

## 第 2 章

### 乘法器電路原理與架構

#### 2.1 乘法器原理與應用

在 GPS 的接收器中，射頻訊號先經過低雜訊放大器 (LNA) 增強訊號強度後，在經過混頻器 (Mixer) 降頻為基頻訊號圖2.1。混波器在接收機為一個降頻轉換的功能元件，也可稱為乘法器

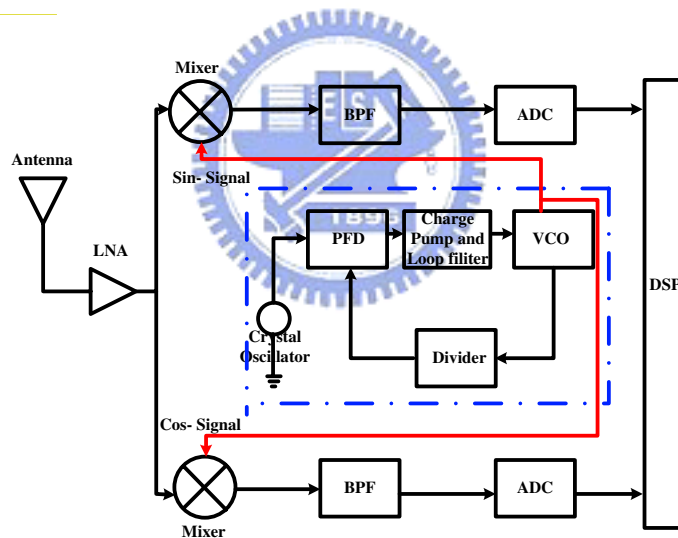


圖 2.1: GPS 接收器的架構

(multiplier), 透過混頻混波器可以讓兩訊號做相乘, 產生頻率和與頻率差來達到改變輸出頻率的目的, 圖2.2 為一個混頻器。

混頻器 (乘法器) 電路為三端元件, 輸入端 X,Y 分別輸入兩波信號 $A_1\cos w_1t, A_2\cos w_2t$ , 混波器輸出端 Z 為

$$Z = A_1\cos w_1t \cdot A_2\cos w_2t \quad (2.1)$$

$$= \frac{A_1A_2}{2}(\cos(w_1 + w_2)t + \cos(w_1 - w_2)t) \quad (2.2)$$

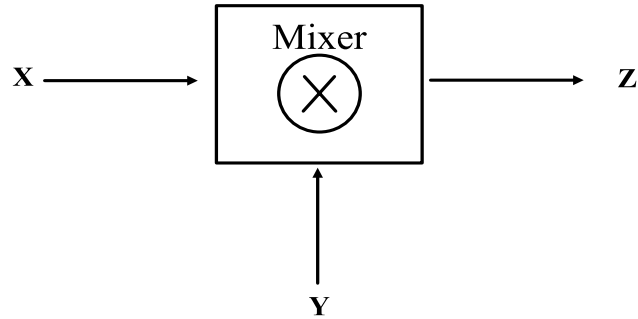


圖 2.2: 混頻器方塊圖

由 (2.2) 式得到混波器輸出信號包含了兩輸入信號的頻率和與頻率差，頻率差可以當升頻、頻率差當降頻，輸出的這兩組頻率差一般來說很大，針對不同的應用目的取出想要的信號，則另一組頻率可以使用濾波器將其消除，也隨著應用頻率的範圍選擇不同的製程，TSMC 0.35um SiGe BiCMOS 製程提供了 NPN 型的 BJT 元件，BJT 元件的單一增益頻率 (unity gain frequency) 大約 50GHz，BJT 元件比 MOS 元件適合用在 GPS 高頻中。

## 2.2 BJT 二象限類比乘法器

由一般典型的雙端差動放大器如圖 2.3，

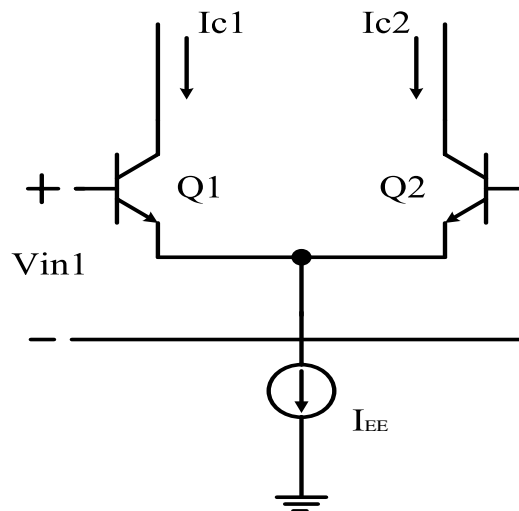


圖 2.3: 雙端差動放大器

其中我們假如電晶體的 $\eta = 1$ ,  $I_{C1}$ 和 $I_{C2}$ 與 $I_{EE}$ 的關係式可以簡化成 (2.5) 的形式,

$$I_{C1} = \frac{I_{EE}}{1+e^{\left(\frac{V_{in1}}{V_T}\right)}} \quad (2.3)$$

$$I_{C2} = \frac{I_{EE}}{1+e^{\left(\frac{-V_{in1}}{V_T}\right)}} \quad (2.4)$$

雙端差動放大器的輸出的電流為 $I_{C1}-I_{C2}$ , 即可以得到一組 $V_{in1}$ 為 $\Delta I$  的函數 的數學式 (2.7) 式.

