

國立交通大學

應用數學系

博士論文

圖轉置的相對變量

Total Relative Displacements in Graphs



研究生：張嘉芬

指導教授：傅恆霖教授

共同指導教授：陳伯亮教授

中華民國九十六年十一月

圖轉置的相對變量
Total Relative Displacements in Graphs

博 士 生：張嘉芬

Student : Chia-Fen Chang

指 導 教 授：傅恆霖

Advisor : Hung-Lin Fu

共 同 指 導 教 授：陳伯亮

Co-advisor : Bor-Liang Chen

國 立 交 通 大 學
應 用 數 學 系
博 士 論 文



**Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science**

National Chiao Tung University

**in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy**

in

Applied Mathematics

November 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 六 年 十 一 月

圖轉置的相對變量

學生：張嘉芬

指導教授：傅恆霖
共同指導教授：陳伯亮

國立交通大學應用數學系

摘要

令 f 是 $V(G)$ 上的一個排列。圖 G 經由 f 的轉置後所產生的相對變量 (total relative displacement of the permutation f in G) 為

$$\delta_f(G) = \sum_{x,y \in V(G)} |d(x,y) - d(f(x), f(y))|,$$

其中總和中的 (x,y) 為 G 中不同點有 $\binom{n}{2}$ 個無序對。當排列 f 為 G 的一個自同構 (automorphism) 且 $\delta_f(G) = 0$ 。令 $\pi(G)$ 表示在 $n!$ 個排列中所得到了最小的正整數。當排列 f 滿足 $\delta_f(G) = \pi(G)$ 時，則稱 f 是 G 的一個近似同構 (near automorphism)。此外，令 $\pi^*(G)$ 為所有排列中所得到的 $\delta_f(G)$ 最大值，且稱對應的排列 f 為 G 的混沌映射 (chaotic mapping)。

在本論文中，在第 1 章，我們給了一些圖轉置的基本介紹和一些之前別人做的結果。第 2 章，我們刻劃了一些圖 G 它們的 $\pi(G) = 2$ 和一些樹圖 T 其 $\pi(T) = 4$ 若且為若的條件。在第 3 章，我們致力於找圈圖 C_n 的近似同構和證明 $\pi(C_n) = 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4$ 對於所有 $n \geq 4$ 都對。而第 4 章，則探討哪些點數 $n \geq 3$ 的樹圖 T 他的近似同構值會是 $2n - 4$ 。而在要做結束前，在第 5 章，我們找到一個的 $\pi^*(P_n)$ 的下界改進值。最後第 6 章，則是對本文的一個總結並且提出幾個尚未解決的問題。

Total Relative Displacements in Graphs

student : Chia-Fen Chang

dvisor : Dr. Hung-Lin Fu

Co-Advisor : Dr. Bor-Liang Chen

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

Let f be a permutation of $V(G)$. Define $\delta_f(x,y)=|d_G(x,y)-d_G(f(x),f(y))|$ and *the total relative displacements of permutation f in G* , $\delta_f(G)=\sum\delta_f(x,y)$, over all the unordered pairs $\{x,y\}$ of distinct vertices of G . The smallest positive value of $\delta_f(G)$ among all the permutations f of $V(G)$ is denoted by $\pi(G)$ and the maximum value of $\delta_f(G)$ among all the permutations f of $V(G)$ is denoted by $\pi^*(G)$. The permutation f with $\delta_f(G) = \pi(G)$ is called a near automorphism of G and the permutation g with $\delta_g(G) = \pi^*(G)$ is called a chaotic mapping of G .

This thesis is devoted to investigate the permutations which are near automorphisms and chaotic mappings respectively. In Chapter 1, we start with an introduction of the total relative displacement and present a short survey of the existing literature. Then, in Chapter 2, we study the graphs with small near automorphism values, and we mainly characterize certain graphs G with $\pi(G) = 2$ and trees T with $\pi(T) = 4$. In Chapter 3, our focus will be on the near automorphisms of the cycles C_n and we prove that $\pi(C_n) = 4\lfloor n/2 \rfloor - 4$ for $n \geq 4$. We then study the trees T of order n with $\pi(T) = 2n - 4$, $n \geq 3$, in Chapter 4. ($2n - 4$ is the maximum total relative displacement of a near automorphism of an order n graph.) Before the end of this thesis, we also study the lower bound of $\pi^*(G)$ for some graph G . We obtain a better lower bound of paths P_n than the currently known one. Finally, we conclude this thesis with several remarks which include the direction of further study and open problems.

誌 謝

在這漫長的博士生涯，頭一年的暑假我結了婚，陸續有了三個可愛的小孩，為了擔起家庭責任，校園裡鮮少看見我出沒的身影，對於一個不太像學生的學生，我必須對長久以來給予我支持與包容的指導教授傅恆霖老師，說聲抱歉和感謝，「讓您這麼多年來，為了我這個跟別人不太一樣的學生，您費神了，感謝您對我莫大的包容與鼓勵。老師，真的謝謝您，您辛苦了。」

另一個對我辛苦又費神的老師，陳伯亮老師，一個永遠為學生著想的老師。我想，對於他，我可能是跟著他最久、也最傷腦筋的學生吧。他，亦師亦友，除了給予課業上的教導外，還會常常語重心長的教導我做人做事的道理。能跟著他學習，絕對是我上輩子修來的福分。

雖然一路走來，對於身兼數職的我，真的很辛苦，但感謝老天爺讓我身邊出現了這麼多關心我、幫助我的學長、學弟、學妹，像是“超”熱心助人的陳哲炯學長、潘俊杰學長、黃明輝學長、嚴志弘學長，兩個慧蘭(惠蘭)學妹，還有一堆熱血助人的學弟志銘、啟賢、啟明、榮丰、貓頭、君逸...，繁多不及備載。甚至還有江南波老師的學生，助人不遺餘力的曾建國同學，巧的是跟我超好的雅茵，竟然還是超好的同事，這完全符合了，人與人之間的關係在圖形理論上最多只要六步的關係。

能夠順利畢業，當然還得歸功於我最親愛的家人，每次往返於新竹台南之間，無怨無悔的接送我去坐車多年，幫我照顧小孩，讓我無後顧之憂，他們是我最親愛的爸爸、媽媽、哥哥及嫂嫂，他們是我強而有力的後盾。

人生在世短短數十年，能與你們相會在同一個時空，接受你們莫大的幫助，感謝你們。