

# 切換式系統與切換式線性控制系統 之可穩定性研究

研究生：江家禎

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要

本篇論文主要在探討關於如何利用線性矩陣不等式來建構多個不穩定線性系統與多個不可穩定化線性控制系統之穩定切換律並且將其應用於判斷線性控制系統在致動器發生故障時是否存在有共同穩定器，並且提供建構共同穩定器的演算法則。另外我們提出切換系統凸組合為中性穩定時存在穩定切換律條件，並且將其應用於多個非線性系統。並且提出完整且明確的控制律及穩定切換律。最後，我們也整理出多重李亞普諾夫函數的穩定性條件以及提供演算法則來建構多重李亞普諾夫函數於兩個線性系統。

# **Study of Stabilizability of Switched Systems and Switched Linear Control Systems**

Student: Chia-Chen Chiang

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

## **ABSTRACT**

This thesis investigates the way employing Linear Matrix Inequality to construct stabilizing switching laws among unstable linear systems and linear control systems in the presence of actuator's outage. And further applies it to check the existence of common stabilizer for a class of linear control system of experiencing actuator's outage is also explicitly presented and constructing the existence of common stabilizer for a class of linear control system of experiencing actuator's outage is also explicitly presented. Also, we bring up the stabilizing switching laws among unstable linear systems when the convex combination of these systems is neutrally stable and apply it to nonlinear systems. Finally, we arrange the stability conditions of Multiple Lyapunov Function and offer algorithms construct Multiple Lyapunov Function on two linear systems.

## 誌 謝

本篇論文得以順利完成需要感謝很多人的關心與協助。首先，我要感謝指導教授梁耀文博士的用心指導，在課業上提供寶貴的意見與想法來幫助我完成本篇論文，在生活上有任何的問題老師也都能適時的給予幫助並且提供正確且良好的觀念，使得自己在這兩年的學習中受益良多，對於往後的人生將有很大的助益。還有要感謝口試委員廖德誠博士、鄭治中博士、宋朝宗博士以及陳俊宏博士給予寶貴的建議與指導使得本論文更加的完整。

接下來要感謝張嘉良學長、林信嘉學長以及徐聖棟學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學智盛、哲倫，陪伴了我兩年研究所生活，不管在任何時候總是給我很大的幫助與支持。而學弟們昭銘、宏泰以及逸康也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對我的幫助，使我的論文研究能夠更加順利。

最後要感謝我的家人，不管發生任何事情總是支持著我，並且給我最大的鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謝謝你們！我將這論文獻給你們。

# 目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
第一章 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	4
1.3 論文架構	7
第二章 線性矩陣不等式	9
2.1 線性矩陣不等式介紹	9
2.2 可轉化成線性矩陣不等式的問題	10
第三章 LMI 應用於 $N$ 個 $N$ 階不穩定系統間穩定切換律之設計研究	14
3.1 $N$ 個 $N$ 階不穩定系統中存在穩定切換律的條件	14
3.2 $N$ 個 $N$ 階不穩定系統中建構穩定切換律的設計與研究	17
3.3 不可穩定之控制系統建構穩定切換律的設計與研究	18
3.4 共同穩定器的研究設計	20
第四章 切換系統的高階穩定性條件	26
4.1 切換系統的高階穩定性條件問題描述	26
4.2 多個非線性切換系統的高階穩定條件	27
4.3 多個線性系統的高階穩定條件	29

第五章 多重李亞普諾夫法	<b>32</b>
5.1 多重李亞普諾夫函數的問題描述 . . . . .	32
5.2 多重李亞普諾夫函數的穩定條件 . . . . .	34
5.3 兩個線性切換系統的多重李亞普諾夫函數穩定條件 . . . . .	36
5.4 兩個線性系切換統的多重李亞普諾夫函數建構方法 . . . . .	38
第六章 模擬與討論	<b>43</b>
6.1 三個三階不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論 . . . . .	43
6.2 不可穩定線性控制系統之穩定切換律設計與討論 . . . . .	46
6.3 共同穩定器之設計與討論 . . . . .	50
6.4 切換系統的高階穩定情況之設計與討論 . . . . .	52
6.5 2個線性系統多重李亞普諾夫函數之設計與討論 . . . . .	54
第七章 結論與未來研究方向	<b>59</b>
7.1 結論 . . . . .	59
7.2 未來研究方向 . . . . .	60



# 圖目錄

圖 1 推車模擬圖 [9]	3
圖 2 推車軌跡模擬圖 [9]	4
圖 3 兩個二階不穩定系統，且系統不擁有穩定凸組合，模擬時間取 10 秒：(a) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (b) $x_1, x_2$ 狀態分佈圖	7
圖 4 兩個二階不穩定系統在收斂區間內當 $x_1$ 為橫軸 $x_2$ 為縱軸軌跡分佈圖	34
圖 5 兩個類李亞普諾夫函數， $i$ 代表切換至系統 $i$ (a) 連續 $V_i$ (b) 不連續 $V_i$	35
圖 6 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a) $x_1, x_2, x_3$ 對時間分佈 圖 (b) 系統切換順序	45
圖 7 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒， $\epsilon = 0.5$ ： $x_1, x_2, x_3$ 狀態分佈圖	45
圖 8 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒，切換律為 $\sigma(x) = \min_i(\dot{V}_i)$ 時：(a) $x_1, x_2, x_3$ 對時間分佈圖 (b) 系統切換順序	46
圖 9 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒，切換律為 $\sigma(x) = \min_i(\dot{V}_i)$ 時： $x_1, x_2, x_3$ 狀態分佈圖	46
圖 10 三個三階不穩定控制系統，模擬時間取 0.8 秒， $\epsilon = 0.99$ ：(a) $x_1, x_2, x_3$ 對 時間分佈圖 (b) 系統切換順序	49
圖 11 三個三階不穩定控制系統，模擬時間取 0.8 秒， $\epsilon = 0.99$ ： $x_1, x_2, x_3$ 狀態分 佈圖	49
圖 12 兩個二階中性穩定系統，當系統凸組合為中性穩定時，模擬時間取 10 秒：(a) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (b) 系統切換順序	53
圖 13 兩個二階中性穩定系統，當系統凸組合為中性穩定時，模擬時間取 10 秒： $x_1, x_2$ 狀態分佈圖	53
圖 14 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 10 秒，切換律為 $\sigma(x) = \max_i(V_i)$ 時：(a) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖	56

圖 15 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 10 秒，切換律為  $\sigma(x) = \max_i(V_i)$

時： $x_1, x_2$  狀態分佈圖 . . . . . 56

圖 16 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 4 秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(V_i)$

時：(a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 . . . . . 58

圖 17 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 4 秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(V_i)$


時： $x_1, x_2$  狀態分佈圖 . . . . . 58



# 第一章

## 序論

### 1.1 研究背景



由於先進科技的發展和進步，目前工程上實際運作的系統大多是以一種所謂混合式的系統 (hybrid systems) 方式呈現。這種混合式的系統，結合了連續時間與離散時間的系統，其運作模式往往需要整合多方面的工程技術，也必須考慮到內部各個不同子系統之間的切換和運作的關聯性，同時必須考慮到個別子系統之間的切換運作對整體系統的影響。所以對於這種混合式的系統其切換控制的穩定性及性能分析，便顯得格外地重要。所謂的切換式系統 (switched systems) 是指一個動態系統包括了有限多個子系統和安排在子系統間切換的邏輯規則，基本上它是屬於複合式系統的一種。以數學模式而言，這些子系統通常是以微分方程式或差分方程式來表示。常見的切換式系統包含有由智慧型控制，模糊控制 (fuzzy control)，適應性控制 (adaptive control)，可變結構控制 (variable structure control) 等等控制技術所衍生的多模式 (multiple modalities) 系統之間相互切換的實際例子。由於實際應用的系統通常都是極其複雜的混合系統，所以切換法則的選取將直接影響到整個



系統的穩定性。在文獻上已經有許多實際應用切換控制的例子被提出來。例如：將切換式系統觀念應用在磁盤驅動器 [18]、步進馬達 [8]、短距離或垂直升降的飛機 [39]、電力系統 [19]、化工程序控制、生物學 [3], [22],[25]、機械系統 [14]、汽車變速系統 [33], [45]、自動導航系統 [31], [10], [50]、電腦控制系統、網路與通訊系統、和交通管理等等 [18],[17],[21], [8],[2],[46], [27]。列舉以下切換式控制系統的例子來做說明：

**範例 1** :非完整系統(nonholonomic control system) 或稱為無漂移系統(driftless system)

考慮系統

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = G(x)u,$$

其中  $x \in R^n$ ,  $G \in R^{n \times m}$ 。此類系統通常被稱為 nonholonomic 控制系統或者稱為無漂移系統(driftless system)，此類型系統經由 Brockett's condition [26], [9] 可得知系統當  $G(0) = m$  且  $m < n$  時無法只經由一個連續的回授控制律使得系統達到漸近穩定。但此類型系統卻可以利用切換的方法來達到穩定的目的，以下考慮一個推車的實際例子

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = w$$

其中， $x, y$  代表推車質量中心在座標軸的分量，而  $\theta$  代表推車正前方與  $x$  軸的夾角， $v, w$  分別代表推進速度和操縱角速度，如圖 1：

此推車之 nonholonomic 的限制條件為  $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$ 。令

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$x_3 = x \sin \theta - y \cos \theta$$

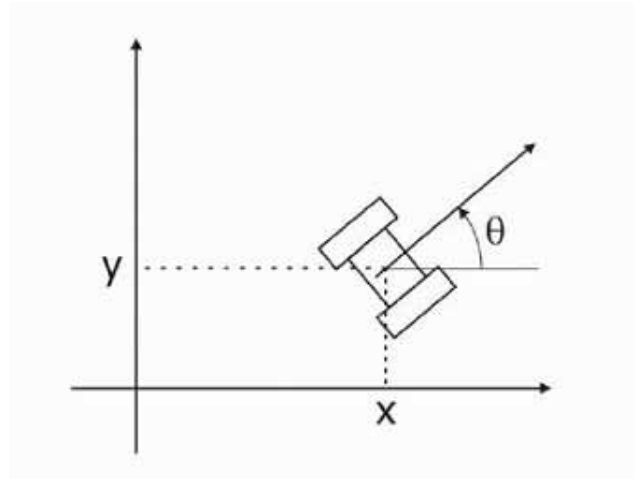
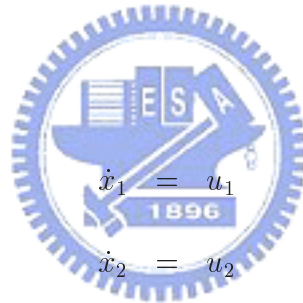


圖 1:推車模擬圖， $x, y$ 代表推車質量中心在座標軸的分量，而 $\theta$ 代表推車正前方與 $x$ 軸的夾角[9]

$$u_1 = w$$

$$u_2 = v - x_3 w$$

可得如下形式之系統



$$\dot{x}_3 = x_2 u_1$$

此系統具有如下的穩定切換律

$$u_1 = \begin{cases} -(x_1^3 + x_2 x_3) & \text{if } K = K_0 \\ \text{sat}(x_{03}^2) \text{sign}(\phi(x_0)) & \text{if } K = K_1 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} -x_2 & \text{if } K = K_0 \\ \text{sat}(x_{03}) \text{sign}(\phi(x_0)) & \text{if } K = K_1 \end{cases}$$

其中  $\phi(x_0) = x_{01}^3 \text{sat}(x_{03}^2) - x_{02}^3 \text{sat}(x_{03}) + x_{02} x_{03}^2 \text{sat}(x_{03})$ ，而  $x_0$  為採用第二組控制律 ( $K = K_1$ ) 瞬間系統的狀態。切換時機由選取的 Lyapunov 函數及其導數來決定，詳見 [9]。圖 2 展示了一個利用切換控制律獲得的典型推車軌跡。 ■

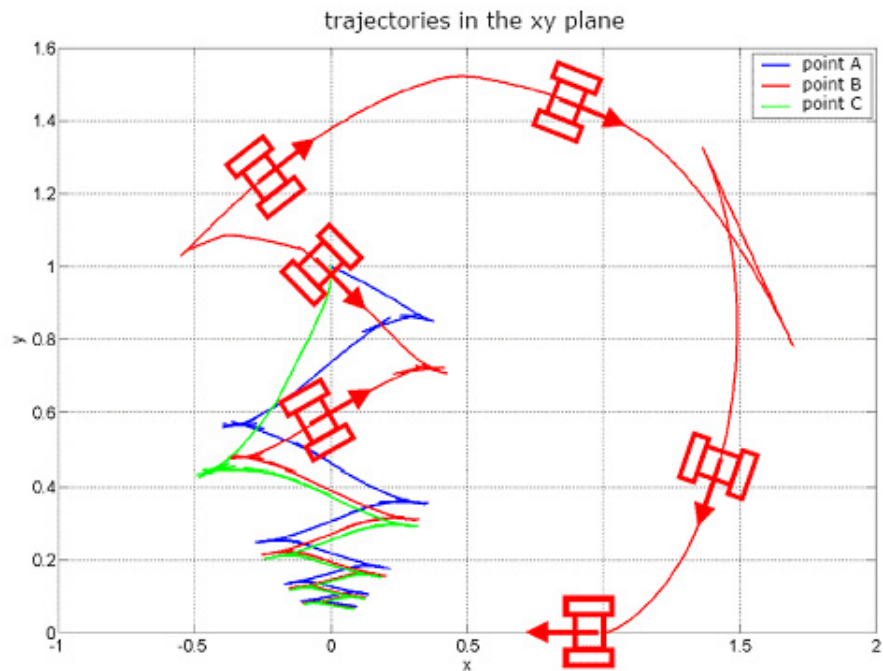


圖 2: 推車軌跡模擬圖 [9]

切換式系統的研究動機主要是來自於許多實際的系統本質上常是以多重模式 (multiple model) 的形式來呈現，而這些子系統又常需要倚靠不同的環境因子或相關參數來做具體的描述。智慧型控制、適應性控制及可變結構控制等控制策略也是基於在不同的環境或參數下進行不同的切換而形成多重模式的切換系統。因此，由於環境的需求與工程技術的進步，切換式系統的穩定性與性能分析有其實際的需要與價值。除此之外，某些系統如非完整系統 (nonholonomic system) 或稱為無漂移項系統 (driftless system) 已被證實無法利用單一個連續靜態回授控制達成穩定的目的，切換式控制策略遂成為一個具體可行的方法。綜合上述，切換式系統之穩定性分析與控制策略之研發，確實有其重要性與必要性。

## 1.2 研究動機

在 [44] 之中提供了一個判斷存在穩定切換律的條件以及建構穩定切換律的方法。而有另一個條件也可以判斷是否存在穩定切換律，若滿足此條件則一定可以找到穩

定切換律。以下是這兩個存在穩定切換律的判斷條件：

$$\exists P > 0, \text{ 使得 } \cup_{i=1}^2 \{x|x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\} = R^n \setminus \{0\}$$

$$\exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

這兩個判斷條件前者是由理論上來判斷，但是沒有完整的建構穩定切換律的方法。而後者有者完善的判斷條件以及完善的建構方法。而這兩個條件已經在[13]中被證明為對等條件。如此一來，建構穩定切換律以及判斷其存在的條件不管在理論上或是實際運用上都將相當的完善。但是，這兩個判斷條件都限制在只有兩個不穩定系統的情況之下。而一般情況下，系統可能不只一個。因此，我們將針對這兩個條件，將這兩個條件推廣到針對多個不穩定系統是否存在穩定切換律的條件。而將這兩個條件修改如下：

$$\exists P > 0 \text{ 使得 } \cup_{i=1}^N \{x|x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (1.1)$$

$$\exists \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (1.2)$$

在這篇論文當中，我們將證明條件(1.2)為條件(1.1)的充分但非必要條件。然而，當有多個不穩定系統時，我們可以仍可用這條二來建構穩定切換律。但由於求解條件(1.2)的 $\alpha_i$ 為一個NP-hard問題。於是我們提出一個線性矩陣不等式條件滿足(1.2)，利用此不等式我們可以利用解LMI工具來快速求得 $\alpha_i$ 值，進而建構出穩定的切換律。除此之外，我們還將這兩個條件運用在不可穩定的控制系統上。因為不可穩定的系統無法使用單一的回授控制使得系統穩定。所以我們利用切換系統的設計方法，來設計控制系統的控制器，使得不可穩定的系統仍然可以利用切換系統的觀念來達到穩定控制。另外在[29]中提到了共同穩定器的設計，我們發現到其中的一些觀念可以用前面提到的兩個判斷條件來做應用。所以，我們利用這兩個判斷條件以及[29]中的觀念來設計共同穩定器。如此一來，我們可以利用這兩個判斷條件來判斷是否存在共同穩定器，進而運用在實際的系統上。

而在[1]中提出，在二個線性系統的情況在滿足以下情況下可將條件(1.2)的情況放寬到中性穩定，為

$$\text{當 } x^t P A_1 x = x^t P A_2 x = 0, \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時}$$

$$\text{對於所有 } \beta \in [0, 1], x^t (P B + B^t P) (\beta A_1 + (1 - \beta) A_2) x \neq 0$$

