

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

差分么正時空區塊編碼正交設計

Differential Unitary Space-Time Block Coding Via Orthogonal

Designs

研究生: 陳建宇

指導教授: 林清安 教授

中華民國九十五年七月

差分正時空區塊編碼正交設計

研究生: 陳建宇 指導教授: 林清安

國立交通大學電機與控制工程學系

摘 要

在差分時空編碼中, 我們應用不同的編碼設計方式, 其中 4,8 根的傳送天線設計, 在犧牲碼率的情況下, 可以讓錯誤率降得更低, 有效的改善通訊品質。接著, 利用此設計, 延伸出非方型的正交設計, 達到 3,5,6,7 根天線的應用。最後, 我們提出一種新的正交編碼設計, 可以有效降低錯誤率, 不過當傳送天線數目增多時, 碼率會大幅地下降, 但卻可以讓整個系統作最妥善的應用。



Differential Unitary Space-Time Block Coding Via Orthogonal Designs

Student: Chien-Yu Chen

Advisor: Ching-An Lin

Department of Electrical and Control Engineering National
Chiao-Tung University

Abstract

Based on the differential space-time coding, we use different kinds of orthogonal design to effectively improve the communication quality. Among them, especially the 4 and 8 transmit antenna designs, we are able to lower the bit-error-rate by trading off the code rate. Then, basing on those, we extend to the non-square orthogonal designs which achieve 3, 5, 6, and 7 transmit antenna applications. Finally, we propose a new method for the orthogonal design to effectively reduce the bit error rate. However, when the numbers of transmit antenna increase, the code rate will be largely lower while still let the entire system operate most properly.

誌 謝

首先，我要感謝林清安教授兩年來的指導，在他的細心指導下，讓我學習到做研究的方法與踏實，論文得以順利完成。還要感謝口試委員林源倍教授以及鄭木火教授，對論文的指導與建議，讓本論文能更加完整。

其次，還要感謝實驗室的陳益生學長，吳建賢學長，楊傑智學弟，李育霖助教，他們經常的給予我寶貴的建議和精神上的支持，幫助我許多，讓我在交大的日子裡，有著充實的生活。

最後，我要感謝我的父母，在我心情不好時，在精神上給予我最大的支持與鼓勵，是我能一直向前努力的原動力。



目錄

| | |
|--|-----|
| 中文摘要 | i |
| 英文摘要 | ii |
| 誌謝 | iii |
| 圖目錄 | vi |
| 符號說明 | vii |
| 第一章 緒論 | 1 |
| 1.1 研究背景及簡介 | 1 |
| 1.2 關係式說明 | 2 |
| 第二章 時空編碼 (space-time coding) | 3 |
| 2.1 瑞雷衰減效能分析 | 3 |
| 2.2 天線多元化 (Antenna Diversity) | 4 |
| 2.3 傳輸多元化 (Transmit Diversity): 時空編碼 | 5 |
| 2.4 傳輸多元化 (Transmit Diversity): 時空編碼效能分析 | 8 |
| 第三章 差分時空編碼 | 10 |
| 3.1 頻道數學模型 (Channel Model) | 9 |
| 3.2 Amicable orthogonal designs | 11 |
| 3.3 訊號編碼 (Unitary Constellations) | 11 |
| 3.4 差分編碼 (Differential modulation) | 11 |
| 3.5 差分時空編碼解調方式 | 12 |
| 3.6 同調時空編碼效能分析 | 13 |
| 3.7 非方形 (Non square) 正交設計 | 13 |

| | |
|---|----|
| 第四章 快速差分時空編碼 | 15 |
| 4.1 頻道數學模型 (Channel Model) | 15 |
| 4.2 Generalized Real and Complex Orthogonal Designs | 17 |
| 4.3 訊號編碼 (Unitary Constellations) | 17 |
| 4.4 差分編碼 (Differential modulation) | 19 |
| 4.5 快速差分時空編碼解調方式 | 19 |
| 4.6 不同的正交編碼設計 | 24 |
| 4.7 非方形 (Non square) 正交設計 | 25 |
| 第五章 模擬與比較 | 27 |
| 5.1 時空編碼 碼率 (Code rate) | 27 |
| 5.2 時空編碼模擬與效能分析 | 27 |
| 5.3 差分時空編碼模擬 | 30 |
| 5.4 快速差分時空編碼模擬 | 34 |
| 第六章 結論 | 41 |
| 參考文獻 | 42 |
| 附錄1 | 44 |
| 附錄2 | 49 |
| 附錄3 | 54 |



圖目錄

| | |
|--|----|
| 圖 1 瑞雷衰減錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 28 |
| 圖 2 2根天線 Alamouti 的接收器的模擬與分析圖 | 29 |
| 圖 3 2根傳送天線 1根接收天線錯誤率分析比較圖 | 29 |
| 圖 4 同調接收器與差分接收器錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 31 |
| 圖 5 差分時空編碼-2,4,8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 31 |
| 圖 6 差分時空編碼-非方形正交設計錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 32 |
| 圖 7 2根傳送天線 2根接收天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 32 |
| 圖 8 2根天線同調的接收器的模擬與分析圖 | 33 |
| 圖 9 快速差分時空編碼-碼率為 1 的 2,4,8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 .. | 34 |
| 圖 10 快速差分時空編碼-4根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 35 |
| 圖 11 快速差分時空編碼-8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 36 |
| 圖 12 快速差分時空編碼-2,4,8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 37 |
| 圖 13 快速差分時空編碼-非方形正交設計錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 37 |
| 圖 14 2根傳送天線 2根接收天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 38 |
| 圖 15 快速差分時空編碼-新設計 4根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 39 |
| 圖 16 快速差分時空編碼-新設計 6根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖 | 40 |

符號說明

E_b : 是每個位元 (bit) 的能量 (energy)

N_0 : 是高斯白雜訊的功率頻譜密度 (power spectral density)

$Q(x)$: 高斯 Q 函數, 定義如下 I : 單位矩陣 (identity matrix)

H : 共軛轉置 (complex conjugate transpose)

$CN(0, \sigma^2)$: 複數高斯分佈, 實部和虛部分別是獨立且相同的高斯分佈, 期望值是零, 變異數是 σ^2 ,

$$CN(0, \sigma^2) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2}) + jN(0, \frac{\sigma^2}{2})$$

SNR: 訊號對雜訊比值

AWGN: 相加性高斯白雜訊 (additive white Gaussian noise)

BER: 錯誤率 (bit-error rate)

i.i.d: 獨立且相同分佈 (independent and identically distributed)

ML: 最大相似 (maximum-likelihood)

$E[x]$: 對隨機變數 x 取期望值

\otimes :kronecker product

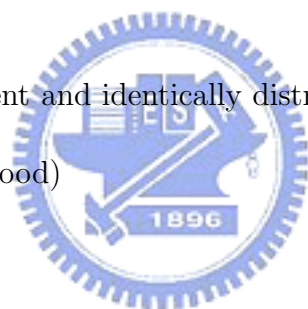
L : 多元化分支 (diversity branches) 的數目

$Re(x)$: 對 x 取實部

$Tr(X)$: 對矩陣 X 取 trace

$vec(X)$: 將矩陣 X 的每一行 (column) 堆疊起來形成一個向量

$p(x)$: x 的機率密度函數 (probability density function)



第一章 緒論

1.1 研究背景及簡介

自從 1998 年 Alamouti[5]提出了新的傳輸多元化技術 (transmit diversity) 之後, 時空編碼 (space-time coding) 的技術漸漸地廣泛被討論, 因而有多根天線的正交設計 [3], 傳送的訊號在不同的天線是互相正交的。因為時空編碼不僅增加了通訊的容量 (capacity), 也有效的改善通訊品質, 降低錯誤率的發生。不過很多都是假設頻道可以被準確的估測出, 所以接收器已經知道無線環境的頻道, 可以藉由此資訊來解調傳送的訊號。但是當環境太差, 導致頻道變化的太快, 不容易準確的估測出來時, 就會對整個通訊品質造成影響。為了解決這個問題, 差分么正時空編碼 (differential unitary space-time modulation) 在 2000 年被提出 [6], 它是仿照在單一天線傳送單一天線接收的差分編碼, 一般被人們所知的是 DPSK(differential phase-shift keying), 就是在傳送端做一些編碼的動作, 把訊號藏在相位差 (phase difference) 中, 而不是絕對相位, 使得接收端可以很運用前一個時刻的資訊和現在時刻的資訊來解調訊號。如此的差分編碼方式, 運用在多天線傳送, 形成了差分么正時空編碼。好處是傳送端和接收端不用知道頻道的資訊, 只要藉著正交編碼的設計方式, 前一刻和此刻時間接收到的訊號矩陣, 即可以將訊號還原回來。另外的好處就是接收器不需要做的太複雜即可以實現。缺點是必須付出一些代價, 要達到相同的錯誤率, 差分么正時空編碼接收器要比同調 (coherent) 接收器多 3dB 的訊號與雜訊比 (SNR)。另外一種差分偵測方法 [11], 不過和 [6]不太相同, 它也是在傳送端和接收端做一些處理, 加了適當的延遲 (delay), 達到了簡單的編碼和解碼程序。

對於差分么正時空編碼的挑戰就是要能設計高效能品質的時空編碼, 並且找出低複雜度的解調演算法。因此若是想再將接收端的複雜度簡化, 同樣是利用多天線差分編碼的方式, 如 [1],[2]都是將最大似偵測器 (maximum likelihood detector) 分解成一維的最小距離接收器問題, 是因為使用了不同的編碼設計 (nongroup code), 才可以得到較簡單的接收器, 對每一個訊號分開進行偵測, 彼此互不干擾 (decouple)。[2]提出了一個簡單的解調方式, 符合了現今接收器較簡單的原則, 且它的同調接收器和差分編碼接收器差了 3dB 的訊號與雜訊比。其中 [1]快速差分時空編碼是使用 Tarokh 所提出的兩根, 四根傳送天線的正交編碼方式 [3], 且皆是對方形的正交設計。

我們使用了不同的正交編碼方式 [4], 其中四根和八根天線的設計可以讓錯誤率降得更低, 因此更能適應較差的通訊環境中, 改善頻道衰減的問題。接著, 我們利用此正交編碼方式, 延伸出非方形

(non-square) 的正交設計。如此的設計可以讓整個系統做妥善的運用, 對於不同的通訊環境, 達到合理的錯誤率需求以及實現。

1.2 關係式說明

在錯誤率的分析中, $P_e(x)$ 是隨著隨機變數 x 而改變

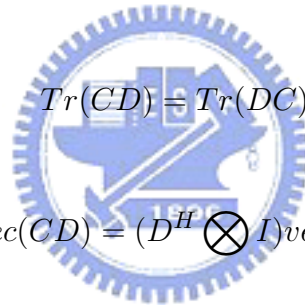
$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{2x\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

E_b : 是每個位元 (bit) 的能量 (energy)

N_0 : 是高斯白雜訊的功率頻譜密度 (power spectral density)

$Q(x)$: 高斯 Q 函數, 定義如下

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



$$\text{Tr}(CD) = \text{Tr}(DC) \tag{a}$$

$$\text{vec}(CD) = (D^H \otimes I) \text{vec}(C) \tag{b}$$

$$\text{vec}^H(C) \text{vec}(D) = \text{Tr}(C^H D) \tag{c}$$

對一個維度是 $T \times M$ 的複數矩陣 $A = (a_{tn})$, 它的 Frobenius norm 可以被定義成:

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= \text{Tr}(A^H A) = \text{Tr}(A A^H) = \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M |a_{tm}|^2 \\ \|A\|_F &= \sqrt{\text{Tr}(A^H A)} = \sqrt{\text{Tr}(A A^H)} = \sqrt{\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M |a_{tm}|^2} \end{aligned}$$

第二章 時空編碼 (space-time coding)

在通訊的環境中，若只是受到單純雜訊的影響，如相加性的高斯白雜訊 (AWGN)，也就是直接加在傳送訊息的後面，則在接收端接收到訊息，不容易造成誤判，所以錯誤率會較低，但是真實無線通訊環境並非如此，因為訊號的傳送受到多路徑 (multipath) 的影響，使得訊號所經歷的環境不再像雜訊一樣的單純，而是直接乘在訊號上面的頻道 (channel)，造成訊號大小一直變動，使得接收端在判別時的困難，因此錯誤率明顯的會提高許多。而一般這種乘在訊號上面的頻道，因為它所呈現的機率分佈是瑞雷分佈，所以常稱它為瑞雷頻道。以下將介紹瑞雷衰減在通訊環境中所造成的影響，如 [9]。

2.1 瑞雷衰減效能分析

首先我們考慮一個數學頻道模組 (channel model)，為了簡單起見，將它視為平坦衰減 (flat fading)，並假設它是瑞雷 (Rayleigh) 衰減，因此可以表示成下式

$$r = hz + w \quad (1)$$

h 是屬於複數高斯 $CN(0, 1)$ ，實部和虛部分別是 i.i.d 的高斯分佈 $N(0, 1/2)$ ，也就是直接乘在傳送訊號 z 上，增加接收端誤判的機率。而 w 是雜訊，並且也是複數高斯分佈 $CN(0, N_0)$ ，其中 N_0 是高斯白雜訊的功率頻譜密度 (power spectral density)。 z 是傳送的 BPSK (binary phase-shift-keying)，也就是 $z = \pm 1$ 。 r 是接收到的訊號。

在瑞雷 (Rayleigh) 衰減的情況下，每一個頻道衰減 h_l 都是 i.i.d 複數高斯分佈 $CN(0, 1)$ ，所以 h_l 有實部也有虛部，所以加起來之後總共有 $2L$ 個獨立的高斯隨機變數，如下式

$$\|h\|^2 = \sum_{l=1}^L |h_l|^2 \quad (2)$$

因為每一個 $|h_l|^2$ 都是由 h_l 的實部和虛部的平方，所以總共有 $2L$ 個獨立的高斯隨機變數相加。而它的機率分佈變成 Chi-square 分佈，其機率密度函數 (probability density function) 是

$$f_x(x) = \frac{1}{(L-1)!} x^{L-1} e^{-x} \quad x \geq 0 \quad (3)$$

當只有一根天線傳送一根天線接收時，也就是只有一路頻道衰減， $L=1$

$$f_x(x) = e^{-x}$$

我們知道, 在 BPSK 的情況下, 錯誤率可以寫成 [9]

$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{2x\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

γ 是訊號與雜訊比值 (SNR)。 E_b 是每個位元 (bit) 的能量 (energy)。因為 x 是一個隨機變數, 導致錯誤率也隨著 x 而改變, 所以必須對錯誤率取期望值, 得到平均錯誤率。詳細推導在附錄3.1。

$$\begin{aligned} P_e &= E[P_e(x)] = \int_0^{\infty} P_e(x) f_x(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{2x\frac{E_b}{N_0}}\right) e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \end{aligned} \quad (4)$$

因為多路徑的效應, 導致通訊品質變的很差, 必需要很高的訊號與雜訊比 (SNR) 才可以達到一定的錯誤率。所以為了得到好的品質, 我們將利用多根天線的傳送, 來改善不良環境所造成的影響。

2.2 天線多元化 (Antenna Diversity)

因為瑞雷衰減的影響, 導致接收端增加誤判機會, 所以錯誤率變得較差, 因此若要有效的解決這些問題, 不同的性質的多元化 (diversity), 可以改善因為頻道造成的影響。而多元化的技術可以是時間多元化 (time diversity), 頻率多元化 (frequency diversity), 天線多元化 (antenna diversity) 或空間多元化 (space diversity) 等等。這些多元化技術形式雖然不同, 但基本的觀念都相同, 就是將具有相同訊息的訊號, 分別用不同的路徑傳送, 並且這些路徑都是互相獨立的, 簡單的說, 即是讓相同訊息的訊號在互相不干擾的頻道中傳送, 當有一個訊號遭受到一個很差的頻道衰減 (deep fade) 時, 另一個具有相同訊息的訊號可以有所保留, 因為相同的訊號同時遭受很差的頻道機率相當的低, 所以只要適當的設計接收端, 便可以將訊號還原回來。

天線多元化或叫做空間多元化就是將多根天線放到傳送端以及接收端, 但是每根天線所擺的距離要分的夠開, 第一個原因是防止天線在接收訊號時互相干擾, 第二個則是可以使每個訊號所經歷的頻道增益互相獨立 (independent) 不相關, 如此才會達到多元化的效果。但是天線必須要相隔多遠, 和周圍的環境及所使用的頻率息息相關, 一般來說, 大約相距半波長 $\frac{\lambda}{2}$ 是足夠的。若使用的頻率為1GHz, 根據 $\lambda = \frac{c}{f}$, 其中 c 為光速 3×10^8 m/sec, f 為頻率, 則一個波長約30公分, 半波長就要15公

分。而用多天線接收稱為接收多元化 (receive diversity), 在瑞雷衰減 (Rayleigh fading) 中, 它可以有效的降低錯誤率, 不過一般都是用在上型線路 (uplink) 傳送, 因為在基地台 (base station) 上, 有足夠的距離能將天線隔開, 不過若是在下行線路 (downlink), 天線相距半波長 15 公分, 對手機使用者來說, 顯得太龐大, 複雜度更高。勢必尋求不同的方法, 就是使用多根天線傳送是否能和多根天線接收有同樣的好處, 因此就有了傳送多元化 (transmit diversity) 多根傳送天線的發現, 也稱做時空編碼 (space-time coding), 目的就是使傳送的訊號互相正交, 達到互不干擾的原則, 即可以讓手機不需做的太複雜, 由此可知, 一個好的正交編碼設計, 是相當重要的, 它不僅可以達到多根天線傳送多元化, 經過適當的設計, 也可以在很差的環境下, 有效的降低錯誤率。