$$\Delta I_{out} = I_{C1} - I_{C2} \quad (2.5)$$

$$= I_{EE} \tanh\left(\frac{V_{in1}}{2V_T}\right) \quad (2.6)$$

若我們假設 $V_{in1}$ 為小信號電壓且遠小於 $2V_T$ , 即 $\frac{V_{in1}}{2V_T} \ll 1$ , 則雙端差動放大器的輸入電壓 $V_{in1}$ 與輸出電流可以近似為線性的方程式

$$\Delta I_{out} = I_{EE}\left(\frac{V_{in1}}{2V_T}\right) \quad (2.7)$$

圖2.4 為差動對的 $\Delta I$ 與 $V_{in1}$ 的曲線模擬圖, 尾電流設計在為 $I_{EE}=320\mu\text{A}$ , 輸入 $V_{in1}=\pm 50\text{mV}$  範圍較為線性。

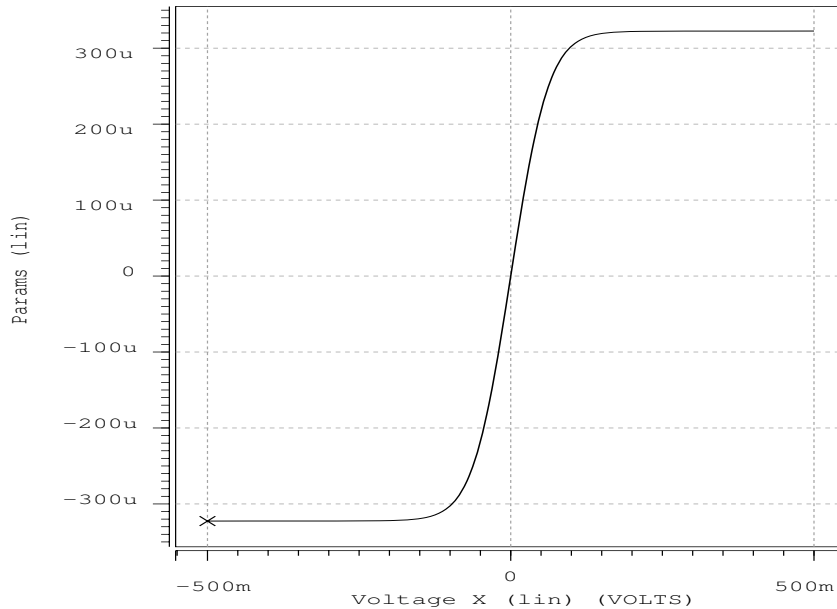


圖 2.4: 為差動對的 $\Delta I$ 與 $V_{in1}$ 的曲線

由 (2.7) 式中, 希望輸入電壓  $V_{in2}$  也為尾電流  $I_{EE}$  的函數, 就可以找到一組兩輸入信號相乘積的關係, 其中利用電壓  $V_{in2}$  控制尾電流  $I_{EE}$  的方法實現, 如圖 2.5.

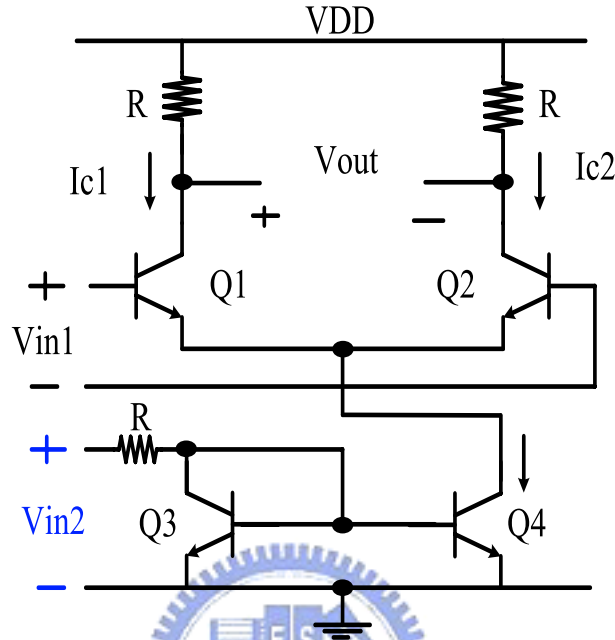


圖 2.5: BJT 二象限類比乘法器

假設 Q1 與 Q2 的電晶體特性相同, 雙端差動輸出電流可以達到兩輸入信號乘法的功能, 其中  $V_{BE_{on}}$  為 Q3 電晶體基射極的導通電壓。

$$\Delta I_{out} = V_{in1} \left( \frac{V_{in2} - V_{BE_{on}}}{2V_T R} \right) \quad (2.8)$$