由於這兩個條件只支援兩個線性系統。於是我們將在本篇論文中討論如何推廣此定理，包括放寬原本的條件、多個線性系統以及非線性系統。

另外，前面提到可切換至穩定的條件為多個不穩定系統間擁有一個共同的李亞普諾夫(Lyapunov)函數，[6]中提出多重李亞普諾夫函數證明出當每一個系統 $A_i$ 擁有一個別的類李亞普諾夫函數情況之下仍然可以使得系統有穩定切換律並且比條件(1.1)及(1.2)有更多的機會使得系統軌跡趨近於零，如以下例子

範例 2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

分析：經由簡單的計算 $A_1, A_2$ 之特徵值分別為 $\{-4.5826, 4.5826\}$ 、 $\{4.6056, -2.6056\}$ 。

由此可見 $A_1, A_2$ 皆為不穩定的矩陣。接下來，我們令

$$A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$$

則

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} 3 - 12\alpha & -9 + 3\alpha \\ -1 + 11\alpha & -1 + 10\alpha \end{bmatrix}$$

矩陣 $A_{eq}$ 之特徵方程式

$$\Delta(A_{eq}) = s^2 - (2 - 2\alpha)s - 153\alpha^2 + 144\alpha - 12 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

由上面式子我們可得知 $A_{eq}$ 不是一個赫維茲矩陣，且根據[13]我們可得知在兩個系統的情況下 $\cup_{i=1}^2 \Omega_i^- = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 與系統擁有穩定凸組合(convex combination)是等價的。因此這兩個系統並非二次可穩定(Quadratically stabilizable)的切換系統，但我

們可以經由多重李亞普諾夫函數，找到對應於  $A_1, A_2$  的  $P_1 = \begin{bmatrix} 1.4759 & 0.6565 \\ 0.6565 & 0.7084 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 0.8541 & 0.5679 \\ 0.5679 & 1.0021 \end{bmatrix}$ 。選擇初始值  $x = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，我們發現利用切換律  $i = \arg(\max(V_i))$  可以使得狀態  $x$  由  $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如下圖

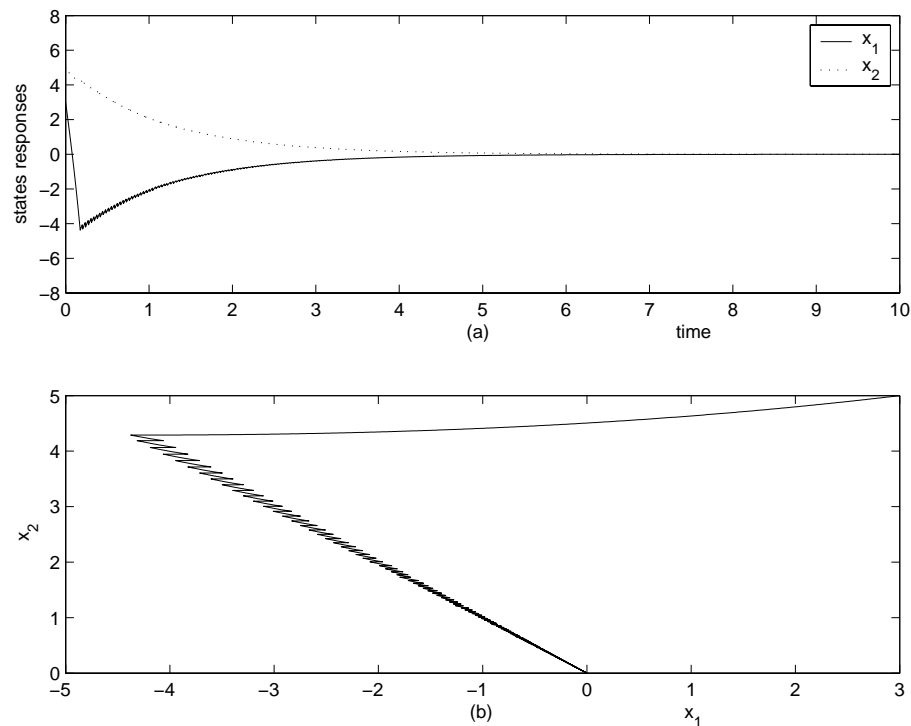


圖 3: 兩個二階不穩定系統，且系統不擁有穩定凸組合，模擬時間取 10 秒：(a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (b)  $x_1, x_2$  狀態分佈圖

由此模擬結果我們可得知當求解單一的李亞普諾夫函數失敗時，我們仍然可以利用建構多重李亞普諾夫函數來求得系統的穩定切換律。 ■

### 1.3 論文架構

此篇論文主要可分為下列五章：第二章首先介紹線性矩陣不等式這個建構系統間存在穩定切換律有用的工具。第三章介紹關於不穩定系統間存在穩定切換律的判斷條件並且介紹如何利用線性矩陣不等式提供一個充分條件來尋找不穩定的系統間的穩定切換律以及如何利用線性矩陣不等式來判斷共同穩定器存在的條件。第四章提出系統凸組合中性穩定時使得系統存在穩定切換律的充分條件並且應用在多

個線性不穩定系統以及非線性系統上。第五章介紹多重李亞普諾夫函數的穩定理論以及在兩個系統時如何建構多重李亞普諾夫函數(Multiple Lyapunov Function) ) 以及其穩定切換律。第六章主要的內容就是針對第三章、第四章及第五章提出的條件以一些例子來做一個模擬，證實我們所提出的方法可以真正的運用在一些例子身上。第七章則是將此篇論文作一個總結，並且提供一些未來的研究方向。



## 第二章

# 線性矩陣不等式



近10年來，線性矩陣不等式用來解決系統與控制中的一些問題，隨著解決線性矩陣不等式的方法的提出以及MATLAB軟體中LMI工具箱的推出，線性矩陣不等式這一個工具越來越受到人們的注意跟重視，應用線性矩陣不等式來解決系統與控制問題已成為應用現性矩陣不等式來解決系統與控制問題時這些領域中的一大研究方法。

本章主要介紹線性矩陣不等式的一些基本概念，以及求解系統與控制問題時，提出一些常用的例子來說明如何將問題轉化成為線性矩陣不等式的形式，進而利用LMI工具來求解。

### 2.1 線性矩陣不等式的一般形式

一個線性矩陣不等式就是具有形式

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m < 0 \quad (2.1)$$



的一個表示式。其中  $x_1, \dots, x_m$  是  $m$  個實數變數，稱為線性矩陣不等式的決策變數， $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$  是由決策變數所構成的向量，稱為決策向量。 $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0, 1, \dots, m$  是一組給定的實對陣矩陣，不等號  $<$  指的是矩陣  $F(x)$  是負定的，即  $F(x)$  的最大特徵值小於零。

如果把  $F(x)$  看成是從  $\mathbb{R}^m$  到實對稱矩陣  $S^n = \{M : M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$  的一個映射，則可以看出  $F(x)$  並不是一個線性函數，而是一個仿射函數 (Affine mapping)。但由於歷史原因，因此不等式被稱為線性矩陣不等式。因此線性矩陣不等式不僅僅只可處理線性矩陣不等式的問題，仿射矩陣不等式問題也是可以利用線性矩陣不等式來求解。

在許多系統與控制問題中，問題的變數是以矩陣的形式出現的，例如李亞普諾夫矩陣不等式：

$$F(x) = A^T P + P A + Q < 0 \quad (2.2)$$

其中  $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  為給定的常數矩陣，且  $Q$  是對稱的， $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是對稱的且未知矩陣變數，因此此矩陣中的變數為一個矩陣。假設  $e_1, e_2, \dots, e_m$  是  $S^n$  中的一組基底，則對任意矩陣  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ，使得  $P = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ ，因此，

$$\begin{aligned} F(P) &= F\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1 (A^T e_1 + e_1 A) + \dots + x_m (A^T e_m + e_m A) \\ &< 0 \end{aligned}$$

則李亞普諾夫矩陣不等式 (2.2) 可改寫成標準的線性矩陣不等式 (2.1)

## 2.2 可轉化成線性矩陣不等式表示的問題

許多系統與控制中的問題起初看起來不是一個線性矩陣不等式問題，或者不具有式子 (2.1) 的形式，但可以通過適當的處理將問題轉化成為式子 (2.1) 形式的線性矩陣不等式問題。以下為一些典型的例子。

1. 多個線性矩陣不等式

$$F_1(x) < 0, \dots, F_k(x) < 0$$

稱為一個線性矩陣不等式系統。令  $F(x) = \text{diag}\{F_1(x), \dots, F_k(x)\}$ ，則  $F_1(x) < 0, \dots, F_k(x) < 0$  與  $F(x) < 0$  成立為充分必要條件。因此，一個線性矩陣不等式系統也可以用一個單一的線性矩陣不等式來表示

2. 考慮問題

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

其中  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  為一個仿射函數， $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  和  $b \in \mathbb{R}^n$  為已知的常數矩陣和向量。由於  $Ax = b$  的解構成了  $\mathbb{R}^m$  中的一個線性變異 (Linear variety)，因此可以更進一步考慮

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ x \in M \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $M$  為  $\mathbb{R}^m$  中的一個線性變異 (Linear variety)，即

$$M = x_0 + M_0 = \{x_0 + m \mid m \in M_0\}$$

上式中的  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ ， $M_0$  是  $\mathbb{R}^m$  中的一個線性子空間，這種多限制問題也可以轉化成為一個單一的線性矩陣不等式限制問題。

假設  $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^m$  為線性空間的一組基底，而仿射函數  $F(x)$  可以分解成  $F(x) = F_0 + F_1(x)$ ，其中  $F_1(x)$  為一個線性函數。對於任意的  $x \in M$ ， $x$  可以表示成  $x = x_0 + \sum_{i=1}^k x_i e_i$ 。因此我們可將 (2.3) 轉換成

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1(x_0 + \sum_{i=1}^k x_i e_i) < 0 \\ &= F_0 + F_1(x_0) + \sum_{i=1}^k x_i F_1(e_i) < 0 \\ &= \bar{F}_0 + \sum_{i=1}^k x_i F_1(e_i) < 0 \\ &= \bar{F}(x) < 0 \end{aligned}$$

其中： $\bar{F}_0 = F_0 + F_1(x_0)$ ，因此可得知多個限制問題可轉換成為單一的線性矩陣不等式。

### 3. 處理 $F_{22}(x) - F_{12}^T(x)F_{11}^{-1}(x)F_{12}(x) < 0$ 問題

在許多將一些線性矩陣不等式轉化成為線性矩陣不等式的問題中，我們常常使用到 Schur 分解性質。考慮一個矩陣  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，並將  $F$  分解成

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

其中  $F_{11}$  的維度為  $r \times r$ ，假設  $F_{11}$  為非奇異矩陣，則  $F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}$  稱為  $F_{11}$  在  $F$  中的 shur 分解

**輔助定理 1** 對於給定的對稱矩陣  $F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$ ，其中  $F_{11}$  的維度為  $r \times r$  以下三個條件為等價的



$$F < 0 \tag{2.4}$$

$$F_{11} < 0, F_{22} - F_{12}^T F_{11}^{-1} F_{12} < 0 \tag{2.5}$$

$$F_{22} < 0, F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{12}^T < 0 \tag{2.6}$$

■

證明：(a) $\Leftrightarrow$ (b)，由於  $F$  為對稱矩陣，因此  $F_{11} = F_{11}^T$ ， $F_{22} = F_{22}^T$ ， $F_{21} = F_{12}^T$  經由簡單的計算我們可得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{21}F_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{21}F_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12} \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} F < 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{21}F_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{21}F_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12} \end{bmatrix} < 0 \\ &\Leftrightarrow (2.5) \end{aligned}$$

由此可得結論(2.4)和結論(2.5)為對等

(2.4)  $\Leftrightarrow$  (2.6)

$$\begin{bmatrix} I & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

類似於前面的證明我們即可得到此理論的結果 ■

由前面的結果我們可以發現，(2.5)以及(2.6)為非線性矩陣不等式。因此利用 shur 定理中的對等關係，我們可以將一些非線性矩陣不等式轉換成為線性矩陣不等式。

像是在一些控制問題中，我們經常遇到的二次型矩陣不等式：

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$$

其中  $A, B, Q = Q^T > 0, R = R^T > 0$  為給定的常數矩陣， $P$  是對稱的變數，則應用定理(3)，我們可將矩陣不等式(2.2)的問題轉換成為一個等價的線性矩陣不等式

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -R \end{bmatrix} < 0$$

的可行性問題，即成為一個線性矩陣不等式問題。

## 第三章

# N 個 N 階不穩定系統間存在穩定切換律之研究設計



在這一章節當中，我們討論在  $N$  個不穩定系統之間，存在穩定切換律的充分條件，以及如何利用 LMI 來快速建構穩定切換律。我們將分為四個小節來探討：

3.1：介紹在  $N$  個不穩定系統之間，存在穩定切換律的兩個條件，以及介紹兩者之間的關係

3.2：根據 3.1 節的條件，利用 LMI 來尋找滿足穩定切換律的充分條件，以及如何建構穩定切換律。

3.3：討論不可穩定的控制系統如何設計控制器並利用 LMI 建構穩定切換律。

3.4：介紹尋找共同穩定器的動機與用途，以及提供一個判斷存在條件，並且利用 LMI 找尋共同穩定器

### 3.1 N 個 N 階不穩定系統中存在穩定切換律的條件

在這一節當中，我們要介紹  $N$  個不穩定系統間存在穩定切換律的兩個充分條件，這兩個條件分別由不同的人所提出。考慮  $N$  個線性系統

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

其中，這  $N$  個系統皆不穩定。換言之， $A_i, i = 1, \dots, N$  都不是赫維茲矩陣。定義李

$$V(x) = x^T P x \quad (3.2)$$

對於 $N$ 個不穩定系統之間存在穩定切換律的充分條件，我們可以用接下來的式子來表示：

$$\exists P > 0, \text{ 使得 } \cup_{i=1}^N \{x | x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (3.3)$$

然後在這些系統中找到一個適當的切換律，使得在任何時間下 $\dot{V} < 0$ ，並且讓 $x(t) \rightarrow 0$ 隨著 $t \rightarrow \infty$ 。然而式子(3.3)沒有提供方法來尋找這樣的 $P$ 。在2000，[8]也提出了一個存在穩定切換律之充分條件，如接下來的條件(3.4)所示：

$$\exists \alpha_i > 0 \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (3.4)$$

他們提供了方法來驗證是否存在 $\alpha_i$ ，並且有明確的步驟來建構穩定的切換律。所以，這兩個條件比較起來，前者為理論導向，而且沒有提供明確的方法來尋找適當的 $P$ ，並建構穩定的切換律。相反的，後者有明確的建構穩定切換律的步驟在[44]。然而在1996年，這兩個條件已經被證明在二個系統中為對等的[13]。但在 $N > 2$ 的情況下，以下證明(3.4)僅為條件(3.3)的充分條件

引理：條件(3.4) $\Rightarrow$ 條件(3.3)

證明：當條件(3.4)成立

$$\implies \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣}$$

$$\implies \forall Q > 0, \exists P > 0, \text{ 使得 } A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q < 0$$

$$\implies \forall x \neq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i x^T (A_i^T P + P A_i) x = -x^T Q x < 0$$

$$\implies \forall x \neq 0, x^T \alpha_1 (A_1^T P + P A_1) x + x^T \alpha_2 (A_2^T P + P A_2) x + \cdots + x^T \alpha_N (A_N^T P + P A_N) x < 0$$

$$\implies \forall x \neq 0 \text{ 至少有一個 } x^T (A_i^T P + P A_i) x, i = 1 \cdots, N \text{ 小於零。} \quad \blacksquare$$

情況(3.3) $\not\Rightarrow$ 情況(3.4)

我們提出以下的反例來說明

範例 3 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & \frac{-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2} & 1.5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1.5 & \frac{-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2} & -1.5 \end{bmatrix}$$

首先令  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則  $L_i = A_i, i = 1, 2, 3$  皆為不穩定矩陣。其中  $\Omega_1^-$  為對稱於原點兩邊的圓錐形式。且圓錐以  $x$  軸為中心張開角度  $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_1^-}{\lambda_1^+}} = 90^\circ$ 。另外系統  $A_2, A_3$  則分別為對  $A_1$  系統旋轉  $60^\circ$  及  $120^\circ$  因此由此可得知  $\cup_{i=1}^3 \Omega_i^- = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 。接下來我們令

$$A_{eq} = \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_3 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) A_1$$

則

$$\begin{aligned} A_{eq} &= \begin{bmatrix} -1.5\alpha_1 & \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_1 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_1 & 1.5\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5\alpha_2 & \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_2 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_2 & -1.5\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 & 0 \\ 0 & 3 - 3\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 + 1.5\alpha_1 + 4.5\alpha_2 & \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_1 - \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_2 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_1 - \frac{-3\sqrt{3}}{2}\alpha_2 & 3 - 1.5\alpha_1 - 4.5\alpha_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩陣  $A_{eq}$  之特徵方程式

$$\Delta(A_{eq}) = \det(sI - A_{eq}) = s^2 - \text{tr}(A_{eq})s + \det(A_{eq})$$

其中  $\text{tr}(A_{eq}) = 0$ ，由此可得  $A_{eq}$  並不是一個赫維茲矩陣，因此我們可以知道在多個系統 ( $N > 2$ ) 當中，條件 (3.4) 成立並不代表這些系統擁有穩定的凸組合 (convex combination)。由上面的證明我們可得知二次的李亞普諾夫建構穩定切換律的兩個條件之間的關係。 ■