2.3 傳輸多元化 (Transmit Diversity): 時空編碼

在此我們利用兩根天線作傳輸, 一根天線接收, 並且訊號再傳送的時候作適當的編碼, 即是 Alamouti code[5], 在一個給定的訊號時刻內, 訊號 z_0 是用天線 0 傳送出去, 訊號 z_1 則是用天線 1 傳送, 當下一個時刻到來時, 天線 0 傳送 $-z_1^*$ 訊號, 天線 1 傳送 z_0^* 訊號。這種編碼方式是在時間和空間作編碼, 所以稱作時空編碼 (space-time coding)。我們可以把它表示成



$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \\ -z_1^* & z_0^* \end{bmatrix}$$

其中第一列 (row) 是第一時刻所傳送的訊號, 第二列為下一時刻所傳送的訊號。第一行 (column) 是天線 0 所傳的訊號, 第二行是天線 1 所傳的訊號。我們可以知道, 兩根天線所傳送的訊號互相正交, 所以達到了互不干擾即頻道增益獨立的原則。頻道在時間 t 可以被表示成 $h_0(t)$, 它是傳送天線 0 所經歷的環境, 同樣的 $h_1(t)$ 是傳送天線 1 所經歷的環境。假設頻道衰減係數 $h_0(t)$, $h_1(t)$ 在兩個連續時刻不改變, 且都是直接乘在訊號上面。

$$h_0(t) = h_0(t + T) = h_0 = \alpha_0 e^{j\theta_0}$$

$$h_1(t) = h_1(t + T) = h_1 = \alpha_1 e^{j\theta_1}$$

T 是訊號時刻, 接收到的訊號可以寫成

$$r_0 = r(t) = h_0 z_0 + h_1 z_1 + w_0$$

$$r_1 = r(t + T) = -h_0 z_1^* + h_1 z_0^* + w_1$$

其中 r_0, r_1 分別是在時刻 t 以及時刻 $t + T$ 所接收到的訊號, w_0, w_1 則是複數的雜訊。將接收到的訊號方程式寫成矩陣的形式

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 z_0 + h_1 z_1 \\ h_1 z_0^* - h_0 z_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

爲了要偵測 z_0, z_1 將 $r_1 = r(t + T) = -h_0 z_1^* + h_1 z_0^* + w_1$ 取共軛得到

$$r_1^* = h_1^* z_0 - h_0^* z_1 + w_1^*$$

所以矩陣表示式變成

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 z_0 + h_1 z_1 \\ h_1^* z_0 - h_0^* z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1^* & -h_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

爲了方便起見, 我們可以寫成

$$\underline{r} = H \underline{z} + \underline{w} \quad (6)$$

其中

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1^* \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1^* & -h_0^* \end{bmatrix} \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1^* \end{bmatrix}$$

\underline{r} 是接收到的向量, H 是頻道矩陣, \underline{z} 是所傳送的訊號, \underline{w} 是雜訊向量。當收到訊號後, 若已經知道頻道的參數 H , 就可以利用匹配濾波器 (matched filter) 的概念將訊號還原回來, 只要把 H^H 乘以 \underline{r}

$$\begin{aligned} \hat{\underline{z}} &= H^H \underline{r} = H^H (H \underline{z} + \underline{w}) = H^H H \underline{z} + H^H \underline{w} \\ &= (|h_0|^2 + |h_1|^2) \underline{z} + H^H \underline{w} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\underline{z}} &= \begin{bmatrix} \hat{z}_0 \\ \hat{z}_1 \end{bmatrix} \\ H^H H &= \begin{bmatrix} h_0^* & h_1 \\ h_1^* & -h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1^* & -h_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |h_0|^2 + |h_1|^2 & h_0^* h_1 - h_1 h_0^* \\ h_1^* h_0 - h_0 h_1^* & |h_0|^2 + |h_1|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |h_0|^2 + |h_1|^2 & 0 \\ 0 & |h_0|^2 + |h_1|^2 \end{bmatrix} = (|h_0|^2 + |h_1|^2) I = (|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2) I \end{aligned}$$

$$H^H \underline{w} = \begin{bmatrix} h_0^* & h_1 \\ h_1^* & -h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^* w_0 + h_1 w_1^* \\ h_1^* w_0 - h_0 w_1^* \end{bmatrix}$$

所以最後可以簡化成下列的兩個式子

$$\hat{z}_0 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) z_0 + h_0^* w_0 + h_1 w_1^* \quad (7)$$

$$\hat{z}_1 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) z_1 + h_1^* w_0 - h_0 w_1^* \quad (8)$$

我們用 maximum likelihood 偵測器來還原訊號，並且可以將訊號分開偵測。當接收到訊號時，來比較它和訊號星座圖的哪一個較靠近，就判定傳送端所傳的訊號。不管是訊號 z_0, z_1 ，在最後判定的時候會乘上 $(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)$ 項，也就是當其中經歷的頻道衰減非常嚴重時，另外一個頻道可以把訊號救回來，因為同時兩個頻道都很差的機率不是很高，所以由式子中可以很容易的看出可以有效改善通訊品質。不過此處是假設接收端可以將頻道的資訊很準確的估測出來，所以頻道已經已知，才可以做類似匹配濾波器的方式來解調訊號。



2.4 傳輸多元化 (Transmit Diversity): 時空編碼效能分析

從上一節我們可以知道, 運用兩根天線的 Alamouti 編碼設計, 可以有效的克服因為瑞雷衰減的問題, 使錯誤率變得更低, 達到了天線多元化。接著, 我們使用機率的方式, 探討在兩根傳送天線的正交編碼設計下, 它的錯誤率和訊雜比的效能分析。

同樣地, 在瑞雷衰減的情況下, 若每一個衰減係數 h_l 都是獨立且相同的複數高斯隨機變數, 如 (2) 式, 其機率密度函數 (probability density function) 也是 Chi-square 分佈, 如 (3) 式, 當只有兩根天線傳送一根天線接收時, 也就是有兩路頻道衰減 $h_0, h_1, L=2$, 所以 (3) 式變成

$$f_x(x) = xe^{-x}$$

我們知道, 在一般的情況下, 錯誤率可以寫成 [9]

$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{x\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

γ 是訊號與雜訊比值 (SNR)。 E_b 是每個位元 (bit) 的能量 (energy)。 N_0 是高斯白雜訊的功率頻譜密度。同樣的, 必須對錯誤率取期望值, 得到平均錯誤率。詳細推導在附錄3.2。

$$\begin{aligned} P_e &= E[P_e(x)] = \int_0^{\infty} P_e(x) f_x(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{x\frac{E_b}{N_0}}\right) x e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\sqrt{x\gamma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) x e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma+2} \end{aligned} \quad (9)$$

因為時空編碼在接收端的部分需要頻道的參數, 才能做解調的動作, 因此在接收器的部分勢必要有準確估測出頻道參數的設備, 導致複雜度升高, 所以有一種不須要頻道參數的技術, 稱做差分時空編碼, 它是一種仿照單一天線的編碼方式, 就是在傳送端和接收端做一些適當的設計, 使得在偵測訊號時不用作頻道估測, 接收器因而可以簡易的實現, 我們將在下一章介紹, 不過缺點就是會比同調的接收器 (coherent receiver) 差了大約3dB。

第三章 差分時空編碼

傳送多元化 (transmit diversity) 便廣泛的應用在無線通訊上, 最簡單的就是 Alamouti code[5], 它是兩根天線的正交編碼設計, 也就是在兩個時刻 (time slot) 中傳送兩個訊號, 而排列的方式是要讓兩根天線的訊號互相正交, 達到傳送獨立, 互不干擾為原則。多根天線的正交設計在 [3]中有討論。我們把兩根天線的編碼設計方法 [5]運用在差分時空編碼上, 同樣的, 這種差分的方式 [2], 傳送端和接收端都不需要頻道的資訊 (channel state information), 簡稱 (CSI), 因此接收端可以一個訊號一個訊號偵測, 對於實現來說會較容易, 不需做的太複雜。不過, 差分接收器的效能會比同調接收器差 3dB 左右。利用 amicable orthogonal designs[4],[10]的方式, 可以把 4,8 根天線的正交編碼設計應用上去, 達到更好的多元化效能。

3.1 頻道數學模型 (Channel Model)

要描述訊號經過頻道和雜訊的影響, 我們考慮一個通訊連結, 有 M 個傳送天線和 N 個接收天線在瑞雷 (Rayleigh) 衰減頻道下的數學模型。每一個傳送天線和接收天線的環境都是假定統計獨立 (statistically independent) 的衰減係數, 且受到相加性雜訊的影響, 也是在 N 個接收天線中互相獨立的。我們使用複數基頻的表示方法, 當在時間 τ 時我們傳送複數訊號 $z_{m\tau}$ $m = 1 \cdots M$, 而接收到的訊號 $r_{n\tau}$ $n = 1 \cdots N$, 所以頻道模組可以表示成

$$r_{n\tau} = \sum_{m=1}^M h_{\tau nm} z_{m\tau} + w_{n\tau} \quad \tau = 0, 1, 2, \cdots \quad n = 1, 2, \cdots, N \quad (10)$$

這邊的 $h_{\tau nm}$ 是第 m 個傳送天線和第 n 個接收天線在時間 τ 時的頻道複數衰減係數, 如果假設衰減係數對 m, n 都是獨立的, 它們是複數高斯分佈 (complex Gaussian-distribution) $CN(0, \sigma^2)$, 它的大小 (amplitude) 是瑞雷分佈, 相位則是均勻分佈 (uniform-distribution)。而 $w_{n\tau}$ 是在接收天線 n 和時間 τ 的相加性的雜訊, 且每個都是獨立且相同 (i.i.d) 的複數高斯分佈 $CN(0, \sigma^2)$ 。頻道參數 $h_{\tau mn}$ $m = 1 \cdots M$ $n = 1 \cdots N$ 都是傳送端和接收端所不知道的。一個時間區塊為 T , 則收送訊號方程式可以改寫成:

$$R_\tau = H_\tau S_\tau + W_\tau \quad (11)$$

其中

$$R_\tau = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1T} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NT} \end{bmatrix}_{N \times T} \quad H_\tau = \begin{bmatrix} h_{\tau 11} & h_{\tau 12} & \dots & h_{\tau 1M} \\ h_{\tau 21} & h_{\tau 22} & \dots & h_{\tau 2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\tau N1} & h_{\tau N2} & \dots & h_{\tau NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$$

$$S_\tau = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1T} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M1} & z_{M2} & \dots & z_{MT} \end{bmatrix}_{M \times T} \quad W_\tau = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1T} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{NT} \end{bmatrix}_{N \times T}$$

M : 傳送端天線 N : 接收端天線

R_τ : 接收到的訊號矩陣, 維度是 $N \times T$

H_τ : 頻道衰減係數矩陣, 維度是 $N \times M$

S_τ : 經過差分編碼後的訊號矩陣, 維度是 $M \times T$

W_τ : 相加性的高斯白雜訊矩陣, 每一個元素都是獨立且相同的, 它的期望值是零, 變異數是 σ^2 , 即 $CN(0, \sigma^2)$, 維度是 $N \times T$

若我們假設 $T = M$, 則矩陣的維度會變成下列的式子

$$R_\tau = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1M} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NM} \end{bmatrix}_{N \times M} \quad H_\tau = \begin{bmatrix} h_{\tau 11} & h_{\tau 12} & \dots & h_{\tau 1M} \\ h_{\tau 21} & h_{\tau 22} & \dots & h_{\tau 2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\tau N1} & h_{\tau N2} & \dots & h_{\tau NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$$

$$S_\tau = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1M} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M1} & z_{M2} & \dots & z_{MM} \end{bmatrix}_{M \times M} \quad W_\tau = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1M} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$$

這裡我們假定頻道衰減係數矩陣 H_τ 和相鄰的 $H_{\tau-1}$ 幾乎相等, 如下式

$$H_\tau \simeq H_{\tau-1} \quad \tau = 1, 2, 3 \dots$$

3.2 Amicable orthogonal designs

$\{X_j\}_{j=1}^K$ $\{Y_j\}_{j=1}^K$ 共有 $2K$ 個矩陣, 且維度是 $M \times M$ 滿足下列的關係式:

$$\begin{aligned} X_j X_j^H &= I & Y_j Y_j^H &= I & \forall j \\ X_j X_k^H &= -X_k X_j^H & Y_j Y_k^H &= -Y_k Y_j^H & \forall j \neq k \\ X_j Y_k^H &= Y_k X_j^H & & & \forall j, k \end{aligned}$$

I 代表單位矩陣, H 表示共軛轉置, 若是 $\{X_j\}_{j=1}^K$ $\{Y_j\}_{j=1}^K$ 滿足上列式子, 則稱為 Amicable orthogonal designs。共有 K 個變數, 且維度是 M 。

3.3 訊號編碼 (Unitary Constellations)

ξ 是屬於訊號的星座圖, 也就是說 $z_k \in \xi$ 並且滿足 $|z_k|^2 = 1$ 。么正星座圖就是 BPSK, QPSK, 和 8PSK。如下所示:

$$\xi = \{e^{j\frac{l2\pi}{2^b}} | l = 0, 1, \dots, 2^b - 1\} \quad (12)$$

一個區塊碼有 K 個訊號 $\{z_k\}_{k=1}^K$, 當它在時間 τ 時傳送的訊號如下: 定義

$$Z_\tau = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^K (X_k z_k^R + j Y_k z_k^I) \quad (13)$$

其中 $z_k = z_k^R + j z_k^I$ z_k^R 是 z_k 的實部, z_k^I 是 z_k 的虛部。我們可以很容易的表示成

$$Z_\tau Z_\tau^H = Z_\tau^H Z_\tau = \frac{1}{K} \left(\sum_{k=1}^K |z_k|^2 \right) I_{M \times M} = I_{M \times M}$$

因此, Z_τ 是一個么正矩陣。

3.4 差分編碼 (Differential modulation)

在傳送訊號的起始條件是 $S_0 = I$, 傳送訊號矩陣在時間 τ 可以表示成

$$S_\tau = S_{\tau-1} Z_\tau \quad (14)$$

假設 $S_{\tau-1}S_{\tau-1}^H = I$ 是么正矩陣 $S_{\tau}S_{\tau}^H = S_{\tau-1}Z_{\tau}Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H = I$

既然 $S_0S_0^H = I$ ，我們可以得到 $S_{\tau}S_{\tau}^H = I$ 所以 S_{τ} 也是么正矩陣。

3.5 差分時空編碼解調方式

接收到的訊號矩陣在時間 τ 時

$$R_{\tau} = H_{\tau}S_{\tau} + W_{\tau} = H_{\tau}S_{\tau-1}Z_{\tau} + W_{\tau} \quad (15)$$

我們使用 Maximum likelihood (ML) 來估測訊號 $\{z_k\}_{k=1}^K$

$$\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K = \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} Tr[(R_{\tau} - H_{\tau}S_{\tau-1}Z_{\tau})^H (R_{\tau} - H_{\tau}S_{\tau-1}Z_{\tau})] \quad (16)$$

其中 $Tr(\cdot)$ 是 trace 運算符號, 接收器可以被化簡成

$$\begin{aligned} &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} Tr[(R_{\tau}^H - Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H)(R_{\tau} - H_{\tau}S_{\tau-1}Z_{\tau})] \\ &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} Tr[R_{\tau}^H R_{\tau} - R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau} - Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H R_{\tau} + Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau}] \\ &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} Tr[R_{\tau}^H R_{\tau} + Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau} - R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau} - Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H R_{\tau}] \\ &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} Tr[R_{\tau}^H R_{\tau} + S_{\tau-1} Z_{\tau} Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H H_{\tau} - R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau} - Z_{\tau}^H S_{\tau-1}^H H_{\tau}^H R_{\tau}] \\ &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \xi} \{Tr[R_{\tau}^H R_{\tau}] + Tr[H_{\tau}^H H_{\tau}] - 2Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau})]\} \\ &= \arg \max_{\{z_k\}, z_k \in \xi} \{Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} Z_{\tau})]\} \end{aligned} \quad (17)$$

將 $Z_{\tau} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^K (X_k z_k^R + jY_k z_k^I)$ 代入, 則 ML 接收器將會變成

$$\begin{aligned} &= \arg \max_{\{z_k\}, z_k \in \xi} \{Real[Tr[R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^K (X_k z_k^R + jY_k z_k^I)]]\} \\ &= \arg \max_{\{z_k\}, z_k \in \xi} \left\{ \sum_{k=1}^K [Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} X_k z_k^R)] + Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} jY_k z_k^I)]] \right\} \\ &= \arg \max_{\{z_k\}, z_k \in \xi} \left\{ \sum_{k=1}^K [Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} X_k z_k^R)] + Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} jY_k z_k^I)]] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

將之分解成 K 個一維的式子, 所以 ML 接收器要偵測訊號 z_k 將會變成

$$\hat{z}_k = \arg \max_{z_k \in \xi} \{Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} X_k z_k^R)] + Real[Tr(R_{\tau}^H H_{\tau} S_{\tau-1} jY_k z_k^I)]\} \quad (19)$$

這是一個同調 (coherent) 的接收器, 但是在差分 (differential) 的情形下, 接收端不知頻道參數, 因此不知道 $H_\tau S_{\tau-1}$, 而接收端在時間 $\tau - 1$ 時的訊號為

$$R_{\tau-1} = H_\tau S_{\tau-1} + W_{\tau-1} \quad (20)$$

$W_{\tau-1}$ 是高斯白雜訊, $R_{\tau-1}$ 可以被看成用來偵測 $H_\tau S_{\tau-1}$, 將 $H_\tau S_{\tau-1}$ 用 $R_{\tau-1}$ 代入得到下式差分接收器:

$$\hat{z}_k = \arg \max_{z_k \in \xi} \{ \text{Real}[\text{Tr}(R_\tau^H R_{\tau-1} X_k) z_k^R] + \text{Real}[\text{Tr}(R_\tau^H R_{\tau-1} j Y_k) z_k^I] \} \quad (21)$$