由於  $V_{in2}$  的輸入信號必須使用電晶體 Q3 動作, 所以  $V_{in2}$  的信號要為正的電壓值, 而  $V_{in1}$  信號為一組雙端差動對的輸入電壓既可以為正也可以為負, 所以  $V_{in1}$  與  $V_{in2}$  的關係僅為兩個象限, 稱此電路為二象限的類比乘法器 (Two-quadrant analog multiplier) 或稱為可變增益放大器 (VGA), 二象限乘法器電路應用在輸入信號大小變化很大的系統中。

### 2.3 BJT 四象限類比乘法器

在乘法器加上電壓控制尾電流的電路架構中, 僅限於兩個象限的應用, 電壓增益為負值; 希望電壓增益可以有正負值。利用兩個放大器的輸出和來實現圖 2.6, 總輸出電壓跟兩個差動放大器的增益  $A_1, A_2$  的關係,

$$V_{out} = V_{out1} + V_{out2} \quad (2.9)$$

$$= A_1 V_{in1} + A_2 V_{in1} \quad (2.10)$$

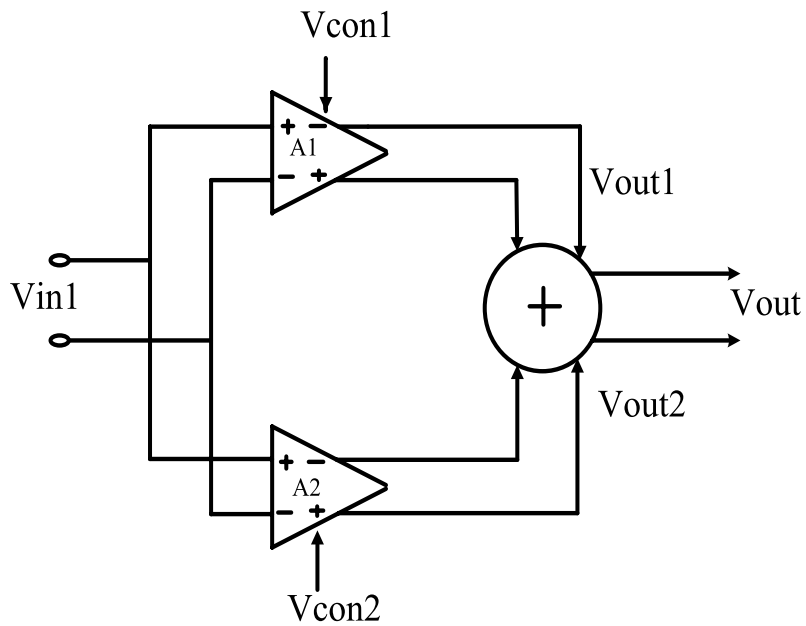


圖 2.6: 輸出電壓和之兩個放大器的方塊圖

增益值和電流的大小可以用  $V_{con1}$  和  $V_{con2}$  控制,  $V_{con1} - V_{con2}$  重新定義為  $V_{in2}$  並將電晶體 Q5-Q6 由一對差動對代替原本的電壓控制電流的裝置圖 2.7, 此電路稱為 Gilbert Multiplier Cell 且為四象限乘法,

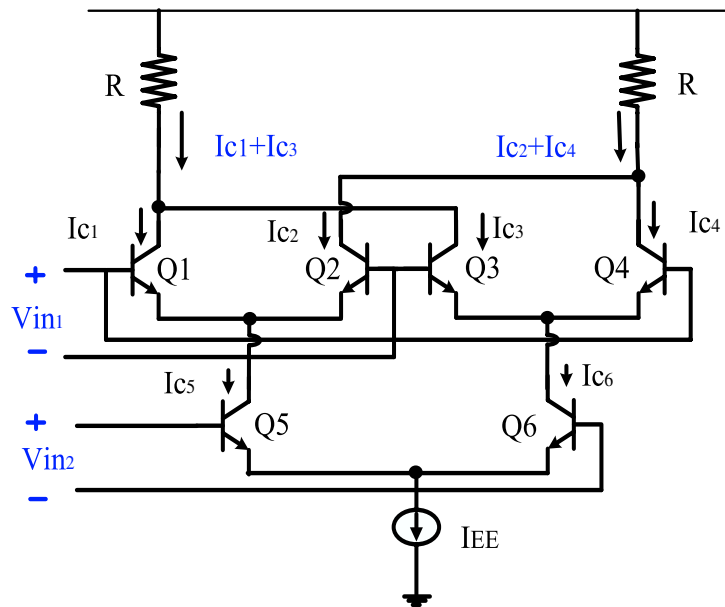


圖 2.7: Glibert Cell

它的直流分析可以推導出

$$I_{C1} = \frac{I_{C5}}{1+e^{\left(\frac{-V_{in1}}{V_T}\right)}} \quad (2.11)$$

$$I_{C5} = \frac{I_{EE}}{1+e^{\left(\frac{V_{in2}}{V_T}\right)}} \quad (2.12)$$

(2.11)、(2.12) 式合併求出  $I_{C1}$

$$I_{C1} = \frac{I_{EE}}{\left(1+e^{\left(\frac{-V_{in1}}{V_T}\right)}\right)\left(1+e^{\left(\frac{V_{in2}}{V_T}\right)}\right)} \quad (2.13)$$