雖然在多個系統中條件 (3.3) 與條件 (3.4) 並非對等，但條件 (3.4) 仍然為條件 (3.3) 的一個充分條件，因此我們仍然可以利用 [44] 中所提出的建構步驟，來建構出穩定切換律。接下來我們介紹如何利用 LMI 求解出式子 (3.4) 中  $\alpha_i$  值的方法以及建構穩定切換律的步驟。

### 3.2 N 個 N 階不穩定系統中建構穩定切換律的設計與研究

為了達到前面所提到的目標，我們提出一個線性矩陣不等式的情況來找尋  $\alpha_i$ ，即假設我們可以找到  $\alpha_i > 0$  且  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  使得  $A_{eq} := \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i^s$  為一個赫維茲矩陣其中  $A_i^s := \frac{1}{2}(A_i + A_i^T)$ 。經由以下的輔助定理 2 我們可以得知系統 (3.1) 若滿足條件 (2) 則代表我們可以利用二次穩定切換來使得系統穩定。

**輔助定理 2** 假設  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。則

$$\lambda_{\min}(A^s) \leq \operatorname{Re}\lambda(A) \leq \lambda_{\max}(A^s)$$

證明：根據 Reyleigh Quotient，取  $Ax = \lambda x$  而  $B = (A + A^T)/2$  則

$$\begin{aligned} (\bar{x}, Bx) &= \frac{1}{2}((\bar{x}, Ax) + (\bar{x}, A^T x)) \\ &= \frac{1}{2}((\bar{x}, \lambda x) + (\bar{\lambda} \bar{x}, x)) \\ &= \frac{(\lambda + \bar{\lambda})}{2}(\bar{x}, x) \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(B) &\leq \frac{(\bar{x}, Bx)}{(\bar{x}, x)} \leq \lambda_{\max}(B), \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow \lambda_{\min}(B) &\leq \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} \leq \lambda_{\max}(B) \\ \Rightarrow \lambda_{\min}(B) &\leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq \lambda_{\max}(B) \end{aligned}$$

由此我們可得知當  $\lambda_{\max}(A^s) < 0$  時， $\operatorname{Re}\lambda(A) < 0$ 。 ■

令  $\beta_i := \alpha_{i+1}/\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ 。經由輔助定理 2，如果我們可以找到常數  $\beta_i > 0, i = 1 \dots, N-1$  使得

$$A_{eq}^s = A_1^s + \beta_1 A_2^s + \dots + \beta_{N-1} A_N^s < 0 \quad (3.5)$$

滿足則代表條件 (3.4) 成立，雖然條件 (3.5) 較條件 (3.4) 不具一般性。但由於條件 (3.4) 中要求得  $\alpha_i > 0$  為一個 NP-hard 的問題。而條件 (3.5) 若滿足，則我們可以直接利用 Matlab 中的 LMI toolbox 來求解  $\beta_i > 0$ 。



接下來我們提供一個演算法則來簡單的介紹如何建構穩定切換律的步驟

演算法則 1 :

**Step 1 :** 使用 LMI 則來檢查是否  $A_1^s + \sum \beta_i A_i^s = A_{eq}^s$ ,  $i = 2 \cdots N$  是否存在  $\beta_i \in (0, \infty)$ , 使得  $A_{eq}^s$  是一個赫維茲矩陣。如果是的話, 則進行 Step 2。

**Step 2 :** 選擇  $\beta_i$  值, 使得  $A_{eq}^s$  為一個赫維茲矩陣。並且由下列的線性矩陣不等式求解出正定矩陣  $P$ ,

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} < 0$$

**Step 3 :** 定義,  $i = 1, 2, \cdots, N$

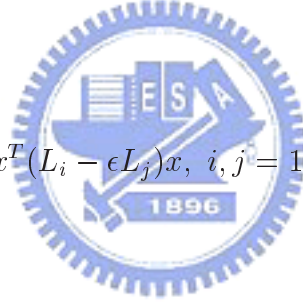
$$L_i = A_i^T P + P A_i,$$

$$\Omega_i^- = \{x | x^T L_i x < 0\}$$

以及切換平面

$$s_{ij}(x) = x^T (L_i - \epsilon L_j) x, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N \quad \forall i \neq j$$

其中  $\epsilon$  滿足  $0 \leq \epsilon \leq 1$ 。



**Step 4 :** 根據下列的規則來切換兩系統 :

1. 在初始狀態時間  $t_0$  時,  $i = \arg \min_j (x^T(t_0) L_j x(t_0))$ , 則由系統  $A_i$  開始。
2. 當  $s_{ij}(x)$  由負值改變到正值, 取  $\max_j s_{ij}(x(t))$ , 則系統  $A_i$  則切換到系統  $A_j$ , 其中  $i = 1, 2, \cdots, N$  並且  $i \neq j$ 。

### 3.3 不可穩定之控制系統建構穩定切換律的設計與研究

在這一節當中, 我們要討論加入控制器  $u(x)$  仍不可穩定的系統之中, 使得這  $N$  個不可穩定之系統滿足條件 (3.3) 或 (3.4), 進而達到穩定控制的目的。考慮  $N$  個線性系統

$$\dot{x} = Ax + B_i u_i, \quad i = 1, \cdots, N \quad (3.6)$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$ , 並且  $(A, B_i)$  這  $N$  個系統皆不可穩定 (unstabilizable)。也就是說, 不存在線性狀態迴授

$$u_i(x) = K_i x, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

使得  $A + B_i K_i = A_i$  為赫維茲矩陣。但在 2.2 節的討論中, 即使系統皆不為穩定系統, 但仍然可能存在穩定切換律。因此, 我們只要選擇適當的  $u_i(x)$ , 使得  $A + B_i K_i = A_i$  滿足條件 (3.4), 仍然可以找到適當的切換律, 使得  $x(t) \rightarrow 0$  隨著  $t \rightarrow \infty$ 。接下來, 我們根據 2.2 節中的結果, 來研究穩定切換律的存在條件。

根據條件 (3.4) 結果, 只要存在  $K_i, i = 1, \dots, N$  使得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (3.8)$$

則存在  $P > 0$  使得

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \right\}^T P + P \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B_i K_i) \right\} < 0 \quad (3.9)$$

或

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i [(A + B_i K_i)^T P + P(A + B_i K_i)] < 0 \quad (3.10)$$

我們選擇

$$K_i = -B_i^T P \quad (3.11)$$

則式子 (3.10) 變成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^T P + P A - 2P B_i B_i^T P) < 0 \\ \implies & \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^T P + P A) - \sum_{i=1}^N \alpha_i (2P B_i B_i^T P) < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

同除以  $\alpha_1$ , 令  $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_1} = \beta_i, i = 1, \dots, N-1$ , 則變成下列式子

$$A_\beta^T P + P A_\beta - 2P B_\beta B_\beta^T P < 0 \quad (3.13)$$

其中

$$A_\beta = (1 + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i)A, \quad B_\beta = (B_1, \sqrt{\beta_1}B_2 \cdots, \sqrt{\beta_{N-1}}B_N) \quad (3.14)$$

如式子(3.13)所示，存在  $P > 0$  以及  $\alpha_i > 0$  使得(3.13)成立，若且唯若  $(A_\beta, B_\beta)$  為可穩定。所以，我們有接下來的結果。

**定理 1** : [34] 考慮  $N$  個線性控制系統，如(3.6)所示。假設  $(A, B_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  皆不可穩定，但  $(A, B)$  為可穩定，其中  $B = (B_1, \dots, B_N)$ 。則存在  $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$  使得在系統  $A + B_i K_i$  之間，存在穩定切換律。而  $K_i$  可以依照式子(3.11)的方式來選取。而  $P$  可以經由解下列的 Riccati equation 所求得

$$A_\beta^T P + P A_\beta - 2P B_\beta B_\beta^T P = -Q \quad (3.15)$$

其中  $Q > 0$ ,  $\beta_i > 0$ 。

由上面的定理我們知道只要  $(A, B)$  為可穩定，則一定存在穩定切換律。由上面的證明，我們可以發現  $(A, B)$  與  $(A_\beta, B_\beta)$  其實只是倍數上的關係，所以我們可以任意選擇  $\beta_i > 0$ ，然後由  $(A_\beta, B_\beta)$  求解出所需要之  $P$ ，定義出  $A - \beta_i B_i B_i^T P = A_i$ ，接下來依只要依照演算法則 1 的步驟，就可以建構穩定切換律。

### 3.4 共同穩定器之設計與研究

前面章節中，我們提到了有關於切換系統的問題，就是如何在不穩定的系統之間找出適當的切換律以達到穩定控制。但是，當系統有故障發生的時候，是否可以用剩下來的控制器繼續運作，並且保有原來的穩定特性，這是個值得研究的問題。最近在可靠度控制中對於控制器容錯控制的議題有相當多的相關研究([29]、[30]、[36]、[47]、[51])。而在前面的章節中我們所探討的條件似乎可以應用在尋找其中的共同穩定器的問題上。因此接下來我們探討關於共同穩定器的問題上。

一般的情況下，不管任何系統都有可能發生故障，有可能是因為人為因素或是外在的因素，也可能是因為系統老舊等等。一旦有了故障發生系統可能無法正常運作。但是，有一些特別的系統一旦發生故障，其維修的費用或是維修的過程相當的費時又費力，如在外太空的人造衛星、探測器等。因為這些特別的系統，我們無法避免故障的發生，所以一個可行的方法就是利用系統的redurdancy來設計共同穩定器，使得系統發生故障時，剩下來的控制器仍然可以使原來的系統正常的運作。如此一來，我們可以省下了故障的維修費用以及回收的費用，也不必設計多餘感應器來檢查系統是否有發生故障。

[47]中，將可能發生故障的控制元件預設在某一特定的集合內。而另一篇文章[29]，將[47]中的結果推廣到故障的情況可以不在預設的集合中，並且，容許故障的控制器也可以不只一個。而且共同穩定器主要在找一個 $\beta > 0$ 使得 $A - (\beta)B_i B^T P$ 為赫維茲矩陣，其條件與條件(3.4)有共同之處。因此，我們利用前面文章提到的兩個條件以及[29]中的觀念，來探討共同穩定器的存在條件。

考慮一個線性控制系統

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.16)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。根據[29]中，定義控制矩陣之集合

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \{B_i \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid B_i \text{ 是將 } B \text{ 中的某些行向量以零向量取代} \\ & \text{， 並且 } (A, B_i) \text{ 皆為可穩定} \} \end{aligned} \quad (3.17)$$

也就是每個 $B_i \in \mathcal{B}$ ， $B_i$ 表示控制矩陣 $B$ 中某些控制器發生故障。並且很明顯的集合 $\mathcal{B}$ 中包含有限多個矩陣。而我們的目的就是要找系統 $(A, B_i)$ 的共同穩定器，其中 $B_i \in \mathcal{B}$ 。

由線性系統定理知道，一對線性系統 $(A, B)$ ，如果 $A$ 之不穩定的子空間包含於 $(A, B)$ 可控的範圍內，則此系統為可穩定化[30]。由此定理，我們或許會猜測如果系統 $(A, B_i)$ ， $B_i \in \mathcal{B}$ 其可控的範圍皆包含 $A$ 的不穩定子空間，則 $\mathcal{B}$ 存在共同穩定器。

但是，很不幸的，這樣的猜測是錯誤的。以下為一個例子：

範例 4：[29] 考慮系統(3.16)，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

令

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

我們可以很容易的知道 $(A, B)$ 以及 $(A, B_i)$ ,  $i = 1, 2$ 皆為完全可控。根據(3.17)的定義，我們知道 $\mathcal{B} = \{B, B_1, B_2\}$ 。假設這三個系統的共同穩定器為 $u = Kx$ ，其中

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

也就是說 $A + B_i K$ ,  $i = 1, 2$ 都是赫維茲矩陣。根據羅斯赫維茲穩定準則， $(A + B_1 K)$ 為穩定矩陣，則 $\text{tr}(A + B_1 K) = k_{11} - k_{12} + 3 < 0$ 以及 $\det(A + B_1 K) = 2k_{11} - k_{12} + 2 > 0$ ，其中 $\text{tr}(\cdot)$ 以及 $\det(\cdot)$ 為矩陣之對角線和以及行列式值。所以，只要取 $k_{11} > 1$ ,  $k_{12} > 4$ ，則 $(A + B_1 K)$ 為赫維茲矩陣。同理，對於系統 $(A + B_2 K)$ ， $\text{tr}(A + B_2 K) = k_{21} + k_{22} + 3 < 0$ 以及 $\det(A + B_2 K) = 2k_{21} + k_{22} + 2 > 0$ 。只要選擇 $k_{21} > 1$ ,  $k_{22} < -4$ ，則 $(A + B_2 K)$ 為赫維茲矩陣。接下來，我們檢查系統 $(A + BK)$ ， $\det(A + BK) = 2k_{11}(k_{22} + 1) + 2k_{21}(1 - k_{12}) - k_{12} + (k_{22} + 2)$ ，帶入由系統 $(A + B_1 K)$ 以及 $(A + B_2 K)$ 所求得值，我們發現 $\det(A + BK) < 0$ 。因此，我們知道這三個系統沒有共同穩定器。

由上面敘述的例子來看，我可以發現並不是 $(A, B)$ 所有的可穩定的子系統 $(A, B_i)$ ， $B_i \in \mathcal{B}$ 都有共同穩定器，一定要滿足某些條件，才有可能存在共同穩定器。首先，我們設計控制器 $u$ 使得系統在沒有故障發生時其性能最好，然後再來探討如何選取共同穩定器。因為系統 $(A, B)$ 為可穩定，因此，我們可以令 $u = -B^T P x$ ，則沒有發生故障時系統的性能最好。藉由解線性矩陣不等式來得到我們所要的正定矩陣 $P$ 。如下列式子所示：

$$A^T P + P A - P B B^T P < 0 \quad (3.21)$$

如此，當系統沒有故障發生時，這個控制器可以正常的運作。此時，式子(3.16)變成了

$$\dot{x} = (A - BB^T P)x \quad (3.22)$$

其中  $(A - BB^T P)$  為一個赫維茲矩陣。根據3.1節中的條件(3.4)的定義，我們可以發現存在一個  $\beta > 0$  使得  $A + (-\beta)BB^T P$  為一個赫維茲矩陣在兩個系統的情況之下與條件(3.3)為對等條件。也就是說令第一個系統為  $A$ ，第二個系統為  $-BB^T P$ 。矩陣  $A$  的不穩定範圍都將被矩陣  $-BB^T P$  所覆蓋。即

$$\{x|x^T(A^T P + PA)x < 0\} \cup \{x|-x^T P B B^T P x < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (3.23)$$

因此，我們令控制器為  $u = -\beta B^T P$ ，其存在共同穩定器的充分條件為對於所有的  $B_i, i = 1, \dots, k$ ，其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ， $\mathcal{B}$  如式子(3.17)所示， $A + (-\beta)B_i B_i^T P$  必須皆為赫維茲矩陣。

接下來就來介紹如何以3.1節中的兩個條件(3.3)以及(3.4)，來判斷是否存在共同穩定器。首先，我們定義

$$\Omega_A^+ = \{x|x^T(A^T P + PA)x \geq 0, \|x\| = 1\} \quad (3.24)$$

以及

$$\Omega_{B_i}^- = \{x|x^T(-PB_i B_i^T P)x < 0, \|x\| = 1\} \quad (3.25)$$

我們有以下的定理：

**定理 2**：如果  $\Omega_A^+ \subseteq \Omega_{B_i}^-$ ，其中  $\Omega_A^+, \Omega_{B_i}^-$  定義如式子(3.24),(3.25)。假設我們可以找到  $\beta > 0$  使得  $A + (-\beta B_i B_i^T P)$  皆為赫維茲矩陣，其中  $B_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, k$ 。

證明：與3.1章中證明情況(3.4) $\Rightarrow$ 情況(3.3)類似。 ■

所以，當定理2的條件成立時，則我們可以利用解下列線性矩陣不等式求出使得  $A + (-\beta B_i B_i^T P)$  為赫維茲矩陣的  $\beta$  值

$$A^T P + PA - 2\beta P B_i B_i^T P < 0 \quad (3.26)$$

其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。若滿足上列條件，我們可求得  $\beta$  值。則  $A + (-\beta B_i B^T P)$  皆為穩定矩陣，而  $u = -\beta B^T P x$  為我們所設計的共同穩定器，並且系統沒有發生故障時其性能為最好。

