

第二章 表面電漿共振外差干涉儀

2.1 前言

表面電漿共振(surface plasmon resonance ; SPR)乃是縱向電荷密度的振動，其被激發在金屬膜和待測物邊界的表面上，同時伴隨著瞬逝電磁場從邊界的表面金屬膜放射到待測物上[1]。當表面電漿被激發時，其 p-偏光的反射光強度和反射的相位會有極劇烈的變化，利用此特性，表面電漿共振常被應用在不同的研究領域上[2~4]。其次，共光程外差干涉術是由 s-與 p-偏光間頻率稍微不同的雷射光做干涉，以獲得差頻訊號，由此差頻信號中的相位變化，便能解得我們所需知的待測訊息。故利用共光程外差干涉術的技術便能精確解得光經表面電漿共振裝置後，其反射光所引起 s-與 p-偏光間的相位差變化，經由測得的相位差變化便能進一步解得所需量測之物理量；因此，當表面電漿共振裝置與共光程外差干涉術所結合構成的表面電漿共振外差干涉儀，其不但可以精確測得所需量測之相關物理參數，此外還可以提供一個裝置簡單、操作容易、即時、快速、避免環境干擾且具有高靈敏度的測量系統。所以在本章中，首先將說表明面電漿共振的基本原理與其特性。其次說明一般外差干涉術的原理及外差光源的調制方式，與其共光程外差干涉儀的工作原理；而針對共光程外差干涉儀所引起的測量誤差量也將進行探討與分析。最後再說明表面電漿共振外差干涉儀之基本的架構。

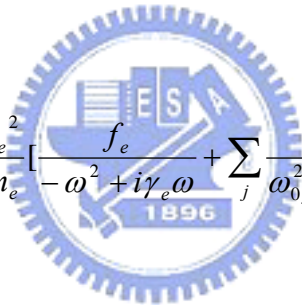
2.2 表面電漿共振原理

2.2.1 金屬表面電漿的形成[5]：

1902 年，Wood[6]發現當電磁波入射在刻有光柵(grating)的金屬表面時，其

反射光譜會產生異常的現象；對於此異常特性，Fano[7]解釋為與沿著金屬表面傳播的電磁共振波有密切的關聯，之後 Hessel 和 Oliner[8]也提出了相同的觀點，此異常特性即為後來所謂的金屬表面電漿 (surface plasma) 現象；在後續一連串的研究也發現[9~11]，刻有奈米結構的金屬薄膜，會使得電磁波的穿透特性產生明顯的改變，讓原本不透光的金屬薄膜，在特定波長範圍內有很高的穿透率，這種現象被認為是入射電磁波與金屬表面電漿的耦合共振所產生的結果。

在金屬中，自由電子密度相當高同時分佈也相當均勻，當自由電子受到電場的激發時，它們會依照電場的方向形成不均勻的分佈，亦即產生瞬間的誘導式電極，以某一個特定頻率進行集體式電偶極震盪，此一共振頻率即為表面電漿共振頻率。一般金屬的介電常數 $\varepsilon(\omega)$ 可以表示為[12]:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \left[\frac{f_e}{-\omega^2 + i\gamma_e \omega} + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \right], \quad (2.1)$$


括弧中的第一項和第二項分別為自由電子和邊界電子所貢獻的色散關係式；其中 N 是單位體積的分子數； m_e 是電子的靜止質量； q_e 是電子的基本帶電量； γ_e 、 γ_j 為自由電子與邊界電子阻尼係數； f_e 、 f_j 為第 e 個與第 j 個自由電子與邊界電子對介電常數貢獻之加權因子； ω_{0j} 是第 j 個振盪子的自然頻率或共振頻率。(2.1) 式中，假設在金屬上主要的貢獻是自由電子，同時當 ω 非常大時， γ_j 可以忽略，因此(2.1) 式可以改寫成:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (2.2)$$

其中 $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq_e^2}{m_e \epsilon_0}}$ 為金屬的電漿共振頻率 (plasma frequency)。另外，當電場解的形式為 $E \propto e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ ，代入電磁波的波動方程式裏並且 $D = \epsilon(\omega)E$ ，則可解得金屬的色散關係(dispersion relation):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right). \quad (2.3)$$

由(2.3)式可以看出，當入射光的頻率小於電漿共振頻率時($\omega < \omega_p$)，入射光無法穿透金屬層，只有幾百奈米(nm)的穿透膚深，而在入射光的頻率大於電漿共振頻率時，入射光才能夠穿透金屬層。對一般金屬而言，可見光的頻率小於電漿共振頻率，因此在可見光的範圍內，金屬是不透光的材料。

接著探討如何在金屬與介電物質的界面產生表面電漿波。如 Fig. 2.1 所示，考慮一 p-偏極化的電磁波，沿介電物質(ϵ_d)與金屬(ϵ_m)的介面在 x 方向傳播；此時在介電物質和金屬中的電場和磁場可表示為[13]:

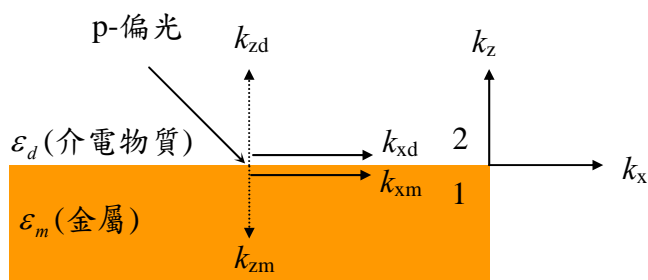


Fig. 2.1 p-偏極光入射至介電物質(ϵ_d)與金屬(ϵ_m)介面的波向量圖。

$$\begin{aligned}
z < 0 \quad H_1 &= (0, H_{ym}, 0) \exp i(k_{xm}x - k_{zm}z - \omega t), \\
E_1 &= (E_{xm}, 0, E_{zm}) \exp i(k_{xm}x - k_{zm}z - \omega t), \\
z > 0 \quad H_2 &= (0, H_{yd}, 0) \exp i(k_{xd}x + k_{zd}z - \omega t), \\
E_2 &= (E_{xd}, 0, E_{zd}) \exp i(k_{xd}x + k_{zd}z - \omega t).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

上述的電場與磁場必須滿足 Maxwell 方程式：

$$\nabla \times \overset{\rho}{H}_i = \varepsilon_i \frac{1}{c} \frac{\partial \overset{\rho}{E}_i}{\partial t}; \quad \nabla \times \overset{\rho}{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overset{\rho}{H}_i}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \overset{\rho}{H}_i = 0; \quad \nabla \cdot \overset{\rho}{E}_i = 0; \tag{2.5}$$

以及邊界條件 $E_{xm} = E_{xd}$ 、 $H_{ym} = H_{yd}$ 、 $\varepsilon_m E_{zm} = \varepsilon_d E_{zd}$ ；因此可以解出金屬在 x 方向和 z 方向的表面電漿色散方程式[13]:

$$k_{xd} = k_{xm} = k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}}, \tag{2.6}$$

$$k_{zi} = \sqrt{\varepsilon_i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2}, \quad i = d, m. \tag{2.7}$$

由於一般介電物質的介電常數大於 0，金屬的介電常數為一負值，且在一般情況下 $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d$ ，所以由此我們可以發現幾個特點：(1)沿 x 分量的波向量 k_x 為實數，亦即在某些特殊條件下，電磁波可以沿著介電物質和金屬的界面上傳播，這即是所謂的表面電漿波；(2)由於 $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d$ ，所以可以得到下面的關係式：

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}} > \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_d}, \tag{2.8}$$

由上式知，在金屬表面傳播的波向量將大於入射光的波向量；如 Fig. 2.2 所示，為入射光與金屬表面波向量沿 x 方向的色散關係曲線之比較，金屬表面電漿的色散曲線位於在入射光色散曲線的右側，因此，對於任何單純一道帶有 ω 頻率的入射光，將無法激發表面電漿子。另外，由(2.7)式也可以看出，表面電漿電磁場沿 z 方向的波向量，無論在介電物質中或是在金屬中都是虛數，因此，如 Fig. 2.3 所示表面電漿波向量在兩者沿 z 方向上，將呈現指數形式遞減的瞬逝波 (evanescent wave) 方式傳播。