用上式將訊號還原回來。此一結構有較低的複雜度, 且它 SNR 會比同調的接收器差 3dB。

3.6 同調時空編碼效能分析

在同調接收器中, 同樣的, 我們一樣可以用 (9) 式來分析 (19) 式所模擬出來的結果。我們知道, 錯誤率可以寫成

$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{x \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

因為錯誤率會一直變動, 必須對錯誤率取期望值, 得到平均錯誤率。

$$\begin{aligned} P_e &= E[P_e(x)] = \int_0^\infty P_e(x) f_x(x) dx \\ &= \int_0^\infty Q\left(\sqrt{x \frac{E_b}{N_0}}\right) x e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma+2} \end{aligned}$$

3.7 非方形 (Non square) 正交設計

若需要 3,5,6,7 根天線的正交編碼設計, 則可以利用下式:

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_M = [I_{M \times M} \ 0_{M \times (8-M)}] \quad (22)$$

$$\phi_5 = [I_{5 \times 5} \ 0_{5 \times 3}] \quad \phi_6 = [I_{6 \times 6} \ 0_{6 \times 2}] \quad \phi_7 = [I_{7 \times 7} \ 0_{7 \times 1}]$$

在差分時空編碼中, 我們使用非方形的正交設計, 接收矩陣方程式可以寫成

$$R_\tau = H\phi_3 S_\tau^{(4)} + W_\tau \quad (23)$$

$$= \tilde{H} S_\tau^{(4)} + W_\tau \quad (24)$$

其中 $\tilde{H} = H\phi_3$ $S_\tau^{(4)}$ 是經過差分編碼後的訊號, 維度是 4×4 。

同樣的, 在差分時空編碼中

$$R_\tau = H\phi_M S_\tau^{(8)} + W_\tau \quad M = 5, 6, 7 \quad (25)$$

$$= \tilde{H} S_\tau^{(8)} + W_\tau \quad (26)$$

其中 $\tilde{H} = H\phi_M$ $M=5,6,7$ $S_\tau^{(8)}$ 是經過差分編碼後的訊號, 維度是 8×8 。



第四章 快速差分時空編碼

在無線通訊的環境下，必須準確的估測頻道的參數，或假設頻道是已知的，就可以用類似匹配濾波器的方式解調訊號。不過當頻道在時變且高速的情況下，無時無刻都在改變，且改變的非常快速，使得接收端的實現相當複雜。為了解決這個問題，[6]中提出一個時空編碼的新技術，稱作差分時空編碼，它是假設一個區塊時間和它下一個時間內的頻道參數不太改變的情況下，在傳送端做一個編碼的動作，使接收端可以做得較簡單。好處是它並不需要作通道的估測。而此新的傳輸技術是使用多根傳送天線，一根接收天線，且傳送端和接收端都不知道頻道的資訊 (channel state information)，這種方法不會使接收端複雜化。此架構是用傳統的正交編碼的技術加上一些差分編碼所構成，如此接收端用非同調的偵測方法就可以將訊號還原回來 [1]。就因為傳送端和接收端都需要正交編碼設計的資訊，因此顯得格外的重要。若能適當的設計，便可以在環境很差時，降低錯誤率的發生。正交編碼設計可分為方形設計 (square) 和非方形設計 (nonsquare)，我們將使用不同的 2,4,8 根天線方形設計 [4]，和 3,5,6,7 根天線的非方形設計，來達到效能的改善。

4.1 頻道數學模型 (Channel Model)

同樣考慮一個通訊連結，有 M 個傳送天線和 N 個接收天線在瑞雷 (Rayleigh) 衰減頻道下的數學模型。我們將 (11) 式取共軛轉置並且作些處理，得到

$$R_{\tau}^H = \sqrt{\rho} S_{\tau}^H H_{\tau}^H + W_{\tau}^H \quad (27)$$

其中 ρ 是每一根接收天線的平均訊號與雜訊比值 (SNR)。傳送的訊號必須滿足

$$E \sum_{\tau=1}^T \sum_{m=1}^M |z_{\tau m}|^2 = T \quad (28)$$

E 是期望值 (expectation)，也就是說，傳送訊號的總功率和傳送天線 M 無關。若我們定義

$$\bar{R}_{\tau} = R_{\tau}^H \quad \bar{S}_{\tau} = S_{\tau}^H \quad \bar{H}_{\tau} = H_{\tau}^H \quad \bar{W}_{\tau} = W_{\tau}^H$$

在一個區塊碼 T 的時間傳送的訊號，收送的訊號式子可以改寫成

$$\bar{R}_{\tau} = \sqrt{\rho} \bar{S}_{\tau} \bar{H}_{\tau} + \bar{W}_{\tau} \quad (29)$$

其中

$$\bar{R}_\tau = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{T1} & r_{T2} & \cdots & r_{TN} \end{bmatrix}_{T \times N} \quad \bar{S}_\tau = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1M} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{T1} & z_{T2} & \cdots & z_{TM} \end{bmatrix}_{T \times M}$$

$$\bar{H}_\tau = \begin{bmatrix} h_{\tau 11} & h_{\tau 12} & \cdots & h_{\tau 1N} \\ h_{\tau 21} & h_{\tau 22} & \cdots & h_{\tau 2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\tau M1} & h_{\tau M2} & \cdots & h_{\tau MN} \end{bmatrix}_{M \times N} \quad \bar{W}_\tau = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{T1} & w_{T2} & \cdots & w_{TN} \end{bmatrix}_{T \times N}$$

M : 傳送端天線 N : 接收端天線

\bar{R}_τ : 接收到的複數矩陣訊號 $\bar{R}_\tau = (r_{\tau n})$, 且 $\bar{R}_\tau \in C^{T \times N}$

ρ : 每一根接收天線的訊號與雜訊比值 (SNR), 和傳送端的天線數目 M 無關。

\bar{H}_τ : 瑞雷 (Rayleigh) 頻道衰減係數矩陣, $\bar{H}_\tau = (h_{mn})$, 且 $\bar{H}_\tau \in C^{M \times N}$, 假設在一個區塊內和時間無關。

\bar{S}_τ : 經過差分編碼後的矩陣訊號, $\bar{S}_\tau = (z_{\tau m})$, 且 $\bar{S}_\tau \in C^{T \times M}$

\bar{W}_τ : 每一個矩陣的元素是相加性的高斯白雜訊 $\bar{W}_\tau = (w_{\tau n})$, 它的期望值是零, 變異數是 σ^2 , 且 $\bar{W}_\tau \in C^{T \times N}$

在這個表示式中, \bar{S}_τ 的 M 個行代表訊號用 M 個天線傳送, 且是時間的函數。

我們假定頻道衰減係數矩陣 \bar{H}_τ 和相鄰的 $\bar{H}_{\tau-1}$ 幾乎相等, 如下表示

$$\bar{H}_\tau \simeq \bar{H}_{\tau-1} \quad \tau = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{H}_\tau = \begin{bmatrix} h_{\tau 11} & h_{\tau 12} & \cdots & h_{\tau 1N} \\ h_{\tau 21} & h_{\tau 22} & \cdots & h_{\tau 2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\tau M1} & h_{\tau M2} & \cdots & h_{\tau MN} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} h_{(\tau-1)11} & h_{(\tau-1)12} & \cdots & h_{(\tau-1)1N} \\ h_{(\tau-1)21} & h_{(\tau-1)22} & \cdots & h_{(\tau-1)2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{(\tau-1)M1} & h_{(\tau-1)M2} & \cdots & h_{(\tau-1)MN} \end{bmatrix} = \bar{H}_{\tau-1}$$

4.2 Generalized Real and Complex Orthogonal Designs

以下我們介紹廣義正交設計 (generalized orthogonal designs) 的理論 [1],[4]。

實數正交設計 ϑ 是一個集合, 它是由一群維度 $T \times M (T \geq M \geq 1)$ 的矩陣所構成, 而這些矩陣是以實數變數 x_1, x_2, \dots, x_K 在實數系 (real field) R 的線性組合所表示而成, 廣義實數正交設計集合 ϑ 可以被表示成

$$\vartheta = \vartheta(x_1, x_2, \dots, x_K) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_K A_K \quad (30)$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_K 是常實數方形矩陣 $\mathfrak{R}^{T \times M}$, 並且滿足

$$\vartheta^T \vartheta = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_K^2) I_{M \times M} \quad (31)$$

其中 $I_{M \times M}$ 是 $M \times M$ 的單位矩陣, ϑ 的編碼率 (code rate) 定義成 $\frac{K}{T}$, 當 $T = M$ 時, 集合 ϑ 被稱作實數方形正交設計。

廣義複數正交設計 ν 是一個集合, 它是由一群維度 $T \times M (T \geq M \geq 1)$ 的矩陣所構成, 而這些矩陣是以複數變數 z_1, z_2, \dots, z_K 和 $z_1^*, z_2^*, \dots, z_K^*$ 在複數系 (complex field) C 的線性組合所表示而成, 廣義複數正交設計集合 ν 可以被表示成

$$\nu = \nu(z_1, z_2, \dots, z_K) = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_K A_K + z_1^* B_1 + z_2^* B_2 + \dots + z_K^* B_K \quad (32)$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_K 和 B_1, B_2, \dots, B_K 是常複數方形矩陣 $C^{T \times M}$, 且滿足

$$\nu^H \nu = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_K|^2) I_{M \times M} \quad (33)$$

要使上式等號要成立, A_1, A_2, \dots, A_K 和 B_1, B_2, \dots, B_K 必須要滿足

$$\begin{aligned} A_k^H A_k + B_k^H B_k &= I & A_j^H A_k + B_k^H B_j &= 0 & A_j^H B_k + A_k^H B_j &= 0 & A_k^H B_k &= 0 \\ A_k^H A_j + B_j^H B_k &= 0 & B_k^H A_j + B_j^H A_k &= 0 & B_k^H A_k &= 0 & 1 \leq j \neq k \leq K & \end{aligned}$$

詳細的說明在附錄 1。

ν 的編碼率 (code rate) 定義成 $\frac{K}{T}$, 當 $T = M$ 時, ν 被稱作複數方形正交設計。

4.3 訊號編碼 (Unitary Constellations)

考慮一個 2^b -PSK 訊號的星座圖 Ψ , z_1, z_2, \dots, z_K 是 PSK 的訊號, 而訊號的星座圖 [11]如下所示:

$$\Psi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} e^{j \frac{l2\pi}{2^b}} \mid l = 0, 1, \dots, 2^b - 1 \right\} \quad (34)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 。當獲得這些訊號 $z_k \in \Psi$ for $k = 1, 2, \dots, K$

我們可以做適當的訊號編碼, 稱作 proper complex square orthogonal design, $\nu = \nu(z_1, z_2, \dots, z_K)$,

將 K 個訊號 z_1, z_2, \dots, z_K 轉換成維度 $M \times M$ 的複數矩陣訊號 $V = \nu$, 如下列式子: 假設 $T = M$

$$V = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_K A_K + z_1^* B_1 + z_2^* B_2 + \dots + z_K^* B_K \quad (35)$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_K 和 B_1, B_2, \dots, B_K 是常複數方形矩陣 $C^{M \times M}$ 。它們是傳送端和接收端都知道的資訊。我們可以很容易的知道, 訊號 V 是一個么正矩陣 (unitary matrix):

$$V^H V = V V^H = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_K|^2) I_{M \times M} \quad (36)$$

對所有的訊號 $z_k \in \Psi$ for $k = 1, 2, \dots, K$

此正交設計, A_1, A_2, \dots, A_K 和 B_1, B_2, \dots, B_K 必須滿足

$$\begin{aligned} A_k^H A_k + B_k^H B_k &= A_k A_k^H + B_k B_k^H = I & k = 1, \dots, K \\ A_k^H A_j + B_j^H B_k &= A_j A_k^H + B_k B_j^H = 0 & 1 \leq j \neq k \leq K \\ B_k^H A_j + B_j^H A_k &= A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0 & 1 \leq j \neq k \leq K \\ A_k^H B_k &= A_k B_k^H = 0 & 1 \leq k \leq K \end{aligned}$$

以下是對於 code rate 為 1 的 2, 4, 8 根天線正交編碼設計, 它們每一列跟每一列之間都是正交。

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_2 & z_1 & z_4 & -z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 & -z_5 & -z_6 & -z_7 & -z_8 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 & -z_6 & z_5 & z_8 & -z_7 \\ z_3 & z_4 & z_1 & -z_2 & -z_7 & -z_8 & z_5 & z_6 \\ z_4 & -z_3 & z_2 & z_1 & -z_8 & z_7 & -z_6 & z_5 \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_6 & -z_5 & z_8 & -z_7 & z_2 & z_1 & z_4 & -z_3 \\ z_7 & -z_8 & -z_5 & z_6 & z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_8 & z_7 & -z_6 & -z_5 & z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

4.4 差分編碼 (Differential modulation)

接著, 我們用造出來的訊號作差分編碼, 並且用傳輸天線傳輸出去。式子如下

在傳送訊號的起始條件是 $\bar{S}_0 = I$, 傳送訊號矩陣在時間 τ 可以表示成

$$\bar{S}_\tau = V \bar{S}_{\tau-1} \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (37)$$

4.5 快速差分時空編碼解調方式

我們將接收訊號方程式在前一個時刻時, 改寫成下式:

$$\bar{R}_{\tau-1} = \sqrt{\rho} \bar{S}_{\tau-1} \bar{H}_{\tau-1} + \bar{W}_{\tau-1} = \sqrt{\rho} \bar{S}_{\tau-1} \bar{H}_\tau + \bar{W}_{\tau-1} \quad (38)$$

等式兩邊同時乘上訊號 V

$$V \bar{R}_{\tau-1} = \sqrt{\rho} V \bar{S}_{\tau-1} \bar{H}_\tau + V \bar{W}_{\tau-1}$$

將 $\bar{S}_\tau = V \bar{S}_{\tau-1}$ 代入 $\bar{R}_\tau = \sqrt{\rho} \bar{S}_\tau \bar{H}_\tau + \bar{W}_\tau$ 得到

$$\bar{R}_\tau = \sqrt{\rho} V \bar{S}_{\tau-1} \bar{H}_\tau + \bar{W}_\tau = V \bar{R}_{\tau-1} + \bar{W}_\tau - V \bar{W}_{\tau-1} \quad (39)$$

$$\bar{R}_\tau = V \bar{R}_{\tau-1} + \sqrt{2} \bar{W}'_\tau \quad (40)$$

我們定義

$$W'_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{W}_\tau - V\bar{W}_{\tau-1}) \quad (41)$$

其中上式是維度為 $T \times N$ 的相加性獨立高斯矩陣。

(40) 式稱為基本差分接收方程式 [6]。

接著我們使用 maximum-likelihood 差分時空編碼解調方式，經過一些數學的推導，轉變成最小距離偵測器，也就是當接收到訊號時，和已知的訊號星座圖相比較，和哪一個訊號較接近就判定傳送端是該訊號，即有效的將經過頻道的訊號還原回來。

由基本差分方程式 (40) 知，接收到的複數矩陣訊號 $\bar{R}_\tau \in C^{T \times N}$ ，經過差分編碼後的矩陣訊號 $V \in C^{T \times T}$ ，相加性的高斯白雜訊 $\bar{W}_\tau \in C^{T \times N}$ ，矩陣裡的元素期望值是零，變異數是 σ^2 。我們用 $vec(\cdot)$ 將矩陣變成向量的形式如下：

$vec(\bar{R}_\tau)$: 接收到的複數矩陣向量，且 $vec(\bar{R}_\tau) \in C^{(TN) \times 1}$

$vec(V)$: 經過差分編碼後的訊號向量，且 $vec(V) \in C^{(TT) \times 1}$

$vec(\bar{W}_\tau)$: 每一個向量裡的元素是相加性的高斯白雜訊，它們的期望值是零，變異數是 σ^2 ，且 $vec(\bar{W}_\tau) \in C^{(TN) \times 1}$

因為雜訊 $vec(W'_\tau)$ 是一個隨機的向量， $vec(V)$ 為事先設計好的正交訊號， $vec(\bar{R}_{\tau-1})$ 是前一個時刻所接收到的訊息，接收端也已知，所以此刻接收到的訊號 $vec(\bar{R}_\tau)$ 是隨機的，完全是受到高斯隨機向量 $vec(W'_\tau)$ 的影響，因此要描述 $vec(\bar{R}_\tau)$ 的條件密度函數 (conditional density function)，就必須先知道 $vec(W'_\tau)$ 的機率分佈。因為 $vec(\bar{W}_\tau)$ ， $vec(\bar{W}_{\tau-1})$ 都是高斯分佈隨機向量，所以 $vec(W'_\tau)$ 也是高斯，且是一個維度為 $TN \times 1$ 的隨機向量，所以只要找到它的期望值 (expectation) 和變異數 (variance) Γ ，就可以決定其機率密度函數，進而獲得 $vec(\bar{R}_\tau)$ 的條件密度函數。對 $vec(W'_\tau)$ 取期望值

$$E[vec(W'_\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[vec(\bar{W}_\tau) - vec(V\bar{W}_{\tau-1})] = 0$$

而它的變異數如下

$$\begin{aligned} E[vec(W'_\tau)vec^H(W'_\tau)] &= E\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}[vec(\bar{W}_\tau) - vec(V\bar{W}_{\tau-1})]\frac{1}{\sqrt{2}}[vec(\bar{W}_\tau) - vec(V\bar{W}_{\tau-1})]^H\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{2}[vec(\bar{W}_\tau) - vec(V\bar{W}_{\tau-1})][vec^H(\bar{W}_\tau) - vec^H(V\bar{W}_{\tau-1})]\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{2}[vec(\bar{W}_\tau)vec^H(\bar{W}_\tau) - vec(\bar{W}_\tau)vec^H(V\bar{W}_{\tau-1})\right. \\ &\quad \left. - vec(V\bar{W}_{\tau-1})vec^H(\bar{W}_\tau) + vec(V\bar{W}_{\tau-1})vec^H(V\bar{W}_{\tau-1})]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left\{ \frac{1}{2} [\text{vec}(\bar{W}_\tau) \text{vec}^H(\bar{W}_\tau) + \text{vec}(V\bar{W}_{\tau-1}) \text{vec}^H(V\bar{W}_{\tau-1})] \right\} \\
&= E \left\{ \frac{1}{2} [\text{vec}(\bar{W}_\tau) \text{vec}^H(\bar{W}_\tau) + (\bar{W}_{\tau-1}^H \otimes I) \text{vec}(V) \text{vec}^H(V) (\bar{W}_{\tau-1}^H \otimes I)^H] \right\} \\
&= E \left\{ \frac{1}{2} [\text{vec}(\bar{W}_\tau) \text{vec}^H(\bar{W}_\tau) + \text{vec}(\bar{W}_{\tau-1}) \text{vec}^H(\bar{W}_{\tau-1})] \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\sigma^2 I + \sigma^2 I) = \sigma^2 I
\end{aligned}$$