同理可以得到  $I_{C2}$ 、 $I_{C3}$ 、 $I_{C4}$  數學式

$$\Delta I = (I_{C1} + I_{C3}) - (I_{C2} + I_{C4}) \quad (2.14)$$

$$= I_{EE} \tanh\left(\frac{V_{in1}}{2V_T}\right) \tanh\left(\frac{V_{in2}}{2V_T}\right) \quad (2.15)$$

當  $V_{in1}$ 、 $V_{in2} \ll V_T$ ，我們可以將(2.15) 近似為 (2.16)

$$\Delta I \approx I_{EE} \left(\frac{V_{in1}}{2V_T}\right) \left(\frac{V_{in2}}{2V_T}\right) \quad (2.16)$$

乘法器的輸出電流為兩輸入信號乘積。在交流分析模擬中，我們設計  $I_{EE}=320\mu\text{A}$ ，兩輸入訊號大小  $V_{in1}=0.1\text{V}$  和  $V_{in2}=0.01\text{V}$ ，其頻率分別為  $100\text{KHz}$  與  $110\text{KHz}$ ，並且使 Q1、Q2、Q3、Q4 四個電晶體做電流的切換，圖 2.8 為模擬 Gilbert cell 輸出的波形，其電壓增益  $A_v=-30\text{V/V}$ ，可以得低頻信號大小為  $300\text{mV}$  頻率為  $10\text{KHz}$  而高頻的信號頻率是  $210\text{KHz}$ 。

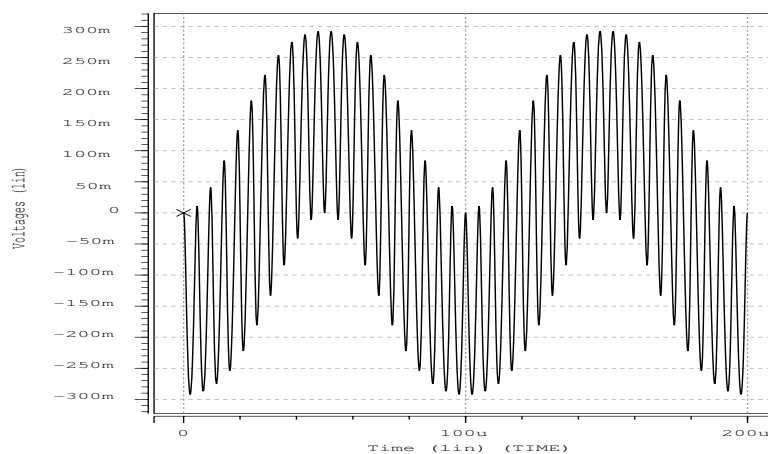


圖 2.8: 在增益為  $30\text{V/V}$ ，混頻器的輸出波形圖

### 2.4 加上射極退化電阻的 BJT 乘法器

在乘法器的應用中, 接收到的信號大小皆不太相同, 但都希望輸入到乘法器的信號可以操作在較線性的範圍, 若輸入信號太大會影響到輸出的線性度, 在 (2.16) 式中的近似結果不會成立,  $V_1 > 2V_T$ , 乘法器輸出電流  $\Delta I$  與  $V_{in1}$  和  $V_{in2}$  之間依然為非線性 (2.15) 式。為了可以增加 Gilbert multiplier cell 的輸入線性範圍, 我們將 Q1、Q2 兩個電晶體的射極串上電阻  $R_E$  圖 2.9, 可以推導出  $V_{in1}$  與  $\Delta I$  的

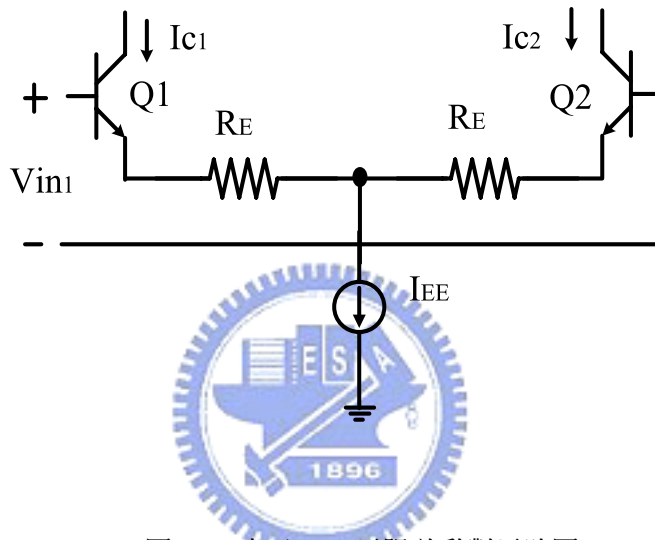


圖 2.9: 加入  $R_E$  電阻差動對電路圖

數學式 (2.18), 由 (2.19) 方程式知道, 固定  $\Delta I$  與  $V_T(\frac{I_{C1}}{I_{C2}})$  的值, 則  $V_{in1}$  與  $R_E$  成正比

$$V_{in1} = V_{BE1} - V_{BE2} + (I_{C1} - I_{C2})R_E \quad (2.17)$$

$$= \Delta I R_E + V_T \left( \frac{I_{C1}}{I_{C2}} \right) \quad (2.18)$$

我們設計總電流在  $I_{EE} = 320 \mu A$ , 曲線分別為  $R_E = 0 \Omega, 100 \Omega, 250 \Omega, 500 \Omega, 1K \Omega$ , 當  $R_E$  電阻設計在  $1K$  時, 輸入線性範圍可以達到  $V_{in1} = 700 mV$ , 圖 2.10 為模擬此電路的線性關係。