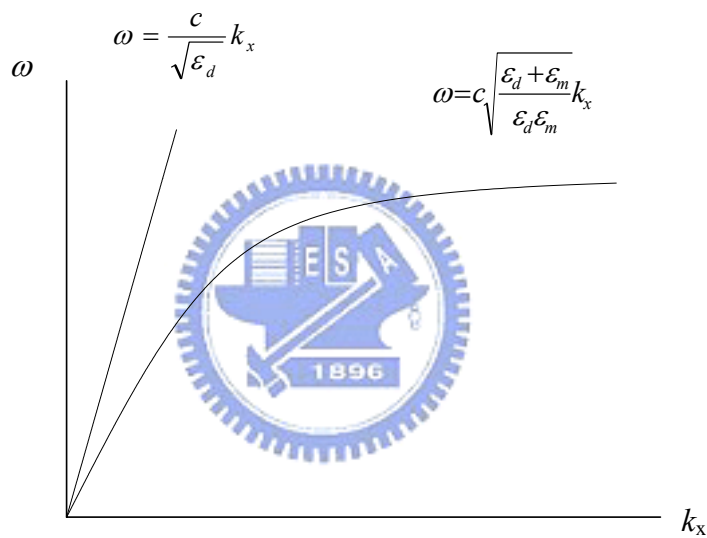


Fig. 2.2 入射光與金屬表面波向量沿 x 方向的色散關係曲線。

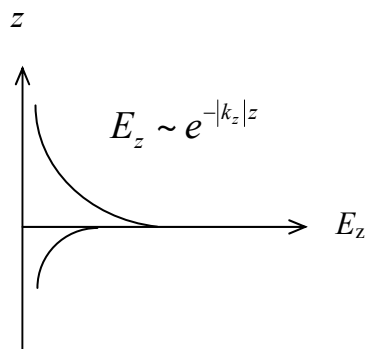


Fig. 2.3 表面電漿電磁場沿 z 方向的波向量。

2.2.2 表面電漿激發方式：

由以上的探討可知，入射光直接入射在金屬表面時並無法滿足激發表面電漿波的條件，因此必須藉由一輔助工具來改變入射光在金屬中傳播的速度，使得光波有可能與金屬之表面電漿耦合，進而激發表面電漿波。目前常用的輔助工具有光柵式(grating)和稜鏡式(prism)這兩種耦合器，分別說明如下：

(a) 光柵式

光柵式早在 20 世紀初，就由 Wood 所提出，其結構如 Fig. 2.4 所示；當光波入射在刻有光柵之規則條紋的金屬表面時，光子便獲得一額外動量 $|G|$ ， $|G|$ 可表示為：

$$|G| = \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (2.9)$$



其中 Λ 是光柵的週期。如 Fig. 2.5 所示，若光子與表面電漿波之動量差恰好等於 $|G|$ 時，即滿足下面的式子：

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta \pm w |G| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_d \epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m}}, \quad w = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.10)$$

其中 w 為正整數，此時光波便可激發金屬與介電物質界面的表面電漿波。

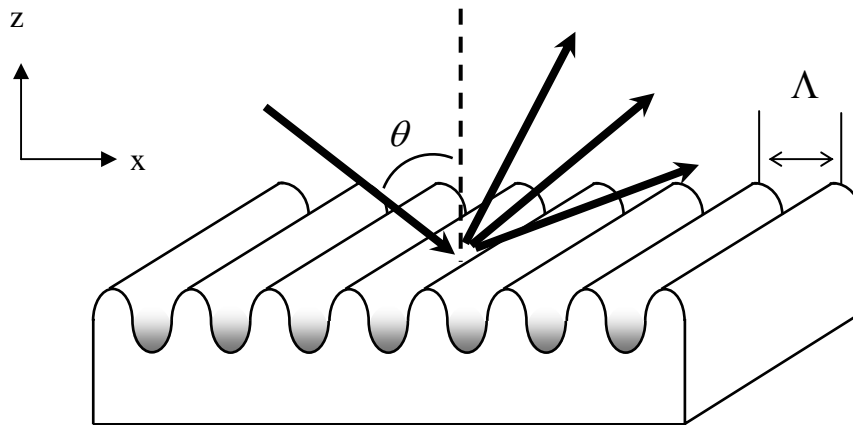


Fig. 2.4 利用光柵激發表面電漿波的結構。

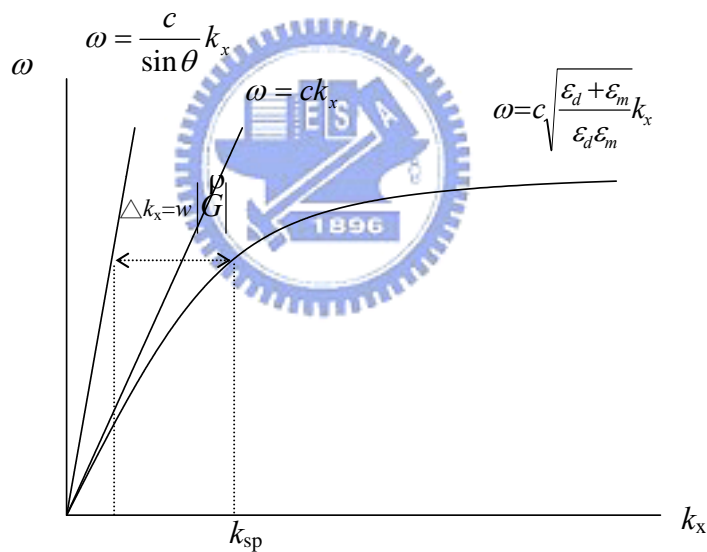


Fig. 2.5 光柵結構的入射光與金屬表面的波向量沿 x 方向的色散關係曲線圖。

(b) 稜鏡式

利用稜鏡來激發表面電漿波的方式又可以分成 Otto 組態[14]和 Kretschmann 組態[15]兩種型式；Otto 組態是 Otto 在 1968 年所提出來的，如 Fig. 2.6 所示，他的結構主要是由稜鏡-空氣-金屬所構成。Kretschmann 組態是 Kretschmann 在 1971

年所提出來的，如 Fig. 2.7 所示，他的結構主要是由稜鏡-金屬-空氣所構成。兩者所使用的方法是利用光波由光密介質進入光疏介質且產生全反射現象時，光波會以隨距離呈指數衰減的形式進入介電物質，來調整入射到金屬與介電物質界面之光波的相位速度，進而達到激發表面電漿波的條件。Fig. 2.8 為加入稜鏡後的入射光與金屬表面的波向量沿 x 方向的色散關係曲線圖；當入射角在某一角度時，入射光將可以激發金屬與介電物質界面的表面電漿波，而此角度即稱為表面電漿共振角。