其中 $\text{vec}(V) \text{vec}^H(V) = I$ 且用到關係式 (b)。

由上可知, $\text{vec}(W'_\tau)$ 的期望值是 0, 變異數是 $\sigma^2 I$, 因此就可以得到它的機率分佈。而複數高斯隨機變數 (complex Gaussian) w 的分佈是 $CN(0, \Gamma)$, 且 Γ 是可逆 (invertible) 的矩陣, 則 w 的機率密度函數可以寫成

$$p(w) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp \left[-(w^H \Gamma^{-1} w) \right] \quad w \in C^n$$

有 n 個獨立且相同的 (i.i.d) 複數高斯隨機變數 $CN(0, 1)$ 組成高斯隨機向量 w , 可以被表示成 $CN(0, I)$, 將 Γ 用 I 代入, 則它的機率密度函數 (probability density function) 如下

$$p(w) = \frac{1}{\pi^n} \exp(-\|w\|^2) \quad w \in C^n$$

因此, 雜訊的機率分佈如下:

$$p(\text{vec}(W'_\tau)) = \frac{1}{\pi^{TN} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp \left[-\text{vec}^H(W'_\tau) (\sigma^2 I)^{-1} \text{vec}(W'_\tau) \right] \quad \text{vec}(W'_\tau) \in C^{TN} \quad (42)$$

既然已經可以得知雜訊 $\text{vec}(W'_\tau)$ 的機率分佈, 根據基本差分接收方程式, $\text{vec}(V)$, $\text{vec}(\bar{R}_{\tau-1})$ 為已知, 接收向量 $\text{vec}(\bar{R}_\tau)$ 是高斯且條件密度函數 $p(\text{vec}(\bar{R}_\tau) | \text{vec}(V), \text{vec}(\bar{R}_{\tau-1}))$

$$\begin{aligned}
&p(\text{vec}(\bar{R}_\tau) | \text{vec}(V), \text{vec}(\bar{R}_{\tau-1})) \\
&= p(\text{vec}(W'_\tau)) \left| \frac{d[\text{vec}(W'_\tau)]}{d[\text{vec}(\bar{R}_\tau)]} \right|_{\text{vec}(W'_\tau) = \frac{\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{TN} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp \left\{ - \left[\text{vec}^H(W'_\tau) (\sigma^2 I)^{-1} \text{vec}(W'_\tau) \right] \right\} \Big|_{\text{vec}(W'_\tau) = \frac{\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{TN} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp \left\{ - \left[\frac{\text{vec}^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})}{\sqrt{2}} (\sigma^2 I)^{-1} \frac{\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{TN} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp \left\{ - \left[\frac{\text{vec}^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}) \text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})}{2\sigma^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

將條件密度函數 $p(\text{vec}(\bar{R}_\tau)|\text{vec}(V), \text{vec}(\bar{R}_{\tau-1}))$ 取自然對數 \ln 得到

$$\ln p(\text{vec}(\bar{R}_\tau)|\text{vec}(V), \text{vec}(\bar{R}_{\tau-1})) = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^{TN} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \right) - \frac{[\text{vec}^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})]}{2\sigma^2}$$

假設傳送的訊號都是等機率的, 最大概似偵測器 (maximum likelihood detector)(ML) 則是選擇最大的條件密度函數, 如下所示

$$\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K = \arg \max_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \ln p(\text{vec}(\bar{R}_\tau)|\text{vec}(V), \text{vec}(\bar{R}_{\tau-1})) \quad (43)$$

所以變成

$$\arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} [\text{vec}^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})]$$

又因為關係式 (c), 所以

$$\text{vec}^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})\text{vec}(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}) = \text{Tr}[(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})]$$

如此,(ML) 偵測器則可以變成最小距離偵測器 (minimum distance detector) 來將訊號還原回來。

$$\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K = \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \|\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}\|_F^2 \quad (44)$$

$$\Rightarrow \{\hat{z}_k\}_{k=1}^K = \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \|\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}\|_F \quad (45)$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 是Frobenius norm。

由上面的推導可知,maximum-likelihood 偵測器轉變成最小距離偵測器。

$$\begin{aligned} \{\hat{z}_k\}_{k=1}^K &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \|\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}\|_F = \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})^H(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})] \\ &= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \sum_{k=1}^K (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $\lambda_k = \text{Tr}(A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)$ for $k = 1, 2, \dots, K$

$$\lambda_k^* = \text{Tr}(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)$$

上式中的 A_k, B_k 是經過事先設計的, 而 \bar{R}_τ 和 $\bar{R}_{\tau-1}$ 是此一時間接收到的訊號和前一刻接收到的訊號。

詳細的推導在 [1]和附錄3中。我們知道, 使用 maximum-likelihood 來解調, 可以把它轉換成 K 個維

度的最小化問題。

我們有兩個複數共軛的關係式如下：

$$[Tr(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)]^* = Tr[(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)^H] = Tr[\bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H A_k^H] = Tr[A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H]$$

$$[Tr(B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)]^* = Tr[(B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)^H] = Tr[\bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H B_k] = Tr[B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H]$$

我們將 (46) 式分解成 K 個一維的最小化問題

$$\hat{z}_k = \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (47)$$

因為 PSK 特殊的結構, 上式可以化簡成

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \\ &= \arg \min_{z_k \in \Psi} (|z_k|^2 - z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \\ &= \arg \min_{z_k \in \Psi} |z_k - \lambda_k|^2 \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (48)$$

•解調演算法:

以下我們我們將對此解調的演算法做一個扼要的說明:

在接收端中, 當接收到第 τ 個區塊 (block) 的 R_τ 訊號和前一個 $\tau - 1$ 區塊的 $R_{\tau-1}$ 訊號矩陣, 和事先設計的矩陣

$$A_1, A_2, \dots, A_K$$

$$B_1, B_2, \dots, B_K$$

它們是複數方形正交設計集合 \mathcal{V} 中的矩陣, 且維度是 $T \times T$ 。當在 τ 時刻接收到訊號矩陣後, 我們用下列兩個步驟來解調訊號。

步驟 (1): 我們可以先算出

$$\lambda_k = Tr(A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

步驟 (2): 再用下式計算出 \hat{z}_k , 看哪一個訊號和 λ_k 最接近, 若是某個訊號最接近, 則判斷傳送的是該訊號。

$$\hat{z}_k = \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) = \arg \min_{z_k \in \Psi} |z_k - \lambda_k|^2 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

所以偵測的方法和 λ_k 息息相關，所以只要適當的設計正交編碼，傳送端和接收端的 A_k, B_k 都會改變，收到的 $\bar{R}_\tau, \bar{R}_{\tau-1}$ 也會不同，最後再用上列步驟來還原訊號。

4.6 不同的正交編碼設計

因為無線通訊的環境很可能變得很差，並且同時又需要更好的效能，所以正交編碼設計就顯得格外的重要，因為在差分時空編碼中，正交編碼設計是傳送端和接收端都需要知道的資訊，若是能適當的設計，可以使得錯誤率變的更低。所以我們將應用 Wolfe's slide lemma[4]來產生正交編碼設計，此編碼設計不同於 [1]和 [3]，如附錄2所示：

Wolfe's slide lemma:

假設存在有 n_s 對矩陣 $\{X_i\}_{i=1}^{n_s}, \{Y_i\}_{i=1}^{n_s}$ ，它們的大小是 $M \times M$ ，並且滿足 Amicable orthogonal designs，則將存在有 $n_s + 1$ 對 $2M \times 2M$ 的矩陣也滿足此。

定義

$$V_i = X_i X_1^H \quad i = 2 \cdots n_s \quad W_k = Y_k X_1^H \quad k = 1 \cdots n_s$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

考慮有 $n_s + 1$ 對 $2M \times 2M$ 的矩陣如下所示：

$$\bar{X}_1 = I_{2M} \quad \bar{Y}_k = P \otimes W_k \quad k = 1 \cdots n_s$$

$$\bar{X}_i = P \otimes V_i \quad i = 2 \cdots n_s \quad \bar{Y}_{n_s+1} = R \otimes I_M$$

$$\bar{X}_{n_s+1} = J \otimes I_M$$

其中， \otimes 是 Kronecker product。首先即是當我們有了最基本的 Alamouti 碼，得到了 $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}$ 編碼，再利用 Wolfe's slide lemma 產生4根天線的正交編碼設計 $\bar{X}_1^{(4)}, \bar{X}_2^{(4)}, \bar{X}_3^{(4)}, \bar{Y}_1^{(4)}, \bar{Y}_2^{(4)}, \bar{Y}_3^{(4)}$ 。最後再產生8根天線正交設計 $\bar{X}_1^{(8)}, \bar{X}_2^{(8)}, \bar{X}_3^{(8)}, \bar{X}_4^{(8)}, \bar{Y}_1^{(8)}, \bar{Y}_2^{(8)}, \bar{Y}_3^{(8)}, \bar{Y}_4^{(8)}$ 。有了這些正交設計之後，由 [7]及附錄1的正交編碼轉換關係式：

$$A_k = \frac{X_k + Y_k}{2} \quad B_k = \frac{X_k - Y_k}{2}$$

獲得了我們需要的 A_k 及 B_k , 因此, 我們就可以用上一節的解調方法來還原傳送的訊號。而如此的編碼設計, 運用在快速差分時空編碼上, 錯誤率將會比 [3]的設計要來的低, 因此若是環境非常差的時候, 可以有效的改善通訊品質。


我們提出另一種不同的編碼設計, 它是藉由 2×2 的編碼設計, 轉換出偶數根天線的設計, 如下式, 其中 q 是 $1, 2, \dots$ 的整數, I_q 是單位矩陣, Φ_{2q} 則是此編碼的設計。

$$\Phi_{2q} = I_q \otimes \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix} \quad q = 1, 2, \dots \quad (49)$$

4.7 非方形 (Non square) 正交設計

一般的正交設計方式都是方形的 (square), 也就是傳送端的編碼方式, 不外乎是2,4,8根天線的設計, 若需要3,5,6,7根傳送天線的正交編碼設計, 則可以利用 [4]的方法獲得:

$\{X_i^{(4)}\}$ 和 $\{Y_i^{(4)}\}$ 分別是滿足 Amicable orthogonal designs 的 4×4 的編碼設計, 我們可以利用下面的矩陣 ϕ_3 來達到3根天線的正交編碼設計。



$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\phi_3 X_i^{(4)})(\phi_3 X_i^{(4)})^H = \phi_3 X_i^{(4)} X_i^{(4)H} \phi_3^H = \phi_3 \phi_3^H = I_3$$

$$(\phi_3 Y_i^{(4)})(\phi_3 Y_i^{(4)})^H = \phi_3 Y_i^{(4)} Y_i^{(4)H} \phi_3^H = \phi_3 \phi_3^H = I_3$$

$$(\phi_3 X_i^{(4)})(\phi_3 X_j^{(4)})^H = \phi_3 X_i^{(4)} X_j^{(4)H} \phi_3^H = -\phi_3 X_j^{(4)} X_i^{(4)H} \phi_3^H = -(\phi_3 X_j^{(4)})(\phi_3 X_i^{(4)})^H$$

$$(\phi_3 Y_i^{(4)})(\phi_3 Y_j^{(4)})^H = \phi_3 Y_i^{(4)} Y_j^{(4)H} \phi_3^H = -\phi_3 Y_j^{(4)} Y_i^{(4)H} \phi_3^H = -(\phi_3 Y_j^{(4)})(\phi_3 Y_i^{(4)})^H$$

$$(\phi_3 X_i^{(4)})(\phi_3 Y_j^{(4)})^H = \phi_3 X_i^{(4)} Y_j^{(4)H} \phi_3^H = \phi_3 Y_j^{(4)} X_i^{(4)H} \phi_3^H = (\phi_3 Y_j^{(4)})(\phi_3 X_i^{(4)})^H$$

若需要5,6,7根天線的正交編碼設計, 可以利用矩陣下列式子來產生 ϕ_5 ϕ_6 ϕ_7 獲得。

$$\phi_M = [I_{M \times M} \quad 0_{M \times (8-M)}] \quad (50)$$

$$\phi_5 = [I_{5 \times 5} \ 0_{5 \times 3}] \quad \phi_6 = [I_{6 \times 6} \ 0_{6 \times 2}] \quad \phi_7 = [I_{7 \times 7} \ 0_{7 \times 1}]$$

$\{X_i^{(8)}\}$ 和 $\{Y_i^{(8)}\}$ 分別是滿足 Amicable orthogonal designs 的 8×8 的編碼設計。

$$(\phi_M X_i^{(8)})(\phi_M X_i^{(8)})^H = \phi_M X_i^{(8)} X_i^{(8)H} \phi_M^H = \phi_M \phi_M^H = I_M$$

$$(\phi_M Y_i^{(8)})(\phi_M Y_i^{(8)})^H = \phi_M Y_i^{(8)} Y_i^{(8)H} \phi_M^H = \phi_M \phi_M^H = I_M$$

$$(\phi_M X_i^{(8)})(\phi_M X_j^{(8)})^H = \phi_M X_i^{(8)} X_j^{(8)H} \phi_M^H = -\phi_M X_j^{(8)} X_i^{(8)H} \phi_M^H = -(\phi_M X_j^{(8)})(\phi_M X_i^{(8)})^H$$

$$(\phi_M Y_i^{(8)})(\phi_M Y_j^{(8)})^H = \phi_M Y_i^{(8)} Y_j^{(8)H} \phi_M^H = -\phi_M Y_j^{(8)} Y_i^{(8)H} \phi_M^H = -(\phi_M Y_j^{(8)})(\phi_M Y_i^{(8)})^H$$

$$(\phi_M X_i^{(8)})(\phi_M Y_j^{(8)})^H = \phi_M X_i^{(8)} Y_j^{(8)H} \phi_M^H = \phi_M Y_j^{(8)} X_i^{(8)H} \phi_M^H = (\phi_M Y_j^{(8)})(\phi_M X_i^{(8)})^H$$

在快速差分時空編碼中, 接收矩陣方程式可以寫成

$$\bar{R}_\tau = \bar{S}_\tau^{(4)} \phi_3^H \bar{H} + \bar{W}_\tau \quad (51)$$

$$= \bar{S}_\tau^{(4)} \check{H} + \bar{W}_\tau \quad (52)$$

其中 $\check{H} = \phi_3^H \bar{H}$

$$\bar{R}_\tau = \bar{S}_\tau^{(8)} \phi_M^H \bar{H} + \bar{W}_\tau \quad M = 5, 6, 7 \quad (53)$$

$$= \bar{S}_\tau^{(8)} \check{H} + \bar{W}_\tau \quad (54)$$

其中 $\check{H} = \phi_M^H \bar{H} \quad M=5, 6, 7$

而在接收端的接收器的結構要改變成

$$\lambda_k = Tr(\bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H A_k^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

再去做偵測的動作

$$\hat{z}_k = \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

我們延伸出非方形 (non-square) 的正交設計, 使得整個系統可以達到合理的錯誤率需求以及實現。

第五章 模擬與比較

5.1 時空編碼 碼率 (Code rate)

所謂的 (code rate) 是在一個區塊 (block) T 的時間, 傳送幾個訊號 K 。可以寫成 $\frac{K}{T}$ 。當我們使用下列的正交編碼, 每一個編碼的 (code rate) 都是1。

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_2 & z_1 & z_4 & -z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 & -z_5 & -z_6 & -z_7 & -z_8 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 & -z_6 & z_5 & z_8 & -z_7 \\ z_3 & z_4 & z_1 & -z_2 & -z_7 & -z_8 & z_5 & z_6 \\ z_4 & -z_3 & z_2 & z_1 & -z_8 & z_7 & -z_6 & z_5 \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_6 & -z_5 & z_8 & -z_7 & z_2 & z_1 & z_4 & -z_3 \\ z_7 & -z_8 & -z_5 & z_6 & z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_8 & z_7 & -z_6 & -z_5 & z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

5.2 時空編碼模擬與效能分析

此節將對第二章所介紹的做一些分析與模擬, 受到多路徑的影響, 頻道直接乘在訊號上面, 造成訊

號在判斷的困難，方程式 (4) 是用來分析瑞雷衰減對系統所造成的影響，圖 1 便是在瑞雷衰減情況下錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR) 的圖，我們可以看到當 (SNR) 從低到高時，模擬圖始終成直線遞減，錯誤率一直降不太下來。當 SNR 為 10dB 時, BER 大約是 2×10^{-2} 。為了解決這個問題，運用天線多元化，使用多根天線傳送的時空編碼，最簡單的就是 Alamouti 的 2 根天線編碼設計，此編碼的解調方式必須假設頻道已經被理想的估測出來，圖 2 便是此 2 根天線同調接收器的模擬與分析圖，方程式 (7)(8) 是接收器的模擬方程式，它是讓訊號乘上 $(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)$ ，當其中一個頻道衰減嚴重時，另一個頻道也很差的機率不是很高，所以比較可以克服瑞雷衰減，有效的降低 BER。而運用 Alamouti 所模擬的曲線如圖 2 所示，當 SNR 在 10dB 時, BER 已經降得比 0.01 還要低。而 (9) 式則是錯誤率的分析方程式，它是用來分析模擬出來的結果。從圖 2 可以看出由 (7)(8) 式所模擬的曲線和用機率分析的錯誤率曲線程式 (9) 非常的靠近。從上面的結果我們知道，使用兩根傳送天線，一根接收天線來克服瑞雷衰減的問題，可以達到多元化 (diversity) 的效果。圖 3 是方程式 (4) 和 (9) 的關係，增加天線確實讓品質獲得改善。