根據上述的方法，我們整理出一個步驟，來設計共同穩定器：

## 演算法則 2：

**Step 1：**令所有可能發生故障但仍可穩定的控制系統為  $(A, B_i)$ ，其中  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。

**Step 2：**依照原控制系統 (3.16)，令  $u = -B^T P x$ ，並利用式子 (3.21)，來求解出一個正定矩陣  $P$ 。

**Step 3：**檢查  $\Omega_A^+$  是否都有包含於  $\Omega_{B_i}^-$  中。

**Step 4：**利用 LMI 來求解式子 (3.26) 可得到  $\beta > 0$  使得  $(A + (-\beta) B_i B^T P)$  為赫維茲矩陣。



上述的設計方法，主要目的在於使系統在沒有發生故障時性能最好。但系統發生故障時，雖然系統仍然可以運作，但性能可能變的很差。因此，若我們希望系統在發生故障時性能可以更好，則我們可以根據 [29] 中的定義，由發生最壞情況時的控制器來做設計。首先，定義  $\mathcal{B}$  的子集合為  $\mathcal{B}_1 = \{B_1, \dots, B_k\}$ ，其中  $\mathcal{B}$  的定義如 (3.17) 所示。若  $\text{Range}(B_1) \subseteq \text{Range}(B_2) \subseteq \dots \subseteq \text{Range}(B_k)$  則我們稱  $\mathcal{B}_1$  為巢狀 (nested)，並且  $B_1$  為系統  $(A, B_i)$  的最壞情況 (最少數可用的控制器) 其中  $B_1 \in \mathcal{B}_1$ 。在一般的情況下，可能有數個巢狀子集合  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s \in \mathcal{B}$ ，我們令這些巢狀子集合的最壞情況分別為  $B_1^*, B_2^*, \dots, B_k^*$ ，其中  $B_i^* \in \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。然後選擇其中一組控制器  $B_1^*$ ，其中

$$\text{rank}(B_1^*) = \min_{1 \leq j \leq k} \text{rank}(B_j^*) = l$$

令  $u = -B_1^{*T} P x$ 。接下來依照演算法則 2 的步驟，求出一個正定矩陣  $P$ ，並且檢查是

否所有的  $\Omega_A^+$  都包含於  $\Omega_{B_i^*}^-$  中，其中  $\Omega_{B_i^*}^- = \{x \mid -x^T(PB_i^*B_i^{*T}P)x < 0, \|x\| = 1\}$ 。若所有的  $\Omega_A^+$  都包含於  $\Omega_{B_i^*}^-$  中，則我們可以找到一個  $\beta > 0$  使得  $A - \beta B_i^*B_i^{*T}P$  皆為赫維茲矩陣。所以我們可以設計共同穩定器為  $u = -\beta B^T P x$ ，並且當系統發生故障時性能可以比上面的設計方法好。





## 第四章

# 切換系統的高階穩定性條件

接下來在這個章節，我們要來討論當切換系統凸組合為中性穩定時的穩定切換條件。

- 4.1: 介紹尋找切換系統高階穩定性條件的動機與用途。
- 4.2: 推廣凸組合為中性穩定的條件至非線性切換系統。
- 4.3: 將凸組合為中性穩定的條件應用在多個線性系統。

### 4.1 切換系統的高階穩定性條件問題描述

在第三章中，我們提到了有關於切換系統的問題，就是如何在不穩定的系統之間找出存在穩定切換律的條件且利用適當的切換律以達到穩定控制。考慮系統

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

[44] 中提出了當兩個切換系統滿足了  $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$  為一個赫維茲矩陣時則系統可經由切換而使得狀態穩定。而 [1] 中將此條件推廣為

(H1:) 若存在  $\alpha \in (0, 1)$  使得  $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$  為中性穩定 (Neutral stable)。

(H2:) 當  $x^t P A_1 x = x^t P A_2 x = 0$  時, 且  $x \neq 0$

$$\Rightarrow \forall \beta \in [0, 1], x^t (P B + B^t P) (\beta A_1 + (1 - \beta) A_2) x \neq 0$$

其中 (H1) 中  $A_{eq}$  為中性穩定代表所有  $A_{eq}$  的特徵值擁有非負的實部, 且在虛軸上的特徵值為單根 (simple)。在 [1] 中, 作者證明了若滿足上述兩個條件 (H1)-(H2) 則可以利用以下切換法則使得切換系統  $\dot{x} = A_{\rho(x)} x$  達到穩定。

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x^t P B x \leq 0 \\ 2 & \text{當 } x^t P B x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

且  $B := A_1 - A_2$ , 當滿足條件 (H1) 時, 我們可以得知對所有  $x \neq 0$ ,  $V_i(x) = x^t P A_i x \leq 0$ 。而當滿足條件 (H2) 時, 可以保證系統在  $\dot{V} = 0$  的唯一不變集為零, 因此我們可以得知系統將會收斂至原點。另外分析切換律我們可以發現當  $x^t P A_1 x < x^t P A_2 x$  時, 切換至  $A_1$  系統, 當  $x^t P A_2 x < x^t P A_1 x$  時, 切換至  $A_2$  系統。因此, 我們得到當  $\dot{V}_i$  為最小時, 切換至第  $i$  個系統, 可使系統 (4.1) 穩定。根據分析我們將此定理延伸至多個線性系統及非線性系統, 如下列章節。



## 4.2 多個非線性切換系統的高階穩定條件

上一節中所介紹的情況都是針對兩個線性系統, 然而在一般的情況之下系統可能並非僅為兩個線性系統。因此在這一節中我們要將上一節的結果推廣到  $N$  個非線性不穩定系統, 所以我們考慮以下非線性系統

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

其中  $f_i(x), i = 1, \dots, N$  為順滑函數, 假設對於每個子系統  $i$ ,  $f_i(0) = 0$  且原點不是任何 (4.3) 的子系統的漸近平衡點。我們所要做的目標就是建構出一個與狀態相關的切換規則  $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, N\}$  來切換這  $N$  個系統來漸進穩定以下系統的狀態軌跡

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(x)}(x(t)) \quad (4.4)$$

因此我們的主要目的就是要提供一個保證穩定切換法則的存在性的條件以及如何建構一個與狀態相關的切換法則  $\sigma(x)$  來達成當  $t \rightarrow \infty$  時  $x(t) \rightarrow 0$

**輔助定理 3** : 令  $\phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一個在  $t = t_0$  且對於所有正整數  $i$ ,  $\phi^{(i)}(t_0) = 0$  的解析函數。則將會存在一個  $\delta > 0$  使得  $\phi(t) \equiv \phi(t_0)$  對於所有  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

**輔助定理 4** : 令  $\phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一個在  $\dot{\phi}(t_0) < 0$  的函數。則將會存在一個  $\delta > 0$  使得在所有  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\phi(t) < \phi(t_0)$  且在所有  $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ ,  $\phi(t) > \phi(t_0)$

利用輔助定理 4, 我們可以衍伸出以下的結果

**輔助定理 5** : 令  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  為一個正定函數且  $x(t)$  為  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  的解。假設所有  $V$  的第  $N$  階偏導數沿著  $f$  存在,  $n > 1$ , 且對於所有  $i = 1, \dots, n-1$

$$V^{(n)}(x(t_0)) < 0 \ \& \ V^{(i)}(x(t_0)) = 0 \quad (4.5)$$

則必定存在  $\delta > 0$  使得對於所有  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\dot{V}(x(t)) < 0$

證明: 由於  $V^{(n)}(x(t_0)) < 0$  且  $V^{(n-1)}(x(t_0)) = 0$ , 根據輔助定理 4, 我們可以知道對於一些  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$  其中  $\delta > 0$ ,  $V^{(n-1)} < 0$ 。根據平均值定理我們可以知道  $V^{(n-2)}(x(t))$  在  $(t_0, t_0 + \delta)$  為絕對遞減函數。由於  $V^{(n-2)}(x(t_0)) = 0$  則可知對於所有  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $V^{(n-2)}(x(t)) < 0$ 。以此類推我們可以得到對所有  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , 故得證。 ■

為了清楚呈現保證系統 (4.4) 的可穩定性條件我們定義以下兩個集合

$$M := \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) = 0\} \quad (4.6)$$

且  $\forall x \in M$

$$I(x, k) := \{i \mid L_{f_i}^j V(x) = 0, j = 1, \dots, k\} \quad (4.7)$$

清楚地,  $M$  表示對於 (4.4) 的所有子系統的  $\dot{V}$  為零且狀態非零的集合, 另外對於  $x \in M$ ,  $I(x, k)$  為擁有對於所有  $j = 1, \dots, k$ ,  $V^{(j)} = 0$  的子系統。

**定理 3** : 假設  $V(x)$  為一個擁有所有連續  $N$  階偏導數的正定函數，且集合  $\Omega_r$  :  $\{x|V(x) < r\}$  對於某些  $r > 0$  為有界的集合，若滿足以下任一個情況，系統 (4.3) 中存在穩定法則  $\sigma(x)$ 。

1. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$  ,  $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x) < 0\}$
2. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$  ,  $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x) \leq 0\}$  且對於所有  $x \in M \cap \Omega_r$  , 存在整數  $l > 1$  使得  $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x) < 0\}$  但對於所有的  $k < l$  ,  $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^k V(x) = 0\}$

其中穩定切換法則為以下形式

$$\sigma(x) := \begin{cases} \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} & \text{if } x \notin M \cap \Omega_r \\ \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x)\} & \text{if } x \in M \cap \Omega_r \end{cases} \quad (4.8)$$

證明: 清楚地，假設情況 (1) 滿足，則根據切換法則 (4.8) 我們可得到沿著系統 (4.4) 軌跡， $\dot{V} < 0$ 。因此可得知當  $t \rightarrow \infty$  則  $x(t) \rightarrow 0$ ，另外若情況 (2) 滿足，根據 LaSalle 不變集定理，我們只需要證明  $(M \cup \{0\}) \cap \Omega_r$  的唯一不變子集為  $\{0\}$ 。則可達到穩定的目標。為了證明此結果，我們令  $x_0 \in M \cap \Omega_r$  且令  $x(t)$  為  $\dot{x} = f_j(x)$  的解，其中  $x(t_0) = x_0$  且  $j = \arg \min_{i \in I(x_0, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x_0)\}$ ，另外根據假設  $V^{(l)}(x(t_0)) := L_{f_j}^l V(x(t_0)) < 0$ ，且對於所有  $k < l$  ,  $L_{f_j}^k V(x(t_0)) = 0$ 。因此根據輔助定理 5 我們可得到對於某些  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$  ,  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ，即代表系統 (4.4) 的狀態將會從  $M \cap \Omega_r$  的集合中離開。因此  $(M \cup \{0\}) \cap \Omega_r$  的唯一不變子集即為原點，由此可得證。 ■

定理 3 中的集合  $\Omega_r$  定義為系統 (4.4) 的估計收斂區間。假設正定函數  $V(x)$  為無界的，即當  $\|x\| \rightarrow \infty$  ,  $V(x) \rightarrow \infty$ 。則定理 3 在整個  $\mathbb{R}^n$  空間都為有效。

**序列定理 1** 假設  $V(x)$  為一個  $N$  階可微分的無界正定函數，則如果定理 3 中的情況 (1) 或 (2) 其中之一滿足則在系統 (4.3) 中存在穩定切換律  $\sigma(x)$

### 4.3 多個線性系統的高階穩定性條件

上一節的條件都是針對  $N$  個非線性系統，再這一節當中我們考慮一個特殊的情況，當  $V(x)$  為二次函數形式且系統為線性不穩定系統時。即  $V(x) = x^T P x$  且

$f_i(x) = A_i x$  其中  $P > 0$  為對稱正定矩陣。假設系統 (4.3) 的所有子系統皆不穩定即  $A_i, i = \dots, N$  皆不是赫維茲矩陣。則在這情況下集合 (4.6) 與 (4.6) 則可改寫成

$$M = \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} x^T P A_i x = 0\} \quad (4.9)$$

$$I(x, k) = \{i \mid x^T (\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot (A_i^j)^T P A_i^{m-j}) x = 0, 1 \leq m \leq k\} \text{ 對每一個 } x \in M \quad (4.10)$$

其中  $C_j^m := \frac{m!}{j!(m-j)!}$ ，經由定理 3 的推論，我們可以獲得以下結果

**序列定理 2** 若存在一個矩陣  $P > 0$ ，使得以下兩個中其中一個情況成立則系統  $\{A_1, \dots, A_N\}$  中存在穩定切換律  $\sigma(x)$

1.  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} < 0 \quad \forall x \neq 0$
2.  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \leq 0$  且  $\forall x \in M, \exists$  一個整數  $l > 0$  使得
 
$$\min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^l C_j^l \cdot (A_i^j)^T P A_i^{l-j}) x\} < 0$$
 且對所有  $k < l$ ,
 
$$\min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^k C_j^k \cdot (A_i^j)^T P A_i^{k-j}) x\} = 0$$

其中對應的切換規則為

$$\begin{aligned} \text{當 } x \notin M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \\ \text{當 } x \in M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^m C_j^l \cdot (A_i^j)^T P A_i^{l-j}) x\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

假設序列定理 2 中  $l = 2$  時，則我們可得到以下二階檢驗條件

**序列定理 3** 若存在一個矩陣  $P > 0$ ，使得以下兩個中其中一個情況成立則系統  $\{A_1, \dots, A_N\}$  中存在穩定切換律  $\sigma(x)$

1. 對所有  $x \neq 0$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} < 0$
2. 對所有  $x$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \leq 0$  且對於所有  $x \in M$ 

$$\min_{i \in I(x, l)} \{x^T (A_i^T P A_i + P A_i^2) x\} < 0$$

第三章所提到的穩定條件(3.4)，我們可以輕易的找到  $P > 0$  使得  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} < 0$

對所有  $x \neq 0$  則保證存在穩定切換律若條件(3.4)成立，如以下所述

**序列定理 4** 假設條件(3.4)成立，則  $\{A_1, \dots, A_N\}$  存在穩定切換律  $\sigma(x) = \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T P A_i x\}$

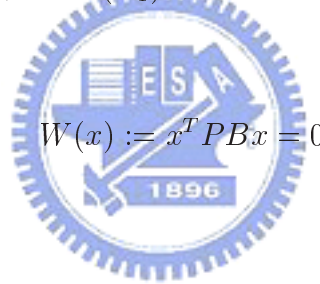
使得系統  $\{A_1, \dots, A_N\}$  的狀態穩定。

在之前的文章中提到，[1] 的兩個條件為一個充分條件使得系統擁有穩定切換律，以下可證明[1]中穩定條件成立代表高階穩定情況成立。

證明:[1]中穩定條件  $\Rightarrow$  高階穩定性條件成立

我們利用反證法假設[1]中穩定條件成立時不代表高階穩定情況成立。[1]中穩定條件(H1)成立時，可得知對所有  $x$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \leq 0$ 。而(H2)條件成立代表  $x^T P B(A_1)x > 0$  且  $x^T P B(A_2)x > 0$  同時成立或者  $x^T P B(A_1)x < 0$  且  $x^T P B(A_2)x < 0$  同時成立，不失一般性考慮我們  $x^T P B(A_1)x > 0$  且  $x^T P B(A_2)x > 0$  同時成立。

定義：



$$W(x) := x^T P B x = 0$$

則  $W(x)$  為一個解析函數，又

$$W_{(1)}(x) = 2x^T P B(A_1)x > 0$$

$$W_{(2)}(x) = 2x^T P B(A_2)x > 0$$

因此我們可以得知對於  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ， $W(x) > 0$ 。  $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ ， $W(x) < 0$

其中  $W(x) = x^T P A_1 x - x^T P A_2 x$ 。因此在  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$  時， $x^T P A_1 x > x^T P A_2 x$

又，在  $x^T P A_1 x \neq 0$  或者  $x^T P A_2 x \neq 0$  時， $\min\{x^T P A_1 x, x^T P A_2 x\} < 0$  因此對所有

$t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ， $\dot{V}_2 = x^T P A_2 x < 0$ 。則根據輔助定理5，我們可得到必存在  $n > 1$  且對

於所有  $i = 1, \dots, n-1$ ， $V^{(n)}(x(t_0)) < 0$  &  $V^{(i)}(x(t_0)) = 0$  此與假設矛盾，因此當[1]中

穩定條件成立時代表高階穩定情況成立。同理當  $x^T P B(A_1)x < 0$  且  $x^T P B(A_2)x < 0$

同時成立時以此類推即可得證 ■

## 第五章

# 多重李亞普諾夫函數

接下來在這個章節，我們要來介紹多重李亞普諾夫函數的穩定切換條件以及建構方法。

- 5.1: 介紹尋找切換系統的多重李亞普諾夫函數的動機與用途。
- 5.2: 建構多重李亞普諾夫函數的穩定條件
- 5.3: 兩個線性切換系統的多重李亞普諾夫函數建構方法。
- 5.4: 應用多重李亞普諾夫函數建構方法於兩個線性控制系統。

### 5.1 多重李亞普諾夫函數的問題描述

在本節中我們將討論建構切換系統的穩定切換律之間方法的關係，其中我們在三章時提到在 [44] 中利用二次李亞普諾夫函數建構穩定之切換律的充分條件 (3.4)，很容易可以證明經由適當的切換可使得在  $\mathbb{R}^n$  空間中除了原點外所有狀態  $\dot{V} < 0$ 。因此可達成  $x(t) \rightarrow 0$  的目的。但是對於某些系統而言，條件 (3.4) 並無法符合。而由條件 (3.3) 我們可得知只要  $\dot{V} < 0$  佈滿整個  $\mathbb{R}^n$  空間我們就可以建構出穩定的切換律。因此我們也可以利用非二次的李亞普諾夫函數建構出系統的穩定切換律。因為非二次的李亞普諾夫函數較二次李亞普諾夫為一般性，因此也比較有機會得到穩定