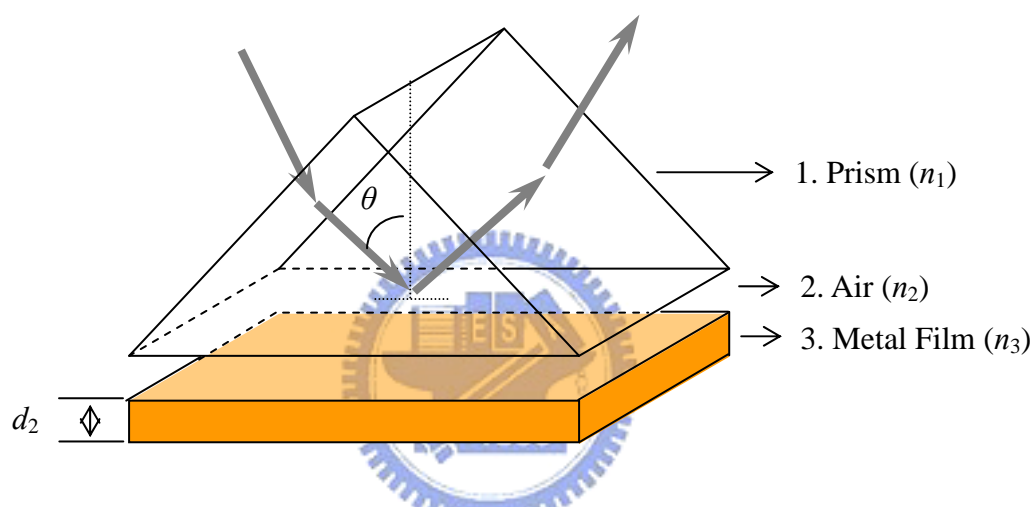


Fig. 2.6 Otto 組態裝置。

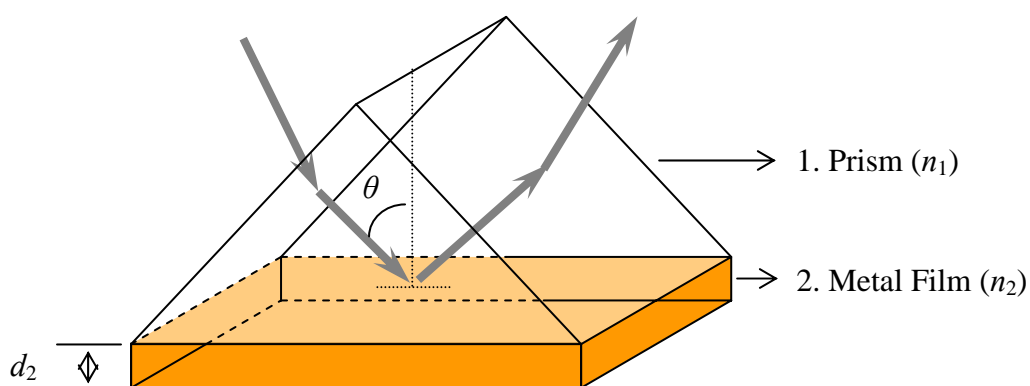


Fig. 2.7 Kretschmann 組態裝置。

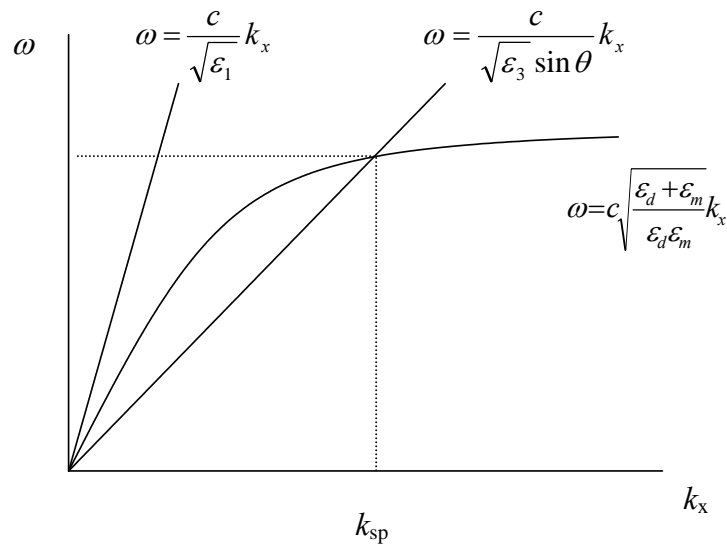


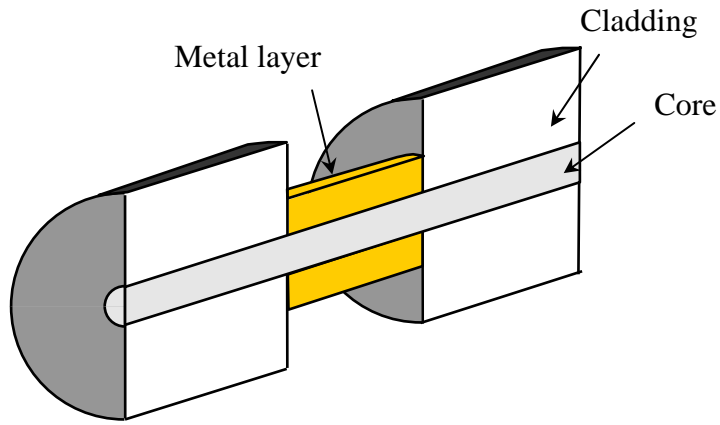
Fig. 2.8 加入稜鏡後的入射光與金屬表面的波向量沿 x 方向的色散關係曲線圖。



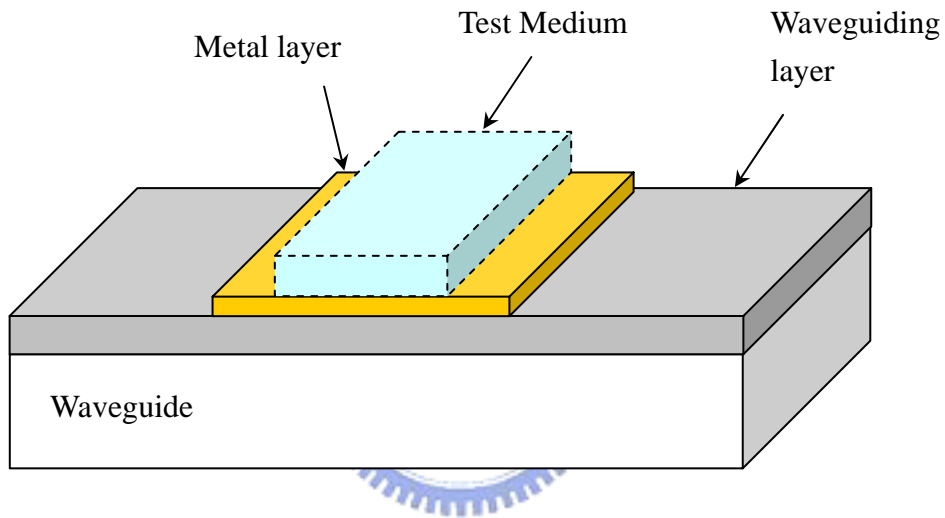
至目前為止，利用上述之原理來產生表面電漿波的結構，陸續地也發展出光纖和光波導兩種型式[16~17]，其如 Fig. 2.9(a)、(b)所示。光纖的結構主要是將外殼(cladding)剝除一部份，並在剝除部份直接鍍上一層金屬層，而當入射角以表面電漿共振角入射至此部份時，則表面電漿波將被激發；一般在光纖的結構上，為了能夠達到多次全反射的目的，所以在核心上會鍍上厚度較薄的金屬層。

2.2.3 表面電漿共振裝置之應用的量測方式：

瞭解激發表面電漿波的方式後，接著說明表面電漿共振裝置之應用的測量方式。如 Fig. 2.10~2.11 所示，當金屬表面電漿波被激發時，其 p-偏振光的反射光強度和相位會隨著入射角與入射光源之波長作極劇烈的變化；因此目前有關表面電漿共振偵測的研究，其主要就是以這些特性的變化，將其應用在生物科技、環境、化學、光調變器的製作、光譜儀、薄膜測厚儀等之研究上[18~22]。



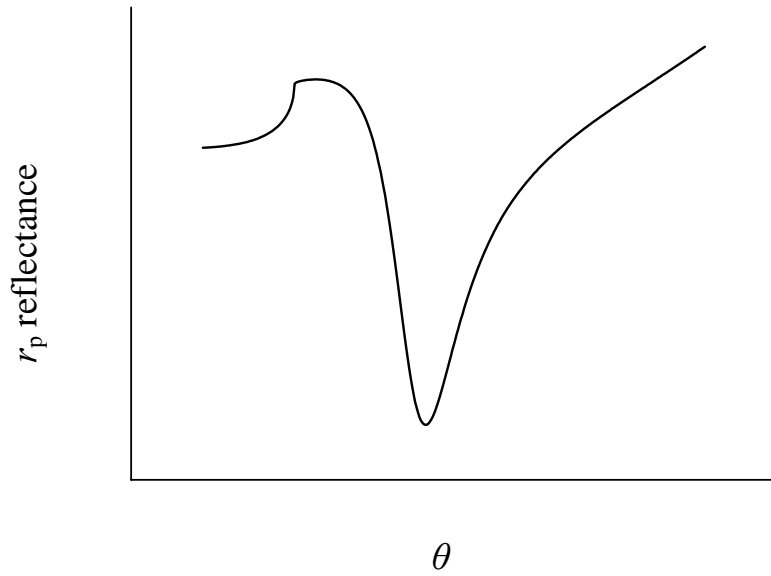
(a) 光纖型式。



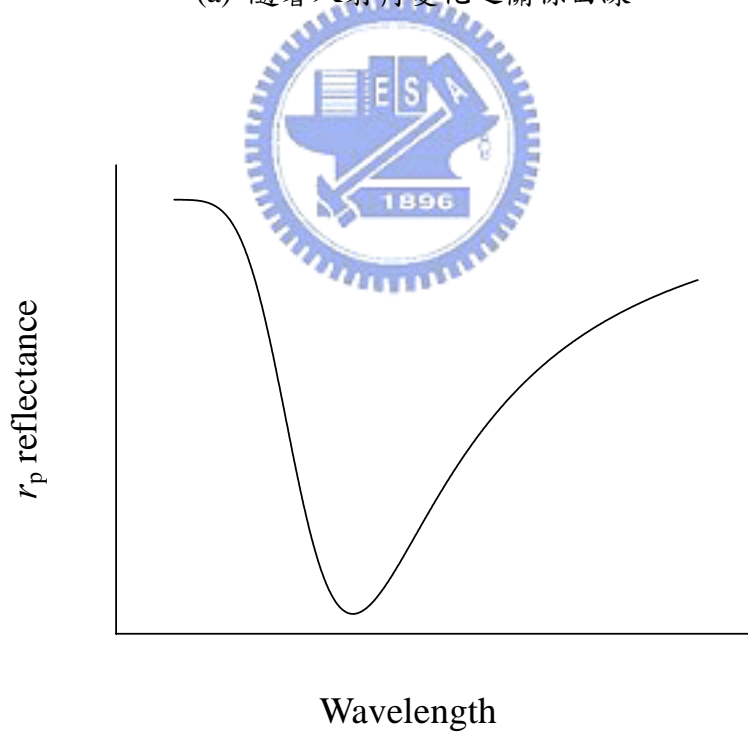
(b) 光波導型式。

Fig. 2.9 激發表面電漿波的結構。

應用 p-偏振光的反射光強度之量測，主要是藉由待測介質的折射率有變化時，其反射光強度的表面電漿共振角和共振波長亦會跟隨改變，所以藉由測量共振角和共振波長的變化，即可估算出相關物理量的變化。至於 p-偏振光的反射相位變化之量測，則是將入射角固定在表面電漿共振角下，當待測的相關物理參數有變化時，則相位會有劇烈的變化，因此藉由相位變化之量測即可推算出相關的物理參數值。