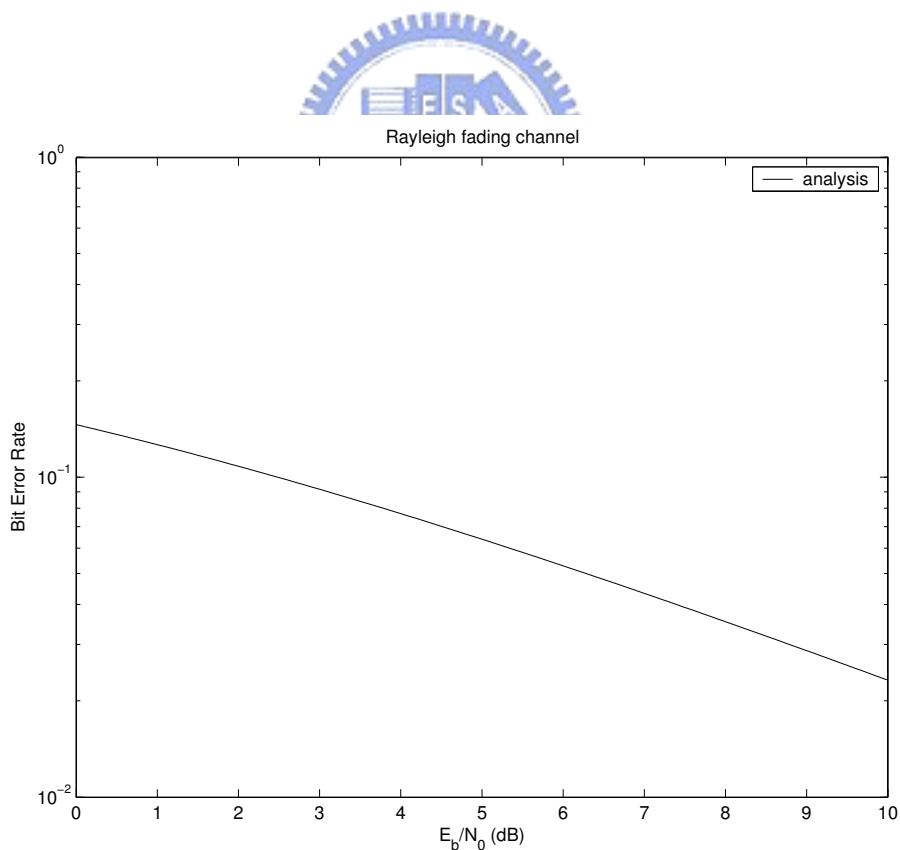


圖 1: 瑞雷衰減錯誤率(BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

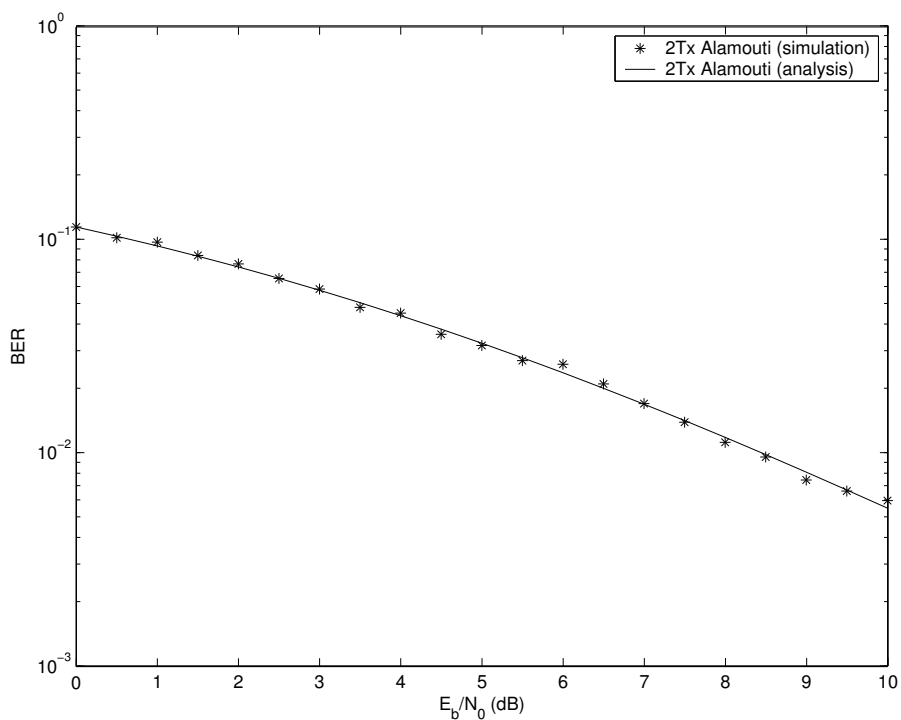


圖 2: 2根天線 Alamouti 的接收器的模擬與分析圖

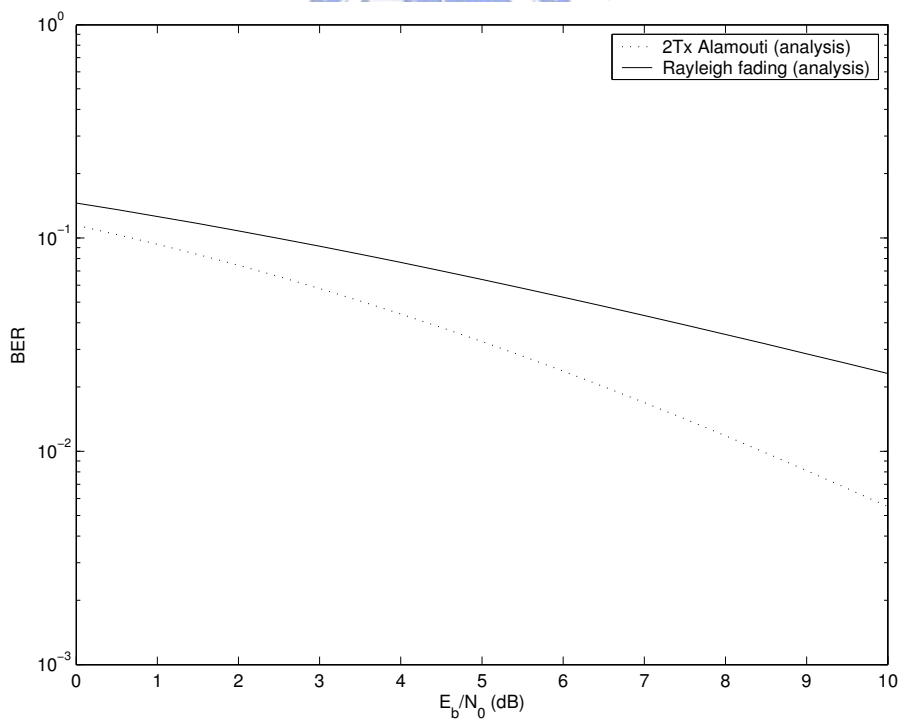


圖 3: 2根傳送天線 1根接收天線錯誤率分析比較圖

5.3 差分時空編碼模擬

此節我們將對第三章的差分編碼接收器做一些模擬與分析，當使用差分編碼的接收器時，相對於同調接收器，此接收器不需要對頻道進行估測，所以複雜度會比較低，可以做的比較簡單，不過它的品質會較差，也就是要達到一定的錯誤率時，差分的接收器要比同調接收器多付出 3dB 的訊號與雜訊比 (SNR)。圖 4 是方程式 (19) 和方程式 (21) 的比較圖。由於頻道模型 $R_{\tau-1} = H_{\tau} S_{\tau-1} + W_{\tau-1}$ 的關係，差分解調器 (21) 式比 (19) 式多出了雜訊矩陣 W_{τ} ，因此解調的效果會較差，增加接收端誤判的機率，簡單的說，就是當需要達到相同錯誤率時，使用差分解調器必須多付出一些額外的能量，也就是增加使用的功率 (power)，使得訊號與雜訊比值 (SNR) 夠大，克服雜訊矩陣所造成的影響。以上是針對兩根天線的編碼設計所作的模擬圖。

若是想進一步增加天線多元化 (transmit diversity)，將錯誤率降的更低，我們可以使用 4,8 根天線的編碼設計，將比 2 根天線的效能更好。圖 5 是用 2,4,8 根天線不同正交編碼方式所模擬的錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR)。我們可以看出，4 根天線錯誤率可以降得比兩根天線還低，當 SNR 在 10dB 時，BER 已經比 10^{-2} 還低了。而 8 根天線的設計則可以降到 10^{-4} 的等級，由此可知，增加越多根傳送天線，錯誤率可以降得更低，通訊品質得以改善，尤其是使用 8 根天線的設計。圖 5 中，在低 SNR 時，增加傳送天線確實可以增加多元化，不過錯誤率降的不是很多，當在高 SNR 時，尤其是 6dB 之後，BER 可以降的更低。

接著我們使用非方形的正交設計，不同於上述的方形正交設計，如圖 6 是非方形的正交設計，對於 3,5,6,7 根天線所模擬的錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR)。我們可以看出，每增加一根傳送天線，都可以增加多元化，有效的將錯誤率降得更低，當 SNR 由低變高時，會更加的明顯。

當我們增加接收天線時，可以增加接收多元化 (receive diversity)，也會改善通訊品質。圖 7 是 2 根天線傳送 2 根天線接收 (2×2) 的模擬圖，它明顯地比 2 根天線傳送 1 根天線接收 (2×1) 的效能要好。當 SNR 在 10dB 時，BER 已經降到 10^{-3} 的等級，比 4 根天線傳送 1 根天線接收 (4×1) 的還要低，所以可以適當的作妥善的應用，不過增加了接收天線，將會造成接收端的複雜化，無法簡單的實現，因此目前一般應用還是集中在傳送多元化的部分。