切換律。如以下的例子

範例5 考慮系統  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

系統  $A_1$  可改寫成  $\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1$

系統  $A_2$  可改寫成  $\dot{x}_1 = -x_2$

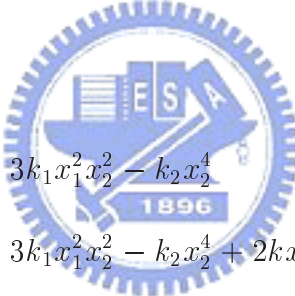
則我們令  $k > 1, k_1 > 0, k_2 > 0$

$$\begin{aligned} V &= x_1^2 + kx_2^2 - k_1x_1^3x_2 + k_2x_1x_2^3 \\ &= x_1^2(1 - k_1x_1x_2) + x_2^2(k + k_2x_1x_2) \end{aligned}$$

當  $x_1x_2 < \frac{1}{k_1}$  &  $x_1x_2 > \frac{k}{k_2}$  時,  $V$  為正。另外將  $V$  對時間作微分則

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2kx_2\dot{x}_2 - 3k_1x_1^2\dot{x}_1x_2 - k_1x_1^3\dot{x}_2 + k_2\dot{x}_1x_2^3 + 3k_2x_1x_2^2\dot{x}_2$$

代入系統  $A_2, A_1$  則我們可得到


$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -2x_1x_2 + 3k_1x_1^2x_2^2 - k_2x_2^4 \\ \dot{V}_1 &= -2x_1x_2 + 3k_1x_1^2x_2^2 - k_2x_2^4 + 2kx_1x_2 - k_1x_1^4 + 3k_2x_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

則在  $x_1x_2 < \frac{2}{3k_1}$  時,  $\dot{V}_2 < 0$ 。  $x_1x_2 > \frac{2-2k}{3(k_1+k_2)}$  時,  $\dot{V}_1 < 0$ 。因此我們可以得知收斂區間為  $x_1x_2 = \min\{|\frac{1}{k_1}|, |\frac{-k}{k_2}|, |\frac{2}{3k_1}|, |\frac{2-2k}{3(k_1+k_2)}|\}$  因此我們可以取  $k_1, k_2$  盡量小,  $k$  盡量大, 則收斂區間範圍會越大。因此我們可得到在收斂區間內, 系統為漸近穩定如圖4。





想為對於每個子系統  $A_i$ ，定義對應於子系統  $A_i$  的類李亞普諾夫函數  $V_i(x)$ ，並且建構切換律使得切換至  $i$  的  $V_i(x)$  逐次遞減。令  $t_j, j = 1, 2, \dots$  為切換次數。假設在切換瞬間  $V_1$  等於  $V_2$ ，即對於所有  $j, V_{\rho(j-1)}(t) = V_{\rho(j)}(t)$ 。因此， $V_\rho$  為一個連續函數，則明顯地，在  $V_\rho$  為遞減的情況下，我們可以得到系統為漸近穩定。圖 5(a) 描述此種情況。

然而在一般的情況下， $V_\rho$  並非一個連續函數。當切換至第  $i$  個系統時， $V_i$  遞減。但切換至其他系統時， $V_i$  為遞增，此種情況紀錄在圖 5(b)。當  $\rho = i$  時觀察  $V_i$ ， $V_i$  若隨著次數  $j$  增加而遞減，我們可以發現此切換系統的軌跡最終會收斂至原點，因此可以得到此切換系統也為漸進穩定系統。

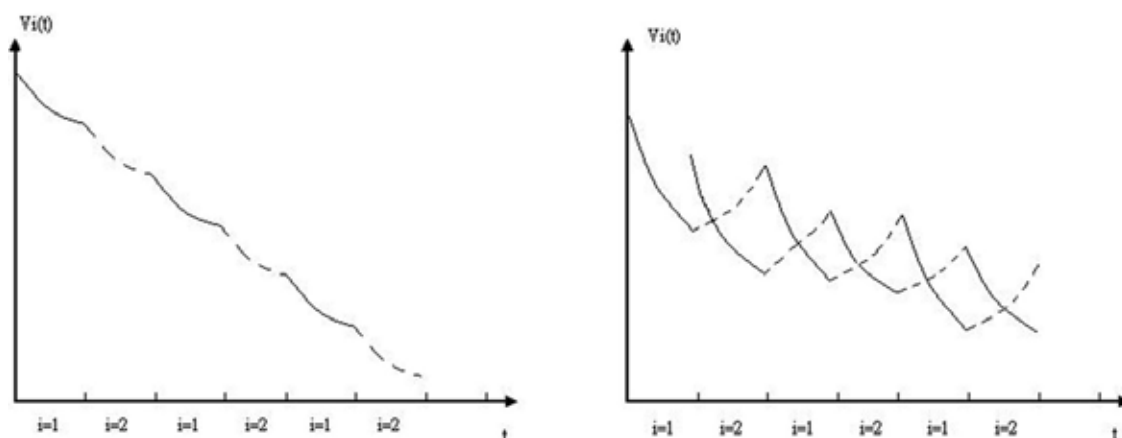


圖 5: 兩個類李亞普諾夫函數， $i$  代表切換至系統  $i$  (a) 連續  $V_i$  (b) 不連續  $V_i$

透過這些觀念我們可以整理出以下穩定性條件，考慮如下混和系統：

$$\dot{x} = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.1)$$

使其滿足底下兩個條件

1. (函數正定性)  $V_i(0) = 0$  且當  $0 \neq x \in \Omega_i$  時  $V_i(x) > 0$
2. (導數負定性) 當  $x \in \Omega_i$  時， $\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) \leq 0$

由以上兩個條件，我們整理出以下定理

**定理 4** [28][40] 假設條件 1,2 成立且  $\cup_k \Omega_k = R^n$ ，對於  $i < j$ ，令  $t_i < t_j$  為使得  $p(t_i) = p(t_j)$  的切換時間，假設存在  $\gamma > 0$  使得

$$V_{p(t_j)}(x(t_{j+1})) - V_{p(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq -\gamma \|x(t_{i+1})\|^2 \quad (5.2)$$

則系統 (3.1) 為全域 (globally) 漸近穩定

**定理 5** [5] 對於  $N$  個非線性切換系統而言，假設條件 1,2 成立每個  $f_i$  在  $\Omega_i$  中皆有對應的類李亞普諾夫函數  $V_i$ ，且假設  $\cup_i \Omega_i = R^n$ ，令  $p(t)$  為一個切換序列使得只有在  $x(t) \in \Omega_i$  時  $p(t)$  才能切換至  $i$ 。此外，

$$V_i(x(t_{i,k})) \leq V_i(x(t_{i,k-1})) \quad (5.3)$$

其中  $t_{i,k}$  代表第  $k$  次切換至  $i$  系統的時間，則此切換式系統為李亞普諾夫穩定。

以上兩個條件可以保證切換系統穩定，但這兩個條件僅為理論上的結果，並沒有明確的建構方法。因此我們接下來考慮在兩個線性不穩定系統的情況下切換系統如何建構穩定切換律。



### 5.3 兩個線性切換系統的多重李亞普諾夫函數穩定條件

假設我們切換以下兩個不穩定的線性系統

$$\dot{x} = A_1 x, \dot{x} = A_2 x \quad (5.4)$$

且各對應於類李亞普諾夫函數  $V_1(x) = x^T P_1 x$ ， $V_2(x) = x^T P_2 x$ 。其中  $P_1 = P_1^T > 0$ ， $P_2 = P_2^T > 0$ 。 $\Omega_1, \Omega_2$  定義為  $V_1, V_2$  遞減的區域。我們可以發現除非  $A_1, A_2$  為  $\alpha I, \alpha > 0$  的形式，否則都有辦法找到  $\Omega_1, \Omega_2$  的區域。利用前一章所提過的條件我們知道系統在以下情況滿足的時候存在穩定切換律。

$$\text{當 } x^T P_1 x \leq x^T P_2 x \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時, } x^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) x < 0$$

$$\text{當 } x^T P_2 x \leq x^T P_1 x \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時, } x^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) x < 0 \quad (5.5)$$

假設情況(5.5)滿足則我們可以定義穩定切換信號為

$$\sigma(t) := \arg \min\{V_i(x(t)) : i = 1, 2\}$$

我們可以輕易的發現如果沒有滑動模式的產生時，則對應於系統 $A_1, A_2$ 的李亞普諾夫函數 $V_1, V_2$ 則會逐漸的遞減因此可以保證此切換系統為漸進穩定。考慮系統產生滑動模式時，我們可以將其分為以下兩個部分。

對 $x \in S$

$$x^T(A_1^T(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A_1)x \geq 0 \quad (5.6)$$

與

$$x^T(A_1^T(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A_1)x \leq 0 \quad (5.7)$$

當滑動模式發生時，我們無法當時確定 $\sigma$ 的值，因此不失一般性我們令 $\sigma = 1$ ，我們將證明滑動模式產生時 $V_1$ 會隨著其符合的Filippov解遞減。對所有 $\alpha \in (0, 1)$ 。我們可得到

$$\begin{aligned} & x^T((\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2)^T P_1 + P_1(\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2))x \\ &= \alpha x^T(A_1^T P_1 + P_1 A_1)x + (1 - \alpha)x^T(A_2^T P_1 + P_1 A_2)x \end{aligned}$$

根據條件(5.7)

$$\leq \alpha x^T(A_1^T P_1 + P_1 A_1)x + (1 - \alpha)x^T(A_2^T P_2 + P_2 A_2) < 0$$

因此滑動模式產生時系統的軌跡也向原點接近。因此我們可以保證此切換系統仍為漸進穩定。相似的，假設我們定義穩定切換律為

$$\sigma(t) = \arg \max\{V_i(x(t)) : i = 1, 2\}$$

在滑動模式未發生時，切換系統可以有效的切換至穩定。但當滑動模式發生時，我們發現此切換方法未必可以保證系統穩定，因此在選擇此切換律時滑動模式必須要被排除。

## 5.4 兩個線性系切換統的多重李亞普諾夫函數建構方法

在進入尋找兩個線性不穩定系統的多重李亞普諾夫函數建構方法之前我們首先介紹一個在分析切換系統中的一個相當有用的工具S-procedure。

**輔助定理 6** (*S-procedure*) 假設  $T_0$  與  $T_1$  為兩個對稱矩陣考慮下列兩個情況

$$\text{當 } x^T T_1 x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時, } x^T T_0 x > 0 \quad (5.8)$$

且

$$\exists \beta \geq 0 \text{ 使得 } T_0 - \beta T_1 > 0 \quad (5.9)$$

情況 (5.8) 成立則情況 (5.9) 成立。假設存在某些  $x_0$  使得  $x_0^T T_1 x_0 > 0$ ，則兩個狀況為對等的關係。

考慮當系統切換律為

$$\sigma(x) = \arg \max \{V_i(x) : i = 1, 2\}$$

即當  $V_i(x)$  比較之後為最大，則選取  $\sigma(x) = i$ 。當  $x \neq 0$  時，函數  $\dot{V}_k(x) < 0$ 。而由上節我們提到過當在此切換律下滑動模式未必可以穩定。因此首先我們將滑動模式排除，則以下情況滿足可保證系統存在穩定切換律。

**【情況一】**

$$\text{當 } x^T P_2 x \leq x^T P_1 x \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時, } x^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) x < 0 \quad (5.10)$$

$$\text{當 } x^T P_1 x \leq x^T P_2 x \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 時, } x^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) x < 0 \quad (5.11)$$

對於二次函數  $V_i(x)$ ，利用 S-procedure 我們可以發現情況一與以下情況對等

**【情況二】** 存在  $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$  使得

$$\dot{V}_1(x) < -\gamma_1(V_1(x) - V_2(x))$$

且

$$\dot{V}_2(x) < -\gamma_2(V_2(x) - V_1(x))$$

情況二將原本複雜的問題簡略成為確認使得 $A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \gamma_1(P_1 - P_2)$ 和 $A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \gamma_2(P_2 - P_1)$ 為負定矩陣中 $\gamma_i$ 的存在性。

為了確認這些 $\gamma_i$ 的存在性問題，我們提出一些記號來簡化計算流程首先令 $S_n$ 為實對稱矩陣所構成 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的子空間， $S_n$ 的維度為 $n \times (n+1)/2$ ，令 $L_A : S_n \rightarrow S_n$ 為由 $A$ 所構成的一個線性運算子且定義為

$$L_A(P) = A^T P + P A \quad (5.12)$$

由於 $L_A : S_n \rightarrow S_n$ ，則令 $E_1, E_2, \dots, E_{\frac{n \times (n+1)}{2}}$ 為 $P$ 的基底

$$\begin{aligned} L_A(E_1) &= A^T E_1 + E_1 A = a_{11} E_1 + a_{21} E_2 + \dots + a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, 1} E_{\frac{n \times (n+1)}{2}} \\ L_A(E_2) &= A^T E_2 + E_2 A = a_{12} E_1 + a_{22} E_2 + \dots + a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, 2} E_{\frac{n \times (n+1)}{2}} \\ &\vdots \\ L_A(E_{\frac{n \times (n+1)}{2}}) &= A^T E_{\frac{n \times (n+1)}{2}} + E_{\frac{n \times (n+1)}{2}} A \\ &= a_{1, \frac{n \times (n+1)}{2}} E_1 + a_{2, \frac{n \times (n+1)}{2}} E_2 + \dots + a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, \frac{n \times (n+1)}{2}} E_{\frac{n \times (n+1)}{2}} \end{aligned}$$

$$L_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, \frac{n \times (n+1)}{2}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, \frac{n \times (n+1)}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, 1} & a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, 2} & \dots & a_{\frac{n \times (n+1)}{2}, \frac{n \times (n+1)}{2}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

另外令 $I$ 為在 $S_n$ 中的單位運算子，即 $I(P) = P$ 。最後選擇 $L_i = L_{A_i + (r_i/2)I}$ ，則 $L_i = L_{A_i + (r_i/2)I} = L_{A_i} + \gamma_i I$ 利用這些記號，情況二可以簡略為以下兩個李亞普諾夫方程式

$$L_1(P_1) - \gamma_1 P_2 < 0 \quad (5.14)$$

$$-\gamma_2 P_1 + L_2(P_2) < 0 \quad (5.15)$$

相等地對於某些正定的  $Q_1, Q_2$

$$L_1(P_1) - \gamma_1 P_2 + Q_1 = 0 \quad (5.16)$$

$$-\gamma_2 P_1 + L_2(P_2) + Q_2 = 0 \quad (5.17)$$

經由前面兩式代換我們可以得到

$$P_1 = \gamma_1 \gamma_2 L_1^{-1} L_2^{-1}(P_1) - L_1^{-1}(Q_1) - \gamma_1 L_1^{-1} L_2^{-1}(Q_2) \quad (5.18)$$

或者

$$P_1 = \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2 L_1(P_1) + \gamma_2^{-1}(Q_2) + \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2(Q_1) \quad (5.19)$$

對於方程式 (5.18) 及 (5.19)，我們可以利用數值方法中的定點疊代法 (fixed point iteration) 來求得  $P_1$ ，因此方程式 (5.18) 及 (5.19) 成為

$$[P_1]_{k+1} = \gamma_1 \gamma_2 L_1^{-1} L_2^{-1}([P_1]_k) - L_1^{-1}(Q_1) - \gamma_1 L_1^{-1} L_2^{-1}(Q_2) \quad (5.20)$$

或者

$$[P_1]_{k+1} = \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2 L_1([P_1]_k) + \gamma_2^{-1}(Q_2) + \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2(Q_1) \quad (5.21)$$

對於任意的  $Q_1, Q_2$ ，則疊代方程式 (5.20) 和 (5.21) 產生收斂與否由  $\rho[L_1^{-1} L_2^{-1}]$  及  $\rho[L_2 L_1]$  決定。左右各加  $\beta P_1$  因此式子 (5.20) 及 (5.21) 成為

$$(1 + \beta)[P_1]_{k+1} = (\gamma_1 \gamma_2 L_1^{-1} L_2^{-1} + \beta I)([P_1]_k) - L_1^{-1}(Q_1) - \gamma_1 L_1^{-1} L_2^{-1}(Q_2) \quad (5.22)$$

或者

$$(1 + \beta)[P_1]_{k+1} = (\gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2 L_1 + \beta I)([P_1]_k) + \gamma_2^{-1}(Q_2) + \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} L_2(Q_1) \quad (5.23)$$

若式子 (5.22) 可疊代收斂至一個 (5.14) 的解  $P_1$ ，則代表對某些  $\beta > -1$ ， $\rho[\gamma_1 \gamma_2 L_1^{-1} L_2^{-1} + \beta I] < 1 + \beta$ ，其中最大特徵值 (spectral radius) 必須為  $S_n$  空間。另外滿足對某些

$\beta > -1$ ,  $\rho[\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}L_2L_1] < 1 + \beta$  (必須為  $S_n$  空間) 則疊代式子(5.23)可收斂至一個(5.14)的解  $P_1$ 。