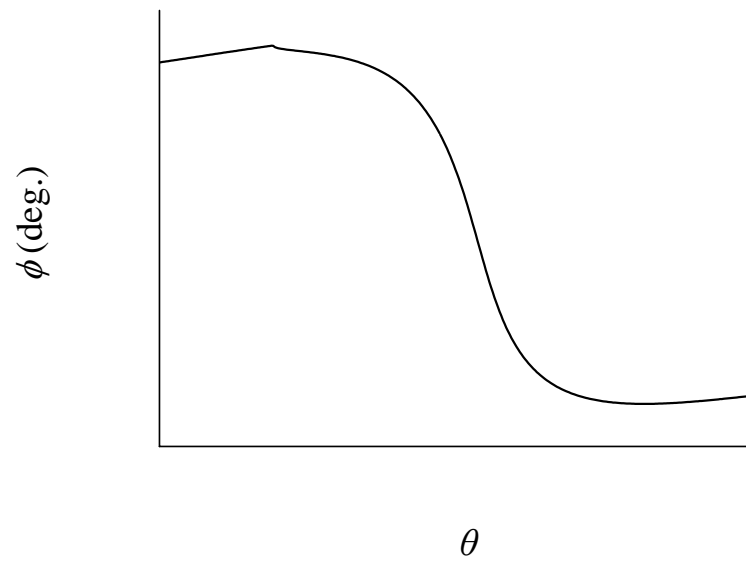


(a) 隨著入射角變化之關係曲線。

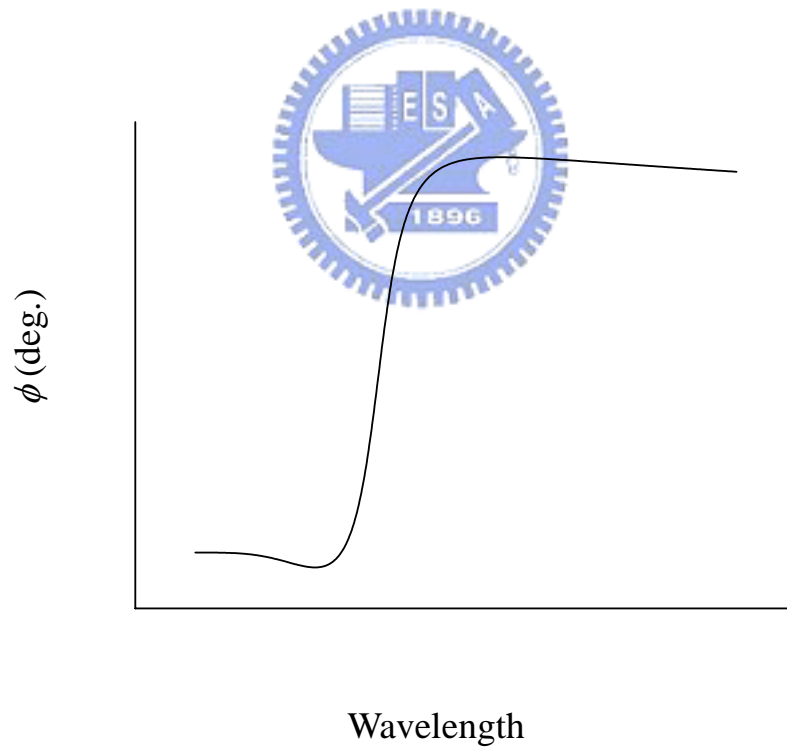


(b) 隨著入射光源波長變化之關係曲線。

Fig. 2.10 SPR 產生 p-偏光的反射光強度變化之關係曲線。



(a) 隨著入射角變化之關係曲線。



(b) 隨著入射光源波長變化之關係曲線。

Fig. 2.11 SPR 產生 p-偏光的相位變化之關係曲線。

2.3 共光程外差干涉術

2.3.1 一般外差干涉術

傳統干涉術是由兩束頻率相同的雷射光相互疊加而產生干涉條紋，此干涉條紋並不隨著時間變化，所以是空間的函數；而外差干涉術則是由兩束頻率稍微不同的雷射光疊加產生干涉信號，此干涉信號與傳統干涉條紋最大不同在於，此干涉信號是跟隨著時間與待測物所引進的相位差而變化。

假設兩光波的電場形式分別為：

$$E_1(t) = A_1 \exp(i\omega_1 t), \quad (2.11)$$

與

$$E_2(t) = A_2 \exp[i(\omega_2 t + \phi)], \quad (2.12)$$



其中， A_1 和 ω_1 為兩光之振幅與角頻率， ϕ 為兩干涉光束間之相位差。當兩光波相互重疊時，根據重疊原理，可得光強度之表示式如下：

$$\begin{aligned} I(t) &= |E_1 + E_2|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega t + \phi) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中， $\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ 。由(2.13)式中可知，當 $I_0 = I_1 + I_2$ ，對比度 $V = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}$ ，則上

式可寫成：

$$I(t) = I_0[1 + V \cos(\omega t + \phi)]. \quad (2.14)$$

而外差干涉術即如前所述，為兩個具有頻差的光波，根據重疊原理 (superposition principle) 疊加後所產生干涉的現象：拍(beat)。此頻率就是兩個光波的頻率差，稱為拍頻。

由(2.14)式可知，所要解析的信號頻率就是拍頻，同時要測量的相位差則被記載在拍頻信號的相位裏；因此，只要利用電子電路處理技術（如相位計或鎖相放大器等）將此信號與參考信號相比較，則相位差 ϕ 即可被解析出來。

2.3.2 使用電光晶體調制器的外差光源

在外差干涉術中，最主要是在兩干涉光之間引入一個差頻，而此差頻可以藉由移頻的機制達成。一般移頻的方式包含：

- (a) 機械式移頻器 (mechanical type): 其包括旋轉檢偏板法[23]、旋轉波片法[24]及移動繞射光柵法[25]等。
- (b) 電子式移頻器 (electrical type): 其包括聲光晶體調制器[26]、光彈調制器[27]、Zeeman laser[28]及電光晶體調制器[29]等。

目前移頻的技術大都使用電子式，其目的是為了避開機械式所引起之震動、轉動等的誤差。本研究所使用的外差光源，即是以電光晶體作為移頻器，其原理是隨著外加電壓的不同，出射光的相位延遲度(phase retardation)會跟隨著改變，當電光晶體的相位延遲度與外加電壓一次方成正比時，此稱為一次電光效應(Pockels effect)；當與外加電壓平方成正比時，此稱為二次電光效應(Kerr effect)；本研究的電光晶體屬於一次電光效應，其操作原理與產生的外差光源如下所述：

當外加電壓於 KDP 電光晶體時，且外加電壓方向在 z 軸時，則入射光通過

晶體後所產生垂直偏振光和水平偏振光之間的相位延遲可以寫成：

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l + \frac{\pi}{\lambda} \frac{r_{63} n_o^3}{2} \frac{V_z}{h} l \\ &= \Gamma_0 + \frac{\pi}{V_{\lambda/2}} V_z,\end{aligned}\quad (2.15)$$