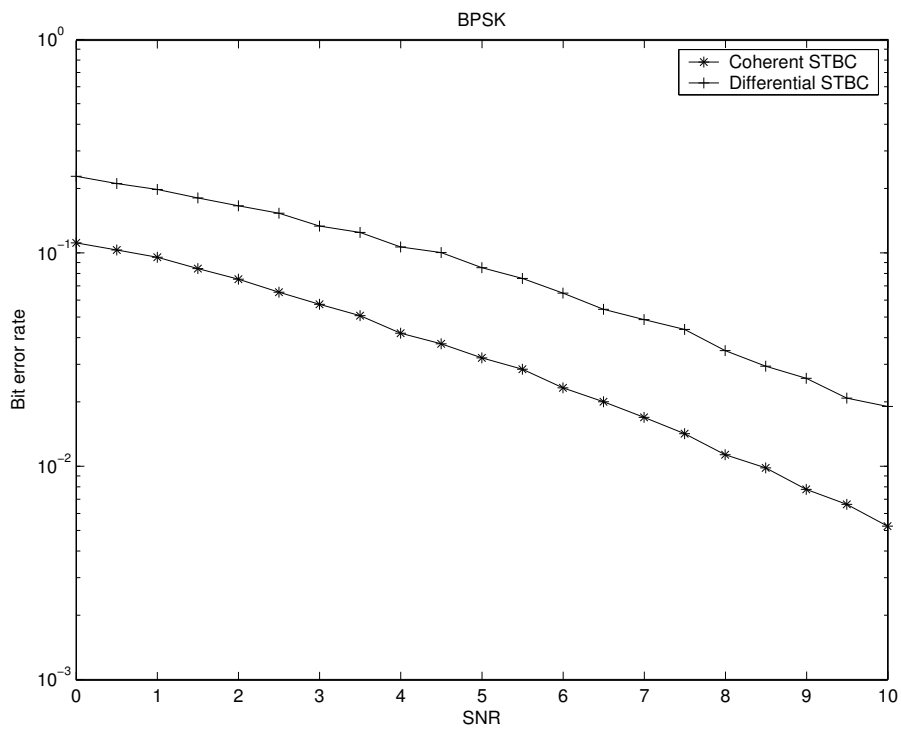


圖 4: 同調接收器與差分接收器錯誤率(BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

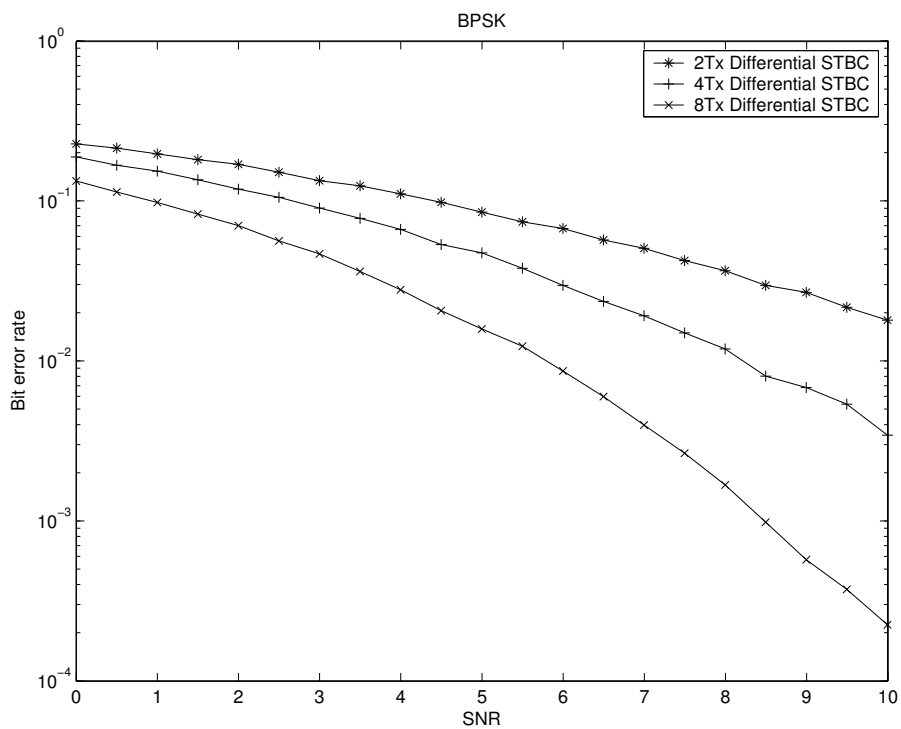


圖 5: 差分時空編碼-2,4,8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

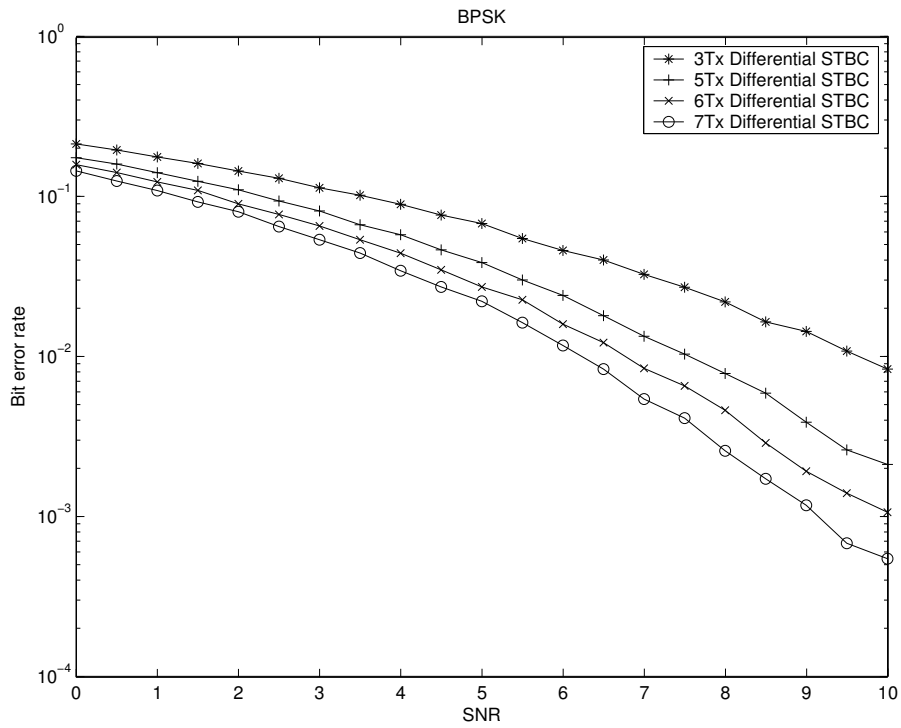


圖 6: 差分時空編碼-非正方形正交設計錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

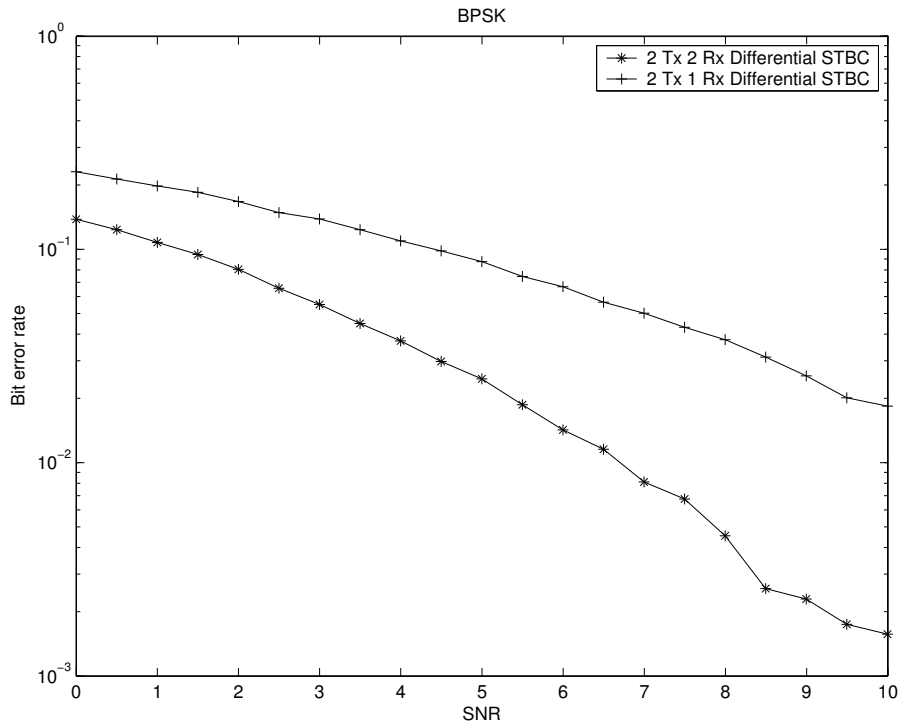


圖 7: 2根傳送天線2根接收天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

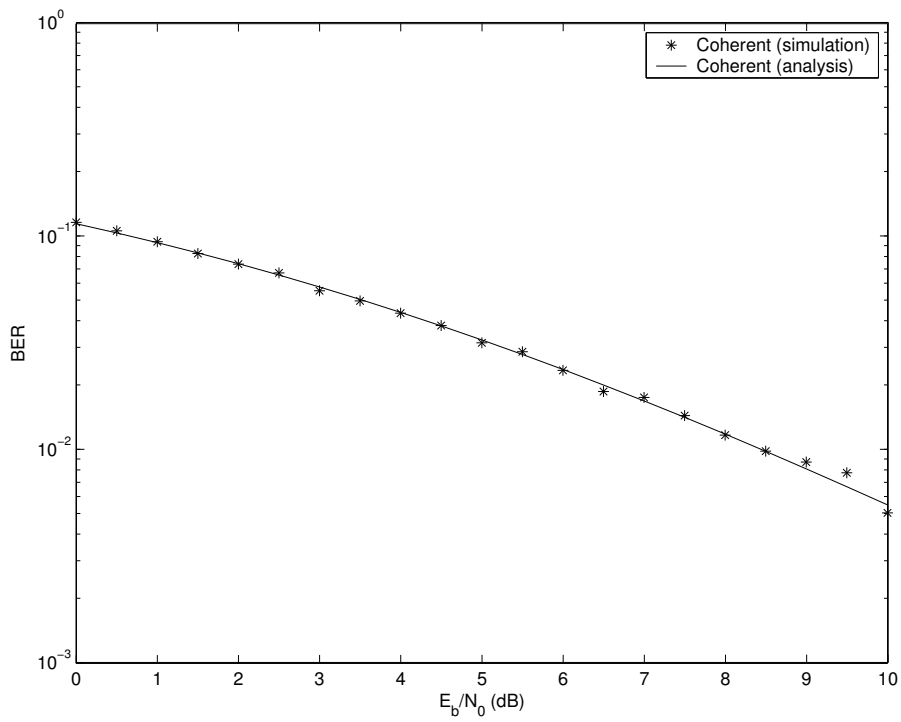


圖 8: 2根天線同調的接收器的模擬與分析圖

在同調接收器中, 假設 $H_\tau S_{\tau-1}$ 已經已知, 所以可以使用 (19) 式來解調訊號, 相同地, 我們也可以用錯誤率的分析方程式 (9) 來分析模擬結果, 它是以2根傳送天線1根接收天線, 如圖8。



5.4 快速差分時空編碼模擬

本節我們將對第四章的快速差分時空編碼的解調器做一些分析與模擬，並且利用 Wolfe's slide lemma 所產生的正交編碼設計，達到多根天線多元化，此設計不同於 [1]和 [3]，且可以有效的降低錯誤率，因此當通訊環境很差，衰減很嚴重的時候，利用此編碼設計，來改善通訊品質。首先，我們使用碼率 (code rate) 為 1 的編碼方式 [3]，模擬出錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR)，如下圖 9 所示：從圖中可知，增加傳送天線的數目的確降低了錯誤率，不過隨著天線呈倍數增加，並沒有改善太多的 BER。在低 SNR 的情況下，2 根天線延伸到 4 根天線時，有些微的改善，不過當從 4 根天線增加到 8 根時，BER 降的又更少，簡單的說，低 SNR 時，BER 幾乎沒多大的變化。而在高 SNR 時，錯誤率有較明顯的改善，2 到 4 根天線 BER 降得較多，不過 8 根天線也是改善較少。接著，將使用不同的正交編碼設

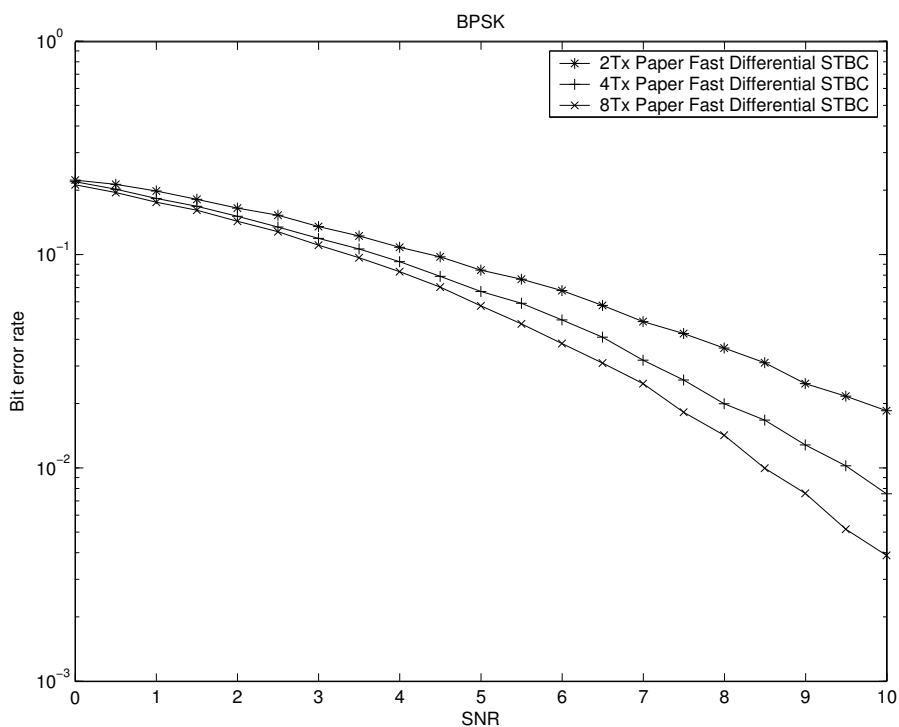


圖 9: 快速差分時空編碼-碼率為 1 的 2, 4, 8 根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

計，我們運用 Wolfe's slide lemma 所產生的 4 根天線正交編碼設計 $\bar{X}_1^{(4)}, \bar{X}_2^{(4)}, \bar{X}_3^{(4)}, \bar{Y}_1^{(4)}, \bar{Y}_2^{(4)}, \bar{Y}_3^{(4)}$ ，經過適當的排列， $\bar{X}_i^{(4)}, i = 1, 2, 3$ 和訊號的實數部分相乘， $\bar{Y}_i^{(4)}, i = 1, 2, 3$ 和訊號的虛部相乘，最後再相加起來，如下 (54) 式所示，就成爲一組新的編碼 $Z_r^{(4)}$ 。

$$Z_{\tau}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sum_{i=1}^3 \bar{X}_i^{(4)} z_i^R + j \sum_{i=1}^3 \bar{Y}_i^{(4)} z_i^I \right] \quad (55)$$

其中 $\bar{X}_i^{(4)}, \bar{Y}_i^{(4)}, i = 1, 2, 3$ 已經被設計, 此 4 根天線的編碼設計的 code rate = $\frac{K}{T} = \frac{3}{4}$ 。重組的編碼設計訊號如下

$$Z_{\tau}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & z_2 & -z_3^* \\ 0 & z_1 & z_3 & z_2^* \\ -z_2^* & -z_3^* & z_1^* & 0 \\ z_3 & -z_2 & 0 & z_1^* \end{bmatrix}$$

接收端在作解調工作時, 必須知道 (A_k, B_k) 或者 (X_k, Y_k) 的資訊, 這和傳送端所設計的正交訊號編碼有關。所以我們可以在傳送端適當的設計時空編碼, 便可以得到較低的錯誤率。不過卻也犧牲了 code rate。我們將 Wolfe's slide lemma 所產生的 (X_k, Y_k) 碼, 再運用 $A_k = \frac{X_k + Y_k}{2}$ $B_k = \frac{X_k - Y_k}{2}$ 獲得 (A_k, B_k) 的設計, 進而去作解調的工作把訊號還原回來。下圖 10 是兩種不同碼率的 4 根天線正交編碼比較圖, 可以看出我們的 code rate 雖然比較低, 但是錯誤率明顯可以比 [1] 壓的還低。在低 SNR 時, BER 就有些微的差距, 而高 SNR 會慢慢地增大差距。

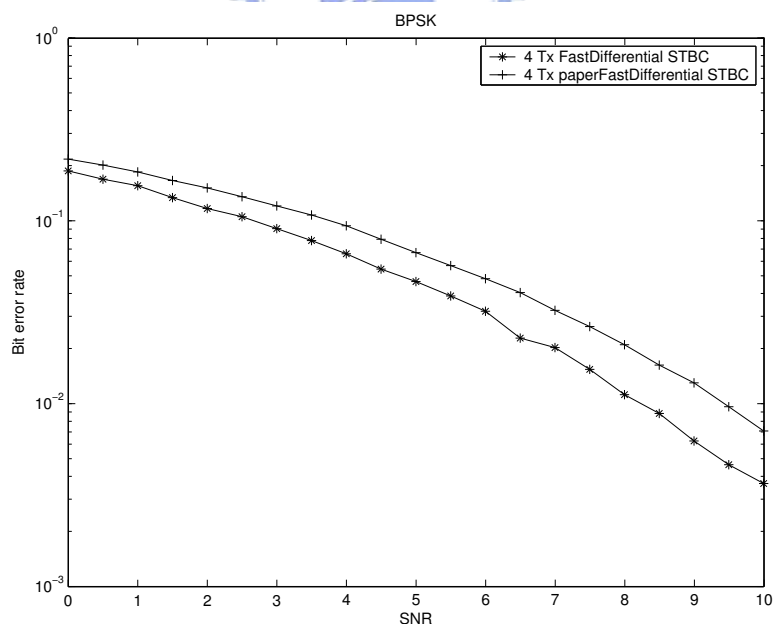


圖 10: 快速差分時空編碼-4 根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

有了4根天線的設計之後, 若再運用一次 Wolfe's slide lemma, 則可以得到8根天線的設計, 如下

$$Z_{\tau}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[\sum_{i=1}^4 \bar{X}_i^{(8)} z_i^R + j \sum_{i=1}^4 \bar{Y}_i^{(8)} z_i^I \right] \quad (56)$$

其中 $\bar{X}_i^{(8)}, \bar{Y}_i^{(8)}, i = 1, 2, 3, 4$ 已經被設計, 此8根天線的編碼設計 code rate = $\frac{K}{T} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 。

$$Z_{\tau}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & z_2 & -z_3^* \\ 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & z_4 & z_3 & z_2^* \\ 0 & 0 & z_1 & 0 & -z_2^* & -z_3^* & z_4^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_3 & -z_2 & 0 & z_4^* \\ -z_4^* & 0 & z_2 & -z_3^* & z_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_4^* & z_3 & z_2^* & 0 & z_1^* & 0 & 0 \\ -z_2^* & -z_3^* & -z_4 & 0 & 0 & 0 & z_1^* & 0 \\ z_3 & -z_2 & 0 & -z_4 & 0 & 0 & 0 & z_1^* \end{bmatrix}$$

下圖 11 是兩種不同 8 根天線正交編碼的比較圖, 可以看出 code rate 雖然較低, 但錯誤率可以壓的低。在低 SNR 時, 錯誤率就有明顯的改善, 已經有一段差距, 當 SNR 慢慢增大, 改善的越多, 錯誤率降的越低。

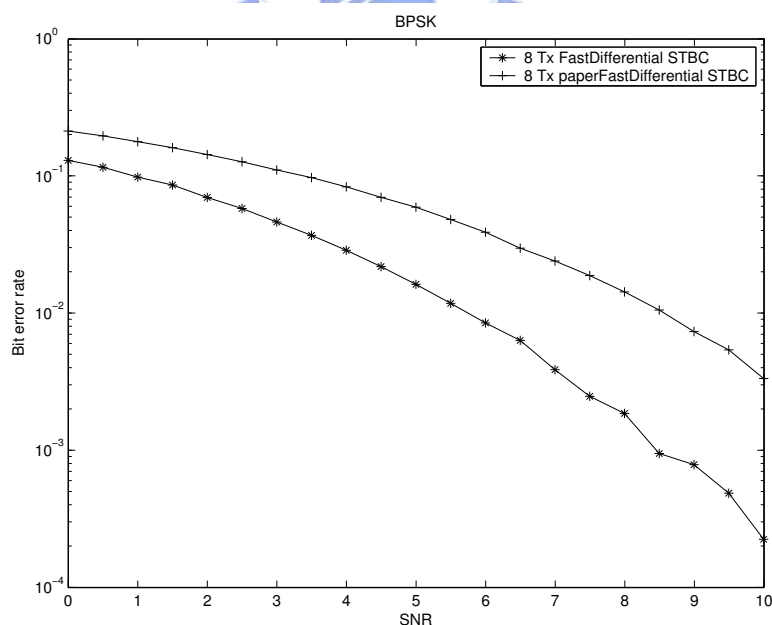


圖 11: 快速差分時空編碼-8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

下圖 12 是用 2,4,8 根天線不同正交編碼方式所模擬的錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR)。

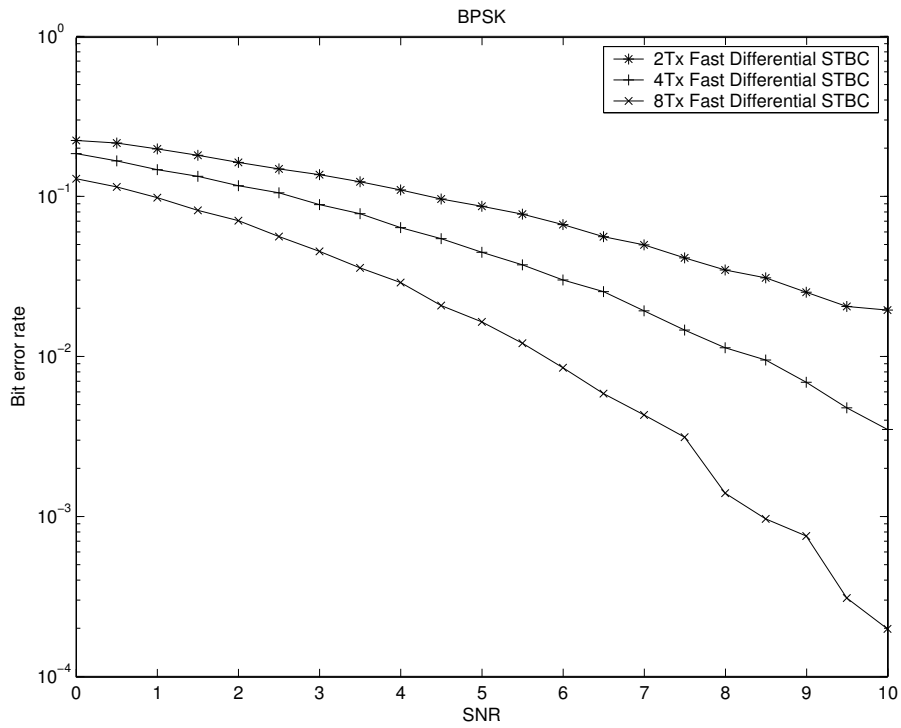


圖 12: 快速差分時空編碼-2,4,8根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

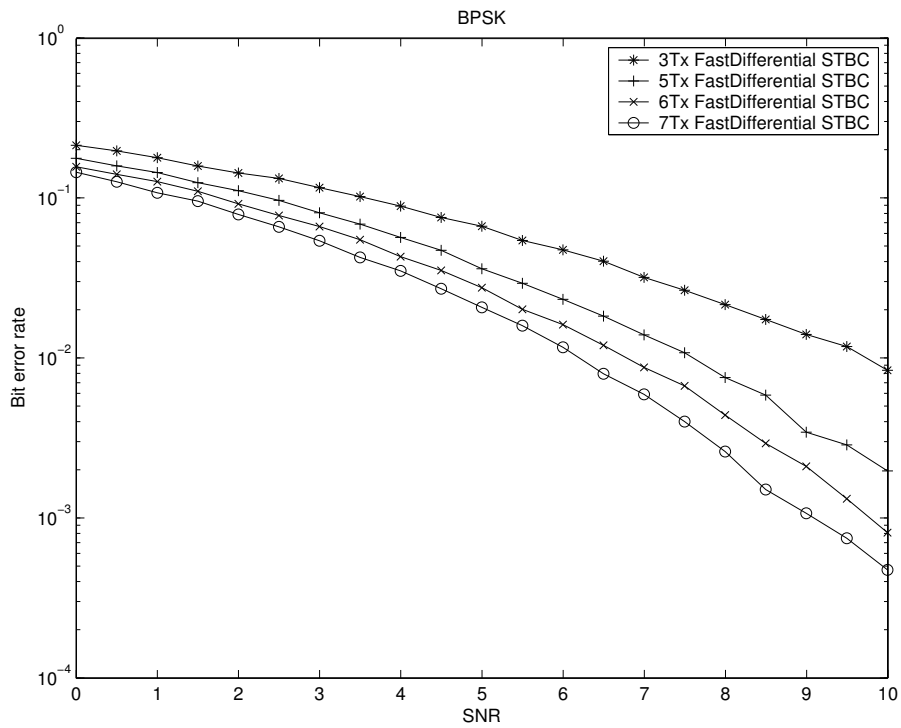


圖 13: 快速差分時空編碼-非正方形正交設計錯誤率(BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