而在交流分析中, 加上退化電阻的乘法器會影響電壓增益, 若以小信號分析來討論加上退化電阻後的乘法器電壓益,

$$A_V = \frac{-R}{\left(\frac{1}{g_m}\right) + R_E} \quad (2.19)$$

增加線性度但是降低了電壓增益, 此電路為射極退化電阻乘法器圖 2.11.

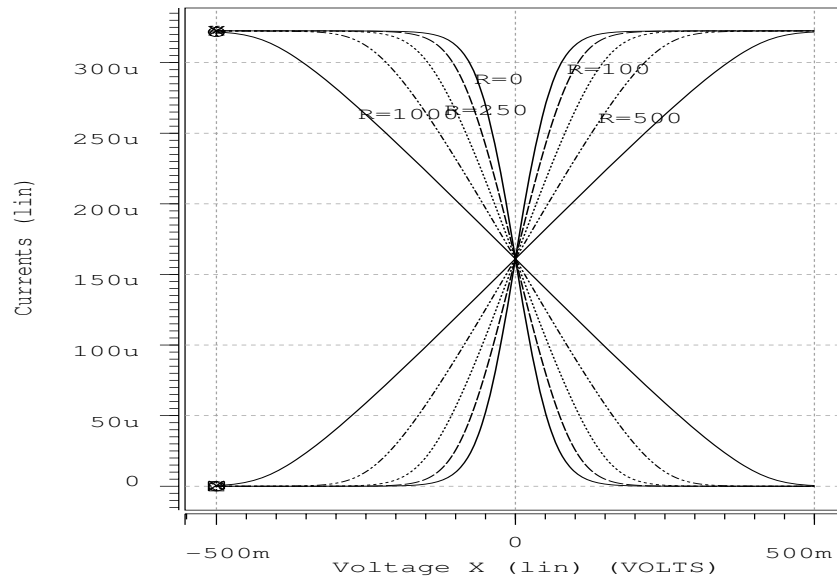


圖 2.10: 加入不同電阻值  $R_E$ ,  $V_{in1}$  和  $\Delta I_C$  的曲線圖, X 軸為  $V_{in1}$ , Y 軸為  $\Delta I_C$

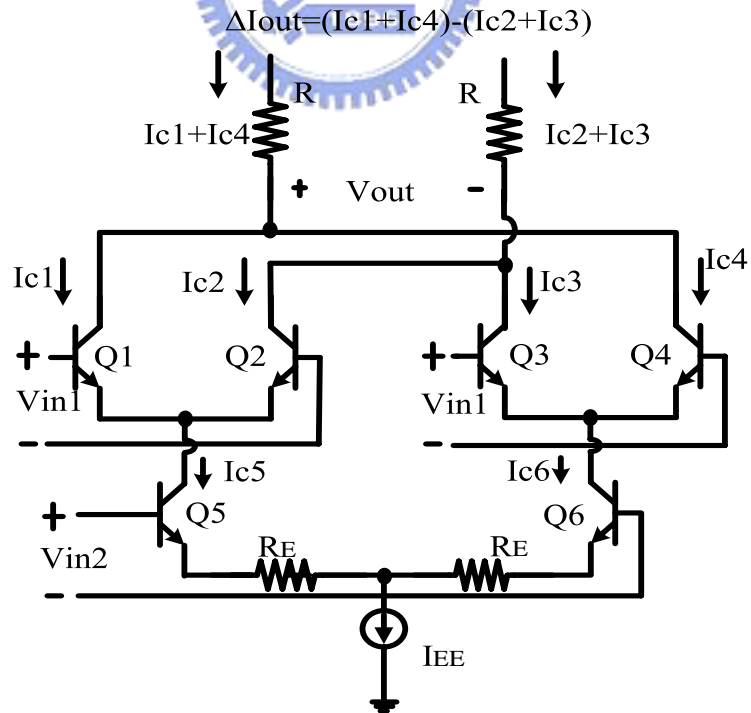


圖 2.11: 加上射極退化電阻的四象限乘法器



### 2.5 加上反扭曲的 BJT 乘法器

加上退化電阻的乘法器是能擴大輸入線性範圍增加線性度，但是影響到乘法器的增益。在 (2.16) 式中，未加上退化電阻的乘法器要達到良好的線性度輸入，信號大小要遠小於  $2V_T$ ，如果在 Gilbert cell 乘法器的輸入端前加上反扭曲電路 (Inverse hyperbolic tangent circuit) 圖 2.12，不只可以將乘法器之輸入對輸出的非線性  $\tanh$  函數抵消 (2.15) 式，即使輸入信號大於  $2V_T$ ，只要電晶體可以正常工作，輸入與輸出的仍然是呈現線性的關係，加上反扭曲的乘法器圖 2.13，反扭曲電路推導如下