其中 λ 為入射光波長； $V_z = E_z h$ 為外加電壓， E_z 為外加的電場； n_o 與 n_e 分別為尋常光與非尋常光的折射率； r_{63} 為 KDP 材料的線性電光係數； l 與 h 分別為晶體的長度與厚度； Γ_0 為未加電壓時的相位延遲； $V_{\lambda/2} = 2\lambda h / r_{63} n_o^3 l$ 為半波電壓。由於 $V_{\lambda/2}$ 與 h 成正比，因此可以盡量減小晶體的厚度 h ，來降低半波電壓。另外，此電光晶體相位延遲的 Jones matrix [30] 可寫成：

$$EO(\Gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix} \cdot \img alt="Logo of National Sun Yat-sen University (NSU) featuring a gear, a book, and a ship, with the text 'ESU' and '1896'." data-bbox="400 432 590 567"/> \quad (2.16)$$

如 Fig. 2.12 所示，以鋸齒狀之電壓信號 $V_z(t)$ 來驅動此電光晶體[31]。假設其振幅為晶體的半波電壓，角頻率為 $\omega = 2\pi f$ ，則其數學形式可表示為：

$$V_z(t) = \frac{2V_{\lambda/2}}{T}(t - mT) + (V_b - V_{\lambda/2}), \quad (2.17)$$

在此 $mT \leq t \leq (m+1)T$ ， m 為整數， $T=1/f$ 為電壓信號的週期。將此電壓信號代入 (2.15) 式後，可得到隨時間變化的相位延遲：

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{T}(t - mT) + \pi \left(\frac{V_b - V_{\lambda/2}}{V_{\lambda/2}} \right) + \Gamma_0. \quad (2.18)$$

其後兩項為初始相位延遲，其值可經由調整適當的直流電壓 V_b 使它變為零。

因此，電光晶體相位延遲的 Jones matrix 可改寫為：

$$EO(\Gamma) = \begin{pmatrix} e^{-im\pi} e^{\frac{i2\pi f}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{im\pi} e^{\frac{i2\pi f}{2}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha t}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

如Fig. 2.13 所示，當一偏振方向為 θ_p 之線性偏振光，通過此電光晶體時，其電場形式可表示為：

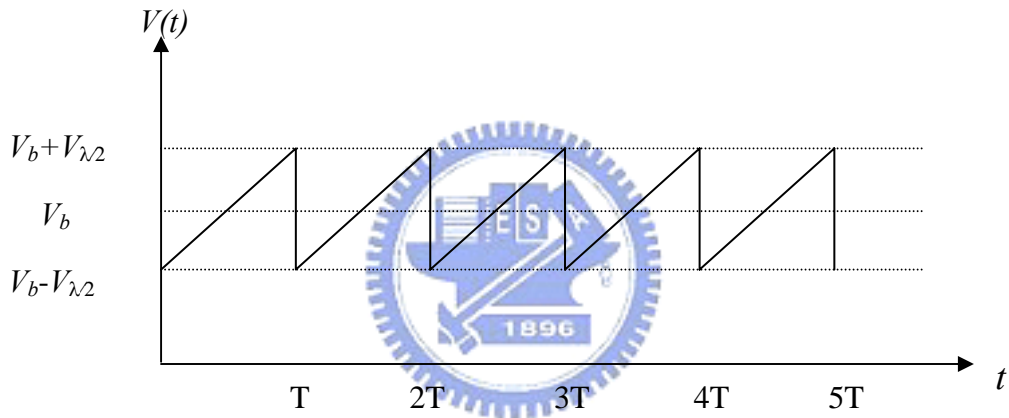


Fig. 2.12 鋸齒波之電壓信號。

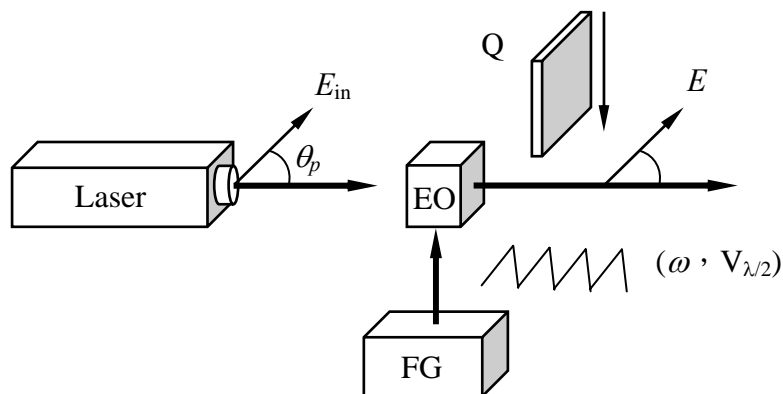


Fig. 2.13 外差光源之裝置。

$$\begin{aligned}
E &= EO(\omega t) \cdot E_{in} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_p e^{i\omega t/2} \\ \sin \theta_p e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t}, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

其中， ω_0 為光角頻率。由(2.20)式我們可發現，在這種驅動方式下，電場的 x 分量與 y 分量間將產生 ω 的角差頻，此即所謂的外差光源。

在測量的系統中，旋光外差光源也經常被用來當作測試的光源，其結構亦如 Fig. 2.13 所示。在 Fig. 2.13 的裝置中加入四分之一波片 Q，則線性外差光源經過此快軸與水平軸夾 45° 的四分之一波片後，其 Jones vector 可表示為：

$$\begin{aligned}
E &= Q(45^\circ) \cdot E_{in} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_p e^{i\omega t/2} \\ \sin \theta_p e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_p \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\omega t/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_p \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\omega t/2}. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

上式中由於左旋光與右旋光之間具有 ω 的角頻差，因此稱之為旋光外差光源。

2.3.3 共光程外差干涉儀

共光程外差干涉儀的基本架構如 Fig. 2.14 所示。當一線性偏振光經電光晶體 EO 調制變成為外差光源後，此外差光源以入射角 θ 入射至待測系統，反射後通過穿透軸與 x 軸成 45° 的檢偏板 AN，最後到達光偵測器 D。此時在光偵測器 D 上的電場型式 E_t 可表示為：

$$\begin{aligned}
E_t &= AN_t(45^\circ) \cdot S \cdot E_{in} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_p} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_s} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\delta_p - \delta_s}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t},
\end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 S 為待測系統的 Jones 矩陣。因此，在光偵測器 D 上的光強度可表示為：

$$I_t = |E_t|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t + \phi)], \tag{2.23}$$

其中 I_t 為測式信號； $\phi = \delta_p - \delta_s$ 是待測系統所引進的相位差。另外，當電子訊號被帶通濾波器濾波後則形成為一參考信號，其形式可表示為：

$$I_r = \frac{1}{2} (1 + \cos \omega t), \tag{2.24}$$



其中 I_r 為參考信號。將參考信號 I_r 和測試信號 I_t 送入相位計 PM 後，則可精確地測出相位差 ϕ 。在此相位差 ϕ 與待測系統的待測量有關；因此，藉由測量出相位差 ϕ 值，進而能估算出相關待測系統的待測量。