以下定理提供了一個求得使得(5.14)解為正定的充分必要條件，透過此定理我們可以很容易的判定  $A_1, A_2$  是否具有穩定切換律。

**定理 6** [43] 令  $\gamma_i$  滿足  $\gamma_i > 0$  且  $r_i > -2\text{Re}[\lambda_k]$ ，其中  $\lambda_k$  為  $A_i$  中每一個特徵值滿足(5.14)。且假設  $A_1, A_2$  的唯一不變子空間為  $\mathbb{R}^n$  對等於  $L_{A_2}L_{A_1} + \gamma_2L_{A_1} + \gamma_1L_{A_2}$  至少有一個實根滿足  $-\lambda_1\lambda_2 < \lambda < 0$

接下來我們提供一個演算法則來簡單的介紹如何建構穩定切換律的步驟。

**演算法則 3 :**

**Step 1 :** 利用式子(5.13)求得  $L_{A_1}$  以及  $L_{A_2}$ 。

**Step 2 :** 取  $\gamma_i > 0$  且  $r_i > -2\text{Re}[\lambda_k]$  且注意  $A_1, A_2$  的唯一不變子空間為  $\mathbb{R}^n$  代入  $L_{A_2}L_{A_1} + \gamma_2L_{A_1} + \gamma_1L_{A_2}$  若其中有一個實根滿足  $-\lambda_1\lambda_2 < \lambda < 0$  如果是的話，則進行 Step3。

**Step 3 :** 選擇  $\beta > 0$  值利用疊代式子(5.23)，我們可得到一個(5.14)的解  $P_1$ 。代入(5.16)可求得  $P_2$ 。

**Step 4 :** 根據切換律  $i = \arg \max_i (x^T(t)P_i x(t))$  來切換兩系統。

如果我們令  $\gamma_i < 0$ ，情況一即成為選擇切換律為  $\sigma(x) = \arg \min\{V_i(x) : i = 1, 2\}$  的穩定情況，則我們可以利用以下的定理來判斷(5.14)解是否存在。

**定理 7** [43] 假設  $\gamma_i < 0$ ， $\gamma_i < -2\text{Re}[\lambda_j]$ ，其中  $\lambda_j$  為所有  $A_i$  的特徵值且假設  $L_{A_2}L_{A_1} + \gamma_2L_{A_1} + \gamma_1L_{A_2}$  的所有特徵值 (*spectrum*) 皆落在圓心為  $-\gamma_1\gamma_2/2$  半徑為  $\gamma_1\gamma_2/2$  的圓之外，則存在  $P_i > 0$  滿足(5.14) ■

接下來更改演算法則3我們可建構出此定理的穩定切換律的步驟



演算法則 4 :

**Step 1** : 利用式子 (5.13) 求得  $L_{A_1}$  以及  $L_{A_2}$  。

**Step 2** : 取  $\gamma_i < 0$  且  $r_i < -2\text{Re}[\lambda_k]$  且注意  $A_1$  , 代入  $L_{A_2}L_{A_1} + \gamma_2L_{A_1} + \gamma_1L_{A_2}$  的所有特徵值 (*spectrum*) 皆落在圓心為  $-\gamma_1\gamma_2/2$  半徑為  $\gamma_1\gamma_2/2$  的圓之外。如果是的話, 則進行 Step3 。

**Step 3** : 選擇  $\beta > 0$  值利用疊代式子 (5.23), 我們可得到一個 (5.14) 的解  $P_1$ 。代入 (5.16) 可求得  $P_2$ 。

**Step 4** : 根據切換律  $i = \arg \min_i (x^T(t)P_i x(t))$  來切換兩系統。

定理 6 與定理 7 提供了一個確切且方便的條件來判斷系統的多重李亞普諾夫函數存在性, 並且利用疊代法來建構出系統的穩定切換律。然而, 此結果只適用於兩個線性系統, 並且疊代法在  $L_1^{-1}L_2^{-1}$  及  $L_2L_1$  的最大特徵值大於一時不會收斂至所要的解。因此多重李亞普諾夫函數建構方法還有相當多可發展的方向值得我們去研究探討。



## 第六章

### 模擬與討論

在這個章節，我們要以幾個簡單的例子來說明前兩個章節所提出的一些結果。根據第3、4、5章中所提出的穩定切換律的建構方法與判斷條件以及共同穩定器的設計方式，經由範例的說明，我們可以更瞭解先前所討論出來的結果以及如何運用這些條件。

- 6.1：關於N個N階不穩定系統存在穩定切換律的問題提出相關的例子與討論。
- 6.2：對於N個N階不可穩定系統存在穩定切換律的問題提出相關的例子與討論。
- 6.3：對於共同穩定器的問題提出相關的例子與討論。
- 6.4：針於系統滿足高階穩定情況時如何建構穩定切換律提出簡單的例子與討論。
- 6.5：對於系統如何建構多重李亞普諾夫提出相關的例子與討論。

#### 6.1 三個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論

在這一節中，我們討論3.1節中提到三個三階不穩定系統如何建構穩定切換律使得狀態系統狀態可以達到穩定。並且利用電腦模擬出狀態響應，相位軌跡及其切換順序。

**範例 6**：考慮以下三個不穩定系統

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -10 \\ 2 & 0 & 6 \\ -9 & -4 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -4 \\ -1 & -10 & -9 \\ -1 & -10 & 5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

經由簡單的計算，我們可以求得  $\lambda(A_1) = \{10.3039, -5.1520 \pm 5.7990i\}$ ,

$\lambda(A_2) = \{-9.5994, -15.0750, 9.6744\}$  且  $\lambda(A_3) = \{-1.7049, 3.8525 \pm 4.0791i\}$  利用 3.1 節

的結果我們可以利用求解式子 (3.5) 很容易的得到  $\beta_1 = 4.2329, \beta_2 = 4.1726$ 。根據輔助

定理 2 我們可得知滿足  $A_{eq} = A_1 + \beta_1 A_2 + \beta_2 A_3$  為一個赫維茲矩陣系統擁有穩定切換

律，其中

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} -13.1408 & -43.3808 & -35.2848 \\ 1.9377 & -46.5215 & -15.4237 \\ 15.9733 & -33.8312 & -16.3788 \end{bmatrix}$$

利用解李亞普諾夫方程式  $A_{eq}^T P + P A_{eq} + I = 0$  其中  $I$  為單位矩陣我們可求得

$$P = \begin{bmatrix} 0.0605 & 0.0073 & -0.0173 \\ 0.0073 & 0.0194 & -0.0253 \\ -0.0173 & -0.0253 & 0.0660 \end{bmatrix}$$

因此我們可利用演算法則 1 定義

$$L_1 = A_1^T P + P A_1 = \begin{bmatrix} 0.3401 & -0.2685 & -1.2055 \\ -0.2685 & 0.0572 & -0.0472 \\ -1.2055 & -0.0472 & 0.0416 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = A_2^T P + P A_2 = \begin{bmatrix} -1.1890 & 0.0333 & -0.2615 \\ 0.0333 & 0.1176 & -0.7374 \\ -0.2615 & -0.7374 & 1.2541 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = A_3^T P + P A_3 = \begin{bmatrix} 0.6189 & -0.6497 & 0.3793 \\ -0.6497 & -0.3072 & 0.6527 \\ 0.3793 & 0.6527 & -1.3214 \end{bmatrix}$$

選擇  $\epsilon = 0.5$ ，則

$$s_{12}(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_2) x = x^T \begin{bmatrix} 0.9346 & -0.2852 & -1.0747 \\ -0.2852 & -0.0016 & 0.3215 \\ -1.0747 & 0.3215 & -0.5854 \end{bmatrix} x$$

$$s_{21}(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_1) x = x^T \begin{bmatrix} -1.3590 & 0.1676 & 0.3412 \\ 0.1676 & 0.0890 & -0.7138 \\ 0.3412 & -0.7138 & 1.2332 \end{bmatrix} x$$

$$s_{13}(x) = x^T (L_1 - \epsilon L_3) x = x^T \begin{bmatrix} 0.0306 & 0.0563 & -1.3951 \\ 0.0563 & 0.2108 & -0.3735 \\ -1.3951 & -0.3735 & 0.7023 \end{bmatrix} x$$

$$s_{31}(x) = x^T (L_3 - \epsilon L_1) x = x^T \begin{bmatrix} 0.4489 & -0.5154 & 0.9821 \\ -0.5154 & -0.3358 & 0.6763 \\ 0.9821 & 0.6763 & -1.3422 \end{bmatrix} x$$

$$s_{23}(x) = x^T (L_2 - \epsilon L_3) x = x^T \begin{bmatrix} -1.4984 & 0.3581 & -0.4512 \\ 0.3581 & 0.2712 & -1.0638 \\ -0.4512 & -1.0638 & 1.9147 \end{bmatrix} x$$

$$s_{32}(x) = x^T(L_3 - \epsilon L_2)x = x^T \begin{bmatrix} 1.2134 & -0.6663 & 0.5101 \\ -0.6663 & -0.3660 & 1.0214 \\ 0.5101 & 1.0214 & -1.9484 \end{bmatrix} x$$

選擇初始值為  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，根據[44]的切換法則，利用電腦模擬可以發現  $x$  由  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (圖6,7)。另外在第4章中提到當系統有凸組合的情況發生時可以利用切換法則  $i = \arg \min_i \dot{V}_i$  來切換系統，我們可以發現模擬結果也可以收斂至原點(圖8,9)。

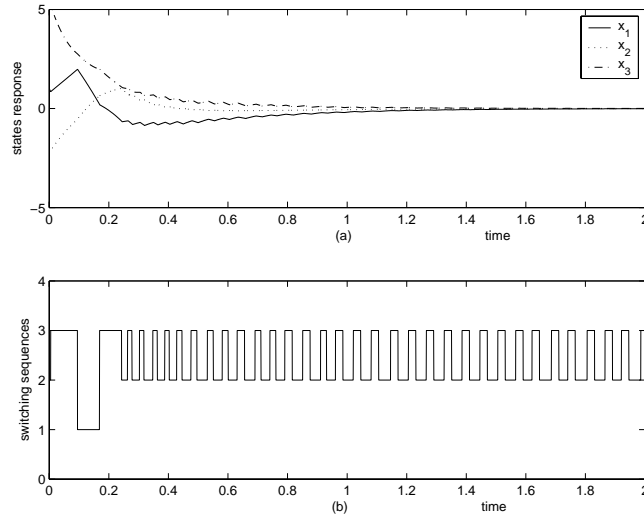


圖 6: 三個三階不穩定系統，模擬時間取2秒， $\epsilon = 0.5$ ：(a)  $x_1, x_2, x_3$  對時間分佈圖 (b) 系統切換順序

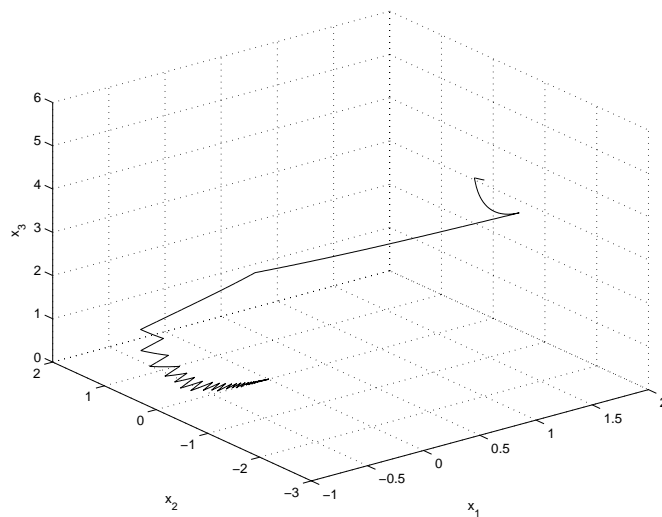


圖 7: 三個三階不穩定系統，模擬時間取2秒， $\epsilon = 0.5$ ： $x_1, x_2, x_3$  狀態分佈圖

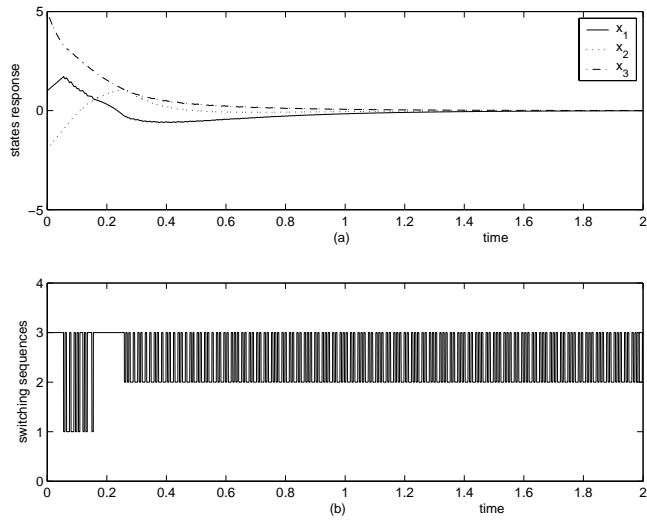


圖 8: 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(\dot{V}_i)$  時：(a)  $x_1, x_2, x_3$  對時間分佈圖 (b) 系統切換順序

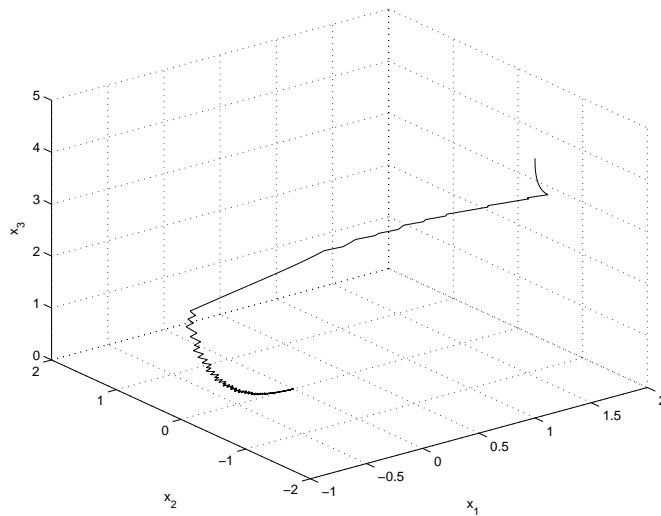


圖 9: 三個三階不穩定系統，模擬時間取 2 秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(\dot{V}_i)$  時：  $x_1, x_2, x_3$  狀態分佈圖

## 6.2 不可穩定線性控制系統之穩定切換律設計與討論

在這一節我們要以簡單的例子來說明 3.2 節中如何設計控制器使得不可穩定的控制系統之間存在穩定切換律。

### 範例 7

$$A = \begin{bmatrix} 33 & -32 & -32 \\ 8 & -7 & -8 \\ 16 & -16 & -15 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -25 \\ -1 \\ -16 \end{bmatrix}$$

經由簡單的計算，我們可以發現  $(A, B_1), (A, B_2), (A, B_3)$  皆為不可穩定化，但  $(A, B)$  為可穩定化，其中  $B = [B_1|B_2|B_3]$ 。接下來我們要來討論系統是否存在穩定切換律，使得整個控制系統可以達到穩定控制。

分析：首先我們選取  $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1$ ，令

$$A_\beta = (1 + \beta_1 + \beta_2)A = \begin{bmatrix} 132 & -128 & -128 \\ 32 & -28 & -32 \\ 64 & -64 & -60 \end{bmatrix}$$

$$B_\beta = [B_1 \sqrt{\beta_1}B_2 \sqrt{\beta_2}B_3] = \begin{bmatrix} -5 & 15.5563 & -25 \\ 4 & 7.0711 & -1 \\ -6 & 1.4142 & -16 \end{bmatrix}$$

令  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，解 Riccati equation

$$A_\beta^T P + P A_\beta - P B_\beta B_\beta^T P = -Q$$

得到

$$P = \begin{bmatrix} 125.814 & -153.305 & -178.213 \\ -153.305 & 307.177 & 224.444 \\ -178.213 & 224.444 & 294.794 \end{bmatrix}$$

設計控制器

$$u_1 = -B_1^T P x = [-173.0073 \ 648.5636 \ 20.0812]x$$

$$u_2 = -B_2^T P x = [439.2148 \ 73.9765543.3311]x$$

$$u_3 = -B_3^T P x = [-140.6257 \ -65.6705 \ -485.8121]x$$

所以我們可以得到

$$A_1 = (A - B_1 B_1^T P) = 10^3 * \begin{bmatrix} -0.8320 & 3.2108 & 0.0684 \\ 0.7000 & -2.6013 & -0.0883 \\ -1.0220 & 3.8754 & 0.1055 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = (A - B_2 B_2^T P) = 10^3 * \begin{bmatrix} -4.7984 & -0.8457 & 5.9446 \\ -2.1181 & -0.3769 & 2.7087 \\ -0.4232 & -0.0900 & 0.5283 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = (A - B_3 B_3^T P) = 10^3 * \begin{bmatrix} -0.3483 & 0.1674 & -1.2177 \\ -0.0133 & -0.0073 & -0.0494 \\ -0.0494 & -0.1067 & -0.7788 \end{bmatrix}$$