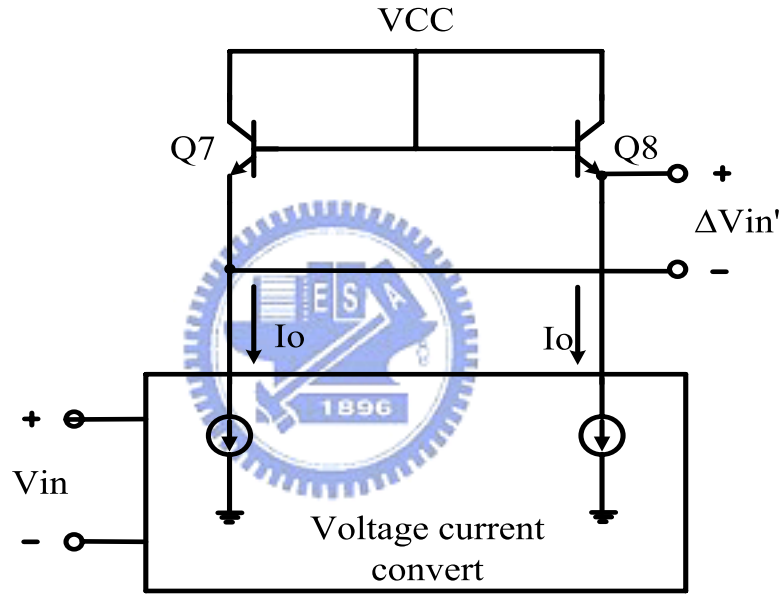


圖 2.12: 反扭曲電路的方塊圖

$$\Delta V_{in'} = V_{BE1} - V_{BE2} \quad (2.20)$$

$$= V_T \ln\left(\frac{I_O + KV_{in}}{I_S}\right) - V_T \ln\left(\frac{I_O - KV_{in}}{I_S}\right) \quad (2.21)$$

$$= V_T \ln\left(\frac{I_O + KV_{in}}{I_O - KV_{in}}\right) \quad (2.22)$$

已知  $\tanh^{-1} X = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$ ，所以可以將 (2.22) 式化簡為 (2.23)

$$\Delta V_{in'} = 2V_T \tanh^{-1}\left(\frac{KV_{in}}{I_O}\right) \quad (2.23)$$

$$\Delta I = I_{EE} \frac{(K_1 V_{in1})(K_2 V_{in2})}{I_{O1} I_{O2}} \quad (2.24)$$