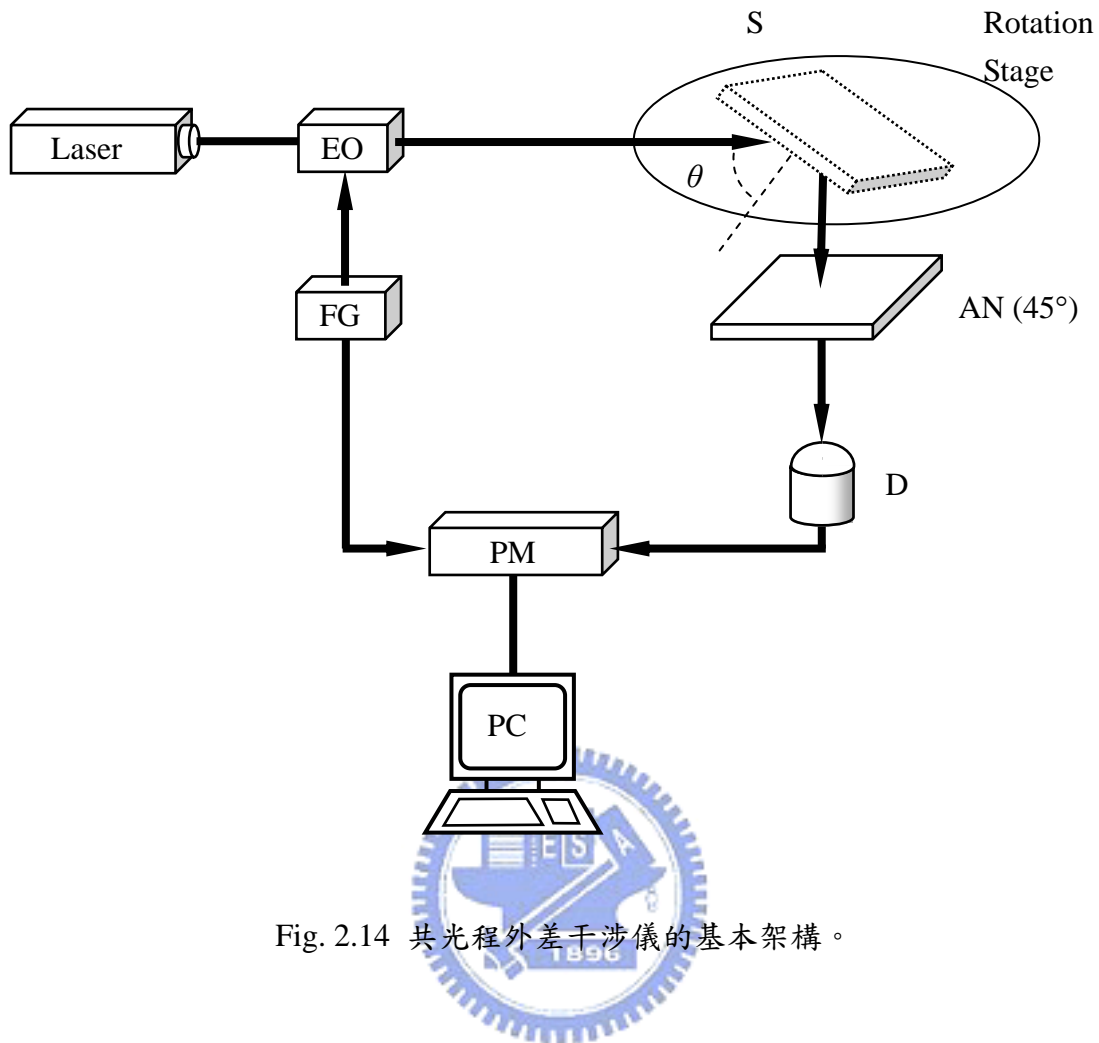


Fig. 2.14 共光程外差干涉儀的基本架構。

2.3.4 共光程外差干涉儀的測量誤差量分析

在共光程外差干涉儀中，有一些因素將會影響到測量的精確度，在此架構中，主要引起測量的誤差包含有外差光源的偏振旋轉誤差和偏極混合誤差這兩種。因此在這一小節中，將針對這兩個誤差量進行探討與分析。

(a) 偏振旋轉誤差[32,33]:

偏振旋轉誤差也可稱作二次諧波誤差 (second harmonic error)。引起的原因是外差光源的兩正交偏振光p-偏光與s-偏光與實驗室座標有些偏移差。如Fig. 2.15 所示，當兩正交偏振光與x或y軸之間有一旋轉角度 θ_R 差別時，x軸上會出現

兩個頻率不同的偏振分量，y軸上亦會有兩個頻率不同的偏振分量。亦即p-與s-偏光不再是單一頻率。假設兩正交偏振光與實驗室座標之間有 θ_R 的偏移量，則在如Fig. 2.14 中的參考信號之光強度可表示如(2.24)式所示；在測試信號的光路中，光線經過測試系統引進相位差之後，再通過穿透軸為 45° 的檢偏板AN，此時，在光偵測器D上所測到的光的強度可表示為[34]:

$$I_t = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{\cos^2 2\theta_R \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \cos(\omega t + \phi')], \quad (2.25)$$

其中

$$\phi' = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \phi}{\cos 2\theta_R} \right). \quad (2.26)$$

由(2.25)式和(2.24)式可知，測試信號相對於參考信號的相位差為 ϕ' ，此值不再單純只有待測系統所引進的相位差 ϕ ，只有在沒有偏振旋轉的情況下 $\theta_R = 0$ 時， ϕ' 才會等於 ϕ 。所以，在有偏振旋轉量存在的情況下，相位差的誤差量可被寫成:

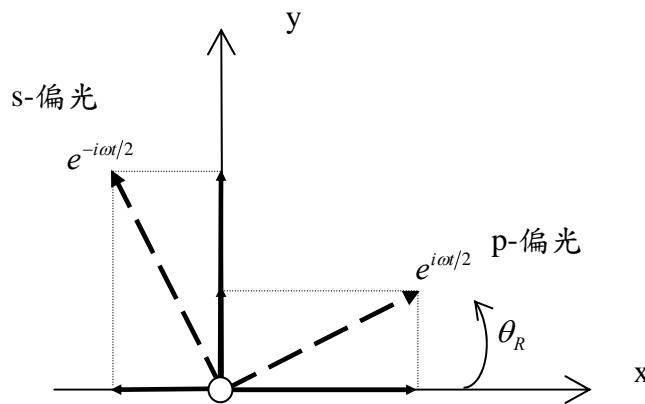


Fig. 2.15 偏振旋轉示意圖。

$$\Delta\phi_R = \phi' - \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \phi (\sec 2\theta_R - 1)}{1 + \sec 2\theta_R \tan^2 \phi} \right). \quad (2.27)$$

將 $\Delta\phi_R$ 、 ϕ 與 θ_R 之間的關係以 Fig. 2.16 來表示，可發現誤差量 $\Delta\phi_R$ 是一個週期函數，當相位差 ϕ 經過一個 2π 的週期時，誤差量 $\Delta\phi_R$ 已經過了兩個週期，因此，才有二次諧波誤差的稱呼。當偏振旋轉 θ_R 的情況越大時，誤差量 $\Delta\phi_R$ 也越大，然而這是在架設系統時，校正與準直的失誤所帶來的，只要細心的調整各個元件，此項誤差就可減至最低。圖中有一些特別的相位差值 ϕ ，例如 $\pm 180^\circ$ 、 $\pm 90^\circ$ 與 0° 的地方，誤差量為 0，也就是說，若設計一待測系統使測試相位差為 0° 、 $\pm 90^\circ$ 與 $\pm 180^\circ$ 時，可以有最小的誤差量。

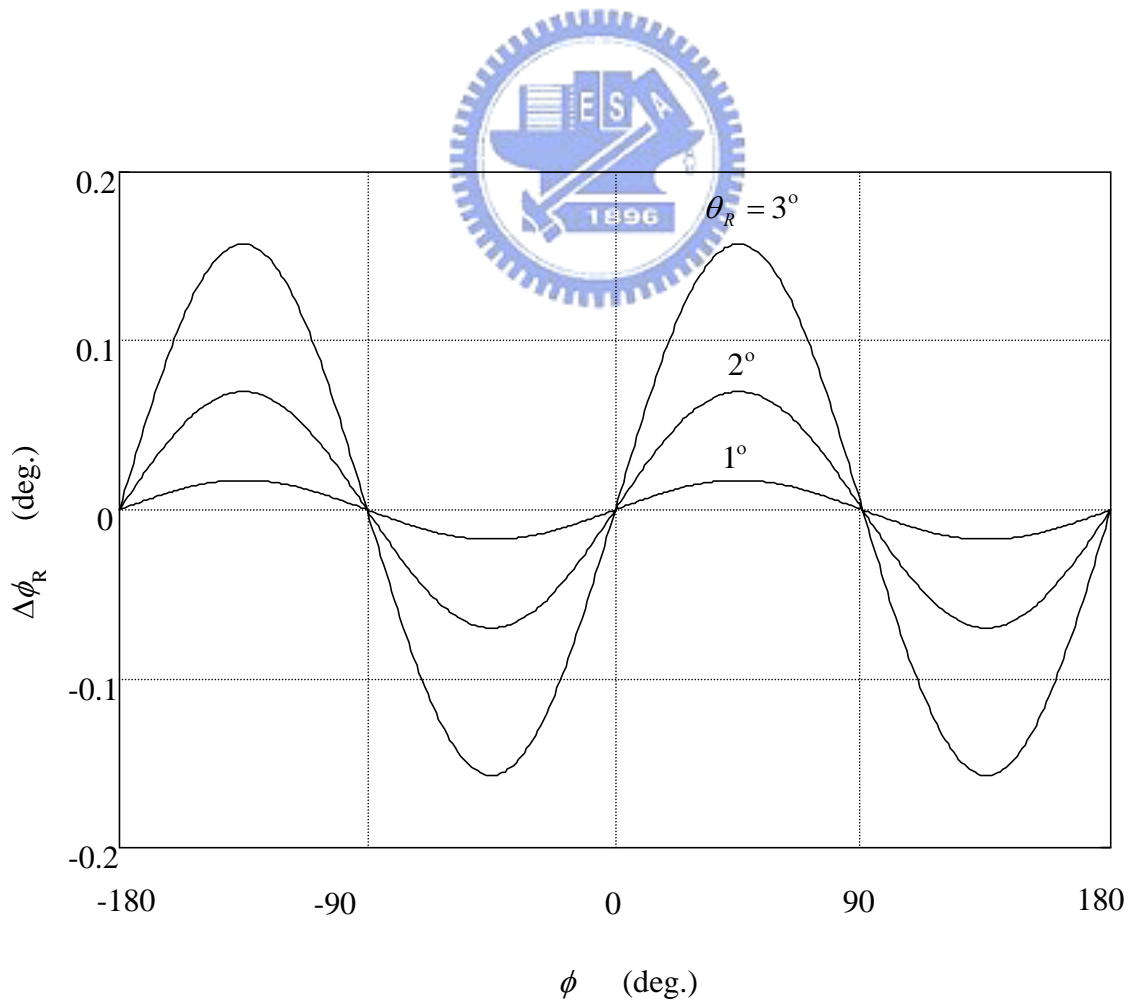


Fig. 2.16 偏振旋轉誤差 $\Delta\phi_R$ 、 ϕ 與 θ_R 之間的關係。

(b) 偏極混合誤差[33,35]:

偏極混合誤差(polarization mixing)主要是光線通過如檢偏板與偏極分光鏡等偏光元件時，由於光學元件的誤差而會有偏極混合的現象發生。亦即在實驗室座標中的 x 軸，除了有主要 x 方向的偏極光 (p-) 外，還會有一小部分 y 方向的偏極光 (s-) 會耦合到 x 軸上；同樣的，在實驗室座標中的 y 軸，除了有主要 y 方向的偏極光 (s-) 外，還會有一小部分 x 方向的偏極光 (p-) 會耦合到 y 軸上。假設 $A = |A|e^{i\phi_A}$ 與 $B = |B|e^{i\phi_B}$ 分別表示為 x 軸方向與 y 軸方向的主要偏極振幅； $\alpha = |\alpha|e^{i\phi_\alpha}$ 與 $\beta = |\beta|e^{i\phi_\beta}$ 表示為在 y 方向與 x 方向的混合雜訊的偏極振幅。所以在測試信號光路經過待測物與檢偏板之後的光強度可表示為[34]:

$$I_t = |A|^2 + |B|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2(|A||\alpha| + |B||\beta|)\cos(\phi) + 2\sqrt{[(|A||B| + |\alpha||\beta|)\cos(\phi) + |A||\beta| + |B||\alpha|]^2 + (|A||B| - |\alpha||\beta|)^2 \sin^2(\phi)} \cos(\omega t + \phi'), \quad (2.28)$$

其中

$$\phi' = \tan^{-1} \left[\frac{(|A||B| - |\alpha||\beta|)}{(|A||\beta| + |B||\alpha| + (|A||B| + |\alpha||\beta|))} \right] - \phi, \quad (2.29)$$

ϕ 是待測的相位差， ϕ' 可由(2.24)與(2.28)式之相位比較得到。因此，由偏極混合所引起的相位誤差為:

$$\Delta\phi_m = \phi' - \phi. \quad (2.30)$$

假設 $|A| = |B|$ ， $|\alpha| = |\beta|$ 且 $|\alpha|/|A| = 0.001$ 與 0.005 的情況下，則 $\Delta\phi_m$ 與 ϕ 的關係如 Fig. 2.17 所示。由此圖可以發現混合雜訊的偏極振幅越小時，偏振混合

誤差也越小；其次在相位差 ϕ 為 $\pm 180^\circ$ 與 0° 的地方，其引起的偏振混合誤差量為0；也就是說，當設計一個待測系統使測試的相位差為 0° 與 $\pm 180^\circ$ 時，則引起的偏振混合誤差量可以忽略不計。

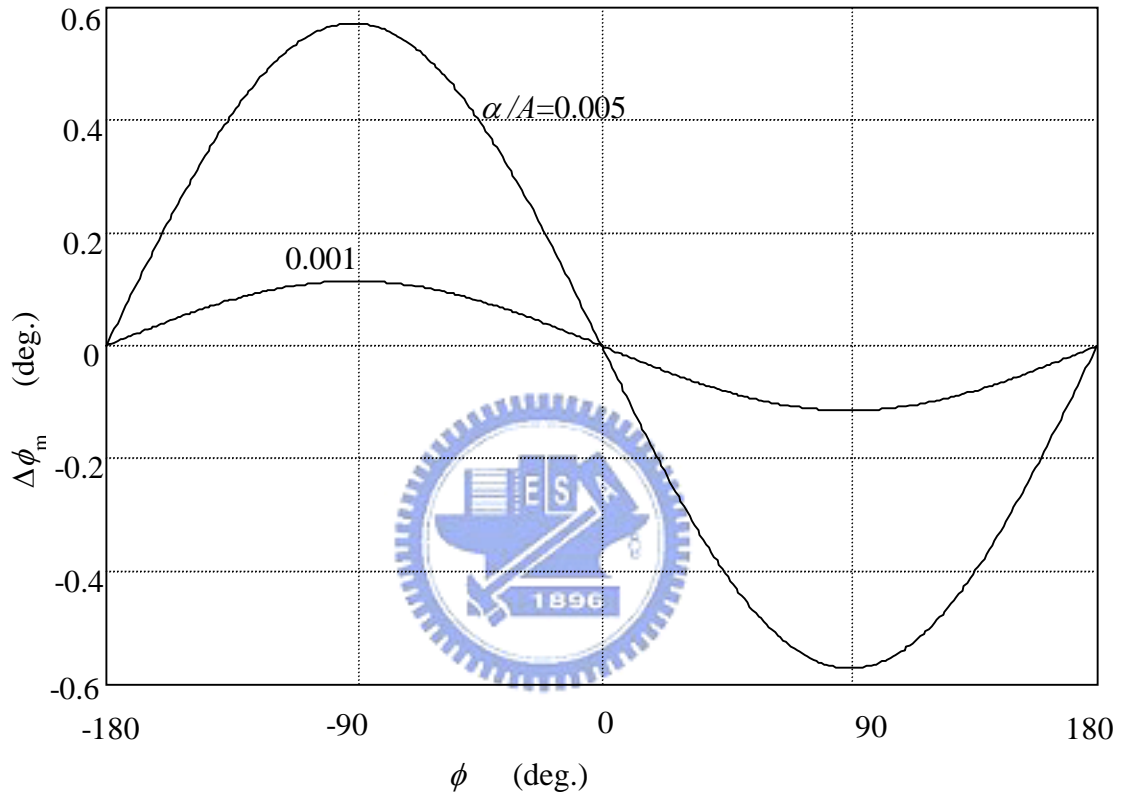


Fig. 2.17 偏極混合誤差 $\Delta\phi_m$ 與 ϕ 的關係圖。

2.4 表面電漿共振外差干涉儀基本架構

瞭解表面電漿共振所引發的特性與共光程外差干涉儀的原理後，我們將表面電漿共振裝置與共光程外差干涉儀結合而構成一個基本的表面電漿共振外差干涉儀，其如Fig. 2.18所示。Fig. 2.18中，一線性偏振光經電光晶體EO调制變成為外差光源後，此外差光源以表面電漿共振角 θ_{sp} 的角度入射至表面電漿共振裝置底

面，反射後通過穿透軸與x軸成 45° 的檢偏板AN，最後到達光偵測器D形成一測試信號。另外，當電子訊號被帶通濾波器濾波後則形成為一參考信號。將參考信號和測試信號送入相位計PM後，則可精確地測出相位差 ϕ 。在此相位差 ϕ 與待測物理量相關，例如：微小角度、波長、濃度、折射率等等；因此，藉由測量出相位差 ϕ 值，進而能估算出相關的物理量。