用不同於 [1]的正交時空編碼方式, 有效的降低錯誤率的發生, 不過卻使得碼率稍微的降低, 4根天線的設計碼率是3/4, 而8根天線的設計碼率是1/2, 簡單的說, 如果通訊環境的衰減情形嚴重, 我們可以稍微降低一點碼率, 換得較低的錯誤率, 通訊品質得以改善。從圖12中可知, 增加傳送天線的同時, 獲得了天線多元化的效果, 在低 SNR 的情況下就已經有所改善, 到了高 SNR 時, 錯誤率降得更低了, 在 SNR 為10dB 時,4根天線的設計降到了 10^{-3} 的等級, 8根天線則已經到了 10^{-4} 的等級。

圖13是非方形 (non-square) 的正交設計, 對於3,5,6,7根天線所模擬的錯誤率 (BER) 和訊號與雜訊比值 (SNR)。而在接收端的接收器的結構要改變成

$$\lambda_k = Tr(\bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H A_k^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H) \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K$$

$$\text{再去做偵測的動作 } \hat{z}_k = \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

由圖中, 我們可以清楚的看到, 當增加傳送天線時, 錯誤率一直獲得改善, 因此可以讓整個系統做最妥善的應用, 達到合理的錯誤率需求。

增加傳送天線可以增加傳送多元化 (Transmit diversity), 同樣的如果接收天線也增加 (Receive diversity), 也會改善通訊品質。圖14是2根傳送天線2根接收天線(2×2)和2根傳送天線只有1根接收天線(2×1), 如下所示: 我們可以看出有很明顯地改善, 在 SNR 為10dB 時,BER 可以降到快 10^{-3} 左右。然而, 增加接收天線雖然可以改善效能, 不過卻增加了接收端的複雜度, 因此不符合實際的需求。圖15是利用 (49) 式來產生的4根天線的編碼設計的模擬圖, 從圖中可以看出它的錯誤率

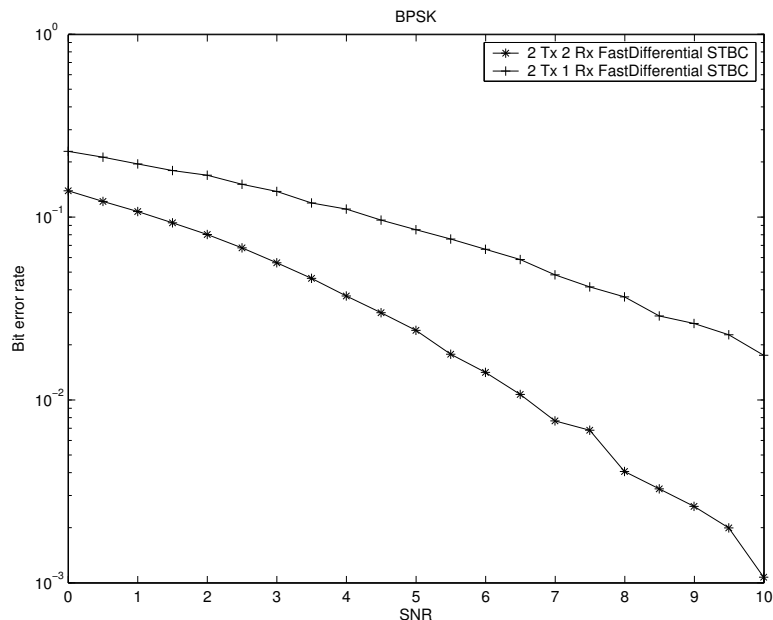


圖 14: 2根傳送天線2根接收天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

會比 Wolfe's slide lemma 所造出來的設計來的低, 不過碼率卻是比較小, 只有1/2。圖 16則是6根天線的模擬圖, 將此設計和非方形 (non-square) 作比較, 發現錯誤率也可以降得比較低, 但是碼率卻更小, 只有1/3。若是運用此新的設計, 當天線數目增多時, 碼率將會越來越小, 所以除非錯誤率的需求必要, 否則建議使用其它的編碼設計。

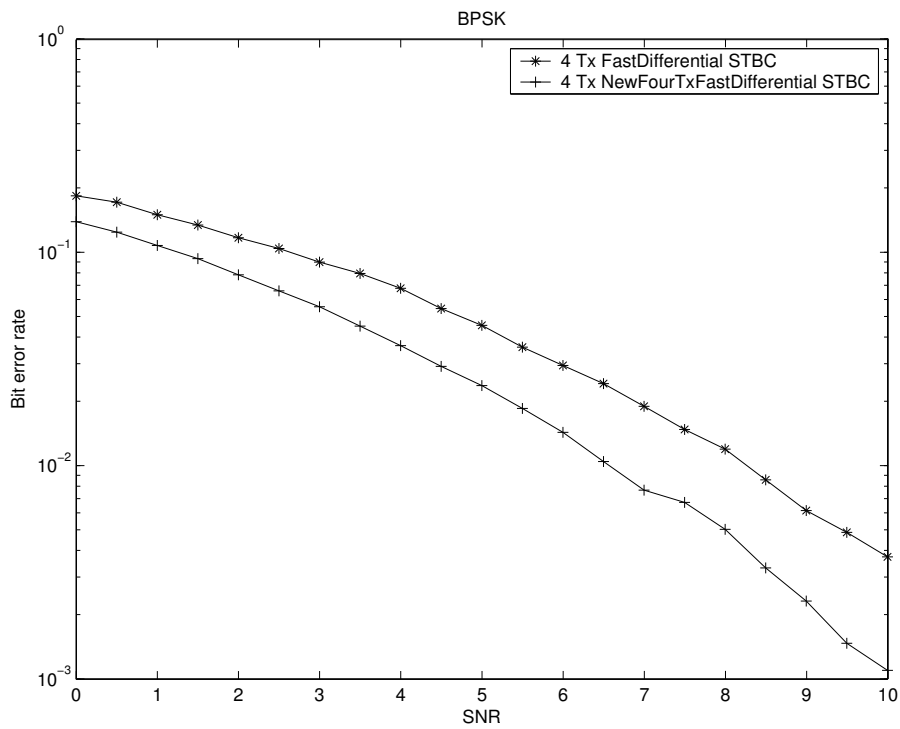


圖 15: 快速差分時空編碼-新設計4根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖

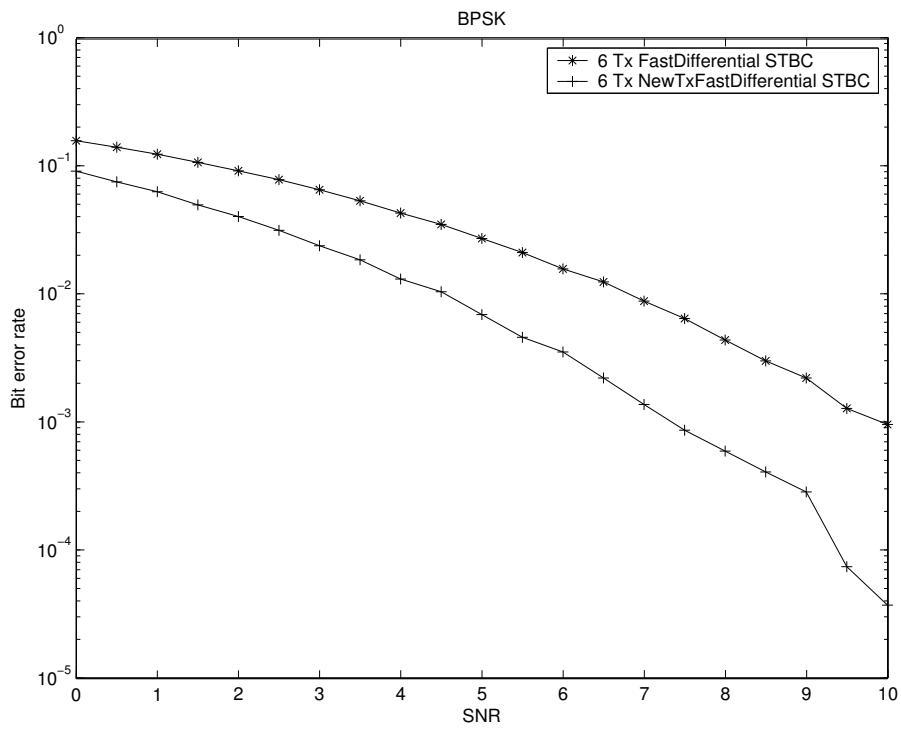


圖 16: 快速差分時空編碼-新設計6根天線錯誤率 (BER) 與訊號雜訊比 (SNR) 圖



第六章 結論

在無線通訊的環境中，要能有效的克服頻道衰減的問題，降低錯誤率的發生，又不需讓接收器設計太過複雜，差分編碼的解調方式將是個不錯的選擇，不過缺點是必須付出比理想同調 (coherent) 接收器多付出 3dB 的代價，才能達到相同錯誤率。第三章中，我們對同調接收器做了錯誤率的效能分析。而第四章的快速差分編碼中，由於傳送端和接收端都必須知道一些資訊才能做解調，我們嘗試使用不同於 [1],[3]的正交編碼設計，來改善品質。其中四根和八根天線的正交編碼設計，錯誤率遠比 [1]低，不過碼率 (code rate) 稍微下降，因此在環境很差，頻道衰減嚴重的情況下，運用此正交編碼設計，犧牲一點碼率，將可以達到較好的通訊品質。接著，利用不同的正交編碼設計，延伸出非方形 (non-square) 的正交設計，使得我們可以對三，五，六，七根天線做妥善的運用。最後，我們提出一個新的正交編碼設計，雖然可以有效降低錯誤率，不過當天線數目增多時，碼率會大幅的下降，所以若非錯誤率需求必要，否則不建議使用此正交編碼設計。



參考文獻

- [1] Xue-Bin Liang; Xiang-Gen Xia; “Fast differential unitary space-time demodulation via square orthogonal designs,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Volume 4, Issue 4, July 2005 Page(s):1331 - 1336.
- [2] Girish Ganesan and Petre Stoica; “Differential modulation using space-time block codes,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume 9, Issue 2, Feb. 2002 Page(s):57-60.
- [3] Vahid Tarokh, Hamid Jafarkhani, and A.R.Calderbank; “Space-time block codes from orthogonal designs,” *IEEE Trans.INF Theory*, Volume 45, Issue 5, July 1999 Page(s):1456-1467.
- [4] Erik G. Larsson, Petre Stoica; *Space-Time Block Coding for Wireless Communications*, Cambridge University Press 2003.
- [5] Alamouti, S.M.; “A simple transmit diversity technique for wireless communications,” *IEEE J.Sel.Areas Communications*, Volume 16, Issue 8, Oct. 1998 Page(s):1451-1458.
- [6] Hughes, B.L.; “Differential unitary space-time modulation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, Volume 48, Issue 12, Dec. 2000 Page(s):2041-2052.
- [7] G.Ganesan and P.Stoica; “Space-time block codes: A maximum SNR approach,” *IEEE Trans.Inf.Theory*, Volume 47, no.4,pp.1650-1656.
- [8] Branka Vucetic, Jinhong Yuan; *Space-Time Coding*, John Wiley 2003.
- [9] David Tse; *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press 2005.
- [10] Ganesan, G.; Stoica, P.; Space-time diversity using orthogonal and amicable orthogonal designs,” in *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing(ICASSP)*, Istanbul, Turkey, 2000 Volume 5, 5-9 June 2000 Page(s):2561 - 2564 vol.5 Digital Object Identifier 10.1109/ICASSP.2000.860978.

- [11] Tarokh, V.; Jafarkhani, H.; “A differential detection scheme for transmit diversity,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Volume 18, Issue 7, July 2000 Page(s):1169 - 1174.



附錄1 兩種正交設計的關係

1.1 兩種正交設計的轉換關係

不論是廣義正交設計的 $A_1, \dots, A_K, B_1, \dots, B_K$, 或是 Amicable orthogonal designs 的 $X_1, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_K$, 存在著一些關係,[7]中有探討, 如下所示:

$$\begin{aligned} V &= z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_K A_K + z_1^* B_1 + z_2^* B_2 + \dots + z_K^* B_K \\ &= (z_1 A_1 + z_1^* B_1) + (z_2 A_2 + z_2^* B_2) + \dots + (z_K A_K + z_K^* B_K) \\ &= [(z_1^R + jz_1^I)A_1 + (z_1^R - jz_1^I)B_1] + [(z_2^R + jz_2^I)A_2 + (z_2^R - jz_2^I)B_2] + \dots \\ &\quad + [(z_K^R + jz_K^I)A_K + (z_K^R - jz_K^I)B_K] \end{aligned}$$

其中 z_k^R, z_k^I 分別是 z_k 的實部和虛部, $z_k = z_k^R + jz_k^I \quad k = 1, 2, \dots, K$

$$\begin{aligned} &= [(z_1^R A_1 + z_1^R B_1 + z_2^R A_2 + z_2^R B_2 + \dots + z_K^R A_K + z_K^R B_K)] \\ &\quad + j[(z_1^I A_1 - z_1^I B_1 + z_2^I A_2 - z_2^I B_2 + \dots + z_K^I A_K - z_K^I B_K)] \\ &= [z_1^R(A_1 + B_1) + z_2^R(A_2 + B_2) + \dots + z_K^R(A_K + B_K)] \\ &\quad + j[z_1^I(A_1 - B_1) + z_2^I(A_2 - B_2) + \dots + z_K^I(A_K - B_K)] \\ &= \sum_{k=1}^K z_k^R(A_k + B_k) + j \sum_{k=1}^K z_k^I(A_k - B_k) \\ &= \sum_{k=1}^K z_k^R X_k + j \sum_{k=1}^K z_k^I Y_k \end{aligned}$$

其中 $X_k = A_k + B_k \quad Y_k = A_k - B_k$

$$A_k = \frac{X_k + Y_k}{2} \quad B_k = \frac{X_k - Y_k}{2}$$

1.2 兩種正交設計所要滿足的關係式

1.2.1 X_k, Y_k 關係式

$\{X_j\}_{j=1}^K \{Y_j\}_{j=1}^K$ 共有 $2K$ 個矩陣, 且維度是 $M \times M$

$$\begin{aligned} X_k X_k^H &= I & Y_k Y_k^H &= I & \forall j \\ X_j X_k^H &= -X_k X_j^H & Y_j Y_k^H &= -Y_k Y_j^H & \forall j \neq k \\ X_j Y_k^H &= Y_k X_j^H & & & \forall j, k \end{aligned}$$

$$Z_\tau = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^K (X_k z_k^R + jY_k z_k^I)$$

假設只有兩個訊號傳送 $K=2$

$$\begin{aligned} Z_\tau Z_\tau^H &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^2 (X_k z_k^R + jY_k z_k^I) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^2 (X_k z_k^R + jY_k z_k^I) \right]^H \\ &= \frac{1}{2} (X_1 z_1^R + jY_1 z_1^I + X_2 z_2^R + jY_2 z_2^I) (X_1 z_1^R + jY_1 z_1^I + X_2 z_2^R + jY_2 z_2^I)^H \\ &= \frac{1}{2} (X_1 z_1^R + jY_1 z_1^I + X_2 z_2^R + jY_2 z_2^I) (X_1^H z_1^R - jY_1^H z_1^I + X_2^H z_2^R - jY_2^H z_2^I) \\ &= \frac{1}{2} (X_1 X_1^H z_1^R z_1^R - jX_1 Y_1^H z_1^R z_1^I + X_1 X_2^H z_1^R z_2^R - jX_1 Y_2^H z_1^R z_2^I \\ &\quad + jY_1 X_1^H z_1^I z_1^R - j^2 Y_1 Y_1^H z_1^I z_1^I + jY_1 X_2^H z_1^I z_2^R - j^2 Y_1 Y_2^H z_1^I z_2^I \\ &\quad + X_2 X_1^H z_1^R z_2^R - jX_2 Y_1^H z_1^R z_2^I + X_2 X_2^H z_2^R z_2^R - jX_2 Y_2^H z_2^R z_2^I \\ &\quad + jY_2 X_1^H z_1^I z_2^R - j^2 Y_2 Y_1^H z_1^I z_2^I + jY_2 X_2^H z_2^I z_2^R - j^2 Y_2 Y_2^H z_2^I z_2^I) \end{aligned}$$

若要滿足 Amicable orthogonal designs, 只有對角線的訊號留下來, 其餘的部分都會消去, 成爲下式:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (X_1 X_1^H z_1^R z_1^R + Y_1 Y_1^H z_1^I z_1^I + X_2 X_2^H z_2^R z_2^R + Y_2 Y_2^H z_2^I z_2^I) \\ &= \frac{1}{2} (z_1^R z_1^R + z_1^I z_1^I + z_2^R z_2^R + z_2^I z_2^I) I \\ &= \frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) I \quad Z_\tau \text{是么正矩陣} \end{aligned}$$