令

$$L_1 = A_1^T P + P A_1$$

$$L_2 = A_2^T P + P A_2$$

$$L_3 = A_3^T P + P A_3$$

取  $\epsilon = 0.99$ ，其切換平面

$$\begin{aligned} s_{12}(x) &= x^T(L_1 - 0.99L_2)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} -3.2210 & -2.8875 & 4.6555 \\ -2.8875 & 8.3045 & 1.0565 \\ 4.6555 & 1.0565 & -5.8370 \end{bmatrix} x \\ s_{21}(x) &= x^T(L_2 - 0.99L_1)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} 3.2655 & 2.8714 & -4.7040 \\ 2.8714 & -8.2190 & -1.0616 \\ -4.7040 & -1.0616 & 5.8963 \end{bmatrix} x \\ s_{13}(x) &= x^T(L_1 - 0.99L_3)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} 0.2071 & -2.4271 & -1.4222 \\ -2.4271 & 8.3275 & -0.3711 \\ -1.4222 & -0.3711 & -4.6649 \end{bmatrix} x \\ s_{31}(x) &= x^T(L_3 - 0.99L_1)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} -0.1971 & 2.4063 & 1.4351 \\ 2.4063 & 2.4063 & 0.3803 \\ 1.4351 & 0.3803 & 4.7124 \end{bmatrix} x \\ s_{23}(x) &= x^T(L_2 - 0.99L_3)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} 3.4666 & 0.4669 & -6.1255 \\ 0.4669 & 0.0242 & -1.4354 \\ -6.1255 & -1.4354 & 1.2312 \end{bmatrix} x \\ s_{32}(x) &= x^T(L_3 - 0.99L_2)x = 1.0e + 005 * x^T \begin{bmatrix} -3.4241 & -0.4587 & 6.0914 \\ -0.4587 & -0.0219 & 1.4340 \\ 6.0914 & 1.4340 & -1.1248 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

接下來我們選擇初始值為  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，依照步驟1中所定義的切換法則，以電腦模擬

其結果。我們發現  $x$  由  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如圖10，圖11。

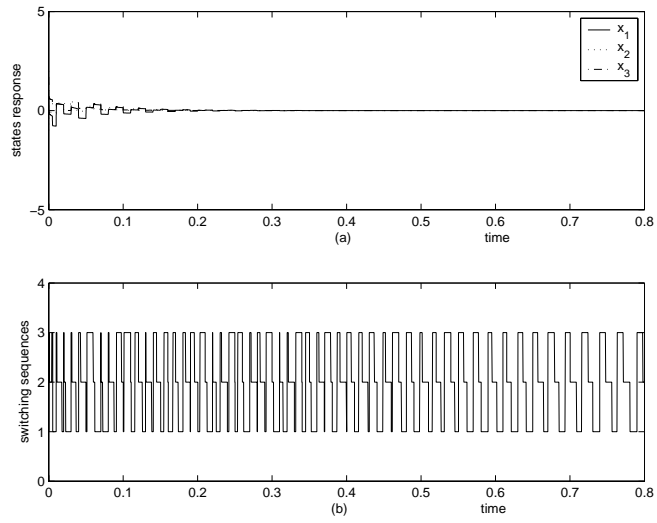


圖 10: 三個三階不穩定控制系統，模擬時間取0.8秒， $\epsilon = 0.99$ ：(a)  $x_1, x_2, x_3$  對時間分佈圖 (b) 系統切換順序

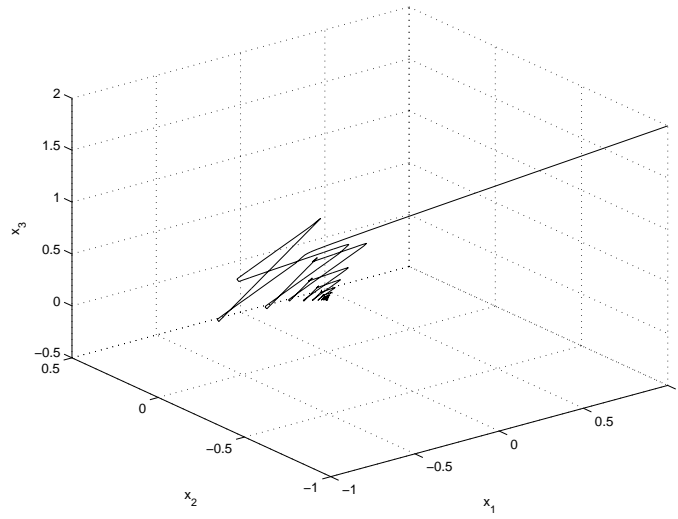


圖 11: 三個三階不穩定控制系統，模擬時間取0.8秒， $\epsilon = 0.99$ ： $x_1, x_2, x_3$  狀態分佈圖



### 6.3 共同穩定器之設計與討論

在這一節我們要以簡單的例子來說明如何尋找3.1節中所提出的共同穩定器。並且利用我們所提出的判斷條件來判斷是否存在共同穩定器。

#### 範例8

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 7 & -8 \\ 9 & -10 & -2 \\ 3 & -8 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 6 \\ 8 & -9 & 10 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

接下來我們根據步驟3來設計共同穩定器。

**Step 1:** 假設發生故障時為控制器為零向量，則我們考慮

$$B_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 8 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 0 & -9 & 10 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

為排除全部的控制器產生故障的所有可能發生故障的情況。我們可以很容易的檢查，其中  $(A, B)$ 、 $(A, B_i), i = 1, \dots, 6$  都是可穩定。所以  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_6, B\}$

**Step 2:** 依照原始系統  $(A, B)$  來設計控制器  $u$ 。令  $u = -B^T P x$ ，並且以式子(3.21)求解出一個正定矩陣

$$P = \begin{bmatrix} 246.4583 & -130.5474 & 8.0484 \\ -130.5474 & 131.9714 & 86.5884 \\ 8.0484 & 86.5884 & 300.3479 \end{bmatrix}$$

**Step 3:** 令

$$L_0 = A^T P + P A$$

$$L_i = -P B_i B_i^T P$$

令

$$\Omega_A^+ = \{x | x^T L_0 x \geq 0, \|x\| = 1\}$$

$$\Omega_{B_i}^0 = \{x | x^T L_i x = 0, \|x\| = 1\}, i = 1, \dots, 6$$

我們要檢查的條件  $\Omega_{B_i}^0$  不能包含於  $\Omega_A^+$  中，必須要檢查無限多點，是一個相當複雜的計算。而在第三章中，我們知道只要存在  $\beta_i > 0$  使得  $A + (-\beta_i)B_i B_i^T P = A_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  為赫維茲矩陣，則  $\Omega_{B_i}^0$  與  $\Omega_A^+$  的交集必為空集合。

**Step 4:** 求解線性矩陣不等式 (3.26)，我們可以得到  $\beta = 2.0926$ ，令  $u = -2.0926 B^T P x$ ，則  $A + (-\beta)B_i B_i^T P$ ,  $i = 1, \dots, 6$  之特徵值分別為

$$\lambda(A - B_1 B_1^T P) = 1.0e + 004 * \{-1.0022, -0.0011, -0.0001\}$$

$$\lambda(A - B_2 B_2^T P) = 1.0e + 003 * \{-9.2327, -0.0045, -0.0203\}$$

$$\lambda(A - B_3 B_3^T P) = 1.0e + 003 * \{-8.1487, -0.0083, -0.0143\}$$

$$\lambda(A - B_4 B_4^T P) = 1.0e + 004 * \{-0.0017, -1.1590, -0.7666\}$$

$$\lambda(A - B_5 B_5^T P) = 1.0e + 004 * \{-1.4127, -0.0017, -0.4043\}$$

$$\lambda(A - B_6 B_6^T P) = 1.0e + 004 * \{-1.6770, -0.0016, -0.0625\}$$

$$\lambda(A - B B^T P) = 1.0e + 004 * \{-1.9314, -0.0019, -0.8092\}$$

由此可見， $A - \beta B B^T P$  以及  $A - \beta B_i B_i^T P$ ,  $i = 1 \dots 6$  皆為赫維茲矩陣，所以我們所設計的共同穩定器  $u = -2.0926 B^T P$  的確為我們所要求的。

## 6.4 切換系統的高階穩定情況之設計與討論

在這一節我們要以簡單的例子來說明第四章中所討論當切換系統凸組合為中性穩定時如何判斷系統是否存在穩定切換律以及如何切換使得系統穩定。

**範例 9** 考慮系統

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_1, A_2$  系統的軌跡皆為 limit cycles. 令  $P$  為單位矩陣則

$$x^T P A_1 x = x_1 x_2$$

$$x^T P A_2 x = -x_1 x_2$$

因此對於所有的  $x$ ,  $\min_{1 \leq i \leq 2} \{x^T P A_i x\} = \min\{x_1 x_2, -x_1 x_2\} \leq 0$

則

$$\begin{aligned} M &= \{x \neq 0 \mid x^T P A_1 x = x^T P A_2 x = 0\} \\ &= \{x \neq 0 \mid x_1 x_2 = 0\} \\ I(x, 1) &= \{1, 2\}, \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

由於  $i \in I(x, 1) \{x^T (A_i^T P A_i + P A_i^2) x\} = \min_{x \in M} \{2x_1^2 - x_2^2, -x_1^2 + 2x_2^2\} < 0, \quad \forall x \in M$

根據序列定理 2, 我們可以得知當  $x \notin M$ , 即  $x \neq [x_1, 0]$  或  $x \neq [0, x_2]$  時

$$x_1 x_2 < 0, \quad \sigma(x) = 1$$

$$-x_1 x_2 < 0, \quad \sigma(x) = 2$$

當  $x \in M$  時

$$x = [0, x_2], \quad \sigma(x) = 1$$

$$x = [x_1, 0], \quad \sigma(x) = 2$$

利用切換法則 (4.11), 任意的選擇初始值  $x_0 = [-3, 2]$ , 我們可以得到使得系統狀態由初始值收斂到零如以下模擬結果。

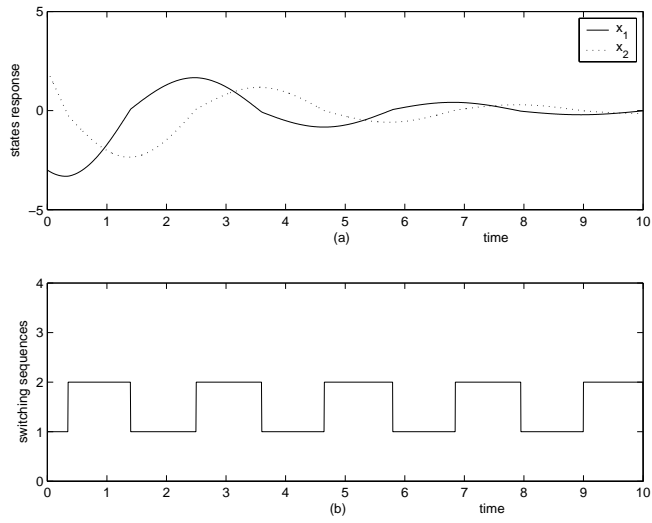


圖 12: 兩個二階中性穩定系統，當系統為凸組合中性穩定時，模擬時間取 10 秒：(a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (b) 系統切換順序

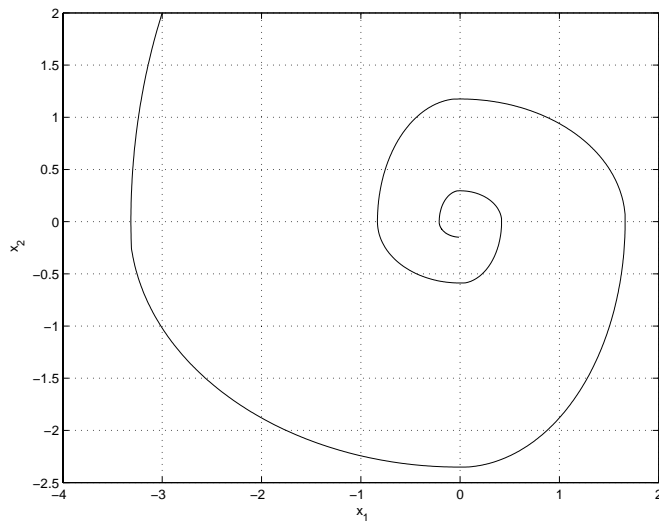


圖 13: 兩個二階中性穩定系統，當系統為凸組合中性穩定時，模擬時間取 10 秒： $x_1, x_2$  狀態分佈圖

## 6.5 多重李亞普諾夫函數建構方法

在第5章中，我們提出了多重李亞普諾夫函數的穩定理論，以及在兩個線性系統中的建構方法。因此在這一節中我們提出兩個簡單的例子來說明及討論如何建構多重李亞普諾夫函數使得系統穩定。

範例 10：

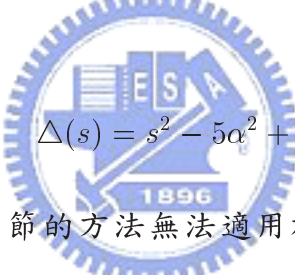
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

分析：經由簡單的計算  $A_1, A_2$  之特徵值分別為  $\{0, 0\}$ 、 $\{0 \pm 2.2361i\}$ 。

由此可見  $A_1, A_2$  皆非漸進穩定的矩陣。且令

$$A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2 = \begin{bmatrix} -2 + 2\alpha & 9 + \alpha \\ -1 + \alpha & 2 - 2\alpha \end{bmatrix}$$

則其特徵方程式為


$$\Delta(s) = s^2 - 5\alpha^2 + 5$$

由特徵方程式我們可得知3.1節的方法無法適用於此切換系統。因此接下來我們考慮利用多重李亞普諾夫函數來建構穩定切換律，令  $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = 10, \beta = 10$ ， $Q_1 = Q_2 = I$  則由定義我們可知

$$L_{A_1}(P_1) = A_1^T P_1 + P_1 A_1$$

$$L_{A_2}(P_2) = A_2^T P_2 + P_2 A_2$$

Step 1：令  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  為對稱矩陣  $P_1$  的基底。

$$\begin{aligned} L_{A_1}(E_1) &= A_1^T E_1 + E_1 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 * E_1 + 0 * E_2 + 10 * E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{A_1}(E_2) &= A_1^T E_2 + E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 * E_1 + 0 * E_2 + 0 * E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{A_1}(E_3) &= A_1^T E_3 + E_3 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\ &= 0 * E_1 + 20 * E_2 + 0 * E_3 \end{aligned}$$

由 (5.13) 可得

$$L_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相似地我們可以得到

$$L_{A_2} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 18 \\ 9 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Step 2 :**  $L_{A_2} L_{A_1} + r_2 L_{A_1} + r_1 L_{A_2} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & -20 \\ 180 & 20 & 380 \\ 150 & -10 & -20 \end{bmatrix}$  的特徵值為  $\{-6.4693, -16.7654, -16.7654\}$

介於  $-\gamma_1 \gamma_2$  與 0 之間。

**Step 3 :** 利用 (5.23) 式，疊代出對應於  $A_1, A_2$  的  $P_1 = \begin{bmatrix} 1.8 & -4.6 \\ -4.6 & 44.2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1.9 & -2.8 \\ -2.8 & 35.1 \end{bmatrix}$ 。

$P_1, P_2$  的特徵值分別為  $\{1.3067, 44.6933\}, \{1.6655, 35.3345\}$  為正定矩陣。

**Step 4 :** 利用切換律  $i = \arg(\max(V_i))$  可以使得狀態  $x$  由  $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結

果如圖 14, 15。



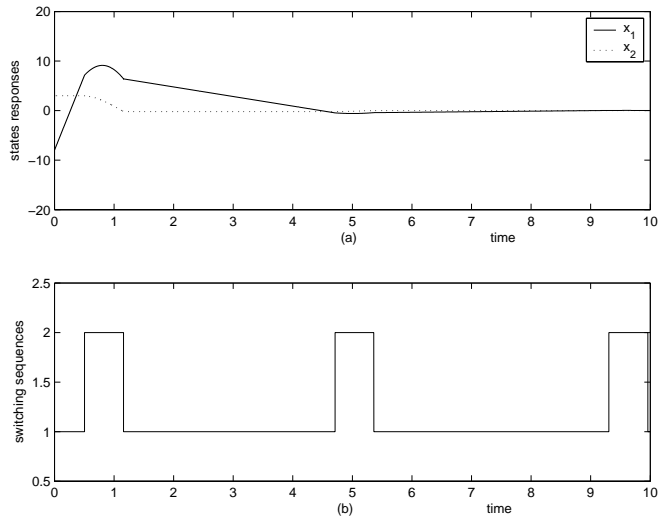


圖 14: 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 10 秒，切換律為  $\sigma(x) = \max_i(V_i)$  時：  
 (a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (b) 切換順序分佈圖