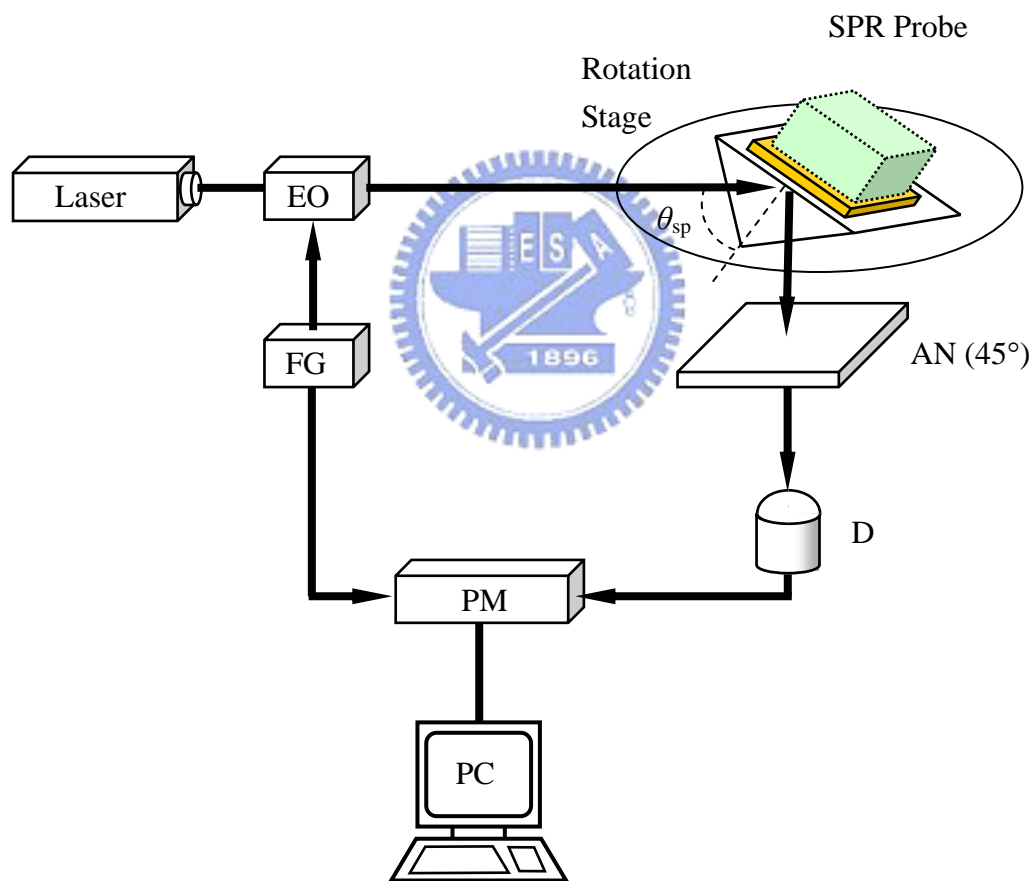


Fig. 2.18 表面電漿共振外差干涉儀。

2.5 小結

在本章中首先說明了表面電漿共振的基本原理與其特性。其次說明一般外差干涉術的原理及外差光源的調制方式，與其共光程外差干涉儀的工作原理；而針對共光程外差干涉儀所引起的測量誤差量也進行探討與分析。由於表面電漿共振裝置提供了非常靈敏的特性，而共光程外差干涉儀可以提供精確且不受環境干擾的測量相位差之裝置，因此結合兩者構成的表面電漿共振外差干涉儀將可以應用在許多不同科學研究的領域上，同時此架構也具有裝置簡單、操作容易、即時、快速、避免環境干擾且具有高解析度的優點。



參考文獻

1. I. Stemmler, A. Brecht, and G. Gauglitz, "Compact surface plasmon resonance-transducers with spectral readout for biosensing applications," *Sensors and Actuators B* **54**, 98-105 (1999).
2. X. Yu, D. Wang, D. Wang, Y. J. H. Ou, Z. Yan, Y. Zibo, Y. Dong, W. Liao, and X. S. Zhao, "Micro-array detection system for gene expression products based on surface plasmon resonance imaging," *Sensors and Actuators B* **91**, 133-137 (2003).
3. P. Pfeifer, U. Aldinger, G. Schwotzer, S. Diekmann, and P. Steinrucke, "Real time sensing of specific molecular binding using surface plasmon resonance spectroscopy," *Sensors and Actuators B* **54**, 166-175 (1999).
4. W. B. Lin, J. M. Chovelon, and N. J. Renault, "Fiber-optic surface-plasmon resonance for the determination of thickness and optical constants of thin metal films," *Appl. Opt.* **39**, 3261-3265 (2000).
5. 邱國斌、蔡定平，〈左手材料奈米平板的表面電漿量子簡介〉，〈〈光電工程〉〉，**83** 期，8-20 (2003).
6. R. W. Wood, "On a remarkable case uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum," *Phil. Magm.* **4**, 396-402 (1902).
7. U. Fano, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 213 (1941).
8. A. Hessel, and A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings," *Appl. Opt.* **4**, 1275-1298 (1965).
9. W. C. Tan, T. W. Preist, J. R. Sambles, and N. P. Wanstall, "Flat surface-plasmon-polariton bands and resonant optical absorption on short-pitch metal gratings," *Phys. Rev. B* **59**, 12661-12666 (1999).

10. J. A. Porto, F. J. García-Vidal, and J. B. Pendry, "Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2845-2848 (1999).
11. W. C. Tan, T. W. Preist, and R. J. Sambles, "Resonant tunneling of light through thin metal films via strongly localized surface plasmons," *Phys. Rev. B* **62**, 11134-11138 (2000).
12. E. Hecht, "*Optics*," Addison-Wesley, 3rd ed., ch. 4. (1998).
13. H. Raether, "*Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*," Springer-Verlag, Berlin, 118-119 (1998).
14. A. Otto, "Excitation of surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection," *Z. Physik.* **216**, 398-410 (1968).
15. E. Kretschmann, "The determination of the optical constants of metals by excitation of surface plasmons," *Z. Phys.* **241**, 313-324 (1971).
16. A. Diez, M. V. Andres, and J. L. Cruz, "In-line fiber-optic sensors based on the excitation of surface plasma modes in metal-coated tapered fibers," *Sensors and Actuators B* **73**, 95-99 (2001).
17. J. Ctyroky, J. Homola, P. V. Lambeck, S. Muss, H. J. W. M. Hoekstra, R. D. Harris, J. S. Wilkinson, B. Usievich, and N. M. Lyndin, "Theory and modeling of optical waveguide sensors utilising surface plasmon resonance," *Sensors and Actuators B* **54**, 66-73 (1999).
18. E. Fontana, R. H. Pantell, and M. Moslehi, "Surface plasmon immunoassay," *Appl. Opt.* **29**, 4694-4704 (1990).
19. G. T. Sincerbox, and J. C. Gordon, "Small fast larger-aperture light modulator using attenuated total reflection," *Appl. Opt.* **20**, 1491-1494 (1981).
20. S. Kaya, T. Sayan, "Temperature effect on surface plasmon resonance: design consideration for an optical temperature," *Journal of Lightwave Technology.* **21**, 805-814 (2003).

21. X. Chen, M. C. Davies, C. J. Roberts, K. M. Shakesheff, S. J. B. Tendler, P. M. Williams, and J. Davies, "Combined surface plasmon resonance and scanning force microscope instrument," *J. Vac. Sci. Technol. B* **14**, 1582-1586 (1996).
22. H. Kitajima, K. Hieda, and Y. Suematsu, "Thickness measurement of ultrathin films on metal substrates using ATR," *Appl. Opt.* **19**, 3106-3109 (1980).
23. J. C. Suits, "Magneto-optical rotation and ellipticity measurements with a spinning analyzer," *Rev. Sci. Instrum.* **42**, 19-22 (1971).
24. M. P. Kothiyal and C. Delisle, "Optical frequency shifter for heterodyne interferometry using counterrotating wave plates," *Opt. Lett.* **9**, 319-321 (1984).
25. W. H. Stevenson, "Optical frequency shifting by means of a rotating diffraction grating," *Appl. Opt.* **9**, 649-652 (1970).
26. M. G. Gazalet, M. Raveg, F. Haine, C. Bruneel, and E. Bridoux, "Acousto-optic low frequency shifter," *Appl. Opt.* **33**, 1293-1298 (1994).
27. J. C. Kemp, "Piezo-optical birefringence modulators: new use for a long known effect," *J. Opt. Sci. Am.* **59**, 950-954 (1969).
28. H. Takasaki, N. Umeda, and M. Tsukiji, "Stabilized transverse Zeeman laser as a new light source for optical measurement," *Appl. Opt.* **19**, 435-441 (1980).
29. D. C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, "Simple two frequency laser," *Prec. Eng.* **18**, 161-163 (1996).
30. A. Yariv and P. Yeh, "*Optical waves in crystals*," John Wiley & Sons, Inc., Chap.5, 121-154 (1984).
31. 蘇德欽, 國科會專題研究計畫成果報告『外差干涉術用的新型移頻器』, 計畫編號: NSC-82-0417-E009-346, (1994).
32. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic errors in laser heterodyne interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **4**, 1173-1176 (1993).

33. C. M. Wu and R. D. Deslattes, "Analytical modeling of the periodic nonlinearity in heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **37**, 6696-6700 (1998).
34. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Complex refractive-index measurement based on Fresnel's equations and the uses of heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **38**, 4047-4052 (1999).
35. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **14**, 91-98 (1992).