1.2.2 A_k, B_k 關係式

若要滿足 Amicable orthogonal designs, 則 A_k, B_k 要滿足何種關係式, 如 [3]

$$\begin{aligned} X_k X_k^H &= (A_k + B_k)(A_k + B_k)^H = (A_k + B_k)(A_k^H + B_k^H) = A_k A_k^H + A_k B_k^H + B_k A_k^H + B_k B_k^H = I \\ Y_k Y_k^H &= (A_k - B_k)(A_k - B_k)^H = (A_k - B_k)(A_k^H - B_k^H) = A_k A_k^H - A_k B_k^H - B_k A_k^H + B_k B_k^H = I \\ (\text{要滿足 } A_k A_k^H + B_k B_k^H &= I \quad A_k B_k^H = 0 \quad B_k A_k^H = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_j X_k^H &= (A_j + B_j)(A_k + B_k)^H = (A_j + B_j)(A_k^H + B_k^H) = A_j A_k^H + A_j B_k^H + B_j A_k^H + B_j B_k^H \\ -X_k X_j^H &= -(A_k + B_k)(A_j + B_j)^H = -(A_k + B_k)(A_j^H + B_j^H) = -A_k A_j^H - A_k B_j^H - B_k A_j^H - B_k B_j^H \\ (\text{要滿足 } A_j A_k^H + B_k B_j^H &= 0 \quad A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0 \quad A_k A_j^H + B_j B_k^H = 0 \quad B_j A_k^H + B_k A_j^H = 0) \end{aligned}$$

$$Y_j Y_k^H = (A_j - B_j)(A_k - B_k)^H = (A_j - B_j)(A_k^H - B_k^H) = A_j A_k^H - A_j B_k^H - B_j A_k^H + B_j B_k^H$$

$$-Y_k Y_j^H = -(A_k - B_k)(A_j - B_j)^H = -(A_k - B_k)(A_j^H - B_j^H) = -A_k A_j^H + A_k B_j^H + B_k A_j^H - B_k B_j^H$$

(要滿足 $A_j A_k^H + B_k B_j^H = 0$ $A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0$ $A_k A_j^H + B_j B_k^H = 0$ $B_j A_k^H + B_k A_j^H = 0$)

$$X_j Y_k^H = (A_j + B_j)(A_k - B_k)^H = (A_j + B_j)(A_k^H - B_k^H) = A_j A_k^H - A_j B_k^H + B_j A_k^H - B_j B_k^H$$

$$Y_k X_j^H = (A_k - B_k)(A_j + B_j)^H = (A_k - B_k)(A_j^H + B_j^H) = A_k A_j^H + A_k B_j^H - B_k A_j^H - B_k B_j^H$$

(要滿足 $A_j A_k^H + B_k B_j^H = 0$ $A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0$ $A_k A_j^H + B_j B_k^H = 0$ $B_j A_k^H + B_k A_j^H = 0$)

因此, A_k, B_k 要滿足下列關係:

$$A_k A_k^H + B_k B_k^H = I \quad A_k B_k^H = 0 \quad B_k A_k^H = 0$$

$$A_j A_k^H + B_k B_j^H = 0 \quad A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0 \quad A_k A_j^H + B_j B_k^H = 0 \quad B_j A_k^H + B_k A_j^H = 0$$

$$VV^H = (z_1 A_1 + z_2 A_2 + \cdots + z_K A_K + z_1^* B_1 + z_2^* B_2 + \cdots + z_K^* B_K)$$

$$(z_1^* A_1^H + z_2^* A_2^H + \cdots + z_K^* A_K^H + z_1 B_1^H + z_2 B_2^H + \cdots + z_K B_K^H)$$

$$= |z_1|^2 A_1 A_1^H + z_1 z_2^* A_1 A_2^H + \cdots + z_1 z_K^* A_1 A_K^H + z_1 z_1 A_1 B_1^H + z_1 z_2 A_1 B_2^H + \cdots + z_1 z_K A_1 B_K^H$$

$$+ z_2 z_1^* A_2 A_1^H + |z_2|^2 A_2 A_2^H + \cdots + z_2 z_K^* A_2 A_K^H + z_2 z_1 A_2 B_1^H + z_2 z_2 A_2 B_2^H + \cdots + z_2 z_K A_2 B_K^H$$

$$+ \dots +$$

$$+ z_K z_1^* A_K A_1^H + z_K z_2^* A_K A_2^H + \cdots + |z_K|^2 A_K A_K^H + z_K z_1 A_K B_1^H + z_K z_2 A_K B_2^H + \cdots + z_K z_K A_K B_K^H$$

$$+ z_1^* z_1^* B_1 A_1^H + z_1^* z_2^* B_1 A_2^H + \cdots + z_1^* z_K^* B_1 A_K^H + |z_1|^2 B_1 B_1^H + z_1^* z_2 B_1 B_2^H + \cdots + z_1^* z_K B_1 B_K^H$$

$$+ z_2^* z_1^* B_2 A_1^H + z_2^* z_2^* B_2 A_2^H + \cdots + z_2^* z_K^* B_2 A_K^H + z_2^* z_1 B_2 B_1^H + |z_2|^2 B_2 B_2^H + \cdots + z_2^* z_K B_2 B_K^H$$

$$+ \dots +$$

$$+ z_K^* z_1^* B_K A_1^H + z_K^* z_2^* B_K A_2^H + \cdots + z_K^* z_K^* B_K A_K^H + z_K^* z_1 B_K B_1^H + z_K^* z_2 B_K B_2^H + \cdots + |z_K|^2 B_K B_K^H$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_K|^2)I$$
 等號滿足的條件要是

$$A_k A_k^H + B_k B_k^H = I \quad A_j A_k^H + B_k B_j^H = 0 \quad A_j B_k^H + A_k B_j^H = 0 \quad A_k B_k^H = 0$$

$$A_k A_j^H + B_j B_k^H = 0 \quad B_k A_j^H + B_j A_k^H = 0 \quad B_k A_k^H = 0$$

$\{X_j\}_{j=1}^K \{Y_j\}_{j=1}^K$ 共有 $2K$ 個矩陣, 且維度是 $M \times M$, 若是 X_j, Y_k 滿足下列的關係式, 也就是把共軛轉置乘在前面。

$$X_k^H X_k = I \quad Y_k^H Y_k = I \quad \forall j$$

$$X_j^H X_k = -X_k^H X_j \quad Y_j^H Y_k = -Y_k^H Y_j \quad \forall j \neq k$$

附錄2 Wolfe's slide lemma

假設存在有 n_s 對矩陣 $\{X_i\}_{i=1}^{n_s}$ $\{Y_i\}_{i=1}^{n_s}$ ，它們的大小是 $M \times M$ ，並且滿足 Amicable orthogonal designs，則將存在有 $n_s + 1$ 對 $2M \times 2M$ 的矩陣也滿足此。如 [4] 所示。

定義 $V_i = X_i X_1^H$ $i = 2 \cdots n_s$ $W_k = Y_k X_1^H$ $k = 1 \cdots n_s$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

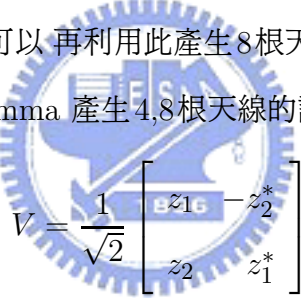
考慮有 $n_s + 1$ 對 $2M \times 2M$ 的矩陣如下所示：

$$\bar{X}_1 = I_{2M} \quad \bar{Y}_k = P \otimes W_k \quad k = 1 \cdots n_s$$

$$\bar{X}_i = P \otimes V_i \quad i = 2 \cdots n_s \quad \bar{Y}_{n_s+1} = R \otimes I_M$$

$$\bar{X}_{n_s+1} = J \otimes I_M$$

其中， \otimes 是 Kronecker product，當我們有了 2 根天線的正交編碼設計後，即可以利用 Wolfe's slide lemma 來產生 4 根天線的正交碼，也可以再此產生 8 根天線的設計。也就是說，我們有了 Alamouti 碼，則可以運用 Wolfe's slide lemma 產生 4, 8 根天線的設計。



$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{bmatrix}$$

我們用此產生 $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}$ 如下：

$$X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad X_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

運用 Wolfe's slide lemma 產生 4 根天線的正交設計，獲得 $\bar{X}_1^{(4)}, \bar{X}_2^{(4)}, \bar{X}_3^{(4)}, \bar{Y}_1^{(4)}, \bar{Y}_2^{(4)}, \bar{Y}_3^{(4)}$

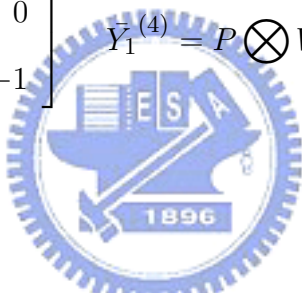
$$\bar{X}_1^{(4)} = I_4 \quad \bar{Y}_k^{(4)} = P \otimes W_k^{(2)} \quad k = 1, 2$$

$$\bar{X}_i^{(4)} = P \otimes V_i^{(2)} \quad i = 2 \quad \bar{Y}_3^{(4)} = R \otimes I_2$$

$$\bar{X}_3^{(4)} = J \otimes I_2$$

$$V_2^{(2)} = X_2^{(2)} X_1^{(2)H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_1^{(4)} = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_2^{(4)} = P \otimes V_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_3^{(4)} = J \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1^{(2)} = Y_1^{(2)} X_1^{(2)H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{Y}_1^{(4)} = P \otimes W_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


$$W_2^{(2)} = Y_2^{(2)} X_1^{(2)H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{Y}_2^{(4)} = P \otimes W_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_3^{(4)} = R \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

如此及可以得到4根天線的設計, 若再用一次 Wolfe's slide lemma 可以得到8根天線的設計, 8個 8×8 的矩陣如下:

$$\bar{X}_1^{(8)}, \bar{X}_2^{(8)}, \bar{X}_3^{(8)}, \bar{X}_4^{(8)}, \bar{Y}_1^{(8)}, \bar{Y}_2^{(8)}, \bar{Y}_3^{(8)}, \bar{Y}_4^{(8)}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_1^{(8)} &= I_8 & \bar{Y}_k^{(8)} &= P \otimes W_k^{(4)} & k &= 1, 2, 3 \\ \bar{X}_i^{(8)} &= P \otimes V_i^{(4)} & \bar{Y}_4^{(8)} &= R \otimes I_4 \\ \bar{X}_4^{(8)} &= J \otimes I_4 \end{aligned}$$

$$\bar{X}_1^{(8)} = I_8$$

$$V_2^{(4)} = X_2^{(4)} X_1^{(4)H} = X_2^{(4)} I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_3^{(4)} = X_3^{(4)} X_1^{(4)H} = X_3^{(4)} I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_2^{(8)} = P \otimes V_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_3^{(8)} = P \otimes V_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

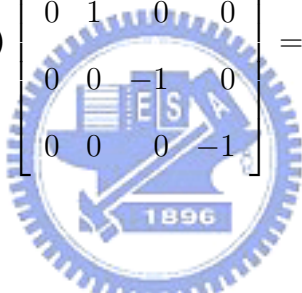
$$\bar{X}_4^{(8)} = J \otimes I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1^{(4)} = Y_1^{(4)} X_1^{(4)H} = Y_1^{(4)} I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_2^{(4)} = Y_2^{(4)} X_1^{(4)H} = Y_2^{(4)} I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_3^{(4)} = Y_3^{(4)} X_1^{(4)H} = Y_3^{(4)} I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_1^{(8)} = P \otimes W_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_2^{(8)} = P \otimes W_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_3^{(8)} = P \otimes W_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


$$\bar{Y}_4^{(8)} = R \otimes I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

我們可以從2根天線的正交設計, 利用 Wolfe's slide lemma 進而產生4根,8根的正交設計。

附錄3 推導

3.1 瑞雷衰減效能分析推導

我們知道, 在 BPSK 的情況下, 錯誤率可以寫成

$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{2x\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

γ 是訊號與雜訊比值 (SNR)。因為 x 是一個隨機變數, 導致錯誤率也隨著 x 而改變, 所以必須對錯誤率取期望值, 得到平均錯誤率。

$$\begin{aligned} P_e &= E[P_e(x)] = \int_0^\infty P_e(x) f_x(x) dx \\ &= \int_0^\infty Q\left(\sqrt{2x\frac{E_b}{N_0}}\right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\sqrt{2x\gamma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{t^2}{2\gamma}} e^{-x} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty [-e^{-x}]_0^{\frac{t^2}{2\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty [-e^{-\frac{t^2}{2\gamma}} + 1] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty [1 - e^{-\frac{t^2}{2\gamma}}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+\frac{1}{\gamma})\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}(1+\frac{1}{\gamma})} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}(\frac{\gamma+1}{\gamma})} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}}} e^{-\frac{t^2}{2(\frac{\gamma}{\gamma+1})}} dt \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \end{aligned}$$

3.2 時空編碼效能分析推導

我們知道, 在一般的情況下, 錯誤率可以寫成

$$P_e(x) = Q\left(\sqrt{x\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{x\gamma}) \quad \gamma = \frac{E_b}{N_0}$$

同樣的, 必須對錯誤率取期望值, 得到平均錯誤率。

$$\begin{aligned}
 P_e &= E[P_e(x)] = \int_0^\infty P_e(x)f_x(x)dx \\
 &= \int_0^\infty Q\left(\sqrt{x\frac{E_b}{N_0}}\right)xe^{-x}dx \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_{\sqrt{x\gamma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)xe^{-x}dx \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{t^2}{\gamma}} xe^{-x}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{\frac{t^2}{\gamma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty \left[\left(-\frac{t^2}{\gamma}e^{-\frac{t^2}{\gamma}} - e^{-\frac{t^2}{\gamma}}\right) - (0-1)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{t^2}{\gamma}e^{-\frac{t^2}{\gamma}} - e^{-\frac{t^2}{\gamma}}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{t^2}{\gamma} + 1\right)e^{-\frac{t^2}{\gamma}}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^\infty \left(\frac{t^2}{\gamma} + 1\right)e^{-\frac{t^2}{\gamma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^\infty \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\right)t^2}dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^\infty \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)}dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^\infty \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right)}dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\int_0^\infty \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)}}dt \\
 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)}}dt - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\int_0^\infty \frac{t^2}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)}}dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\sigma^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \frac{1}{\gamma+2}
\end{aligned}$$

其中 $\sigma^2 = \frac{\gamma}{\gamma+2}$ 。而 $\int_0^\infty t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ 相當於 σ^2 變異數 (variance) 的一半。

3.3 快速差分時空編碼解調方式推導

基本差分接收方程式 [6]

$$\bar{R}_\tau = V\bar{R}_{\tau-1} + \sqrt{2}W'_\tau$$

$$W'_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{W}_\tau - V\bar{W}_{\tau-1})$$

其中上式是維度為 $T \times N$ 的相加性獨立高斯矩陣。

接著我們使用 maximum-likelihood 差分時空編碼解調方式，將經過頻道的訊號還原回來。

$$\begin{aligned}
&\arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \|\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1}\|_F \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})^H (\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(\bar{R}_\tau^H - \bar{R}_{\tau-1}^H V^H)(\bar{R}_\tau - V\bar{R}_{\tau-1})] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[\bar{R}_\tau^H \bar{R}_\tau - \bar{R}_\tau^H V \bar{R}_{\tau-1} - \bar{R}_{\tau-1}^H V^H \bar{R}_\tau + \bar{R}_{\tau-1}^H V^H V \bar{R}_{\tau-1}] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[\bar{R}_\tau^H \bar{R}_\tau - V \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H - V^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H + V^H V \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_{\tau-1}^H] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[-V \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H - V^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H]
\end{aligned}$$

將訊號 $V = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_k A_k + z_1^* B_1 + z_2^* B_2 + \dots + z_k^* B_k$ 代入

$$\begin{aligned}
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(-z_1 A_1 - z_2 A_2 - \dots - z_k A_k - z_1^* B_1 - z_2^* B_2 - \dots - z_k^* B_k) \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H \\
&\quad + (-z_1^* A_1^H - z_2^* A_2^H - \dots - z_k^* A_k^H - z_1 B_1^H - z_2 B_2^H - \dots - z_k B_k^H) \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(-z_1 A_1 - z_2 A_2 - \dots - z_k A_k) \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H] + (-z_1 B_1^H - z_2 B_2^H - \dots - z_k B_k^H) \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H \\
&\quad + (-z_1^* B_1 - z_2^* B_2 - \dots - z_k^* B_k) \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + (-z_1^* A_1^H - z_2^* A_2^H - \dots - z_k^* A_k^H) \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \text{Tr}[(\sum_{k=1}^K (-z_k A_k)) \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + (\sum_{k=1}^K (-z_k B_k^H)) \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H \\
&\quad + (\sum_{k=1}^K (-z_k^* B_k)) \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + (\sum_{k=1}^K (-z_k^* A_k^H)) \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \sum_{k=1}^K [-z_k \text{Tr}(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H) - z_k^* \text{Tr}(A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)] \\
&= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \sum_{k=1}^K (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k)
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_k = \text{Tr}(A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H + B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)$ for $k = 1, 2, \dots, K$

$$\lambda_k^* = \text{Tr}(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H + B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)$$

上式中的 A_k, B_k 是經過事先設計的, 而 \bar{R}_τ 和 $\bar{R}_{\tau-1}$ 是此一時間接收到的訊號和前一刻接收到的訊號。

我們知道, 使用 maximum-likelihood 來解調, 可以把它轉換成 K 個一維度的最小化問題。

我們有兩個複數共軛的關係式如下:

$$[\text{Tr}(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)]^* = \text{Tr}[(A_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H)^H] = \text{Tr}[\bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H A_k^H] = \text{Tr}[A_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H]$$

$$[\text{Tr}(B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)]^* = \text{Tr}[(B_k^H \bar{R}_\tau \bar{R}_{\tau-1}^H)^H] = \text{Tr}[\bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H B_k] = \text{Tr}[B_k \bar{R}_{\tau-1} \bar{R}_\tau^H]$$

$$= \arg \min_{\{z_k\}, z_k \in \Psi} \sum_{k=1}^K (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k)$$

我們將上式分解成 K 個一維的最小化問題

$$\hat{z}_k = \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

因爲 PSK 特殊的結構, 上式可以化簡成

$$\begin{aligned}
\hat{z}_k &= \arg \min_{z_k \in \Psi} (-z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) = \arg \min_{z_k \in \Psi} (|z_k|^2 - z_k \lambda_k^* - z_k^* \lambda_k) \\
&= \arg \min_{z_k \in \Psi} |z_k - \lambda_k|^2 \quad k = 1, 2, \dots, K
\end{aligned}$$