從 (2.23) 式必須滿足  $I_O \pm KV_{in} > 0$ , 可以得到  $V_{in1}$   $V_{in2}$  輸入限制範圍為

$$\frac{-I_O}{K_1} < V_{in1} < \frac{I_O}{K_1} \quad (2.25)$$

$$\frac{-I_O}{K_2} < V_{in2} < \frac{I_O}{K_2} \quad (2.26)$$

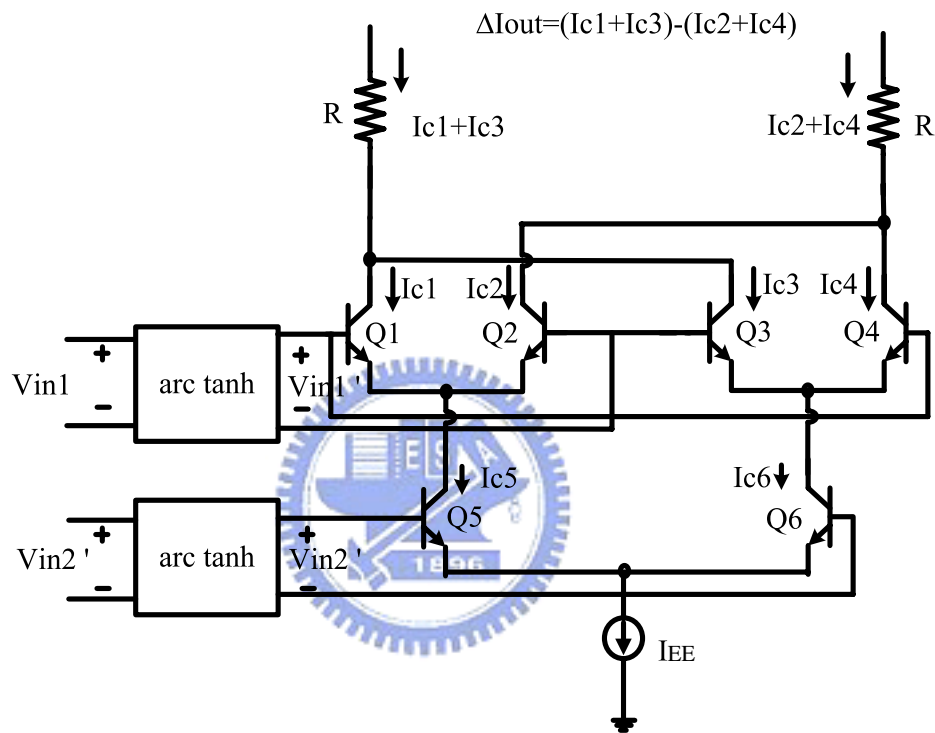


圖 2.13: 加上反扭曲電路的乘法器方塊圖

### 2.6 MOS單端平衡混頻器的頻率分析與工作原理

單端平衡式混頻器 (single-balanced mixer) 也是 MOS 二象限乘法器如圖2.14。輸入  $V_{RF}$  信號經由 M1 轉導級 (transconductance stage) 將  $V_{RF}$  電壓信號轉為電流信號, 而 M2-M3 的差動對為電流切換級 (switch stage) 將  $V_{RF}$  輸入電流信號作切換如圖2.15 其  $V_{LO}$  信號使得切換級的切換頻率為  $\omega_{LO}$ , 經由負載級 (Load stage) 將小信號電流轉換為差動輸出電壓, 假設  $V_{RF}(t) = v_{RF} \cos \omega_{RF} t$ ,  $I_{RF} = I_{BIAS} + g_{m1} v_{RF} \cos \omega_{RF} t$ , 而  $V_{LO}$  訊號  $V_{LO\pm} = \pm v_{LO} \cos \omega_{LO} t$ . 理想電流切換的原理如圖2.15

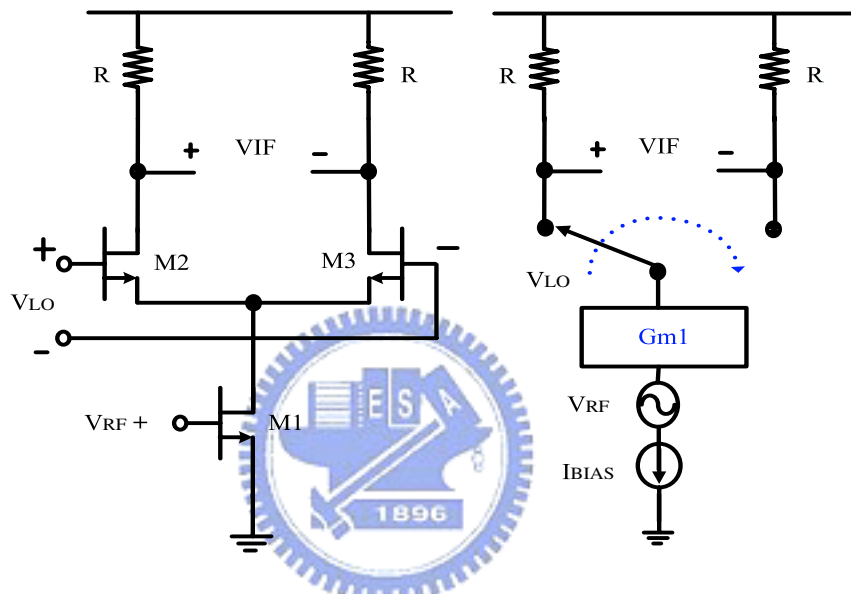


圖 2.14: 單端平衡式混頻器

表示切換的波形近似方波且頻率為  $\omega_{LO}$ .

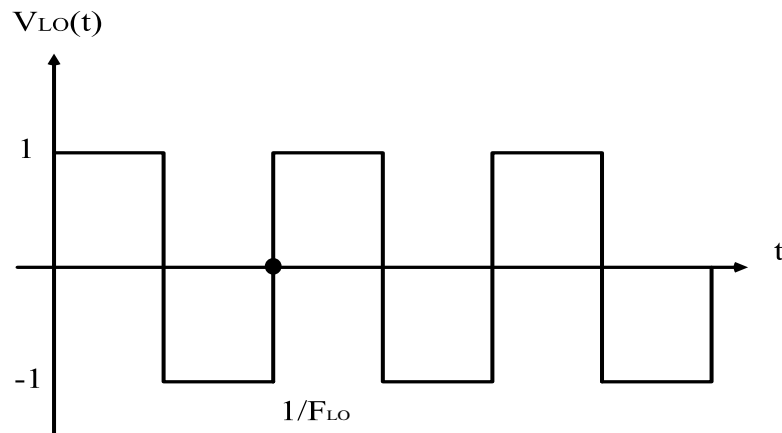


圖 2.15: 理想電流切換波形

$$V_{LO}(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos w_{LO} t + \frac{\cos 3w_{LO} t}{3} + \frac{\cos 5w_{LO} t}{5} + \dots \right] \quad (2.27)$$

$$= \text{sgn}[\cos w_{LO} t] \quad (2.28)$$

單平衡混頻器的輸出電壓  $V_{IF}$  為,

$$V_{IF} = V_{IF+} + V_{IF-} \quad (2.29)$$

$$= I_{RF} R \cdot \text{sgn}[\cos w_{LO} t] \quad (2.30)$$

$$= I_{RF} R \cdot \frac{4}{\pi} \left[ \cos w_{LO} t + \frac{\cos 3w_{LO} t}{3} + \frac{\cos 5w_{LO} t}{5} + \dots \right] \quad (2.31)$$

$$= (I_{BIAS} + g_{m1} \cdot v_{RF} \cos w_{RF} t) R \cdot \frac{4}{\pi} \left[ \cos w_{LO} t + \frac{\cos 3w_{LO} t}{3} + \dots \right] \quad (2.32)$$

$$V_{IF} \approx \frac{4}{\pi} I_{BIAS} R \cdot \cos w_{LO} t + \frac{2}{\pi} g_{m1} \cdot v_{RF} R \cdot [\cos(w_{RF} - w_{LO})t + \cos(w_{RF} + w_{LO})t] \quad (2.33)$$

