投影片。