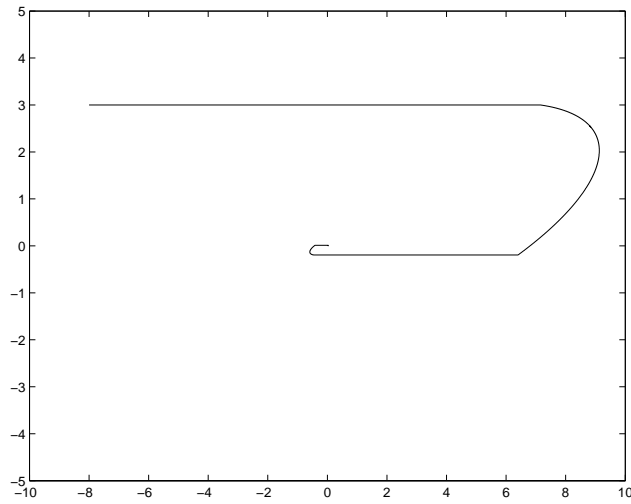


圖 15: 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取 10 秒，切換律為  $\sigma(x) = \max_i(V_i)$  時：  
 $x_1, x_2$  狀態分佈圖

範例 11 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix},$$

分析：經由簡單的計算  $A_1, A_2$  之特徵值分別為  $\{0 \pm 2.2361i\}$ 、 $\{0.4641, -6.4641\}$ 。由此可見  $A_1, A_2$  皆非漸進穩定的矩陣。接下來，我們令  $\gamma_1 = -11, \gamma_2 = -11, \beta = 100$ ， $Q_1 = Q_2 = I$  則由定義我們可知  $L_A: S_n \rightarrow S_n$

$$L_{A_1}(P_1) = A_1^T P_1 + P_1 A_1$$

$$L_{A_2}(P_2) = A_2^T P_2 + P_2 A_2$$

Step 1：令  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  為對稱矩陣  $P_1$  的基底。

$$L_{A_1}(E_1) = A_1^T E_1 + E_1 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 * E_1 + 0 * E_2 + 5 * E_3$$

$$L_{A_1}(E_2) = A_1^T E_2 + E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 * E_1 + 0 * E_2 - 1 * E_3$$

$$L_{A_1}(E_3) = A_1^T E_3 + E_3 A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= -2 * E_1 + 10 * E_2 + 0 * E_3$$

由 (5.13) 可得  $L_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，同理我們可得知  $L_{A_2} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ 0 & -6 & -6 \\ -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

Step 2： $L_{A_2} L_{A_1} + r_2 L_{A_1} + r_1 L_{A_2} = \begin{bmatrix} 72 & 8 & 122 \\ -30 & 26 & -104 \\ -52 & 61 & 32 \end{bmatrix}$

其對應的特徵值為  $\{0.3483, 0.4758 \pm 1.1116i\}$  皆在圓心為  $-\gamma_1 \gamma_2 / 2$  半徑為  $\gamma_1 \gamma_2 / 2$  之外。

Step 3：利用 (5.23) 式，疊代出對應於  $A_1, A_2$  的  $P_1 = \begin{bmatrix} 7.3542 & 2.0145 \\ 2.0145 & 5.3235 \end{bmatrix}$ ， $P_2 = \begin{bmatrix} 7.6296 & -0.8444 \\ -0.8444 & 3.4013 \end{bmatrix}$

。  $P_1, P_2$  的特徵值分別為  $\{4.0830, 8.5948\}$ ， $\{3.2389, 7.7920\}$

Step 4：選擇初始值  $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ 。我們發現利用切換律  $i = \arg(\min(V_i))$  可以使得狀態  $x$  由  $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$  收斂到  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。其模擬結果如圖 16，圖 17。



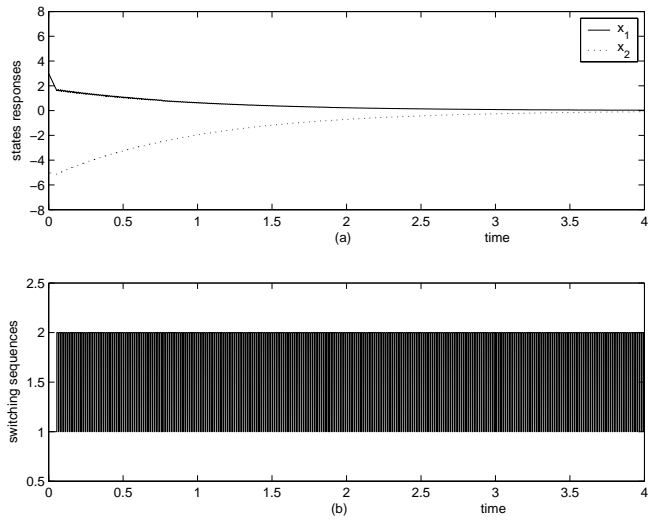


圖 16: 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取4秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(V_i)$  時：(a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (b) 切換順序分佈圖

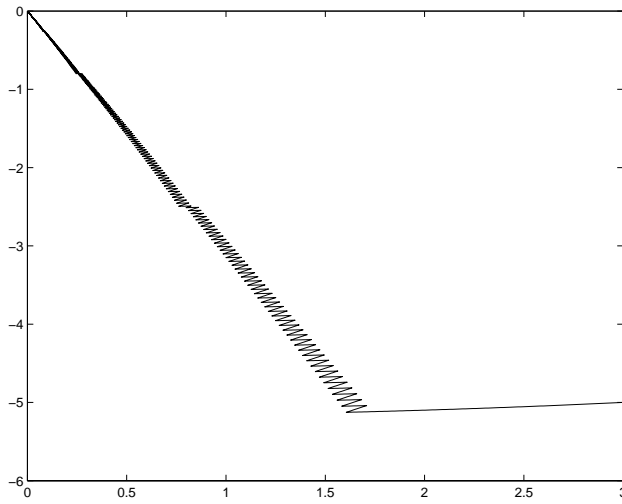


圖 17: 兩個二階非漸進穩定系統，模擬時間取4秒，切換律為  $\sigma(x) = \min_i(V_i)$  時：  
 $x_1, x_2$  狀態分佈圖

# 第七章

## 結論與未來研究方向

### 7.1 結論



此篇論文主要在探討如何利用線性矩陣不等式來有效率的求解當 $N$ 個不穩定系統及不可穩定化的系統之間存在穩定切換律時將它們實現。以及如何套用在尋找共同穩定器上。除此之外我們將原本系統的凸組合必須滿足赫維茲推廣到中性穩定，另外探討如何利用多重李亞普諾夫函數來建構穩定切換律，以及跟原本單一的李亞普諾夫函數做一個比較以及分析接下來我們把這篇論文的主要結果整理如下：

1. 針對 $N$ 個不穩定系統 $\dot{x} = A_i x, i = 1, \dots, N$ ，我們提出一個充分條件來確認系統的可切換性。並且利用線性矩陣不等式來建構穩定切換律。並且應用此結果來探討不可穩定的系統 $\dot{x} = Ax + B_i u_i, i = 1, \dots, N$ ，存在控制律及穩定切換律的問題。也就是假設 $(A, B_i), i = 1, \dots, N$ 皆為不可穩定化，設計控制器 $u_i$ 使得不穩定系統 $(A - B_i u_i)$ 存在切換律並且使系統在此切換律下達到穩定。另外我們也探討存在穩定切換律的判斷條件[29]中討論的共同穩定器之問題做一個

結合。我們發現第3章的兩個判斷條件與[29]中的觀念有相通之處，所以將這兩個結果轉化為判斷是否存在共同穩定器的條件，並且利用線性矩陣不等式設計共同穩定器。

2. [1]中提出一個充分條件將原本我們將條件(3.4)在兩個線性系統的情況下原本需要赫維茲穩定存在穩定切換律的線性系統推廣至中性穩定，而我們提出另外一個條件使得此結果可以推廣至多個線性系統，甚至多個非線性系統上，並且提出穩定切換律來切換這些系統。另外我們還提出證明我們的條件包含了[1]的條件。
3. 我們整理了在切換系統中存在穩定切換律的各個條件，包含了建構單一的李亞普諾夫函數與多重李亞普諾夫函數，並且提出證明及反例來說明當中的關係。

## 7.2 未來的研究方向

在這篇論文中的主要貢獻已在上一小節做一個總整理。不過除了上述的結果以外，還有一些可以延伸下去的研究。



1. 在第3章中，對於 $N$ 個不穩定系統 $\dot{x} = A_i x, i = 1, \dots, N$ 。條件(3.4)為條件(3.3)的充分條件，因此是否可以找到一個情況下使得兩個條件為對等為一個可研究的方向。
2. 在第3章中，我們所提出利用線性矩陣不等式建構穩定切換律的充分條件，並不是一個對等條件。因此在未來我們需要繼續研究及尋找建構出藉由穩定切換律使得切換系統達到穩定的充分必要條件。
3. 在第3章中，我們都是利用二次李亞普諾夫函數來建構出穩定切換律，因此在未來我們可以嘗試尋找非二次的李亞普諾夫函數的建構方法。
4. 在第4章中，我們所討論系統的凸組合滿足中性穩定時的穩定條件時都是建構在單一的李亞普諾夫函數上，而如何建構在多重李亞普諾夫函數上，也是一

個可進行的方向。

5. 在第5章中，我們整理了在兩個線性系統的情況下建構多重李亞普諾夫函數的方法，在未來我們可以推廣此結果到多個線性系統甚至多個非線性系統上。
6. 在前面所有的章節中，我們所討論的是不穩定系統之間切換的問題。而目前在一般的實際系統的應用結果當中，多只是考慮在穩定系統間的切換例子。所以，將我們的研究結果應用在實際例子上是一個重要的課題。



## 參考書目

- [1] A. Bacciotti, “Stabilization by means of state depending switching rules,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, pp.195-201, 2004.
- [2] A. Back, J. Guckenheimer, and M. Myers, “A dynamical simulation facility for hybrid systems,” *Hybrid systems*. New York: Springer, In R. L. Grossman, A. Nerode, P. Ravn, & H. Rishel (Eds.) 1993.
- [3] P. Baldi and G. Hatfield, “DNA microarrays and gene expression,” *Cambridge University Press*, 2002.
- [4] M.S. Branicky, “Analysis of continuous switching systems: Theory and examples,” *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, MD, pp. 3110-3114, June 29-July 1 1994.
- [5] M. S. Branicky, “Stability of switched and hybrid systems,” in *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL , Dec. 14 - 16, 1994, pp. 3498 - 3503.
- [6] M.S. Branicky, “Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, 1998.
- [7] R.W. Brockett, “Asymptotic stability and feedback stabilization,” in *Differential Geometric Control Theory* (R.W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, eds.), pp. 181-191, Birkhauser, Boston, 1983.
- [8] R. W. Brockett, “Hybrid models for motion control systems,” In *H. L. Trentelman and J. C. Willems, editors, Essays on Control: Perspectives in the Theory and Its Applications*, pp.29-53, Birkhauser, Boston, 1993.
- [9] D. Casagrande, “Stabilizability of non-holonomic systems by means of switching controllers,” *The Powerpoint for Internal Seminar*, CAP Group, EE Dept, Imperial College, January 6, 2005.
- [10] B.-S. Chen, Y.-Y. Chen, and C.-C. Lin, “Nonlinear fuzzy guidance law with saturation of actuators against maneuvering targets,” *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 769-779, 2002.
- [11] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung, “Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 11, pp. 1883-1887, 2002.
- [12] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, and B. Lennartson, “Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, pp. 1069-1082, 2000.

- [13] E. Feron, "Quadratic stabilizability of switched system via state and output feedback," technical report CICS-P-468, MIT, 1996.
- [14] R. Fierro, F. Lewis and A. Lowe, "Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 29, pp. 649-654, 1999.
- [15] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, and C.K. Li, "The control of switching dc-dc converters -A general LQR problem ," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 38, NO. 1. February 1991 pp. 413-418.
- [16] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, and C.K. Li, "An improved LQR-based controller for switching dc-dc converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 40, NO. 5. October 1993 pp. 521-528.
- [17] S. B. Gershwin, "Hierarchical flow control: A framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 1, 195-209, 1989.
- [18] A. Gollu and P. Varaiya, "Hybrid dynamical systems," in *Proc. 28th IEEE Conf. Decision and Control*, Tampa, FL, USA, pp. 2708-2712, Dec. 1989.
- [19] I.A. Hiskens and M.A. Pai, "Hybrid systems view of power system modelling", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Geneva, Switzerland, May 2000.
- [20] J.P. Hespanha and A.S. Morse, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching," *Automatica*, Vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [21] D. J. Hoitomt, P. B. Luh, E. Max, and K. R. Pattipati, "Scheduling jobs with simple precedence constraints on parallel machines," *IEEE Control Systems Mag.*, vol. 10, no. 2, pp. 34-40, 1990.
- [22] H. de Jong, J. Geiselmann, G. Batt, C. Hernandez, and M. Page, "Qualitative simulation of the initiation of sporulation in *Bacillus Subtilis*," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 66, pp. 261-299, 2004.
- [23] Z. Ji, L. Wang, G. Xie and F. Hao, "Linear matrix inequality approach to quadratic stabilisation of switched systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 7, NO. 6, December 1999 pp. 713-722. Vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [24] M. Johansson, A. Rantzer and K-E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems.*, Vol. 7, No. 6, pp. 713-722, 1999.
- [25] H. de Jong, G. J., C. Hernandez, M. Page, T. Sari, and J. Geiselmann, "Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 66, pp. 301-340, 2004.

- [26] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, Boston, 2003.
- [27] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and stability of switched linear systems: a short survey of recent results," *Proc. IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, Limassol, Cryprus, June 27-29, 2005.
- [28] D. Liberzon and A.S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 19, pp. 59-70, 1999.
- [29] Y.-W. Liang and D.-C. Liaw, "Common stabilizers for linear control systems in the presence of actuator outage," *2001 Chinese Automatic Control Conference*, held at Tauyen, Taiwan, pp. 42-46, February 16-17, 2001.
- [30] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang and T.C. Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 706-710, 2000.
- [31] D.-C. Liaw, C.-C. Cheng and Y.-W. Liang, "A 3-D guidance law for landing on a celestial object," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp.890-892, 2000. (SCI & EI)
- [32] Z.G. Li, C.Y. Wen and Y.C. Soh, "Stabilization of a class of switched systems via designing switching laws," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, pp.665-670, 2001.
- [33] F.-J. Lin, R.-J. Wai, and M.-P. Chen, "Wavelet neural network control for linear ultrasonic motor drive via adaptive sliding mode technique," *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 50, no. 6, pp. 686-698, June 2003.
- [34] Y.-W. Liang, S.-D. Xu , J.-L. Chang, and C.-C. Chiang, "Construction of stabilizing switching laws among unstable linear systems," *6th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA'06)*, held at Dalian, China, June, 2006. (EI)
- [35] C.F. Matrtin and W.P. Dayawansa, "On the existence of a Lyapunov function for a family of switching systems," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 1820-1821, December 1996.
- [36] J.V. Medanic, "Design of realiable controllers using redundant control elements," *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, CA, pp. 3130-3134, June 2-4, 1993.
- [37] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov functions for stable LTI systems with commuting A-matrices," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2469-2471, 1994.
- [38] T. Ooba and Y. Funahashi, "Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 42, No. 5, pp. 719-721, 1997.

- [39] M. Oishi and C. Tomlin, "Switched nonlinear control of a VSTOL aircraft," in *Proc. 38th Conf. Decision and Control*, Phoenix, AZ, pp. 2685-2690, Dec. 1999.
- [40] P. Peleties and R. A. DeCarlo, "Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions," in *Proc. 1991 American Control Conf.*, Boston, MA, 1991, pp. 1679 - 1684.
- [41] E. Skafidas, R.J. Evans, A.V. Savkin and I.R. Petersen, "Stability results for switched controller systems," *Automatica*, Vol. 35, pp. 553-564, 1999.
- [42] R.N. Shorten and K.S. Narendra, "On the stability and existence of common Lyapunov Function for stable linear switching systems," In *Proc. 37th Conf. Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, December pp. 3723-3724, 1998.
- [43] M. A. Wicks and R. A. DeCarlo, "Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems," *Proceedings of 1997 American Control Conference*, pp. 1709-1713, Albuquerque, NM, June 1997.
- [44] M.A. Wicks, P. Peleties and R.A. DeCarlo, "Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switching systems," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 3492-3497, December 14-16, 1994.
- [45] R.-J. Wai and J.-D. Lee, "Intelligent motion control for linear piezoelectric ceramic motor drive," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Part B, vol. 34, no. 5, pp. 2100-2111, Oct. 2004.
- [46] P. P. Varaiya, "Smart cars on smart roads: Problems of control," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, no. 2, 195-207, 1993.
- [47] R.J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica* 1995, pp. 137-143.
- [48] G. Xie and L. Wang "Quadratic stability and stabilization of discrete-time switched systems with state delay," *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, 14-17 December 2004 pp.3235 - 3240
- [49] X. Xu and P.J. Antsaklis, "Stabilization of second-order LTI switched systems," *Int. J. Control*, Vol. 73, pp.1261-1279, 2000.
- [50] F.-K. Yeh, H.-H. Chien, and L.-C. Fu, "Design of optimal midcourse guidance sliding-mode control for missiles with TVC," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, no. 3, pp. 824-837, May 2003.
- [51] Q. Zhao and J. Jiang, "Reliable state feedback control system design against actuator failures," *Automatica* 1998, pp. 1267-1272.