由 (2.34) 式可以得到單平衡混頻器增益  $\frac{2}{\pi} g_{m1} R$ , 且在 (2.33) 式中可以看出輸出端  $V_{IF}$  有  $w_{LO}$  訊號存在, 也表示 LO 訊號會直接洩漏到 IF 端。

## 2.7 MOS 雙端平衡混頻器的頻率分析與工作原理

雙端平衡式混頻器 (single-balanced mixer) 也是 MOS 四象限乘法器如圖 2.16。假設 RF 輸入訊號為  $V_{RF\pm}(t) = \pm v_{RF} \cdot \cos w_{RF} t$  及 LO 訊號為  $V_{LO\pm}(t) = \pm v_{LO} \cdot \cos w_{LO} t$ , 電晶體 M1、M2 的電流分別為。

$$I_{M1} = I_{BIAS} + g_m v_{RF} \cos w_{RF} t \quad (2.34)$$

$$I_{M2} = I_{BIAS} - g_m v_{RF} \cos w_{RF} t \quad (2.35)$$

電晶體 M3、M4、M5、M6 的操作有如切換開關一般, 故可推得流經電流為

$$I_{M3} = I_{M1}(0.5 + 0.5 \text{sgn}[\cos w_{LO} t]) \quad (2.36)$$

$$I_{M4} = I_{M1}(0.5 - 0.5 \text{sgn}[\cos w_{LO} t]) \quad (2.37)$$

$$I_{M5} = I_{M2}(0.5 - 0.5 \text{sgn}[\cos w_{LO} t]) \quad (2.38)$$

$$I_{M6} = I_{M2}(0.5 + 0.5 \text{sgn}[\cos w_{LO} t]) \quad (2.39)$$

因此輸出端的電流  $I_{IF}$  為

$$I_{IF} = I_{IF+} + I_{IF-} = (I_{M1} - I_{M2}) \cdot \text{sgn}[\cos w_{LO} t] \quad (2.40)$$

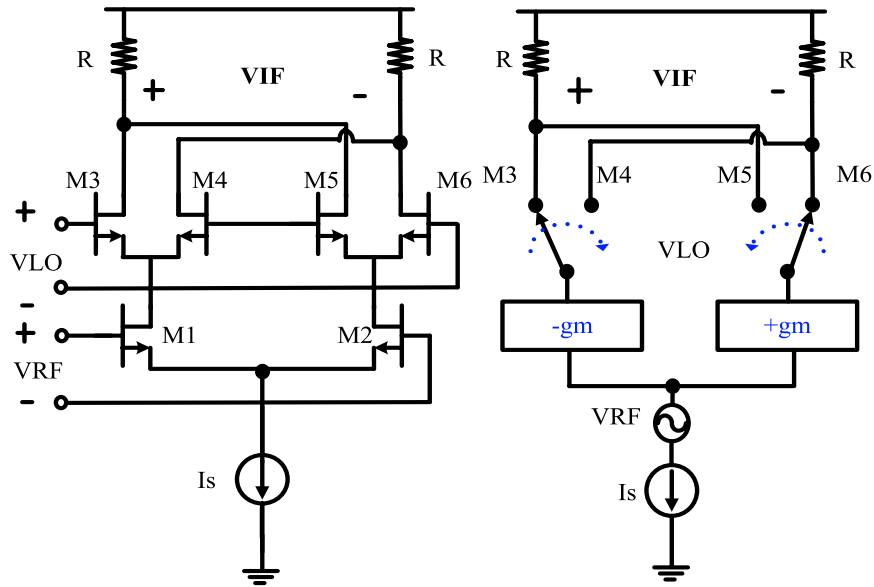


圖 2.16: 雙端平衡式混頻器

將 (2.27) 式帶入並將  $\text{sgn}[\cos w_{LO}t]$  用傅利葉級數展開

$$I_{IF} = 2g_m \cdot v_{RF} \cos w_{RF}t \cdot \frac{4}{\pi} \left[ \cos w_{LO}t + \frac{\cos 3w_{LO}t}{3} + \dots \right] \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} V_{IF} &= I_{IF}R \\ &\approx \frac{4}{\pi} g_m R \cdot v_{RF} \cdot [\cos(w_{RF} - w_{LO})t + \cos(w_{RF} + w_{LO})t] \end{aligned} \quad (2.42)$$

可得雙端平衡的電壓增益為  $\frac{2}{\pi} g_m R$ , 而且雙平衡輸出  $V_{IF}$  沒有 LO 的頻率存在, 因此雙平衡混頻器的隔離度較單端平衡混頻器佳。